

# **Geometria 2**

**Francesco Sorce**

Appunti del corso tenuto dai proff.  
Frigerio Roberto, Talpo Mattia e Abate Marco.

Università di Pisa  
Dipartimento di Matematica  
Anno Accademico 2022/2023

# Indice

<b>1</b>	<b>Geometria Proiettiva</b>	<b>4</b>
1.1	Spazi proiettivi e nozioni introduttive . . . . .	4
1.1.1	Spazio proiettivo . . . . .	4
1.1.2	Trasformazioni Proiettive . . . . .	5
1.1.3	Sottospazi proiettivi . . . . .	7
1.1.4	Riferimenti proiettivi . . . . .	11
1.1.5	Coordinate omogenee . . . . .	14
1.2	Spazi proiettivi estendono gli spazi affini . . . . .	15
1.2.1	Carte affini . . . . .	15
1.3	Approfondimento sulle proiettività . . . . .	19
1.3.1	Prospettività . . . . .	19
1.3.2	Corrispondenza tra Affinità e Proiettività . . . . .	20
1.3.3	Trasformazioni lineari fratte . . . . .	22
1.4	Dualità . . . . .	23
1.5	Birapporto . . . . .	26
1.6	Coniche proiettive . . . . .	30
1.6.1	Equivalenza proiettiva e Classificazione delle coniche . . . . .	31
1.6.2	Parte affine e chiusura proiettiva . . . . .	34
1.6.3	Tangenti . . . . .	37
1.6.4	Polarità . . . . .	40
1.6.5	Punti reali e punti complessi . . . . .	41
1.6.6	Sistemi lineari di coniche . . . . .	42
<b>2</b>	<b>Topologia generale</b>	<b>44</b>
2.1	Spazi Metrici . . . . .	44
2.2	Spazi topologici . . . . .	48
2.2.1	Equivalenza topologica di distanze e limitatezza . . . . .	49
2.2.2	La categoria Top . . . . .	51
2.2.3	Chiusura e Parte interna . . . . .	51
2.2.4	Basi e Prebasi . . . . .	53
2.3	Assiomi di Numerabilità e Intorni . . . . .	55
2.3.1	Intorni . . . . .	55
2.3.2	Sistemi fondamentali di intorni e I-numerabilità . . . . .	56
2.3.3	II-numerabilità e Separabilità . . . . .	57
2.3.4	Successioni . . . . .	58
2.4	Topologia di sottospazio . . . . .	60
2.5	Mappe aperte e chiuse . . . . .	63
2.6	Prodotti . . . . .	64

2.6.1	Proiezioni da un prodotto in un fattore	68
2.6.2	Immersioni dei fattori nel prodotto	68
2.6.3	Topologia della convergenza puntuale	69
2.7	Assiomi di separazione	69
2.8	Ricoprimenti fondamentali	76
2.9	Spazi connessi	79
2.9.1	Componenti connesse	83
2.10	Compattezza	86
2.10.1	Sottoinsiemi compatti	88
2.10.2	Compattezza per prodotti	90
2.10.3	Compattificazione di Alexandroff	92
2.10.4	Compattezza in spazi metrici	95
2.11	Topologia Quoziente	106
2.11.1	Passaggio a quoziente e Identificazioni	107
2.11.2	Insiemi saturi	109
2.11.3	Collassamento, Unione disgiunta e Bouquet	110
2.12	Quozienti per azioni di gruppi	113
2.12.1	Assiomi di Separazione e Azioni	115
2.12.2	Domini fondamentali	118
2.13	Topologia dei Proiettivi	121
2.13.1	Caso Reale	121
2.13.2	Caso Complesso	123
2.13.3	Varietà topologiche	125
2.14	Appendice al capitolo 2	127
2.14.1	Esempi e controesempi	127
<b>3</b>	<b>Teoria dell'omotopia e Rivestimenti</b>	<b>138</b>
3.1	La categoria $hTop$	138
3.1.1	Le omotopie passano al quoziente	141
3.1.2	Funtore delle componenti connesse per archi	142
3.2	Gruppo fondamentale	142
3.2.1	Omotopia di cammini	142
3.2.2	Gruppo Fondamentale	144
3.2.3	Cammini chiusi come applicazioni dal cerchio	145
3.2.4	Funtorialità del gruppo fondamentale	148
3.2.5	Dipendenze del gruppo fondamentale	150
3.3	Spazi contraibili e retratti	151
3.3.1	Spazi contraibili	151
3.3.2	Retratti di Deformazione	152
3.4	Rivestimenti	154
3.4.1	Omeomorfismi locali	154
3.4.2	Rivestimenti	155
3.4.3	Sollevamenti	158
3.5	Azione di Monodromia	162
3.5.1	Applicazioni dell'azione di Monodromia	166
3.6	Teorema di Seifert-Van Kampen	167
3.7	Calcolo del Gruppo fondamentale	173
3.7.1	Gruppo fondamentale del prodotto	173
3.7.2	Prodotto libero e gruppi liberi	173
3.7.3	Van Kampen per intersezioni semplicemente connesse	176

3.7.4	Prodotto amalgamato . . . . .	177
3.7.5	Presentazioni di gruppi . . . . .	179
3.7.6	Rango . . . . .	181
3.7.7	Gruppi fondamentali di proiettivi . . . . .	181
3.7.8	Gruppi fondamentali di superfici . . . . .	183
3.8	Rivestimento Universale . . . . .	186
3.8.1	Proprietà categoriche dei rivestimenti . . . . .	189
3.8.2	Rivestimenti regolari e corrispondenza di Galois . . . . .	192
3.8.3	Applicazioni della teoria dei rivestimenti . . . . .	197
<b>4</b>	<b>Funzioni Olomorfe</b>	<b>199</b>
4.1	Richiami di calcolo in più variabili . . . . .	199
4.2	Funzioni olomorfe . . . . .	203
4.3	Analitiche . . . . .	206
4.3.1	Serie di potenze . . . . .	207
4.3.2	Ordine di annullamento . . . . .	210
4.4	Esponenziale e logaritmo complessi . . . . .	212
4.4.1	Esponenziale complesso . . . . .	212
4.4.2	Logaritmo complesso . . . . .	213
4.5	1-Forme complesse . . . . .	217
4.5.1	Integrazione di 1-forme . . . . .	217
4.5.2	Primitive lungo curve e lungo omotopie . . . . .	220
4.5.3	Forme chiuse da funzioni olomorfe . . . . .	223
4.6	Indice di avvolgimento e Formula di Cauchy . . . . .	226
4.6.1	Olomorfa implica analitica . . . . .	227
4.7	Applicazioni . . . . .	230
4.7.1	Disuguaglianze di Cauchy e Teorema di Liouville . . . . .	230
4.7.2	Principio della media . . . . .	231
4.7.3	Principio del massimo . . . . .	232
4.8	Singularità . . . . .	236
4.8.1	Serie di Laurent . . . . .	237
4.8.2	Tipi di singularità . . . . .	239
4.9	Funzioni meromorfe e Residui . . . . .	241
4.9.1	Derivata Logaritmica . . . . .	243
<b>A</b>	<b>Appendice: Teoria delle categorie</b>	<b>246</b>
A.1	Definizione . . . . .	246
A.2	Proprietà universali . . . . .	249
A.3	Esempi di categorie . . . . .	251
<b>B</b>	<b>Ringraziamenti</b>	<b>252</b>

# Capitolo 1

## Geometria Proiettiva

La geometria proiettiva (per i nostri fini) è lo studio delle proprietà degli spazi proiettivi, i quali sono una generalizzazione “comoda” degli spazi affini ai quali siamo abituati. In questi spazi molte delle proprietà che valgono per gli spazi vettoriali restano intatte, ma a queste si aggiunge la possibilità di vedere lo spazio in modo più fluido (per esempio si elimina la distinzione tra rette incidenti e rette parallele sul piano proiettivo). Gli spazi proiettivi rendono la vita più semplice nello studio di curve algebriche, per esempio ellissi, parabole e iperboli sono in realtà espressioni diverse della stessa classe di curve se viste nel piano proiettivo.

### 1.1 Spazi proiettivi e nozioni introduttive

#### 1.1.1 Spazio proiettivo

Definiamo l’oggetto centrale dei nostri studi.

**Definizione 1.1** (Spazio Proiettivo).

Dato  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ , definiamo il suo **spazio proiettivo associato** come

$$\mathbb{P}(V) = V \setminus \{0\} / \sim,$$

dove  $v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  t.c.  $w = \lambda v$ .

Intuitivamente la relazione collassa tutti i vettori appartenenti alla stessa retta in un elemento. Possiamo quindi pensare allo spazio proiettivo come l’insieme delle rette o direzioni in  $V$ .

Troviamo in effetti la seguente bigezione naturale:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V) & \longleftrightarrow & \text{rette di } V \\ [v] & \longmapsto & \text{Span}(v) \\ [v_r] & \longleftarrow & r \end{array}$$

dove  $v_r$  è un qualsiasi vettore in  $r \setminus \{0\}$ .

**Esempio 1.2** (Proiettivi dello spazio banale e di una retta).

Osserviamo che  $\mathbb{P}(\{0\}) = \emptyset / \sim = \emptyset$ , mentre per  $v \neq 0$

$$\mathbb{P}(\text{Span}(v)) = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\} / \sim = \{[v]\},$$

ovvero lo spazio proiettivo associato ad una retta contiene un solo elemento.

**Definizione 1.3** (Dimensione di uno spazio proiettivo).

Definiamo la **dimensione** dello spazio proiettivo  $\mathbb{P}(V)$  come

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{P}(V) = \dim_{\mathbb{K}} V - 1.$$

*Osservazione 1.4.*

Gli spazi proiettivi non sono spazi vettoriali. Come vedremo sono in un certo senso una estensione degli spazi affini.

**Definizione 1.5** (Punti, Rette e piani proiettivi).

Definiamo i seguenti termini:

- un **punto proiettivo** è uno spazio proiettivo di dimensione 0,
- una **retta proiettiva** è uno spazio proiettivo di dimensione 1,
- un **piano proiettivo** è uno spazio proiettivo di dimensione 2.

**Definizione 1.6** (Spazio proiettivo standard).

Definiamo  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}\mathbb{P}^n$  lo **spazio proiettivo standard** di dimensione  $n$ . Se il campo risulta chiaro da contesto scriveremo solo  $\mathbb{P}^n$ .

### 1.1.2 Trasformazioni Proiettive

Studiamo ora quali mappe preservano la struttura di spazio proiettivo.

**Definizione 1.7** (Trasformazione proiettiva).

Una funzione  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  è una **trasformazione proiettiva** se  $\exists \varphi : V \rightarrow W$  lineare tale che

$$f([v]) = [\varphi(v)].$$

In questa notazione affermiamo che  $f$  è **indotta** da  $\varphi$ .

**Notazione 1.8.**

Se  $f$  è la trasformazione proiettiva indotta da  $\varphi$  scriviamo  $f = [\varphi]$ .

*Osservazione 1.9.*

Se  $f$  è una trasformazione proiettiva ben definita indotta da  $\varphi$  allora  $\varphi$  è iniettiva.

*Dimostrazione.*

Supponiamo per assurdo  $\ker \varphi \neq \{0\}$ . Sia quindi  $v \in \ker \varphi \setminus \{0\}$ . Osserviamo che

$$f([v]) = [\varphi(v)] = [0],$$

ma  $[0] \notin \mathbb{P}(W)$ , quindi  $f$  non sarebbe ben definita.  $\nexists$  □

*Osservazione 1.10.*

Ogni mappa lineare iniettiva  $\varphi : V \rightarrow W$  induce una trasformazione proiettiva  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  tramite  $[v] \mapsto [\varphi(v)]$ .

*Dimostrazione.*

Verifichiamo la buona definizione. Osserviamo che per  $v \neq 0$  abbiamo dalla iniettività di  $\varphi$  che  $\varphi(v) \neq 0$ . Se  $[v] = [w]$ , per definizione  $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tale che

$$[\varphi(v)] = [\varphi(\lambda w)] = [\lambda \varphi(w)] = [\varphi(w)].$$

□

*Osservazione 1.11.*

Tutte le trasformazioni proiettive sono iniettive.

*Dimostrazione.*

Ricaviamo la definizione di iniettività. Supponiamo  $f([v]) = f([w])$ . Sia  $\varphi$  una mappa che induce  $f$ , da cui

$$[\varphi(v)] = [\varphi(w)].$$

Applicando la definizione delle classi di equivalenza

$$\varphi(v) = \lambda \varphi(w) = \varphi(\lambda w).$$

Essendo  $\varphi$  iniettiva troviamo che  $v = \lambda w$  e quindi  $[v] = [w]$  come volevamo mostrare. □

*Osservazione 1.12.*

$id_{\mathbb{P}(V)}$  è proiettiva ed è indotta da  $id_V$ .

**Proposizione 1.13.**

Date  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  e  $g : \mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(Z)$  proiettive abbiamo che  $g \circ f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(Z)$  è proiettiva.

*Dimostrazione.*

Sia  $\varphi$  una mappa che induce  $f$  e  $\psi$  una che induce  $g$ . Osserviamo che  $\psi \circ \varphi$  induce  $g \circ f$ , infatti

$$[\psi \circ \varphi(v)] = g([\varphi(v)]) = g \circ f([v]).$$

□

Caratterizziamo ora gli isomorfismi di spazi proiettivi

**Definizione 1.14** (Isomorfismo proiettivo).

Una trasformazione proiettiva surgettiva è chiamata **isomorfismo proiettivo**.

La seguente proposizione ci permette di giustificare la definizione

**Proposizione 1.15** (Caratterizzazione degli isomorfismi proiettivi).

Sia  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  proiettiva. Le affermazioni seguenti sono equivalenti

1.  $f$  surgettiva,
2.  $f$  bigettiva,
3.  $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$ ,
4.  $f$  invertibile e  $f^{-1} : \mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  è proiettiva.

*Dimostrazione.*

1  $\iff$  2) Ovvio dato che  $f$  è iniettiva.

2  $\implies$  3) Sia  $\varphi$  una mappa che induce  $f$ . Mostriamo che  $\varphi$  è surgettiva:

Chiaramente  $0 = \varphi(0)$ , quindi basta verificare che  $W \setminus \{0\} \subset \text{Imm } \varphi$ . Sia quindi  $w \in W \setminus \{0\}$ , da cui  $[w] \in \mathbb{P}(W)$ . Dato che  $f$  è surgettiva  $\exists [v] \in \mathbb{P}(V)$  tale che  $[w] = f([v]) = [\varphi(v)]$ , da cui  $w = \lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v)$ , quindi  $w \in \text{Imm } \varphi$ .

Abbiamo quindi verificato che  $\varphi$  è un isomorfismo tra  $V$  e  $W$ , dunque

$$\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1 = \dim W - 1 = \dim \mathbb{P}(W).$$

3  $\implies$  4) Sia  $\varphi$  lineare che induce  $f$ . Sappiamo che  $\varphi$  è iniettiva e che  $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$  (e quindi che  $\dim V = \dim W$ ), dunque  $\varphi$  è un isomorfismo. L'inversa  $\varphi^{-1}$  di  $\varphi$  è ben definita ed è un isomorfismo di spazi vettoriali. Verifichiamo che  $f^{-1} = [\varphi^{-1}]$ .

$$\begin{aligned} [\varphi^{-1}]f([v]) &= [\varphi^{-1}][\varphi(v)] = [\varphi^{-1}\varphi(v)] = [v] \\ f[\varphi^{-1}](v) &= f([\varphi^{-1}(v)]) = [\varphi\varphi^{-1}(v)] = [v]. \end{aligned}$$

4  $\implies$  1) Essendo  $f$  invertibile è anche surgettiva. □

**Definizione 1.16** (Proiettività).

Una trasformazione proiettiva  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  è definita **proiettività**. Denotiamo l'insieme delle proiettività con  $\mathbb{P}GL(V)$ .

*Osservazione 1.17.*

Ogni proiettività è un isomorfismo proiettivo.

*Osservazione 1.18.*

Le proiettività di  $\mathbb{P}(V)$  munito della composizione è un gruppo.

*Osservazione 1.19* (Punti fissi delle proiettività).

Possiamo caratterizzare i punti fissi delle proiettività. Sia  $f$  una proiettività indotta da  $\varphi$  e  $[v]$  un punto fisso:

$$[v] = f([v]) = [\varphi(v)],$$

da cui  $\lambda v = \varphi(v)$ , cioè  $v$  è un autovettore di  $\varphi$ . Similmente se  $v$  è un autovettore di  $\varphi$  abbiamo che  $[v]$  è un punto fisso per le stesse relazioni.

### 1.1.3 Sottospazi proiettivi

Poniamo per semplicità notazionale  $\pi : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$  la proiezione per la relazione definita all'inizio del capitolo.

**Definizione 1.20** (Grassmanniana (NON DATA DURANTE IL CORSO)).

Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  e sia  $k \in \{0, \dots, n\}$ . La **grassmanniana**  $k$  di  $V$  sono l'insieme di tutti i sottospazi vettoriali di  $V$  di dimensione  $k$

$$Gr_k(V) = \{W \mid V \supseteq W \text{ ssp. vett., } \dim W = k\}.$$

Poniamo inoltre

$$Gr(k, n) = Gr_k(\mathbb{K}^n).$$



**Definizione 1.21** (Sottospazio proiettivo).

Un **sottospazio proiettivo**  $S$  di  $\mathbb{P}(V)$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{P}(V)$  tale che

$$S = \pi(H \setminus \{0\}), \text{ per } H \text{ sottospazio vettoriale di } V.$$

*Osservazione 1.22.*

Dalla definizione segue che un sottospazio proiettivo è uno spazio proiettivo.

Più precisamente

$$\pi(H \setminus \{0\}) = \mathbb{P}(H).$$

**Definizione 1.23** (Iperpiano proiettivo).

Un **iperpiano** di  $\mathbb{P}(V)$  è un sottospazio proiettivo  $S$  di  $\mathbb{P}(V)$  tale che  $\dim S = \dim \mathbb{P}(V) - 1$ .

**Proposizione 1.24** (Corrispondenza tra sottospazi proiettivi e vettoriali).

Se  $S$  è un sottospazio proiettivo come sopra abbiamo che  $\pi^{-1}(S) = H \setminus \{0\}$ .

In particolare abbiamo una bigezione tra i sottospazi vettoriali di  $V$  e i sottospazi proiettivi di  $\mathbb{P}(V)$

$$\begin{array}{ccc} \{ssp \text{ vett. di } V\} & \longleftrightarrow & \{ssp \text{ prj. di } \mathbb{P}(V)\} \\ H & \longmapsto & \pi(H \setminus \{0\}) \\ \pi^{-1}(S) \cup \{0\} & \longleftarrow & S \end{array}$$

*Dimostrazione.*

Osserviamo che

$$\pi^{-1}(S) = \bigcup_{[v] \in S} \pi^{-1}([v]) = \bigcup_{v \in H \setminus \{0\}} \pi^{-1}([v]).$$

Procediamo per doppia inclusione. Dato che  $\pi(v) = [v]$  abbiamo che  $v \in \pi^{-1}([v])$ , quindi

$$\bigcup_{v \in H \setminus \{0\}} \pi^{-1}([v]) \supseteq H \setminus \{0\}.$$

Osserviamo che  $\pi^{-1}([v]) = \{w \mid [w] = [v]\} = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\}$ , quindi  $\forall w \in \pi^{-1}([v])$  abbiamo che  $w = \lambda v \in H \setminus \{0\}$ . Allora abbiamo anche

$$\bigcup_{v \in H \setminus \{0\}} \pi^{-1}([v]) \subseteq H \setminus \{0\}.$$

□

*Osservazione 1.25* (Grassmaniane proiettive (NON DATA DURANTE IL CORSO)).

La corrispondenza appena mostrata si comporta bene con le dimensioni, cioè  $\dim \mathbb{P}(H) = \dim H - 1$  e  $\dim \pi(S)^{-1} \cup \{0\} = \dim S + 1$ . Questo ci dice che

$$Gr_k(\mathbb{P}(V)) \cong Gr_{k+1}(V)$$

dove  $Gr_k(\mathbb{P}(V))$  è definito in modo analogo alle grassmanniane per spazi vettoriali ma considerando sottospazi proiettivi.

Consideriamo adesso l'intersezione e la somma di sottospazi proiettivi.

**Proposizione 1.26** (Sottospazi proiettivi sono stabili per intersezione).  
 Siano  $S_i$ ,  $i \in I$  sottospazi proiettivi di  $\mathbb{P}(V)$ . Si ha che

$$\bigcap_{i \in I} S_i \text{ è un sottospazio proiettivo di } \mathbb{P}(V).$$

*Dimostrazione.*

Sia  $H_i$  il sottospazio di  $V$  tale che  $S_i = \mathbb{P}(H_i)$ .

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} S_i &= \bigcap_{i \in I} \pi(H_i \setminus \{0\}) = \{[v] \mid \forall i \in I, [v] \in \pi(H_i \setminus \{0\})\} = \\ &= \{[v] \mid \forall i \in I, \exists w_i \in H_i \setminus \{0\} : [w_i] = [v]\} = \\ &= \{[v] \mid \forall i \in I, v \in H_i \setminus \{0\}\} = \pi\left(\bigcap_{i \in I} (H_i \setminus \{0\})\right) = \\ &= \pi\left(\left(\bigcap_{i \in I} H_i\right) \setminus \{0\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} H_i\right). \end{aligned}$$

□

*Osservazione 1.27.*

$$\mathbb{P}(V) \cap \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(V \cap W).$$

Come per gli spazi vettoriali, l'unione di sottospazi proiettivi non è in generale un sottospazio proiettivo. Definiamo allora una somma.

**Definizione 1.28** (Sottospazio proiettivo generato).

Sia  $A \subseteq \mathbb{P}(V)$  un sottoinsieme di  $\mathbb{P}(V)$ , il **sottospazio proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$  generato da  $A$**  è il più piccolo sottospazio proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$  contenente  $A$  e viene indicato con  $L(A)$ .

$$L(A) = \bigcap_{\substack{S \text{ ssp. prj.} \\ A \subseteq S}} S.$$

L'intersezione non è vuota perché  $A \subseteq \mathbb{P}(V)$  e  $\mathbb{P}(V)$  è un sottospazio proiettivo di se stesso.

*Osservazione 1.29.*

La definizione si estende ad una somma tra sottospazi proiettivi considerando il generato dell'unione

$$L(S_1, S_2) = L(S_1 \cup S_2).$$

**Proposizione 1.30** (Traduzione tra somme di proiettivi e vettoriali).

Se  $S_1 = \mathbb{P}(H_1)$  e  $S_2 = \mathbb{P}(H_2)$  per  $H_1, H_2$  sottospazi di  $V$  abbiamo che

$$L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(H_1 + H_2).$$

*Dimostrazione.*

Procediamo per doppia inclusione.

⊆) Dato che  $H_1 \subseteq H_1 + H_2$  abbiamo che

$$S_1 = \mathbb{P}(H_1) = \pi(H_1 \setminus \{0\}) \subseteq \pi((H_1 + H_2) \setminus \{0\}) = \mathbb{P}(H_1 + H_2).$$

Analogamente  $S_2 \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2)$ . Abbiamo quindi che  $\mathbb{P}(H_1 + H_2)$  è un sottospazio proiettivo che contiene  $S_1$  e  $S_2$ , quindi per la minimalità del generato

$$L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2).$$

$\supseteq$ ) Essendo  $L(S_1, S_2)$  un sottospazio proiettivo esiste un sottospazio  $H$  di  $V$  tale che  $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(H)$ . Abbiamo quindi che  $H = \pi^{-1}(L(S_1, S_2)) \cup \{0\}$ .

$$S_1 \subseteq L(S_1, S_2) \implies H_1 = \pi^{-1}(S_1) \cup \{0\} \subseteq \pi^{-1}(L(S_1, S_2)) \cup \{0\} = H.$$

Analogamente  $H_2 \subseteq H$ , quindi  $H_1 + H_2 \subseteq H$ , da cui

$$\mathbb{P}(H_1 + H_2) \subseteq \mathbb{P}(H) = L(S_1, S_2).$$

□

**Proposizione 1.31** (Trasformazioni proiettive rispettano i generati).

Dato  $S \subseteq \mathbb{P}(V)$  e  $f$  una trasformazione proiettiva abbiamo che

$$f(L(S)) = L(f(S)).$$

*Dimostrazione.*

Siano  $H = \pi^{-1}(S)$  e  $\varphi$  tale che  $f = [\varphi]$ . Osserviamo che  $f(S) = f(\pi(H)) = \pi(\varphi(H))$

$$\begin{aligned} f(L(S)) &= f(\pi(\text{Span}(H) \setminus \{0\})) = \pi(\varphi(\text{Span}(H) \setminus \{0\})) = \\ &= \pi(\text{Span}(\varphi(H)) \setminus \{0\}) = \pi(\text{Span}(\pi^{-1}(f(S))) \setminus \{0\}) = \\ &= L(f(S)). \end{aligned}$$

□

Vediamo ora come generalizzare la formula di Grassmann.

**Teorema 1.32** (Formula di Grassmann proiettiva).

Dati  $S_1, S_2$  sottospazi proiettivi di  $\mathbb{P}(V)$  abbiamo che

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2.$$

*Dimostrazione.*

Siano  $H_1$  e  $H_2$  sottospazi vettoriali di  $V$  tali che  $S_1 = \mathbb{P}(H_1)$  e  $S_2 = \mathbb{P}(H_2)$ . Per la formula di Grassmann vettoriale abbiamo che

$$\dim H_1 + H_2 = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim H_1 \cap H_2$$

$$\dim \mathbb{P}(H_1 + H_2) + 1 = \dim \mathbb{P}(H_1) + 1 + \dim \mathbb{P}(H_2) + 1 - \dim \mathbb{P}(H_1 \cap H_2) - 1$$

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2.$$

□

**Corollario 1.33** (Criterio per intersezione non vuota).

Se  $S_1, S_2$  sono sottospazi proiettivi tali che  $\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}(V)$  allora  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ .

*Dimostrazione.*

Calcoliamo la dimensione

$$\begin{aligned}\dim S_1 \cap S_2 &= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim L(S_1, S_2) \geq \\ &\geq \dim \mathbb{P}(V) - \dim L(S_1, S_2) \geq 0.\end{aligned}$$

Dato che  $\dim \emptyset = -1$  abbiamo che  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ . □

*Osservazione 1.34.*

Sui piani proiettivi non esistono “rette parallele”. Più precisamente, date  $r_1, r_2$  sottospazi proiettivi di  $\mathbb{P}(V)$  con  $\dim \mathbb{P}(V) = 2$  e  $\dim r_1 = \dim r_2 = 1$  abbiamo che  $r_1 = r_2$  o  $r_1 \cap r_2 = \{P\}$  con  $P$  punto proiettivo.

*Dimostrazione.*

Supponiamo  $r_1 \neq r_2$ , da cui  $\dim L(r_1, r_2) = 2$ . La tesi segue dal seguente calcolo:

$$\dim r_1 \cap r_2 = \dim r_1 + \dim r_2 - \dim L(r_1, r_2) = 1 + 1 - 2 = 0,$$

ovvero  $r_1 \cap r_2$  è un punto proiettivo. □

#### 1.1.4 Riferimenti proiettivi

Estendiamo i parallelismi con gli spazi vettoriali cercando un equivalente per indipendenza lineare e basi.

**Definizione 1.35** (Punti indipendenti).

Siano  $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}(V)$ , essi sono **indipendenti** se scelti  $v_1, \dots, v_k \in V$  tali che  $[v_i] = P_i$  allora  $v_1, \dots, v_k$  sono linearmente indipendenti.

La definizione è indipendente dai rappresentanti scelti, infatti per  $\lambda_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  abbiamo che

$$v_1, \dots, v_k \text{ lin. indipendenti} \iff \lambda_1 v_1, \dots, \lambda_k v_k \text{ lin. indipendenti.}$$

**Definizione 1.36** (Posizione generale).

Dati  $P_1, \dots, P_k$  essi sono in **posizione generale** se ogni sottoinsieme di essi costituito da  $h$  punti distinti con  $h \leq n + 1$  è indipendente.

*Osservazione 1.37.*

Se  $k \leq n + 1$  allora la definizione coincide con l'indipendenza. Se  $k > n + 1$  la definizione è equivalente a richiedere l'indipendenza di tutte le  $(n + 1)$ -uple di punti nell'insieme.

**Definizione 1.38** (Riferimento proiettivo).

Un **riferimento proiettivo** di  $\mathbb{P}(V)$  con  $\dim \mathbb{P}(V) = n$  è una  $(n + 2)$ -upla di punti in posizione generale.

L'ultimo punto nel riferimento viene chiamato **punto unità**, mentre gli altri sono detti **punti fondamentali**.

**Definizione 1.39** (Base normalizzata).

Dato  $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$  un riferimento proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$ , una **base normalizzata di  $V$  associata a  $\mathcal{R}$**  è una base  $(v_0, \dots, v_n)$  tali che

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, [v_i] = P_i \text{ e } P_{n+1} = [v_0 + \dots + v_n].$$

**Teorema 1.40** (Esistenza e unicità della base normalizzata).

Dato  $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$  un riferimento proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$  abbiamo che  $\exists \mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$  base normalizzata.

Se  $\mathcal{B}' = \{u_0, \dots, u_n\}$  è una base normalizzata di  $\mathcal{R}$  abbiamo inoltre che  $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tale che  $u_i = \lambda v_i$ .

*Dimostrazione.*

Siano  $w_0, \dots, w_{n+1} \in V$  tali che  $[w_i] = P_i$  per  $i \in \{0, \dots, n, n+1\}$ . Essendo  $\mathcal{R}$  un riferimento proiettivo,  $w_0, \dots, w_n$  sono  $n+1$  vettori linearmente indipendenti in uno spazio di dimensione  $n+1$ , quindi sono una base. Esistono quindi  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  tali che  $w_{n+1} = \sum_{i=0}^n \lambda_i w_i$ . Osserviamo che  $\lambda_i \neq 0$ , altrimenti i vettori  $w_0, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_{n+1}$  non sarebbero linearmente indipendenti e quindi  $\mathcal{R}$  non sarebbe in posizione generale.

Siano allora  $v_i = \lambda_i w_i$  per  $i \in \{0, \dots, n\}$  mentre  $v_{n+1} = w_{n+1}$ . Chiaramente  $[v_i] = [w_i] = P_i$  ma stavolta  $v_{n+1} = \sum_{i=0}^n v_i$  per costruzione, ovvero  $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$  è una base normalizzata associata a  $\mathcal{R}$ .

Sia ora  $\mathcal{B}' = \{u_0, \dots, u_n\}$  un'altra base normalizzata di  $\mathcal{R}$ . Dato che  $[u_i] = P_i = [v_i]$  abbiamo che  $\exists \mu_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tali che  $v_i = \mu_i u_i$ . Inoltre abbiamo che

$$\mu_{n+1} \sum_{i=0}^n u_i = \mu_{n+1} u_{n+1} = v_{n+1} = \sum_{i=0}^n v_i = \sum_{i=0}^n \mu_i u_i,$$

da cui

$$0 = \sum_{i=0}^n (\mu_i - \mu_{n+1}) u_i.$$

Essendo  $u_0, \dots, u_n$  una base abbiamo per indipendenza lineare che  $\forall i, \mu_i = \mu_{n+1}$ , ovvero  $\mathcal{B}'$  e  $\mathcal{B}$  coincidono a meno di un fattore invertibile.  $\square$

*Osservazione 1.41.*

Una differenza sostanziale tra la geometria proiettiva e l'algebra lineare è che non è possibile estendere riferimenti proiettivi di sottospazi proiettivi a riferimenti di sottospazi che li estendono.

Se  $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_{n+1}\}$  è un riferimento proiettivo di  $S$  sottospazio proiettivo di  $H$  osserviamo che  $\mathcal{R}$  non sono punti in posizione generale letti come punti di  $H$ . Infatti se la dimensione aumenta anche solo di 1 è necessario che le  $(n+2)$ -uple di punti siano indipendenti ma da come sappiamo dalla definizione di base normalizzata il punto unità si scrive come somma dei punti fondamentali passando ad una base normalizzata.

Possiamo finalmente dare un criterio di uguaglianza tra trasformazioni proiettive.

**Teorema 1.42** (Trasformazioni proiettive sono univocamente determinate dal valore su un riferimento).

Siano  $f, g : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  trasformazioni proiettive indotte da  $\varphi$  e  $\psi$  rispettivamente. Sia  $\mathcal{R}$  un riferimento proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$ . Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1.  $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tale che  $\varphi = \lambda \psi$ ;
2.  $f = g$ ;

3.  $\forall P \in \mathcal{R}, f(P) = g(P)$ .

*Dimostrazione.*

1  $\implies$  2) Calcolando

$$f([v]) = [\varphi(v)] = [\lambda\psi(v)] = [\psi(v)] = g([v]).$$

2  $\implies$  3) Ovvio perché  $\mathcal{R} \subset \mathbb{P}(V)$ .

3  $\implies$  1) Fissiamo una base normalizzata  $\{v_0, \dots, v_n\}$  associata a  $\mathcal{R}$ . Sappiamo che

$$[\varphi(v_i)] = f(P_i) = g(P_i) = [\psi(v_i)],$$

quindi  $\exists \lambda_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tali che  $\varphi(v_i) = \lambda_i \psi(v_i)$ .

Consideriamo cosa succede rispetto al punto unità:

$$\begin{aligned} \varphi(v_{n+1}) &= \lambda_{n+1} \psi(v_{n+1}) \\ \lambda_{n+1} \sum \psi(v_i) &= \sum \varphi(v_i) = \sum \lambda_i \psi(v_i) \\ 0 &= \sum (\lambda_i - \lambda_{n+1}) \psi(v_i). \end{aligned}$$

Essendo  $\psi$  iniettiva,  $\psi(v_0), \dots, \psi(v_n)$  sono linearmente indipendenti, quindi  $\forall i$  troviamo  $\lambda_i = \lambda_{n+1}$ .

Osserviamo quindi che  $\lambda_{n+1}\psi$  e  $\varphi$  coincidono su  $\{v_0, \dots, v_n\}$ , che è una base, dunque  $\varphi = \lambda_{n+1}\psi$ .  $\square$

**Corollario 1.43.**

$$\mathbb{P}GL(V) \cong GL(V)/N$$

dove  $N = \{\lambda id \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\} \triangleleft GL(V)$

*Dimostrazione.*

Consideriamo la mappa

$$\begin{array}{ccc} GL(V) & \longrightarrow & \mathbb{P}GL(V) \\ \varphi & \longmapsto & [\varphi] \end{array}$$

Essa è un omomorfismo, è surgettiva per costruzione e se  $[\varphi] = id_{\mathbb{P}(V)} = [id_V]$  abbiamo che  $\varphi = \lambda id_V$  per il teorema sopra. In altri termini il nucleo dell'omomorfismo è  $N$ . La tesi segue applicando il primo teorema di isomorfismo.  $\square$

**Notazione 1.44** (Proiettività standard).

Le proiettività di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  formano un gruppo che denotiamo  $\mathbb{P}GL(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}GL_{n+1}(\mathbb{K})$ .

L'ultimo  $n+1$  corrisponde alla taglia delle matrici che rappresenteranno le proiettività, non la dimensione dello spazio su cui agiscono.

Concludiamo la sezione introducendo un teorema che ci permette di identificare trasformazioni proiettive definendole su un riferimento.

**Teorema 1.45** (Teorema fondamentale delle trasformazioni proiettive).

Siano  $\mathbb{P}(V)$  e  $\mathbb{P}(W)$  spazi proiettivi su  $\mathbb{K}$  tali che  $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W) = n$ . Fissiamo  $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$  e  $\mathcal{R}' = (P'_0, \dots, P'_{n+1})$  riferimenti proiettivi di  $\mathbb{P}(V)$  e  $\mathbb{P}(W)$  rispettivamente. Si ha che esiste un'unica trasformazione proiettiva  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  tale che  $\forall i \in \{0, \dots, n+1\}$ ,  $f(P_i) = P'_i$ .

*Dimostrazione.*

Osserviamo che l'unicità discende dai criteri di uguaglianza per trasformazioni proiettive mostrati prima (1.42). Infatti se  $f$  e  $f'$  soddisfano le ipotesi allora coincidono su  $\mathcal{R}$ .

Mostriamo ora l'esistenza. Siano  $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$  e  $\mathcal{B}' = \{w_0, \dots, w_n\}$  basi normalizzate associate a  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  rispettivamente. Sia  $\varphi : V \rightarrow W$  la mappa lineare tale che  $\forall i, \varphi(v_i) = w_i$ . Osserviamo che  $\varphi$  è iniettiva perché ha rango massimo, dunque ha senso porre  $f = [\varphi]$ . Per costruzione abbiamo

$$f(P_i) = f([v_i]) = [\varphi(v_i)] = [w_i] = P'_i$$

per i punti fondamentali di  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$ , basta controllare il punto unità:

$$f(P_{n+1}) = f([v_0 + \dots + v_n]) = [\varphi(v_0 + \dots + v_n)] = [w_0 + \dots + w_n] = P'_{n+1}.$$

□

### 1.1.5 Coordinate omogenee

Come per il caso vettoriale, è spesso utile ricorrere a un sistema di coordinate. Per capire come definirle studiamo il caso di  $\mathbb{P}^n(K)$ . Per definizione abbiamo

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim = \{[(x_0, \dots, x_n)], \text{ con entrate non tutte nulle}\}.$$

**Definizione 1.46** (Riferimento proiettivo canonico).

Il **riferimento standard (o canonico)** di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  è il riferimento proiettivo che ha come base normalizzata la base canonica di  $\mathbb{K}^{n+1}$ .

Affermiamo che  $[(x_0, \dots, x_n)]$  ha **coordinate omogenee**  $[x_0, \dots, x_n]$  o  $[x_0 : \dots : x_n]$  rispetto al riferimento canonico di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ .

*Osservazione 1.47.*

Il riferimento proiettivo standard consiste dei punti con coordinate omogenee:

$$[1 : 0 : \dots : 0], [0 : 1 : 0 : \dots : 0], \dots, [0 : \dots : 0 : 1], [1 : 1 : \dots : 1].$$

Cerchiamo ora di definire le coordinate omogenee per un qualsiasi spazio proiettivo.

**Definizione 1.48** (Coordinate omogenee).

Fissiamo  $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_{n+1}\}$  un riferimento proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$ . Dato  $P \in \mathbb{P}(V)$  le sue **coordinate omogenee** rispetto a  $\mathcal{R}$  sono date da una delle seguenti equivalenti definizioni:

- Se  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  è l'unico isomorfismo proiettivo che porta  $\mathcal{R}$  nel riferimento proiettivo canonico di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  allora le coordinate omogenee di  $P$  sono  $f(P)$ .
- Se  $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$  è una base normalizzata associata a  $\mathcal{R}$  e  $P = [v]$  consideriamo la combinazione lineare  $v = \sum_{i=0}^n a_i v_i$ . Le coordinate omogenee di  $P$  rispetto a  $\mathcal{R}$  sono  $[a_0 : \dots : a_n]$ .

Come per il caso vettoriale, possiamo rappresentare le trasformazioni proiettive con matrici e sottospazi proiettivi come luoghi di zeri di equazioni.

**Definizione 1.49** (Matrice associata a isomorfismo proiettivo).

Sia  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  un isomorfismo proiettivo e siano  $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$  riferimenti proiettivi di  $\mathbb{P}(V)$  e  $\mathbb{P}(W)$  rispettivamente. Siano  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  le relative basi normalizzate. Se  $\varphi$  è una mappa lineare che induce  $f$  allora  $f$  è **rappresentata** da  $M = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) \in M(n+1, \mathbb{K})$ .

*Osservazione 1.50* (Prodotto matrice-coordinate omogenee).

Dati  $P = [v] \in \mathbb{P}(V)$ ,  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ ,  $f = [\varphi]$ ,  $M$  una matrice che rappresenta  $f$ ,  $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$  un riferimenti proiettivi di  $\mathbb{P}(V)$  e  $\mathbb{P}(W)$  rispettivamente con  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  basi normalizzate, se indichiamo il passaggio a coordinate omogenee rispetto a  $\mathcal{R}$  con  $[\cdot]_{\mathcal{R}}$  e il passaggio a coordinate rispetto a  $\mathcal{B}$  con  $[\cdot]_{\mathcal{B}}$  (similmente per  $\mathcal{R}'$  e  $\mathcal{B}'$ ) si ha che

$$\begin{aligned} [f(P)]_{\mathcal{R}'} &= [[\varphi(v)]]_{\mathcal{R}'} = [[[\cdot]_{\mathcal{B}'}^{-1}(M[v]_{\mathcal{B}})]]_{\mathcal{R}'} = \\ &= [[[\cdot]_{\mathcal{R}'}^{-1}([M[v]_{\mathcal{B}}])]_{\mathcal{R}'} = \\ &= [M[v]_{\mathcal{B}}]. \end{aligned}$$

**Notazione 1.51.**

Se  $M$  è una matrice,  $P \in \mathbb{P}(V)$  con  $P = [v]$ ,  $\mathcal{R}$  è un riferimento proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$  e  $\mathcal{B}$  è una sua base normalizzata poniamo

$$M[P]_{\mathcal{R}} = [M][P]_{\mathcal{R}} \doteq [M[v]_{\mathcal{B}}].$$

**Definizione 1.52** (Equazioni cartesiane proiettive).

Dato  $S$  un sottospazio proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$  sia  $W$  il sottospazio vettoriale di  $V$  tale che  $S = \mathbb{P}(W)$ . Fissato un riferimento proiettivo su  $\mathbb{P}(V)$  individuiamo univocamente una base normalizzata di  $V$ , quindi  $W$  è esprimibile come luogo di zeri di  $\dim V - \dim W$  equazioni. Chiamiamo queste le **equazioni cartesiane per  $S$  rispetto a  $\mathcal{R}$** .

*Osservazione 1.53.*

Con le notazioni appena usate, il numero di equazioni si esprime in termini di  $S$  e  $\mathbb{P}(V)$  come

$$\dim \mathbb{P}(V) - \dim S = \dim V - \dim W$$

## 1.2 Spazi proiettivi estendono gli spazi affini

Approfondiamo la geometria di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  come oggetto  $n$ -dimensionale che “contiene”  $\mathbb{K}^n$ .

### 1.2.1 Carte affini

Consideriamo cosa succede quando fissiamo una coordinata proiettiva a 0

**Definizione 1.54** (Iperpiano coordinato).

Dato  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  costruiamo per ogni indice  $i \in \{0, \dots, n\}$  il seguente sottoinsieme di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

$$H_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid x_i = 0\}.$$

Chiamiamo  $H_i$  l' $i$ -esimo **iperpiano coordinato**.



*Osservazione 1.55.*

Considerati come spazi proiettivi

$$H_i \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}).$$

**Definizione 1.56** (Carta affine).

Definiamo l' $i$ -esima **carta affine** come

$$U_i = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus H_i.$$

**Proposizione 1.57** (Le carte affini sono “isomorfe” all'affine).

*Esiste una bigezione naturale tra  $U_i$  e  $\mathbb{K}^n$  per ogni  $i$ .*

*Dimostrazione.*

Definiamo la seguente mappa

$$J_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & U_i \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & [x_1 : \dots : x_i : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n] \end{array}$$

La mappa è chiaramente ben definita. Poniamo ora la seguente definizione

$$J_i^{-1} : \begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ [x_0 : \dots : x_n] & \longmapsto & \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \end{array}$$

Anche questa è ben definita in quanto se  $[x_1, \dots, x_n] \in U_i$  allora  $x_i \neq 0$ , inoltre cambiando rappresentante per le coordinate omogenee troviamo la stessa  $n$ -upla in  $\mathbb{K}^n$

$$\begin{aligned} J_i^{-1}([\lambda x_0, \dots, \lambda x_n]) &= \left( \frac{\lambda x_0}{\lambda x_i}, \dots, \frac{\lambda x_{i-1}}{\lambda x_i}, \frac{\lambda x_{i+1}}{\lambda x_i}, \dots, \frac{\lambda x_n}{\lambda x_i} \right) = \\ &= \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right). \end{aligned}$$

Possiamo ora verificare con relativa facilità che  $J_i \circ J_i^{-1} = id_{U_i}$  e che  $J_i^{-1} \circ J_i = id_{\mathbb{K}^n}$ :

$$\begin{aligned} J_i(J_i^{-1}([x_0 : \dots : x_n])) &= J_i \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) = \\ &= \left[ \frac{x_0}{x_i} : \dots : \frac{x_{i-1}}{x_i} : 1 : \frac{x_{i+1}}{x_i} : \dots : \frac{x_n}{x_i} \right] = \\ &= [x_0 : \dots : x_{i-1} : x_i : x_{i+1} : \dots : x_n]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_i^{-1}(J_i(x_1, \dots, x_n)) &= J_i^{-1}([x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n]) = \\ &= \left( \frac{x_1}{1}, \dots, \frac{x_{i-1}}{1}, \frac{x_{i+1}}{1}, \dots, \frac{x_n}{1} \right) = \\ &= (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

□

**Definizione 1.58** (Carta affine).

La bigezione  $J_i : \mathbb{K}^n \rightarrow U_i$  si chiama  $i$ -esima **carta affine**.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Purtroppo sia le mappe che gli insiemi si chiamano carte affini. Tecnicamente parlando la carta affine sarebbe la mappa ma questa distinzione è quasi sempre irrilevante dato che viene vista quasi come una inclusione piuttosto che una funzione.

L'esistenza della carta affine ci permette di dividere gli spazi proiettivi in due parti<sup>2</sup>

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) & = & U_0 & \sqcup & H_0 \\ & & \cong & & \cong \\ & & \mathbb{K}^n & & \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) \end{array}$$

**Definizione 1.59** (Punti propri e impropri).

I punti di  $U_0 \cong \mathbb{K}^n$  si chiamano **punti propri** o **affini**, mentre i punti di  $H_0$  si chiamano **punti impropri** o **all'infinito**.

**Proposizione 1.60** (Parte affine).

Sia  $K$  un sottospazio proiettivo di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  non contenuto in  $H_0$ . Allora  $J_0^{-1}(K \cap U_0) \subseteq \mathbb{K}^n$  è un sottospazio affine della stessa dimensione di  $K$  che chiamiamo **parte affine** di  $K$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $k = \dim K$ . Sappiamo che  $K$  è luogo di zeri di un sistema lineare omogeneo di rango  $n - k$ .

$$\begin{cases} a_{1,0}x_0 + a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n-k,0}x_0 + a_{n-k,1}x_1 + \cdots + a_{n-k,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Un punto  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  appartiene a  $J_0^{-1}(K \cap U_0)$  se e solo se  $[1 : x_1 : \cdots : x_n] \in K \cap U_0$  (ma dato che  $x_0 = 1$  basta richiedere  $[1 : x_1 : \cdots : x_n] \in K$ ) ovvero

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = -a_{1,0} \\ \vdots \\ a_{n-k,1}x_1 + \cdots + a_{n-k,n}x_n = -a_{n-k,0} \end{cases}$$

Il rango di questo sistema (non omogeneo) continua ad essere  $n - k$ . Dato che  $K \not\subseteq H_0$  abbiamo che  $J_0^{-1}(U_0 \cap K)$  non è vuoto e quindi il sistema ha una soluzione. Per Rouché-Capelli le soluzioni del sistema sono uno spazio affine di  $\mathbb{K}^n$  di dimensione  $n - (n - k) = k$ .  $\square$

**Proposizione 1.61** (Chiusura proiettiva).

Sia  $Z \neq \emptyset$  un sottospazio affine di  $\mathbb{K}^n$ . Allora  $Z$  è la parte affine di un unico sottospazio proiettivo  $\overline{Z}$  di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ . Inoltre  $\overline{Z} \not\subseteq H_0$  e ha la stessa dimensione di  $Z$ . Chiamiamo  $\overline{Z}$  la **chiusura proiettiva** di  $Z$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $Z \subseteq \mathbb{K}^n$  un sottospazio affine di dimensione  $k$ . Sappiamo che  $Z$  è descritto da un sistema lineare  $Ax = b$  con  $\text{rk } A = \text{rk } (A \mid b) = n - k$ . Sia  $\overline{Z}$  il sottospazio proiettivo che ha equazioni cartesiane  $(-b \mid A)y = 0$ . Dato che  $\text{rk } (-b \mid A) = n - k$  il secondo sistema individua un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{K}^{n+1}$  di dimensione  $(n + 1) - (n - k) = k + 1$  e quindi un sottospazio proiettivo

<sup>2</sup>ovviamente quale carta scegliamo non è rilevante. Per convenzione di solito scegliamo  $U_0$  ma alcuni preferiscono  $U_n$ .

di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  di dimensione  $k$ . La parte affine di  $\bar{Z}$  è  $J_0^{-1}(\bar{Z} \cap U_0)$  ed è individuata dal sistema  $Ax = b$ , ovvero come volevamo la parte affine di  $\bar{Z}$  è  $Z$ .

