Appunti analisi 1

Biagio Altruda Mastrorilli

October 17, 2024

Introduzione assiomatica dei *numeri reali*
Esiste un insieme $\mathbb{R}$, munito di due leggi di composizione interna, il + e il $\cdot$

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

e di una relazione d'ordine $\leq$, che verificano assiomi algebrici, assiomi di ordinamento e l'assioma di completezza.

Assiomi Algebrici di $\mathbb{R}$

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} : \; a + b = b + a$. (Commutatività della somma)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : \; (a + b) + c = a + (b + c)$ (Associatività della somma)
3. $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R} : \; a + 0 = a$ (Esistenza di un elemento neutro della somma)
4. $\forall a \in \mathbb{R}\, \exists a' \in \mathbb{R} : \; a + a' = 0$ (Esistenza di un opposto)
5. $\forall a, b \in \mathbb{R} : \; a \cdot b = b \cdot a$ (Commutatività del prodotto)
6. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : \; (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Associatività del prodotto)
7. $\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0$ tale che $\forall a \in \mathbb{R}\; a \cdot 1 = a$ (Esistenza di un elemento neutro del prodotto)
8. $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\exists\, a'' \in \mathbb{R}$ tale che $a \cdot a'' = 1$ (Esistenza di un reciproco)
9. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : \; (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (Proprietà distributiva)

Osservazioni:

1. Si dimostra che esiste un unico elemento neutro per il + ed esiste un solo elemento neutro per $\cdot$. Tali elementi si chiamano rispettivamente lo zero di $\mathbb{R}$ e l'unità di $\mathbb{R}$. Infatti per l'assioma 3) $\exists 0, 0 \in \mathbb{R} : \; \forall a \in \mathbb{R} a + 0 = a$, se $\exists\, 0' \in \mathbb{R} : \; \forall a \in \mathbb{R} a + 0' = a$, allora avremmo che $0' = 0 + 0' = 0$ ovvero $0 = 0'$. Analogamente per l'assioma 7) $\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0 : \; \forall a \in \mathbb{R}, \; a \cdot 1 = a$. Se fosse che $\exists\, 1'$, $1' \neq 0$ tale che $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1' = a$, allora $1' = 1 \cdot 1' = 1$. ■ Tale elemento si chiama l'uno di $\mathbb{R}$.

2. Si dimostra che se esiste un opposto di un numero reale, questo è unico. Ovvero per l'assioma 4) $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists a' \in \mathbb{R}:\ a + a' = 0$, tale a' è unico e si chiama l'opposto di a e si denota con $-a$. *Dimostrarlo.* Analogamente si verifica che esiste, ed è unico, il reciproco di un numero reale, ossia per l'assioma 8) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\exists\, a''$ tale che $a \cdot a'' = 1$. Tale a'' é unico e si chiama il reciproco di a, si denota con a^{-1} oppure $\frac{1}{a}$. *Dimostrarlo.*

3. In matematica si introducono le seguenti notazioni: se $a, b \in \mathbb{R}$, $a - b = a + (-b)$, se $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$. **Assiomi di ordinamento di** $\mathbb{R}$ $\leq$ é una relazione d'ordine su $\mathbb{R}$ compatibile con la struttura algebrica, ossia $\leq$ verifica i seguenti assiomi di ordinamento:

4. $\forall a \in \mathbb{R}:\ a \leq a$ (Riflessibilità)

5. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b, b \leq a:\ a = b$ (Antisimmetria)

6. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \leq b \leq c:\ a \leq c$ (Transitività)

7. $\forall a, b \in \mathbb{R}:\ a \leq b$ oppure $b \leq a$. (L'ordine è totale)

8. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b:\ a + c \leq b + c$ (Compatibilità della $\leq$ con la $+$)

9. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $0 \leq c:\ a \cdot c \leq b \cdot c$ (Compatibilità della $\leq$ con $\cdot$)

Definizione: Gli elementi di $\mathbb{R}$ si chiamano numeri reali. I numeri reali $a \in \mathbb{R}$ tali che $0 \leq a$ si dicono non negativi. I numeri reali $a \in \mathbb{R}$ tali che $a \leq 0$ si dicono non positivi. I numeri reali non negativi e diversi da 0 si dicono positivi. I numeri reali non positivi e diversi da 0 si dicono negativi.

Notazione: Se $a \in \mathbb{R}$, $0 \leq a$, $a \neq 0$ scriveremo $0 < a$. Se $a \in \mathbb{R}$, $a \leq 0$, $a \neq 0$ scriveremo $a < 0$.

Proposizione: $\forall a \in \mathbb{R}$ si ha che $a \cdot 0 = 0$. *Dimostrazione*: Sia $a \in \mathbb{R}$. Risulta che $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$, da cui $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Sommo ad entrambi i termini dell'uguaglianza l'opposto di $a \cdot 0$, e quindi:

$$-a \cdot 0 + a \cdot 0 = -a \cdot 0 + (a \cdot 0 + a \cdot 0) \implies$$

$$0 = -a \cdot 0 + a \cdot 0 + a \cdot 0 = 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0$$

Proprietà (Legge dell'annullamento del prodotto): Se $a, b \in \mathbb{R}$, tali che $a \cdot b = 0$ allora $a = 0$ oppure $b = 0$.

Dimostrazione Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a \cdot b = 0$. Supponiamo che $a \neq 0$, allora per l'assioma algebrico 8) esiste $a^{-1} \in \mathbb{R}$, tale che $a^{-1} \cdot a = 1$. Segue allora che

$$a \cdot b = 0 \implies a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$$

$$b = 1 \cdot b = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0$$

Analogamente se $b \neq 0$ si procede con lo stesso argomento arrivando a $a = 0$. ■

Osservazione:

1. Se $a \in \mathbb{R}, a \leq 0$, allora, $-a \leq 0$. Infatti se $0 \leq a$, sommando ad entrambi i termini della disequazione per $-a$, risulta che $-a+0 \leq -a+a$ ovvero $-a \leq 0$.

2. Se $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, allora $0 \leq b-a$.

3. Se $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, se $c \in \mathbb{R}$, $c \leq 0$ allora $b \cdot c \leq a \cdot c$.

4. $\forall a \in \mathbb{R}\, 0 \leq a \cdot a = a^2$. Segue che $0 \leq 1 \cdot 1 = 1$.

Definizione: Siano $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, si dice che A e B sono separati se $\forall a \in A$, $\forall b \in B : a \leq b$.

Assioma di Dedekind (Assioma di completezza): $\forall A, B \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$, separati, $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $\forall a \in A$, $\forall b \in B : \ a \leq c \leq b$.

Definizione: c si dice elemento di separazione tra A e B.

Definizione: Se $A, B \subset \mathbb{R}, A \neq 0, B \neq 0$, separati, si dice che A e B sono contigui se esiste un unico elemento di separazione tra A e B.

Definizione: $\mathbb{R}$ munito delle leggi di composizione, della somma e del prodotto e della relazione di totale ordine $\leq$, che verificano gli assiomi algebrici, di ordinamento e di completezza si chiama insieme dei numeri reali. Si dice che $\mathbb{R}$ è un corpo commutativo totalmente ordinato, completo.

Definizione: Sia $x \in \mathbb{R}$. Poniamo

$$|x| := \begin{cases} x \text{ se } 0 <= x \\ \\ -x \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$$

Il numero reale $|x|$ si chiama valore assoluto, o modulo, di x.