Mostriamo l'unicità per assurdo. Se  $Z'$  e  $\bar{Z}$  sono due chiusure proiettive di  $Z$  distinte abbiamo che  $\dim Z' = \dim Z = \dim \bar{Z}$  e quindi  $\dim(Z' \cap \bar{Z}) < \dim Z$ , quindi

$$\dim J_0^{-1}(U_0 \cap (Z' \cap \bar{Z})) < \dim Z$$

che è assurdo perché  $J_0^{-1}(U_0 \cap (Z' \cap \bar{Z})) = Z$  per quanto detto.  $\nexists$   $\square$

Dalle due proposizioni precedenti vediamo che esiste una bigezione naturale tra i  $k$ -sottospazi affini di  $\mathbb{K}^n$  e i  $k$ -sottospazi proiettivi di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  non contenuti in  $H_0$ .

**Definizione 1.62** (Polinomio omogeneo).

Un polinomio  $p \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$  è **omogeneo** di grado  $d$  se tutti i monomi a coefficienti non nulli di  $p$  hanno grado  $d$ .

*Osservazione 1.63.*

La mappa

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] &\longrightarrow \mathbb{K}_{\deg p}[x_0, \dots, x_1] \\ p(x_1, \dots, x_n) &\longmapsto x_0^{\deg p} p(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0) \end{aligned}$$

è detta **omogenizzazione** e se  $p$  ha grado  $d$  allora il suo omogenizzato è un polinomio omogeneo di grado  $d$ . Questa operazione corrisponde a “mettere tante  $x_0$  quanto basta affinché tutti i termini abbiano lo stesso grado”.

*Osservazione 1.64.*

Se  $Z$  è un iperpiano di  $\mathbb{K}^n$  di equazione  $a_1X_1 + \dots + a_nX_n = b$  allora la sua chiusura proiettiva  $\bar{Z} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  ha equazione  $-bx_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ . In generale se un sottospazio è dato da un sistema di equazioni, la sua chiusura è data dal sistema di queste stesse equazioni ma omogeneizzato.

*Osservazione 1.65.*

Solo gli zeri di polinomi omogenei descrivono luoghi in  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  dato che altrimenti quando scaliamo le indeterminate otterremmo una potenza diversa del fattore per monomi di grado diverso.

Prendere la chiusura proiettiva di spazi affini in genere aggiunge dei punti allo spazio. Diamo un nome a questi punti:

**Definizione 1.66** (Punti all'infinito di sottospazi vettoriali).

Se  $Z$  è un sottospazio affine di  $\mathbb{K}^n$  i **punti all'infinito** di  $Z$  sono i punti di  $\bar{Z} \cap H_0$ .

Ma perché li chiamiamo “all'infinito”?

La proposizione seguente ci fornisce una intuizione.

**Proposizione 1.67** (Rette si incontrano all'infinito se e solo se sono parallele).

*Siano  $r, s$  due rette affini in  $\mathbb{K}^n$ . Allora  $r, s$  hanno lo stesso punto all'infinito se e solo se sono parallele.*

*Dimostrazione.*

Sia  $r = \{p + tv, t \in \mathbb{K}\}$ . Osserviamo che la chiusura proiettiva  $\bar{r}$  di  $r$  è descritta dall'equazione parametrica  $\{[t_1 : t_1 p + t_2 v], t_1, t_2 \in \mathbb{K}\}$  (con  $t_1, t_2$  non entrambi nulli). Con  $[\cdot : v]$  intendiamo  $[\cdot : v_1 : v_2 : \dots : v_n]$ .

Per cercare i punti all'infinito cerchiamo i punti  $[t_1, t_1 p + t_2 v]$  con  $x_0 = 0$ , ovvero  $t_1 = 0$  (e  $t_2 \neq 0$ ). Troviamo quindi  $[0 : t_2 v] = [0 : v]$ . Abbiamo quindi che una retta affine di giacitura  $\text{Span}(v)$  ha un unico punto all'infinito dato da  $[0 : v]$ . Abbiamo quindi che due rette di giacitura  $\text{Span}(v)$  e  $\text{Span}(w)$  hanno lo stesso punto all'infinito se e solo se  $[0 : v] = [0 : w] \iff v = \lambda w$  ovvero  $\text{Span}(v) = \text{Span}(w)$ , cioè le rette sono parallele.  $\square$

Vediamo quindi che  $H_0$  è in bigezione con le direzioni in  $\mathbb{K}^n$ , ovvero

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n \cup \{\text{direzioni di } \mathbb{K}^n\}.$$

## 1.3 Approfondimento sulle proiettività

### 1.3.1 Prospettività

Andiamo ora a studiare ciò per cui la geometria proiettiva è nata, ovvero la prospettiva.

**Definizione 1.68** (Prospettività).

Siano  $r, s$  rette distinte di un piano proiettivo  $\mathbb{P}(V)$ . Sia  $O \in \mathbb{P}(V) \setminus (r \cup s)$  e definiamo

$$\pi_O : \begin{array}{ccc} r & \longrightarrow & s \\ p & \longmapsto & L(O, p) \cap s \end{array}$$

$\pi_O$  è detta **prospettività** di centro  $O$ .

**Proposizione 1.69** (Le prospettività sono ben definite e sono trasformazioni proiettive).

*La prospettiva di centro  $O$  è una trasformazione proiettiva ben definita.*

*Dimostrazione.*

Dato che  $O \notin r$  e  $p \in r$  abbiamo che  $L(O, p)$  è una retta e questa non coincide con  $s$  perché  $O \notin s$ . Abbiamo quindi che  $L(O, p) \cap s$  è un punto per questioni dimensionali e quindi  $\pi_O$  è ben definita come mappa.

Siano  $V_r$  e  $V_s$  sottospazi vettoriali di  $V$  tali che  $r = \mathbb{P}(V_r)$  e  $s = \mathbb{P}(V_s)$ . Per dimostrare la tesi dobbiamo trovare una mappa lineare da  $V_r$  a  $V_s$  che induce  $\pi_O$ . Sia  $A = r \cap s$  e scegliamo  $B \in r \setminus \{A\}$  e  $C \in s \setminus (\{A\} \cup (L(B, O) \cap s))$  (esiste sempre perché  $B \in L(B, O)$  e  $B \in r \setminus s$  e quindi  $B \notin s$ , dunque  $L(B, O) \neq s$  e togliere due punti ad una retta proiettiva non la esaurisce). Consideriamo il riferimento proiettivo  $A, B, C, O$  (che abbreviamo  $\mathcal{R}$ ), che letto in questo ordine ha coordinate omogenee

$$A = [1 : 0 : 0], B = [0 : 1 : 0], C = [0 : 0 : 1], O = [1 : 1 : 1],$$

perciò  $r = L(A, B) = \{[x_0 : x_1 : x_2] \mid x_2 = 0\} = \{[x_0 : x_1 : 0]\}$  e  $s = L(A, C) = \{[x_0 : x_1 : x_2] \mid x_1 = 0\} = \{[x_0 : 0 : x_2]\}$ . Consideriamo allora i seguenti isomorfismi proiettivi

$$\pi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) & \longrightarrow & r \\ [a : b] & \longmapsto & [a : b : 0] \end{array} \quad \pi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) & \longrightarrow & s \\ [c : d] & \longmapsto & [c : 0 : d] \end{array}$$

e fissiamo su  $r$  e  $s$  queste coordinate omogenee.

Cerchiamo le coordinate di  $\pi_O(p)$  per  $p \in r$ . Dato che  $p \in r$  abbiamo che  $p = [a : b : 0]$  da cui

$$\begin{aligned} L(O, p) &= L([1 : 1 : 1], [a : b : 0]) = \\ &= \{[t_1 + at_2 : t_1 + bt_2 : t_1]\}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che  $\pi_O(p) = L(O, p) \cap s$  è dato ponendo  $t_1 + bt_2 = 0$  da cui  $[at_2 - bt_2 : 0 : -bt_2] = [a - b : 0 : -b]$ .

Vediamo quindi che, se poniamo su  $r$  il riferimento  $\mathcal{R}_r = \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [1 : 1 : 0]\}$  e su  $s$  il riferimento  $\mathcal{R}_s = \{[1 : 0 : 0], [0 : 0 : 1], [1 : 0 : 1]\}$  (dove queste coordinate omogenee sono rispetto a  $\mathcal{R}$ ), allora  $\pi_O$  è rappresentata dalla matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , infatti in quei riferimenti per quanto appena mostrato abbiamo che  $[a : b] \mapsto [a - b : -b]$ . Più esplicitamente

$$\begin{aligned} \pi_O(p) &= [\cdot]_{\mathcal{R}_s}^{-1}([\pi_O([\cdot]_{\mathcal{R}_r}^{-1}([a : b]))]_{\mathcal{R}_s}) = [\cdot]_{\mathcal{R}_s}^{-1}([a - b : -b]) = \\ &= [\cdot]_{\mathcal{R}_s}^{-1} \left( \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi trovato una matrice associata ad una mappa lineare che induce  $\pi_O$ , rendendo la prospettività una trasformazione proiettiva.  $\square$

Proviamo a dare una caratterizzazione delle prospettività

**Teorema 1.70** (Caratterizzazione delle prospettività).

*Siano  $r, s$  rette distinte di un piano proiettivo  $\mathbb{P}(V)$  e sia  $A = r \cap s$ . Data  $f : r \rightarrow s$  trasformazione proiettiva abbiamo che  $f$  è una prospettività se e solo se  $f(A) = A$ .*

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$ ) Per semplice calcolo

$$\pi_O(A) = L(O, A) \cap s = A.$$

$\Leftarrow$ ) Siano  $B \in r \setminus \{A\}$ ,  $C = f(B)$  e  $B' \in r \setminus \{A, B\}$ ,  $C' = f(B')$ . Poniamo  $O = L(B, C) \cap L(B', C')$ , il quale è ben definito perché se per assurdo le rette coincidessero allora  $B' \in L(B, C) \cap L(B', C')$ , da cui  $L(B, C) = r$  ma da questo troveremmo  $C \in r \cap s$  ovvero  $C = A$ . Analogamente troveremmo  $C' = A$  che è assurdo perché  $B \neq B'$  e  $f$  è iniettiva.  $\nmid$

Per costruzione

$$\begin{aligned} \pi_O(A) &= L(O, A) \cap s = A = f(A), \\ \pi_O(B) &= L(O, B) \cap s = L(B, C) \cap s = C = f(B) \\ \pi_O(B') &= L(O, B') \cap s = L(B', C') \cap s = C' = f(B'). \end{aligned}$$

Quindi  $f$  e  $\pi_O$  coincidono su un riferimento proiettivo di  $r$  e quindi sono la stessa trasformazione proiettiva (1.42).  $\square$

### 1.3.2 Corrispondenza tra Affinità e Proiettività

**Proposizione 1.71** (Affinità come proiettività).

*Il gruppo delle affinità  $Aff(\mathbb{K}^n)$  è isomorfo a  $G < \mathbb{P}GL_{n+1}(\mathbb{K})$ , dove*

$$G = \{f \in \mathbb{P}GL_{n+1}(\mathbb{K}) \mid f(H_0) = H_0\}.$$

*Dimostrazione.*

Chiaramente  $G$  è un gruppo.

Sia  $f \in G$  e fissiamo  $M \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$  che rappresenta  $f$ . Evidenziando la prima riga e la prima colonna abbiamo

$$M = \begin{pmatrix} d & c^\top \\ b & A \end{pmatrix},$$

dove  $d \in \mathbb{K}$ ,  $b, c \in \mathbb{K}^n$  e  $A \in M(n, \mathbb{K})$ .

Affermiamo che  $M$  fissa  $H_0$  se e solo se  $c = 0$ , infatti è necessario che

$$M[0 : a_1 : \dots : a_n] = [0 : b_1 : \dots : b_n]$$

per qualsiasi  $a_1, \dots, a_n$ , quindi, leggendo la prima entrata di  $M[0 : a_1 : \dots : a_n]$ , abbiamo  $\sum a_i c_i = 0$  per qualsiasi  $a_i$  e l'unico modo per verificare questa condizione è che  $c = 0$ . Oltre ad essere necessaria la condizione è chiaramente sufficiente perché  $MH_0 \subset H_0$  e  $f$  è iniettiva. La matrice ha quindi la forma

$$M = \begin{pmatrix} d & 0 \\ b & A \end{pmatrix},$$

con  $d \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  e  $A \in GL_n(\mathbb{K})$  dato che per ipotesi  $M \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$ . Essendo  $d \neq 0$  e dato che  $M$  rappresenta una proiezione, scalare la matrice di  $d^{-1}$  non cambia  $f$ , dunque consideriamo senza ledere generalità

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix}.$$

Definiamo ora una mappa da  $G$  a  $Aff(\mathbb{K}^n)$  nell'unico modo naturale:

$$\phi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & Aff(\mathbb{K}^n) \\ f & \longmapsto & J_0^{-1} \circ f|_{J_0(\mathbb{K}^n)} \circ J_0 \end{array}$$

Mostriamo che  $\phi$  è l'isomorfismo cercato:

Buona def.)

La formula usata ha senso perché  $f|_{J_0(\mathbb{K}^n)} = f|_{U_0}$  ha valori in  $U_0$ , infatti per iniettività  $f(H_0) = H_0 \iff f(U_0) = U_0$ .

Mostriamo che  $\phi(f)$  è effettivamente una affinità: consideriamo un generico vettore  $v \in \mathbb{K}^n$  e mostriamo che  $\phi(f)$  agisce su  $v$  come una affinità

$$\begin{aligned} \phi(f)(v) &= \phi(f)((a_1, \dots, a_n)) = \\ &= J_0^{-1}(f([1 : a_1, \dots, a_n])) = \\ &= J_0^{-1}\left(\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}\right]\right) = \\ &= J_0^{-1}([1 : Av + b]) = Av + b. \end{aligned}$$

$\phi$  invertibile) Data una proiezione  $f \in G$  rappresentata da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix}$$

abbiamo visto che  $\phi(f)(x) = Ax + b = g(x) \in Aff(\mathbb{K}^n)$ . Per ricostruire  $f$  basta quindi considerare la classe della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g(0) & C \end{pmatrix}$$

dove

$$C = (g(e_1) - g(0) \mid \cdots \mid g(e_n) - g(0)).$$

$\phi$  omomorfismo) Procediamo per verifica diretta:

$$\begin{aligned} \phi(g \circ f) &= J_0^{-1} \circ g \circ f|_{J_0(\mathbb{K}^n)} \circ J_0 = \\ &= J_0^{-1} \circ g|_{J_0(\mathbb{K}^n)} \circ f|_{J_0(\mathbb{K}^n)} \circ J_0 = \\ &= J_0^{-1} \circ g|_{J_0(\mathbb{K}^n)} \circ J_0 \circ J_0^{-1} \circ f|_{J_0(\mathbb{K}^n)} \circ J_0 = \\ &= \phi(g) \circ \phi(f). \end{aligned}$$

□

### 1.3.3 Trasformazioni lineari fratte

**Definizione 1.72** (Infinito).

Per quanto detto sappiamo che  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = U_0 \cup H_0 \cong \mathbb{K} \cup \{[0, 1]\}$ . Definiamo allora  $\infty \doteq [0, 1]$ . Con questa identificazione

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cup \{\infty\}.$$

Consideriamo le proiettività su  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ : esse sono rappresentate dalle matrici  $\mathbb{P}GL_2(\mathbb{K})$ .

**Definizione 1.73** (Trasformazione lineare fratta).

Una mappa della forma

$$z \mapsto \frac{c + dz}{a + bz}$$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{K}$  e  $ad - bc \neq 0$  è detta **trasformazione lineare fratta**.

Nel caso in cui  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  queste mappe si chiamano anche **trasformazioni di Möbius**.

*Osservazione 1.74.*

Possiamo definire come una trasformazione lineare fratta agisce su  $\infty$  o restituisce  $\infty$  ponendo

$$-\frac{a}{b} \mapsto \infty, \quad \infty \mapsto \frac{d}{b}.$$

**Proposizione 1.75.**

Identificando  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  con  $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$  le proiettività di  $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$  corrispondono a trasformazioni lineari fratte.

*Dimostrazione.*

Una proiettività è rappresentata da una matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{P}GL_2(\mathbb{K}).$$

Vediamo quindi come è definita l'immagine di  $z \in \mathbb{K}$  tale che  $a + bz \neq 0$  tramite la proiettività  $f$ :

$$\begin{aligned} z &\xrightarrow{j_0} [1, z] \xrightarrow{f} \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \right] = \\ &= [a + bz, c + dz] = \\ &= \left[ 1, \frac{c + dz}{a + bz} \right] \xrightarrow{j_0^{-1}} \frac{c + dz}{a + bz}. \end{aligned}$$

Osserviamo dal passaggio intermedio che se  $a + bz = 0$  allora troviamo  $f(j_0(z)) = [0, 1]$  ovvero  $z \mapsto \infty$ .

Se volessimo cercare l'immagine di  $\infty$  basterebbe porre  $j_0(\infty) \doteq [0, 1]$  da cui troviamo applicando  $f$  il punto di coordinate proiettive  $[b, d]$  che viene rimappato a  $d/b$  come avevamo posto sopra.  $\square$

## 1.4 Dualità

**Definizione 1.76** (Spazio proiettivo duale).

Dato  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  di dimensione finita, definiamo lo **spazio proiettivo duale** di  $\mathbb{P}(V)$  come

$$\mathbb{P}(V)^* = \mathbb{P}(V^*) = \mathbb{P}(\text{Hom}(V, \mathbb{K}))$$

*Osservazione 1.77.*

Dato che  $V \cong V^*$  abbiamo che  $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}(V)^*$ .

**Proposizione 1.78.**

*La seguente mappa è una bigezione naturale tra il proiettivo duale e gli iperpiani del proiettivo*

$$\phi: \begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V)^* & \longrightarrow & \{\text{iperpiani in } \mathbb{P}(V)\} \\ [f] & \longmapsto & \mathbb{P}(\ker f) \end{array}.$$

*Dimostrazione.*

La mappa è ben definita perché se  $[f] = [g]$  allora  $f = \lambda g$  con  $\lambda \neq 0$  e quindi  $\ker f = \ker g$ .

Dalla seguente catena di implicazioni segue che  $\phi$  è iniettiva<sup>3</sup>

$$\mathbb{P}(\ker f) = \mathbb{P}(\ker g) \implies \ker f = \ker g \implies f = \lambda g \implies [f] = [g].$$

Infine vediamo che  $\phi$  è surgettiva. Dato un iperpiano  $H$  di  $\mathbb{P}(V)$  e sapendo che  $H = \mathbb{P}(W)$ , osservo che  $W$  è un iperpiano di  $V$ . Consideriamo il funzionale dato dalla proiezione al quoziente  $\pi: V \rightarrow V/W \cong \mathbb{K}$ . La sua classe è una controimmagine di  $H$ , infatti  $\phi([\pi]) = \mathbb{P}(\ker \pi) = \mathbb{P}(W) = H$ .  $\square$

**Definizione 1.79** (Riferimento duale).

Se  $\mathcal{R}$  è un riferimento proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$  e  $\mathcal{B}$  è una sua base normalizzata allora, definendo  $\mathcal{B}^*$  la base duale di  $\mathcal{B}$ , troviamo un riferimento  $\mathcal{R}^*$  che ha come base normalizzata  $\mathcal{B}^*$ .  $\mathcal{R}^*$  è detto **riferimento duale** di  $\mathcal{R}$  e fornisce delle **coordinate omogenee duali** su  $\mathbb{P}(V)^*$ .

<sup>3</sup>Ricordiamo che  $\ker f = \ker g = K$  per funzionali implica che possiamo completare una base di  $K$  a base di  $V$  con un solo vettore  $v \in V \setminus K$ , dunque se  $f(v) = \alpha$  e  $g(v) = \beta$  vediamo facilmente che  $f = (\alpha/\beta)g$ .



*Osservazione 1.80.*

Le coordinate duali del funzionale corrispondente all'iperpiano  $a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$  sono  $[a_0 : \dots : a_n]$ .

Definiamo allora una mappa che dualizza tutti i sottospazi di  $\mathbb{P}(V)$ . Sia  $S$  un sottospazio proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$  e sia  $W$  tale che  $S = \mathbb{P}(W)$ . Poniamo  $\dim S = k$  e  $\dim \mathbb{P}(V) = n$ . Allora per  $-1 \leq k \leq n$  definisco la mappa<sup>4</sup>

$$\delta_k : \left\{ \begin{array}{c} \text{ssp.prj. } S \subseteq \mathbb{P}(V) \\ \dim S = k \\ S \end{array} \right\} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longmapsto \end{array} \left\{ \begin{array}{c} \text{ssp.prj. } T \subseteq \mathbb{P}(V)^* \\ \dim T = n - k - 1 \\ \mathbb{P}(\text{Ann}(W)) \end{array} \right\}$$

**Proposizione 1.81.**

$\delta_k$  è biunivoca per ogni  $k$ .

*Dimostrazione.*

La mappa è ben definita perché  $\dim \text{Ann}W = \dim V - \dim W$ . *Iniettività*) Se  $\mathbb{P}(\text{Ann}(W_1)) = \mathbb{P}(\text{Ann}(W_2))$  allora  $\text{Ann}(W_1) = \text{Ann}(W_2)$  e quindi  $W_1 = W_2$ . Se non avessimo l'ultima implicazione allora potrei costruire un funzionale tale che  $f|_{W_1} = 0$  e  $f|_{W_2} \neq 0$ .

*Surgettività*) Dato  $T = \mathbb{P}(Z)$  pongo

$$W = \bigcap_{f \in Z} \ker f = \bigcap_{i=1}^{n-k} \ker z_i$$

dove  $\{z_i\}_{i \in \{1, \dots, n-k\}}$  è una base di  $Z$ . Osserviamo che  $\dim W = n+1 - (n-k) = k+1$  (questo deriva da come si intersecano iperpiani di funzionali base) e per costruzione abbiamo  $Z = \text{Ann}(W)$ , quindi  $\delta_k(\mathbb{P}(W)) = \mathbb{P}(Z) = T$ .  $\square$

*Osservazione 1.82.*

Per  $k = n-1$  vediamo che  $\delta_{n-1}$  è l'inversa di

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V)^* & \longrightarrow & \{\text{iperpiani in } \mathbb{P}(V)\} \\ [f] & \longmapsto & \mathbb{P}(\ker f) \end{array},$$

invece per  $k = 0$  troviamo una corrispondenza tra punti di  $\mathbb{P}(V)$  e iperpiani di  $\mathbb{P}(V)^*$ , che è la situazione inversa rispetto a prima. Questo fatto è legato all'isomorfismo naturale tra  $V$  e  $V^{**}$ .

**Definizione 1.83** (Corrispondenza di dualità).

Definiamo la **corrispondenza di dualità**

$$\delta : \left\{ \begin{array}{c} \text{ssp.prj. di } \mathbb{P}(V) \\ S \end{array} \right\} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longmapsto \end{array} \left\{ \begin{array}{c} \text{ssp.prj. di } \mathbb{P}(V)^* \\ \delta_{\dim S}(S) \end{array} \right\}$$

**Proposizione 1.84.**

Se  $S_1, S_2$  sono sottospazi proiettivi di  $\mathbb{P}(V)$  allora

$$1. S_1 \subseteq S_2 \implies \delta(S_2) \subseteq \delta(S_1)$$

$$2. \delta(L(S_1, S_2)) = \delta(S_1) \cap \delta(S_2)$$

<sup>4</sup>Ricordiamo che  $\text{Ann}(W) = \{f \in V^* \mid f(W) = 0\}$  e che  $\dim \text{Ann}(W) = n - \dim W$ .

$$3. \delta(S_1 \cap S_2) = L(\delta(S_1), \delta(S_2)).$$

*Dimostrazione.*

Tutte le relazioni sopra discendono dalle proprietà degli annullatori. Siano  $W_1, W_2$  tali che  $\mathbb{P}(W_1) = S_1$  e  $\mathbb{P}(W_2) = S_2$ .

1. Valgono le seguenti implicazioni:

$$\begin{aligned} S_1 \subseteq S_2 &\implies W_1 \subseteq W_2 \implies \text{Ann}(W_2) \subseteq \text{Ann}(W_1) \implies \\ &\mathbb{P}(\text{Ann}(W_2)) \subseteq \mathbb{P}(\text{Ann}(W_1)) \implies \\ &\delta(S_2) \subseteq \delta(S_1). \end{aligned}$$

2. Ricordo che  $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$  e che

$$\text{Ann}(W_1 + W_2) = \text{Ann}(W_1) \cap \text{Ann}(W_2).$$

3.  $\text{Ann}(W_1 \cap W_2) = \text{Ann}(W_1) + \text{Ann}(W_2)$ , da cui

$$\begin{aligned} L(\delta(S_1), \delta(S_2)) &= \mathbb{P}(\text{Ann}(W_1) + \text{Ann}(W_2)) = \\ &= \mathbb{P}(\text{Ann}(W_1 \cap W_2)) = \delta(\mathbb{P}(W_1 \cap W_2)) = \\ &= \delta(S_1 \cap S_2). \end{aligned}$$

□

*Osservazione 1.85.*

Fissando una base,  $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}(V)^*$ , quindi posso pensare a  $\delta$  come funzione tra sottospazi di  $\mathbb{P}(V)$ .

Viste queste corrispondenze ci è permesso riformulare enunciati tramite il seguente

**Teorema 1.86** (Principio di dualità).

*Se  $\mathcal{P}$  è una proposizione di oggetti di  $\mathbb{P}(V)$  allora c'è una proposizione  $\mathcal{P}^*$  con lo stesso valore di verità ottenuta da  $\mathcal{P}$  scambiando intersezioni con spazi generati e viceversa, invertendo i contenimenti e considerando oggetti della codimensione diminuita di 1 (cioè spazi di dimensione  $k$  diventano spazi di dimensione  $n - k - 1$ ).*

**Proposizione 1.87.**

*Tramite la bigezione tra  $\mathbb{P}(V)^*$  e gli iperpiani di  $\mathbb{P}(V)$  si ha che per  $S$  sottospazio proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$*

$$\delta(S) = \{H \subset \mathbb{P}(V) \text{ iperpiano t.c. } S \subseteq H\} \subseteq \mathbb{P}(V)^*$$

*Dimostrazione.*

Ricordiamo che la bigezione è data da  $[f] \mapsto \mathbb{P}(\ker f) = H$ . Basta quindi notare che, prendendo  $\mathbb{P}(W) = S$ , abbiamo

$$\begin{aligned} [f] \in \delta(S) = \mathbb{P}(\text{Ann}(W)) &\iff f \in \text{Ann}(W) \setminus \{0\} \iff W \subseteq \ker f \iff \\ &\iff \mathbb{P}(\ker f) \supseteq \mathbb{P}(W) \iff H \supseteq S. \end{aligned}$$

□

**Definizione 1.88** (Sistema lineare di iperpiani).

Dato  $S$  sottospazio proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$  chiamiamo  $\delta(S)$  il **sistema lineare di iperpiani** di  $\mathbb{P}(V)$  di **centro**  $S$ .

*Osservazione 1.89.*

Dato che  $\delta$  è biunivoca ogni sottospazio proiettivo  $T \subseteq \mathbb{P}(V)^*$  si scrive come sistema lineare di iperpiani il cui centro è  $\delta^{-1}(T)$ .

**Definizione 1.90** (Fascio di iperpiani).

Una retta proiettiva in  $\mathbb{P}(V)^*$  è detta **fascio** di iperpiani.

**Definizione 1.91** (Proiettività duale).

Se  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  è un isomorfismo proiettivo e  $f = [\varphi]$  allora definiamo  $f^* = [\varphi^*] : \mathbb{P}(W)^* \rightarrow \mathbb{P}(V)^*$  la **proiettività duale** di  $f$ , dove  $\varphi^* : W^* \rightarrow V^*$  è la mappa lineare duale di  $\varphi$ <sup>5</sup>.

*Osservazione 1.92.*

Osserviamo che  $f^*(\delta(H)) = \delta(f^{-1}(H))$  per  $H$  iperpiano di  $\mathbb{P}(W)$ . Infatti posto  $H = \mathbb{P}(Z)$  abbiamo

$$\begin{aligned} f^*(\delta(H)) &= f^*(\mathbb{P}(\text{Ann}(Z))) = \{f^*([g]) \mid g \in \text{Ann}(Z) \setminus \{0\}\} = \\ &= \{[\varphi^*(g)] \mid g \in \text{Ann}(Z) \setminus \{0\}\} = \{[g \circ \varphi] \mid g \in \text{Ann}(Z) \setminus \{0\}\} = \\ &= \{[g \circ \varphi] \mid g \circ \varphi \in \text{Ann}(\varphi^{-1}(Z)) \setminus \{0\}\} = \mathbb{P}(\text{Ann}(\varphi^{-1}(Z))) = \\ &= \delta(\mathbb{P}(\varphi^{-1}(Z))) = \delta(f^{-1}(\mathbb{P}(Z))) = \\ &= \delta(f^{-1}(H)). \end{aligned}$$

## 1.5 Birapporto

Sappiamo che dati tre punti su una retta proiettiva ed altri tre punti allineati possiamo definire una proiettività che manda i primi nei secondi.

Per le trasformazioni affini potevamo definire il rapporto semplice di tre punti allineati e questo forniva un invariante per affinità. Purtroppo il rapporto semplice non è invariante per proiettività. Cerchiamo un tale invariante.

**Definizione 1.93** (Birapporto).

Dati quattro punti  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}(V)$  con  $\dim \mathbb{P}(V) = 1$  e  $P_1, P_2, P_3$  distinti definiamo il loro **birapporto** come

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{x_1}{x_0} \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

dove  $[x_0, x_1]$  sono le coordinate omogenee di  $P_4$  rispetto al riferimento proiettivo  $(P_1, P_2, P_3)$ .

*Osservazione 1.94.*

Possiamo interpretare il birapporto come la coordinata affine di  $P_4$  nella carta  $U_0$  rispetto al riferimento  $(P_1, P_2, P_3)$ .

<sup>5</sup>Ricordiamo che data  $\varphi : V \rightarrow W$  lineare, la sua mappa duale è data da

$$\varphi^* : \begin{array}{ccc} W^* & \longrightarrow & V^* \\ g & \longmapsto & g \circ \varphi \end{array}$$

*Osservazione 1.95.*

Se  $P_4 = P_1$  allora il birapporto è  $0/1 = 0$ , se  $P_4 = P_2$  abbiamo  $1/0 = \infty$  e per  $P_4 = P_3$  ricaviamo  $1/1 = 1$ . Più in generale la mappa

$$\beta(P_1, P_2, P_3, \cdot) : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

è una bigezione (per definizione dato che  $P_4$  è libero di avere qualsiasi coordinata omogenea rispetto a  $(P_1, P_2, P_3)$ ).

**Proposizione 1.96** (Calcolo del birapporto).

*Se in un riferimento proiettivo fissato abbiamo  $P_i = [\lambda_i, \mu_i]$  per  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  allora*

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_4 & \lambda_2 \\ \mu_4 & \mu_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}} = \frac{(\lambda_1\mu_4 - \lambda_4\mu_1)(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)}{(\lambda_2\mu_4 - \lambda_4\mu_2)(\lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1)}$$

*Dimostrazione.*

Cerchiamo una base normalizzata di  $(P_1, P_2, P_3)$  in modo da poter scrivere le coordinate di  $P_4$ . Siano  $v, w$  tali che  $[v] = P_1, [w] = P_2$ , ovvero

$$v = a \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix}, \quad w = b \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

con  $a, b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Per essere una base normalizzata chiediamo

$$\begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = v + w = a \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

ovvero cerchiamo le soluzioni dell'equazione

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \mu_3 \end{pmatrix},$$

che possiamo fare applicando la regola di Cramer:

$$a = \frac{1}{A} \begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{vmatrix}, \quad b = \frac{1}{A} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix},$$

dove per brevità  $A = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}$  (sappiamo che  $A \neq 0$  perchè  $P_1 \neq P_2$ ). In questa base determiniamo le coordinate  $x_0$  e  $x_1$  di  $P_4$ :

$$\begin{pmatrix} \lambda_4 \\ \mu_4 \end{pmatrix} = x_0 a \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} + x_1 b \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Applicando Cramer di nuovo

$$x_0 = \frac{1}{a} \frac{1}{A} \begin{vmatrix} \lambda_4 & \lambda_2 \\ \mu_4 & \mu_2 \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_4 & \lambda_2 \\ \mu_4 & \mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{vmatrix}}, \quad x_1 = \frac{1}{b} \frac{1}{A} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}},$$

da cui calcolando il rapporto  $x_1/x_0$  troviamo la tesi.  $\square$

*Osservazione 1.97.*

Se  $\lambda_i \neq 0$  per ogni  $i$  allora ponendo  $z_i = \mu_i/\lambda_i$  troviamo

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)} = \frac{\frac{z_4 - z_1}{z_3 - z_1}}{\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2}} = \frac{[P_1, P_3, P_4]}{[P_2, P_3, P_4]},$$

ovvero il birapporto è il rapporto di due rapporti semplici.

**Corollario 1.98.**

Se  $P_4$  è il punto all'infinito, ponendo  $z_i$  come sopra per  $i = 1, 2, 3$  si ha che

$$\beta(P_1, P_2, P_3, \infty) = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = [P_3, P_1, P_2].$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \beta(P_1, P_2, P_3, P_4) &= \frac{(1\lambda_1 - 0\mu_1)(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)}{(1\lambda_2 - 0\mu_2)(\lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1)} = \\ &= \frac{\lambda_1(\lambda_2\lambda_3z_3 - \lambda_3\lambda_2z_2)}{\lambda_2(\lambda_1\lambda_3z_3 - \lambda_3\lambda_1z_1)} = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \end{aligned}$$

□

Vediamo ora che effettivamente il birapporto è invariante per proiettività:

**Proposizione 1.99** (Proiettività conservano birapporto).

Se  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  è una proiettività tra due rette proiettive e  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}(V)$  con  $P_1, P_2, P_3$  distinti allora

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4)).$$

*Dimostrazione.*

Se  $\{v, w\}$  è una base normalizzata per  $(P_1, P_2, P_3)$  e  $\varphi : V \rightarrow W$  induce  $f$  allora  $(\varphi(v), \varphi(w))$  è una base normalizzata per il riferimento  $(f(P_1), f(P_2), f(P_3))$ . Osserviamo quindi che se  $P_4 = [av + bw]$  allora  $f(P_4) = [\varphi(av + bw)] = [a\varphi(v) + b\varphi(w)]$ , ovvero le coordinate omogenee rimangono  $[a : b]$ . Quindi entrambi i birapporti coincidono e valgono  $b/a$ . □

Possiamo estendere la proposizione precedente come segue:

**Proposizione 1.100** (Criterio del birapporto per l'esistenza di proiettività).

Se  $\mathbb{P}(V)$  e  $\mathbb{P}(W)$  sono rette proiettive,  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}(V)$  con  $P_1, P_2, P_3$  distinti e  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in \mathbb{P}(W)$  con  $Q_1, Q_2, Q_3$  distinti allora esiste una proiettività  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  tale che  $f(P_i) = Q_i$  per tutti gli  $i$  se e solo se

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4).$$

*Dimostrazione.*

Data la proposizione sopra dobbiamo solo verificare che se hanno lo stesso birapporto allora trovo la proiettività. Per il teorema fondamentale della geometria proiettiva esiste un'unica proiettività  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  tale che  $f(P_i) = Q_i$  per  $i = 1, 2, 3$ , quindi basta verificare che questa mappa  $P_4$  in  $Q_4$ .

Se  $P_4$  ha coordinate omogenee  $[x_0, x_1]$  rispetto  $(P_1, P_2, P_3)$  allora  $f(P_4)$  ha coordinate omogenee  $[x_0, x_1]$  nel riferimento  $(f(P_1), f(P_2), f(P_3)) = (Q_1, Q_2, Q_3)$ . Ma sappiamo che  $Q_4$  ha coordinate omogenee  $[x_0, x_1]$  in  $(Q_1, Q_2, Q_3)$  per le ipotesi della proposizione, dunque  $f(P_4) = Q_4$  come volevamo. □

Cerchiamo ora di capire quando possiamo definire una proiettività tra rette che manda quaterne di punti (distinti) in quaterne di punti (distinti), trascurando quindi l'ordine. Per come lo abbiamo definito, il birapporto cambia permutando i punti ma possiamo riscontrare una certa regolarità.

**Proposizione 1.101.**

*Dati  $P_1, P_2, P_3, P_4$  allineati distinti e ponendo  $\beta = \beta(P_1, P_2, P_3, P_4)$  allora abbiamo che  $\forall \sigma \in S_4$ , il birapporto  $\beta(P_{\sigma(1)}, P_{\sigma(2)}, P_{\sigma(3)}, P_{\sigma(4)})$  può assumere solo uno tra i seguenti valori:*

$$\beta, \frac{1}{\beta}, 1 - \beta, \frac{1}{1 - \beta}, \frac{\beta - 1}{\beta}, \frac{\beta}{\beta - 1}.$$

*Dimostrazione.*

Come riferimento riporto l'espressione per  $\beta$  calcolata prima

$$\beta = \frac{(\lambda_1\mu_4 - \lambda_4\mu_1)(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)}{(\lambda_2\mu_4 - \lambda_4\mu_2)(\lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1)}.$$

Osserviamo che  $\beta$  è quindi invariante per gli elementi di  $S_4$  dati da

$$V_4 = \{id, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}.$$

Possiamo quindi limitarci a studiare rappresentanti delle classi di  $S_4/V_4$ . Osserviamo che

$$S_4/V_4 = \{V_4, (2, 3)V_4, (2, 4)V_4, (3, 4)V_4, (2, 3, 4)V_4, (2, 4, 3)V_4\}$$

quindi basta vedere come agiscono queste. Svolgendo i calcoli troviamo che le classi portano ai seguenti birapporti

$$\begin{array}{llll} id & \longrightarrow & \beta & (2, 4) \longrightarrow 1 - \beta \\ (2, 3) & \longrightarrow & \frac{\beta}{\beta - 1} & (2, 3, 4) \longrightarrow \frac{\beta - 1}{\beta} \\ (3, 4) & \longrightarrow & \frac{1}{\beta} & (2, 4, 3) \longrightarrow \frac{1}{1 - \beta} \end{array}$$

□

Vediamo quindi che il birapporto non è un invariante per le quaterne non ordinate. Cerchiamo di costruire un invariante.

**Proposizione 1.102.**

*Supponiamo  $\text{char } \mathbb{K} = 0$  e consideriamo la funzione razionale*

$$j(x) = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x - 1)^2}.$$

*Se  $\beta$  è il birapporto di quattro punti distinti ( $\beta \neq 0, 1$  in particolare) allora  $j(\beta) = j(\beta')$  se e solo se*

$$\beta' \in \left\{ \beta, \frac{1}{\beta}, 1 - \beta, \frac{1}{1 - \beta}, \frac{\beta - 1}{\beta}, \frac{\beta}{\beta - 1} \right\} = B.$$

*Dimostrazione.*

Facendo i conti vediamo che  $j(\beta) = j(\beta'), \forall \beta' \in B$ .

Fissato  $\beta \neq 0, 1$  osserviamo che  $j(\beta') = j(\beta)$  se e solo se  $q(\beta') = 0$  per  $q(x) = (x^2 - x + 1)^3 - j(\beta)x^2(x - 1)^2$ . Essendo  $q$  un polinomio di sesto grado, esso ha al massimo sei soluzioni con molteplicità. Osserviamo che se  $\beta$  è tale che  $|B| = 6$  (cioè le forme del birapporto sotto permutazione sono tutte distinte) allora abbiamo la tesi perché abbiamo tutte e sole le radici di  $q$ .

Facendo un po' di conti vediamo che le forme dei birapporti non sono tutte distinte solo se  $\beta$  assume uno dei seguenti valori:

$$-1, 2, \frac{1}{2}, -\zeta, -\zeta^2$$

dove  $\zeta$  è una radice terza dell'unità diversa da 1. Se  $\beta = -1, 2, \frac{1}{2}$  vediamo che  $q(x) = (x + 1)^2(x - 2)^2(x - \frac{1}{2})^2$  e quindi  $q$  si annulla solo nei valori  $-1, 2, \frac{1}{2}$  che è ciò che volevo. Un procedimento simile mostra che per  $-\zeta, -\zeta^2$  abbiamo  $q(x) = (x + \zeta)^3(x + \zeta^2)^3$  e ancora  $q$  si annulla solo per i valori che già avevamo considerato.

In definitiva vediamo che le uniche radici di  $q$  appartengono sempre a  $B$  come volevamo.  $\square$

**Definizione 1.103** (Modulo/ $j$ -invariante).

Per  $P_1, P_2, P_3, P_4$  distinti abbiamo visto che  $j(\beta(P_1, P_2, P_3, P_4))$  è un invariante e si chiama **modulo** o  **$j$ -invariante** della quaterna. Per comodità indichiamo  $j(\beta(P_1, P_2, P_3, P_4))$  con  $j(\{P_1, P_2, P_3, P_4\})$ .

**Teorema 1.104.**

Se  $\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(W)$  sono rette proiettive e  $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}, \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$  sono quaterne di punti distinti di  $\mathbb{P}(V)$  e  $\mathbb{P}(W)$  rispettivamente allora esiste  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  tale che

$$f(\{P_1, P_2, P_3, P_4\}) = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$$

se e solo se  $j(\{P_i\}) = j(\{Q_i\})$ .

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$ ) Se  $f$  è una proiettività che manda  $\{P_i\}$  in  $\{Q_i\}$ , a meno di permutazione (permessa dall'invarianza di  $j$ ) posso supporre  $f(P_i) = Q_i$  e quindi troviamo

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4)) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4).$$

Segue che  $j(\{P_i\}) = j(\{Q_i\})$ .

$\Leftarrow$ ) A meno di permutazione  $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$  e quindi per la proposizione di prima (1.100) esiste una proiettività  $f$  tale che  $f(P_i) = Q_i$ , quindi in particolare  $f(\{P_i\}) = \{Q_i\}$ .  $\square$

## 1.6 Coniche proiettive

**Definizione 1.105** (Conica proiettiva).

Una **conica proiettiva** di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$  è un elemento di  $\mathbb{P}(\mathbb{K}_2[x_0, x_1, x_2])$ .

Definiamo il **supporto** di una conica  $[p]$  come

$$V([p]) = \{[x_0, x_1, x_2] \mid p(x_0, x_1, x_2) = 0\}$$

*Osservazione 1.106.*

$\dim \mathbb{K}_2[x_0, x_1, x_2] = |\{x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2\}| = 6$ , quindi lo spazio proiettivo delle coniche ha dimensione 5.

*Osservazione 1.107.*

Osserviamo che per  $[p'] = [p]$  e  $[x_0, x_1, x_2] = [y_0, y_1, y_2]$

$$p'(y_0, y_1, y_2) = \mu p(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = \mu \lambda^2 p(x_0, x_1, x_2).$$

È quindi ben definito quando un punto del proiettivo è annullato da un polinomio omogeneo ma NON è definita la sua immagine.

Come per il caso affine possiamo definire delle matrici che rappresentano coniche. Data la conica

$$[ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 + dx_0x_1 + ex_0x_2 + fx_1x_2]$$

la possiamo scrivere come  $x^\top Ax$  dove

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{pmatrix}.$$

Chiamiamo  $A$  la matrice che **rappresenta** la conica.

*Osservazione 1.108.*

$A$  è simmetrica e in effetti c'è una bigezione tra lo spazio delle coniche e  $\mathbb{P}(S(3, \mathbb{K}))$ .

*Osservazione 1.109.*

Se pongo l'indeterminata  $x_0$  uguale a 1 la teoria che stiamo sviluppando ci restituisce ciò che avevamo già ricavato per le coniche affini. La mappa

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\mathbb{K}_d[x_0, \dots, x_n]) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]) \\ [p(x_0, \dots, x_n)] & \longmapsto & [p(1, x_1, \dots, x_n)] \end{array}$$

è detta **deomogenizzazione** rispetto all'indeterminata  $x_0$ .

### 1.6.1 Equivalenza proiettiva e Classificazione delle coniche

Studiamo ora come mettere in relazione coniche e proiettività.

**Definizione 1.110** (Immagine di una conica tramite una proiettività).

Data  $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  e una conica  $C = [p]$  poniamo  $f(C) \doteq f^*C \doteq [p \circ M^{-1}]$  dove  $M$  è una matrice che rappresenta  $f$  nel riferimento standard.

La notazione  $f(C)$  non crea ambiguità, infatti  $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  e  $f^*$  hanno domini diversi per esempio.

*Osservazione 1.111.*

La definizione è ben posta, infatti

$$[\lambda p \circ (\mu M)^{-1}] = [\lambda \mu^{-2} (p \circ M^{-1})] = [p \circ M^{-1}].$$

**Proposizione 1.112.**

Sia  $C$  una conica e  $f$  una proiettività del piano proiettivo, allora  $V(f(C)) = f(V(C))$ .



*Dimostrazione.*

Sia  $p$  un polinomio tale che  $[p] = C$  e sia  $M$  una matrice tale che  $f([x]) = [Mx]$  per ogni  $[x] \in \mathbb{P}^2$ , allora

$$\begin{aligned} [x] \in V(f(C)) &\iff p \circ M^{-1}x = 0 \iff \\ [M^{-1}x] \in V(C) &\iff f^{-1}([x]) \in V(C) \iff [x] \in f(V(C)). \end{aligned}$$

□

**Definizione 1.113** (Equivalenza proiettiva).

Due coniche  $C, C'$  di  $\mathbb{P}^2$  sono **proiettivamente equivalenti** se esiste una proiettività  $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  tale che  $f(C) = C'$ .

*Osservazione 1.114.*

$f(g(C)) = (f \circ g)(C)$ , infatti se  $F, G$  sono matrici che rappresentano  $f$  e  $g$  rispettivamente abbiamo

$$f(g(C)) = f([p \circ G^{-1}]) = [p \circ G^{-1} \circ F^{-1}] = [p \circ (FG)^{-1}] = (f \circ g)(C).$$

Osserviamo che l'equivalenza proiettiva è una relazione di equivalenza, quindi ha senso classificare le coniche a meno di questa equivalenza.

*Osservazione 1.115.*

Se  $A$  è una matrice simmetrica che rappresenta la conica  $[p] = C$  e  $f = [M]$  è una proiettività allora

$$f(C) = [(M^{-1})^\top A M^{-1}].$$

*Dimostrazione.*

Segue calcolando:

$$x^\top (M^{-1})^\top A M^{-1} x = (M^{-1}x)^\top A (M^{-1}x) = p(M^{-1}x)$$

□

*Osservazione 1.116.*

$A$  e  $A'$  sono matrici simmetriche che rappresentano coniche proiettivamente equivalenti se e solo se esistono  $M \in GL_3(\mathbb{K})$  e  $\lambda \in \mathbb{K}^\times$  tali che

$$A' = \lambda M^\top A M,$$

ovvero se  $A$  e  $A'$  sono congruenti a meno di scalare.

Allora classificare le coniche proiettive ci porta a classificare i prodotti scalari a meno di scalare. Questo sappiamo farlo per  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$ .

**Teorema 1.117** (Classificazione delle coniche proiettive complesse).

*Le coniche proiettive complesse si distinguono in tre classi a meno di equivalenza proiettiva. Queste sono determinate dal rango della matrice che le rappresenta.*

*Dei rappresentanti sono dati da*

<i>Rango</i>	<i>Rappresentante</i>	<i>Matrice</i>	<i>Nome</i>
3	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	<i>Non degenera</i>
2	$x_0^2 + x_1^2$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$	<i>Degenera</i>
1	$x_0^2$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$	<i>Doppiamente degenera</i>

*Dimostrazione.*

Dato che il rango è un invariante completo per congruenza e che la moltiplicazione per uno scalare non nullo non cambia il rango abbiamo la tesi.  $\square$

*Osservazione 1.118.*

Nel caso di rango 2, essendo in un campo algebricamente chiuso, vale che  $x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1)$ , quindi il supporto delle coniche proiettive complesse degeneri è dato da due rette distinte. Per il caso di rango 1 abbiamo una retta doppia data da  $x_0 = 0$ .

*Osservazione 1.119.*

In realtà questa classificazione continua a valere per un qualsiasi campo algebricamente chiuso di caratteristica diversa da 2.

**Teorema 1.120** (Classificazione delle coniche proiettive reali).

*Le coniche proiettive reali si distinguono in cinque classi a meno di equivalenza proiettiva. Queste sono determinate dalla segnatura della matrice che le rappresenta a meno di identificare  $(a, b, c)$  e  $(b, a, c)$ . Dei rappresentanti sono dati da*

<i>Segnatura</i>	<i>Rappresentante</i>	<i>Degenericità</i>	<i>Supporto</i>
$(3, 0, 0)$	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$	<i>Non degenera</i>	<i>Vuoto</i>
$(2, 1, 0)$	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$	<i>Non degenera</i>	<i>Non vuoto</i>
$(2, 0, 1)$	$x_0^2 + x_1^2$	<i>Degenera</i>	<i>Punto</i>
$(1, 1, 1)$	$x_0^2 - x_1^2$	<i>Degenera</i>	<i>Due rette distinte</i>
$(1, 0, 2)$	$x_0^2$	<i>Doppiamente degenera</i>	<i>Retta doppia</i>

*Dimostrazione.*

Sappiamo che la segnatura è un invariante completo per congruenza e la moltiplicazione per scalari invertibili lascia la segnatura invariata o trasforma  $(a, b, c)$  in  $(b, a, c)$  (rispettivamente se lo scalare è positivo o negativo). Abbiamo dunque la tesi.  $\square$

*Osservazione 1.121.*

Nei casi degeneri possiamo trovare facilmente il supporto per i rappresentanti:

$$\begin{aligned}
V([x_0^2 + x_1^2]) &= [0, 0, 1] \\
V([x_0^2 - x_1^2]) &= \{x_0 - x_1 = 0\} \cup \{x_1 + x_0 = 0\} \\
V([x_0^2]) &= \{x_0 = 0\}
\end{aligned}$$

## 1.6.2 Parte affine e chiusura proiettiva

**Definizione 1.122** (Parte affine).

Sia  $C = [p]$  una conica proiettiva e supponiamo che  $x_0 \nmid p$ . Allora il polinomio  $f(x, y) = p(1, x, y)$  (il **deomogeneizzato** di  $p$  rispetto alla prima indeterminata) definisce una conica affine che definiamo **parte affine** di  $C$ .

Poniamo come notazione  $[f] = j_0^{-1}(C)$

*Osservazione 1.123.*

La condizione  $x_0 \nmid p$  assicura che  $\deg f = 2$ . Geometricamente stiamo escludendo componenti interamente all'infinito.

*Osservazione 1.124.*

Se siamo su un campo infinito, per il principio di identità dei polinomi abbiamo che  $x_0 \nmid p$  è equivalente a richiedere  $\{x_0 = 0\} \not\subseteq V(C)$ .

**Proposizione 1.125.**

Per  $p$  e  $f$  come sopra abbiamo (identificando  $\mathbb{K}^2$  con  $U_0$ )  $V([p]) \cap U_0 = V([f])$ .

*Dimostrazione.*

Segue calcolando

$$(x, y) \in j_0^{-1}(V(C) \cap U_0) \iff (1, x, y) \in V(C) \cap U_0 \iff p(1, x, y) = f(x, y) = 0.$$

□

**Definizione 1.126** (Chiusura proiettiva).

Se  $C = [f]$  è una conica affine chiamiamo la sua **chiusura proiettiva** la conica proiettiva di equazione

$$p(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 f(x_1/x_0, x_2/x_0).$$

Poniamo come notazione  $[p] = j_0(C) = \overline{C}$ .

*Osservazione 1.127.*

Per come le abbiamo definite valgono  $j_0^{-1}(\overline{C}) = C$  e, se  $x_0 \nmid p$ ,  $\overline{j_0^{-1}([p])} = [p]$ .

**Definizione 1.128** (Punti all'infinito di una conica).

Data una conica affine  $C$  definiamo  $V(\overline{C}) \cap H_0$  i **punti all'infinito** o **impropri** di  $C$ .

*Osservazione 1.129.*

Se  $A$  è la matrice che rappresenta la conica affine  $f$ , cioè

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

allora  $A$  è la matrice che rappresenta anche la chiusura proiettiva

$$p(x_0, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Segue che per  $C$  conica affine,  $C$  è non degenera se e solo se  $\overline{C}$  è non degenera.

*Osservazione 1.130.*

Osserviamo che il numero di classi di coniche non degeneri a supporto non vuoto nel caso reale non coincidono tra le coniche affini e le coniche proiettive. In particolare vediamo che le chiusure proiettive di ellissi, iperboli e parabole devono essere proiettivamente equivalenti. Vedremo che la differenza corrisponde a come incontrano la retta all'infinito.

**Teorema 1.131.**

*Sia  $C$  una conica affine reale non vuota non degenera, allora*

- $C$  è un'ellisse  $\iff V(\overline{C}) \cap H_0 = \emptyset$
- $C$  è una parabola  $\iff |V(\overline{C}) \cap H_0| = 1$
- $C$  è un'iperbole  $\iff |V(\overline{C}) \cap H_0| = 2$

*Dimostrazione.*

Sia  $A$  una matrice che rappresenta  $C$ , allora essa rappresenta anche  $\overline{C}$ . Se

$$A = \begin{pmatrix} c & b^\top \\ b & \tilde{A} \end{pmatrix}$$

(osserviamo che  $\tilde{A}$  è simmetrica) allora

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \tilde{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ci permette di studiare il comportamento su  $H_0$ . Consideriamo tutte le possibili signature di  $\tilde{A}$ :

$C$  ellisse) Questo caso corrisponde a signature  $(2, 0, 0)$  o  $(0, 2, 0)$ , cioè  $\tilde{A}$  definita. Segue che  $\tilde{A}$  non ha vettori isotropi, ovvero

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \tilde{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \implies x_1 = x_2 = 0$$

dunque l'unica soluzione sarebbe  $[0, 0, 0]$  che però non è un punto del proiettivo, ovvero  $V(\overline{C}) \cap H_0 = \emptyset$ .

$C$  iperbole) Questo caso corrisponde a signature  $(1, 1, 0)$ , esistono dunque esattamente due rette isotrope (quelle date dai vettori della base iperbolica) e quindi esattamente due soluzioni su  $H_0$ .

$C$  parabola) Questo caso corrisponde a signature  $(1, 0, 1)$  o  $(0, 1, 1)$ . I vettori isotropi appartengono dunque ad una retta (il radicale) e quindi troviamo una sola soluzione su  $H_0$ .

Segnatura  $(0, 0, 2)$ )  $\tilde{A}$  non può avere signature  $(0, 0, 2)$  perché altrimenti  $A$  sarebbe degenera.

Dato che diverse coniche danno diversi numeri di intersezione in realtà i casi sono in corrispondenza, infatti se avessimo più di due intersezioni con  $H_0$  allora  $C$  non è una conica non degenera non vuota, perché altrimenti ci sarebbero 0, 1 o 2 intersezioni. Inoltre se due coniche come sopra hanno lo stesso numero di intersezioni vediamo per esclusione che devono essere affinemente equivalenti.  $\square$

**Proposizione 1.132** (Coniche per 5 punti).

*Dati cinque punti  $P_0, \dots, P_4 \in \mathbb{P}^2$  in posizione generale esiste un'unica conica  $C$  tale che  $P_i \in V(C)$  per ogni  $i$  e questa è non degenera.*

*Dimostrazione.*

Poiché  $P_0, \dots, P_3$  sono in posizione generale, formano un riferimento proiettivo di  $\mathbb{P}^2$ . Consideriamo allora coordinate omogenee in questo riferimento. Se  $C = [p]$  dove  $p(x_0, x_1, x_2) = ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 + dx_0x_1 + ex_0x_2 + fx_1x_2$  allora poniamo che passi per i punti del riferimento:

$$\begin{aligned} p(P_0) = 0 &\iff p(1, 0, 0) = 0 \iff a = 0 \\ p(P_1) = 0 &\iff p(0, 1, 0) = 0 \iff b = 0 \\ p(P_2) = 0 &\iff p(0, 0, 1) = 0 \iff c = 0 \\ p(P_3) = 0 &\iff p(1, 1, 1) = 0 \iff a + b + c + d + e + f = 0 \end{aligned}$$

ovvero arriviamo alle condizioni:  $a = b = c = 0$  e  $d + e + f = 0$ . Se  $P_4 = [\alpha, \beta, \gamma]$  allora troviamo l'ultima condizione

$$p(P_4) = d\alpha\beta + e\alpha\gamma + f\beta\gamma = 0.$$

Cerchiamo quindi il numero di soluzioni di

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha\beta & \alpha\gamma & \beta\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Verifichiamo che la matrice ha rango 2, così lo spazio delle soluzioni avrà dimensione 1 come spazio vettoriale e quindi 0 passando al proiettivo, cioè avremo un'unica conica che rispetta le soluzioni.

Chiaramente il rango è almeno 1 e ha rango esattamente 1 se e solo se  $\alpha\beta = \alpha\gamma = \beta\gamma$ . Se  $\alpha = 0$  allora anche uno tra  $\beta$  e  $\gamma$  è nullo, senza perdita di generalità sia  $\beta = 0$ , ma allora  $P_4 = P_2$  e quindi i punti non sarebbero in posizione generale.  $\nexists$

Ricaviamo per simmetria che nessuno dei tre è nullo, allora  $\alpha\beta = \alpha\gamma \implies \beta = \gamma$  e  $\alpha\gamma = \beta\gamma \implies \alpha = \beta$ , quindi  $\alpha = \beta = \gamma$  e quindi  $P_4 = P_3$ , che è assurdo.  $\nexists$

Verifichiamo ora che la conica trovata è effettivamente non degenera. Osserviamo che una matrice che rappresenta  $C$  è

$$\begin{pmatrix} 0 & d & e \\ d & 0 & f \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$$

che ha determinante  $def + edf = 2def$ . Se il determinante fosse nullo allora almeno uno tra  $d, e, f$  è nullo. Stiamo lavorando in caratteristica diversa da 2, quindi dobbiamo esaminare solo  $d, e$  ed  $f$ . Se almeno uno tra  $d, e, f$  è nullo allora almeno uno tra  $x_0, x_1$  o  $x_2$  divide  $p$ , quindi  $V(C)$  è dato dall'unione di due rette distinte. Sapendo che  $C$  passa per 5 punti, per il principio dei cassetti almeno una delle due rette contiene 3 dei punti  $P_0, \dots, P_4$ , e quindi questi non sarebbero in posizione generale.  $\nexists$  □

### 1.6.3 Tangenti

[Da ora in poi considereremo solo campi infiniti con caratteristica diversa da 2. Principalmente tratteremo di  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$ .]

#### Intersezioni con rette e riducibilità

Studiamo come si comportano le intersezioni tra una retta e una conica in modo da poter definire successivamente la tangente.

**Definizione 1.133** (Componenti e riducibilità).

Una retta  $r$  di equazione  $\ell$  è una **componente** della conica  $C = [F]$  se  $\ell \mid F$ .

Una conica  $C = [F]$  è **irriducibile** se  $F$  è irriducibile.

*Osservazione 1.134.*

Se  $r$  è una componente di  $C$  allora  $C$  non è irriducibile e viceversa dato che  $\deg C = 2$ .

*Osservazione 1.135.*

L'irriducibilità è un invariante per equivalenza affine/proiettiva.

*Osservazione 1.136.*

Se  $r$  è componente di  $C$  allora  $r \subseteq V(C)$  e quindi  $|r \cap V(C)|$  è infinito.

**Lemma 1.137.**

Dato un polinomio  $p \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$  omogeneo tale che  $x_0 \nmid p$ , esso è irriducibile se e solo se  $f = p(1, x_1, \dots, x_n)$  è irriducibile.

*Dimostrazione.*

Se  $p$  fosse riducibile, potremmo scrivere  $p = qr$ . Si ha dunque che

$$f = q(1, x_1, \dots, x_n)r(1, \dots, x_n).$$

Se  $f = ab$  allora omogenizzando entrambi i fattori con l'indeterminata  $x_0$  troviamo che  $p = AB$ .  $\square$

*Osservazione 1.138.*

I fattori irriducibili di un polinomio omogeneo sono omogenei.

**Proposizione 1.139** (Numero di intersezioni tra coniche e rette).

Sia  $C = [F]$  una conica in  $\mathbb{P}^2$  e  $r$  una retta, allora  $|V(C) \cap r|$  è finito se e solo se è minore o uguale a 2. Se il campo è algebricamente chiuso allora  $|V(C) \cap r| \geq 1$ .

*Dimostrazione.*

Parametizziamo  $r$  come  $\{[\lambda v + \mu w] \mid [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}\}$  dove  $P = [v]$  e  $Q = [w]$  sono punti distinti passanti per  $r$ . I punti in  $V(C) \cap r$  sono dati dalle radici considerate a meno di prodotto per scalare  $[\lambda, \mu]$  del polinomio

$$G(\lambda, \mu) = F(\lambda v + \mu w) = F(\lambda v_0 + \mu w_0, \lambda v_1 + \mu w_1, \lambda v_2 + \mu w_2)$$

dove intendiamo che  $v = (v_0, v_1, v_2)^\top$  e similmente per  $w$ .

Osserviamo che  $G \in \mathbb{K}_2[\lambda, \mu]$  per costruzione e che  $G \neq 0$  in quanto altrimenti  $r \subseteq V(C)$  contraddicendo l'ipotesi sulla cardinalità dell'intersezione (siamo su un campo infinito).

Scriviamo dunque  $G(\lambda, \mu) = a\lambda^2 + b\lambda\mu + c\mu^2$ . Se  $[\alpha, \beta]$  è una sua radice, essendo nel proiettivo,  $\alpha \neq 0$  o  $\beta \neq 0$ . Supponiamo  $\alpha \neq 0$ , da cui possiamo supporre  $\alpha = 1$  per le proprietà per proiettivo. Allora  $\beta$  è una radice di  $a + b\mu + c\mu^2$  che ha al massimo due radici. Se siamo su un campo algebricamente chiuso allora per il lemma  $a\lambda^2 + b\lambda\mu + c\mu^2$  si fattorizza in due termini lineari omogenei, ognuno dei quali fornisce una radice omogenea (possibilmente ripetuta).  $\square$

**Proposizione 1.140** (Non degenerare se e solo se irriducibile).

*Se siamo su un campo algebricamente chiuso una conica  $C$  è irriducibile se e solo se è non degenerare.*

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$ ) A meno di equivalenza proiettiva suppongo  $F = x_0^2 + x_1^2 = (x_0 - ix_1)(x_0 + ix_1)$  o  $F = x_0^2$ , che sono entrambe riducibili.

$\Leftarrow$ ) Se  $C = [F]$  e  $F = \ell_1 \ell_2$  dove  $\ell_1(x) = a^\top x$  e  $\ell_2(x) = b^\top x$  allora  $F = x^\top ab^\top x = x^\top Mx$  dove  $M = (b_0a \mid b_1a \mid b_2a)$ . In generale  $M$  non è simmetrica, ma espandendo  $F$  vediamo che una matrice simmetrica che lo rappresenta<sup>6</sup> è  $M + M^\top = (b_0a + a_0b \mid b_1a + a_1b \mid b_2a + a_2b)$  e chiaramente questa matrice è degenerare perché le colonne appartengono a  $\text{Span}(a, b)$ .  $\square$

*Osservazione 1.141.*

Non degenerare implica sempre irriducibile, la dimostrazione proposta sopra non ha usato l'ipotesi di chiusura algebrica.

**Proposizione 1.142.**

*Se  $C$  è una conica tale che  $|V(C) \cap r| = \infty$  per una retta  $r$  di equazione  $\ell$  allora  $r$  è una componente di  $C = [p]$ .*

*Dimostrazione.*

Senza perdita di generalità siano  $\ell = x_0$  e  $p = ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 + dx_0x_1 + ex_0x_2 + fx_1x_2$ . Per quanto abbiamo già detto sulle cardinalità delle intersezioni

$$0 = G(\lambda, \mu) = p(\ell(\lambda, \mu)) = p(0, \lambda, \mu) = b\lambda^2 + c\mu^2 + f\lambda\mu,$$

dove la prima uguaglianza è intesa come polinomi. Segue dunque che

$$p = ax_0^2 + dx_0x_1 + ex_0x_2 = x_0(ax_0 + dx_1 + ex_2),$$

in particolare  $\ell = x_0 \mid p$ .  $\square$

## Tangenti

**Definizione 1.143** (Retta tangente).

Se  $C$  è una conica non degenerare allora  $r$  è **tangente** a  $C$  in  $P = [w] \in V(C) \setminus H_0$  se  $t^2 \mid C([w + tv])$  dove  $r = \{[w + tv] \mid t \in \mathbb{K}\}$ .

*Osservazione 1.144.*

Per le coniche in particolare, questo corrisponde a chiedere  $V(C) \cap r = \{P\}$ .

*Osservazione 1.145.*

Se  $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  è una proiettività,  $C$  una conica,  $P \in V(C)$  e  $r$  tangente a  $C$  in  $P$  allora  $f(r)$  è tangente a  $f(C)$  in  $f(P)$ .

<sup>6</sup>Questo funziona se  $2 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , cioè se  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$

**Proposizione 1.146** (Equazione della tangente).

Sia  $C$  una conica non degenere. Per ogni  $P \in V(C)$  esiste un'unica retta  $\tau_P$  tangente a  $C$  in  $P$ . Inoltre, se  $M \in S(3, \mathbb{K})$  rappresenta  $C$  e  $P = [v]$  allora  $\tau_P$  ha equazione  $(Mv)^\top x = 0$ .

*Dimostrazione.*

Cerchiamo di ricondurci a un caso più semplice. Osserviamo che se  $f$  è una proiettività del piano rappresentata da  $A$  e la tesi vale per  $P$  allora la matrice associata a  $f(C)$  è  $(A^{-1})^\top M A^{-1}$  e, poiché stiamo supponendo la tesi per  $P$

$$r = \{0 = v^\top Mx = (Mv)^\top x\},$$

da cui avremmo

$$f(r) = \{0 = v^\top M A^{-1} x = v^\top A^\top (A^{-1})^\top M A^{-1} x = (Av)^\top ((A^{-1})^\top M A^{-1}) x\},$$

dove chiaramente  $[Av] = f(P)$ . Cioè se la tesi vale per un punto allora vale per ogni punto dato che posso sempre trovare una proiettività che porta una data coppia punto-conica non degenere in una qualsiasi altra coppia punto-conica non degenere.

Supponiamo dunque  $[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1] \in V(C)$  con  $P = [1 : 0 : 0]$  (tre punti non allineati su una conica non degenere si trovano sempre). Si ha dunque che in questo riferimento

$$C = 2ax_0x_1 + 2bx_0x_2 + 2cx_1x_2,$$

da cui

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \implies Mv = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo quindi mostrare che la retta  $ax_1 + bx_2 = 0$  è l'unica tangente. Consideriamo una retta generica passante per  $P$

$$\ell = \lambda x_1 + \mu x_2$$

e imponiamo che il sistema abbia doppia soluzione

$$\begin{cases} C = 2ax_0x_1 + 2bx_0x_2 + 2cx_1x_2 = 0 \\ \ell = \lambda x_1 + \mu x_2 = 0 \end{cases}$$

Se  $\lambda = 0$  allora per buona definizione di  $[\lambda : \mu]$  dovremmo avere  $x_2 = 0$ , da cui sostituendo nella conica  $2ax_0x_1 = 0$  e non abbiamo dunque una soluzione doppia dato che  $a \neq 0$  (se  $a = 0$  allora  $M$  avrebbe un minore  $2 \times 2$  nullo che contraddirebbe  $C$  non degenere).

Consideriamo dunque  $\lambda \neq 0$ . Da  $\ell = 0$  si trova  $x_1 = -\frac{\mu}{\lambda}x_2$  e sostituendo sopra troviamo

$$x_2 \left( 2 \left( b - a \frac{\mu}{\lambda} \right) x_0 - 2c \frac{\mu}{\lambda} x_2 \right) = 0.$$

Chiaramente  $x_2 = 0$  è una soluzione, per avere una soluzione doppia dobbiamo quindi imporre che si annulli il coefficiente di  $x_0$ , cioè

$$b - a \frac{\mu}{\lambda} = 0 \implies [\lambda : \mu] = [a : b],$$

che è la tesi. □



*Osservazione 1.147.*

$\nabla C(v) = Mv$  quindi possiamo scrivere la retta tangente come lo spazio ortogonale al gradiente dell'equazione nel punto (ricordiamo che stiamo parlando del caso non degenere).

**Definizione 1.148** (Tangenti a conica degenere).

Se  $C = \ell_1 \ell_2$  con  $\ell_1, \ell_2$  omogenei lineari allora, posto  $s_1 = V(\ell_1)$  e  $s_2 = V(\ell_2)$ , si ha che  $r$  è tangente a  $C$  in  $P \in V(C)$  se

- $P \in s_1 \setminus s_2$  e  $r = s_1$
- $P \in s_2 \setminus s_1$  e  $r = s_2$
- $P \in s_1 \cap s_2$  e  $r$  è qualsiasi.

*Osservazione 1.149.*

Se  $\ell_1 = \ell_2$  allora ogni retta è tangente a  $C$  in  $P$  per ogni  $P \in C$ .

#### 1.6.4 Polarità

**Definizione 1.150** (Retta polare).

Sia  $C$  una conica non degenere e sia  $M$  una matrice simmetrica che la rappresenta. Dato un punto  $P = [v]$ , la **retta polare** di  $P$  rispetto a  $C$  è la retta di equazione

$$(Mv)^\top x = 0$$

che indichiamo con  $pol(P)$ .

*Osservazione 1.151.*

Dato che  $M$  è invertibile si ha che per ogni retta  $r$  di coordinate  $w$  nel duale possiamo costruire il punto  $P = [M^{-1}w]$  tale che  $r = pol(P)$  (rispetto alla conica  $C$  rappresentata da  $M$ ). Il punto  $P$  si dice **polo** della retta rispetto a  $C$ .

**Proposizione 1.152.**

Siano  $P, Q \in \mathbb{P}^2$  e sia  $C$  una conica non degenere.

1.  $P \in pol(Q) \iff Q \in pol(P)$
2. Se  $P \in V(C)$  allora  $pol(P)$  è la tangente a  $C$  in  $P$  ( $\tau_P$ )
3.  $pol(P) \cap V(C) = \{Q \in V(C) \mid P \in \tau_Q\}$ .

*Dimostrazione.*

1) Se  $P = [v]$  e  $Q = [w]$  allora le equazioni di  $pol(P)$  e  $pol(Q)$  sono rispettivamente

$$v^\top Mx = 0, \quad w^\top Mx = 0.$$

Per la simmetria di  $M$  si ha che

$$P \in pol(Q) \iff w^\top Mv = 0 \iff v^\top Mw = 0 \iff Q \in pol(P).$$

2) L'equazione della polare è l'equazione della tangente, imporre il passaggio per  $C$  era l'unica condizione mancante.

3) Se  $Q \in pol(P) \cap V(C)$  allora dai punti precedenti  $P \in pol(Q) = \tau_Q$ . Viceversa se  $Q \in V(C)$  è tale che  $P \in \tau_Q = pol(Q)$  allora  $Q \in pol(P)$ .  $\square$

**Definizione 1.153** (Conica duale).

Consideriamo l'isomorfismo proiettivo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & (\mathbb{P}^2)^* \\ P & \longmapsto & \text{pol}(P) \end{array} ,$$

che è tale perché trasformazione proiettiva tra spazi della stessa dimensione. Se restringiamo il dominio al supporto della conica in questione vediamo che l'immagine deve essere il supporto di una conica in  $(\mathbb{P}^2)^*$ , che chiamiamo **conica duale** di  $C$  e indichiamo con  $C^*$  o  $\text{pol}(C)$ .

*Osservazione 1.154.*

Se  $M$  rappresenta  $C$  allora  $C^*$  è rappresentata da  $M^{-1}$

*Dimostrazione.*

$$0 = x^\top Mx = x^\top MM^{-1}Mx = (Mx)^\top M^{-1}(Mx).$$

□

### 1.6.5 Punti reali e punti complessi

**Definizione 1.155** (Complessificazione).

Se  $C = [F]$  è una conica su  $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ , la sua **complessificata** è la conica  $C_{\mathbb{C}}$  data dalla stessa equazione ma vista a coefficienti in  $\mathbb{C}$ .

*Osservazione 1.156.*

Se  $C$  e  $D$  sono coniche complesse allora

$$C = D \iff V(C) = V(D)$$

*Dimostrazione.*

Chiaramente  $C = D \implies V(C) = V(D)$ , mostriamo dunque l'altra implicazione.

Osserviamo che  $V(C) = V(D)$  è un insieme infinito per la chiusura algebrica di  $\mathbb{C}$ . Se  $V(C)$  contiene tre punti allineati allora è unione di due rette (eventualmente coincidenti). Per quanto detto questo mostra che le equazioni di queste rette dividono  $C$  e  $D$  con l'appropriata molteplicità, quindi  $C = D$  dato che ignoriamo scalari.

Se invece  $V(C)$  non contiene tre punti allineati considero cinque punti in posizione generale di  $V(C)$ . Per quanto detto esiste una sola conica non degenere che rispetta queste condizioni, dunque  $C = D$ . □

*Osservazione 1.157.*

Tramite l'inclusione  $\mathbb{P}^2\mathbb{R} \subseteq \mathbb{P}^2\mathbb{C}$  si ha che  $V(C) \subseteq V(C_{\mathbb{C}})$ . Più precisamente vale

$$V(C) = V(C_{\mathbb{C}}) \cap \mathbb{P}^2\mathbb{R}.$$

*Osservazione 1.158.*

Non tutte le coniche in  $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$  si ottengono complessificando coniche reali. Inoltre non tutti i punti di  $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$  (visto nell'immersione  $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ ) hanno coordinate reali, per esempio  $[1 : 1 : 2] = [i : i : 2i]$ .

### 1.6.6 Sistemi lineari di coniche

**Definizione 1.159** (Sistema lineare di coniche).

Un **sistema lineare di coniche** è un sottospazio proiettivo di

$$\mathbb{P}(\mathbb{K}_2[x_0, x_1, x_2]).$$

Un sistema di dimensione 1 si dice **fascio**.

**Proposizione 1.160.**

Se  $P_1, \dots, P_4$  sono punti in posizione generale allora

$$\Lambda = \{C \mid P_1, \dots, P_4 \in V(C)\}$$

è un fascio di coniche.

*Dimostrazione.*

Passare per un punto impone una condizione lineare sui coefficienti della conica, quindi  $\Lambda$  è un sistema lineare.

Imporre una condizione lineare fa calare la dimensione di un sistema di al massimo uno, ma sappiamo che per 5 punti in posizione generale passa una sola conica, dunque ognuna delle quattro equazioni deve aver calato la dimensione di  $\Lambda$  di 1 (ricordiamo che  $\mathbb{P}(\mathbb{K}_2[x_0, x_1, x_2]) \cong \mathbb{P}^5$ ).  $\square$

**Corollario 1.161.**

Dati  $P_1, \dots, P_4$  come sopra, se  $\ell_1, \ell_2, g_1, g_2$  sono le equazioni delle rette

$$L(P_1, P_3), L(P_2, P_4), L(P_1, P_4), L(P_2, P_3)$$

allora la conica generica del fascio della proposizione è della forma

$$\lambda \ell_1 \ell_2 + \mu g_1 g_2.$$

*Osservazione 1.162.*

Anche imporre la tangenza ad una data retta corrisponde ad una condizione lineare sulla conica.

*Dimostrazione.*

Senza perdita di generalità supponiamo che il punto sia  $[0, 0, 1]$  e che la retta sia  $x_0 = 0$ . Se la conica è  $C = ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 + dx_0x_1 + ex_0x_2 + fx_1x_2$  allora il passaggio per il punto impone  $c = 0$  mentre, se  $C$  è non degenere, la condizione di tangenza diventa

$$\begin{pmatrix} 2a & d & e \\ d & 2b & f \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies e \neq 0, f = 0$$

dove  $[1 : 0 : 0]$  sono le coordinate di  $x_0 = 0$  nel duale. Dato che  $C$  era non degenere, la condizione  $e \neq 0$  è superflua, quindi troviamo  $f = 0$ .

Nel caso di  $C$  degenere si ha che  $x_0 \mid C$  oppure  $[0, 0, 1]$  è un punto del nucleo di  $M$ . Nel primo caso  $b = f = 0$  da cui comunque  $f = 0$ , nel secondo caso si ha  $e = f = 0$ .  $\square$

**Definizione 1.163** (Punto base).

Se  $\Lambda$  è un sistema lineare di coniche, un punto  $P$  è un **punto base** di  $\Lambda$  se  $P \in V(C)$  per ogni  $C \in \Lambda$ .

*Osservazione 1.164.*

Se  $\Lambda$  è un fascio e  $G_1, G_2$  sono coniche distinte di  $\Lambda$  allora i punti base di  $\Lambda$  sono  $V(G_1) \cap V(G_2)$ , infatti i punti base sono inclusi in questa intersezione e ogni altra conica di  $\Lambda$  è della forma  $\lambda G_1 + \mu G_2$ , che quindi si annulla su questi punti.

*Osservazione 1.165.*

I punti base possono essere infiniti, si consideri per esempio il fascio  $\lambda x_0 x_1 + \mu x_0 x_2 = x_0(\lambda x_1 + \mu x_2)$ .

*Osservazione 1.166.*

Per quattro punti in posizione generale passano esattamente tre coniche degeneri.

*Dimostrazione.*

Se i punti sono  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , le coniche degeneri in questione sono univocamente determinate dalla scelta di quale punto tra  $P_2, P_3, P_4$  giace sulla stessa retta di  $P_1$ , per esempio, se supponiamo  $L(P_1, P_2) \subseteq V(C)$  allora  $V(C) = L(P_1, P_2) \cup L(P_3, P_4)$ .  $\square$

## Capitolo 2

# Topologia generale

La topologia generale (in inglese spesso indicata “point-set topology”) si occupa delle proprietà basilari degli spazi topologici, ovvero insiemi dotati di una nozione di “vicinanza” tra punti. Questa vicinanza può essere data esplicitamente, per esempio nel caso degli spazi metrici viene data una funzione che restituisce la “distanza” tra due punti, ma la nozione è estremamente generale (per esempio nella topologia cofinita gli intorni dei punti risultano essere quasi tutto lo spazio).

In questo capitolo saranno date le definizioni basilari degli spazi topologici, con particolare attenzione alle nozioni di base, intorni, assiomi di numerabilità, mappe continue, omeomorfismi, prodotti, assiomi di separazione, ricoprimenti, connessione e connessione per archi, compattezza e quozienti.

### 2.1 Spazi Metrici

Gli spazi metrici, come suggerisce il nome, sono insiemi dotati di una distanza o metrica. In un certo senso sono gli spazi più vicini alla nostra intuizione (ma non sempre, per alcune metriche per esempio tutti i triangoli risultano isosceli!).

**Definizione 2.1** (Spazio metrico).

Dato un insieme  $X$ , una **distanza** su  $X$  è una funzione  $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  tale che

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

L’ultima proprietà è detta **disuguaglianza triangolare**.

La coppia  $(X, d)$  con  $d$  distanza è detta uno **spazio metrico**.

**Definizione 2.2** (Distanza punto-insieme).

Se  $(X, d)$  è uno spazio metrico e  $A \subseteq X$  allora definiamo la distanza tra un punto  $x \in X$  e  $A$  come

$$d_A(x) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Un modo semplice di costruire spazi metrici è dotare spazi vettoriali di una

**Definizione 2.3** (Norma).

Dato  $V$  uno spazio vettoriale, una **norma** su  $V$  è una funzione  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, +\infty)$  tale che

- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

*Osservazione 2.4.*

la funzione  $d(x, y) = \|x - y\|$  è una distanza, detta **distanza indotta** dalla norma  $\|\cdot\|$ .

Definiamo delle distanze ricorrenti:

**Definizione 2.5** (Distanza discreta).

Dato un qualsiasi insieme  $X$ , la **distanza discreta** su  $X$  è data da

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}.$$

Vediamo che effettivamente è una distanza: le prime due proprietà sono chiaramente rispettate e la disuguaglianza triangolare vale perché  $d(x, y) + d(y, z) \geq 1$  eccetto il caso dove  $x = y = z$ , dove la disuguaglianza triangolare coincide con affermare  $0 + 0 \geq 0$ .

**Definizione 2.6** (Distanze  $p$ ).

Sia  $p \geq 1$  e consideriamo le seguenti norme su  $\mathbb{R}^n$ :

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Definiamo  $d_p$  come le distanze indotte da queste norme. Si può verificare che prendendo il limite  $p \rightarrow \infty$  si definisce un'ulteriore norma:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

che induce la distanza  $d_\infty$ .

Chiamiamo  $\|\cdot\|_2 = |\cdot|$  la **norma euclidea** e  $d_2$  la **distanza euclidea**.

**Definizione 2.7** (Distanze  $p$  integrali).

Consideriamo lo spazio  $X = C^0([0, 1])$  delle funzioni continue sull'intervallo chiuso  $[0, 1]$  e un reale  $p \geq 1$ . Definiamo le seguenti norme:

$$\|f\|_p = \left( \int_0^1 |f(t)|^p \right)^{1/p}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| \stackrel{Weierstrass}{=} \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$

In appendice è disponibile una dimostrazione che queste sono effettivamente norme, e quindi inducono distanze sullo spazio delle funzioni continue.

**Definizione 2.8** (Embedding isometrico).

Dati  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  spazi metrici,  $f : X \rightarrow Y$  è un **embedding isometrico** se

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

*Osservazione 2.9.*

Un embedding isometrico è sempre iniettivo, infatti

$$f(x) = f(y) \implies d'(f(x), f(y)) = 0 = d(x, y) \implies x = y.$$

*Osservazione 2.10.*

La composizione di embedding isometrici è un embedding isometrico. L'identità  $(X, d) \rightarrow (X, d)$  è un embedding isometrico.

*Osservazione 2.11.*

Gli spazi metrici con gli embedding isometrici sono una categoria.

**Definizione 2.12** (Isometria).

Una **isometria** è un embedding isometrico bigettivo.

*Osservazione 2.13.*

L'inversa di una isometria è una isometria e la composizione di isometrie è una isometria. Banalmente l'identità è una isometria.

**Notazione 2.14** (Gruppo delle isometrie).

Denotiamo il **gruppo delle isometrie** di  $(X, d)$  con  $Isom(X)$ .

Diamo ora una delle definizioni che risulteranno essere tra le più importanti del corso:

**Definizione 2.15** (Palla aperta).

Dato  $(X, d)$  spazio metrico,  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ , e  $x \in X$ , definiamo

$$B_r(x) = B_d(x, r) = B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

la **palla aperta** di raggio  $r$  e centro  $x$ .

(Purtroppo la notazione che userò per le palle sarà estremamente variabile.)

**Definizione 2.16** (Continuità in un punto).

Siano  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  spazi metrici. Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è **continua** in  $x_0 \in X$  se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)).$$

La funzione è **continua** se è continua per ogni  $x_0 \in X$ .

**Definizione 2.17** (Aperto metrico).

Se  $(X, d)$  è spazio metrico,  $A \subseteq X$  è **aperto** (rispetto alla metrica  $d$ ) se  $\forall x \in A$ ,  $\exists \varepsilon > 0$  tale che  $B_\varepsilon(x) \subseteq A$ .

**Lemma 2.18.**

*Le palle aperte sono insiemi aperti nella metrica che le definisce.*

*Dimostrazione.*

Fissiamo  $x_0 \in X$  e  $r > 0$ . Per ogni  $x \in B_r(x_0)$  pongo  $\varepsilon = r - d(x_0, x)$ . Osservo che  $\varepsilon > 0$  perché  $x \in B_r(x_0)$ . Se  $y \in B_\varepsilon(x)$ , ovvero  $d(x, y) < \varepsilon$ , vedo che

$$d(x, y) < r - d(x_0, x) \implies d(y, x_0) \leq d(x, y) + d(x_0, x) < r$$

cioè  $y \in B_r(x_0)$  e quindi  $B_\varepsilon(x) \subseteq B_r(x_0)$ .  $\square$

**Teorema 2.19** (Caratterizzazione delle continue).

*Data una funzione  $f : X \rightarrow Y$  tra spazi metrici vediamo che essa è continua se e solo se la controimmagine di un aperto di  $Y$  tramite  $f$  è un aperto di  $X$ .*

*Dimostrazione.*

$\implies$ ) Sia  $A \subseteq Y$  aperto e sia  $x_0 \in f^{-1}(A)$ . Poiché  $A$  è aperto  $\exists \varepsilon > 0$  tale che  $B_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq A$ . Per continuità esiste  $\delta > 0$  tale che

$$f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq A \implies B_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(A),$$

cioè  $f^{-1}(A)$  è aperto.

$\impliedby$ ) Sappiamo che  $B_\varepsilon(f(x_0))$  è aperto per ogni  $x_0$  e per ogni  $\varepsilon > 0$ . Allora  $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$  è aperto per ipotesi. Dato che  $x_0 \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$  so che  $\exists \delta > 0$  tale che  $B_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ , dunque  $f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$ . Per arbitrarietà di  $x_0$  e di  $\varepsilon$  concludo che  $f$  è continua.  $\square$

**Definizione 2.20** (Mappa Lipschitziana).

Se  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  sono spazi metrici, dato  $k \geq 0$ , una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è  **$k$ -Lipschitziana** se

$$d'(f(p), f(q)) \leq k d(p, q), \quad \forall p, q \in X.$$

**Proposizione 2.21.**

*Una funzione lipschitziana è continua.*

*Dimostrazione.*

Verifichiamo che  $f$   $k$ -Lip. è continua in ogni punto di  $X$ . Fissiamo  $x_0 \in X$  e  $\varepsilon > 0$ . Se  $k = 0$  la funzione è costante e la tesi vale banalmente. Se  $k \neq 0$  scegliamo  $\delta < \varepsilon/k$ . Se  $d(x_0, p) < \delta$  allora  $d'(f(x_0), f(p)) \leq k\delta < \varepsilon$ , cioè  $f(B_\delta(x_0, \delta)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0), \varepsilon)$ .  $\square$

Verifichiamo ora che le palle aperte degli spazi metrici rispettano le seguenti fondamentali proprietà

**Proposizione 2.22.**

*Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico, allora*

1.  $\emptyset$  e  $X$  sono aperti.
2. Se  $A, B$  sono aperti allora  $A \cap B$  è aperto.
3. Se  $A_i$  con  $i \in I$  è una famiglia di aperti allora  $\bigcup_{i \in I} A_i$  è aperto.



*Dimostrazione.*

1) Vuotamente vera.

2) Sia  $x_0 \in A \cap B$ . Poichè  $A$  è aperto  $\exists \varepsilon_1 > 0$  tale che  $B_{\varepsilon_1}(x_0) \subseteq A$  e analogamente  $\exists \varepsilon_2 > 0$  tale che  $B_{\varepsilon_2}(x_0) \subseteq B$ . Sia  $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ , da cui

$$\begin{cases} B_\varepsilon(x_0) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x_0) \subseteq A \\ B_\varepsilon(x_0) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x_0) \subseteq B \end{cases} \implies B_\varepsilon(x_0) \subseteq A \cap B.$$

3) Sia  $x_0 \in \bigcup_{i \in I} A_i$ , allora esiste  $j \in I$  tale che  $x_0 \in A_j$ . Essendo  $A_j$  aperto  $\exists \varepsilon > 0$  tale che

$$B_\varepsilon(x_0) \subseteq A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i.$$

□

*Osservazione 2.23.*

L'intersezione arbitraria di aperti può non essere aperta, per esempio l'intersezione della famiglia data da  $B_{1/n}(0)$  in  $\mathbb{R}$ .

## 2.2 Spazi topologici

Le proprietà date sopra hanno in realtà una validità generale e ci permettono di definire gli oggetti principali che tratteremo in questo capitolo:

**Definizione 2.24** (Spazio topologico).

Uno **spazio topologico** è una coppia  $(X, \tau)$  dove  $X$  è un insieme e  $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$  per il quale valgono le seguenti proprietà:

1.  $\emptyset, X \in \tau$
2.  $A, B \in \tau \implies A \cap B \in \tau$
3.  $\Phi \subseteq \tau \implies \bigcup_{A \in \Phi} A \in \tau$ .

L'insieme  $\tau$  è detta una **topologia** su  $X$  e i suoi elementi sono detti insiemi **aperti** di  $(X, \tau)$ .

*Osservazione 2.25.*

Ogni distanza su  $X$  induce una topologia su  $X$ .

**Definizione 2.26** (Topologie discreta e indiscreta).

Gli insiemi  $\mathcal{P}(X)$  e  $\{\emptyset, X\}$  sono delle topologie su  $X$  e sono chiamate **topologia discreta** e **topologia indiscreta** rispettivamente.

**Definizione 2.27** (Topologia cofinita).

Dato l'insieme  $X$ , l'insieme  $\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X \mid |X \setminus A| \in \mathbb{N}\}$  è una topologia su  $X$  ed è detta la **topologia cofinita**. Essa ha come chiusi gli insiemi finiti e tutto lo spazio.

In modo analogo si può definire la topologia **conumerabile**.

*Osservazione 2.28.*

Non tutte le topologie sono indotte da metriche, per esempio la topologia indiscreta non può essere descritta come topologia indotta da metrica se  $|X| \geq 2$ . Questo deriva dal fatto che presi  $x_1, x_2 \in X$  distinti,  $B(x_1, d(x_1, x_2)/2)$  e  $B(x_2, d(x_1, x_2)/2)$  sono disgiunte e non vuote.

**Definizione 2.29** (Chiuso).

Dato  $(X, \tau)$  uno spazio topologico,  $C \subseteq X$  è **chiuso** se  $X \setminus C \in \tau$ .

*Osservazione 2.30.*

Una topologia può essere descritta anche dai chiusi. Tramite le leggi di De Morgan troviamo la seguente caratterizzazione equivalente di una topologia: Sia  $\chi = \{X \setminus A \mid A \in \tau\}$  allora  $\tau$  è una topologia su  $X$  se e solo se

1.  $\emptyset, X \in \chi$
2.  $A, B \in \chi \implies A \cup B \in \chi$
3.  $\Phi \subseteq \chi \implies \bigcap_{C \in \Phi} C \in \chi$ .

**Definizione 2.31** (Finezza).

Siano  $\tau_1, \tau_2$  topologie su  $X$ .  $\tau_1$  è **meno fine** di  $\tau_2$  se  $\tau_1 \subseteq \tau_2$ .

*Osservazione 2.32.*

La finezza descrive un ordinamento parziale sulle topologie con massimo (la topologia discreta) e minimo (l'indiscreta).

Intuitivamente una topologia è più fine se ha più aperti o più chiusi, cioè ci permette di distinguere meglio i punti.

### 2.2.1 Equivalenza topologica di distanze e limitatezza

Consideriamo nuovamente le topologie indotte da metriche:

**Definizione 2.33** (Metriche topologicamente equivalenti).

Date due distanze  $d_1, d_2$  su  $X$ , esse sono **topologicamente equivalenti** se inducono la stessa topologia su  $X$ .

**Proposizione 2.34.**

Siano  $d_1, d_2$  distanze su  $X$  con topologie indotte  $\tau_1$  e  $\tau_2$  rispettivamente. Se  $\exists k > 0$  tale che  $d_1(x, y) \leq k d_2(x, y)$  allora  $\tau_2$  è più fine di  $\tau_1$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $A \in \tau_1$ . Devo mostrare che  $A \in \tau_2$ . Dato  $x_0 \in A$  sappiamo che esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $B_{d_1}(x_0, \varepsilon) \subseteq A$ . Se  $d_2(x_0, y) < \varepsilon/k$  allora per ipotesi

$$d_1(x_0, y) \leq k d_2(x_0, y) < \varepsilon \implies y \in B_{d_1}(x_0, \varepsilon),$$

dunque  $B_{d_2}(x_0, \varepsilon/k) \subseteq B_{d_1}(x_0, \varepsilon) \subseteq A$ , ovvero  $A$  è aperto rispetto a  $d_2$  e quindi  $A \in \tau_2$ .  $\square$

**Corollario 2.35** (Criterio per equivalenza topologica).

Siano  $d_1, d_2$  distanze su  $X$  tali che  $\exists k > 0, h > 0$  tali che

$$d_1(x, y) \leq k d_2(x, y) \quad d_2(x, y) \leq h d_1(x, y),$$

allora  $d_1$  e  $d_2$  sono topologicamente equivalenti.

*Dimostrazione.*

Applico la proposizione due volte. Dalla prima maggiorazione trovo  $\tau_1 \subseteq \tau_2$  e dalla seconda  $\tau_2 \subseteq \tau_1$ .  $\square$

**Notazione 2.36.**

Distanze come nel corollario precedente si dicono **bilipschitziane** tra loro.

**Corollario 2.37.**

Le distanze indotte da  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  e  $\|\cdot\|_\infty$  sono topologicamente equivalenti su  $\mathbb{R}^n$

*Dimostrazione.*

Basta mostrare la maggiorazione sulle norme che le inducono:

$$\|x\|_1 = \sum |x_i| = n \frac{\sum |x_i|}{n} \stackrel{\text{medie}}{\leq} n \sqrt{\frac{\sum |x_i|^2}{n}} = \sqrt{n} \|x\|_2$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2} \leq \sqrt{\sum \|x\|_\infty^2} = \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \text{ è un termine nella somma } \sum |x_i| \implies \|x\|_\infty \leq \|x\|_1.$$

□

*Osservazione 2.38.*

Non tutte le metriche sullo stesso spazio sono topologicamente equivalenti (2.377)

**Definizione 2.39** (Limitatezza).

Se  $(X, d)$  è uno spazio metrico,  $Y \subseteq X$  è **limitato** se esistono  $x \in X$  e  $R \in \mathbb{R}$  tali che

$$Y \subseteq B_R(x).$$

**Proposizione 2.40** (Ogni spazio metrico “è limitato”).

Se  $(X, d)$  è uno spazio metrico allora esiste una metrica  $d'$  su  $X$  tale  $d$  e  $d'$  sono topologicamente equivalenti e  $d'(x, y) \leq 1$  per ogni  $x, y \in X$ , in particolare  $X$  è limitato in  $(X, d')$ .

*Dimostrazione.*

Definiamo  $d'$  a partire da  $d$  come segue:

$$d'(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}.$$

Verifichiamo che  $d$  e  $d'$  sono topologicamente equivalenti:

$\tau_{d'} \subseteq \tau_d$ ) Per definizione  $d'(x, y) \leq 1 \cdot d(x, y)$ , quindi per la proposizione (2.34)

$\tau_d$  è più fine di  $\tau_{d'}$ .

$\tau_d \subseteq \tau_{d'}$ ) Sappiamo che se  $A$  è un aperto di  $(X, d)$  allora per ogni  $x \in A$  esiste  $\varepsilon_x > 0$  tale che  $B_d(x, \varepsilon_x) \subseteq A$ . Da questo segue che

$$A = \bigcup_{x \in A} B_d(x, \varepsilon_x).$$

Osserviamo che definendo  $\varepsilon'_x = \min\{\varepsilon_x, 1\}$  allora

$$A = \bigcup_{x \in A} B_d(x, \varepsilon'_x) = \bigcup_{x \in A} B_{d'}(x, \varepsilon'_x),$$

cioè  $A$  è aperto anche per la topologia indotta da  $d'$ .

□

## 2.2.2 La categoria Top

**Definizione 2.41** (Funzione continua).

Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  con  $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$  spazi topologici è **continua** se  $A \in \tau_Y \implies f^{-1}(A) \in \tau_X$ .

*Osservazione 2.42.*

La definizione funziona anche chiedendo che la controimmagine di chiusi sia chiusa dato che prendere la controimmagine commuta con prendere il complementare.

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A).$$

**Definizione 2.43** (Omeomorfismo).

Una funzione continua tra spazi topologici  $f : X \rightarrow Y$  è un **omeomorfismo** se è biunivoca e  $f^{-1}$  è continua.

*Osservazione 2.44.*

L'identità  $id : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$  è un omeomorfismo.

*Osservazione 2.45.*

Se  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  sono continue allora anche  $g \circ f : X \rightarrow Z$  è continua. Segue che la composizione di omeomorfismi è un omeomorfismo.

*Dimostrazione.*

Segue per verifica diretta:

$$A \in \tau_Z \implies g^{-1}(A) \in \tau_Y \implies (g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \tau_X.$$

□

*Osservazione 2.46.*

Quanto detto ci permette di definire la categoria *Top*, i cui oggetti sono spazi topologici e i cui morfismi sono funzioni continue. Gli isomorfismi corrispondono agli omeomorfismi.

*Osservazione 2.47.*

Omeomorfismi e funzioni continue bigettive non coincidono.