Proposizione: Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha:

1. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. $0 \leq |x|$

3. $|-x| = |x|$

4. $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$

5. $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Disuguaglianza triangolare)

6. $||x| - |y|| \leq |x-y|$

7. $|xy| = |x||y|$

8. Se $x \neq 0$, si ha $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ *Dimostrazione*: 4) $x, y \in \mathbb{R}, 0 \leq y$, $|x| \leq y$. Se $0 \leq x$, si ha che $x \leq y$. E inoltre $-y \leq 0 \leq |x| = x \leq y$ Se $x \leq 0$, si ha che $-x = |x| \leq y \implies -y \leq x \leq 0 \leq y$ Risulta che $-y \leq x \leq y$. Analogamente si dimostra che se $-y < x < y$ allora $|x| \leq y$. 5) Siano $x, y \in \mathbb{R}$, vogliamo provare che:

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Infatti si ha che $-|x| \leq x \leq |x|$ e anche $-|y| \leq y \leq |y|$. Sommo termine a termine, ottenendo:

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$

Ossia

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

Ma per la proprietà 4) si ha che

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

6) Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Vogliamo provare che

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Infatti si ha che

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$

da cui

$$|x| - |y| \leq |x - y|$$

Inoltre

$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x|$$

cioè $|y| \leq |x - y| + |x|$. Da cui

$$|y| - |x| \leq |x - y| \text{ ossia } -|x - y| \leq |x| - |y|$$

Segue che

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$$

Concludendo con

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Definizione (Distanza): Sia E un insieme non vuoto, Si chiama metrica su E o distanza su E una funzione

$$d : E \times E \to \mathbb{R}$$

che verifica le seguenti proprietà:

1. $\forall x, y \in E: \; 0 \leq d(x, y)$
2. $\forall x, y \in E: \; d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $\forall x, y \in E: \; d(x, y) = d(y, x)$
4. $\forall x, y, z \in E: \; d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Disuguaglianza triangolare)

Definizione: Un insieme E munito di una distanza d si dice spazio metrico

Proposizione: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ d(x,y) := |x-y|$. Allora d è una distanza su $\mathbb{R}$ (la distanza euclidea).

Dimostrazione: Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Risulta che $0 \leq d(x,y) = |x-y|$. Se $x, y \in \mathbb{R}$, $d(x,y) = 0 \implies |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$. Se $x, y \in \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$. Se $x, y, z \in \mathbb{R}: \ d(x,z) = |x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z)$. ∎

Definizione: La distanza $d(x,y) = |x-y|$ si dice distanza euclidea. L'insieme $\mathbb{R}$ si dice spazio metrico euclideo.

Osservazione (Interpretazione geometrica di $\mathbb{R}$): $\mathbb{R}$ é in corrispondenza biunivoca con la retta euclidea.

Definizione: Sia $A \subset \mathbb{R}$. Diremo che $b \in \mathbb{R}$ è un maggiorante per l'insieme A se:

$$\forall a \in A: \ a \leq b.$$

Denoteremo con il simbolo $\mathcal{M}_A$ l'insieme dei maggioranti per A.

Definizione: Sia $A \subset \mathbb{R}$. Diremo che $b \in \mathbb{R}$ è un minorante per A se:

$$\forall a \in A: \ b \leq a.$$

Denoteremo con il simbolo μ_A, l'insieme dei minoranti per A

Definizione: Sia $A \subset \mathbb{R}$. Si dice A è limitato superiormente se: $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \neq \varnothing$. Si dice che A è limitato inferiormente se $\mu_A \neq \varnothing$. Si dice che A é limitato se è limitato sia superiormente sia inferiormente.

Definizione: Sia $A \subset \mathbb{R}$. Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è un massimo per A se:

$$M \in A \cap \mathcal{M}_{\mathcal{A}},$$

ossia

$$\begin{cases} M \in A \\ \forall a \in A: \ a \leq M \end{cases}$$

Definizione: Sia $A \subset \mathbb{R}$. Si dice che $m \in \mathbb{R}$ è un minimo per A se:

$$m \in A \cap \mu_A,$$

ossia

$$\begin{cases} m \in A \\ \forall a \in A: \ m \leq a \end{cases}$$

Proposizione: Sia $A \subset \mathbb{R}$ se esiste un massimo per A, allora esso è unico. Se esiste un minimo per A, allora esso è unico. *Dimostrazione*: Siano $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ massimi per A. Allora risulta che

$$\begin{cases} M_1 \in A \\ \forall a \in A: \ a \leq M_1 \end{cases} \qquad \text{e anche} \ \begin{cases} M_2 \in A \\ \forall a \in A: \ a \leq M_2 \end{cases}$$

Essendo $M_1 \in A$, si ha che $M_1 \leq M_2$ ma anche $M_2 \in A$ quindi $M_2 \leq M_1$. Allora essendo $\leq$ una relazione d'ordine si ha che $M_1 = M_2$. Analogamente si mostra l'unicità del minimo. ■

Notazione: Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $M \in A$ un massimo per A, denoteremo M con il simbolo $\max A$. Se esiste il minimo di A, lo denoteremo con $\min A$.

Proposizione: Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, e, $B \subset \mathbb{R}$, $B \neq \varnothing$. Supponiamo che $A \subset B$ e che esistano il minimo sia di A, ξ_1 e il minimo di B, ξ_2. Allora $\xi_2 \leq \xi_1$. Inoltre se $\exists \max A = \eta_1$ e $\exists \max B = \eta_2$, si ha che $\eta_1 \leq \eta_2$.

Dimostrazione: Per ipotesi $\exists \min A = \xi_1$ e $\exists \min B = \xi_2$, ossia

$$\xi_1 \in A \cap \mu_A \; \xi_2 \in B \cap \mu_B$$

Vogliamo provare che $\xi_2 \leq \xi_1$. Poiché $A \subset B$ si ha che

$$\mu_B \subset \mu_A.$$

Segue che, $\xi_2 \in B \cap \mu B$, ma $\mu_2 \subset \mu A$, e quindi $\xi_2 \in \mu_A$, ed essendo $\xi_1 \in A$, allora $\xi_2 \leq \xi_1$. Analogamente, se esistono il $\max A = \eta_1$ ed il $\max B = \eta_2$, si prova che $\eta_1 \leq \eta_2$ ■.

Teorema (Teorema di esistenza dell'estremo superiore): Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$. Supponiamo che $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \neq \varnothing$. Allora esiste il $\min \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione: Per ipotesi $A \neq \varnothing$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \neq \varnothing$, tali insiemi A e $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ sono separati, ossia: $\forall a \in A, \forall b \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}: \; a \leq b$. Per l'assioma di completezza di Dedekind:

$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall a \in A, \forall b \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}: \; a \leq c \leq b.$$

Proviamo che $c = \min \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$. Poiché $\forall a \in A$, $a \leq c$ risulta che $c \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$. Inoltre $\forall b \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, $c \leq b$ risulta che $c \in \mu_{\mathcal{M}_{\mathcal{A}}}$. Segue che $c \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \cap \mu_{\mathcal{M}_{\mathcal{A}}}$ da cui $c = \min \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ ■.

Definizione: Sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$, $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \neq \varnothing$. Si chiama estremo superiore di A il numero reale $\min \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, tale numero si denota con il simbolo $\sup A$. Se $A \neq \varnothing$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \varnothing$ si scrive $\sup A = +\infty$.

Analogamente *Teorema* (Teorema di esistenza dell'estremo inferiore): Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, supponiamo che $\mu_A \neq \varnothing$. Allora esiste $\max \mu_A \in \mathbb{R}$

Definizione: Sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$, $\mu_A \neq \varnothing$. Si chiama estremo inferiore di A il numero reale $\max \mu_A$, tale numero si denota con il simbolo $\inf A$. Se $A \neq \varnothing$ e $\mu_A = \varnothing$ si scrive $\inf A = -\infty$.

Esempio: 1. $A = \{x \in \mathbb{R}: \; x \leq 1\}$. $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \{b \in \mathbb{R} | \; \forall x \in A : x \leq b\} = \{b \in \mathbb{R} \,|\, 1 \leq b\}$. $A \cap \mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \{1\} = \max A$.

1.