*Dimostrazione.*

Siano  $\tau_1, \tau_2$  topologie su  $X$  tali che  $\tau_2 \subsetneq \tau_1$ . Allora  $id : (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$  è continua ma  $id : (X, \tau_2) \rightarrow (X, \tau_1)$  no. □

## 2.2.3 Chiusura e Parte interna

**Definizione 2.48** (Chiusura).

Dato  $X$  spazio topologico con topologia  $\tau$  e un suo sottoinsieme  $Y \subseteq X$ , la **chiusura** di  $Y$  in  $X$  è il più piccolo chiuso che contiene  $Y$ , ovvero

$$\bar{Y} = \bigcap_{C \text{ chiuso, } C \supseteq Y} C.$$

Dato che l'intersezione di chiusi è chiusa e  $X$  è chiuso, la chiusura è ben definita.

**Definizione 2.49** (Parte interna).

Dato  $X$  spazio topologico con topologia  $\tau$  e un suo sottoinsieme  $Y \subseteq X$ , la **parte interna** di  $Y$  in  $X$  è il più grande aperto contenuto in  $Y$ , ovvero

$$\overset{\circ}{Y} = \text{int}(Y) = \bigcup_{A \in \tau, A \subseteq Y} A.$$

Dato che l'unione di aperti è aperta e  $\emptyset$  è aperto, la parte interna è ben definita.

*Osservazione 2.50.*

Un aperto  $A$  in  $X$  è contenuto in  $Z$  se e solo se  $X \setminus A$  è un chiuso che contiene  $X \setminus Z$ , segue quindi che

$$\text{int}(Z) = X \setminus \overline{(X \setminus Z)}.$$

Analogamente

$$\overline{Z} = X \setminus \text{int}(X \setminus Z).$$

*Osservazione 2.51.*

$\overset{\circ}{Z} = Z \iff Z$  aperto e  $\overline{Z} = Z \iff Z$  chiuso.

**Definizione 2.52** (Frontiera).

La **frontiera** (topologica) o **bordo** di  $Z \subseteq X$  è definita come

$$\partial Z = \overline{Z} \setminus \overset{\circ}{Z}$$

**Definizione 2.53** (Punti aderenti e di accumulazione).

Un punto  $P \in X$  con  $Z \subseteq X$  è

- **aderente** a  $Z$  se  $P \in \overline{Z}$ ;
- **di accumulazione** per  $Z$  se  $P \in \overline{Z \setminus \{P\}}$ .

*Osservazione 2.54.*

Se  $Z \subseteq Y \subseteq X$  allora  $\overline{Z} \subseteq \overline{Y}$  e  $\overset{\circ}{Z} \subseteq \overset{\circ}{Y}$ . In particolare i punti di accumulazione sono anche aderenti.

*Osservazione 2.55.*

Esistono punti aderenti che non sono di accumulazione (2.378)

Diamo ora un criterio utile per capire se un punto è aderente. L'idea è che ogni aperto che lo contiene dovrà essere così vicino all'insieme che almeno una parte deve intersecarlo.

**Proposizione 2.56** (Caratterizzazione della chiusura).

Sia  $X$  uno spazio topologico e  $Z \subseteq X$ . Allora  $P \in \overline{Z}$  se e solo se  $\forall A \subseteq X$  aperto tale che  $P \in A$  abbiamo che  $A \cap Z \neq \emptyset$ .

*Dimostrazione.*

$\Leftarrow$  ) Se per assurdo  $P \notin \overline{Z}$ , allora  $P \in X \setminus \overline{Z} = A$ , il quale è aperto che per quanto appena detto contiene  $P$ . Eppure  $A \cap \overline{Z} = \emptyset$  per definizione, da cui  $A \cap Z = \emptyset$  che contraddice l'ipotesi.  $\nexists$

$\Rightarrow$  ) Supponiamo per assurdo che  $\exists A$  aperto tale che  $P \in A$  e  $A \cap Z = \emptyset$ . Vediamo che  $X \setminus A$  è un chiuso in  $X$  che contiene  $Z$  e quindi per definizione di chiusura  $\overline{Z} \subseteq X \setminus A$ . Ma dato che  $P \in A$ ,  $P \notin X \setminus A$  e quindi  $P \notin \overline{Z}$  che contraddice l'ipotesi.  $\nexists$  □

**Proposizione 2.57.**

Se  $P \notin Z$  e  $P$  è aderente allora  $P$  è di accumulazione.

*Dimostrazione.*

Dalla proposizione,  $P$  aderente è equivalente a  $\forall A$  aperto con  $P \in A$ ,  $A \cap Z \neq \emptyset$ . Dato che  $P \notin Z$ ,  $A \cap Z = A \cap Z \setminus \{P\} \neq \emptyset$ . Dato che questo vale per ogni  $A$  aperto che contiene  $P$  ricaviamo sempre dalla proposizione che  $P \in \overline{Z \setminus \{P\}}$ .  $\square$

*Osservazione 2.58.*

$\overline{Z_1 \cap Z_2} \neq \overline{Z_1} \cap \overline{Z_2}$ , per esempio  $\overline{\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} = \overline{\emptyset} = \emptyset$  ma  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ .

**Definizione 2.59** (Insieme denso).

Un sottoinsieme  $Z \subseteq X$  è **denso** se  $\overline{Z} = X$ .

*Osservazione 2.60.*

$Z$  è denso in  $X$  se e solo se  $\forall A \subseteq X$  aperto non vuoto si ha  $A \cap Z \neq \emptyset$ .

**2.2.4 Basi e Prebasi**

Se  $X$  è un insieme e  $S \subseteq \mathcal{P}(X)$  voglio trovare “la topologia generata da  $S$ ”, cioè la più piccola topologia che contiene  $S$ .

**Lemma 2.61.**

Siano  $\tau_i$  delle topologie su  $X$ . Allora  $\tau = \bigcap \tau_i \subseteq \mathcal{P}(X)$  è una topologia su  $X$ .

*Dimostrazione.*

Verifichiamo gli assiomi della topologia:

- In quanto topologie  $\emptyset, X \in \tau_i$  per ogni  $i$ , quindi  $\emptyset, X \in \bigcap \tau_i$ .
- Vedo che  $A, B \in \tau$  se e solo se  $A, B \in \tau_i$  per ogni  $i$  e, in quanto  $\tau_i$  topologia,  $A \cap B \in \tau_i$  per ogni  $i$ , da cui  $A \cap B \in \tau$ .
- Per l'unione arbitraria il ragionamento è identico al punto precedente.

$\square$

**Definizione 2.62** (Topologia generata).

La **topologia generata** da  $S \subseteq \mathcal{P}(X)$  è

$$\tau_S = \bigcap_{\tau \text{ topologia, } S \subseteq \tau} \tau.$$

Osservo che la definizione è ben posta per il lemma e perché l'intersezione non è vuota in quanto  $\mathcal{P}(X) \supseteq S$ .

**Definizione 2.63** (Base topologica).

Se  $(X, \tau)$  è uno spazio topologico, una **base** di  $\tau$  è un sottoinsieme  $\mathcal{B} \subseteq \tau$  tale che

$$\forall A \in \tau, \exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \text{ t.c. } A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B.$$

**Proposizione 2.64** (Caratterizzazione delle basi).

L'insieme  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  è una base di qualche topologia se e solo se  $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$  e  $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ , esiste  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$  tale che

$$B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B.$$

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$ ) So che  $X$  è aperto e che se  $B_1, B_2$  sono aperti allora anche  $B_1 \cap B_2$  aperto.

$\Leftarrow$ ) Sia  $\tau = \{A \subseteq X \mid \exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \text{ t.c. } A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B\}$ . Verifichiamo che è una topologia (chiaramente  $\mathcal{B}$  ne è base in tal caso). Verifichiamo gli assiomi:

$\emptyset \in \tau$  come unione vuota, mentre  $X \in \tau$  per ipotesi.

Se  $A_i = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_i} B$  allora

$$\bigcup_i A_i = \bigcup_i \bigcup_{B \in \mathcal{B}_i} B = \bigcup_{B \in \bigcup_i \mathcal{B}_i} B \in \tau.$$

Se  $A_1 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B, A_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_2} B \in \tau$  allora

$$A_1 \cap A_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B \cap \bigcup_{B \in \mathcal{B}_2} B = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1, C \in \mathcal{B}_2} (B \cap C) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1, C \in \mathcal{B}_2} \bigcup_{D \in \mathcal{B}'} D$$

che appartiene a  $\tau$  per definizione di  $\tau$ .  $\square$

*Osservazione 2.65.*

In generale  $S$  non è una base della topologia generata da  $S$  perché può non rispettare le condizioni sopra.

**Definizione 2.66** (Prebase topologica).

Una **prebase** di una topologia  $\tau$  su  $X$  è un sottoinsieme  $U \subseteq \mathcal{P}(X)$  tale che

$$\left\{ \bigcap_{i=1}^k U_i \mid k \in \mathbb{N}, U_i \in U \right\}$$

è una base di  $\tau$ . Per evitare di riscrivere questo insieme troppe volte lo chiameremo “le intersezioni finite di  $U$ ”.

*Osservazione 2.67.*

Ogni base è una prebase ma non è garantito il viceversa.

**Teorema 2.68** (Caratterizzazione della topologia generata).

Se  $X$  è un insieme e  $S \subseteq \mathcal{P}(X)$  allora  $\tau$  è la topologia generata da  $S$  se e solo se  $S \cup \{X\}$  è una prebase di  $\tau$ .

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$ ) Sia  $\tau$  la topologia generata da  $S$ .  $S \subseteq \tau$  e  $X \in \tau$ , quindi  $S \cup \{X\} \subseteq \tau$ . Sia  $\mathcal{B}$  le intersezioni finite di  $S \cup \{X\}$ . Vediamo che  $\mathcal{B}$  è base di qualche topologia, infatti  $X = \bigcup_{B \in \{X\} \subseteq \mathcal{B}} B$  e  $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$  per costruzione.

Sia quindi  $\tau'$  la topologia di cui  $\mathcal{B}$  è base. Visto che  $S \cup \{X\} \subseteq \tau$  e dato che  $\tau$  è una topologia abbiamo che  $\mathcal{B} \subseteq \tau$  e quindi che  $\tau' \subseteq \tau$ . Ma dato che  $S \subseteq \tau'$  e  $\tau$  è la topologia generata da  $S$  vediamo che  $\tau' = \tau$ .

$\Leftarrow$ ) Sia  $\tau_S$  la topologia generata da  $S$  e  $\tau$  la topologia della quale  $S \cup \{X\}$  è prebase.  $\tau_S \subseteq \tau$  per definizione di topologia generata. D'altra parte  $S \subseteq \tau_S$  e dagli assiomi di topologia segue che  $\tau \subseteq \tau_S$ , dunque  $\tau_S = \tau$ .  $\square$

*Osservazione 2.69.*

La topologia generata da  $S$  sono le unioni arbitrarie delle intersezioni finite di  $S$  a cui aggiungo  $X$ .

**Proposizione 2.70** (Criterio per continuità).

Se  $X$  e  $Y$  sono spazi topologici e  $f : X \rightarrow Y$  è una funzione allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1.  $f$  è continua.
2.  $\exists \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$  base per  $Y$  tale che  $\forall B \in \mathcal{B}$ ,  $f^{-1}(B)$  è aperto in  $X$ .
3.  $\exists U \subseteq \mathcal{P}(Y)$  prebase per  $Y$  tale che  $\forall U' \in U$ ,  $f^{-1}(U')$  è aperto in  $X$ .

*Dimostrazione.*

$1 \implies 2$ ) Gli elementi di  $\mathcal{B}$  sono aperti.

$2 \implies 3$ ) Le basi sono prebasi.

$3 \implies 1$ ) Se  $A$  è aperto in  $Y$  allora

$$A = \bigcup_{\alpha} \left( \bigcap_{k=1}^{N_{\alpha}} U_{i_{\alpha,k}} \right), \text{ con } U_{i_{\alpha,k}} \in U,$$

da cui

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{\alpha} \left( \bigcap_{k=1}^{N_{\alpha}} f^{-1}(U_{i_{\alpha,k}}) \right)$$

è aperto perché gli  $f^{-1}(U_{i_{\alpha,k}})$  sono aperti. □

## 2.3 Assiomi di Numerabilità e Intorni

Siamo pronti a definire il concetto di intorno e a dare gli assiomi di numerabilità. Questi concetti ci danno un modo per misurare quanto e come i punti del nostro spazio topologico sono vicini.

### 2.3.1 Intorni

**Definizione 2.71** (Intorno).

Dato  $X$  spazio topologico, un **intorno** di  $x_0 \in X$  è un sottoinsieme  $U$  di  $X$  tale che  $\exists A$  aperto in  $X$  tale che  $x_0 \in A \subseteq U$ .

*Osservazione 2.72.*

Un intorno può non essere aperto.

**Notazione 2.73.**

Indicheremo, se non altrimenti specificato, l'insieme degli intorni di un dato punto  $x_0$  come  $I(x_0)$  o  $I_X(x_0)$  nel caso sia necessario specificare lo spazio.

*Osservazione 2.74.*

Per gli intorni valgono le seguenti proprietà:

1.  $U$  è un intorno di  $x_0$  se e solo se  $x_0 \in \overset{\circ}{U}$ .
2. Se  $U$  intorno di  $x_0$  e  $U \subseteq V$  allora anche  $V$  è un intorno di  $x_0$ .
3. Se  $U$  e  $V$  sono intorni di  $x_0$  allora anche  $U \cap V$  è un intorno di  $x_0$ . Questo deriva dal fatto che  $x_0 \in \overset{\circ}{U} \cap \overset{\circ}{V}$  che essendo intersezione di aperti è ancora aperto e dunque  $x_0 \in \overset{\circ}{U} \cap \overset{\circ}{V} \subseteq \text{int}(U \cap V)$ .



**Proposizione 2.75** (Caratterizzazione di aperti/chiusi con intorni).

Valgono le seguenti proposizioni:

1.  $A$  è aperto se e solo se  $A$  è intorno di ogni suo punto
2. Se  $Z \subseteq X$  allora la chiusura di  $Z$  sono i punti  $x$  tali che ogni  $U$  intorno di  $x$ ,  $U \cap Z \neq \emptyset$ .
3.  $Z$  è chiuso se e solo se  $(x \in X, U \in I(x), U \cap Z \neq \emptyset) \implies x \in Z$ .

*Dimostrazione.*

1)  $\implies$  ) Ovvio, dato che  $A$  è aperto e  $A \subseteq A$ .

$\impliedby$  ) Per ogni  $x \in A$  sia  $A_x$  un aperto tale che  $x \in A_x \subseteq A$ . Osservo che  $A = \bigcup_{x \in A} A_x$  che è aperto in quanto unione di aperti.

2) Affermiamo che

$$(\forall A \text{ aperto in } X \text{ tale che } x \in A, A \cap Z \neq \emptyset) \iff \forall U \text{ intorno di } x, U \cap Z \neq \emptyset.$$

$\impliedby$  ) Ovvio, infatti un aperto è intorno di ogni suo punto.

$\implies$  ) Se  $U$  è intorno di  $x$  e  $A$  è un aperto tale che  $x \in A \subseteq U$  allora  $A \cap Z \neq \emptyset \implies U \cap Z \neq \emptyset$ .

Questa equivalenza ci permette di tradurre la caratterizzazione (2.56) in quella corrente.

3) Segue dalla precedente. □

Possiamo ora dare la caratterizzazione di continuità familiare dal contesto dell'analisi:

**Definizione 2.76** (Continuità in un punto).

Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è **continua in**  $x_0 \in X$  se  $\forall U \in I(f(x_0))$  esiste  $V \in I(x_0)$  tale che  $f(V) \subseteq U$  (Equivalentemente se  $\forall U \in I(f(x_0)), f^{-1}(U) \in I(x_0)$ ).

**Proposizione 2.77** (Continua equivale a continua in ogni punto).

Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è continua se e solo se è continua in  $x_0$  per ogni  $x_0$  in  $X$ .

*Dimostrazione.*

$\impliedby$  ) Se  $A$  è aperto in  $Y$  allora è intorno di ogni suo punto. Essendo  $f$  continua in ogni  $x_0$ , lo è in particolare per gli  $x_0$  in  $f^{-1}(A)$ . Allora  $f^{-1}(A)$  è un intorno di ogni  $x_0 \in f^{-1}(A)$ , cioè  $f^{-1}(A)$  è aperto.

$\implies$  ) Fissiamo  $x_0 \in X$ . Prendiamo  $U \in I(f(x_0))$ . Osserviamo che  $f(x_0) \in \mathring{U}$ . Essendo  $\mathring{U}$  aperto,  $f^{-1}(\mathring{U}) \subseteq f^{-1}(U)$  è aperto e  $x_0 \in f^{-1}(\mathring{U})$ , da cui  $f^{-1}(U)$  è un intorno di  $x_0$ . □

### 2.3.2 Sistemi fondamentali di intorni e I-numerabilità

**Definizione 2.78** (Sistema fondamentale di intorni).

Un **sistema fondamentale di intorni** (SFI) di  $x_0 \in X$  è un sottoinsieme  $J \subseteq I(x_0)$  tale che  $\forall U \in I(x_0)$  esiste  $V \in J$  tale che  $V \subseteq U$

**Definizione 2.79** (I-numerabilità).

Uno spazio  $X$  è **primo numerabile** (I-numerabile) o soddisfa il **primo assioma di numerabilità** se per ogni  $x_0 \in X$  posso trovare un SFI al più numerabile.

**Proposizione 2.80** (Gli spazi metrici sono I-numerabili).

Se  $X$  è uno spazio metrico allora  $X$  è I-numerabile.

*Dimostrazione.*

Sia  $x \in X$  e definiamo  $U = \{B(x, q)\}_{q \in \mathbb{Q}, q > 0}$ . Chiaramente  $U$  è numerabile, affermiamo che è un sistema fondamentale di intorno per  $x$ .

Sia  $V$  un intorno di  $x$ . Per definizione della topologia indotta da una metrica esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $B(x, \varepsilon) \subseteq V$ . Dato che  $0 < \varepsilon$  esiste  $q \in \mathbb{Q}$  tale che  $0 < q < \varepsilon$ , dunque

$$B(x, q) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq V$$

e  $B(x, q)$  è un elemento di  $U$ . □

**Lemma 2.81.**

Se  $X$  è I-numerabile e  $U = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  è un SFI di  $x \in X$  allora posso supporre senza perdita di generalità che  $U_{i+1} \subseteq U_i$  per ogni  $i$ .

*Dimostrazione.*

Poniamo  $V_i = \bigcap_{j=0}^i U_j$ . Vediamo che per ogni  $i$ ,  $V_i$  è un intorno di  $x$  e se  $U$  è un qualsiasi intorno di  $x$  allora  $\exists i \in \mathbb{N}$  tale che  $U_i \subseteq U$  e dato che  $V_i \subseteq U_i$ ,  $V_i \subseteq U$ . □

### 2.3.3 II-numerabilità e Separabilità

**Definizione 2.82** (II-numerabilità).

Uno spazio topologico è **II-numerabile** (letto “secondo numerabile”) o soddisfa il **secondo assioma di numerabilità** se esiste una base (al più) numerabile per la topologia.

*Osservazione 2.83.*

L’uso di “al più” nella definizione sopra non è necessario. Nel caso di spazi finiti basta ripetere frequentemente dei termini. Preferiamo specificarlo però in quanto alcune definizioni successive richiederanno la specifica “al più numerabile” in un contesto dove “numerabile” da solo sarebbe scorretto.

**Definizione 2.84** (Separabilità).

Uno spazio topologico è **separabile** se contiene un sottoinsieme al più numerabile denso.

**Teorema 2.85** (II-numerabile è separabile e in metrico coincidono).

Se  $X$  è II-numerabile allora  $X$  è separabile. Se  $X$  è metrizzabile allora vale anche l’altra implicazione.

*Dimostrazione.*

L’idea è considerare un punto per ogni aperto della base numerabile per la prima implicazione e sfruttare la numerabilità e densità di  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  nell’altra.

$\Rightarrow$ ) Supponiamo che  $X$  sia II-numerabile e sia quindi  $\{\mathcal{B}_n\}$  una base numerabile. Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  considero  $x_n \in \mathcal{B}_n$  (se  $\mathcal{B}_n = \emptyset$  lo ignoro). Affermo che  $Y = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è denso e al più numerabile. La seconda proprietà è chiaramente verificata per costruzione quindi basta verificare la densità, ovvero che  $\forall A$  aperto di  $X$  non vuoto,  $A \cap Y \neq \emptyset$ . Essendo  $\mathcal{B}$  una base esiste  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$  tale che  $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$ . Dato che  $A \neq \emptyset$ ,  $\exists \mathcal{B}_i \in \mathcal{B}'$  non vuoto, e quindi  $\mathcal{B}_i \subseteq A$ . Dato che  $x_i \in \mathcal{B}_i \cap Y \subseteq A \cap Y$  ricaviamo che  $A \cap Y \neq \emptyset$  come volevasi dimostrare.

$\Leftarrow$ ) Supponiamo che  $X$  sia metrizzabile e fissiamo una distanza  $d$  che induce la topologia. Supponiamo che  $Y \subseteq X$  sia al più numerabile e denso in  $X$ . Affermiamo che

$$\mathcal{B} = \{B(y, R) \mid y \in Y, R \in \mathbb{Q}, R > 0\}$$

è una base della topologia al più numerabile. Chiaramente è al più numerabile quindi concentriamoci sul mostrare che è una base. Sia  $A \neq \emptyset$  un aperto in  $X$ . Sia quindi  $x \in A$ . Basta mostrare che  $\exists y, R$  tali che  $x \in B(y, R) \subseteq A$ , da cui  $A$  sarà unione di elementi di  $\mathcal{B}$ . Essendo  $Y$  denso in  $X$ ,  $\exists y \in B(x, \varepsilon/3)$ . Fissiamo anche  $R \in \mathbb{Q}$  tale che  $\varepsilon/3 < R < \varepsilon/2$ . Affermiamo che  $x \in B(y, R) \subseteq A$ . Infatti  $d(x, y) < \varepsilon/3 < R$  e preso  $z \in B(y, R)$  abbiamo

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \varepsilon/3 + R < \varepsilon/3 + \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

dunque  $z \in B(x, \varepsilon) \subseteq A$ . □

### Corollario 2.86.

$\mathbb{R}^n$  è II-numerabile.

*Dimostrazione.*

$\mathbb{Q}^n$  è un denso numerabile in  $\mathbb{R}^n$ , quindi  $\mathbb{R}^n$  è uno spazio metrico separabile. La tesi segue per (2.85). □

### Proposizione 2.87 (II-numerabile implica I-numerabile).

Se  $X$  è II-numerabile allora è anche I-numerabile.

*Dimostrazione.*

Sia  $\mathcal{B}$  una base al più numerabile e fissiamo  $x_0 \in X$ . Sia  $\mathcal{B}(x_0) = \{B_n \in \mathcal{B} \mid x_0 \in B_n\}$ . Affermiamo che esso è un SFI al più numerabile. Chiaramente è al più numerabile in quanto sottoinsieme di  $\mathcal{B}$ . Osserviamo che gli elementi di  $\mathcal{B}(x_0)$  sono intorni di  $x_0$ . Se  $U$  è un intorno di  $x_0$  allora

$$x_0 \in \overset{\circ}{U} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B, \quad \text{con } \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}.$$

Dato che  $x_0 \in \overset{\circ}{U}$  esiste  $B \in \mathcal{B}'$  tale che  $x_0 \in B$ , ma allora  $B \in \mathcal{B}(x_0)$  e  $B \subseteq \overset{\circ}{U} \subseteq U$ . □

*Osservazione 2.88.*

I-numerabile e II-numerabile NON sono equivalenti (2.379).

## 2.3.4 Successioni

### Definizione 2.89 (Successione).

Sia  $X$  uno spazio topologico. Una **successione a valori in  $X$**  è una funzione  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$  (dove indichiamo tradizionalmente  $x(n)$  con  $x_n$ ).

Una **sottosuccessione** di  $x_n$  è successione data da  $x_{n_k}$ , dove  $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  è strettamente crescente.

### Definizione 2.90 (Definitivamente e Frequentemente).

Una successione  $x_n$  rispetta una proprietà  $P$  **definitivamente** se  $\exists k_0$  tale che  $\forall k \geq k_0$ ,  $x_k$  rispetta  $P$ , mentre  $x_n$  rispetta  $P$  **frequentemente** se  $\forall k_0$ ,  $\exists k \geq k_0$  tale che  $x_k$  rispetta  $P$ .

**Definizione 2.91** (Limite).

Affermiamo che la successione  $x_n$  **tende** a  $\bar{x} \in X$  (o che  $\bar{x}$  è un **limite** di  $x_n$ ) e scriviamo  $x_n \rightarrow \bar{x}$  o  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x}$  se

$$\forall U \text{ intorno di } \bar{x}, x_n \in U \text{ definitivamente.}$$

*Osservazione 2.92.*

Osserviamo che

- i limiti possono non esistere.
- i limiti di una data successione possono non essere unici. Per esempio nella topologia indiscreta ogni punto è limite di ogni successione.
- se  $x_n$  è una successione (definitivamente) costante allora quella costante è un limite di  $x_n$ .
- Se  $x_n \rightarrow \bar{x}$  allora ogni sottosuccessione  $x_{n_k}$  è tale che  $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$ .

**Definizione 2.93** (Chiuso per successioni).

Un insieme  $Y \subseteq X$  è **chiuso per successioni** se per ogni  $x_n$  successione a valori in  $Y$ , se  $x_n \rightarrow \bar{x}$  allora  $\bar{x} \in Y$ .

**Proposizione 2.94** (Chiusura e Chiusura per successioni).

Sia  $Y \subseteq X$  e poniamo

$$\hat{Y} = \{\bar{x} \in X \mid \exists x_n \text{ successione t.c. } x_n \in Y \text{ e } x_n \rightarrow \bar{x}\}.$$

Allora  $\hat{Y} \subseteq \bar{Y}$  e se  $X$  è I-numerabile allora  $\hat{Y} = \bar{Y}$ .

*Dimostrazione.*

$\subseteq$ ) Usiamo la caratterizzazione di  $\bar{Y}$  per intorni. Sia  $\bar{x} \in \hat{Y}$  e sia  $U$  un intorno di  $\bar{x}$ . Per definizione di limite, una successione  $x_n \rightarrow \bar{x}$  è tale che  $x_n \in U$  definitivamente, cioè  $\emptyset \neq U \cap \{x_n\} \subseteq U \cap Y$ , quindi  $\bar{x} \in \bar{Y}$ .

$\supseteq$ ) Supponiamo che  $X$  sia I-numerabile e prendiamo  $\bar{x} \in \bar{Y}$ . Dobbiamo mostrare che  $\exists x_n$  successione a valori in  $Y$  tale che  $x_n \rightarrow \bar{x}$ . Sia  $U = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  un SFI numerabile di  $\bar{x}$ . Per il lemma (2.81) possiamo supporre senza perdere generalità che  $U_{i+1} \subseteq U_i$  per ogni  $i$ .

Dato che  $\bar{x} \in \bar{Y}$ , si ha che  $Y \cap U_i \neq \emptyset$ , dunque  $\exists x_i \in Y \cap U_i$ . Affermiamo che  $x_i \rightarrow \bar{x}$ , infatti, dato  $U$  un intorno di  $\bar{x}$ , per definizione di SFI esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  con  $U_{n_0} \subseteq U$ . D'altronde  $\{x_i\}_{i \geq n_0} \subseteq U_{n_0}$ , quindi  $x_i$  è definitivamente contenuta in  $U$  come volevamo mostrare.  $\square$

**Definizione 2.95** (Aperto per successioni).

Se  $Y \subseteq X$  allora  $Y$  è **aperto per successioni**<sup>1</sup> se, per ogni  $\bar{x} \in Y$ , se  $x_n$  è una successione in  $X$  tale che  $x_n \rightarrow \bar{x}$ , allora  $x_n \in Y$  definitivamente.

**Proposizione 2.96** (Parte interna e Parte interna per successioni).

Sia  $Y \subseteq X$ . Se  $\bar{x} \in \hat{Y}$ , allora per ogni successione tale che  $x_n \rightarrow \bar{x}$  si ha  $x_n \in Y$  definitivamente.

Se  $X$  è I-numerabile vale anche il viceversa.

<sup>1</sup>In realtà non ho mai visto questo termine usato, ho voluto dare questa definizione solo per aiutare i lettori ad afferrare la simmetria degli argomenti presentati in questa sezione.

*Dimostrazione.*

$\implies$ ) Se  $\bar{x} \in \overset{\circ}{Y}$  allora  $Y$  è un intorno di  $\bar{x}$ , quindi ogni successione  $x_n \rightarrow \bar{x}$  cade definitivamente in  $Y$ .

$\Leftarrow$ ) Per assurdo supponiamo che  $\bar{x} \notin \overset{\circ}{Y}$  e costruiamo  $x_n \rightarrow \bar{x}$  tale che  $x_n \notin Y$  definitivamente. Poiché  $\bar{x} \notin \overset{\circ}{Y}$ ,  $\bar{x} \in \overline{X \setminus Y}$ , dunque per la proposizione precedente esiste  $x_n \in X \setminus Y$  tale che  $x_n \rightarrow \bar{x}$ , che contraddice l'ipotesi.  $\nexists$   $\square$

**Definizione 2.97** (Continuità per successioni).

Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è **continua per successioni** se  $\forall x_n$  tale che  $x_n \rightarrow \bar{x}$  allora  $f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$ .

**Proposizione 2.98** (Continuità e Continuità per successioni).

Sia  $f : X \rightarrow Y$  tra spazi topologici. Allora se  $f$  è continua è continua per successioni. Se  $X$  è I-numerabile allora continuità e continuità per successioni sono equivalenti.

*Dimostrazione.*

$\implies$ ) Supponiamo che  $x_n \rightarrow \bar{x}$  e sia  $U$  un intorno di  $f(\bar{x})$ . Essendo  $f$  continua,  $f^{-1}(U)$  è un intorno di  $\bar{x}$ , dunque  $x_n \in f^{-1}(U)$  definitivamente, ovvero  $f(x_n) \in U$  definitivamente.

$\Leftarrow$ ) Sia  $A \subseteq Y$  aperto. Vogliamo vedere che  $f^{-1}(A)$  è aperto in  $X$ , ovvero che  $f^{-1}(A)$  è intorno di ogni suo punto. Sia  $\bar{x} \in f^{-1}(A)$  e verifichiamo che  $\bar{x} \in \text{int}(f^{-1}(A))$  con il criterio delle successioni (qui usiamo l'ipotesi di I-numerabilità).

Se  $x_n \rightarrow \bar{x}$  e  $f$  è continua per successioni abbiamo che  $f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$ . Essendo  $A$  aperto, esso è un intorno di  $f(\bar{x})$ , quindi  $f(x_n) \in A$  definitivamente, ovvero  $x_n \in f^{-1}(A)$  definitivamente. Abbiamo quindi per il criterio che  $\bar{x} \in \text{int}(f^{-1}(A))$  che è ciò che volevamo mostrare.  $\square$

Possiamo riassumere questi risultati nella seguente

**Proposizione 2.99.**

Se  $Y \subseteq X$  e  $f : X \rightarrow Z$  allora

- se  $Y$  è chiuso, è chiuso per successioni
- se  $Y$  è aperto, è aperto per successioni
- se  $f$  è continua allora è continua per successioni.

Se  $X$  è I-numerabile allora le implicazioni sopra sono equivalenze.

## 2.4 Topologia di sottospazio

**Definizione 2.100** (Topologia di sottospazio).

Sia  $X$  uno spazio topologico e  $Y \subseteq X$ . La **topologia di sottospazio** di  $Y$  è la topologia meno fine che rende l'inclusione  $i : Y \rightarrow X$  continua.

La definizione è ben posta in quanto la topologia discreta rende l'inclusione continua e l'intersezione di topologie è sempre una topologia.

**Proposizione 2.101** (Caratterizzazione della topologia di sottospazio).

La topologia di sottospazio di  $Y$  è  $\tau|_Y = \{B \subseteq Y \mid \exists A \in \tau_X \text{ t.c. } B = Y \cap A\}$ , cioè sono le intersezioni di aperti globali con l'insieme.

*Dimostrazione.*

È topologia) Osserviamo che  $Y = X \cap Y$  e  $\emptyset = \emptyset \cap Y$ . Se  $A, B$  sono aperti in  $X$ ,  $(Y \cap A) \cap (Y \cap B) = Y \cap (A \cap B)$  e  $A \cap B$  è aperto in  $Y$ . Se  $A_i$  è aperto in  $X$  per ogni  $i \in I$ ,  $\bigcup_{i \in I} Y \cap A_i = Y \cap \bigcup_{i \in I} A_i$  e  $\bigcup_{i \in I} A_i$  è aperto in  $X$ .

è la top. di ssp.) Se  $\tau'$  è tale che  $i : (Y, \tau') \rightarrow (X, \tau_X)$  è continua allora  $i^{-1}(A) \in \tau'$ . Dato che  $i^{-1}(A) = Y \cap A$  vediamo che  $\tau|_Y \subseteq \tau'$ . Essendo la topologia di sottospazio la meno fine ed essendo  $\tau|_Y$  una topologia abbiamo che questa è proprio la topologia di sottospazio.  $\square$

Se non specifichiamo altrimenti considereremo ogni sottospazio dotato della topologia di sottospazio.

*Osservazione 2.102.*

Dalla definizione segue che i chiusi della topologia di sottospazio sono della forma  $Y \cap C$  con  $C$  chiuso in  $X$ .

*Osservazione 2.103.*

Se  $\mathcal{B}$  è una base di  $\tau$ ,  $\mathcal{B}' = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{B}\}$  è una base di  $\tau|_Y$ .

**Proposizione 2.104** (Aperto di un aperto e Chiuso di un chiuso).

*$Y$  è aperto in  $X$  se e solo se tutti gli aperti in  $Y$  sono aperti in  $X$ .  $Y$  è chiuso in  $X$  se e solo se ogni chiuso in  $Y$  è chiuso in  $X$ .*

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$ ) Sia  $A$  un aperto di  $Y$ , ovvero esiste  $B$  aperto in  $X$  tale che  $A = B \cap Y$ . Essendo sia  $B$  che  $Y$  aperti in  $X$ , anche  $A$  è aperto in  $X$ .

$\Leftarrow$ ) Se ogni aperto di  $Y$  è aperto in  $X$ , in particolare  $Y$  stesso è aperto in  $X$ . *(chiusi)* La logica passa senza modifiche se non scambiare la parola “aperto” con “chiuso”.  $\square$

**Proposizione 2.105** (Proprietà universale della topologia di sottospazio).

*Siano  $X, Z$  spazi topologici e sia  $Y \subseteq Z$ . Data una mappa  $f : X \rightarrow Y$  e chiamando  $i : Y \rightarrow Z$ ,  $f$  è continua se e solo se  $i \circ f : X \rightarrow Z$  è continua.*

*Dimostrazione.*

Chiamando  $\tau_X, \tau_Y, \tau_Z$  le topologie di  $X, Y$  e  $Z$ , vale la seguente catena di equivalenze:

$$\begin{aligned} i \circ f \text{ continua} \\ \forall A \in \tau_Z, (i \circ f)^{-1}(A) \in \tau_X \\ \forall A \in \tau_Z, f^{-1}(i^{-1}(A)) = f^{-1}(A \cap Y) \in \tau_X \\ \forall A \in \tau_Y, f^{-1}(A) \in \tau_X \\ f \text{ continua.} \end{aligned}$$

$\square$

**Proposizione 2.106** (Restrizione di continua è continua).

*Sia  $f : X \rightarrow Y$  continua,  $Z \subseteq X$ . Allora  $f|_Z : Z \rightarrow Y$  è continua*

*Dimostrazione.*

Se  $A$  è un aperto in  $Y$ ,  $(f|_Z)^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap Z$ . Per la continuità di  $f$ ,  $f^{-1}(A)$  è aperto in  $X$ , quindi  $f^{-1}(A) \cap Z$  è aperto in  $Z$ .  $\square$

**Lemma 2.107** (Chiusura in sottospazi).

Siano  $X$  uno spazio topologico e  $A \subseteq Z \subseteq X$ . Allora la chiusura di  $A$  in  $Z$  (che indicheremo con  $\overline{A}^Z$ ) coincide con  $\overline{A} \cap Z$ , dove  $\overline{A}$  è la chiusura di  $A$  in  $X$ .

*Dimostrazione.*

$$\overline{A}^Z = \bigcap_{\substack{C_Z \text{ chiuso in } Z \\ A \subseteq C_Z}} C_Z = \bigcap_{\substack{C \text{ chiuso in } X \\ A \subseteq C \cap Z}} C \cap Z = Z \cap \bigcap_{\substack{C \text{ chiuso in } X \\ A \subseteq C}} C = Z \cap \overline{A}.$$

□

*Osservazione 2.108.*

Questo è falsissimo per le parti interne, per esempio  $\{0\} \subseteq \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ . Chiaramente  $\text{int}_{\{0\}}(\{0\}) = \{0\}$  ma  $\text{int}_{\mathbb{R}}(\{0\}) \cap \{0\} = \emptyset \cap \{0\} = \emptyset$ .

Vediamo quali proprietà di numerabilità passano a sottospazi:

**Proposizione 2.109.**

Sia  $X$  uno spazio topologico e  $Y \subseteq X$ .

1. Se  $X$  è II-numerabile allora  $Y$  è II-numerabile
2. Se  $X$  è I-numerabile allora  $Y$  è I-numerabile
3. Se  $X$  è separabile NON sempre  $Y$  è separabile
4. Se  $X$  è metrizzabile allora  $Y$  è metrizzabile e la topologia di sottospazio è la topologia indotta dalla metrica di  $X$  ristretta a  $Y$
5. Se  $X$  è metrizzabile e separabile allora  $Y$  è separabile

*Dimostrazione.*

1) Se  $\mathcal{B}$  è una base numerabile di  $X$  allora  $\mathcal{B}' = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{B}\}$  è una base numerabile di  $Y$ .

2) Dato  $y \in Y$ , sia  $U_y$  un sistema fondamentale di intorni numerabile per  $y$  in  $X$ . Affermo che  $U'_y = \{U \cap Y \mid U \in U_y\}$  è un SFI di  $y$  in  $Y$  numerabile. Chiaramente è numerabile e i suoi elementi sono intorni di  $y$  in  $Y$ , quindi basta verificare che è un SFI. Sia  $V$  un intorno di  $y$  in  $Y$  e sia  $\overset{\circ}{V}$  la parte aperta di  $V$  (in  $X$  o  $Y$  è irrilevante dato che  $\overset{\circ}{V} \subseteq V \subseteq Y$ ). Osserviamo che, dato che  $y \in \overset{\circ}{V}$  che è un aperto di  $X$ ,  $V$  è un intorno di  $y$  anche in  $X$ . Allora esiste  $U \in U_y$  tale che  $U \subseteq V \subseteq Y$ . Osserviamo quindi che  $U = U \cap Y$  e quindi  $U \in U'_y$ , dunque abbiamo trovato un elemento di  $U'_y$  contenuto in  $V$ .

3) Consideriamo un  $Y$  non separabile, per esempio un insieme non numerabile con la topologia discreta. Costruiamo  $X = Y \sqcup \{\infty\}$  dove  $\infty$  è un simbolo arbitrario. Dotiamo  $X$  della seguente topologia:  $A \subseteq X$  è aperto in  $X$  se e solo se  $A = \emptyset$  oppure  $A = B \sqcup \{\infty\}$  con  $B$  aperto di  $Y$ . È immediato verificare che questa è una topologia, basta sfruttare gli assiomi di topologia in  $Y$  scrivendo  $\sqcup \{\infty\}$  alla fine di ogni termine.

Osserviamo che per costruzione  $\{\infty\}$  è denso in  $X$  e quindi  $X$  è separabile, eppure  $Y = X \setminus \{\infty\}$  è un sottospazio che mantiene la topologia che avevamo richiesto in partenza, e quindi non è separabile.

4) Sia  $d$  la distanza su  $X$  e siano  $\tau$  la topologia che induce su  $X$ ,  $\tau_Y$  la topologia di  $Y$  come sottospazio e  $\tau'$  la topologia indotta da  $d$  su  $Y$ . La tesi equivale a mostrare che  $\tau_Y = \tau'$ .

$\supseteq$ ) Ovvio, infatti

$$B_{d|_Y}(x, R) = \{y \in Y \mid d(x, y) < R\} = B_d(x, R) \cap Y$$

e sappiamo che le palle sono una base di  $\tau'$ .

$\subseteq$ ) Osserviamo che l'inclusione  $i : Y \rightarrow X$  è 1-lipschitziana (addirittura è un embedding isometrico dato che siamo su spazi metrici), quindi  $\tau_Y \subseteq \tau'$  dato che  $\tau_Y$  è la topologia meno fine che rende l'inclusione continua.

5) Su spazi metrici, essere separabile ed essere secondo numerabile sono equivalenti, quindi la tesi vale applicando il primo e il quarto punto.  $\square$

## 2.5 Mappe aperte e chiuse

**Definizione 2.110** (Mappe aperte e chiuse).

Sia  $f : X \rightarrow Y$  tra spazi topologici.  $f$  è **aperta** se  $f(A)$  è aperto in  $Y$  per ogni  $A$  aperto in  $X$ . Analogamente  $f$  è **chiusa** se per ogni chiuso  $C$  di  $X$ ,  $f(C)$  è chiuso in  $Y$ .

**Lemma 2.111** (Funzione aperta se e solo se aperta su base).

Data  $f : X \rightarrow Y$  e  $\mathcal{B}$  una base di  $X$ ,  $f$  è aperta se e solo se  $f(B)$  è aperto in  $Y$  per ogni  $B \in \mathcal{B}$ .

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$ ) Ovvio.

$\Leftarrow$ ) Dato  $A$  è aperto in  $X$  lo scriviamo come unione di aperti base  $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$  con  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ . Segue che

$$f(A) = f\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B\right) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} f(B)$$

ed essendo  $f(B)$  aperto in  $Y$  per ipotesi,  $f(A)$  è aperto di  $Y$  in quanto unione di aperti.  $\square$

**Definizione 2.112** (Immersione topologica).

Una funzione continua  $f : X \rightarrow Y$  è una **immersione topologica** se è un omeomorfismo tra  $X$  e  $f(X)$ .

*Osservazione 2.113.*

Ricordiamo che se  $f : X \rightarrow Y$  è continua e bigettiva,  $f$  non è sempre un omeomorfismo.

*Osservazione 2.114.*

Se  $f^{-1}$  è continua allora per  $A$  aperto in  $X$ ,  $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$  è aperto in  $Y$ . Analogamente per i chiusi.

**Proposizione 2.115** (Caratterizzazione delle immersioni topologiche in aperti / chiusi).

Se  $f : X \rightarrow Y$  è continua e iniettiva allora



- $f$  chiusa  $\iff f$  immersione topologica in un chiuso di  $Y$
- $f$  aperta  $\iff f$  immersione topologica in un aperto di  $Y$

*Dimostrazione.*

$\implies$  ) Dato che  $X$  è chiuso in sé,  $f(X)$  è chiuso in  $Y$ . Poiché  $f$  è iniettiva  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$  è ben definita. Se  $C$  è un chiuso in  $X$  allora  $(f^{-1})^{-1}(C) = f(C)$  è chiuso in  $Y$ , ovvero  $f^{-1}$  è continua.

$\impliedby$  ) Abbiamo che  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$  è continua, dunque per  $C$  chiuso in  $X$  abbiamo che  $(f^{-1})^{-1}(C) = f(C)$  è un chiuso, quindi  $f$  è chiusa.

Nel caso degli aperti la dimostrazione è identica, basta sostituire “chiuso” con “aperto”.  $\square$

*Osservazione 2.116.*

Esistono immersioni topologiche né aperte né chiuse, per esempio  $i : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ .

## 2.6 Prodotti

Consideriamo ora un modo per costruire spazi a partire da altri spazi.

**Definizione 2.117** (Prodotto cartesiano).

Data  $\{X_i\}_{i \in I}$  una famiglia di insiemi, il loro **prodotto (cartesiano)** è dato da

$$\prod_{i \in I} X_i = \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid \forall i \in I, f(i) \in X_i \right\}.$$

L'elemento  $f \in \prod_{i \in I} X_i$  viene spesso denotato con  $(f(i))_{i \in I}$ , cioè una stringa di elementi  $(x_i)_{i \in I}$  con  $x_i \in X_i$  per ogni  $i \in I$ .

Chiamiamo  $x_i = f(i)$  la **coordinata  $i$ -esima** di  $f = (x_i)_{i \in I}$ .

Sul prodotto  $\prod_{i \in I} X_i$  è definita la **proiezione  $i$ -esima** per ogni  $i \in I$ , ovvero è definita la mappa

$$\begin{array}{ccc} \prod_{j \in I} X_j & \longrightarrow & X_i \\ \pi_i : f & \longmapsto & f(i) \end{array}$$

o equivalentemente  $\pi_i((x_j)_{j \in I}) = x_i$ .

**Definizione 2.118** (Diagonale).

La **diagonale** di  $X$  è il seguente sottoinsieme di  $X \times X$

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

Se gli  $X_i$  sono spazi topologici, vorremmo definire una topologia sul prodotto:

**Definizione 2.119** (Topologia prodotto).

Siano  $(X_i, \tau_i)$  spazi topologici per ogni  $i \in I$ . La **topologia prodotto** su  $\prod_{i \in I} X_i$  è la topologia meno fine che rende ogni proiezione  $i$ -esima continua.

**Proposizione 2.120** (Caratterizzazione della topologia prodotto).

La topologia prodotto  $\tau$  di  $\prod_{i \in I} X_i$  è ben definita ed ammette come prebase l'insieme

$$\{\pi_i^{-1}(A) \mid A \in \tau_i, i \in I\} = \{\{(x_j)_{j \in I} \mid x_i \in A\} \mid A \in \tau_i, i \in I\}$$

*Dimostrazione.*

Affinché ogni  $\pi_i$  sia continua, è necessario e sufficiente che  $\tau$  contenga gli elementi descritti sopra. Segue che la topologia prodotto è la più piccola topologia che contiene gli elementi sopra, ovvero è la topologia che ha come prebase l'insieme sopra unito con  $\{\prod_{i \in I} X_i\}$ . In realtà questa aggiunta è superflua dato che

$$\prod_{i \in I} X_i = \pi_i^{-1}(X_i).$$

□

**Corollario 2.121.**

Una base della topologia prodotto  $\tau$  è data da

$$\left\{ \bigcap_{j=1}^k \pi_{i_j}^{-1}(A_j) \mid k \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_k \in I, A_j \in \tau_{i_j} \forall j \in I \right\}.$$

Inoltre se  $\mathcal{B}_j$  è una base di  $\tau_j$  allora una base di  $\tau$  è data da

$$\left\{ \bigcap_{j=1}^k \pi_{i_j}^{-1}(A_j) \mid k \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_k \in I, A_j \in \mathcal{B}_j \forall j \in I \right\}.$$

*Osservazione 2.122.*

Se  $I$  è finito possiamo semplificare la scrittura della base di  $\tau$  in

$$\mathcal{B} = \{A_1 \times \dots \times A_{\#I} \mid A_i \in \tau_i\}$$

Infatti  $\bigcap_{i=1}^{\#I} \pi_i^{-1}(A_i) = A_1 \times \dots \times A_{\#I}$ .

Se invece  $I$  è infinito vediamo che un generico aperto nella base di  $\tau$  standard descritta sopra è dato da  $\prod_{i \in I} A_i$  con  $A_i \in \tau_i$  ma  $A_i = X_i$  eccetto che per un numero finito di entrate.

**Definizione 2.123** (Box topology).

La topologia su  $\prod_{i \in I} X_i$  data da  $\{\prod_{i \in I} A_i \mid A_i \in \tau_i\}$  è detta **box topology** sul prodotto. Se  $I$  è finito la box topology e la topologia prodotto coincidono.

**Proposizione 2.124** (Prodotto di chiusi è chiuso).

Se  $C_i \subseteq X_i$  sono chiusi allora  $\prod_{i \in I} C_i$  è chiuso in  $\prod_{i \in I} X_i$ .

*Dimostrazione.*

Osserviamo che

$$\prod_{i \in I} C_i = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(C_i).$$

Per continuità delle proiezioni  $\pi_i^{-1}(C_i)$  è chiuso, quindi  $\prod_{i \in I} C_i$  è intersezione di chiusi. □

**Proposizione 2.125** (Prodotto finito di metrici è metrico).

Dati  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  spazi metrici con topologie indotte  $\tau_X, \tau_Y$ , la topologia prodotto su  $X \times Y$  (che denotiamo  $\tau_X \times \tau_Y$ ) coincide con la topologia indotta su  $X \times Y$  da

$$d_\infty((x, y), (x', y')) = \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}.$$

In particolare il prodotto finito di spazi metrizzabili è metrizzabile.

*Dimostrazione.*

Sia  $\tau$  la topologia indotta da  $d_\infty$ . Osserviamo che

$$\pi_X : (X \times Y, d_\infty) \rightarrow (X, d_X)$$

è 1-Lipschitziana per definizione di massimo, e quindi è continua. Analogamente  $\pi_Y$  è continua, dunque per definizione di topologia prodotto  $\tau_X \times \tau_Y$  è meno fine di  $\tau$ .

Per concludere basta verificare che un aperto della base standard di  $\tau$  è aperto per  $\tau_X \times \tau_Y$ . Sia  $B_{d_\infty}((x, y), R)$  un tale aperto. Dalla definizione di  $d_\infty$  si ha che

$$B_{d_\infty}((x, y), R) = B_{d_X}(x, R) \times B_{d_Y}(y, R)$$

che è un aperto di  $\tau_X \times \tau_Y$ .  $\square$

*Osservazione 2.126.*

Essendo le metriche  $p$  equivalenti su  $\mathbb{R}^{n2}$  (e in particolare  $\mathbb{R}^2$ ) il risultato vale anche per  $d_2$  e  $d_1$ . Segue immediatamente, per esempio, che  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$

**Proposizione 2.127** (Prodotto numerabile di metrici è metrico).

*Sia  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una famiglia numerabile di spazi metrici, allora*

$$X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$$

*è metrico.*

*Dimostrazione.*

Ricordiamo che se  $(X_i, d_i)$  è uno spazio metrico allora esso è topologicamente equivalente ad uno spazio metrico limitato  $(X_i, d'_i)$  (proposizione 2.40). Supponiamo dunque che per ogni  $X_i$ ,  $d_i \leq 1$ . Definiamo quella che vorremo mostrare essere una metrica su  $X$  che induce la topologia prodotto:

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i).$$

è una metrica) Osserviamo che  $\forall x, y \in X$ ,  $d(x, y) \in \mathbb{R}$ , infatti

$$|d(x, y)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |2^{-i}| |d_i(x_i, y_i)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2.$$

Dato che ogni addendo è non negativo, anche  $d(x, y)$  è non negativo. Quindi  $d$  è ben definita, vediamo che rispetta gli assiomi di distanza:

- Se  $x = y$  allora  $x_i = y_i$ , da cui  $d(x, y) = \sum 0 = 0$ . Se invece  $d(x, y) = 0$  allora necessariamente  $d(x_i, y_i) = 0$ , quindi  $x_i = y_i$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$ , cioè  $x = y$ .
- Evidentemente  $d(x, y) = d(y, x)$ .

---

<sup>2</sup>Lo mostreremo nel capitolo sulla compattezza. (2.302)

- Segue dal seguente conto:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum 2^{-i} d_i(x_i, y_i) \leq \\ &\leq \sum 2^{-i} d_i(x_i, z_i) + \sum 2^{-i} d_i(y_i, z_i) = \\ &= d(x, z) + d(y, z). \end{aligned}$$

*Più fine della topologia prodotto*) Verifichiamo che  $\pi_i : (X, \tau_d) \rightarrow (X_i, \tau_{d_i})$  è continua. Se questo vale allora la topologia indotta da  $d$  è più fine della topologia prodotto, che è la meno fine per la quale le proiezioni sono continue per definizione.

Fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $\delta = 2^{-k}\varepsilon$ . Osserviamo che se  $y \in B_d(x, \delta)$  allora

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} d_i(x_i, y_i) < 2^{-k}\varepsilon \implies \\ \implies 2^{-k} d_k(x_k, y_k) + \underbrace{\sum_{i \in \mathbb{N} \setminus \{k\}} 2^{-i} d_i(x_i, y_i)}_{\geq 0} &< 2^{-k}\varepsilon \implies \\ \implies d_k(x_k, y_k) &< \varepsilon, \end{aligned}$$

cioè  $\pi_k(B_d(x, \delta)) \subseteq B_{d_k}(x_k, \varepsilon)$ . Abbiamo quindi verificato che  $\pi_k$  è continua in ogni punto di  $X$ , cioè  $X$  è continua.

*Meno fine della topologia prodotto*) Per definizione della topologia indotta da una metrica sappiamo che se  $U$  è un aperto metrico allora per ogni punto  $x \in U$  esiste una palla  $B = B_d(x, \varepsilon) \subseteq U$ . Se riusciamo a mostrare che per ogni palla esiste un aperto della topologia prodotto contenuto nella palla contenente il centro avremo mostrato la tesi ricordando che  $U$  è unione dei suoi punti ma anche delle palle centrate in quei punti.

Mostriamo allora che per ogni palla  $B = B_d(x, \varepsilon)$  esiste un aperto di base della topologia prodotto contenuto nella palla che contiene  $x$ . Sia  $N$  un naturale tale che  $2^{-N} < \varepsilon/2$  e per ogni  $i \in \{0, \dots, N\}$  poniamo

$$B_i = B_{d_i}(x_i, \varepsilon/2).$$

Per definizione, se  $y \in \bigcap_{i=0}^N \pi_i^{-1}(B_i)$  allora per ogni  $i \leq N$  si ha che

$$d_i(x_i, y_i) < \frac{\varepsilon}{2},$$

da cui

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^N \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i) + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i) < \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2^N}\right) \frac{\varepsilon}{2}}_{\in (0,1)} + \frac{1}{2^N} \cdot 1 < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

cioè  $\bigcap_{i=0}^N \pi_i^{-1}(B_i) \subseteq B$  come voluto.  $\square$

*Osservazione 2.128.*

Il prodotto più che numerabile di spazi metrici può non essere metrico (2.380).

### 2.6.1 Proiezioni da un prodotto in un fattore

**Teorema 2.129** (Proprietà universale del prodotto).

Se  $X_i$  sono spazi topologici per ogni  $i \in I$  e  $Y$  è un altro spazio topologico, data  $f : Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$  si ha che

$$f \text{ continua} \iff \pi_i \circ f : Y \rightarrow X_i \text{ è continua } \forall i \in I.$$

*Dimostrazione.*

$\implies$ ) Le  $\pi_i$  sono continue per definizione di topologia prodotto, quindi  $\pi_i \circ f$  è composizione di continue.

$\impliedby$ ) Basta verificare la continuità sugli aperti di una prebase. Consideriamo la prebase  $\{\pi_i^{-1}(A) \mid i \in I \text{ e } A \subseteq X_i \text{ aperto}\}$ . Per un aperto di quella forma si ha  $f^{-1}(B) = f^{-1}(\pi_i^{-1}(A)) = (\pi_i \circ f)^{-1}(A)$ , che è aperto in  $Y$  per ipotesi. Abbiamo quindi verificato che  $f$  è continua.  $\square$

**Teorema 2.130** (Le proiezioni sono aperte).

Se  $X_i$  sono spazi topologici per ogni  $i \in I$ , le proiezioni  $\pi_i$  sono aperte per ogni  $i \in I$ .

*Dimostrazione.*

Grazie al lemma (2.111) basta verificare che  $\pi_i(B)$  è aperto in  $X_i$  dove  $B$  è in una base di  $\prod_{i \in I} X_i$ . Usiamo la base già discussa, il cui aperto generico è della forma

$$A = \pi_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_k}^{-1}(A_{i_k}), \quad i_1, \dots, i_k \in I, \quad A_j \subseteq X_j \text{ aperto.}$$

Senza perdita di generalità supponiamo che  $j \neq h \implies i_j \neq i_h$ . Dobbiamo verificare che  $\pi_i(A)$  è aperto in  $X_i$ .

- Se  $i = i_h$  per qualche  $h$  allora  $\pi_i(A) = A_{i_h}$ , che è aperto in  $X_i = X_{i_h}$ .
- Se  $i \neq i_h$  per ogni  $h$  allora  $\pi_i(A) = X_i$ , che è aperto in  $X_i$ .

$\square$

*Osservazione 2.131.*

Le proiezioni non sono sempre chiuse (2.382).

### 2.6.2 Immersioni dei fattori nel prodotto

**Proposizione 2.132** (Immersioni dei fattori nei prodotti).

Fissiamo  $k \in I$  un indice e  $x_i \in X_i$  per ogni  $i \neq k$ . Allora la funzione

$$j : \begin{array}{ccc} X_k & \longrightarrow & \prod_{i \in I} X_i \\ x & \longmapsto & (y_i)_{i \in I} \end{array}, \quad y_i = \begin{cases} x_i & \text{se } i \neq k \\ x & \text{se } i = k \end{cases}$$

è una immersione topologica.

*Dimostrazione.*

Osserviamo che

$$\pi_i \circ j = \begin{cases} x \mapsto x_i & \text{se } i \neq k \\ id_{X_k} & \text{se } i = k \end{cases},$$

quindi  $\pi_i \circ j$  è continua per ogni  $i$ , dunque  $j$  stessa è continua. Osserviamo anche che, essendo  $\pi_k \circ j = id_{X_k}$  bigettiva,  $j$  è iniettiva.

Dobbiamo solo verificare che  $j : X_k \rightarrow j(X_k)$  è un omeomorfismo. Basta vedere che  $j^{-1} : j(X_k) \rightarrow X_k$  è continua. Osserviamo però che

$$j^{-1} = \pi_k|_{j(X_k)},$$

che è chiaramente continua in quanto restrizione di continua.  $\square$

Con la stessa dimostrazione troviamo il seguente fatto più generale

**Proposizione 2.133.**

Se  $I' \subseteq I$  e fissiamo  $x_i \in X_i$  per  $i \notin I'$  allora

$$j : \prod_{i \in I'} X_i \longrightarrow \prod_{i \in I} X_i, \quad y_i = \begin{cases} x_i & \text{se } i \notin I' \\ x_h & \text{se } i = h \in I' \end{cases}$$

$$(x_h)_{h \in I'} \longmapsto (y_i)_{i \in I}$$

è un'immersione topologica.

### 2.6.3 Topologia della convergenza puntuale

**Definizione 2.134.**

Sia  $Y$  uno spazio topologico e  $X$  un insieme. Definiamo

$$\{f : X \rightarrow Y\} = \prod_{x \in X} Y = Y^X$$

e la topologia prodotto su questo spazio è detta **topologia della convergenza puntuale**.

**Proposizione 2.135.**

Sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni in  $Y^X$ , allora  $f_n \rightarrow f$  in questa topologia se e solo se per ogni  $x \in X$  si ha  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  in  $Y$ .

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$ ) Le proiezioni sono funzioni continue dunque  $f_n(x) = \pi_x(f_n) \rightarrow \pi_x(f) = f(x)$ .

$\Leftarrow$ ) Sia  $U$  un intorno di  $f$  in  $Y^X$  e scegliamo un aperto di base  $A$  tale che  $f \in A \subseteq U$ . Si ha che  $A = \prod_{x \in X} A_x$  dove  $A_x$  è un aperto di  $Y$  e  $A = Y$  eccetto che per un numero finito di elementi di  $X$  (che indichiamo  $x_1, \dots, x_k$ ). Dato che  $f_n(x_i) \rightarrow f(x_i)$  per ipotesi si ha che definitivamente  $f_n(x_i) \in A_{x_i}$  in quanto quest'ultimo è intorno di  $f(x_i)$ . Dato che i punti sono in numero finito si ha che esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $\forall n \geq N$ ,  $f_n(x_i) \in A_{x_i}$  per ogni  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Dato che per gli altri punti di  $X$  si ha  $A_x = Y$  osserviamo che definitivamente  $f_n(x) \in A_x$  per ogni  $x \in X$ , cioè  $f_n \in A \subseteq U$  come voluto.  $\square$

## 2.7 Assiomi di separazione

Consideriamo adesso diversi modi in cui i punti del nostro spazio possono essere distinti gli uni dagli altri. Più assiomi di separazione vengono rispettati, più modi abbiamo per scegliere intorni dei nostri punti. Se non vengono rispettati

degli assiomi di separazione lo spazio ha un aspetto più spigoloso o appiccicoso (ci sono punti vicini a tanti altri), mentre più assiomi di separazione vengono rispettati, più lo spazio topologico comincia a diventare simile agli spazi ai quali siamo comunemente abituati (per esempio, tutti gli spazi metrici sono almeno spazi di Hausdorff).

**Definizione 2.136** (Assiomi di separazione).

Sia  $X$  uno spazio topologico. Affermiamo che  $X$  soddisfa l'assioma

- $T_0$  se  $\forall x \neq y \in X$  esiste  $U$  aperto in  $X$  tale che  $x \in U$  e  $y \notin U$  o viceversa.
- $T_1$  se  $\forall x \neq y \in X$  esistono  $U, V$  aperti in  $X$  tali che  $x \in U$ ,  $y \notin U$  e  $x \notin V$ ,  $y \in V$ .
- $T_2$  se  $\forall x \neq y \in X$  esistono  $U, V$  aperti in  $X$  tali che  $x \in U$ ,  $y \in V$  e  $U \cap V = \emptyset$ .

Se  $X$  soddisfa  $T_2$  viene detto **spazio di Hausdorff**.

*Osservazione 2.137.*

Definizioni analoghe ed equivalenti si ottengono considerando intorni al posto di aperti.

*Osservazione 2.138.*

$T_2 \implies T_1 \implies T_0$  e queste sono implicazioni strette (2.383).

*Osservazione 2.139.*

Non tutti gli spazi topologici sono  $T_0$ , per esempio se  $\#X \geq 2$  allora la topologia indiscreta su  $X$  non è  $T_0$ .

**Proposizione 2.140** (Gli spazi metrici sono Hausdorff).

Se  $(X, d)$  è uno spazio metrico allora la topologia indotta da  $d$  su  $X$  è  $T_2$ .

*Dimostrazione.*

Se  $x \neq y$  in  $X$  posso separarli usando le palle aperte  $B(x, \frac{d(x,y)}{2})$  e  $B(y, \frac{d(x,y)}{2})$ , le quali sono disgiunte e non vuote.  $\square$

**Proposizione 2.141** (Caratterizzazione degli spazi  $T_1$ ).

Uno spazio topologico  $X$  è  $T_1$  se e solo se i punti sono chiusi, che succede se e solo se la topologia di  $X$  è più fine della topologia cofinita.

*Dimostrazione.*

Una topologia è più fine della cofinita se ogni chiuso cofinito (insieme finito) è anche chiuso per la topologia, e dato che i singoletti sono finiti abbiamo che la topologia deve vedere i singoletti come chiusi. Viceversa se i singoletti sono chiusi, la loro unione finita restituisce ogni insieme finito, dunque gli insiemi finiti devono essere chiusi e quindi la topologia è più fine della cofinita.

Mostriamo ora la prima equivalenza.

$\implies$ ) Supponiamo che  $X$  sia  $T_1$ . Vorrei verificare che  $\overline{\{x\}} = \{x\}$ . Sicuramente  $\{x\} \subseteq \overline{\{x\}}$ , quindi dobbiamo solo mostrare l'altra inclusione. Osserviamo che

$$\overline{\{x\}} = \{y \in X \mid \forall A \text{ aperto t.c. } y \in A, x \in A\}.$$

Se  $y \neq x$ , essendo  $X$   $T_1$  trovo un aperto  $V$  in  $X$  tale che  $y \in V$  ma  $x \notin V$ . L'esistenza di  $V$  implica che  $y \notin \overline{\{x\}}$ , quindi  $\overline{\{x\}} = \{x\}$ .

$\Leftarrow$ ) Supponiamo che  $\overline{\{x\}} = \{x\}$  e consideriamo  $y \in X \setminus \{x\}$ . Essendo  $\{x\}$  chiuso,  $X \setminus \{x\}$  è aperto e  $y \in X \setminus \{x\}$  ma  $x \notin X \setminus \{x\}$ . Sappiamo anche che  $\{y\}$  è chiuso e quindi per un ragionamento analogo  $X \setminus \{y\}$  è un aperto che contiene  $x$  ma non  $y$ .  $\square$

**Proposizione 2.142** (Caratterizzazione degli spazi  $T_2$ ).

$X$  è di Hausdorff se e solo se la diagonale  $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$  è un chiuso di  $X \times X$ .

*Dimostrazione.*

Osservo che  $(x, y) \in \Delta_X \iff x = y$  e quindi  $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta_X \iff x \neq y$ . Consideriamo la seguente catena di equivalenze:

- $\Delta_X$  chiuso in  $X \times X$
- $X \times X \setminus \Delta_X$  è aperto in  $X \times X$
- $\forall (x, y) \in X \times X \setminus \Delta_X$  esiste un aperto (di base)  $A \times B$  di  $X \times X$  tale che  $(x, y) \in A \times B \subseteq (X \times X) \setminus \Delta_X$
- $\forall x, y$  tali che  $x \neq y$  esiste un aperto  $A \times B$  di  $X \times X$  tale che  $(x, y) \in A \times B \subseteq (X \times X) \setminus \Delta_X$
- $\forall x, y$  tali che  $x \neq y$  esistono  $A, B$  aperti in  $X$  tali che  $x \in A, y \in B$  e  $(A \times B) \cap \Delta_X = \emptyset$
- $\forall x, y$  tali che  $x \neq y$  esistono  $A, B$  aperti in  $X$  tali che  $x \in A, y \in B$  e  $A \cap B = \emptyset$ .

L'equivalenza tra la prima affermazione e l'ultima è la tesi.  $\square$

**Corollario 2.143.**

Sia  $f : X \rightarrow Y$  continua con  $Y$  di Hausdorff, allora il grafico di  $f$  ( $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$ ) è un chiuso.

*Dimostrazione.*

Osserviamo che  $F : \begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & Y \times Y \\ (x, y) & \longmapsto & (f(x), y) \end{array}$  è continua (le componenti sono continue). Chiaramente  $\Gamma_f = F^{-1}(\Delta_Y)$  che è chiuso dato che  $\Delta_Y$  è chiuso, essendo  $Y$  di Hausdorff.  $\square$

**Corollario 2.144.**

Siano  $f, g : X \rightarrow Y$  continue e  $Y$  di Hausdorff, allora  $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \subseteq X$  è un chiuso.

*Dimostrazione.*

$F : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \times Y \\ x & \longmapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$  è continua (componenti continue) e l'insieme nell'enunciato è  $F^{-1}(\Delta_Y)$ .  $\square$

**Corollario 2.145** (Funzioni continue concordanti su un denso in  $T_2$  coincidono).

Siano  $f, g : X \rightarrow Y$  continue e  $Y$  di Hausdorff, allora se  $f = g$  su un denso di  $X$ ,  $f = g$  come funzioni da  $X \rightarrow Y$ , infatti un chiuso che contiene un denso è tutto lo spazio.



**Corollario 2.146.**

Se  $f : X \rightarrow X$  è continua e  $X$  è  $T_2$  allora  $\text{Fix}(f)$  è un chiuso di  $X$ .

*Dimostrazione.*

Dal secondo corollario sappiamo che  $\{f(x) = \text{id}_X(x) = x\}$  è un chiuso.  $\square$

**Teorema 2.147** (Unicità del limite per Hausdorff).

Se  $X$  è  $T_2$ ,  $x_n$  è una successione a valori in  $X$  e  $x_n \rightarrow x$ ,  $x_n \rightarrow y$  con  $x, y \in X$ , allora  $x = y$ .

*Dimostrazione.*

Per assurdo supponiamo  $x \neq y$ , allora essendo  $X$  di Hausdorff trovo  $U, V$  aperti in  $X$  tali che  $x \in U$ ,  $y \in V$  e  $U \cap V = \emptyset$ . Osservo che  $U$  è un intorno di  $x$  e  $V$  è un intorno di  $y$ . Essendo  $x$  un limite di  $x_n$  abbiamo che  $x_n \in U$  definitivamente. Analogamente  $x_n \in V$  definitivamente, quindi  $x_n \in U \cap V = \emptyset$  definitivamente, che è assurdo.  $\nmid$   $\square$

**Proposizione 2.148** (Primi assiomi di separazione sono stabili per sottospazi, prodotti e raffinamenti).

Per  $i = 0, 1, 2$  vediamo che

1. Sottospazi di spazi  $T_i$  sono  $T_i$
2. Prodotti di spazi  $T_i$  sono  $T_i$
3. Raffinamenti di topologie  $T_i$  sono  $T_i$ .

*Dimostrazione.*

Consideriamo solo  $i = 2$  dato che le dimostrazioni per gli altri due casi sono analoghe.

1) Se  $X$  è  $T_2$  e  $Y$  è un suo sottospazio, se  $x \neq y$  in  $Y$  posso trovare  $U, V$  aperti di  $X$  tali che  $x \in U$ ,  $y \in V$  e  $U \cap V = \emptyset$ . Ponendo  $U' = U \cap Y$  e  $V' = V \cap Y$  troviamo aperti di  $Y$  con  $x \in U'$ ,  $y \in V'$  e

$$U' \cap V' = U \cap V \cap Y = \emptyset \cap Y = \emptyset.$$

2) Se  $X_i$  è uno spazio  $T_2$  per ogni  $i \in I$  consideriamo  $X = \prod_{i \in I} X_i$ . Dati  $x = (x_i)_{i \in I}$  e  $y = (y_i)_{i \in I}$  due punti di  $X$  con  $x \neq y$ , cioè esiste  $i_0 \in I$  tale che  $x_{i_0} \neq y_{i_0}$ , visto che  $X_{i_0}$  è  $T_2$  posso trovare  $U, V$  aperti di  $X_{i_0}$  tali che  $x_{i_0} \in U$ ,  $y_{i_0} \in V$  e  $U \cap V = \emptyset$ . Ponendo  $U' = \pi_{X_{i_0}}^{-1}(U)$  e  $V' = \pi_{X_{i_0}}^{-1}(V)$  ho due aperti di  $X$  tali che  $x \in U'$ ,  $y \in V'$  e

$$U' \cap V' = \pi_{X_{i_0}}^{-1}(U \cap V) = \pi_{X_{i_0}}^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

3) Se  $X$  è un insieme e  $\tau \subseteq \tau'$  sono due topologie dove  $\tau$  è  $T_2$  allora anche  $\tau'$  è  $T_2$ , infatti per  $x, y$  funzioneranno gli stessi aperti che funzionavano in  $\tau$ .  $\square$

Le proprietà sopra ci informano che  $T_0$ ,  $T_1$  e  $T_2$  sono in un certo concetti di separazione fondamentali e stabili. Questi assiomi ci permettono di distinguere punti, ma non dicono niente sugli insiemi, è quindi possibile per esempio non trovare aperti che separano punti da chiusi disgiunti. Seguono allora i seguenti

**Definizione 2.149** (Assiomi di separazione 3 e 4).

Uno spazio topologico  $X$  si dice

- $T_3$  se  $\forall x \in X$  e per ogni  $C$  chiuso in  $X$  tale che  $x \notin C$  esistono  $U, V$  aperti in  $X$  tali che  $x \in U$ ,  $C \subseteq V$  e  $U \cap V = \emptyset$ .
- $T_4$  se per ogni  $C, D$  chiusi in  $X$  tali che  $C \cap D = \emptyset$  esistono  $U, V$  aperti in  $X$  tali che  $C \subseteq U$ ,  $D \subseteq V$  e  $U \cap V = \emptyset$ .

*Osservazione 2.150.*

Se  $X$  è  $T_1$  allora  $T_4 \implies T_3 \implies T_2$ .

*Osservazione 2.151.*

Se  $X$  non è  $T_1$  allora è possibile che  $X$  sia  $T_4$  o  $T_3$  senza essere  $T_2$ ,  $T_1$  o  $T_0$  (2.384).

**Definizione 2.152** (Regolari e Normali).

Affermiamo che uno spazio è **regolare** se è  $T_1$  e  $T_3$ . Affermiamo che uno spazio è **normale** se è  $T_1$  e  $T_4$ .

*Osservazione 2.153.*

Normale  $\implies$  Regolare  $\implies$  Hausdorff e le implicazioni sono strette (per esempio il piano di Sorgenfrey (2.389) è regolare ma non normale e l'esempio (2.390) mostra uno spazio Hausdorff non regolare).

Mostriamo che gli spazi metrici sono normali. Per fare ciò abbiamo bisogno di un paio di lemmi:

**Lemma 2.154.**

La distanza punto-insieme è 1-Lipschitziana, in particolare è continua.

*Dimostrazione.*

Fissiamo  $x, y \in X$ . Per ogni  $a \in A$  la disuguaglianza triangolare ci dà

$$\begin{aligned} d(a, x) &\leq d(x, y) + d(y, a) \\ d_A(x) &= \inf\{d(a, x) \mid a \in A\} \leq d(x, y) + d(y, a) \\ d_A(x) &\leq d(x, y) + \inf\{d(y, a) \mid a \in A\} = d(x, y) + d_A(y) \\ d_A(x) - d_A(y) &\leq d(x, y). \end{aligned}$$

Scambiando  $x$  e  $y$  troviamo anche  $d_A(y) - d_A(x) \leq d(x, y)$ , quindi

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq 1 \cdot d(x, y).$$

□

**Lemma 2.155** (La chiusura in un metrico sono i punti a distanza nulla).

Se  $X$  è uno spazio metrico e  $A \subseteq X$  allora  $d_A^{-1}(0) = \overline{A}$ . In particolare se  $C$  è un chiuso allora  $C = d_C^{-1}(0)$ .

*Dimostrazione.*

Chiaramente  $A \subseteq d_A^{-1}(0)$ , quindi basta vedere che  $d_A^{-1}(0) \subseteq \overline{A}$  e che  $d_A^{-1}(0)$  è chiuso.

Essendo  $0$  chiuso in  $\mathbb{R}$ , vediamo che  $d_A^{-1}(0)$  è chiuso per continuità, quindi  $\overline{A} \subseteq d_A^{-1}(0)$ .

Consideriamo ora  $y \in X$  tale che  $d_A(y) = 0$ , cioè  $\inf\{d(y, a) \mid a \in A\} = 0$ . Sia  $a_n$  una successione in  $A$  tale che  $d(y, a_n) < 1/n$ , ovvero  $a_n \in B(y, 1/n)$ . Osserviamo che qualsiasi intorno di  $y$  interseca  $A$ , infatti esso contiene una palla centrata in  $y$  e quindi anche  $B(y, 1/n) \ni a_n \in A$  definitivamente in  $n$ . Abbiamo quindi mostrato che  $y \in \overline{A}$ , cioè  $d_A^{-1}(0) \subseteq \overline{A}$ . □

**Proposizione 2.156** (Spazi metrici sono normali).

Se  $(X, d)$  è uno spazio metrico allora  $X$  con la topologia indotta da  $d$  è normale.

*Dimostrazione.*

Abbiamo visto che uno spazio metrico è  $T_2$ , quindi in particolare è  $T_1$ . Basta verificare che è anche  $T_4$ .

Dati  $C, D$  chiusi in  $X$  tali che  $C \cap D = \emptyset$  consideriamo

$$f(x) = \frac{d_D(x)}{d_D(x) + d_C(x)} : X \rightarrow [0, 1].$$

La funzione è ben definita perché  $d_D(x) \geq 0$ ,  $d_C(x) \geq 0$ , da cui il rapporto è compreso tra 0 e 1 se il denominatore non si annulla, ma  $d_D(x) + d_C(x) = 0 \iff d_D(x) = d_C(x) = 0 \iff x \in \overline{C} = C$ ,  $x \in \overline{D} = D$  ma dato che  $C \cap D = \emptyset$  questo non accade.

Osserviamo inoltre che  $f$  è continua, in quanto composizione di

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\} & \xrightarrow{e} & \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (d_C(x), d_D(x)) & & (x, y) & \longmapsto & \frac{y}{y+x}, \end{array}$$

che sono continue. Osserviamo ora che  $f^{-1}(0)$  sono i punti di  $X$  a distanza nulla da  $D$ , ovvero  $\overline{D} = D$ , mentre  $f^{-1}(1)$  sono i punti tali che  $d_C(x) = 0$  e quindi  $f^{-1}(1) = \overline{C} = C$ . Possiamo allora considerare  $U = f^{-1}((2/3, 1]) \subseteq X$ , che è aperto in  $X$  dato che  $f$  è continua e  $(2/3, 1]$  è aperto in  $[0, 1]$ , e  $V = f^{-1}([0, 1/3))$ , che è aperto per un motivo analogo. Si ha che  $U \cap V = \emptyset$ , dato che  $[0, 1/3) \cap (2/3, 1] = \emptyset$  e che  $C \subseteq U$ ,  $D \subseteq V$ , da cui la tesi.  $\square$

Nella dimostrazione sopra abbiamo ricavato il seguente risultato nel caso di spazi metrici

**Proposizione 2.157** (Lemma di Urysohn).

Se  $X$  è  $T_4$ , dati  $C, D$  chiusi disgiunti esiste  $f : X \rightarrow [0, 1]$  continua tale che

$$f^{-1}(0) = D, \quad f^{-1}(1) = C.$$

*Dimostrazione (NON DATA DURANTE IL CORSO).*

$\square$

Consideriamo ora alcune proprietà degli spazi  $T_3$  e  $T_4$

**Proposizione 2.158** (Ereditarietà per sottospazi di  $T_3$  e  $T_4$ ).

Valgono le seguenti proprietà:

1. Sottospazi di spazi  $T_3$  sono  $T_3$
2. Sottospazi chiusi di spazi  $T_4$  sono  $T_4$

*Dimostrazione.*

1) Siano  $X$  uno spazio  $T_3$  e  $Y$  un suo sottospazio. Se  $x \in Y, C \subseteq Y$  con  $C$  chiuso in  $Y$  tale che  $x \notin C$ , per definizione di topologia di sottospazio esiste un chiuso  $C'$  di  $X$  tale che  $C = C' \cap Y$ . In  $X$  trovo  $U, V$  aperti disgiunti tali che  $x \in U$  e  $C' \subseteq V$ . Ponendo  $U' = Y \cap U$  e  $V' = Y \cap V$  troviamo due aperti disgiunti di  $Y$

tali che  $x \in U'$  e  $C = Y \cap C' \subseteq V'$ , quindi  $Y$  è  $T_3$ .

2) Siano  $X$  uno spazio  $T_4$ ,  $Y$  un chiuso in  $X$  e  $C, D$  chiusi in  $Y$  disgiunti. Essendo  $Y$  chiuso,  $C$  e  $D$  sono chiusi anche in  $X$  e dalla proprietà  $T_4$  di  $X$  trovo  $U, V$  aperti disgiunti in  $X$  tali che  $C \subseteq U$ ,  $D \subseteq V$ , da cui  $U' = U \cap Y$  e  $V' = V \cap Y$  sono aperti disgiunti in  $Y$  tali che  $C \subseteq U'$  e  $D \subseteq V'$ .  $\square$

*Osservazione 2.159.*

Sottospazi non chiusi di uno spazio  $T_4$  possono non essere  $T_4$ .

**Proposizione 2.160** (Caratterizzazione di  $T_3$  con intorni).

*Uno spazio topologico  $X$  è  $T_3$  se e solo se gli intorni chiusi dei punti formano sistemi fondamentali di intorni.*

*Dimostrazione.*

I chiusi formano un SFI significa che per ogni  $x \in X$ , se  $U$  è un intorno di  $x$  allora esiste  $V$  aperto tale che  $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ . Mostriamo le due implicazioni:  $\implies$ ) Sia  $U$  un intorno di  $x$ . Senza perdita di generalità supponiamo  $U$  aperto. Osserviamo dunque che  $X \setminus U$  è un chiuso e  $x \notin X \setminus U$ , dunque per la proprietà  $T_3$  esistono  $A$  e  $B$  aperti disgiunti tali che  $X \setminus U \subseteq A$  e  $x \in B$ . Sia  $C = X \setminus A$ , il quale è un chiuso contenuto in  $U$  che contiene  $B$  (e quindi  $x$ ). Abbiamo quindi trovato un intorno chiuso di  $x$  contenuto in  $U$ .

$\impliedby$ ) Siano  $x \in X$  e  $C$  chiuso in  $X$  tale che  $x \notin C$ . Osserviamo che  $A = X \setminus C$  è un aperto e  $x \in A$ , dunque per ipotesi esiste un intorno  $V$  chiuso di  $x$  tale che  $V \subseteq A$ , cioè  $C \subseteq X \setminus V$  dove  $B = X \setminus V$  è un aperto. Per concludere basta osservare che  $x \in \text{int}(V) \subseteq V$  e  $V \cap B = \emptyset \implies \text{int}(V) \cap B = \emptyset$ .  $\square$

**Proposizione 2.161** (Prodotti di  $T_3$  sono  $T_3$ ).

*Dato un insieme di indici  $I$ , se  $X_i$  è uno spazio  $T_3$  per ogni  $i \in I$  allora*

$$\prod_{i \in I} X_i \text{ è uno spazio } T_3.$$

*Dimostrazione.*

Siano  $x = (x_i)_{i \in I} \in X$  e  $V$  aperto che lo contiene. Per la caratterizzazione (2.160) basta trovare  $U$  aperto tale che  $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V$ . Sia  $A = \prod_{i \in I} A_i$  un aperto di base (ricordiamo che  $A_i = X_i$  eccetto che per un numero finito di entrate) tale che  $x \in A \subseteq V$ . Guardando quanto detto sulle componenti troviamo  $x_i \in A_i$  con  $A_i$  aperto in  $X_i$ . Siano allora  $B_i$  aperti di  $X_i$  tali che

$$x_i \in B_i \subseteq \overline{B_i} \subseteq A_i.$$

Se  $X_i = A_i$  allora poniamo  $B_i = A_i = X_i$ , che funziona in quanto sia aperto che chiuso. Questo ci servirà per garantire i passaggi successivi.

Consideriamo  $B = \prod_{i \in I} B_i$ . Questo è un aperto di base di  $X$  (dato che tutte le entrate sono  $X_i$  eccetto che per un numero finito). Osserviamo che

$$x \in \prod_{i \in I} B_i \subseteq \prod_{i \in I} \overline{B_i} \subseteq \prod_{i \in I} A_i.$$

Dato che  $\prod_{i \in I} \overline{B_i}$  è chiuso (2.124),  $\overline{B} \subseteq \prod_{i \in I} \overline{B_i}$ , da cui la tesi.  $\square$

**Corollario 2.162.**

*Il prodotto di spazi regolari è regolare.*

*Osservazione 2.163.*

Prodotti di spazi  $T_4$  non sono sempre  $T_4$  (2.389). Lo stesso esempio mostra che prodotto di spazi normali non sempre è normale.

*Osservazione 2.164.*

Raffinamenti di topologie  $T_3$  o  $T_4$  possono non essere  $T_3$  o  $T_4$  (un esempio con  $T_4$  è il piano di Sorgenfrey (2.389)). Anche se aggiungere nuovi aperti non influisce su come potevamo distinguere i punti e i chiusi già presenti, raffinare introduce nuovi chiusi nella topologia e non è detto che si presentino gli aperti necessari per separarli.

## 2.8 Ricoprimenti fondamentali

Cominciamo ora ad approfondire i ricoprimenti. Spesso vogliamo studiare proprietà di uno spazio ricostruendole a partire da proprietà locali e i ricoprimenti, specialmente i ricoprimenti aperti, sono uno dei modi più versatili di farlo. In questa sezione introduciamo i tipi di ricoprimenti più utili.

**Definizione 2.165** (Ricoprimento).

Sia  $X$  uno spazio topologico, un **ricoprimento** di  $X$  è una famiglia  $\{B_i\}_{i \in I}$  di sottoinsiemi di  $X$  tale che

$$X = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Un ricoprimento è **aperto** (rispettivamente **chiuso**) se ogni  $B_i$  è aperto (rispettivamente chiuso).

**Definizione 2.166** (Ricoprimento fondamentale).

Un ricoprimento  $\{B_i\}_{i \in I}$  di  $X$  è **fondamentale** se  $\forall A \subseteq X$ ,  $A$  è aperto se e solo se  $A \cap B_i$  è aperto in  $B_i$  per ogni  $i \in I$  (o equivalentemente  $A$  è chiuso se e solo se  $A \cap B_i$  è chiuso in  $B_i$  per ogni  $i \in I$ ).

*Osservazione 2.167.*

Osserviamo che se  $A$  è aperto/chiuso allora  $A \cap B_i$  è aperto/chiuso in  $B_i$  per definizione di topologia di sottospazio, quindi l'unica implicazione rilevante è l'altra.

**Teorema 2.168** (I ricoprimenti aperti sono fondamentali).

*Ogni ricoprimento aperto è fondamentale.*

*Dimostrazione.*

Sia  $\{B_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento aperto di  $X$  e sia  $A$  un sottoinsieme di  $X$  tale che  $A \cap B_i$  è aperto in  $B_i$  per ogni  $i \in I$ . Allora, essendo  $B_i$  aperto in  $X$ ,  $A \cap B_i$  è aperto in  $X$ . Osserviamo inoltre che

$$\bigcup_{i \in I} A \cap B_i = A \cap \bigcup_{i \in I} B_i = A \cap X = A,$$

quindi  $A$  è aperto in  $X$  in quanto unione di aperti di  $X$ . □

*Osservazione 2.169.*

I ricoprimenti chiusi non sono sempre fondamentali (2.391)

**Teorema 2.170** (Incollamento delle funzioni).

Sia  $\{B_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento fondamentale di  $X$  e sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione, allora

$$f \text{ continua} \iff f|_{B_i} : B_i \rightarrow Y \text{ continua } \forall i \in I$$

*Dimostrazione.*

$\implies$ ) Osserviamo che  $f|_{B_i} = f \circ i$  con  $i : B_i \rightarrow X$  l'inclusione, dunque  $f|_{B_i}$  è composizione di continue.

$\impliedby$ ) Sia  $A$  aperto in  $Y$ . Poiché  $f|_{B_i}$  è continua,  $f|_{B_i}^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap B_i$  è un aperto di  $B_i$  per ogni  $i \in I$ . Essendo il ricoprimento fondamentale  $f^{-1}(A)$  è aperto in  $X$  e quindi  $f$  è continua.  $\square$

*Osservazione 2.171* (Funzioni definite a tratti).

Sia  $X = A \sqcup B$  e definiamo  $f : X \rightarrow Y$  come

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in A \\ h(x) & \text{se } x \in B \end{cases}, \quad \text{con } g : A \rightarrow Y, h : B \rightarrow Y.$$

Se  $X = A \sqcup B$  ci sono poche speranze che il ricoprimento sia fondamentale (se lo fosse vedremo che questo implica che lo spazio è sconnesso), quindi per garantire una buona definizione poniamo che  $g|_{A \cap B} = h|_{A \cap B}$ . Vediamo che in questo caso,  $g, h$  continue e  $\{A, B\}$  fondamentale ci permette di concludere che  $f$  è continua.

*Osservazione 2.172.*

Il metodo appena illustrato per definire funzioni continue definite a tratti è molto più efficiente e stabile rispetto al confrontare i limiti direzionali come si era abituati a fare dai corsi di analisi. In spazi topologici astratti quei limiti perdono quasi ogni significato (ricordiamo per esempio che il limite in spazi non  $T_2$  può non essere unico (2.147)).

Usare solo aperti è un po' restrittivo, proviamo a costruire ricoprimenti fondamentali anche a partire da ricoprimenti chiusi. Vedremo che i ricoprimenti chiusi sono fondamentali se rispettano una particolare ipotesi di finitezza.

**Definizione 2.173** (Famiglia localmente finita).

Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $\{B_i\}_{i \in I}$  una famiglia di suoi sottoinsiemi. Essa è **localmente finita** se  $\forall x \in X$  esiste  $U$  intorno di  $x \in X$  tale che

$$|\{i \in I \mid U \cap B_i \neq \emptyset\}| \in \mathbb{N}.$$

**Lemma 2.174** (Chiusura e unione finita commutano).

Sia  $X$  uno spazio topologico e siano  $C_1, \dots, C_k$  sottoinsiemi di  $X$ , allora

$$\overline{\bigcup_{i=1}^k C_i} = \bigcup_{i=1}^k \overline{C_i}.$$

*Dimostrazione.*

$\supseteq$ ) Per ogni  $j \in I$ ,  $C_j \subseteq \bigcup_{i \in I} C_i$ , da cui

$$\overline{C_j} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} C_i} \implies \bigcup_{j \in I} \overline{C_j} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} C_i}.$$

⊆) Osserviamo ora che per ogni  $i$ ,  $C_i \subseteq \overline{C_i}$ , quindi

$$\bigcup_{i=1}^k C_i \subseteq \bigcup_{i=1}^k \overline{C_i},$$

che è un chiuso perché unione finita di chiusi. Dalla definizione di chiusura abbiamo quindi che  $\overline{\bigcup_{i=1}^k C_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^k \overline{C_i}$ .  $\square$

*Osservazione 2.175.*

Osserviamo che  $\bigcup_{j \in I} \overline{C_j} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} C_i}$  vale per unioni arbitrarie.

**Lemma 2.176** (Chiusura e unione localmente finita commutano).

*Sia  $\{C_i\}_{i \in I}$  una famiglia localmente finita di sottoinsiemi di  $X$ , allora*

$$\overline{\bigcup_{i \in I} C_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{C_i}.$$

*Dimostrazione.*

Per quanto detto dobbiamo solo mostrare che  $\overline{\bigcup_{i \in I} C_i} \subseteq \bigcup_{i \in I} \overline{C_i}$ .

Sia allora  $x_0 \in \overline{\bigcup_{i \in I} C_i}$ . Per la locale finitezza esiste  $U$  intorno di  $x_0$  tale che

$$I_{x_0} = \{i \in I \mid U \cap C_i \neq \emptyset\}$$

è finito. Se  $V$  è un intorno di  $x_0$  allora  $U \cap V$  è un intorno di  $x_0$ , quindi  $U \cap V \cap \bigcup_{i \in I} C_i \neq \emptyset$  per la caratterizzazione della chiusura. Essendo  $U \cap C_i = \emptyset$  per ogni  $i \notin I_{x_0}$  vediamo che

$$\emptyset \neq U \cap V \cap \bigcup_{i \in I} C_i = U \cap V \cap \bigcup_{i \in I_{x_0}} C_i,$$

in particolare  $V \cap \bigcup_{i \in I_{x_0}} C_i \neq \emptyset$ .

Essendo  $V$  un generico intorno di  $x_0$ , per la caratterizzazione della chiusura

$$x_0 \in \overline{\bigcup_{i \in I_{x_0}} C_i} = \bigcup_{i \in I_{x_0}} \overline{C_i},$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che  $I_{x_0}$  è finito e quindi posso applicare il lemma precedente. Abbiamo quindi mostrato che

$$\overline{\bigcup_{i \in I} C_i} \subseteq \bigcup_{x_0 \in \bigcup_{i \in I} C_i} \overline{\bigcup_{i \in I_{x_0}} C_i} \subseteq \bigcup_{i \in I} \overline{C_i},$$

e quindi la tesi.  $\square$

**Corollario 2.177.**

*Un'unione localmente finita di chiusi è chiusa.*

**Teorema 2.178.**

*Un ricoprimento chiuso localmente finito è fondamentale.*

*Dimostrazione.*

Sia  $\{B_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento chiuso localmente finito e sia  $C$  un sottoinsieme di  $X$  tale che  $C \cap B_i$  è chiuso in  $B_i$  per ogni  $i \in I$ . Essendo  $B_i$  chiuso in  $X$ ,  $C \cap B_i$  è chiuso in  $X$ . Inoltre, essendo  $\{B_i\}_{i \in I}$  localmente finito,  $\{C \cap B_i\}_{i \in I}$  è localmente finito. Allora per il lemma (2.176)

$$\bigcup_{i \in I} C \cap B_i = C \cap \bigcup_{i \in I} B_i = C \cap X = C$$

è chiuso in  $X$ . □

**Corollario 2.179.**

*Un ricoprimento chiuso finito è fondamentale.*

## 2.9 Spazi connessi

Studiamo ora una delle proprietà più visivamente accattivanti degli spazi topologici, cioè la connessione. In questa sezione studiamo le due principali definizioni di connessione (connessione e connessione per archi) e diamo una caratterizzazione delle componenti connesse di uno spazio topologico.

**Definizione 2.180** (Connessione).

Uno spazio topologico è **connesso** se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

1.  $X$  non ammette partizione in aperti non banali, ovvero se  $X = A \cup B$ ,  $A \cap B = \emptyset$  con  $A, B$  aperti allora  $A = \emptyset$  o  $B = \emptyset$ .
2.  $X$  non ammette partizione in chiusi non banali.
3. Se  $A \subseteq X$  è sia aperto che chiuso allora  $A = \emptyset$  o  $A = X$ .

Uno spazio  $X$  è **sconnesso** se non è connesso, ovvero ammette partizione aperta/chiusa non banale.

*Osservazione 2.181.*

Chiaramente 1 e 2 sono equivalenti dato che  $A$  e  $B$  sono complementari. Inoltre 1 e 3 sono equivalenti in quanto se  $A$  è sia aperto che chiuso,  $X \setminus A$  è sia chiuso che aperto.

**Teorema 2.182.**

*L'intervallo  $[0, 1]$  è connesso.*

*Dimostrazione.*

L'idea sarà osservare che “il più grande sottoinsieme connesso che contiene un estremo” dovrebbe crescere se non fosse tutto l'intervallo.

Sia  $A$  un aperto e un chiuso non vuoto contenuto in  $[0, 1]$ . Se  $A = [0, 1]$  abbiamo la tesi, stesso se  $A = \emptyset$ , quindi supponiamo  $A$  e  $[0, 1] \setminus A$  entrambi non vuoti. A meno di scambiare  $A$  con  $[0, 1] \setminus A$  supponiamo  $0 \in A$ . Sia allora  $t_0 = \sup\{t \in [0, 1] \mid [0, t] \subseteq A\}$ . Poiché  $[0, 0] = \{0\} \subseteq A$  e  $t_0 \leq 1$  dato che  $A \subseteq [0, 1]$  abbiamo che  $t_0$  è ben definito e appartiene a  $[0, 1]$ .



Osserviamo che  $t_0$  è in realtà un massimo, ovvero che  $[0, t_0] \subseteq A$ :  
Per definizione di sup esiste  $t_n$  tale che  $t_n \rightarrow t_0$  e  $[0, t_n] \subseteq A$  per ogni  $n$  (da questa condizione osserviamo che  $t_n \leq t_0$  per ogni  $n$ ). Osserviamo che

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, t_n] \subseteq A$$

da cui  $[0, t_0) \subseteq A$ , ma essendo  $A$  chiuso,  $[0, t_0] = \overline{[0, t_0)} \subseteq A$  e quindi  $t_0 \in A$ .

Se per assurdo  $t_0 \neq 1$ , essendo  $A$  aperto, vediamo che esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, 1] \subseteq [t_0, t_0 + \varepsilon] \subseteq A$ , ma allora  $[0, t_0 + \varepsilon/2] \subseteq A$  e quindi  $t_0$  non era il sup.  $\nexists$

Vediamo quindi che  $t_0 = 1$  e quindi  $[0, 1] \subseteq A \subseteq [0, 1]$  che contraddice l'ipotesi che  $A$  non sia  $[0, 1]$  o  $\emptyset$ .  $\nexists$   $\square$

Mostriamo tra poco che le funzioni continue mandano spazi connessi in spazi connessi. Siamo quindi giustificati dall'intuizione visiva a dare la seguente definizione:

**Definizione 2.183** (Cammino).

Sia  $X$  uno spazio topologico. Un **cammino** in  $X$  è una funzione continua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ <sup>3</sup>.

**Definizione 2.184** (Giunzione).

Siano  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$  due cammini tali che  $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ . Definiamo la loro **giunzione** come la mappa

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X, \quad \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{se } t \in [1/2, 1] \end{cases}.$$

Di solito indichiamo la giunzione di  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  con  $\gamma_1 * \gamma_2$ .

*Osservazione 2.185.*

$\gamma_1 * \gamma_2$  è un cammino, infatti  $\gamma_1(2 \cdot 1/2) = \gamma_1(1) = \gamma_2(0) = \gamma_2((2 \cdot 1/2) - 1)$ ,  $\{[0, 1/2], [1/2, 1]\}$  è un ricoprimento fondamentale di  $[0, 1]$  e  $\gamma_1(2t) : [0, 1/2] \rightarrow X$ ,  $\gamma_2(2t - 1) : [1/2, 1] \rightarrow X$  sono continue in quanto composizioni di continue.

*Osservazione 2.186.*

Se non avessimo avuto i ricoprimenti fondamentali a disposizione, giustificare la continuità di  $\gamma_1 * \gamma_2$  in  $1/2$  sarebbe stato quasi impossibile con i limiti  $t \rightarrow 1/2^+$ ,  $t \rightarrow 1/2^-$  in quanto  $X$  potrebbe non essere  $T_2$  (no unicità del limite (2.147)) o potrebbe non essere I-numerabile (continuità e continuità per successioni potrebbero non coincidere (2.99)).

**Definizione 2.187** (Connessione per archi).

Uno spazio topologico  $X$  è **connesso per archi** se  $\forall x_0, x_1 \in X$  esiste un cammino  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  tale che  $\gamma(0) = x_0$  e  $\gamma(1) = x_1$ .