$B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 1\}$. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} = \{b \in \mathbb{R} \,|\, b \geq 1\}$ $B \cap \mathcal{M}_{\mathcal{B}} = \varnothing$. B non ammette massimo. Per il teorema dell'estremo superiore, il $\sup B = \min \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ esiste comunque. Risulta che $\mu_{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}} = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \leq 1\}$ da cui segue che $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} \cap \mu_{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}} = \{1\} = \sup B$.

Proposizione: Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$. Supponiamo che $\mu_A \neq \varnothing$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \neq \varnothing$. Allora risulta che $\inf A \leq \sup A$. Inoltre $\inf A = \sup A \Leftrightarrow A$ ha un solo elemento.

Dimostrazione: Osserviamo che $\forall a \in A$:

$$\inf A \leq a \leq \sup A.$$

da cui $\inf A \leq \sup A$. Inoltre $\inf A = \sup A \Leftrightarrow A = \{a\}$, $a = \inf A = \sup A$.

Proposizione: Siano $A, B \subset \mathbb{R}$, $A, B \neq \varnothing$. Supponiamo che esistano inf e sup sia di A che di B. Se $A \subset B$, allora

$$\sup A \leq \sup B$$

$$\inf B \leq \inf A$$

Dimostrazione: Vogliamo dimostrare che $\sup A \leq \sup B$ ossia

$$\min \mathcal{M_A} \leq \min \mathcal{M_B}$$

dato che $A \subset B$, si ha che $\mathcal{M_B} \subset \mathcal{M_A}$. Applicando la ((proposizione)) riguardante il minimo di insiemi si ha che $\min \mathcal{M_A} \leq \min \mathcal{M_B}$ e quindi $\sup A \leq \sup B$. Analogo per gli estremi inferiori: $\mathcal{M_B} \subset \mathcal{M_A}$, applicando la stessa proposizione si ha che $\max \mu_B \leq \max \mu_B$ cioè $\inf B \leq \inf A$.

Proposizione: Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$. Supponiamo che $\exists \max A \in \mathbb{R}$, allora $\max A = \sup A$. Analogamente se $\exists \min A \in \mathbb{R}$, allora $\min A = \inf A$. *Dimostrazione*: Supponiamo che $\exists \max A = M \in \mathbb{R}$ allora $M \subset A \cap \mathcal{M_A}$. Voglio verificare che M è il $\sup A$. Sia $y \in \mathcal{M_A}$. Dato che $M \in A$ si ha che $M \leq y$, segue che M è il più piccolo dei maggioranti di A ■. Analogo per l'estremo inferiore.

Caratterizzazioni dell'estremo superiore e inferiore *Proposizione*: Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing, \mathcal{M_A} \neq \varnothing$, Sono fatti equivalenti:

1. $\xi = \sup A$
2. $i)$ $\forall a \in A : a \leq \xi \in \mathbb{R}$ $ii)$ $\forall y \in \mathbb{R}, y < \xi : \exists a \in A$ tale che $y < a$.

Dimostrazione: Proviamo che 1) $\implies$ 2). Per ipotesi $\xi = \sup A \in \mathbb{R}$. Segue che $\xi = \min \mathcal{M_A}$ per definizione di estremo superiore, ossia $\xi \in \mathcal{M_A} \cap \mu_{\mathcal{M_A}}$, ottenendo $\xi \in \mathcal{M_A}$. Otteniamo così il punto $i)$ Sia $y \in \mathbb{R}$, $y < \xi$. Essendo ξ il più piccolo dei maggioranti di A, si ha che $y \notin \mathcal{M_A}$. Pertanto $\exists a \in A$ tale che $y < a$. Proviamo che 2) $\implies$ 1). Per ipotesi valgono $i)$ e $ii)$. Dalla $i)$ segue che $\xi \in \mathcal{M_A}$. Devo verificare che $\xi \in \mu_{\mathcal{M_A}}$. Se $y \in \mathcal{M_A}$ risulta che $\xi \leq y$. Se fosse $y < \xi$ per la $ii)$ $\exists a \in A :$ $y < a$ da cui $y \notin \mathcal{M_A}$ che è assurdo. Segue che $\xi \in \mathcal{M_A} \cap \mu_{\mathcal{M_A}}$ da cui $\xi = \min \mathcal{M_A} = \sup A$

Proposizione: Sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing, \mu_A \neq \varnothing$. Sono fatti equivalenti:

1. $\eta = \inf A$
2. $i)$ $\forall a \in A$, $\eta \leq a$, $\eta \in \mathbb{R}$ $ii)$ $\forall y \in \mathbb{R} : \eta < y : \exists a \in A$ tale che $a < y$.

Corollario (della caratterizzazione di sup): Sia $A \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{M_A} \neq \varnothing$. Sono fatti equivalenti:

1. $\xi = \sup A$.
2. $i)$ $\forall a \in A : a \leq \xi \in \mathbb{R}$ $ii)$ $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ tale che $\xi - \varepsilon < a$. *Dimostrazione*: Supponiamo vera 1) e dimostriamo 2). Per la caratterizzazione dell'estremo superiore di A risulta vera la $i)$. Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$.

Poniamo $y = \xi - \varepsilon$. Risulta che $y < \xi$, per la $ii)$ della caratterizzazione dell'estremo superiore $\exists a \in A : y < a$. Da cui segue che $\xi - \varepsilon < a \blacksquare$. Supponiamo vera 2) e dimostriamo 1). Per la caratterizzazione dell'estremo superiore, basta provare che $\forall y \in \mathbb{R}, y < \xi, \exists a \in A : y < a$. Sia allora $y \in \mathbb{R}, y < \xi$. Poniamo $\varepsilon := \xi - y, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Per la $ii)$ si ha che $\exists a \in A$ tale che $\xi - \varepsilon < a$. Concludiamo che $y = \xi - \varepsilon \implies y < a \blacksquare$.

Corollario (della caratterizzazione di estremo inferiore): Sia $A \subset \mathbb{R}, \mu_A \neq \emptyset$. Sono fatti equivalenti:

1. $\eta = \inf A$.

2. $i)$ $\forall a \in A : \eta \leq a, \eta \in \mathbb{R}$ $ii)$ $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ tale che $a < \eta + \varepsilon$.

Proposizione (La dimostrazione è sul Buttazzo): Siano $A, B \subset \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$, A, B separati. Sono fatti equivalenti:

1. A, B sono contigui, cioè $\exists!\, c \in \mathbb{R}$ tale che $\forall a \in A$, $\forall b \in B : a \leq c \leq b$.

2. $\sup A = \inf B$.

Osservazione: $A = \{x \in \mathbb{R} | x < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$. Vale che $\sup A = \inf B$ e sono contigui.

Proposizione: Siano $X, Y \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$, X, Y separati. Sono fatti equivalenti:

1. X, Y sono contigui.

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, \exists y \in Y$ tali che $y - x < \varepsilon$.

Dimostrazione: dimostriamo che 1) $\implies$ 2). Si ha che $\sup X = \inf Y$. Sia $\varepsilon > 0$. In corrispondenza di $\frac{\varepsilon}{2}$ per il corollario, $\exists x \in X$ tale che $\sup X - \frac{\varepsilon}{2} < x$. In corrispondenza di $\frac{\varepsilon}{2}$, $\exists \in Y$ tale che $y < \inf Y + \frac{\varepsilon}{2}$. Segue che

$$y - x < \inf Y + \frac{\varepsilon}{2} - \sup X + \frac{\varepsilon}{2} = \inf Y + \frac{\varepsilon}{2} - \inf Y + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Concludiamo che $y - x < \varepsilon$. Dimostriamo che 2) $\implies$ 1). Per ipotesi $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X$, $\exists y \in Y$ tale che $y - x < \varepsilon$. Al fine di dimostrare che $\sup X = \inf Y$ verifichiamo che $\forall \varepsilon > 0 : 0 \leq \inf Y - \sup X < \varepsilon$. (Posso scegliere $\bar{\varepsilon} = \inf Y - \sup X, \bar{\varepsilon} > 0 : 0 \leq \inf Y - \sup X < \bar{\varepsilon} = \inf Y - \sup X$.) Sia quindi $\varepsilon > 0$. Per 2), $\exists x \in X$, $\exists y \in Y$ tali che $y - x < \varepsilon$. Segue che $\inf Y - \sup X \leq y - x < \varepsilon$ da cui $\inf Y - \sup X < \varepsilon \blacksquare$.