**Teorema 2.188** (Spazio connesso per archi è connesso).

*Se  $X$  è connesso per archi allora  $X$  è connesso*

<sup>3</sup>Alcuni definiscono un cammino come una continua  $\gamma : I \rightarrow X$  dove  $I$  è un qualsiasi intervallo chiuso di  $\mathbb{R}$

*Dimostrazione.*

Supponiamo che  $X$  sia sconnesso, ovvero  $X = A \cup B$  con  $A, B$  aperti non vuoti disgiunti. Fissiamo  $x_0 \in A$  e  $x_1 \in B$ . Se per assurdo  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  è un cammino che connette  $x_0$  a  $x_1$  avremmo che  $[0, 1] = \gamma^{-1}(A \cup B) = \gamma^{-1}(A) \cup \gamma^{-1}(B)$  con  $\gamma^{-1}(A) \cap \gamma^{-1}(B) = \gamma^{-1}(A \cap B) = \emptyset$ ,  $\gamma^{-1}(A)$  e  $\gamma^{-1}(B)$  aperti per la continuità di  $\gamma$  ed entrambi sarebbero non vuoti ( $0 \in \gamma^{-1}(A)$  e  $1 \in \gamma^{-1}(B)$ ). Allora  $[0, 1]$  sarebbe sconnesso, che è assurdo.  $\nexists$   $\square$

*Osservazione 2.189.*

La definizione di connessione per archi è subordinata al fatto che  $[0, 1]$  è connesso e in questa dimostrazione lo abbiamo usato. Un ragionamento del tipo “ $[0, 1]$  è connesso perché è connesso per archi” sarebbe insensato.

**Definizione 2.190** (Insieme convesso).

Un sottoinsieme  $C$  di  $\mathbb{R}^n$  è **convesso** se  $\forall p, q \in C$ , il segmento che li congiunge è tutto contenuto in  $C$ , ovvero

$$\{tp + (1 - t)q \mid t \in [0, 1]\} \subseteq C \quad \forall p, q \in C.$$

L'espressione  $tp + (1 - t)q$  con  $t \in [0, 1]$  è detta una **combinazione convessa** di  $p$  e  $q$ .

*Osservazione 2.191.*

Uno spazio convesso è connesso per archi. Basta prendere come cammino il segmento che congiunge i punti.

**Definizione 2.192** (Intervallo).

Gli **intervalli** sono i convessi di  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 2.193** (Connessi su  $\mathbb{R}$ ).

Sia  $C \subseteq \mathbb{R}$ . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1.  $C$  è connesso.
2.  $C$  è connesso per archi.
3.  $C$  è convesso.

*Dimostrazione.*

Le implicazioni  $3 \implies 2 \implies 1$  valgono in generale, quindi basta verificare che  $1 \implies 3$ . Sia allora  $C$  un connesso che per assurdo non è convesso. Allora esistono  $p, q \in C$  con  $p < q$  tali che  $[p, q] \not\subseteq C$ , ovvero esiste  $t_0 \in [p, q] \setminus C$ . Osserviamo allora che

$$C = \underbrace{(C \cap (-\infty, t_0))}_{=A} \cup \underbrace{(C \cap (t_0, +\infty))}_{=B}.$$

Chiaramente  $A$  e  $B$  sono aperti disgiunti in  $C$ , dato che  $(-\infty, t_0)$  e  $(t_0, +\infty)$  sono aperti disgiunti in  $\mathbb{R}$ , inoltre  $p \in A$  e  $q \in B$ . Allora  $C$  è sconnesso, che è un assurdo.  $\nexists$   $\square$

**Proposizione 2.194** (Se un denso è connesso, lo spazio è connesso).

Siano  $Z, Y$  sottospazi di  $X$  tali che  $Z \subseteq Y \subseteq \overline{Z}$ . Se  $Z$  è connesso allora anche  $Y$  è connesso.

*Dimostrazione.*

Sia  $A \subseteq Y$  un sottoinsieme non vuoto aperto e chiuso in  $Y$ . Vogliamo mostrare che  $A = Y$ . Notiamo che  $Z$  è denso in  $Y$ , infatti  $\overline{Z}^Y = \overline{Z} \cap Y = Y$  (lemma 2.107). Poiché un denso interseca ogni aperto non vuoto, segue che  $Z \cap A \neq \emptyset$ . Essendo  $A$  aperto e chiuso in  $Y$ ,  $Z \cap A$  è aperto e chiuso in  $Z$  e per quanto detto  $Z \cap A \neq \emptyset$ , quindi per la connessione di  $Z$ ,  $Z \cap A = Z$ , ovvero  $Z \subseteq A \subseteq Y$ . Ma essendo  $A$  chiuso in  $Y$ ,  $Y = \overline{Z}^Y \subseteq A \subseteq Y$  e quindi  $A = Y$  come voluto.  $\square$

**Corollario 2.195.**

*Se  $Z$  è connesso,  $\overline{Z}$  è connesso.*

**Proposizione 2.196** (Continue preservano connessione).

*Sia  $f : X \rightarrow Y$  continua. Allora abbiamo che  $f$  manda connessi in connessi e connessi per archi in connessi per archi.*

*Dimostrazione.*

★) Per assurdo sia  $f(X) = A \cup B$  con  $A, B$  aperti disgiunti non vuoti in  $f(X)$ . Allora

$$X = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

con  $f^{-1}(A)$  e  $f^{-1}(B)$  aperti perché controimmagine di aperti per continua, non vuoti perché  $A, B \subseteq f(X)$  non vuoti e disgiunti perché controimmagini di disgiunti. Ricaviamo quindi che  $X$  è sconnesso, che è assurdo.  $\nexists$

★) Siano  $y_1, y_2 \in f(X)$ . Esistono allora  $x_1, x_2 \in X$  tali che  $f(x_1) = y_1$  e  $f(x_2) = y_2$ . Essendo  $X$  connesso per archi esiste un cammino  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  tale che  $\gamma(0) = x_1$  e  $\gamma(1) = x_2$ . Consideriamo allora  $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ : essa è continua perché composizione di continue e  $f \circ \gamma(0) = f(x_1) = y_1$ ,  $f \circ \gamma(1) = f(x_2) = y_2$ , quindi  $f \circ \gamma$  è un cammino da  $y_1$  a  $y_2$ , dunque  $Y$  è connesso per archi.  $\square$

*Osservazione 2.197.*

Uno spazio connesso non è necessariamente connesso per archi (2.392).

**Teorema 2.198** (Prodotto finito di connessi è connesso).

*Se  $X$  e  $Y$  sono connessi allora  $X \times Y$  è connesso.*

*Dimostrazione.*

Siano  $A, B \subseteq X \times Y$  aperti non vuoti che coprono  $X \times Y$ . Vogliamo mostrare che  $A \cap B \neq \emptyset$ .

Osserviamo che  $\pi_X(A) \cup \pi_X(B) = X$  dove  $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$  è la proiezione canonica. Osserviamo che  $\pi_X(A)$  e  $\pi_X(B)$  sono aperti non vuoti di  $X$  (proposizione 2.130), quindi per connessione  $\pi_X(A) \cap \pi_X(B) \neq \emptyset$ . Sia dunque  $x_0 \in \pi_X(A) \cap \pi_X(B)$  e consideriamo  $Y \cong \{x_0\} \times Y \subseteq X \times Y$  (proposizione 2.132). Siano  $A' = (\{x_0\} \times Y) \cap A$  e  $B' = (\{x_0\} \times Y) \cap B$ , i quali sono aperti non vuoti tali che  $A' \cup B' = \{x_0\} \times Y$ . Per connessione di  $Y$  si ha che  $A' \cap B' \neq \emptyset$ , dunque

$$(\{x_0\} \times Y) \cap (A \cap B) \neq \emptyset \implies A \cap B \neq \emptyset.$$

$\square$

**Teorema 2.199** (Prodotto finito di connessi per archi è connesso per archi).

*Se  $X$  e  $Y$  sono connessi per archi allora  $X \times Y$  è connesso per archi.*

*Dimostrazione.*

Siano  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$  elementi generici di  $X \times Y$  e costruiamo un cammino da  $z_1$  a  $z_2$ .

Osserviamo che  $\{x_1\} \times Y \cong Y$  è connesso per archi (abbiamo usato (2.132)), dunque esiste un cammino contenuto in  $\{x_1\} \times Y \subseteq X \times Y$  che porta  $(x_1, y_1)$  in  $(x_1, y_2)$ . In modo del tutto analogo costruisco un cammino che porta  $(x_1, y_2)$  in  $(x_2, y_2)$  sfruttando la connessione per archi di  $X \times \{y_2\} \cong X$ . La giunzione di questi cammini è un cammino che porta  $z_1$  a  $z_2$ .  $\square$

### 2.9.1 Componenti connesse

**Proposizione 2.200** (Unione di connessi che si intersecano è connessa).

*Dati  $Y_i$  connessi tali che  $\emptyset \neq \bigcap Y_i$ , si ha che  $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$  è connesso.*

*Dimostrazione.*

Sia  $A \subseteq Y$  un aperto, chiuso non vuoto. Se  $A = Y$  allora abbiamo la tesi. Supponiamo dunque, a meno di scambiare  $A$  con  $Y \setminus A$  che  $x_0 \in A \cap (\bigcap Y_i)$ . Osserviamo che  $A \cap Y_i$  è aperto e chiuso in  $Y_i$ , inoltre è non vuoto perché  $x_0 \in A \cap Y_i$ , dunque per connessione di  $Y_i$  si ha  $A \cap Y_i = Y_i$ .

Possiamo dunque concludere che

$$Y = \bigcup_{i \in I} Y_i = \bigcup_{i \in I} A \cap Y_i = A \cap Y = A.$$

$\square$

**Definizione 2.201** (Componente connessa).

Sia  $x_0 \in X$ , definiamo la **componente connessa** di  $x_0$  ( $C(x_0)$ ) come il più grande sottoinsieme connesso di  $X$  che contiene  $x_0$ , cioè

$$C(x_0) = \bigcup_{x_0 \in C, C \text{ conn.}} C.$$

La buona definizione segue dal fatto che  $\{x_0\}$  è connesso e dalla proposizione precedente.

**Proposizione 2.202.**

*Ogni componente connessa è chiusa*

*Dimostrazione.*

Sappiamo che la chiusura di un connesso è connessa, dunque  $\overline{C(x_0)}$  è connesso e contiene  $x_0$ , da cui  $\overline{C(x_0)} \subseteq C(x_0)$ .  $\square$

**Proposizione 2.203.**

*Le componenti connesse danno una partizione di  $X$ .*

*Dimostrazione.*

Dato che per ogni  $x_0 \in X$  si ha  $x_0 \in C(x_0)$ , le componenti connesse sono non vuote e coprono  $X$ . Supponiamo dunque che  $C(x_0) \cap C(x_1) \neq \emptyset$ , allora per la proposizione  $C(x_0) \cup C(x_1)$  è un connesso e contiene  $x_0$  e  $x_1$ , cioè  $C(x_0) \cup C(x_1) \subseteq C(x_0) \cap C(x_1)$ , da cui  $C(x_0) = C(x_1)$ .  $\square$

**Corollario 2.204.**

Se  $X$  ha un numero finito di componenti connesse allora ognuna di queste è sia aperta che chiusa.

*Dimostrazione.*

Se  $C_1, \dots, C_n$  sono le componenti connesse di  $X$  sappiamo che  $X = C_1 \cup (C_2 \cup \dots \cup C_n)$ . Il secondo termine è una unione finita di chiusi, dunque è chiusa, allora il suo complementare ( $C_1$ ) è aperto.  $\square$

*Osservazione 2.205.*

In generale le componenti connesse non sono aperte. (2.394)

**Definizione 2.206** (Componenti connesse per archi).

Consideriamo la seguente relazione di equivalenza su  $X$ :

$$x_0 \sim x_1 \iff \text{esiste un cammino da } x_0 \text{ a } x_1.$$

La **componente connessa per archi** di  $x_0$  (che denotiamo  $A(x_0)$ ) è la classe di equivalenza di  $x_0$  rispetto alla relazione.

**Proposizione 2.207** (Caratterizzazione delle componenti connesse per archi).

$A(x_0)$  è il più grande connesso per archi che contiene  $x_0$ .

*Dimostrazione.*

$A(x_0)$  è chiaramente connesso per archi. Se  $B$  è un connesso per archi che contiene  $x_0$  allora  $\forall x_1 \in B$  abbiamo un cammino che lo unisce a  $x_0$ , dunque  $x_1 \sim x_0$ , ovvero  $x_1 \in A(x_0)$ .  $\square$

*Osservazione 2.208.*

Le componenti connesse per archi in generale non sono né aperte né chiuse. (2.395)

*Osservazione 2.209.*

Poiché connesso per archi implica connesso, si ha che  $A(x_0) \subseteq C(x_0)$ .

**Definizione 2.210** (Zero-esimo gruppo di omotopia).

Dato  $X$  spazio topologico definiamo lo **0-esimo gruppo di omotopia** come

$$\pi_0(X) = \{\text{componenti connesse per archi di } X\}.$$

*Osservazione 2.211.*

Se  $f : X \rightarrow Y$  è continua,  $f$  induce una funzione di insiemi tra  $\pi_0(X)$  e  $\pi_0(Y)$  (se  $x$  e  $y$  sono connessi da un cammino  $\gamma$ ,  $f(x)$  e  $f(y)$  sono connessi dal cammino  $f \circ \gamma$ ).

*Osservazione 2.212.*

$\pi_0(id_X) = id_{\pi_0(X)}$  e le mappe indotte preservano la composizione di funzioni continue.

Possiamo riassumere quanto detto in

**Fatto 2.213.**

$\pi_0$  è un funtore covariante da  $Top$  a  $Set$

*Osservazione 2.214.*

Se  $f : X \rightarrow Y$  è un omeomorfismo allora  $\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  è una mappa biunivoca.

## Locale connessione per archi

### Definizione 2.215.

$X$  è **localmente connesso (connesso per archi)** se ogni punto di  $X$  ha un sistema fondamentale di intorni connessi (connessi per archi).

*Osservazione 2.216.*

Esistono spazi connessi per archi che non sono localmente connessi per archi (2.393).

**Proposizione 2.217** (Componenti connesse per archi in localmente connesso per archi sono aperte e chiuse).

*Se  $X$  è localmente connesso per archi allora le componenti connesse per archi sono sia aperte che chiuse.*

*Dimostrazione.*

Mostriamo che per ogni  $x_0 \in X$ ,  $A(x_0)$  è sia aperto che chiuso.

*aperto*) Dato  $x_1 \in A(x_0)$ , per locale connessione per archi sappiamo che esiste un intorno  $U$  di  $x_1$  connesso per archi, cioè  $U \subseteq A(x_1) = A(x_0)$ , dunque  $A(x_0)$  è intorno di ogni suo punto, cioè è aperto.

*chiuso*)

$$A(x_0) = X \setminus \underbrace{\bigcup_{x \notin A(x_0)} A(x)}_{\text{aperto}}.$$

□

**Teorema 2.218** (Connesso localmente connesso per archi è connesso per archi).

*Se  $X$  è connesso e localmente connesso per archi allora è connesso per archi.*

*Dimostrazione.*

Sia  $x_0 \in X$ . Dato che  $x_0 \in A(x_0)$ ,  $A(x_0) \neq \emptyset$ . Dato che  $X$  è localmente connesso per archi si ha che  $A(x_0)$  è sia aperto che chiuso. Mettendo tutto insieme,  $A(x_0)$  è un insieme non vuoto, aperto e chiuso in  $X$ , che è connesso, dunque  $A(x_0) = X$ , cioè  $X$  è connesso per archi. □

**Proposizione 2.219** (Aperto in localmente connesso per archi è localmente connesso per archi).

*Se  $X$  è localmente connesso per archi allora ogni suo aperto è localmente connesso per archi.*

*Dimostrazione.*

Se  $A \subseteq X$  è aperto, sia  $U = \{U_i\}$  un sistema fondamentale di intorni connessi per archi di  $x_0 \in A$ . Osserviamo che

$$U' = \{U_i \in U \mid U_i \subseteq A\}$$

è un sistema fondamentale di intorni di  $x_0$  connessi per archi in  $A$ . Infatti se  $V \subseteq A$  è un intorno di  $x_0$  in  $A$  allora è un intorno di  $x_0$  in  $X$ . Esiste dunque  $U_i \in U$  tale che  $U_i \subseteq V \subseteq A$ , ovvero  $U_i \in U'$  e quindi esiste un intorno in  $U'$  contenuto in  $V$ . □

**Corollario 2.220** (Aperto connesso in localmente connesso per archi è connesso per archi).

*Se  $X$  è localmente connesso per archi e  $A \subseteq X$  è un aperto connesso allora  $A$  è connesso per archi.*

*Dimostrazione.*

Per la proposizione,  $A$  è un connesso localmente connesso per archi, quindi essendo connesso è localmente connesso per archi (2.218).  $\square$

**Proposizione 2.221** (Componenti connesse per archi di aperto in localmente connesso per archi sono aperte).

*Le componenti connesse per archi di un aperto in uno spazio localmente connesso per archi sono aperte.*

*Dimostrazione.*

Se  $X$  è localmente connesso per archi e  $A$  è un suo aperto, per la proposizione (2.219) si ha che  $A$  è localmente connesso per archi, dunque se  $C$  è una componente connessa per archi di  $A$  si ha che essa è aperta e chiusa in  $A$  (2.217). In particolare  $C$  è un aperto in un aperto di  $X$ , quindi è aperto in  $X$ .  $\square$

*Osservazione 2.222.*

Se  $X$  è localmente connesso per archi e  $A \subseteq X$  è un aperto allora  $A$  è connesso se e solo se è connesso per archi.

*Osservazione 2.223.*

Se  $X$  e  $Y$  sono omeomorfi allora hanno lo stesso numero di componenti connesse/connesse per archi.

## 2.10 Compattezza

Introduciamo ora una delle proprietà più importanti che uno spazio topologico possa avere: la compattezza. I compatti su  $\mathbb{R}^n$  sono semplicemente insiemi chiusi e limitati, che ci permettono di trovare massimi, trovare chiusi tramite funzioni continue eccetera, ma in generale la bellezza dei compatti è la loro proprietà di restituire ricoprimenti aperti (e quindi fondamentali (2.168)) finiti. In questa sezione esploreremo diverse proprietà dei compatti, studiandone prima i comportamenti generali per poi spostarci su spazi metrici ed  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 2.224** (Spazio compatto).

Uno spazio topologico  $X$  si dice **compatto** se ogni ricoprimento aperto di  $X$  ammette un sottoricoprimento finito.

**Teorema 2.225** (Alexander debole).

*Se  $\mathcal{B}$  è una base della topologia di  $Z$  e da ogni ricoprimento di  $Z$  costituito da aperti di base è possibile estrarre un sottoricoprimento finito allora  $Z$  è compatto.*

*Dimostrazione.*

Sia  $U = \{U_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento aperto di  $Z$ . Per definizione di base  $U_i = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_i} B$  con  $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}$ , dunque  $\Omega = \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$  è un ricoprimento di  $Z$  costituito da aperti di base, esistono dunque  $B_1, \dots, B_k \in \Omega$  aperti di base che coprono  $Z$ . Osserviamo che  $B_i \subseteq U_{j_i}$  per qualche  $j_i$  per costruzione di  $\Omega$ , dunque  $\{U_{j_1}, \dots, U_{j_k}\}$  è un sottoricoprimento finito di  $U$ .  $\square$

**Teorema 2.226** (Alexander).

Se  $X$  è uno spazio topologico e  $\mathcal{D}$  è una sua prebase si ha che se da ogni ricoprimento di aperti in  $\mathcal{D}$  si può estrarre un sottoricoprimento finito allora  $X$  è compatto.

*Dimostrazione.*

Supponiamo per assurdo che  $X$  non sia compatto. Vogliamo applicare il lemma di Zorn all'insieme dei ricoprimenti aperti di  $X$  che non ammettono sottoricoprimento finito. Trovato  $U$  massimale per questo insieme considereremo poi  $W = U \cap \mathcal{D}$  e sfrutteremo le proprietà della prebase e la massimalità di  $U$  per costruire un sottoricoprimento finito di  $U$ .

L'insieme dei ricoprimenti aperti di  $X$  che non ammettono sottoricoprimenti finiti non è vuoto per ipotesi ( $X$  non è compatto), inoltre se  $\Omega = \{U_i, i \in I\}$  è una catena in questo insieme osservo che  $U = \bigcup U_i$  è un ricoprimento, non ammette sottoricoprimento finito (altrimenti esisterebbe definitivamente  $U_i$  nella catena che ammette sottoricoprimento finito) ed è effettivamente un maggiorante per  $\Omega$ . Per il *lemma di Zorn* esiste allora  $U$  ricoprimento di  $X$  massimale tra i ricoprimenti che non ammettono sottoricoprimento finito, cioè se  $B$  è un aperto non incluso in  $U$  allora  $U \cup \{B\}$  ammette sottoricoprimento finito.

Sia  $W = U \cap \mathcal{D}$  una famiglia di aperti di prebase di  $X$ . Se  $W$  fosse un ricoprimento allora per ipotesi potremmo estrarre un sottoricoprimento finito, ma questo sarebbe un sottoricoprimento finito di  $U$  che non esiste.

Sia dunque  $x_0 \in X \setminus \bigcup_{A \in W} A$ . Per definizione di ricoprimento esiste  $V \in U$  tale che  $x_0 \in V$  e per definizione di prebase esistono  $D_1, \dots, D_k \in \mathcal{D}$  tali che  $x_0 \in D_1 \cap \dots \cap D_k \subseteq V$  (l'intersezione è un generico aperto di base).

Osserviamo che  $D_i \not\subseteq U$  dato che altrimenti  $x_0 \in \bigcup_{A \in W} A$ , dunque per massimalità di  $U$  esistono  $C_i$  sottoricoprimenti finiti di  $U \cup \{D_i\}$  per ogni  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

Affermiamo che

$$R = \{V\} \cup \bigcup_{i=1}^k C_i \setminus \{D_i\}$$

è un sottoricoprimento finito di  $U$ , che ci porterà all'assurdo cercato.

Per costruzione  $C_i \setminus \{D_i\} \subseteq U$ , quindi  $R \subseteq U$  ed è chiaramente finito, basta solo mostrare che copre. Dato che tutti i  $C_i$  sono ricoprimenti, se  $P \in X$  è tale che  $P \notin \bigcup_{i=1}^k C_i \setminus \{D_i\}$  allora  $P \in D_1 \cap \dots \cap D_k \subseteq V$ .  $\square$

*Osservazione 2.227.*

Se  $X$  è finito allora è compatto dato che ammette un numero finito di aperti.

*Osservazione 2.228.*

Insiemi non compatti esistono (2.396).

**Teorema 2.229** (Continue mandano compatti in compatti).

Sia  $f : X \rightarrow Y$  continua. Se  $X$  è compatto allora  $f(X)$  è compatto.

*Dimostrazione.*

Consideriamo un ricoprimento aperto di  $f(X)$ . Prendendo le controimmagini degli aperti tramite  $f$  troviamo un ricoprimento aperto di  $X$ . Per compattezza ne estraiamo uno finito. Allora gli aperti del ricoprimento originale con gli stessi indici del ricoprimento finito sono un ricoprimento finito di  $f(X)$ .  $\square$



**Corollario 2.230.**

Se  $X$  e  $Y$  sono omeomorfi allora  $X$  è compatto se e solo se  $Y$  è compatto.

**Definizione 2.231** (Proprietà dell'intersezione finita).

Una famiglia di sottoinsiemi  $\{Y_i\}_{i \in I}$  di un insieme  $X$  ha la **proprietà dell'intersezione finita** se per ogni  $J \subseteq I$  finito si ha  $\bigcap_{i \in J} Y_i \neq \emptyset$ .

*Osservazione 2.232.*

Esistono famiglie di sottoinsiemi che godono della proprietà dell'intersezione finita (2.397)

**Proposizione 2.233** (Formulazione di compattezza con i chiusi).

Sia  $X$  uno spazio topologico. Si ha che  $X$  è compatto se e solo se per ogni famiglia  $\{C_i\}_{i \in I}$  di chiusi che gode della proprietà dell'intersezione finita si ha che  $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$ .

*Dimostrazione.*

Siamo passati al complementare logico della definizione di compattezza.

Se  $\{C_i\}$  è una famiglia di chiusi allora  $\{X \setminus C_i\}$  è una famiglia di aperti. Osserviamo che  $\bigcap_{i \in J} C_i \neq \emptyset$  è equivalente a  $\bigcup_{i \in J} X \setminus C_i \neq X$ . La proprietà dell'intersezione finita si traduce in “non è possibile coprire  $X$  con un sottoinsieme finito di  $\{X \setminus C_i\}$ ”, dunque la proprietà indicata nel testo si traduce in “se da una collezione di aperti non è possibile estrarre un ricoprimento finito allora la collezione non è un ricoprimento di  $X$ ” che è logicamente equivalente alla definizione di compattezza.  $\square$

**Corollario 2.234.**

Se  $X$  è compatto e  $C_n$  è una successione di chiusi non vuoti tali che  $C_{n+1} \subseteq C_n$  allora  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$ .

*Osservazione 2.235.*

Sia la compattezza dello spazio che la chiusura dei termini sono condizioni necessarie (2.397).

**2.10.1 Sottoinsiemi compatti**

*Osservazione 2.236.*

$Y \subseteq X$  è compatto se e solo se per ogni  $\{U_i\}_{i \in I}$  famiglia di aperti di  $X$  tale che  $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$  esiste  $J \subseteq I$  finito tale che  $Y \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$ .

**Teorema 2.237** (Un chiuso di un compatto è compatto).

Se  $X$  è compatto e  $C \subseteq X$  è chiuso allora  $C$  è compatto.

*Dimostrazione.*

Sia  $\{U_i\}_{i \in I}$  una famiglia di aperti di  $X$  che copre  $C$ . Se a questa famiglia aggiungo  $V = X \setminus C$  troviamo un ricoprimento di  $X$ , dunque per compattezza estraiamo un sottoricoprimento finito di  $X$  con indici  $J \subseteq I$  più eventualmente  $V$ . Se  $V$  non appartiene a questo nuovo ricoprimento allora questo è un sottoinsieme di  $\{U_i\}_{i \in I}$  e abbiamo la tesi osservando che  $C \subseteq X$ . Se  $V$  appartiene al ricoprimento, vediamo comunque  $C \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$  perché  $V = X \setminus C$ .  $\square$

*Osservazione 2.238.*

Sottoinsiemi compatti di uno spazio topologico non sono necessariamente chiusi (2.398), ma con il prossimo teorema vediamo che aggiungendo l'ipotesi *Hausdorff* all'ipotesi di compattezza allora sottoinsiemi chiusi e sottoinsiemi compatti coincidono.

**Teorema 2.239** (Compatti in Hausdorff sono chiusi).

*Se  $X$  è  $T_2$  e  $Y \subseteq X$  è compatto allora  $Y$  è chiuso.*

*Dimostrazione.*

Mostriamo che  $X \setminus Y$  è intorno di ogni suo punto. Sia  $P \in X \setminus Y$ . Essendo  $X$  Hausdorff si ha che per ogni  $y \in Y$  esistono aperti  $U_y$  e  $W_y$  tali che  $P \in U_y$ ,  $y \in W_y$  e  $U_y \cap W_y = \emptyset$ . Chiaramente

$$Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} U_y,$$

dunque per la compattezza di  $Y$  esistono  $y_1, \dots, y_n \in Y$  tali che  $Y \subseteq U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$ . Sia  $W = W_{y_1} \cap \dots \cap W_{y_n}$ . Chiaramente  $W$  è un aperto che contiene  $P$  e

$$W \cap Y \subseteq W \cap (U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}) = \emptyset.$$

Abbiamo quindi mostrato che per ogni  $P \in X \setminus Y$  esiste  $W \subseteq X \setminus Y$  aperto tale che  $P \in W$ , cioè  $X \setminus Y$  è intorno di  $P$ .  $\square$

I compatti Hausdorff sono spazi molto interessanti, per esempio:

**Proposizione 2.240** (Compatto Hausdorff è regolare).

*Se  $X$  è compatto e  $T_2$  allora è regolare.*

*Dimostrazione.*

Dato che  $X$  è  $T_2$  è anche  $T_1$ , quindi basta mostrare che è  $T_3$ .

Se  $Y \subseteq X$  è chiuso allora è compatto. Tramite la costruzione fatta nel teorema precedente, se  $P \in X \setminus Y$  possiamo trovare  $Y \subseteq U$  con  $U$  aperto in  $X$ ,  $W$  aperto che contiene  $P$  e  $U \cap W = \emptyset$ .  $\square$

In realtà vale la condizione più forte

**Teorema 2.241** (Compatto Hausdorff è normale).

*Se  $X$  è compatto e  $T_2$  allora  $X$  è normale.*

*Dimostrazione.*

Dato che  $X$  è  $T_2$  è automaticamente  $T_1$ , basta dunque mostrare che è  $T_4$ . Siano  $Y_1, Y_2$  due chiusi disgiunti di  $X$ . Poiché  $X$  è regolare si ha che per ogni  $y \in Y_1$  esistono  $U_y, W_y$  aperti tali che  $y \in U_y$ ,  $Y_2 \subseteq W_y$  e  $U_y \cap W_y = \emptyset$ .

Osserviamo che  $Y_1$  è coperto dai  $U_y$ , dunque per compattezza  $\exists y_1, \dots, y_n \in Y_1$  tali che  $Y_1 \subseteq U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n} = U$ .

Definiamo allora  $W = W_{y_1} \cap \dots \cap W_{y_n}$ .  $W$  è un aperto tale che  $Y_2 \subseteq W$ ,  $U$  è un aperto tale che  $Y_1 \subseteq U$  e  $U \cap W = \emptyset$  per costruzione.  $\square$

*Osservazione 2.242.*

Per spazi compatti vale

$$\text{Normale} \iff \text{Regolare} \iff \text{Hausdorff},$$

mentre ricordiamo che per spazi generali le frecce vanno verso destra e sono implicazioni strette.

L'assioma  $T_2$  gioca bene anche con le mappe a dominio in un compatto. I seguenti risultati finiscono per essere tra i modi più comuni per costruire omeomorfismi a partire da spazi compatti:

**Teorema 2.243** (Continue da compatto a  $T_2$  sono chiuse).

*Se  $X$  è compatto,  $Y$  è  $T_2$  e  $f : X \rightarrow Y$  è continua allora  $f$  è chiusa.*

*Dimostrazione.*

Sia  $C \subseteq X$  chiuso. Verifichiamo che  $f(C)$  è chiuso. Dato che  $X$  è compatto, essendo  $C$  chiuso esso è anche compatto. Le funzioni continue mandano compatti in compatti, dunque  $f(C)$  è compatto in  $Y$ , il quale è  $T_2$ , quindi  $f(C)$  è chiuso.  $\square$

**Corollario 2.244.**

*Se  $X$  è compatto,  $Y$  è  $T_2$  e  $f : X \rightarrow Y$  è continua e bigettiva allora  $f$  è un omeomorfismo.*

**Definizione 2.245** (Funzione propria).

Una funzione continua  $f : X \rightarrow Y$  è **propria** se per ogni  $K \subseteq Y$  compatto  $f^{-1}(K)$  è compatto.

**Proposizione 2.246** (Proprie a immagine in loc.cpt  $T_2$  sono chiuse).

*Sia  $f : X \rightarrow Y$  continua propria e supponiamo che  $Y$  sia localmente compatto e Hausdorff. Allora  $f$  è una mappa chiusa.*

*Dimostrazione.*

Sia  $C \subseteq X$  chiuso. Mostriamo che  $Y \setminus f(C)$  è intorno di ogni suo punto. Siano dunque  $y \in Y \setminus f(C)$  e  $V$  un suo intorno compatto. Poiché  $f$  è propria  $f^{-1}(V)$  è compatto, dunque  $C \cap f^{-1}(V)$  è compatto perché chiuso in compatto. Segue dunque che  $f(C \cap f^{-1}(V)) = H$  è un compatto di  $Y$  contenuto in  $f(C)$ . Definiamo  $U = \text{int}(V) \setminus H$ , il quale è un intorno di  $y$  perché intersezione di aperti che lo contengono ( $H$  è chiuso perché compatto in  $T_2$  e non contiene  $y$  perché è contenuto in  $f(C)$ ). Concludiamo osservando che

$$U \cap f(C) \subseteq f(C) \cap V \cap (Y \setminus f(C \cap f^{-1}(V))) \subseteq (f(C) \cap V) \cap Y \setminus (f(C) \cap V) = \emptyset.$$

$\square$

## 2.10.2 Compattezza per prodotti

**Teorema 2.247** (Tychonoff debole).

*$X$  e  $Y$  sono compatti se e solo se  $X \times Y$  è compatto.*

*Dimostrazione.*

Le proiezioni sono continue quindi  $X \times Y$  compatto implica subito  $X$  e  $Y$  compatti.

Mostriamo dunque che  $X, Y$  compatti implica  $X \times Y$  compatto. Per la versione debole del Teorema di Alexander (2.226) basta mostrare che ogni ricoprimento di aperti di base di  $X \times Y$  ammette sottoricoprimento finito. Sia  $U = \{U_i \times V_i\}_{i \in I}$  un tale ricoprimento, cioè  $U_i$  aperto in  $X$  e  $V_i$  aperto in  $Y$  per ogni  $i \in I$ .

Ricordiamo che per ogni  $x_0 \in X$ ,  $\{x_0\} \times Y \subseteq X \times Y$  è omeomorfo a  $Y$  (2.132), in particolare è compatto. Sia dunque  $I_{x_0} \subseteq I$  finito tale che

$$\{x_0\} \times Y \subseteq \bigcup_{i \in I_{x_0}} (U_i \times V_i).$$

A meno di eliminare termini ridondanti supponiamo  $x_0 \in U_i$  per ogni  $i \in I_{x_0}$ . Osserviamo che l'insieme  $U_{x_0} = \bigcap_{i \in I_{x_0}} U_i$  è aperto in quanto intersezione finita di aperti e contiene  $x_0$ .

Ripetendo questa procedura per ogni  $x \in X$  troviamo un ricoprimento aperto  $\{U_x\}_{x \in X}$  di  $X$ , quindi per compattezza esistono  $x_1, \dots, x_n$  tali che  $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ , dunque

$$X \times Y \subseteq \left( \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \right) \times Y = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j \in I_{x_i}} U_j \times V_j$$

che è una unione finita di aperti di base presenti nel ricoprimento originale, abbiamo cioè trovato un sottoricoprimento finito di aperti di base.  $\square$

**Teorema 2.248** (Tychonoff).

Sia  $I \neq \emptyset$  e sia  $X_i$  uno spazio topologico per ogni  $i \in I$ , allora  $\prod_{i \in I} X_i$  è compatto se e solo se  $X_i$  è compatto per ogni  $i \in I$ .

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$ ) Ovvio perché le proiezioni sui fattori sono continue.

$\Leftarrow$ ) Verifichiamo la tesi sulla prebase standard per invocare il teorema di Alexander (2.226).

Sia  $U$  un ricoprimento di aperti di prebase, cioè della forma

$$U = \bigcup_{i \in I} \{\pi_i^{-1}(A), A \in \Omega_i\}$$

dove  $\Omega_i$  è una famiglia di aperti di  $X_i$ . Osserviamo che esiste  $i_0 \in I$  tale che  $\Omega_{i_0}$  copre  $X_{i_0}$ , infatti se così non fosse potresti trovare  $\tilde{x}_i \in X_i \setminus \bigcup_{A \in \Omega_i} A$  per ogni  $i$ , ma allora

$$(\tilde{x}_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \setminus \bigcup_{A \in U} A$$

che è assurdo in quanto  $U$  ricoprimento.

Per compattezza di  $X_{i_0}$  allora posso estrarre un sottoricoprimento finito da  $\Omega_{i_0}$  che chiamo  $\hat{\Omega}_{i_0}$ . Osserviamo che

$$\{\pi_{i_0}^{-1}(A), A \in \hat{\Omega}_{i_0}\}$$

è un ricoprimento del prodotto e chiaramente è un sottoricoprimento finito di  $U$ .  $\square$

**Corollario 2.249.**

Per ogni insieme  $X$ , lo spazio  $\{f : X \rightarrow [0, 1]\} = [0, 1]^X$  è compatto con la topologia della convergenza puntuale.

**Teorema 2.250** (Wallace).

Siano  $X$  e  $Y$  spazi topologici e siano  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq Y$  sottoinsiemi compatti. Se  $N \subseteq X \times Y$  è un aperto tale che  $A \times B \subseteq N$  allora esistono  $U \subseteq X$  e  $V \subseteq Y$  aperti tali che

$$A \times B \subseteq U \times V \subseteq N.$$

*Dimostrazione.*

Per definizione di topologia prodotto, per ogni  $(a, b) \in A \times B$  siano  $U_{a,b} \subseteq X$  e  $V_{a,b} \subseteq Y$  aperti tali che  $(a, b) \in U_{a,b} \times V_{a,b} \subseteq N$ . Fissato  $a \in A$  osserviamo che  $\{V_{a,b} \mid b \in B\}$  è un ricoprimento aperto di  $B$ , quindi per compattezza esiste  $J_a \subseteq B$  finito tale che  $V_a = \bigcup_{b \in J_a} V_{a,b}$  contiene  $B$ . Per ogni  $a$  sia  $U_a = \bigcap_{b \in J_a} U_{a,b}$ . Per costruzione  $\{a\} \times B \subseteq U_a \times V_a \subseteq N$ .

Osserviamo ora che  $\{U_a \mid a \in A\}$  è un ricoprimento aperto di  $A$ , quindi esiste  $J \subseteq A$  finito tale che  $U = \bigcup_{a \in J} U_a$  contiene  $A$ . Poniamo  $V = \bigcap_{a \in J} V_a$ . Gli  $U$  e  $V$  costruiti verificano la tesi.  $\square$

### 2.10.3 Compattificazione di Alexandroff

Visto quante proprietà hanno gli spazi compatti, ci domandiamo se esiste un modo per trasformare uno spazio dato in uno spazio compatto senza cambiarlo troppo. Questo tipo di metodo si chiama “compattificazione” e in questa sezione studiamo in particolare il metodo di Alexandroff, il quale restituisce uno spazio compatto aggiungendo un solo punto.

**Definizione 2.251** (Compattificazione).

Dato uno spazio topologico  $X$ , una **compattificazione** di  $X$  è data da uno spazio  $\hat{X}$  e una mappa continua  $i : X \rightarrow \hat{X}$  tale che:

1.  $i : X \hookrightarrow \hat{X}$  è una immersione topologica
2.  $i(X)$  è denso in  $\hat{X}$
3.  $\hat{X}$  è compatto.

Se  $|\hat{X} \setminus i(X)| = 1$  si dice  $\hat{X}$  è una **compattificazione ad un punto** di  $X$ .

*Osservazione 2.252.*

Intuitivamente, la definizione dice che  $\hat{X}$  è una compactificazione di  $X$  se ha un sottospazio omeomorfo a  $X$ , questo sottospazio è quasi tutto  $\hat{X}$  e  $\hat{X}$  stesso è compatto.

Definiamo un procedimento per trovare una compactificazione ad un punto:

**Definizione 2.253** (Compattificazione di Alexandroff).

Dato uno spazio topologico  $X$  consideriamo  $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ , dove  $\infty$  è un generico elemento non contenuto in  $X$ . L'insieme  $\hat{X}$  dotato della seguente topologia è detto la **compattificazione di Alexandroff** di  $X$ :

$A \subseteq \hat{X}$  è aperto se

- $\infty \notin A$  e  $A$  aperto in  $X$ , oppure
- $\infty \in A$  e  $X \setminus A$  è chiuso *compatto* di  $X$ .

**Teorema 2.254** (La compattificazione di Alexandroff è una compattificazione).  
*La compattificazione di Alexandroff di uno spazio non compatto è una compattificazione ad un punto.*

*Dimostrazione.*

Per semplicità diremo “aperto di Alexandroff” al posto di “aperto in  $\hat{X}$  secondo la definizione della compattificazione di Alexandroff”.

$\hat{X}$  è uno spazio topologico)

- Osservo che  $\infty \notin \emptyset$  e  $\emptyset$  è aperto in  $X$ .  $\hat{X} \setminus \hat{X} = \emptyset$  e questo è un chiuso compatto di  $X$ .
- Se  $A_1, A_2$  sono aperti di  $\hat{X}$  allora per  $A_1 \cap A_2$  si presentano tre casi:
  1. Se  $A_1$  e  $A_2$  sono inclusi in  $X$  allora sono aperti di  $X$  e  $A_1 \cap A_2$  è un aperto di  $X$ , dunque  $A_1 \cap A_2$  è aperto di Alexandroff.
  2. Se  $A_1 \subseteq X$  e  $\infty \in A_2$  allora  $A_2 = \{\infty\} \cup A'$  con  $A'$  aperto di  $X$  ( $A' = X \setminus (\hat{X} \setminus A_2)$ ), dunque  $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A'$  e per il caso precedente vale quanto voluto.
  3. Se  $\infty \in A_1 \cap A_2$  osserviamo che  $\hat{X} \setminus (A_1 \cap A_2) = (\hat{X} \setminus A_1) \cup (\hat{X} \setminus A_2)$  è unione di due chiusi compatti in  $X$ , che è un chiuso compatto di  $X$ .
- Sia  $\{A_i\}_{i \in I}$  è una famiglia di aperti di Alexandroff.  
 Se ogni  $A_i$  è contenuto in  $X$  la loro unione è ancora contenuta in  $X$  ed è un aperto di  $X$ .  
 Se esiste  $i_0 \in I$  tale che  $\infty \in A_{i_0}$  allora consideriamo

$$\hat{X} \setminus \bigcup A_i = \bigcap \hat{X} \setminus A_i.$$

Questa è intersezione di chiusi di  $X$  e quindi è chiusa (se  $\infty \in \hat{X} \setminus A_i$  sappiamo che  $\infty \notin \hat{X} \setminus A_{i_0}$  quindi possiamo sostituire  $\hat{X} \setminus A_i$  con  $X \setminus A_i$  che è un chiuso di  $X$ ).

Inoltre  $\hat{X} \setminus A_{i_0}$  è compatto e chiuso per definizione degli aperti di Alexandroff, quindi l'intersezione è un insieme chiuso contenuto in compatto chiuso, cioè è un sottospazio chiuso di quel compatto, dunque è compatto.

$|\hat{X} \setminus X| = 1$ ) Per costruzione.

$i$  è una immersione topologica) Per la definizione degli aperti di Alexandroff è evidente che  $i$  è una mappa aperta. Basta dunque verificare che  $i$  è continua: dato che  $A \subseteq \hat{X}$  si ha che  $i^{-1}(A) \subseteq X$  o è  $A$  stesso (se  $\infty \notin A$ ) e quindi per definizione era già aperto, oppure è  $A \setminus \{\infty\}$ , ma sappiamo che  $\hat{X} \setminus A = X \setminus (A \setminus \{\infty\})$  è chiuso di  $X$ , cioè  $A \setminus \{\infty\}$  è aperto di  $X$ .

$\hat{X}$  è compatto) Sia  $\{A_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento aperto di  $\hat{X}$ . Sia dunque  $i_0 \in I$  tale che  $\infty \in A_{i_0}$  e consideriamo  $K = \hat{X} \setminus A_{i_0}$ , il quale per ipotesi è compatto e chiuso in  $X$ . Per la continuità dell'inclusione  $K$  è compatto in  $\hat{X}$  quindi esistono  $A_1, \dots, A_k \in \{A_i\}_{i \in I}$  che lo coprono, ma allora  $\{A_1, \dots, A_k, A_{i_0}\}$  è ricoprimento finito di  $\hat{X}$ .

$X$  denso in  $\hat{X}$ ) Se  $X$  non è compatto e non fosse denso allora necessariamente  $\overline{X} = X$ , ma allora  $X$  sarebbe un chiuso in un compatto, cioè sarebbe compatto.  $\square$

*Osservazione 2.255.*

Se  $X$  è uno spazio compatto e provassimo a costruirne la compattificazione di Alexandroff vedremmo che continua a valere tutto eccetto la condizione “ $X$  denso in  $\hat{X}$ ”, infatti in tal caso  $\{\infty\}$  sarebbe un valido aperto di  $\hat{X}$  e quindi  $\infty \notin \bar{X}$  per la caratterizzazione (2.56).

**Teorema 2.256** (Unicità della compattificazione di Alexandroff).

*Se  $Y$  è uno spazio compatto  $T_2$  e  $P \in Y$  è tale che  $Y \setminus \{P\}$  non è compatto allora  $Y$  è omeomorfo alla compattificazione di Alexandroff di  $Y \setminus \{P\}$ .*

*Dimostrazione.*

Siano  $X = Y \setminus \{P\}$  e  $\hat{X}$  la sua compattificazione di Alexandroff. Consideriamo  $f : \hat{X} \rightarrow Y$  data da  $f(y) = y$  per  $y \neq \infty$  e  $f(\infty) = P$ . Basta mostrare che  $f$  è un omeomorfismo. Chiaramente  $f$  è una funzione bigettiva, quindi, dato che  $\hat{X}$  è compatto e  $Y$  è  $T_2$  basta mostrare che  $f$  è continua (2.243).

Sia  $A$  un aperto di  $Y$ . Se  $P \notin A$  allora  $f^{-1}(A) = A$  che è ancora aperto. Se  $P \in A$  allora  $f^{-1}(A) = (A \setminus \{P\}) \cup \{\infty\}$ . Osserviamo che

$$\hat{X} \setminus ((A \setminus \{P\}) \cup \{\infty\}) = (Y \setminus \{P\}) \setminus (A \setminus \{P\}) = Y \setminus A$$

che è chiuso in  $Y$ . Dato che  $Y$  è compatto e  $Y \setminus A$  è un chiuso contenuto in  $Y$ ,  $Y \setminus A$  è compatto. Abbiamo dunque verificato che  $f^{-1}(A)$  è un aperto di Alexandroff.  $\square$

## Proiezione stereografica

Sappiamo che  $\mathbb{R}^n$  non è compatto (2.396), possiamo quindi provare a studiarne la compattificazione di Alexandroff. Sarà il caso che una particolare mappa, detta “proiezione stereografica” ci permetterà di vedere che la compattificazione è  $S^n$ .

**Definizione 2.257** (Proiezione stereografica).

Data una dimensione  $n$ , la **proiezione stereografica** è la mappa  $\pi : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  che associa ad ogni punto  $P$  della sfera (escluso appunto  $N$  in polo nord) il punto di intersezione tra la retta passante per  $N$  e  $P$  con l'iperpiano  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  identificato con  $\mathbb{R}^n$ .

Esplicitamente si ha che se  $P = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x, x_{n+1})$  allora il punto corrisponde alla soluzione di

$$t(x, x_{n+1}) + (1-t)(0, 1) = (\pi(P), 0) \implies t = \frac{1}{(1-x_{n+1})}$$

cioè

$$\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right).$$

*Osservazione 2.258.*

La proiezione stereografica è continua.

**Teorema 2.259.**

*La proiezione stereografica è un omeomorfismo tra  $S^n \setminus \{N\}$  e  $\mathbb{R}^n$ .*

*Dimostrazione.*

Basta trovare una inversa continua. Per definire la mappa invertiamo la procedura che definisce la proiezione stereografica. Basterà a quel punto verificare la continuità.

Sia  $(x, 0) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$ . Cerchiamo la soluzione di

$$1 = (1-t)^2 x_1^2 + \cdots + (1-t)^2 x_n^2 + t^2$$

$$t^2(1 + |x|^2) - 2|x|^2 t + |x|^2 - 1 = 0$$

diversa da  $t = 1$ , quindi facendo una semplice divisione polinomiale

$$t = \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1},$$

da cui

$$\pi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{2}{|x|^2 + 1} x_1, \dots, \frac{2}{|x|^2 + 1} x_n, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right),$$

che è continua in quanto continua su ogni componente.  $\square$

### Corollario 2.260.

Per ogni  $P \in S^n$ ,  $S^n \setminus \{P\} \cong \mathbb{R}^n$ .

*Dimostrazione.*

Segue da quanto detto osservando che le rotazioni sono omeomorfismi della sfera in se stessa.  $\square$

*Osservazione 2.261.*

Sappiamo che  $\mathbb{R}^n$  non è compatto, ma  $S^n$  è compatto e per quanto appena detto aggiungere un punto ci porta da  $\mathbb{R}^n$  a  $S^n$ , quindi  $S^n$  è la compattificazione di Alexandroff di  $\mathbb{R}^n$  (teorema 2.256) dove l'immersione topologica può essere data dall'inversa della proiezione stereografica.