Definizione: Sia $I \subset \mathbb{R}$. Si dice che I è un intervallo se:

$$\forall a, b \in I,\ a \leq b,\ a \neq b : \{z \in \mathbb{R} | a < z < b\} \subset I$$

Notazione per intervalli di estremi $a, b \in \mathbb{R}$ e di semirette: Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Denoteremo:

1. $]a, a[= \emptyset$,

2. $[a, a] = a$

3. $]a, b[= \{z \in \mathbb{R} | \, a < z < b\}$ (Intervallo aperto di estremi a, b).

4. $[a, b] = \{z \in \mathbb{R} | a \leq z \leq b\}$ (Intervallo chiuso di estremi a, b).

5. $]a, b] = \{z \in \mathbb{R} \, a \leq z < b\}$ (Intervallo aperto a destra di estremi a, b).

6. $[a, b[= \{z \in \mathbb{R} | \, a < z \leq b\}$ (Intervallo aperto a sinistra di estremi a, b).

7. $[a, +\infty[= \{z \in \mathbb{R} |, a \leq z\}$ (semiretta destra chiusa di estremo a).

8. $], a, \infty[= \{z \in \mathbb{R} | \, a < z\}$ (semiretta destra aperta di estremo a)

9. $]-\infty, b] = \{z \in \mathbb{R} | z \leq b\}$ (semiretta sinistra chiusa di estremo b).

10. $]-\infty, b[= \{z \in \mathbb{R} | z < b\}$ (semiretta sinistra aperta di estremo b).

11. $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Teorema (Caratterizzazione degli intervalli di $\mathbb{R}$): Sia $I \subset \mathbb{R}$. Sono fatti equivalenti:

1. I è un intervallo.

2. I è un intervallo di estremi reali, oppure I è una semiretta destra, oppure I è una semiretta sinistra, oppure $I = \varnothing$ oppure $I = \mathbb{R}$, oppure I è ridotto ad un solo elemento.

Dimostrazione: 2) $\implies$ 1) è ovvia. Dimostriamo 1) $\implies$ 2). Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Se I è vuoto o ridotto ad un solo elemento allora vale 2). Supponiamo I di non essere in uno di questi casi e che I sia limitato. Poniamo $a = \inf I \in \mathbb{R}$ e $b = \sup I \in \mathbb{R}$. Verifichiamo che

$$]a, b[\subset I \subset [a, b]$$

La seconda inclusione è ovvia, dimostriamo la prima. Sia $y \in]a, b[$. Allora $\inf I < y < \sup I$. Per le caratterizzazioni di estremo superiore e inferiore di I, $\exists x \in I$, tale che $y < x$, $\exists x' \in I$ tale che $x' < y$. Pertanto $x, x' \in I$, $y \in \mathbb{R}$, $x' < y < x$. Essendo I un intervallo si ha che $y \in I$. Supponiamo poi che I sia limitato solo inferiormente. Risulta che $a = \inf I \in \mathbb{R}, \sup I = +\infty$. Si dimostra che $]a, +\infty[\subset I \subset [a, +\infty[$. Analogamente se I è limitato solo superiormente. Se I non è limitato, allora $I = \mathbb{R}$ ∎ .

Definizione: Sia $A \subset \mathbb{R}$. Si dice che A è induttivo se:

1. $0 \in A$

2. $x \in A \implies x + 1 \in A$

Esempio: $A = [0, +\infty[$ è induttivo, dato che $0 \in A$ e $\forall x \in A : x+1 \in A$, perché se $0 \leq x$ allora $0 \leq 1 \leq x+1$ quindi $x+1 \in A$.

Definizione: Si dice insieme dei numeri naturali e si denota con il simbolo $\mathbb{N}$, l'intersezione di tutti i sottoinsiemi induttivi di $\mathbb{R}$.

Posto $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R} | A$ induttivo $\}$, si ha che $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Per definizione, poniamo $\mathbb{N} = \cap_{A\in\mathcal{F}} A$. Ogni elemento di $\mathbb{N}$ è detto numero naturale.

Proposizione: $\mathbb{N}$ è induttivo.

Dimostrazione: Verifichiamo che $\mathbb{N}$ è induttivo. $\forall A \in \mathcal{F} : 0 \in A$, segue che $0 \in \cap_{A\in\mathcal{F}} A = \mathbb{N}$. Verifichiamo ora che $x \in \mathbb{N} \implies x+1 \in \mathbb{N}$. Quindi sia $n \in \mathbb{N}$. Risulta che $\forall A \in \mathcal{F} : n \in A$. Essendo A induttivo $n+1 \in A, \forall A \in \mathcal{F}$. Allora $n+1 \in \cap_{A\in\mathcal{F}} A = \mathbb{N}$. Pertanto $\mathbb{N}$ è induttivo $\blacksquare$.

Osservazione: Essendo $\mathbb{N}$ induttivo, si ha che $\mathbb{N} \subset [0, +\infty[$.

Principio d'induzione Sia $A \subset \mathbb{N}$, tale che:

1. $0 \in A$
2. $\forall n : (n \in A \implies n+1 \in A)$. Allora si ha che $A = \mathbb{N}$.

Dimostrazione: Per ipotesi $A \subset \mathbb{N}$. Inoltre essendo A induttivo, si ha che $A \in \mathcal{F}$, da cui $\mathbb{N} = \cap_{B\in\mathcal{F}} B \subset A$. Allora $A = \mathbb{N}$.

Definizione: Se $n \in \mathbb{N}$ allora $n+1$ si chiama il successivo di n.

Osservazione: Essendo $\mathbb{N}$ induttivo, ogni successivo di un naturale è un numero naturale.

Proposizione: Risulta che:

1. $\forall n, m \in \mathbb{N},\ n+m \in \mathbb{N}$.
2. $\forall n, m \in \mathbb{N},\ n \cdot m \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione: Dimostriamo 1). Verifichiamo che $\forall n, m \in \mathbb{N} : n+m \in \mathbb{N}$. Sia quindi $m \in \mathbb{N}$. Consideriamo l'insieme $A_m = \{n \in \mathbb{N} | n+m \in \mathbb{N}\}$. Proviamo che $A_m = \mathbb{N}$. Dimostriamolo per induzione. Infatti risulta che $A_n \subset \mathbb{N}$. Inoltre $0 \in A_m$ poiché $0+m = m \in \mathbb{N}$. Inoltre sia $n \in A_m$, ossia $n+m \in \mathbb{N}$. Consideriamo $(n+1)+m = (n+m)+1$. Essendo $n+m \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$ induttivo, concludiamo che $(n+1)+m \in \mathbb{N}$ da cui $n+1 \in A_m$. Quindi A_m è induttivo e per il principio di induzione: $A_m = \mathbb{N}$.

Dimostriamo 2). Verifichiamo che $\forall n, m \in \mathbb{N} : n+m \in \mathbb{N}$. Sia quindi $m \in \mathbb{N}$. Consideriamo l'insieme $B_m = \{n \in \mathbb{N} | n \cdot m \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$. Vale che $0 \in B_m$ essendo $m \cdot 0 = 0 \in \mathbb{N}$. Verifichiamo che $n \in B_m \implies n+1 \in B_m$. Sia quindi $n \in B_m$. Valutiamo $(n+1)m = n \cdot m + m$. $n \cdot m \in \mathbb{N}$ ed essendo $m \in \mathbb{N}$ per come dimostrato sopra $n \cdot m + m \in \mathbb{N}$. Quindi $n+1 \in B_m$. Quindi B_m è induttivo e allora $B_m = \mathbb{N}\,\blacksquare$.