*Osservazione 2.262 (Sfera di Riemann).*

Osserviamo che topologicamente  $\mathbb{C}$  è una copia di  $\mathbb{R}^2$ , quindi facendo questo stesso ragionamento su  $\mathbb{R}^2$  e vedendolo come  $\mathbb{C}$  troviamo una compattificazione dei complessi. Questa è la famosa **sfera di Riemann**.

## 2.10.4 Compattezza in spazi metrici

Date le belle proprietà dei compatti e le belle proprietà degli spazi metrici, unire i due concetti non può che restituire una ricca teoria (per esempio vedremo che in spazi metrici compattezza, compattezza per successione e totale limitatezza unita a completezza sono concetti equivalenti (2.285)). L'approfondimento di questo tema è dominio dell'analisi ma in questa sede riportiamo i principali risultati e un breve studio sugli spazi completi e  $\mathbb{R}^n$ .

### Compattezza e assiomi di numerabilità

Sappiamo che gli spazi metrici sono I-numerabili (2.80) e gli spazi metrici separabili sono II-numerabili (2.85). Studiamo dunque come si comportano le nozioni di compattezza con gli assiomi di numerabilità e le successioni.

**Definizione 2.263** (Compattezza sequenziale).

Uno spazio topologico  $X$  è **sequenzialmente compatto** o **compatto per successioni** se ogni successione a valori in  $X$  ammette una sottosuccessione convergente.



*Osservazione 2.264.*

In generale compattezza e compattezza per successioni sono nozioni completamente distinte (esempi (2.399) e (2.400)).

**Definizione 2.265** (Spazio Lindelöf).

Uno spazio  $X$  si dice di **Lindelöf** se ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento al più numerabile.

*Osservazione 2.266.*

Essere Lindelöf è una condizione simile e più debole della compattezza.

**Proposizione 2.267** (I-numerabile compatto è sequenzialmente compatto).

*Se  $X$  è I-numerabile ed è compatto allora è sequenzialmente compatto.*

*Dimostrazione.*

Sia  $\{x_n\} \subseteq X$  una successione: vogliamo estrarre una sottosuccessione convergente.

L'idea è considerare i punti aderenti a tutte le code della successione e intersecarli. I punti della successione spariscono quindi rimangono punti di accumulazione, a quel punto basta sceglierne uno e costruire una successione che vi tenda prendendo un termine per ogni intorno di un SFI numerabile del candidato limite.

Per  $m \in \mathbb{N}$ , poniamo  $C_m = \overline{\{x_n \mid n \geq m\}} \subseteq X$ . Per definizione i  $C_m$  sono chiusi, inoltre per ogni  $m \in \mathbb{N}$  si ha che  $C_{m+1} \subseteq C_m$  e  $C_m \neq \emptyset$ . Per compattezza di  $X$ , concludiamo che  $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} C_m \neq \emptyset$  (corollario 2.234). Fissiamo allora  $\tilde{x} \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C_m$  e proviamo a costruire  $x_{n_k}$  che converga a  $\tilde{x}$ .

Dato che  $X$  è I-numerabile, possiamo trovare  $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  sistema fondamentale di intorni di  $\tilde{x}$  numerabile. Possiamo anche supporre che  $U_{k+1} \subseteq U_k$  (lemma 2.81).

Costruiamo  $x_{n_k}$  ricorsivamente:

1. Sappiamo che  $\tilde{x} \in C_0 = \overline{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$ . Essendo  $U_0$  un intorno di  $\tilde{x}$  si ha che  $U_0 \cap \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \neq \emptyset$  per definizione di chiusura, dunque possiamo scegliere  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $x_{n_0} \in U_0$ .
2. Supponiamo di aver individuato  $n_0 < n_1 < \dots < n_k \in \mathbb{N}$  tali che  $x_{n_i} \in U_i$ . Dato che  $U_{k+1}$  è un intorno di  $\tilde{x}$  e che  $\tilde{x} \in C_{n_k+1} = \overline{\{x_n \mid n \geq n_k + 1\}}$  concludiamo che  $U_{k+1} \cap \{x_n \mid n \geq n_k + 1\} \neq \emptyset$ , scegliamo dunque  $x_{n_{k+1}}$  in questa intersezione. Segue in particolare che  $x_{n_{k+1}} \in U_{k+1}$ .

Verifichiamo infine che  $x_{n_k} \rightarrow \tilde{x}$ . Sia  $U$  un intorno di  $\tilde{x}$ . Per definizione di sistema fondamentale di intorni esiste  $k_0$  tale che  $U_{k_0} \subseteq U$ , ma allora per  $k \geq k_0$  abbiamo  $x_{n_k} \in U_k \subseteq U_{k_0} \subseteq U$  come voluto.  $\square$

**Fatto 2.268.**

*Il viceversa non è vero.*

**Proposizione 2.269** (II-numerabile implica Lindelöf).

*Se uno spazio  $X$  è II-numerabile allora è Lindelöf.*

*Dimostrazione.*

Consideriamo  $U = \{U_i\}_{i \in I}$  ricoprimento aperto. Sia  $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una base numerabile di  $X$  (garantita dalla II-numerabilità di  $X$ ) e scriviamo  $U_i = \bigcup_{n \in J_i} B_n$

con  $J_i \subseteq \mathbb{N}$ . Sia dunque  $J = \bigcup_{i \in I} J_i \subseteq \mathbb{N}$  (in quanto sottoinsieme di  $\mathbb{N}$  abbiamo automaticamente che è numerabile). Dato che  $U$  è un ricoprimento allora anche  $\{B_n\}_{n \in J}$  è un ricoprimento di  $X$ . Per ogni  $n \in J$  scegliamo  $j(n) \in I$  tale che  $B_n \subseteq U_j$ . Si ha che  $\{U_{j(n)}\}_{n \in J}$  è un sottoricoprimento di  $U$  al più numerabile.  $\square$

**Proposizione 2.270** (Compatto e sequenzialmente compatto coincidono in II-numerabile).

*Se  $X$  è II-numerabile allora  $X$  è compatto se e solo se  $X$  è sequenzialmente compatto.*

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$ ) Dato che II-numerabile implica I-numerabile (2.87) abbiamo la tesi dalla proposizione precedente (2.267).

$\Leftarrow$ ) Sia per assurdo  $U = \{U_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento aperto di  $X$  senza sottoricoprimenti finiti. Vogliamo costruire una successione senza sottosuccessioni convergenti.

Dato che II-numerabile implica Lindelöf (2.269) supponiamo  $U$  numerabile passando ad un sottoricoprimento. Sia  $x_0 \in U_0$  e poniamo  $i_0 = 0$ . Definiamo ricorsivamente

$$x_n \in X \setminus \left( \bigcup_{k=0}^{n-1} U_{i_k} \cup \bigcup_{j=0}^{i_{n-1}} U_j \right) \neq \emptyset$$

e sia  $i_n$  tale che  $x_n \in U_{i_n}$  (quell'insieme non è vuoto perché  $U$  non ammette sottoricoprimenti finiti). Per costruzione osserviamo che  $i_n$  è una successione strettamente crescente.

Supponiamo per assurdo che per una certa sottosuccessione  $x_{n_k} \rightarrow \tilde{x}$  per qualche  $\tilde{x}$ . Dato che  $U$  è un ricoprimento esiste  $U_h$  tale che  $\tilde{x} \in U_h$ , ma per costruzione  $x_{n_k} \notin U_h$  definitivamente (per esempio per  $k > h$ ), quindi abbiamo trovato un intorno di  $\tilde{x}$  che non contiene la coda della successione, cioè  $x_{n_k} \not\rightarrow \tilde{x}$ .  $\square$

Possiamo riassumere quanto detto nella seguente

**Proposizione 2.271** (Compattezza e Numerabilità).

*In generale compatto e sequenzialmente compatto sono concetti distinti.*

*Se lo spazio è I-numerabile allora compatto implica sequenzialmente compatto.*

*Se lo spazio è II-numerabile allora compatto e sequenzialmente compatto coincidono.*

## Limitatezza e Completezza

**Proposizione 2.272** (Compatti in metrico sono limitati).

*Se  $(X, d)$  è metrico allora visto con la topologia indotta si ha che se  $X$  è compatto allora  $d$  è limitata.*

*Dimostrazione.*

Considero il ricoprimento  $\{B(x_0, n)\}$ . Se  $X$  è compatto allora questo ammette un sottoricoprimento finito, dunque per qualche  $N \in \mathbb{N}$  si ha  $B(x_0, N) = X$  da cui per la disuguaglianza triangolare

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) \leq 2N.$$

□

*Osservazione 2.273.*

Non vale il viceversa, infatti come sappiamo ogni topologia indotta da una metrica si può esprimere come indotta da una metrica limitata (2.40).

**Definizione 2.274** (Successione di Cauchy).

Una successione a valori in uno spazio metrico  $X$  è **di Cauchy** se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  per ogni  $n, m > N$ .

*Osservazione 2.275.*

Le successioni convergenti sono di Cauchy (si vede applicando la disuguaglianza triangolare a  $x_n$ ,  $x_m$  e il limite).

**Definizione 2.276** (Spazio completo).

Uno spazio metrico si dice **completo** se ogni successione di Cauchy converge.

**Proposizione 2.277** (Cauchy con sottosuccessione convergente è convergente).

*Se da una successione di Cauchy possiamo estrarre una sottosuccessione convergente allora la successione di partenza converge allo stesso limite.*

*Dimostrazione.*

Supponiamo  $x_{n_k} \rightarrow \tilde{x}$ . Dato  $\varepsilon > 0$  vogliamo mostrare che definitivamente  $d(x_n, \tilde{x}) < \varepsilon$ .

Dato che la successione è di Cauchy sappiamo che esiste  $N$  tale che  $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$  per ogni  $m, n > N$ . Dato che  $x_{n_k} \rightarrow \tilde{x}$  sappiamo anche che esiste  $k_0$  tale che per ogni  $k > k_0$  si ha  $d(x_{n_k}, \tilde{x}) < \varepsilon/2$ . Sia allora  $M = \max\{N, n_{k_0}\}$ . Se  $n \geq M$ , considerato  $k$  tale che  $n_k > M$  si ha che

$$d(x_n, \tilde{x}) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \tilde{x}) < \varepsilon.$$

□

**Corollario 2.278** (Metrico compatto per successioni è completo).

*Se uno spazio metrico è sequenzialmente compatto allora è completo.*

*Dimostrazione.*

Sia  $\{x_n\}$  di Cauchy. Per compattezza sequenziale possiamo estrarre una sottosuccessione convergente e per la proposizione sopra si ha che  $\{x_n\}$  converge. □

*Osservazione 2.279.*

Uno spazio completo non è necessariamente sequenzialmente compatto (per esempio  $\mathbb{R}^n$ ).

*Osservazione 2.280.*

Uno spazio (metrico) limitato e completo può comunque non essere compatto (2.401).

Cerchiamo di modificare leggermente la definizione di limitatezza in modo che, unita con la condizione di completezza, garantisca compattezza.

**Definizione 2.281** (Spazio totalmente limitato).

Uno spazio metrico  $X$  è **totalmente limitato** se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un ricoprimento finito di  $X$  costituito da palle aperte di raggio  $\varepsilon$ .

**Proposizione 2.282** (Totalmente limitato implica limitato).

Se  $X$  è totalmente limitato allora è limitato.

*Dimostrazione.*

Consideriamo  $\varepsilon = 1$ . Siano dunque  $B_1(x_1), \dots, B_1(x_n)$  le palle che coprono  $X$  garantite dalla definizione di totale limitatezza. Sia

$$R = \max_{1 \leq i, j \leq n} \{d(x_i, x_j)\} + 2$$

e mostriamo che  $d(x, y) < R$  per ogni  $x, y \in X$ . Supponiamo che  $x \in B_1(x_i)$  e  $y \in B_1(x_j)$  (tanto le palle coprono), si ha che

$$d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) < 1 + \max\{d(x_k, x_h)\} + 1 = R.$$

□

*Osservazione 2.283.*

Non vale il viceversa.

**Proposizione 2.284** (Totalmente limitato implica II-numerabile).

Se  $X$  è totalmente limitato allora è II-numerabile.

*Dimostrazione.*

Ricordiamo che uno spazio metrico separabile è II-numerabile (2.85). Mostriamo dunque che totalmente limitato implica separabile.

Osserviamo che per totale limitatezza, per ogni  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  esiste un ricoprimento finito di palle aperte dello spazio dove le palle hanno raggio  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  (sia  $\{B(x_i^n, \frac{1}{n})\}_{i \in \{1, \dots, k_n\}}$  un tale ricoprimento). Consideriamo

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{k_n} \{x_i^n\} \subseteq X.$$

Chiaramente  $E$  è al più numerabile. Proviamo a mostrare che  $E$  è denso.

Basta mostrare che per ogni  $x \in X$  e per ogni  $R > 0$  si ha  $E \cap B(x, R) \neq \emptyset$ . Sia  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $\frac{1}{n} < R$  e sia  $x_i^n$  tale che  $x \in B(x_i^n, \frac{1}{n})$ , che possiamo fare perché  $\{B(x_i^n, \frac{1}{n})\}_{i \in \{1, \dots, k_n\}}$  è un ricoprimento. Si ha quindi che

$$x \in B\left(x_i^n, \frac{1}{n}\right) \implies x_i^n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subseteq B(x, R),$$

in particolare  $x_i^n \in E \cap B(x, R) \neq \emptyset$ .

□

**Teorema 2.285** (Caratterizzazione di compattezza per metrici).

Se  $X$  è uno spazio metrico allora i seguenti sono fatti equivalenti:

1.  $X$  è compatto.
2.  $X$  è sequenzialmente compatto.
3.  $X$  è completo e totalmente limitato.

*Dimostrazione.*

1  $\implies$  2) Dato che gli spazi metrici sono I-numerabili (2.80) questa freccia è già stata trattata.

2  $\implies$  3) Abbiamo visto che la sequenziale compattezza implica completezza (2.278), quindi basta mostrare la totale limitatezza.

Supponiamo per assurdo che  $X$  non sia totalmente limitato e costruiamo una successione senza sottosuccessioni convergenti. Negando la totale limitatezza si ha che esiste  $\varepsilon > 0$  tale che non è possibile coprire  $X$  con un numero finito di palle di raggio  $\varepsilon$ . Sia allora  $x_0 \in X$  un punto qualsiasi e scegliamo  $x_k$  tale che

$$x_k \in X \setminus (B(x_0, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_{k-1}, \varepsilon)) \neq \emptyset.$$

Osserviamo che  $x_n$  non ha sottosuccessioni di Cauchy, infatti per ogni  $n \neq m$  si ha  $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$  per costruzione. Abbiamo dunque trovato una successione che non ammette sottosuccessioni convergenti (le quali devono necessariamente essere di Cauchy)  $\nexists$ .

3  $\implies$  1) Abbiamo già mostrato che totalmente limitato implica II-numerabile (2.284) e sappiamo che per spazi II-numerabili compattezza e compattezza per successioni si equivalgono (2.270). Basta far vedere che  $X$  è sequenzialmente compatto.

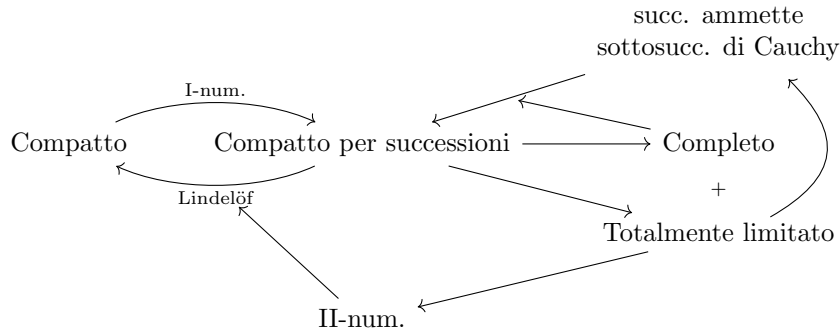
Sia  $\{x_n\}$  una successione in  $X$ . Proviamo ad estrarre una sottosuccessione convergente. Dato  $k \in \mathbb{N}$  fissiamo un ricoprimento finito  $U_k$  dato da palle di raggio  $\frac{1}{k}$  e costruiamo ricorsivamente una sottosuccessione di  $\{x_n\}$  che sia di Cauchy. Questo ci permetterà di concludere dato che lo spazio è completo e quindi questa successione sarà anche convergente.

Dato che  $U_1$  è un ricoprimento finito di  $X$ , esiste  $V_1 \in U_1$  che contiene infiniti termini della successione. Fissiamo  $n_1$  tale che  $x_{n_1} \in V_1$ .

Supponiamo ora di aver costruito termini precedenti della successione tale che  $x_{n_i} \in V_1 \cap \dots \cap V_i$  e  $V_1 \cap \dots \cap V_i = W_i$  stesso contenga infiniti termini della successione di partenza. Consideriamo ora il ricoprimento finito di  $W_k$  dato da  $\{U \cap W_k \mid U \in U_{k+1}\}$ . Dato che  $W_k$  contiene infiniti termini della successione, esiste  $V_{k+1} \in U_{k+1}$  tale che  $V_{k+1} \cap W_k = W_{k+1}$  contiene infiniti termini della successione. Sia allora  $x_{n_{k+1}} \in W_{k+1}$  tale che  $n_{k+1} > n_k$ .

Affermiamo che  $x_{n_k}$  definita come sopra è di Cauchy. Dato  $\varepsilon > 0$  sia  $m \in \mathbb{N}$  tale che  $\frac{2}{m} < \varepsilon$ . Osserviamo che per  $h, k > m$  si ha che  $x_{n_h}, x_{n_k} \in W_m \subseteq V_m$  il quale ha diametro  $\frac{2}{m} < \varepsilon$ , dunque  $d(x_{n_h}, x_{n_k}) < \varepsilon$ .  $\square$

Possiamo riassumere le implicazioni che abbiamo usato in questa sezione con il seguente diagramma:



## Numero di Lebesgue e Uniforme continuità

**Definizione 2.286** (Numero di Lebesgue).

Dato  $X$  spazio metrico e  $\Omega$  un suo ricoprimento si dice che  $\Omega$  **ammette numero di Lebesgue**  $\varepsilon > 0$  se per ogni  $x \in X$  esiste  $U \in \Omega$  tale che  $B(x, \varepsilon) \subseteq U$ .

*Osservazione 2.287.*

Non tutti i ricoprimenti ammettono numero di Lebesgue (2.402)

**Teorema 2.288** (Ogni ricoprimento aperto in compatto ammette numero di Lebesgue).

*Se  $X$  è uno spazio metrico compatto allora ogni ricoprimento aperto ammette un numero di Lebesgue.*

*Dimostrazione.*

L'idea è supporre che non ci sia numero di Lebesgue e considerare una successione di centri di palle non contenute in alcun elemento del ricoprimento. Per compattezza posso supporre che la successione converga e con questo fatto possiamo mostrare che definitivamente le palle da cui eravamo partiti sono contenute in un aperto del ricoprimento che contiene il limite della successione.

Sia  $\Omega$  un ricoprimento aperto di  $X$  e supponiamo per assurdo che non ammetta numero di Lebesgue. Si ha in particolare che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste  $x_n \in X$  tale che  $B(x_n, 2^{-n})$  non è contenuta in alcun aperto di  $\Omega$ . Dato che uno spazio metrico compatto è sequenzialmente compatto (2.285) possiamo estrarre una sottosuccessione convergente  $x_{n_k}$  da  $x_n$ . Sia  $\tilde{x}$  il suo limite.

Dato che  $\Omega$  è un ricoprimento di  $X$  sappiamo che esiste  $U \in \Omega$  tale che  $\tilde{x} \in U$ . Siccome  $U$  è aperto allora esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $B(\tilde{x}, \varepsilon) \subseteq U$ . Per definizione di limite, esiste un  $k_0$  tale che per  $k > k_0$  si ha che  $x_{n_k} \in B(\tilde{x}, \varepsilon/3)$ . Per disuguaglianza triangolare allora, per  $k \geq k_0$ , abbiamo che

$$B(x_{n_k}, \varepsilon/3) \subseteq B(\tilde{x}, 2\varepsilon/3) \subseteq B(\tilde{x}, \varepsilon) \subseteq U.$$

Poiché  $2^{-n_k} \rightarrow 0$  sappiamo che esiste  $k_1 > k_0$  tale che  $2^{-n_{k_1}} < \varepsilon/3$ , ma allora

$$B(x_{n_{k_1}}, 2^{-n_{k_1}}) \subseteq B(x_{n_{k_1}}, \varepsilon/3) \subseteq U,$$

abbiamo quindi trovato un elemento del ricoprimento che contiene  $B(x_n, 2^{-n})$  nonostante avessimo supposto che  $B(x_n, 2^{-n})$  non fosse contenuta in alcun elemento del ricoprimento.  $\nexists$   $\square$

**Definizione 2.289** (Funzione uniformemente continua).

Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è **uniformemente continua** se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

*Osservazione 2.290.*

Le funzioni uniformemente continue sono continue.

*Osservazione 2.291.*

Non tutte le funzioni continue sono uniformemente continue (2.404)

*Osservazione 2.292.*

Le funzioni Lipschitziane sono uniformemente continue.

*Dimostrazione.*

Se  $f : X \rightarrow Y$  è  $M$ -lipschitziana sappiamo che  $\forall x, y \in X$

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq M d_X(x, y),$$

dunque, dato  $\varepsilon > 0$ , scegliendo  $\delta < \varepsilon/M$  verifichiamo la condizione di uniforme continuità.  $\square$

**Teorema 2.293** (Heine-Cantor).

*Siano  $X, Y$  spazi metrici con  $X$  compatto. Se  $f : X \rightarrow Y$  è continua allora è uniformemente continua.*

*Dimostrazione.*

Supponiamo per assurdo che  $f$  non sia uniformemente continua. Esiste dunque  $\varepsilon > 0$  tale che esistono due successioni  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  a valori in  $X$  tali che per ogni  $n \in \mathbb{N}$

$$d(x_n, y_n) < 2^{-n} \quad \text{ma} \quad d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

Poiché  $X$  è compatto per successioni estraiamo una sottosuccessione  $x_{n_k}$  convergente a  $\tilde{x}$ . Dato che  $d(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow 0$  si ha anche che  $y_{n_k} \rightarrow \tilde{x}$ .

Per continuità di  $f$  in  $\tilde{x}$  si ha che esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\forall x \in B(\tilde{x}, \delta), \quad d(f(x), f(\tilde{x})) < \varepsilon/3.$$

Poiché  $x_{n_k} \rightarrow \tilde{x}$  e  $y_{n_k} \rightarrow \tilde{x}$  si ha che esiste  $k_0$  tale che per ogni  $k > k_0$  troviamo  $x_{n_k}, y_{n_k} \in B(\tilde{x}, \delta)$ , dunque definitivamente

$$d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq d(f(x_{n_k}), f(\tilde{x})) + d(f(\tilde{x}), f(y_{n_k})) \leq 2\varepsilon/3 < \varepsilon$$

che contraddice le ipotesi su  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$ .  $\square$

*Osservazione 2.294.*

Una funzione uniformemente continua porta successioni di Cauchy in successioni di Cauchy.

*Dimostrazione.*

Sia  $\{x_n\}$  di Cauchy e  $f$  uniformemente continua. La condizione affinché  $\{f(x_n)\}$  sia di Cauchy è che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $N$  tale che per ogni  $n, m > N$  si ha  $d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ . Sia  $\delta > 0$  il numero garantito dalla definizione di uniforme continuità e sia  $N$  tale che  $d(x_n, x_m) < \delta$  per ogni  $n, m > N$ . Vediamo che questo  $N$  è quello cercato per mostrare che  $\{f(x_n)\}$  è di Cauchy applicando la definizione di uniforme continuità.  $\square$

Concludiamo studiando la seguente domanda (argomento trattato in anni accademici precedenti al 22/23):

siano  $X, Y$  spazi metrici e siano  $A \subseteq X$  e  $f : A \rightarrow Y$  continua. Quando è possibile estendere  $f$  a  $f : \overline{A} \rightarrow Y$  in modo continuo?

*Osservazione 2.295.*

Non è sempre possibile (2.403).

**Teorema 2.296** (Estensione di uniformemente continua alla chiusura del dominio).

Siano  $X, Y$  metrici con  $Y$  completo e  $A \subseteq X$ . Se  $f : A \rightarrow Y$  è uniformemente continua allora  $f$  si estende in modo unico a  $\bar{f} : \bar{A} \rightarrow Y$  continua.

*Dimostrazione.*

Sia  $\bar{x} \in \bar{A}$ . Poiché gli spazi metrici sono I-numerabili (2.80) sappiamo che esiste una successione  $\{x_n\}$  a valori in  $A$  tale che  $x_n \rightarrow \bar{x}$ . Questa successione è quindi convergente in  $X$  che è metrico, dunque  $\{x_n\}$  è di Cauchy. Per uniforme continuità di  $f$  sappiamo che  $\{f(x_n)\}$  è di Cauchy e per completezza di  $Y$  si ha che converge  $f(x_n) \rightarrow \bar{y} \in Y$ .

Se vogliamo costruire  $\bar{f}$  continua, siccome le funzioni continue commutano con l'operazione di prendere limite (2.99), si dovrà avere necessariamente  $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{y}$ .

Mostriamo dunque che  $\bar{f}$  così definita è ben definita e continua:

buona definizione) Se  $\{x'_n\}$  è una seconda successione a valori in  $A$  che tende a  $\bar{x}$ , supponiamo per assurdo che  $f(x'_n) \rightarrow \bar{y}' \neq \bar{y}$ . Siano allora  $V_1$  e  $V_2$  intorni aperti disgiunti in  $Y$  di  $\bar{y}$  e  $\bar{y}'$ . Sappiamo che definitivamente  $f(x_n) \in V_1$  e  $f(x'_n) \in V_2$ , dunque definitivamente che  $x_n \in f^{-1}(V_1)$  e  $x'_n \in f^{-1}(V_2)$  con  $f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = \emptyset$  dove  $f^{-1}(V_1)$  e  $f^{-1}(V_2)$  sono aperti in  $A$  per continuità di  $f$ , ma questo è assurdo perché  $\{x_n\}$  e  $\{x'_n\}$  hanno lo stesso limite in  $X$ .

Continuità) Verifichiamo la continuità in  $x_0$  per ogni  $x_0 \in \bar{A}$ . Dato che  $X$  è uno spazio metrico è in particolare I-numerabile, quindi continuità equivale a continuità per successioni (2.99). Sia allora  $\{x_n\}$  una successione a valori in  $\bar{A}$  tale che  $x_n \rightarrow x_0$ . Dato che  $f$  è uniformemente continua, sia  $\delta > 0$  tale che  $d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$  per ogni  $x, y \in A$ .

Sappiamo che definitivamente  $d(x_n, x_0) < \delta/2$ , sia dunque  $x'_n \in A$  tale che  $d(x_0, x'_n) < \delta/2$ , che possiamo trovare perché  $x_n \in \bar{A}$  (2.99). Per disuguaglianza triangolare

$$d(x_n, x'_n) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x'_n) < \delta,$$

dunque, per come abbiamo definito  $\bar{f}$  si ha che

$$d(\bar{f}(x_n), f(x'_n)) < \varepsilon/2, \quad d(f(x'_n), \bar{f}(x_0)) < \varepsilon/2,$$

da cui, di nuovo per disuguaglianza triangolare,  $d(\bar{f}(x_n), \bar{f}(x_0)) < \varepsilon$ . Abbiamo quindi verificato che  $\{\bar{f}(x_n)\}$  converge a  $\bar{f}(x_0)$  come voluto.  $\square$

### Compattezza in $\mathbb{R}^n$

Vediamo ora come si comportano gli insiemi compatti sullo spazio metrico più naturale per la nostra intuizione spaziale,  $\mathbb{R}^n$ .

#### Teorema 2.297.

*L'intervallo  $[0, 1]$  è compatto.*

*Dimostrazione.*

Sia  $U = \{U_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento aperto di  $[0, 1]$  e consideriamo

$$A = \{t \in [0, 1] \mid \exists J \subseteq I \text{ finito t.c. } [0, t] \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i\},$$



cioè “il massimo intervallo compreso in  $[0, 1]$  che si comporta come un compatto”. La tesi equivale a mostrare  $1 \in A$ . Per fare ciò mostriamo che  $A$  contiene  $[0, \sup A]$  e mostriamo che se  $\sup A \neq 1$  allora  $\sup A \neq \sup A$ .

Osserviamo che  $0 \in A$  dato che  $U$  è un ricoprimento e dunque esiste  $U_i \in U$  tale che  $\{0\} = [0, 0] \subseteq U_i$ . Osserviamo inoltre che  $A \neq \{0\}$ , infatti se  $0 \in U_i$ , essendo  $U_i$  aperto, si ha che  $\exists \varepsilon > 0$  tale che  $[0, \varepsilon) \subseteq U_i$  per la definizione di aperti euclidei. Osserviamo in particolare allora che  $\varepsilon/2 \in A$ .

Se  $a \in A$  allora  $[0, a] \subseteq A$ , infatti se  $\{U_1, \dots, U_n\}$  copre  $[0, a]$  a maggior ragione copre i suoi sottoinsiemi.

Se  $s = \sup A$  allora  $[0, s) \subseteq A$ , infatti per ogni  $a \in [0, s)$ , per definizione di estremo superiore, esiste  $a' \in [a, s)$  tale che  $a' \in A$  e per quanto detto questo implica  $a \in A$ .

Vediamo in realtà che  $s \in A$ , infatti esiste  $U_{i_0} \in U$  tale che  $s \in U_{i_0}$  in quanto ricoprimento. Essendo  $U_{i_0}$  aperto esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subseteq U_{i_0}$ . Sia allora  $a \in [0, s)$  tale che  $s - a < \varepsilon$ . Per quanto detto  $[0, a]$  è coperto da finiti  $U_i$ , se a questa collezione aggiungiamo  $U_{i_0}$  allora avremo coperto  $[0, a] \cup (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \supseteq [0, s]$ .

Per concludere mostriamo che  $s = 1$ , infatti se per assurdo avessimo  $s \neq 1$  allora per quanto detto subito sopra  $s + \varepsilon/2 \in A$ , contraddicendo l'ipotesi che  $s$  sia l'estremo superiore di  $A$ .  $\square$

**Applicazione 2.298** (Compattezza degli intervalli).

$[a, b]$  è compatto mentre  $(a, b)$ ,  $[a, b)$  e  $(a, b]$  non sono compatti.

*Dimostrazione.*

Visto che la compattezza è invariante per omeomorfismo basta osservare che

$$[a, b] \cong [0, 1],$$

$$(a, b) \cong (-1, 1) \cong \mathbb{R},$$

e

$$(a, b] \cong [a, b) \cong [0, 1) \cong [0, +\infty),$$

dove negli ultimi due casi l'omeomorfismo finale è dato dalla funzione  $\tan(\frac{\pi}{2}x)$ .  $\square$

**Teorema 2.299** (Heine-Borel).

Se  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  allora  $Y$  è compatto se e solo se  $Y$  è chiuso e limitato.

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$ ) Se  $Y$  è compatto sappiamo che è limitato (2.272). Siccome  $\mathbb{R}^n$  è uno spazio Hausdorff sappiamo anche che i compatti sono chiusi (2.239).

$\Leftarrow$ ) Se  $Y$  è limitato allora  $\exists R > 0$  tale che  $Y \subseteq [-R, R]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ . Osserviamo che  $[-R, R]^n$  è compatto perché omeomorfo a  $[0, 1]^n$  che è prodotto di spazi compatti (2.248). Abbiamo quindi che  $Y$  è un chiuso contenuto in un compatto, dunque è compatto (2.237).  $\square$

**Applicazione 2.300.**

$\mathbb{R}^n$  è completo.

*Dimostrazione.*

Ogni successione di Cauchy cade definitivamente in una palla aperta, che è contenuta in una palla chiusa. Questa è chiusa e limitata, dunque è compatta per Heine-Borel (2.299). Essendo  $\mathbb{R}^n$  uno spazio metrico è I-numerabile (2.80), dunque la palla chiusa è anche compatta per successioni (2.271) e sappiamo che le successioni di Cauchy in spazi compatti per successioni convergono (2.277).  $\square$

**Teorema 2.301** (Weierstrass).

Se  $X$  è compatto e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  è continua allora  $f$  ammette massimo e minimo.

*Dimostrazione.*

Dato che le funzioni continue mandano compatti in compatti (2.229) si ha che  $f(X) \subseteq \mathbb{R}$  è compatto, cioè è chiuso e limitato (2.299). Dalla limitatezza osserviamo che  $\sup f(X), \inf f(X) \in \mathbb{R}$  e dalla chiusura vediamo che questi sono effettivamente un massimo e un minimo (realizzati per esempio dai limiti di successioni  $x_i$  tali che  $f(x_i) \rightarrow \sup f(X)$  o  $f(x_i) \rightarrow \inf f(X)$  (stiamo usando il fatto che chiuso e chiuso per successioni coincidono in metrico (2.99))).  $\square$

**Teorema 2.302** (Equivalenza delle norme su  $\mathbb{R}^n$ ).

Tutte le norme su uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  di dimensione finita inducono la stessa topologia.

*Dimostrazione.*

A meno di isomorfismo consideriamo come spazio  $\mathbb{R}^n$ . Mostriamo che le mappe  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sono continue (dove gli spazi sono letti con la topologia euclidea). Fatto ciò potremo mostrare che tutte le norme sono bilipschitziane tra loro e concludere per (2.35).

Dati  $x, y \in \mathbb{R}^n$  e posto  $M = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \|e_i\|$  si ha che

$$\begin{aligned} \left| \|x\| - \|y\| \right| &\stackrel{\text{dis. triangolare}}{\leq} \|x - y\| = \left\| \sum x_i e_i - \sum y_i e_i \right\| = \\ &= \left\| \sum (x_i - y_i) e_i \right\| \leq \sum |x_i - y_i| \|e_i\| \leq \\ &\leq M \|x - y\|_1, \end{aligned}$$

cioè ogni norma è  $M$ -lipschitziana alla distanza 1, che è topologicamente equivalente alla distanza euclidea (2.37). Abbiamo quindi mostrato che  $\|\cdot\|$  è continua.

Per il teorema di Weierstrass (2.301)  $\|\cdot\| : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  ammette massimo  $A$  e minimo  $B$ . Osserviamo che  $A, B > 0$  in quanto immagini tramite una norma e  $0 \notin S^{n-1}$ . Se con  $|\cdot|$  indichiamo la norma euclidea si ha che per ogni  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$B|x| \leq |x| \left\| \frac{x}{|x|} \right\| = \|x\| = |x| \left\| \frac{x}{|x|} \right\| \leq A|x|.$$

Se  $x = 0$  allora  $|x| = \|x\| = 0$  quindi è un caso vacuo. Abbiamo quindi mostrato che la norma euclidea e  $\|\cdot\|$  sono bilipschitziane, quindi inducono la stessa topologia.  $\square$

*Osservazione 2.303.*

Potevamo evitare di usare il fatto che le norme 1 e 2 sono equivalenti ragionando con le sfere rispetto alla norma 1.

## 2.11 Topologia Quoziente

Definiamo una topologia sui quozienti di spazi topologici

**Definizione 2.304** (Spazio quoziente).

Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $\sim$  una relazione di equivalenza su  $X$ . Uno **spazio quoziente**  $Y$  di  $X$  rispetto alla relazione  $\sim$  è uno spazio topologico tale che esiste una mappa continua  $f : X \rightarrow Y$  che rispetta  $\sim$  ( $x_1 \sim x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$ ) e tale che per ogni  $Z$  spazio topologico dotato di mappa continua  $g : X \rightarrow Z$  che rispetta  $\sim$  esiste un'unica mappa  $h : Y \rightarrow Z$  continua che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & \swarrow h & \\ Z & & \end{array}$$

*Osservazione 2.305.*

$f$  è necessariamente surgettiva, altrimenti  $h$  non potrebbe essere unica.

**Proposizione 2.306** (Esistenza e unicità dello spazio quoziente).

Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $\sim$  una relazione di equivalenza su  $X$ , allora esiste uno spazio quoziente unico a meno di omeomorfismo canonico.

*Dimostrazione.*

Unicità) È un argomento per proprietà universale. Per uno schema generale vedi (A.19).

Esistenza) Se  $X/\sim$  è l'insieme quoziente e  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  è la proiezione al quoziente allora definiamo la **topologia quoziente** su  $X/\sim$  come:

$$A \subseteq X/\sim \text{ è aperto } \iff \pi^{-1}(A) \text{ è aperto in } X.$$

Verifichiamo che è una topologia:

- $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  e  $\pi^{-1}(X/\sim) = X$ .
- Se  $\pi^{-1}(A_1)$  e  $\pi^{-1}(A_2)$  sono aperti in  $X$  allora

$$\pi^{-1}(A_1) \cap \pi^{-1}(A_2) = \pi^{-1}(A_1 \cap A_2)$$

è aperto in  $X$ , dunque  $A_1 \cap A_2$  è aperto in  $X/\sim$ .

- Se  $\{A_i\}_{i \in I}$  è una famiglia di aperti di  $X/\sim$  allora  $\{\pi^{-1}(A_i)\}_{i \in I}$  è una famiglia di aperti di  $X$ , dunque

$$\bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(A_i) = \pi^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$$

è aperto in  $X$ , dunque  $\bigcup_{i \in I} A_i$  è un aperto del quoziente.

Mostriamo ora che questo spazio rispetta la proprietà universale:  
Se  $Y$  è uno spazio topologico e vale il diagramma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & X/\sim \\ f \downarrow & \swarrow \bar{f} & \\ Y & & \end{array}$$

(cioè  $f = \bar{f} \circ \pi$ ) dobbiamo mostrare che  $f$  è continua se e solo se  $\bar{f}$  è continua, in tal caso è chiaro che  $\bar{f}$  è l'unica mappa che fa commutare il diagramma. La tesi segue dalla seguente catena di equivalenze:

$$\begin{aligned} f &\text{ è continua} \\ \forall A \subseteq Y \text{ aperto, } f^{-1}(A) &\text{ è aperto in } X \\ \forall A \subseteq Y \text{ aperto, } \pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(A)) &\text{ è aperto in } X \\ \forall A \subseteq Y \text{ aperto, } \bar{f}^{-1}(A) &\text{ è aperto in } X/\sim \\ \bar{f} &\text{ è continua} \end{aligned}$$

□

Riportiamo nuovamente la definizione del modello di spazio quoziente che abbiamo trovato:

**Definizione 2.307** (Topologia quoziente).

Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $\sim$  una relazione di equivalenza su  $X$ . Se  $X/\sim$  è l'insieme quoziente e  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  è la proiezione al quoziente allora la **topologia quoziente** su  $X/\sim$  è data come segue:

$$A \subseteq X/\sim \text{ è aperto } \iff \pi^{-1}(A) \text{ è aperto in } X.$$

**Teorema 2.308** (Caratterizzazione della topologia quoziente).

*La topologia quoziente su  $X/\sim$  è la più fine che rende  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  continua.*

*Dimostrazione.*

Dalla definizione è evidente che questa topologia rende  $\pi$  continua. Sia ora  $\tau$  una topologia su  $X/\sim$  che rende  $\pi$  continua. Osserviamo che per ogni  $A \in \tau$  si deve avere  $\pi^{-1}(A)$  aperto in  $X$ , cioè  $A$  appartiene alla topologia quoziente, cioè la topologia quoziente è più fine di  $\tau$ . □

### 2.11.1 Passaggio a quoziente e Identificazioni

**Definizione 2.309** (Funzioni ottenute per passaggio a quoziente).

Se  $f : X \rightarrow Y$  è una funzione continua e  $x_1 \sim x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$  allora è ben definita

$$\bar{f} : \begin{array}{ccc} X/\sim & \longrightarrow & Y \\ [x] & \longmapsto & f(x) \end{array},$$

la quale è continua per quanto detto sopra. Si dice che  $\bar{f}$  è stata ottenuta **per passaggio al quoziente** di  $f$ .

**Proposizione 2.310.**

Se  $\bar{f}$  è ottenuta per passaggio al quoziente come sopra si ha che

- $\bar{f}$  è iniettiva se e solo se  $f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 \sim x_2$
- $\bar{f}$  è surgettiva se e solo se  $f$  è surgettiva.

*Dimostrazione.*

Sappiamo dalla buona definizione che  $x_1 \sim x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$ . Se  $\bar{f}$  è iniettiva allora

$$f(x_1) = f(x_2) \iff \bar{f}([x_1]) = \bar{f}([x_2]) \implies [x_1] = [x_2] \implies x_1 \sim x_2.$$

Dato che  $\bar{f} \circ \pi = f$  e  $\pi$  è surgettiva si ha che  $\bar{f}$  è surgettiva se e solo se  $f$  è surgettiva.  $\square$

*Osservazione 2.311.*

Se  $f$  è surgettiva e  $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$  allora  $\bar{f}$  è una bigezione continua.

In generale non esistono criteri semplici per verificare quando  $\bar{f}$  è un omeomorfismo. Definiamo allora un tipo di funzione che induce un omeomorfismo se come relazione imponiamo  $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$ :

**Definizione 2.312** (Identificazione).

Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  continua è detta **identificazione** se valgono le seguenti condizioni:

1.  $f$  è surgettiva
2.  $A \subseteq Y$  è aperto se e solo se  $f^{-1}(A)$  è aperto in  $X$   
(equivalentemente  $C$  chiuso in  $Y$  se e solo se  $f^{-1}(C)$  chiuso in  $X$ ).

**Teorema 2.313** (Identificazione induce omeomorfismo per quoziente).

Siano  $f : X \rightarrow Y$  una identificazione e  $\sim$  una relazione di equivalenza su  $X$  data da  $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$ . Allora la mappa  $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$  ottenuta da  $f$  passando al quoziente è un omeomorfismo

*Dimostrazione.*

Le identificazioni sono continue e surgettive e la condizione sulla relazione garantisce che  $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$  è ben definita, bigettiva e continua (2.310).

Resta da verificare che  $\bar{f}$  è aperta. Sia allora  $A \subseteq X/\sim$  aperto. Siccome  $f$  è una identificazione abbiamo che

$$\bar{f}(A) \text{ aperto} \iff f^{-1}(\bar{f}(A)) \text{ aperto},$$

ma  $f^{-1} \circ \bar{f} = \pi^{-1}$  e per continuità di  $\pi$  sappiamo che  $\pi^{-1}(A)$  è aperto.  $\square$

*Osservazione 2.314.*

In realtà  $\bar{f}$  definita come sopra è un omeomorfismo se e solo se  $f$  è una identificazione.

**Proposizione 2.315** (Criterio sufficiente per definire identificazioni).

Sia  $f : X \rightarrow Y$  continua e surgettiva. Si ha che se  $f$  è aperta o chiusa allora è una identificazione.

*Dimostrazione.*

★) Dobbiamo controllare che se  $f^{-1}(A)$  è aperto allora  $A$  è aperto, ma poiché  $f$  è surgettiva  $f(f^{-1}(A)) = A$  e poiché  $f$  è aperta abbiamo che  $f^{-1}(A)$  aperto implica  $f(f^{-1}(A)) = A$  aperto.

★) Dimostrazione identica ma sostituendo aperti con chiusi.  $\square$

*Osservazione 2.316.*

Esistono identificazioni che non sono né aperte né chiuse (2.405)

### 2.11.2 Insiemi saturi

**Definizione 2.317** (Insieme saturo).

Data una funzione  $f : X \rightarrow Y$ , un insieme  $A \subseteq X$  si dice  $f$ -saturo (o saturo se  $f$  è chiara dal contesto) se

$$f^{-1}(f(A)) = A,$$

cioè se  $x \in A$  e  $f(x') = f(x)$  allora  $x' \in A$ .

**Proposizione 2.318** (Gli  $f$ -saturi sono le preimmagini tramite  $f$ ).

Data una funzione  $f : X \rightarrow Y$  si ha che

$$A \subseteq X \text{ è saturo} \iff \exists B \subseteq Y \text{ t.c. } A = f^{-1}(B)$$

*Dimostrazione.*

Se  $A = f^{-1}(B)$  (a meno di restringere  $B$  supponiamo  $B \subseteq f(X)$ ) allora  $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B) = A$ .

Se invece  $f^{-1}(f(A)) = A$  allora  $B = f(A)$  rispetta la condizione voluta.  $\square$

*Osservazione 2.319.*

Se  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  è la proiezione allora gli insiemi  $\pi$ -saturi di  $X$  sono le unioni di classi di equivalenza.

*Dimostrazione.*

$$A = \pi^{-1}(\pi(A)) = \{x \in X \mid \exists x' \in A \text{ t.c. } x \sim x'\} = \bigcup_{x \in A} [x]. \quad \square$$

**Proposizione 2.320** (Caratterizzazione di aperti e chiusi saturi).

Gli aperti / chiusi saturi sono identificati dalle seguenti proprietà:

1.  $A \subseteq X/\sim$  è aperto se e solo se  $A = \pi(B)$  con  $B$  aperto saturo di  $X$ .
2.  $C \subseteq X/\sim$  è chiuso se e solo se  $C = \pi(D)$  con  $D$  chiuso saturo di  $X$ .

*Dimostrazione.*

1)  $\implies$  Osserviamo che  $\pi^{-1}(A)$  è aperto per la continuità di  $\pi$  e saturo in quanto controimmagine tramite la funzione in esame (2.318). Per concludere basta osservare che siccome  $\pi$  è surgettiva si ha  $A = \pi(\pi^{-1}(A))$ .

$\impliedby$  Se  $A = \pi(B)$  con  $B$  aperto saturo allora  $\pi^{-1}(A) = \pi^{-1}(\pi(B)) = B$  dove l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che  $B$  è saturo. Abbiamo quindi mostrato che  $\pi^{-1}(A)$  è aperto in  $X$ , dunque per definizione di topologia quoziente  $A$  è aperto in  $X/\sim$ .

2) Il caso per chiusi è del tutto analogo.  $\square$

*Osservazione 2.321.*

In generale abbiamo la seguente corrispondenza biunivoca:

$$\{\text{aperti di } X/\sim\} \xleftrightarrow{\pi} \{\text{aperti saturi di } X\}$$

*Osservazione 2.322.*

Dato che  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  è continua e surgettiva si ha che quozienti di compatti sono compatti e quozienti di connessi sono connessi.

### 2.11.3 Collassamento, Unione disgiunta e Bouquet

**Definizione 2.323** (Collassamento).

Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $A \subseteq X$ . Definiamo il **collassamento di  $X$  su  $A$**  come lo spazio quoziente  $X/\sim$  ottenuto definendo la seguente relazione di equivalenza:

$$x \sim y \iff x = y \text{ oppure } x, y \in A.$$

Come notazione scriviamo  $X/\sim = X/A$ . Si dice che  $X/A$  è ottenuto da  $X$  **collassando  $A$  ad un punto**.

**Applicazione 2.324.**

*Detti  $D^n = \{P \in \mathbb{R}^n \mid |P| \leq 1\}$  e  $S^n = \{P \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |P| = 1\}$  si ha che*

$$D^n/S^{n-1} \cong S^n.$$

*Dimostrazione.*

Cerchiamo di costruire una identificazione  $f : D^n \rightarrow S^n$  in modo che  $f(x) = f(y)$  se e solo se  $x = y$  o  $x, y \in S^{n-1}$ . Se riusciremo a fare ciò avremo la tesi per (2.313).

Proviamo a definire

$$f(v) = (\lambda(|v|)v, g(|v|)),$$

cioè vogliamo trovare una funzione “altezza” ( $g$ ) e una funzione “scalo” ( $\lambda$ ) in modo da portare cerchi concentrici del disco alla stessa altezza e alla stessa distanza dall’asse centrato in 0 e passante per i poli nord e sud di  $S^n$ .

Dobbiamo dunque porre  $g(0) = -1$  e  $g(1) = 1$  (perché vogliamo portare il centro nel polo sud e il bordo nel polo nord). Una funzione che ha questo comportamento è  $g(|v|) = 2|v|^2 - 1$ . Proviamo dunque a ricavare  $\lambda$  in modo  $f(v)$  stia sulla sfera:

$$1 = |(\lambda(|v|)v, 2|v|^2 - 1)|^2 = \lambda^2|v|^2 + 4|v|^4 - 4|v|^2 + 1 \implies \lambda^2 = 4 - 4|v|^2.$$

Scegliamo  $\lambda(|v|) = 2\sqrt{1 - |v|^2}$  e verifichiamo che

$$f(v) = (2\sqrt{1 - |v|^2}v, 2|v|^2 - 1)$$

è una identificazione della forma richiesta:

Buona definizione) Per costruzione  $f(v) \in S^n$ .

Continuità) Funzione continua su ogni entrata.

Surgettività) Evidente dal significato geometrico della funzione.

Identificazione) Basta vedere che la mappa è chiusa (2.315) e questo segue dal fatto che è continua,  $D^n$  è compatto e  $S^n$  è  $T_2$  (2.243).