Principio di induzione generalizzato Sia $A \subset \mathbb{N}$, sia $n_0 \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:

1. $n_0 \in A$,
2. $\forall n,\ n_0 \leq n : n \in A \implies n+1 \in A$. Allora risulta che $\{n \in \mathbb{N} | n_0 \leq n\} \subset A$.

Dimostrazione: Poniamo $C = \{n \in \mathbb{N} | n + n_0 \in A\}$. Proveremo che C è induttivo. Ovviamente $0 \in C$, inoltre se $n \in C : n+1 \in C$. Dato che se $n \in C$, $n+n_0 \in A$ da cui $(n+1) + n_0 = (n+n_0) + 1 \in A$. Concludiamo che $C = \mathbb{N}$ da cui segue che $\{n \in \mathbb{N} | n_0 \le n\} \subset A$ ■.

Osservazione: Se $A \subset \{n \in \mathbb{N} | n \ge n_0\}$ e verifica le proprietà richieste dal principio di induzione generalizzato allora $A = \{n \in \mathbb{N} | n > n_0\}$.

Notazione: $]a, b[= (a, b)$

Teorema (Discretezza di $\mathbb{N}$): $\forall n \in \mathbb{N} : (n, n+1) \cap \mathbb{N} = \varnothing$.

Dimostrazione: Sia $C = \{n \in \mathbb{N} | (n, n+1) \cap \mathbb{N} = \varnothing\} \subset \mathbb{N}$. Proviamo che C è induttivo.

1. $0 \in C$? Sia $A = \mathbb{N} \setminus (0,1) \subset \mathbb{N}$. Proviamo che A è induttivo. $0 \in \mathbb{N}$, $0 \notin (0,1) \Rightarrow 0 \in A$. inoltre sia $n \in A$.

$$n \ge 0 \Rightarrow n+1 \ge 1 \Rightarrow n+1 \notin (0,1) \Rightarrow n+1 \in A$$

Quindi A è induttivo. Per il principio di induzione $A = \mathbb{N}$. Quindi $\mathbb{N} \setminus (0,1) = \mathbb{N} \Leftrightarrow \mathbb{N} \cap (0,1) = \varnothing$. Quindi $0 \in C$.

1. Sia $n \in C$. Mostriamo che $n+1 \in C$.

$$n \in C \Leftrightarrow (n, n+1) \cap \mathbb{N} = \varnothing$$

Poniamo

$$B = \mathbb{N} \setminus (n+1, n+2) \subset \mathbb{N}$$

Proviamo che B è induttivo. $0 \in B$ poiché $\forall n \in \mathbb{N} : n+1 > 0$ e $0 \notin (n+1, n+2) \Rightarrow 0 \in B$. Sia $m \in \mathbb{N}$, suppongo $m \in B \Leftrightarrow m \in \mathbb{N} \setminus (n+1, n+2)$. Quindi $m \le n+1 \vee n \ge n+2$. 2.1 $m < n+1$. dato che $(n, n+1) \cap \mathbb{N} = \varnothing$, si ha che $m \le n$. Segue che $m+1 < n+1 \Rightarrow m+1 \in B$. 2.2 $m = n+1 \Rightarrow m+1 = n+2 \notin (n+1, n+2) \Rightarrow m+1 \in B$. 2.3 $m \ge n+2 \Rightarrow m+1 \ge n+3 \Rightarrow m+1 \in B$. Segue che B è induttivo e che $B = \mathbb{N}$. Quindi $\mathbb{N} \cap (n+1, n+2) = \varnothing$, quindi C è induttivo e $C = \mathbb{N}$. Da cui $\mathbb{N} \cap (n, n+1) = \varnothing, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ■.

$\mathbb{N}$ si dice discreto, ossia verifica la proprietà $\forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \cap (n, n+1) = \varnothing$.

Teorema: $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente.

Dimostrazione: Vogliamo provare che $\mathcal{M}_{\mathbb{N}} = \varnothing$. Supponiamo per assurdo che $\mathcal{M}_{\mathbb{N}} \neq \varnothing$. Per il teorema di esistenza dell'estremo superiore, $\exists M = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Segue che $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{N}}$, cioè $\forall n \in \mathbb{N} : n \le M$. Essendo $\mathbb{N}$ induttivo, si ha che $\forall n \in \mathbb{N} : n+1 \in \mathbb{N} \implies \forall n \in \mathbb{N}, n+1 \le M$. Pertanto vale che $\forall n \in \mathbb{N} : n \le M - 1$, ma allora $M-1$ è un maggiorante di $\mathbb{N}$, che è assurdo in quanto avevamo supposto che $\sup \mathbb{N} = M$. ■.

Proposizione (Proprietà archimedea di $\mathbb{R}$ (I)):

$\forall a \in \mathbb{R}$, $a > 0 : \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $a < n$.

Dimostrazione: Per il teorema precedente, si ha che $\mathcal{M}_{\mathbb{N}} = \varnothing$. Voglio dimostrare che $\forall a \in \mathbb{R}$, $a > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $a < n$. Sia quindi $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Se per assurdo che la tesi sia falsa, ovvero che $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \ge n$. Pertanto si ha che $a \in \mathcal{M}_{\mathbb{N}}$, assurdo ■.

Proposizione (Proprietà archimedea II):

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $na > b$.

Dimostrazione: Sia $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $a > b$,. Poiché $a \neq 0$, $\exists a^{-1} \in \mathbb{R}$. Consideriamo il numero reale $x = b \cdot a^{-1}$. Per la proprietà archimedea (I), $\exists n \in \mathbb{N}$, tale che $n > x = ba^{-1}$. Pertanto essendo $a > 0$, risulta che $na > xa = (ba^{-1})a = b$ ■.

Corollario: Se $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, tale che $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $x \leq \frac{1}{n}$, allora $x = 0$.

Dimostrazione: Sia $x \geq 0$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, $x \leq \frac{1}{n}$. Se fosse che $x \neq 0$, allora $x > 0$. Per la proprietà archimedea (I) applicata a $x^{-1} \in \mathbb{R}$, $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$, $\bar{n} \neq 0$, tale che $\bar{n} > x^{-1}$. Segue che

$$x > \frac{1}{\bar{n}}.$$

Quindi si ha che $\frac{1}{\bar{n}} < x \leq \frac{1}{\bar{n}}$, allora $\frac{1}{\bar{n}} < \frac{1}{\bar{n}}$, assurdo ■.

Corollario: Se $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, allora $\exists n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ tale che $x > \frac{1}{n}$.

Dimostrazione: Sia $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Per il corollario precedente, se $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $x \leq n$ allora $x = 0$. Essendo $x > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ tale che $x > \frac{1}{n}$ ■.

Definizione: $\mathbb{R}$ si dice un corpo, commutativo, archimedeo completo e totalmente ordinato.

Proposizione (Principio del minimo): Ogni sottoinsieme $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \varnothing$, ammette minimo.

Dimostrazione: Sia $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \varnothing$. Risulta che $0 \in \mu_A \neq \varnothing$. Per il teorema di esistenza dell'estremo inferiore in $\mathbb{R}$,

$$\exists \inf A = \max \mu_A = a \in \mathbb{R}.$$

Proveremo che $a = \min A$, cioè $a \in \mathbb{N}$. Poiché $0 < 1$, risulta che $a < a + 1$, per la caratterizzazione dell'estremo inferiore, $\exists n \in A$ tale che $a \leq n < a + 1$. Se $a = n$, la tesi sarebbe soddisfatta, ossia $\inf A \in \mathbb{N} \implies \inf A = \min A$. Se $a < n < n + 1$, allora per la caratterizzazione dell'estremo inferiore $\exists m \in A$ tale che $a \leq m < n$. Segue che $m < n < a + 1 \leq m + 1$ da cui $n \in]m, m+1[$ che è assurdo in quanto $]m, m+1[= \varnothing$. (Discretezza di $\mathbb{N}$). Concludiamo che $a = n$ ■.

Definizione: $\mathbb{N}$ si dice ben ordinato in quanto $\mathbb{N}$ verifica il principio del minimo.

Definizione: Si dice che $n \in \mathbb{N}$ è pari se $n = 2p$, con $p \in \mathbb{N}$. Si dice che $n \in \mathbb{N}$ è dispari se $n = 2m + 1$, con $m \in \mathbb{N}$.
Denoteremo con $\mathbb{P}$ l'insieme dei naturali pari e $\mathbb{D}$ l'insieme dei naturali dispari.

Proposizione:

1. $\mathbb{P} \cup \mathbb{D} = \mathbb{N}$
2. $\mathbb{P} \cap \mathbb{D}$.

Dimostrazione:

1. Verifichiamo che $A = \mathbb{P} \cup \mathbb{D} \subset \mathbb{N}$ soddisfa le ipotesi del principio di induzione. Osserviamo che $0 \in \mathbb{P} \subset A = \mathbb{P} \cup \mathbb{D}$. Proveremo anche che A è induttivo. Sia $n \in A = \mathbb{P} \cup \mathbb{D}$. Se $n = 2p$, con $p \in \mathbb{N}$, allora $n + 1 = 2p + 1 \in \mathbb{D} \subset A$. Se invece, $n = 2m + 1$, con $m \in \mathbb{N}$, allora $n + 1 = 2m + 1 + 1 = 2(m + 1)$, allora $n + 1 \in \mathbb{P} \subset A$. Segue che $\forall n \in \mathbb{N}, n \in A$, allora $n + 1 \in A$. Per il principio di induzione $A = \mathbb{P} \cup \mathbb{D} = \mathbb{N}$ ■.

2. Vogliamo provare che $\mathbb{P} \cap \mathbb{D} = \varnothing$. Sia per assurdo che $\exists n \in \mathbb{P} \cap \mathbb{D}$. Allora $n = 2p$, con $p \in \mathbb{N}$ ma anche $n = 2m + 1$, con $m \in \mathbb{N}$. Ovvero:

$$2p = 2m + 1 \implies 2(p - m) = 1.$$

Se $p = m, 2 \cdot 0 = 0 = 1$, assurdo. Se $p < m$, allora $2(p - m) = 1$. Ma $p - m < 0$ cioè $1 = 2(p - m) < 0$, assurdo. Se $p > m$, allora per la discretezza di $\mathbb{N}$ si ha che $p - m \geq 1$. Risulta allora che $1 = 2(p - m) \geq 2$, assurdo $\blacksquare$. =

Teorema: Ogni sottoinsieme $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \varnothing$, $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \neq \varnothing$ ammette massimo.

Dimostrazione: (Analogo al principio del minimo).

Numeri relativi (interi)

Definizione: Si dice $x \in \mathbb{R}$ è un numero relativo se $\exists n, m \in \mathbb{N} : x = m - n$. Si denotano con il simbolo $\mathbb{Z}$.

Proposizione: Valgono le seguenti proprietà:

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x + y \in \mathbb{Z}, x \cdot y \in \mathbb{Z}, -x \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione:

1. $m \in \mathbb{N}$, allora $m = m - 0 \in \mathbb{Z}$.
2. Siano $x, y \in \mathbb{Z}$. Allora per definizione $x = m - n$, $y = p - q$, con $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Quindi $x + y = m - n + p - q = (m + p) - (n + q) \in \mathbb{Z}$. Inoltre siano x, y come prima, $x \cdot y = (m - n) \cdot (p - q) = mp - mq - np + nq = (mp + nq) - (mq + np) \in \mathbb{Z}$. Infine se $x \in \mathbb{Z}$, $x = m - n$, $m, n \in \mathbb{Z}$, allora $-x = -(m - n) = n - m \in \mathbb{Z}$.

Teorema: Sia $A \subset \mathbb{Z}$, $A \neq \varnothing$, $\mu(A) \neq \varnothing$, allora A ammette minimo.

Teorema: $\mathbb{Z}$ non è limitato superiormente, $\mathbb{Z}$ non è limitato inferiormente.

Dimostrazione: La tesi segue osservando $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e anche $-\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Teorema: Ogni sottoinsieme $A \subset \mathbb{Z}$, $A \neq \varnothing, \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \neq \varnothing$ ammette massimo.

Numeri razionali

Definizione: Si dice che $x \in \mathbb{R}$ è un numero razionale se $\exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ tali che $x = m \cdot n^{-1} = \frac{m}{n}$. L'insieme dei numeri razionali si denota con $\mathbb{Q}$. Si dice che $x \in \mathbb{R}$ è un numero irrazionale se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Proposizione: Valgono le seguenti proprietà:

1. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
2. $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, $x + y \in \mathbb{Q}$, $xy \in \mathbb{Q}$, $-x \in \mathbb{Q}$
3. $\forall x \in \mathbb{Q}, x \neq 0 : x^{-1} \in \mathbb{Q}$

Dimostrazione:

1. Sia $x \in \mathbb{Z}$, in particolare $x = \frac{x}{1} \in \mathbb{Q}$.
2. Siano $x, y \in \mathbb{Q}$. Per definizione $\exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, $\exists p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}, q \neq 0$, tali che $x = mn^{-1}$, $y = pq^{-1}$. Segue che $x + y = mn^{-1} + pq^{-1} = \frac{mq+pn}{nq} \in \mathbb{Q}$. Inoltre $xy = (mn^{-1})(pq^{-1}) = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = (mp)(nq)^{-1} \in \mathbb{Q}$. Infine si ha che se $x \in \mathbb{Q}$ allora $-x \in \mathbb{Q}$. Infatti se $x = mn^{-1}$, come prima, allora $-x = -m(n^{-1}) = (-m)n^{-1} \in \mathbb{Q}$.

3.

Teorema: $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$. Ovvero: se $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, allora $\exists q \in \mathbb{Q}$, tale che $a < q < b$.

Dimostrazione: Ci sono 3 casi da considerare:

1. Siano $a, b \in \mathbb{R} : 0 \le a < b$; Per l'assioma di Archimede vale che $\exists n \in \mathbb{N} : n(b-a) > 1 \implies n > \frac{1}{b-a}$,

   Segue che $nb - na > 1$, da cui $nb > na + 1$. Consideriamo l'insieme:

$$C = \{p \in \mathbb{N} | \, na < p\}$$

che è non vuoto per la proprietà archimedea. Inoltre $C \subset \mathbb{N}$. Essendo $C \subset \mathbb{N}$, non vuoto, per il principio del minimo $\exists \min C = m \in \mathbb{N}$. Segue che $na < m$, $na + 1 < nb$, essendo inoltre $m = \min C$, risulta che $m - 1 < na$ da cui $m \le na + 1$. Concludiamo che $na < m \le na + 1 < nb$ e quindi $na < m < nb$. Moltiplicando per il reciproco di n si ha che $a < mn^{-1} < b$. Posto $q = mn^{-1}$, si ha che $q \in \mathbb{Q}$ e $a < q < b$.

2. Siano $a, b \in \mathbb{R} : a < 0 < b$; Il caso è banale dato che $0 \in \mathbb{Q}$.

1. $a < b < 0$. Si procede applicando il punto 1) al caso equivalente $0 < -b < -a$. Otterremo così $-q$ che è il numero razionale cercato $\blacksquare$.

Proposizione: $\nexists \, x \in \mathbb{Q} | \, x^2 = 2$.

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che $\exists x \in \mathbb{Q} | x^2 = 2$. Allora $x = \frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, e senza perdita di generalità sono primi tra di loro. Essendo $x^2 = 2 \implies \frac{m^2}{n^2} = 2$. Cioè $m^2 = 2n^2$, segue che m è pari. In particolare il quadrato di un numero pari è pari. Quindi $m^2 = 2n^2 \implies (2s)^2 = 2n^2 \implies 4s^2 = 2n^2$. Ovvero $2s^2 = n^2$. Quindi anche n^2 è pari, e conseguentemente anche n. Ma allora sia m che n sono pari che contraddice l'ipotesi di averli scelti coprimi.

Teorema(incompletezza di $\mathbb{Q}$): $\mathbb{Q}$ non verifica l'assioma di Dedekind ($\mathbb{Q}$ non è completo).

Dimostrazione: Basta trovare un insieme limitato, non vuoto, che non ammette estremo superiore (o inferiore) in $\mathbb{Q}$. Sia quindi $A = \left\{x \in \mathbb{Q} : x \ge 0, \, x^2 < 2\right\}$. 1 appartiene ad A, quindi è non vuoto, $2 \in \mathcal{M}_A$ infatti:

$$x^2 < 2 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow x^2 - 4 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) < 0 \Rightarrow x < 2.$$

Quindi A è superiormente limitato. Supponiamo che $\exists \lambda \in \mathbb{Q} : \lambda = \sup A$, in particolare vale $\lambda \ge 1$. Ci sono 3 casi distinti:

$$1. \, \lambda^2 < 2 \qquad\qquad 2. \, \lambda^2 = 2 \qquad\qquad 3. \, \lambda^2 > 2.$$

1. Per il principio di Archimede $\exists n \in \mathbb{N} : n > \max\left\{1, \frac{2\lambda+1}{2-\lambda^2}\right\}$. Vale che $\lambda + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$, vediamo se appartiene ad A. Sarebbe a dire:

$$\left(\lambda+\frac{1}{n}\right)^2=\lambda^2+\frac{2\lambda}{n}+\frac{1}{n^2}<\lambda^2+\frac{2\lambda}{n}+\frac{1}{n}=\lambda^2+\frac{2\lambda+1}{n}.$$

Se fosse minore di 2 avremmo:

$$\lambda^2+\frac{2\lambda+1}{n}<2\Rightarrow\left(\lambda+\frac{1}{n}\right)^2<2\Rightarrow\left(\lambda+\frac{1}{n}\right)\in A.$$

Ma λ era l'estremo superiore di A. Otteniamo un assurdo. 2. Senza perdita di generalità posso scrivere $\lambda=\frac{m}{n}$ con $m,n\in\mathbb{Q}$ e coprimi. Se fosse che $\lambda^2=2$ avrei:

$$\frac{m^2}{n^2}=2\Rightarrow m^2=2n^2\Rightarrow\exists p\in\mathbb{N}:\ m=2p.$$

$$\frac{4p^2}{n^2}=2\Rightarrow 2p^2=n^2.$$

Cioè sia m che n sono pari, ma li avevamo assunti coprimi, abbiamo ottenuto un assurdo. 3. Ancora per il principio di Archimede scriviamo $\exists n\in\mathbb{N}:\ n>\max\left\{\frac{1}{\lambda},\frac{2\lambda}{\lambda^2-2}\right\}$. Vale che $\lambda-\frac{1}{n}\in\mathbb{Q}$.

$$\left(\lambda-\frac{1}{n}\right)^2=\lambda^2-\frac{2\lambda}{n}+\frac{1}{n^2}>\lambda^2-\frac{2\lambda}{n}>\lambda^2-2\lambda\frac{\lambda^2-2}{2\lambda}=\lambda^2-\lambda^2+2=2$$

Dimostriamo adesso che $\lambda-\frac{1}{n}$ è un maggiorante di A. Ricordando che $x\in A$ implica $x\geq 0$ e usando che $\lambda-\frac{1}{n}$ è positivo si ha che per ogni $x\in A$:

$$\lambda-\frac{1}{n}>x\Leftrightarrow\left(\lambda-\frac{1}{n}\right)^2>x^2.$$

che è vero per quanto detto sopra:

$$\left(\lambda-\frac{1}{n}\right)^2>2>x^2$$

Abbiamo quindi dimostrato che $\lambda-\frac{1}{n}$ è un maggiorante di A, in contraddizione al fatto che $\lambda=\sup A$. Concludendo, $\nexists\lambda\in\mathbb{Q}$ tale che $\lambda=\sup A$. ■

Definizione: Sia $x\in\mathbb{R}$. Sia $n\in\mathbb{N}$, $n\neq 0$. Si chiama potenza $n-esima$ di x il numero reale:

$$x^n=\begin{cases}x^n & \text{se } m\in\mathbb{N}^+\\ 1 & \text{se } n=0\\ \frac{1}{x^{|n|}} & \text{se } n\in-\mathbb{N}^+\end{cases}$$

Proposizione: $\forall x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$, $\forall n,m\in\mathbb{Z}$:

1. $(x^m)^n=x^{mn}$
2. $x^{n+m}=x^n\cdot x^m$
3. $(x\cdot y)^n=x^n\cdot y^n$.

Proposizione:

1. Sia $y \in \mathbb{R}, 0 < y \leq 1$. Si ha che: $\forall n \in \mathbb{N},\, n \neq 0 : y^n \leq y$.

2. Sia $y \in \mathbb{R},\, y \geq 1$. Si ha che $\forall n \in \mathbb{N},\, n \neq 0 : y^n \geq y$.

Dimostrazione:

1. Sia $y \in \mathbb{R}, 0 < y \leq 1 \implies \forall n \in \mathbb{N},\, n \neq 0 : y^n \leq y$. $P(n) = \forall n \in \mathbb{N}. n \neq 0 : y^n \leq y$, il predicato che dimostreremo per induzione. Proviamo la base induttiva, sia quindi $n = 1$. Allora $y^1 = y$, verificata. Per il passo induttivo assumiamo che se $y^n \leq y$, dobbiamo dimostrare: $y^{n+1} \leq y$. Essendo $y^{n+1} = y \cdot y^n$ abbiamo che $y \cdot y^n \leq y^2$, che ci permette di concludere.

2. Sia $y \in \mathbb{R},\, y \geq 1$. $P(n) = \forall n \in \mathbb{N},\, n \neq 0 : y^n \geq y$. Dimostriamo il predicato per induzione. Il passo base, $P(1)$, è verificato in quanto $y^1 \geq y$. Dimostriamo il caso $P(n+1)$. Per ipotesi $y^n \geq y$. Ma $y^{n+1} = y^n y \geq y \cdot y$ per ipotesi. Abbiamo verificato il passo induttivo $\blacksquare$.

Proposizione: Siano $x, y \in \mathbb{R},\, 0 < x < y$. Allora $\forall n \in \mathbb{N},\, n \neq 0 : x^n < y^n$.

Dimostrazione: Dimostriamolo per induzione sul predicato $P(n) = \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0,\, x < y \implies xy^n < y^n$. $P(1)$ è banale in quanto $x^1 < y^1$ per ipotesi. Dimostriamo il caso $P(n+1)$:

$$x^{n+1} < y^{n+1} \implies x^n \leq y^n.$$

Ma $x < y$ per ipotesi e $x^n < y^n$ per ipotesi induttiva. Quindi $P(n+1)$ è vera $\blacksquare$.

Teorema(della radice $n-esima$): $\forall y \in \mathbb{R}^*,\, \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq 2$, esiste una ed una sola $x \in \mathbb{R}$ positiva tale che $x^n = y$.

Definizione: Sia $y \in \mathbb{R}^*$, sia $\mathbb{N} \in \mathbb{N},\, n \geq 2$. Si chiama radice $n-esima$ di y l'unica x reale positiva tale che $x^n = y$. ($x = \sqrt[n]{y}$ oppure $x = y^{\frac{1}{n}}$).

Dimostrazione(Del teorema):

Fissiamo $y \in \mathbb{R},\, y > 0,\, n \in \mathbb{N},\, n \geq 2$. Proviamo che se $\exists x \in \mathbb{R},\, x > 0$, tale che $x^n = y$ allora x è unica. Se per assurdo $x_1, x_2 \in \mathbb{R},\, x_1, x_2 > 0$ e tali che $x_1^n = y,\, x_2^n = y$ allora $x_1 = x_2$. D'altra parte se $x_1 < x_2$ allora si avrebbe che $x_1^n < x_2^n \implies y < y$, che è assurdo. Viceversa se $x_2 < x_1$, allora si avrebbe che $x_2^n < x_1^n \implies y < y$, che è assurdo. Quindi se esiste una x come richiesta, è unica. Per quanto riguarda l'esistenza della radice ennesima, invece, consideriamo l'insieme:

$$A = \{z \in \mathbb{R} |\, z > 0, z^n \leq y\}.$$

Proviamo che:

1. $A \neq \varnothing$

2. A è limitato superiormente, $(\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \neq \varnothing)$. A tal fine distinguiamo due casi: $0 < y \leq 1,\, y > 1$. Supponiamo che $0 < y \leq 1$. Allora si ha che $y^n \leq y$. Pertanto $y \in A$, da cui $A \neq \varnothing$. Inoltre si ha che $1 \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$. Se fosse che $1 \notin \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$. Allora $\exists z \in A$ tale che $z > 1$, da cui $z^n > 1$, ma essendo $z \in A$, $1 \geq y \geq z^n > 1$ che è assurdo. Se invece, $y > 1$. Allora $1^n = 1 < y$, quindi $1 \in A$, e quindi A è non vuoto. Inoltre $y \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, infatti, se $y \notin A$, $\exists z \in A$ tale

che $z > y$. Ma allora $y^n < z^n$ ma $z^n \le y$ che è assurdo. Per il teorema di esistenza dell'estremo superiore esiste $x = \sup A \in \mathbb{R}$. Verifichiamo che $x^n = y$. Basta provare che $\forall \varepsilon > 0 : |x^n - y| \le \varepsilon$. Sia quindi $\varepsilon > 0$. Poniamo

$$\varepsilon' = \min\left(x, \frac{\varepsilon}{2^n n x^{n-1}}\right).$$

Proveremo che $(x-\varepsilon')^n < x^n < (x+\varepsilon')^n$. Che segue direttamente dall'osservare che $0 \le x - \varepsilon' < x < x + \varepsilon'$, e dalla proposizione precedente. Verifichiamo inoltre che $(x-\varepsilon')^n < y < (x+\varepsilon')^n$. Per provare la disuguaglianza di destra basta osservare che $(x+\varepsilon')^n \notin A$, dato che $x = \sup A$. Segue che $y < (x+\varepsilon')^n$. Per l'altra disuguaglianza, per la caratterizzazione dell'estremo superiore, essendo $x - \varepsilon' < x$, $\exists \bar{x} \in A$, tale che $0 < x - \varepsilon' < \bar{x} < x$. Segue che $(x-\varepsilon')^n < \bar{x}^n \le y$, perché $\bar{x} \in A$. Pertanto si ha che $(x-\varepsilon')^n < y < (x+\varepsilon')^n$. Concludiamo che

$$0 \le |x^n - y| \le |(x+\varepsilon')^n - (x-\varepsilon')^n| = |(x+\varepsilon') - (x-\varepsilon')| \cdot |(x+\varepsilon')^{n-1} + \cdots + (x-\varepsilon')^{n-1}| \implies$$

Maggioro i termini misti con $2x$.

$$|2\varepsilon'| \cdot |(x+\varepsilon')^{n-1} + \cdots + (x-\varepsilon')^{n-1}| \le 2\varepsilon' \cdot (2x)^{n-1} n = 2^n x^{n-1} n \varepsilon' \le \frac{\varepsilon}{2^n x^{n-1} n} \cdot 2^n x^{n-1} n = \varepsilon.$$

Segue che $0 \le |x^n - y| \le \varepsilon$, e per l'arbitrarietà di ε: $|x^n - y| = 0 \iff y = x^n$ ■.

Osservazione: Il teorema appena dimostrato è uno strumento matematico che ci garantisce dati $y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ l'esistenza e unicità di una soluzione positiva dell'equazione $x^n = y$.

Teorema(Densità di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$): Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, $\exists c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tale che $a < c < b$.

Dimostrazione: Sia $y = 2$. Sia $n = 2$. Considero, l'equazione $x^2 = 2$. Per il teorema di esistenza e unicità della radice $n-esima$, $\exists! x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ tale che $x^2 = 2$. Tale x è denotata con $\sqrt{2}$. Inoltre si ha che $z = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Pertanto $\exists! x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tale che $x^2 = 2$. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Per gli assiomi di $\mathbb{R}$ si ha che $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$. Siano $a' = a - \sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $b' = b - \sqrt{2} \in \mathbb{R}$, risulta che $a' < b'$. Per il teorema di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, $\exists q \in \mathbb{Q}$ tale che $a' < q < b' \implies a - \sqrt{2} < q < b - \sqrt{2}$. Concludiamo che $a - \sqrt{2} + \sqrt{2} < q + \sqrt{2} < b - \sqrt{2} + \sqrt{2} \implies a < q + \sqrt{2} < b$. Risulta che $c = q + \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $a < c < b$.

Proposizione(Proprietà della radice $n-esima$):

1. $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, 0 < y_1, 0 < y_2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ si ha che $\sqrt[n]{y_1 y_2} = \sqrt[n]{y_1}\sqrt[n]{y_2}$. Dimostrazione: Siano $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2 > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Per il teorema di esistenza e unicità della radice $n-esima$, $\exists! x_1 > 0, \exists! x_2 > 0$ tali che $x_1^n = y_1$ e $x_2^n = y_2$. Pertanto $(x_1 x_2)^n = x_1^n x_2^n = y_1 y_2$. Segue che $x_1 x_2 = \sqrt[n]{y_1 y_2}$, da cui segue che $\sqrt[n]{y_1}\sqrt[n]{y_2} = \sqrt[n]{y_1 y_2}$.

2. $\forall y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $\forall m \in \mathbb{Z}$: $\sqrt[n]{y^m} = (\sqrt[n]{y})^n$.

3. $\forall y \in \mathbb{R}, y > 0$, $\forall h \in \mathbb{N}, h \ge 2$, $\forall k \in \mathbb{N}, k \ge 2$: $\sqrt[h]{\sqrt[k]{y}} = \sqrt[hk]{y}$.

4. $\forall y \in \mathbb{R}$, $y > 0, \forall m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1, n_2 \ne 0$, $n_1 \ge 2, n_2 \ge 2$: $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{2} \iff m_1 n_2 = m_2 n_1$. Allora $\sqrt[n_1]{y^{m_1}} = \sqrt[n_2]{y^{m_2}}$.

5. $\forall y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$: $\sqrt[n]{y^n} = y$. Dimostrazione: Sia $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Posto $x = \sqrt[n]{y^n}$, si ha che $x^n = y^n$. Segue che $x = y$, da cui segue che $\sqrt[n]{y^n} = y$.

6. $\forall y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ tali che $y^n \geq 0$: $\sqrt[n]{y^n} = |y|$.

7. $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 > 0, y_2 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, y_1 < y_2$: $\sqrt[n]{y_1} \leq \sqrt[n]{y_2}$.

Definizione(Potenza razionale): Sia $y \in \mathbb{R}, y > 0$. Sia $q \in \mathbb{Q}$, $q = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Si chiama potenza razionali di y di esponente q il numero reale: $y^q = \sqrt[n]{y^m}$.