Relazione desiderata) Dal significato geometrico della mappa è chiaro che  $f(v) = f(v') \implies v = v'$  oppure  $|v| = |v'| = 1$ , cioè  $v, v' \in S^{n-1}$ .  $\square$

Vediamo ora come possiamo “attaccare” due spazi topologici tra loro. L’idea è considerarli come un unico spazio topologico formato dai due separati e poi imporre una relazione che collassa un insieme di due punti, uno per spazio.

**Definizione 2.325** (Unione disgiunta).

Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici. Su  $X \sqcup Y$  imponiamo la seguente topologia:

$$A \subseteq X \sqcup Y \text{ aperto} \iff A \cap X \text{ aperto e } A \cap Y \text{ aperto.}$$

*Osservazione 2.326.*

$X$  e  $Y$  sono aperti in  $X \sqcup Y$ , quindi  $X \sqcup Y$  è sconnesso.

**Definizione 2.327** (Bouquet).

Siano  $X$  e  $Y$  spazi topologici e fissiamo  $x_0 \in X$  e  $y_0 \in Y$ . Il **bouquet** o **wedge**<sup>4</sup> di  $(X, x_0)$  e  $(Y, y_0)$  è il quoziente

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) = X \sqcup Y / \{x_0, y_0\}.$$

*Osservazione 2.328.*

Cambiare i punti  $x_0$  e  $y_0$  può cambiare lo spazio bouquet che otteniamo. Ciò nonostante, se abbiamo fissato  $x_0$  e  $y_0$ ,  $x_0$  e  $y_0$  sono chiari da contesto oppure se  $x_0$  e  $y_0$  sono irrilevanti scriveremo

$$X \vee Y.$$

**Proposizione 2.329** (I fattori si immergono nel bouquet).

*Le mappe*

$$i : X \rightarrow X \vee Y, \quad j : Y \rightarrow X \vee Y$$

*indotte dalle inclusioni di  $X$  e  $Y$  in  $X \sqcup Y$  sono immersioni topologiche.*

*Dimostrazione.*

Chiaramente  $i$  e  $j$  sono continue (composizione di immersione e proiezione) e iniettive ( $\pi : X \sqcup Y \rightarrow X \vee Y$  è iniettiva eccetto in  $x_0$  e  $y_0$ , ma  $X$  contiene solo  $x_0$  e  $Y$  solo  $y_0$ ). Per mostrare che  $i$  è un omeomorfismo con l’immagine basta verificare che  $i : X \rightarrow i(X)$  è aperta (per simmetria questa dimostrazione può essere ripetuta per  $j$ ).

Vogliamo quindi mostrare che se  $A \subseteq X$  è aperto allora  $i(A)$  è aperto in  $i(X)$ . Si presentano due casi:  $x_0 \in A$  e  $x_0 \notin A$ .

$x_0 \notin A$  Osserviamo che  $\pi^{-1}(i(A)) \cap X = A$  e che  $\pi^{-1}(i(A)) \cap Y = \emptyset$ , dunque per definizione della topologia su  $X \sqcup Y$  abbiamo che  $\pi^{-1}(i(A))$  è aperto in  $X \sqcup Y$ , quindi per definizione di topologia quoziente  $i(A)$  è aperto in  $X \vee Y$ , quindi anche in  $i(X)$  per definizione di topologia di sottospazio.

$x_0 \in A$  Se troviamo  $U$  aperto tale che  $i(A) = i(X) \cap U$  allora per definizione di topologia di sottospazio avremmo finito. Osserviamo che  $\pi^{-1}(i(A)) \cap X = A$  e  $\pi^{-1}(i(A)) \cap Y = \{y_0\}$ . Sia  $U = i(A) \cup i(Y)$ . Osserviamo che

$$U \cap i(X) = (i(A) \cup i(Y)) \cap i(X) = i(A) \cap i(X) \cup i(Y) \cap i(X) = i(A) \cup \{x_0\} = i(A)$$

e che  $\pi^{-1}(U) \cap X = A$  e  $\pi^{-1}(U) \cap Y = Y$ , che sono aperti, dunque  $\pi^{-1}(U)$  è aperto in  $X \sqcup Y$ , dunque  $U$  è aperto in  $X \vee Y$  come voluto.  $\square$

<sup>4</sup>Il simbolo usato per wedge dai professori è “ $\vee$ ”, che in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X si scrive con `\vee`, non `\wedge` come uno potrebbe sperare.



**Proposizione 2.330** ( $T_1$  passa al bouquet e immersioni sono chiuse).

Se  $X$  e  $Y$  sono  $T_1$  allora anche  $X \vee Y$  è  $T_1$  e le mappe  $i : X \rightarrow X \vee Y$ ,  $j : Y \rightarrow X \vee Y$  sono chiuse.

*Dimostrazione.*

Bouquet  $T_1$ ) I punti di  $X \vee Y$  si sollevano tramite  $\pi^{-1}$  ad un singoletto o a  $\{x_0, y_0\}$ . Se  $X$  e  $Y$  sono  $T_1$  allora tutti i sottoinsiemi finiti di  $X \sqcup Y$  sono chiusi (unione finita di punti, che sono chiusi per la caratterizzazione (2.141)). Abbiamo quindi che  $\pi^{-1}([P])$  è chiuso per ogni  $[P] \in X \vee Y$ , quindi per definizione di topologia quoziente  $\{[P]\}$  stesso è chiuso, dunque  $X \vee Y$  è  $T_1$  per (2.141).

Immersioni chiuse) Mostriamo la tesi per  $i$ , la dimostrazione per  $j$  è del tutto analoga. Sia  $C \subseteq X$  chiuso. Osserviamo che

$$\pi^{-1}(i(C)) = \begin{cases} C & \text{se } x_0 \notin C \\ C \cup \{y_0\} & \text{se } x_0 \in C \end{cases},$$

i quali sono entrambi chiusi perché unione di chiusi ( $\{y_0\}$  è chiuso perché  $Y$  è  $T_1$ ). Per definizione di topologia quoziente,  $i(C)$  è chiuso.  $\square$

**Proposizione 2.331** ( $T_2$  passa al bouquet).

Se  $X$  e  $Y$  sono  $T_2$ , anche  $X \vee Y$  è  $T_2$ .

*Dimostrazione.*

Consideriamo  $p \neq q$  in  $X \vee Y$ . Senza perdita di generalità si presenta uno dei seguenti casi:

$p, q \in i(X) \setminus \{[x_0]\}$ )

Poiché  $X$  è  $T_2$  esistono aperti disgiunti di  $X$  ( $U$  e  $V$ ) che separano  $p'$  e  $q'$  (dove  $p = [p']$  e  $q = [q']$ ). Si ha inoltre che  $\{x_0\}$  è chiuso in  $X$  ( $T_2 \implies T_1$ ), dunque posso supporre  $x_0 \notin U$  e  $x_0 \notin V$  (basta intersecare con  $X \setminus \{x_0\}$ , che è aperto). Dopo questa modifica  $U$  e  $V$  sono aperti saturi che separano  $p'$  e  $q'$ , quindi si proiettano in aperti disgiunti che separano  $p$  e  $q$ .

$p \in i(X) \setminus \{[x_0]\}$ ,  $q \in j(Y) \setminus \{[y_0]\}$ )

Gli aperti  $X \setminus \{x_0\}$  e  $Y \setminus \{y_0\}$  sono saturi, disgiunti e separano  $p$  e  $q$ .

$p = [x_0] = [y_0]$ ,  $q \in i(X) \setminus \{[x_0]\}$ )

Sia  $q' \in X$  tale che  $q = [q']$ . Siano  $U$  e  $V$  aperti disgiunti di  $X$  che separano  $x_0$  e  $q'$ . Osserviamo che  $U \cup Y$  e  $V$  sono aperti saturi disgiunti che separano  $x_0$  e  $q'$ , quindi si proiettano come vogliamo.  $\square$

**Proposizione 2.332** (Bouquet è compatto se e solo se lo sono i fattori).

$X \vee Y$  è compatto se e solo se  $X$  e  $Y$  sono compatti.

*Dimostrazione.*

$\Leftarrow$ ) Se  $X$  è compatto allora  $i(X)$  è compatto per continuità. Similmente  $j(Y)$  è compatto. Dato che  $X \vee Y = i(X) \cup j(Y)$  abbiamo che il bouquet è unione finita di compatti, quindi è compatto.

$\Rightarrow$ ) Sia  $\{U_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento di  $X$ . Per ogni  $i \in I$  consideriamo

$$U'_i = \begin{cases} U_i & \text{se } x_0 \notin U_i \\ U_i \cup Y & \text{se } x_0 \in U_i \end{cases}$$

Osserviamo che  $\{U'_i\}_{i \in I}$  è un ricoprimento di aperti saturi di  $X \sqcup Y$ , che si proietta in un ricoprimento aperto di  $X \vee Y$ . Per compattezza posso estrarre

un sottoricoprimento finito  $\{U'_1, \dots, U'_n\}$  di  $X \sqcup Y$ , da cui  $\{U'_j \cap X\}_{j \in \{1, \dots, n\}}$  è un ricoprimento finito di  $X$ , ma dato che  $U'_i \cap X = U_i$  per costruzione abbiamo in realtà costruito un sottoricoprimento finito di  $X$  a partire da  $\{U_i\}_{i \in I}$ .  $\square$

**Proposizione 2.333** (Bouquet è connesso se e solo se lo sono i fattori).  
 $X \vee Y$  è connesso se e solo se  $X$  e  $Y$  sono connessi.

*Dimostrazione.*

$\Leftarrow$ ) Dato che  $X$  e  $Y$  sono connessi si ha che  $i(X)$  e  $j(Y)$  sono connessi per continuità. Dato che  $X \vee Y = i(X) \cup j(Y)$  e  $\{[x_0]\} = i(X) \cap j(Y) \neq \emptyset$  si ha che  $X \vee Y$  è connesso (2.200).

$\Rightarrow$ ) Se, senza perdita di generalità,  $X$  fosse sconnesso allora potremmo scrivere  $X = A \sqcup B$  con  $A, B$  aperti disgiunti non vuoti. Senza perdita di generalità supponiamo  $x_0 \in B$  (e quindi  $x_0 \notin A$ ). Osserviamo che  $i(A)$  e  $i(B) \cup j(Y)$  sono aperti saturi disgiunti non vuoti di  $X \sqcup Y$ , infatti  $i$  è una immersione topologica in  $i(X)$ , che è aperto, quindi è una mappa aperta (2.115) (la saturazione, disgiunzione e non essere vuoti sono proprietà evidenti). Segue che questi si proiettano ad aperti disgiunti non vuoti di  $X \vee Y$ , che contraddice l'ipotesi di connessione.  $\nmid$   $\square$

## 2.12 Quozienti per azioni di gruppi

Ricordiamo le seguenti definizioni

**Definizione 2.334** (Azione).

Dato un gruppo  $G$  e un insieme  $X$ , una **azione** di  $G$  su  $X$  è un omomorfismo  $G \rightarrow S(X)$ , dove  $S(X)$  sono le permutazioni di  $X$ . Come notazione scriviamo

$$G \curvearrowright X$$

e indichiamo l'immagine di  $x \in X$  tramite la permutazione data da  $g \in G$  come

$$g \cdot x = gx = g(x) = \ell_g(x).$$

**Definizione 2.335** (Orbita e stabilizzatore).

Data una azione  $G \curvearrowright X$  e fissato  $x_0 \in X$  definiamo l'**orbita** e lo **stabilizzatore** di  $x_0$  rispettivamente come

$$\begin{aligned} \text{orb}_G(x_0) &= G \cdot x_0 = \{y \in X \mid \exists g \in G \text{ t.c. } gx_0 = y\} \\ \text{stab}_G(x_0) &= \{g \in G \mid gx_0 = x_0\}. \end{aligned}$$

**Definizione 2.336.**

Una azione  $G \curvearrowright X$  si dice

- **fedele** se  $\ell_g = id \iff g = 1_G$ ,
- **libera** se  $\text{stab}(x_0) = \{1_G\}$  per ogni  $x_0 \in X$ ,
- **transitiva** se per ogni  $x, y \in X$  esiste  $g \in G$  tale che  $gx = y$ , cioè  $G \cdot x_0 = X$  per ogni  $x_0 \in X$ .

*Osservazione 2.337.*

Data una azione  $G \curvearrowright X$ , la relazione

$$x \sim y \iff G \cdot x = G \cdot y \iff \exists g \in G \text{ t.c. } gx = y$$

è di equivalenza. Chiamiamo questa la **relazione indotta** dall'azione.

Le azioni che riguardano il corso saranno solo le

**Definizione 2.338** (Azione continua).

Dato un gruppo  $G$  e uno spazio topologico  $X$ , una azione  $G \curvearrowright X$  è detta **continua** se le mappe

$$\ell_g : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & gx \end{array}$$

sono continue per ogni  $g \in G$ .

*Osservazione 2.339.*

Dato che  $\ell_g^{-1} = \ell_{g^{-1}}$ , si ha che in realtà le  $\ell_g$  sono omeomorfismi di  $X$  in sé.

Da ora in poi assumeremo che tutte le azioni di un gruppo su uno spazio topologico siano continue.

**Notazione 2.340.**

Data una azione  $G \curvearrowright X$  con  $X$  spazio topologico poniamo

$$X/G = X/\sim,$$

dove  $\sim$  è la relazione indotta dall'azione.

*Osservazione 2.341.*

Più propriamente dovremmo scrivere  $G \backslash X$  perché stiamo considerando una azione sinistra.

*Osservazione 2.342.*

Se  $G \subseteq X$  (per esempio  $X = \mathbb{R}$  e  $G = \mathbb{Z}$ ) si presenta una ambiguità rispetto a quale spazio intendiamo con

$$X/G,$$

più precisamente la relazione per la quale stiamo quozientando potrebbe essere quella indotta dall'azione di  $G$  su  $X$ , ma anche “ $x = y$  oppure  $x, y \in G$ ”. Se non specifichiamo altrimenti o se non chiaro da contesto intenderemo il quoziente per azione.

*Osservazione 2.343* (Caratterizzazione dei saturi per azione).

Dato  $A \subseteq X$  si ha che se  $\pi : X \rightarrow X/G$  è la proiezione allora

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G} \{ga \mid a \in A\} = \bigcup_{g \in G} g \cdot A = G \cdot A.$$

Segue che  $A$  è saturo se e solo se è  $G$ -invariante (dato che le classi sono le orbite).

**Proposizione 2.344** (Proiezioni per quozienti per azione).

Data una azione  $G \curvearrowright X$ , la proiezione  $\pi : X \rightarrow X/G$  è una mappa aperta. Inoltre, se  $G$  è finito, allora  $\pi$  è anche una mappa chiusa.

*Dimostrazione.*

\*) Sia  $A \subseteq X$  aperto. Per definizione di topologia quoziente si ha che  $\pi(A)$  è aperto in  $X/G$  se e solo se

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G} gA$$

è aperto in  $X$ , ma  $\ell_g$  è un omeomorfismo, quindi  $gA = \ell_g(A)$  è aperto per ogni  $g \in G$ , quindi  $\pi^{-1}(\pi(A))$  è unione di aperti, cioè è aperto.

\*) Con un ragionamento analogo troviamo che per  $C$  chiuso,  $\pi(C)$  è chiuso se e solo se

$$\bigcup_{g \in G} gC$$

è chiuso. Dato che  $G$  è finito quella è una unione finita e gli  $gC$  sono chiusi per motivi analoghi a prima, dunque abbiamo una unione finita di chiusi, che è chiusa e la tesi segue.  $\square$

*Osservazione 2.345.*

La proiezione non è sempre chiusa (2.406)

### 2.12.1 Assiomi di Separazione e Azioni

Osserviamo che se  $X$  gode di assiomi di separazione,  $X/G$  può perderli quasi senza restrizione (presentiamo due esempi di quozienti di  $\mathbb{R}^n$  non  $T_1$ : (2.407) (2.408)).

Cerchiamo di capire quando  $X/G$  è  $T_2$ .

**Definizione 2.346** (Azioni vaganti, propriamente discontinue e proprie).

Data una azione  $G \curvearrowright X$  con  $X$  spazio topologico, affermiamo che questa è

- **vagante** se per ogni  $x \in X$  esiste  $U$  intorno di  $x$  tale che

$$\{g \in G \mid gU \cap U \neq \emptyset\} \text{ è finito.}$$

- **propriamente discontinua** se per ogni  $x \in X$  esiste  $U$  intorno di  $x$  tale che

$$\{g \in G \mid gU \cap U \neq \emptyset\} = \{1_G\}.$$

- **propria** se per ogni compatto  $K \subseteq X$  abbiamo che

$$\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\} \text{ è finito.}$$

*Osservazione 2.347.*

Una azione propriamente discontinua è anche vagante.

*Osservazione 2.348.*

Osserviamo che

$$\text{stab}_G(x) \subseteq \{g \in G \mid gU \cap U \neq \emptyset\},$$

dunque in particolare:

- Se una azione è vagante allora gli stabilizzatori sono finiti.
- Se una azione è propriamente discontinua allora è libera.

**Teorema 2.349** (Caratterizzazione di azioni propriamente discontinue su  $T_2$ ).  
*Sia  $X$  uno spazio  $T_2$ . Si ha che una azione  $G \curvearrowright X$  è propriamente discontinua se e solo se è libera e vagante.*

*Dimostrazione. (data per esercizio).*

$\Rightarrow$ ) Le due implicazioni valgono in generale per la definizione di propriamente discontinua.

$\Leftarrow$ ) Dato  $x \in X$ , sia  $U$  un intorno di  $x$  tale che

$$S = \{g \in G \mid gU \cap U \neq \emptyset\} \text{ è finito.}$$

Per la finitezza di  $S$  sappiamo che  $S = \{1_G, g_1, \dots, g_n\}$ . Mostriamo che possiamo trovare un  $U'$  tale che il nuovo  $S$  contiene meno elementi. Reiterando questo procedimento, per il principio del minimo, mostreremo che per un opportuno  $U$  si ha  $S = \{1_G\}$ , cioè l'azione è propriamente discontinua.

Per definizione di azione libera sappiamo che  $g_n(x) \neq x$  e per definizione di spazio Hausdorff esistono  $W, V$  aperti disgiunti tali che  $g_n(x) \in V$  e  $x \in W$ . Definiamo  $U' = g_n^{-1}(g_n U \cap V) \cap W$ : questo è ancora un intorno di  $x$  (intersezione finita di aperti che contengono  $x$ ) e

$$S' = \{g \in G \mid gU' \cap U' \neq \emptyset\} \subseteq S,$$

ma osserviamo che  $g_n \notin S'$ , infatti

$$g_n U' \cap U' \subseteq (g_n U \cap V) \cap (g_n^{-1}(g_n U \cap V) \cap W) \subseteq V \cap W = \emptyset.$$

□

**Teorema 2.350** (Caratterizzazione azioni proprie su localmente compatti).

*Sia  $X$  uno spazio localmente compatto. Si ha che  $G \curvearrowright X$  è una azione propria se e solo se per ogni  $x, y \in X$  esistono intorni  $U$  e  $V$  di  $x$  e  $y$  rispettivamente tali che*

$$\{g \in G \mid gU \cap V \neq \emptyset\} \text{ è finito.}$$

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$ ) Dati  $x, y \in X$ , poiché  $X$  è localmente compatto, esistono  $U, V$  compatti con  $U$  intorno di  $x$  e  $V$  di  $y$ . Sia  $K = U \cup V$ , il quale è chiaramente compatto. Date le inclusioni  $gU \subseteq gK$  e  $V \subseteq K$  si ha

$$\{g \in G \mid gU \cap V \neq \emptyset\} \subseteq \{gK \cap K \neq \emptyset\},$$

dunque per la definizione di azione propria, l'insieme di sinistra è sottoinsieme di un insieme finito, quindi è finito come voluto.

$\Leftarrow$ ) Sia  $K$  compatto e fissiamo  $x_0 \in K$ . Preso qualsiasi  $y \in K$  esistono  $U_y$  intorno di  $x_0$  e  $V_y$  intorno di  $y$  (supponiamoli aperti senza perdita di generalità) tali che

$$\{g \in G \mid gU_y \cap V_y \neq \emptyset\} \text{ è finito.}$$

Osserviamo che  $\{V_y\}_{y \in K}$  è un ricoprimento aperto di  $K$ , esistono dunque per compattezza  $y_1, \dots, y_n \in K$  tali che

$$K \subseteq V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}.$$

Definiamo  $U_{x_0} = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ , il quale è un aperto contenente  $x_0$ . Osserviamo che

$$\begin{aligned} \{g \in G \mid gU_{x_0} \cap K \neq \emptyset\} &\subseteq \{g \in G \mid gU_{x_0} \cap (V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}) \neq \emptyset\} = \\ &= \bigcup_{i=1}^n \{g \in G \mid gU_{x_0} \cap V_{y_i} \neq \emptyset\} \subseteq \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^n \{g \in G \mid gU_{y_i} \cap V_{y_i} \neq \emptyset\}, \end{aligned}$$

cioè  $\{g \in G \mid gU_{x_0} \cap K \neq \emptyset\}$  è contenuto in una unione finita di insiemi finiti, è dunque esso stesso finito.

Osserviamo ora che al variare di  $x_0 \in K$ ,  $\{U_{x_0}\}$  è un ricoprimento aperto di  $K$ , esistono dunque  $x_1, \dots, x_m \in K$  tali che

$$K \subseteq U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_m}.$$

Per quanto mostrato, per ogni  $i \in \{1, \dots, m\}$  si ha che

$$\{g \in G \mid gU_{x_i} \cap K \neq \emptyset\} \text{ è finito.}$$

Sia  $g \in G$  tale che  $gK \cap K \neq \emptyset$ , segue che per qualche  $i \in \{1, \dots, m\}$  abbiamo  $gU_{x_i} \cap K \neq \emptyset$ , e quindi

$$g \in \bigcup_{i=1}^m \{g \in G \mid gU_{x_i} \cap K \neq \emptyset\},$$

il quale è finito perché unione finita di finiti. □

*Osservazione 2.351.*

Nel teorema l'implicazione  $\Leftarrow$  non usa la locale compattezza.

Siamo pronti per dare un criterio che garantisce che un quoziente di azione sia  $T_2$ :

**Teorema 2.352** (Criterio sufficiente per quoziente per azione  $T_2$ ).

*Sia  $X$  localmente compatto e  $T_2$ . Si ha che se  $G \curvearrowright X$  è propria allora  $X/G$  è  $T_2$ .*

*Dimostrazione.*

Siano  $[x], [y]$  punti distinti di  $X/G$ . Per definizione vogliamo mostrare che esistono aperti di  $X/G$  che separano i punti. Equivalentemente possiamo cercare due aperti *saturi* disgiunti in  $X$  che separino  $x$  e  $y$ , infatti le immagini di questi aperti sono aperti del quoziente (perché saturi) e continuano ad essere disgiunti (perché altrimenti entrambi intersecherebbero una particolare orbita e contraddiremmo o la disgiunzione o la saturazione).

Poiché l'azione è propria e siamo su un localmente compatto, per il teorema (2.350), esistono intorni (aperti)  $U$  e  $V$  di  $x$  e  $y$  rispettivamente tali che

$$\{g \in G \mid gU \cap V \neq \emptyset\} = \{g_1, \dots, g_n\} \text{ è finito.}$$

Poiché  $[x] \neq [y]$ , si ha che per ogni  $i$ ,  $g_i x \neq y$ , e siccome  $X$  è Hausdorff, possiamo trovare  $U_i$  aperto contenente  $g_i x$  e  $V_i$  aperto contenente  $y$  tali che  $U_i \cap V_i = \emptyset$ .

Definiamo i seguenti intorni di  $x$  e  $y$ :

$$\hat{U} = U \cap \bigcap_{i=1}^n g_i^{-1} U_i, \quad \hat{V} = V \cap \bigcap_{i=1}^n V_i,$$

che sono tali perché le mappe  $\ell_{g_i}$  sono continue e intersezioni finite di aperti sono aperti.

Definiamo ora i saturati di questi e speriamo che siano disgiunti:

$$\tilde{U} = G \cdot \hat{U}, \quad \tilde{V} = G \cdot \hat{V}.$$

Ricordiamo che  $G\hat{U} = \bigcup_{g \in G} g\hat{U}$ , quindi è unione di aperti. Similmente anche  $\tilde{V}$  è aperto.

Supponiamo per assurdo che  $\tilde{U} \cap \tilde{V} \neq \emptyset$ , cioè che esistano  $h, k \in G$  tali che

$$h\hat{U} \cap k\hat{V} \neq \emptyset \implies k^{-1}h\hat{U} \cap \hat{V} \neq \emptyset.$$

Poiché  $\hat{U} \subseteq U$  e  $\hat{V} \subseteq V$  abbiamo che  $k^{-1}h = g_i$  per  $i \in \{1, \dots, n\}$ , dunque

$$g_i\hat{U} \cap \hat{V} \neq \emptyset \implies U_i \cap V_i \neq \emptyset,$$

ma questo è assurdo per costruzione di  $U_i$  e  $V_i$ .  $\nexists$

□

*Osservazione 2.353.*

L'unico motivo per cui abbiamo supposto localmente compatto e azione propria è per sfruttare la caratterizzazione data dal teorema (2.350).

### 2.12.2 Domini fondamentali

Proviamo a trovare dei sottoinsiemi di uno spazio che si proiettano a quoziente come lo spazio intero.

**Definizione 2.354** (Dominio fondamentale).

Fissiamo una azione  $G \curvearrowright X$ . Affermiamo che  $D \subseteq X$  è un **dominio fondamentale** di  $X$  per l'azione se

1.  $D$  è chiuso
2.  $G \cdot D = \bigcup_{g \in G} gD = X$  ( $\pi|_D$  è surgettiva)
3. la famiglia  $\{gD\}_{g \in G}$  è localmente finita
4. Per ogni  $g \in G \setminus \{1_G\}$  abbiamo  $g\overset{\circ}{D} \cap \overset{\circ}{D} = \emptyset$  ( $\pi|_{\overset{\circ}{D}}$  è iniettiva).

*Osservazione 2.355.*

L'ultima proprietà viene inserita più che altro per ragioni storiche, nei teoremi successivi non viene usata molto.

La terza proprietà è molto forte, infatti vedremo che non tutte le azioni ammettono dominio fondamentale.

*Osservazione 2.356.*

In molti casi non solo si ha  $D$  chiuso, ma  $\overline{\overset{\circ}{D}} = D$ . Questo ci permette di pensare ai domini fondamentali come uno spazio la cui parte interna viene lasciata a sé e vengono effettuate delle identificazioni sul bordo.

**Lemma 2.357** (Famiglie localmente finite incontrano compatti finite volte).  
 Se  $\{A_i\}_{i \in I}$  è una famiglia localmente finita e  $K$  è compatto allora

$$\{i \in I \mid A_i \cap K \neq \emptyset\} \text{ è finito.}$$

*Dimostrazione.*

Per ogni  $x \in K$  sia  $U_x$  un suo intorno aperto tale che

$$\{i \in I \mid A_i \cap U_x \neq \emptyset\}$$

è finito. Chiaramente  $\{U_x\}_{x \in K}$  è un ricoprimento aperto di  $K$ . Per compattezza sia  $\{U_1, \dots, U_n\}$  un suo sottoricoprimento finito. Concludiamo osservando che

$$\{i \in I \mid A_i \cap K \neq \emptyset\} \subseteq \bigcup_{j=1}^n \{i \in I \mid A_i \cap U_j \neq \emptyset\}$$

e il secondo termine è unione finita di finiti, quindi l'insieme della tesi è finito.  $\square$

**Lemma 2.358** (Azione con dominio fondamentale è propria).  
 Se una azione ammette dominio fondamentale allora è propria.

*Dimostrazione.*

Per definizione  $\{gD\}_{g \in G}$  è localmente finita, quindi per il lemma (2.357) abbiamo che

$$\{g \in G \mid gD \cap K \neq \emptyset\} = \Omega \text{ è finita.}$$

Poiché  $\{gD\}$  copre  $X$  sappiamo anche che

$$K \subseteq \bigcup_{g \in \Omega} gD.$$

Sia  $g_0 \in G$  tale che  $g_0K \cap K \neq \emptyset$  e mostriamo che ci sono un numero finito di possibilità per  $g_0$ . Osserviamo che

$$g_0K \cap \left( \bigcup_{g \in \Omega} gD \right) \neq \emptyset,$$

e quindi esiste  $g_1 \in \Omega$  tale che

$$g_0K \cap g_1D \neq \emptyset,$$

da cui le implicazioni

$$\begin{aligned} g_0K \cap g_1D \neq \emptyset &\implies K \cap (g_0^{-1}g_1)D \neq \emptyset \implies \\ &\implies g_0^{-1}g_1 = g_2 \in \Omega \implies \\ &\implies g_0 = g_1g_2^{-1} \text{ con } g_1, g_2 \in \Omega. \end{aligned}$$

Dato che  $\Omega$  è finito, si ha che ci sono al massimo  $|\Omega|^2$  possibilità per  $g_0$ , da cui la tesi.  $\square$



**Teorema 2.359** (Localmente compatto con dominio fondamentale).

Sia  $X$  localmente compatto e sia  $D$  un dominio fondamentale per  $G \curvearrowright X$ . Valgono le seguenti:

- se  $X$  è  $T_2$  allora  $X/G$  è  $T_2$
- $X/G \cong D/\sim$ , dove  $\sim$  è la relazione indotta da  $G \curvearrowright X$  ristretta a  $D$ .

*Dimostrazione.*

★) Per il lemma (2.358) l'azione è propria. La tesi segue applicando il teorema (2.352).

★) Vogliamo mostrare che  $D/\sim \cong X/G$ . Costruiamo dapprima una mappa  $D \rightarrow X/G$  e vediamo come passa al quoziente.

$$D \xhookrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} X/G$$

Osserviamo che  $\pi \circ i$  è continua perché composizione di continue ed è surgettiva per la seconda proprietà dei domini fondamentali.

Per definizione di  $\sim$ , abbiamo che  $\pi \circ i(x) = \pi \circ i(y) \iff x \sim y$ , dunque per la proprietà universale della topologia quoziente (2.306) esiste una mappa  $f : D/\sim \rightarrow X/G$  continua (e bigettiva per (2.310)) che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} D & \xhookrightarrow{i} & X \xrightarrow{\pi} X/G \\ \pi' \downarrow & & \nearrow f \\ D/\sim & & \end{array}$$

Per concludere dobbiamo mostrare che  $f$  è un omeomorfismo. È sufficiente vedere che  $f$  è chiusa.

Osserviamo che i chiusi di  $D/\sim$  corrispondono ai chiusi saturi di  $D$  per la relazione  $\sim$ . Se mostriamo che  $\pi \circ i$  è chiusa, in particolare avremo mostrato che è chiusa sui saturi e dunque  $f$  è chiusa.

Sia  $C \subseteq D$  un chiuso di  $D$ . Per definizione di dominio fondamentale,  $D$  è chiuso e quindi  $C$  è chiuso (in  $X$ ). Per definizione di topologia quoziente vediamo che  $\pi \circ i(C) = \pi(C)$  è chiuso se e solo se  $\pi^{-1}(\pi(C))$  è chiuso, cioè

$$\bigcup_{g \in G} gC \text{ è chiuso.}$$

Dato che  $\ell_g$  è un omeomorfismo,  $gC$  è chiuso e poiché  $\{gD\}$  è localmente finito, a maggior ragione  $\{gC\}$  è localmente finito. Dato che unione localmente finita di chiusi è chiusa (2.176),  $\bigcup_{g \in G} gC$  è chiuso come volevamo.  $\square$

*Osservazione 2.360.*

Non ha senso dire che la relazione su  $D$  che abbiamo considerato è la relazione indotta da  $G \curvearrowright D$ , perché in generale  $G$  non agisce su  $D$ , in quanto è possibile che  $gD \not\subseteq D$ .

*Osservazione 2.361.*

Trovare domini fondamentali compatti rende la vita più semplice, per esempio garantisce che il quoziente  $D/\sim$  sia compatto, dunque una condizione sufficiente per trovare un omeomorfismo dal quoziente a un candidato spazio  $Z$  è mostrare che la mappa è continua, bigettiva e che  $Z$  è  $T_2$  (vorremmo applicare (2.243)).

## 2.13 Topologia dei Proiettivi

Ricordiamo che

$$\mathbb{P}^n \mathbb{K} = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim,$$

che possiamo interpretare come quoziente per la seguente azione:

$$\mathbb{K}^\times \curvearrowright \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad \lambda \cdot v = \lambda v.$$

Cerchiamo allora di dotare  $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$  di una topologia quoziente a partire dalla topologia di  $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Gli unici campi che considereremo in questo capitolo sono  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$  dato che conosciamo bene  $\mathbb{R}^n$  e possiamo interpretare topologicamente  $\mathbb{C}^n$  come  $\mathbb{R}^{2n}$ .

### 2.13.1 Caso Reale

Osserviamo che l'azione in esame non è propria, per esempio perché  $1 + \varepsilon$  è arbitrariamente vicino all'identità del gruppo, quindi non posso sperare di separare le orbite. Questo ci leva ogni speranza di trovare un dominio fondamentale (2.358).

Possiamo comunque cercare di restringere la nostra attenzione ad un opportuno sottoinsieme di  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ , che vedremo essere  $S^n$ .

*Osservazione 2.362.*

$S^n$  contiene un rappresentante per ogni orbita dell'azione, infatti  $v \sim \frac{1}{|v|}v \in S^n$ .

*Osservazione 2.363.*

La proiezione ristretta alla sfera non è iniettiva, ma non è lontana: è 2 a 1.

*Dimostrazione.*

Siano  $v, v' \in S^n$  tali che  $v \sim v'$ . Si ha dunque che  $v = \lambda v'$  e passando ai moduli  $|\lambda||v| = |v'|$ , e dato che i vettori sono sulla sfera

$$|\lambda| = 1 \implies \lambda = \pm 1 \text{ (ricordiamo che } \lambda \in \mathbb{R}\text{)}.$$

Osserviamo banalmente che se  $\lambda = \pm 1$  e  $v \in S^n$  allora  $v' = \lambda v \in S^n$  quindi la sfera contiene esattamente due rappresentanti per orbita.  $\square$

Date queste proprietà della sfera rispetto alla relazione in esame sospettiamo quanto segue:

**Teorema 2.364** (Proiettivi reali come identificazione antipodale di una sfera). *Consideriamo l'azione di  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  su  $S^n$  data da  $0 \cdot p = p$ ,  $1 \cdot p = -p$ . Si ha che*

$$\mathbb{P}^n \mathbb{R} \cong S^n / \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

*Dimostrazione.*

Definiamo le seguenti mappe:

$$i: \begin{array}{ccc} S^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ p & \longmapsto & p \end{array} \quad h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \longrightarrow & S^n \\ v & \longmapsto & \frac{1}{|v|}v \end{array}.$$

Osserviamo che inducono mappe ben definite ai quozienti, infatti la relazione antipodale coincide con l'identificazione per proporzionalità. Più precisamente

sono ben definite e continue per la proprietà universale dei quozienti le mappe  $\alpha$  e  $\beta$  del diagramma (completiamo con la proprietà il triangolo rosso e il triangolo blu rispettivamente):

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{P}^n \mathbb{R} & & \\
 & \nearrow \alpha & \uparrow \pi & & \\
 S^n / \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xleftarrow{\pi'} S^n & \xleftarrow[h]{i} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^n \mathbb{R} \\
 & \downarrow \pi' & & \nwarrow \beta & \\
 & S^n / \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & & & 
 \end{array}$$

Osserviamo inoltre insiemisticamente che  $\alpha$  e  $\beta$  sono inverse, quindi sono mappe continue con inversa continua, cioè omeomorfismi.  $\square$

**Corollario 2.365.**

*I proiettivi reali sono compatti, connessi per archi e Hausdorff.*

*Dimostrazione.*

$S^n$  è compatto e connesso per archi (se  $n \neq 0$ , ma in tal caso il proiettivo è un punto e la tesi vale comunque), quindi anche  $\pi(S^n) = \mathbb{P}^n \mathbb{R}$  lo è per continuità di  $\pi$ .

Per mostrare che  $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$  è Hausdorff osserviamo che  $S^n$  è localmente compatto e  $T_2$  e che l'azione  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright S^n$  è propria (banalmente dato che  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  è finito), quindi per il teorema (2.352) si ha che  $S^n / \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  è  $T_2$ , e quindi anche  $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$  lo è in quanto ad esso omeomorfo.  $\square$

**Teorema 2.366** (Proiettivi reali come identificazione sul bordo di disco).

*Poniamo su  $D^n$  la relazione*

$$v \sim v' \iff v = v' \text{ oppure } |v| = |v'| = 1 \text{ e } v = -v'.$$

*Si ha che  $D^n / \sim \cong \mathbb{P}^n \mathbb{R}$ .*

*Dimostrazione.*

L'idea è che siccome la semisfera superiore è un dominio fondamentale per  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright S^n$  possiamo appiattire questa ad un disco e trovare la tesi.

Sia  $H = \{x \in S^n \mid x_0 \geq 0\}$ . Questo è un dominio fondamentale per l'azione  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright S^n$  (indichiamo la restrizione della relazione indotta dall'azione con  $\sim'$ ):

- Evidentemente chiuso
- $H \cup 1 \cdot H = S^n$  per evidenti motivi geometrici
- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  è un gruppo finito, quindi  $\{gH\}_{g \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$  è finita, in particolare è localmente finita
- $\mathring{H} = \{x \in S^n \mid x_0 > 0\}$  e  $1 \cdot \mathring{H} = \{x \in S^n \mid x_0 < 0\}$ . Chiaramente questi sono disgiunti.

Consideriamo le mappe

$$\begin{aligned}\alpha : \quad & \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & D^n \\ (x_0, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_1, \dots, x_n) \end{array} , \\ \beta : \quad & \begin{array}{ccc} D^n & \longrightarrow & H \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}, x_1, \dots, x_n) \end{array} .\end{aligned}$$

Queste sono evidentemente continue e passano ai quozienti (le uniche identificazioni avvengono al bordo e su questo le relazioni sono moralmente la stessa).

Abbiamo quindi mostrato che

$$D^n / \sim \cong H / \sim' \cong S^n / \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{P}^n \mathbb{R}.$$

□

*Osservazione 2.367.*

Dal teorema (2.366) segue immediatamente che  $\mathbb{P}^1 \mathbb{R} \cong S^1$  (e NON nel modo che ci aspetteremmo pensando allo spazio delle direzioni di  $\mathbb{R}^2$ ).

Dalla seguente successione di trasformazioni possiamo vedere che  $\mathbb{P}^2 \mathbb{R}$  è omeomorfo ad un nastro di Möbius sul cui bordo è incollato un disco:

- Consideriamo il disco  $D^2$  con la relazione del teorema (2.366)
- Tagliamo un disco più piccolo in modo da ottenere un disco (questo) e una corona.
- Tagliamo la corona secondo quello che sarebbe stato un diametro del disco originale
- Raddrizziamo i due pezzi ricavati dalla corona in due rettangoli
- Identifichiamo i due rettangoli lungo il lato che proveniva dal bordo del disco originale
- Identifichiamo i lati del rettangolo ottenuto al passo precedente corrispondenti ai bordi creati quando abbiamo fatto il taglio lungo il diametro.

Avendo seguito questi passi dovremmo aver ottenuto un nastro di Möbius (dal rettangolo) e un disco (quello tagliato da quello originale) che deve essere attaccato lungo il bordo del nastro di Möbius. Vi chiedo sinceramente scusa perché seguire questi passi anche con un disegno sotto non è semplicissimo, non oso immaginare a parole.

### 2.13.2 Caso Complesso

Osserviamo nuovamente che l'azione che determina  $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$  non è propria, ma anche in questo caso si ha che

$$S^{2n+1} = \{v \in \mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2} \mid |v| = 1\}$$

incontra tutte le classi di equivalenza per la relazione su  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  (per trovare un rappresentante sulla sfera basta dividere ogni vettore per la propria norma).

*Osservazione 2.368.*

Per quanto appena detto, la mappa  $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{C}$  ristretta a  $S^{2n+2}$  è surgettiva (e continua per definizione di topologia quoziente). Osserviamo quindi che  $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$  è compatto e connesso per archi.

Per studiare meglio i proiettivi osserviamo che grandi pezzi di  $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$  sono essenzialmente  $\mathbb{K}^n$ :

**Proposizione 2.369** (Le carte affini sono omeomorfismi).

Se  $\mathbb{K}$  è un campo dotato di una topologia (per quanto ci riguarda  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) allora le carte affini

$$J_i : \mathbb{K}^n \rightarrow U_i$$

sono omeomorfismi tra  $\mathbb{K}^n$  e particolari aperti di  $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$ .

*Dimostrazione.*

Senza perdita di generalità consideriamo solo la prima carta affine, cioè poniamo  $i = 0$ .

Osserviamo che le carte affini sono continue perché composizione di continue:

$$\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{K}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (1, x_1, \dots, x_n) \longmapsto [1, x_1, \dots, x_n]$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(H_0) &= \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \mid x_0 = 0\} = \\ &= \{0\} \times \mathbb{K}^n \setminus \{0\} = (\{0\} \times \mathbb{K}^n) \cap (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}). \end{aligned}$$

è un chiuso di  $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$  perché prodotto di chiusi intersecato con  $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$  (2.124). Per definizione di topologia quoziente abbiamo dunque che  $H_0$  stesso è chiuso da cui  $U_0 = \mathbb{P}^n \mathbb{K} \setminus H_0$  è aperto.

Consideriamo ora il sollevamento di  $U_0$  e proviamo a mostrare che l'inversa di  $J_0$  è continua per proprietà universale delle proiezioni.

Sia  $W_0 = \pi^{-1}(U_0) \subseteq \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$  e consideriamo la mappa

$$\begin{aligned} W_0 &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\longmapsto \left( \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right). \end{aligned}$$

Questa è evidentemente continua e passa al quoziente (gli scalari si cancellano nelle frazioni), definiamo dunque una mappa continua

$$\begin{aligned} U_0 &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ [x_0, \dots, x_n] &\longmapsto \left( \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right), \end{aligned}$$

dove stiamo considerando  $U_0$  con la topologia quoziente. Osserviamo che questa mappa è l'inversa della carta affine, quindi se la topologia quoziente e la topologia di sottospazio per  $U_0$  coincidono abbiamo quanto volevamo. Basta notare che gli aperti di  $U_0$  (con topologia di sottospazio) corrispondono esattamente gli aperti saturi in  $W_0$ , quindi quando passiamo a quoziente un aperto per la topologia quoziente di  $U_0$  è effettivamente un aperto come topologia di sottospazio.  $\square$

**Proposizione 2.370.**

$\mathbb{P}^n\mathbb{C}$  è Hausdorff con la topologia quoziente.

*Dimostrazione.*

Consideriamo due punti distinti  $x, y \in \mathbb{P}^n\mathbb{C}$ . Osserviamo che le proiettività sono omeomorfismi di  $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$  in se stesso:

per definizione, una proiettività è indotta da una mappa lineare invertibile, e ogni tale mappa è un omeomorfismo di  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  in se stesso. Infatti le mappe lineari sono continue per la topologia di  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  e dal fatto che l'inversa di una lineare è lineare segue che sono omeomorfismi. Osserviamo inoltre che mappe lineari, in quanto omogenee, preservano aperti saturi per la relazione  $\sim$  che definisce  $\mathbb{P}^n\mathbb{C} \cong \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ . Osserviamo dunque che se  $f$  è una proiettività indotta dalla mappa lineare  $\varphi$  e  $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{C}$  è la proiezione al quoziente, abbiamo la seguente catena di equivalenze

$$\begin{aligned} A \text{ aperto di } \mathbb{P}^n\mathbb{C} \\ \pi^{-1}(A) \text{ aperto saturo di } \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \\ \varphi(\pi^{-1}(A)) \text{ aperto saturo di } \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \\ f(A) = \pi(\varphi(\pi^{-1}(A))) \text{ aperto di } \mathbb{P}^n\mathbb{C}. \end{aligned}$$

Possiamo quindi supporre, a meno di proiettività,  $x, y \in U_0 \cong \mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{P}^n\mathbb{C}$ , ma  $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$  è  $T_2$ , quindi posso trovare due aperti contenuti in  $\mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{P}^n\mathbb{C}$  disgiunti che separano  $x$  e  $y$ .  $\square$

**Corollario 2.371.**

$\mathbb{P}^1\mathbb{C} \cong S^2$ .

*Dimostrazione.*

Sappiamo che  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  è compatto e  $T_2$ , inoltre  $\mathbb{P}^1 \setminus H_0 = U_0 \cong \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ . Osserviamo però che  $H_0 = \{[0, 1]\}$ , in particolare consiste di un punto. Per l'unicità della compattificazione di Alexandroff (2.256) si deve avere che  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  è omeomorfo alla compattificazione di  $U_0 \cong \mathbb{R}^2$ , cioè a  $S^2$  come sappiamo dallo studio delle proiezioni stereografiche.  $\square$

**2.13.3 Varietà topologiche**

**Definizione 2.372** (Varietà topologica).

Una **varietà topologica** di dimensione  $n$  è uno spazio topologico  $X$  tale che

- Per ogni  $P \in X$  esiste un intorno aperto  $U$  di  $P$  omeomorfo ad un aperto di  $\mathbb{R}^n$
- $X$  è  $T_2$
- $X$  è II-numerabile.

*Osservazione 2.373.*

Se  $X$  rispetta la prima proprietà si dice che  $X$  è **localmente euclidea**. L'ultima condizione è omessa da alcuni autori.

*Osservazione 2.374.*

I proiettivi sono varietà topologiche,  $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$  di dimensione  $n$  e  $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$  di dimensione  $2n$ .

**Proposizione 2.375.**

Dato  $X$  e dato  $P \in X$  le seguenti condizioni su  $U$  intorno aperto di  $P$  sono equivalenti:

1.  $U$  omeomorfo ad un aperto di  $\mathbb{R}^n$
2.  $U$  omeomorfo a  $\mathbb{R}^n$
3.  $U$  omeomorfo a  $B(0, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n$  per qualche  $\varepsilon > 0$ .

*Dimostrazione.*

$2 \iff 3$ ) Basta notare che  $B(0, \varepsilon) \cong \mathbb{R}^n$ .

$3 \implies 1$ ) Una palla aperta è in particolare un aperto.

$1 \implies 3$ ) La restrizione di omeomorfismi ad un aperto continua ad essere un omeomorfismo. Per definizione di topologia euclidea, ogni aperto di  $\mathbb{R}^n$  contiene una palla aperta. Restringiamo l'omeomorfismo a questa e per concludere basta comporre con un omeomorfismo che trasla la palla nell'origine e riscalda il raggio.

□

*Osservazione 2.376.*

Uno spazio localmente euclideo non è necessariamente  $T_2$  (2.409)

## 2.14 Appendice al capitolo 2

### 2.14.1 Esempi e controesempi

Come vi sarete resi conto leggendo il capitolo, ci sono molti controesempi a proprietà che uno potrebbe aspettarsi dagli spazi topologici. Seguono i principali esempi e controesempi dati. Ho deciso di raccogliergli in una sezione a parte per non appesantire troppo la lettura del testo principale con innumerevoli dimostrazioni che esulano dai concetti esposti.

#### Spazi topologici

**Esempio 2.377** (Distanze non topologicamente equivalenti).

Le distanze  $d_1$  e  $d_\infty$  su  $C([0, 1])$  non sono topologicamente equivalenti.

*Dimostrazione.*

Osservo che  $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_\infty$  (e quindi  $\tau_1 \subseteq \tau_\infty$ ), infatti

$$M = \|f\|_\infty \implies \|f\|_1 = \int_0^1 |f| dx \leq \int_0^1 M dx = M = \|f\|_\infty,$$

quindi dobbiamo cercare un insieme  $A$  che sia aperto per  $\|\cdot\|_\infty$  ma non  $\|\cdot\|_1$ . Proviamo con  $A = B_\infty(0, 1)$ , cioè le funzioni che si discostano dalla funzione identicamente nulla di al massimo 1. Chiaramente  $0 \in B_\infty(0, 1)$ , mostriamo allora che  $B_1(0, \varepsilon) \not\subseteq A$ . Osserviamo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{2}{\varepsilon}x & \text{se } x \in [0, \varepsilon] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ha integrale  $\varepsilon$ , ma  $\|f\|_\infty = 2$ , cioè  $f \notin B_\infty(0, 1)$ . □

**Esempio 2.378** (Punto aderente non di accumulazione).

Siano  $X = \mathbb{R}$  e  $Z = [0, 1) \cup \{2\}$ . Osserviamo che 2 è aderente ma non di accumulazione. Sempre da questo esempio notiamo che 1 è un punto di accumulazione che non appartiene a  $Z$ .

#### Assiomi di numerabilità

**Esempio 2.379** (Insieme  $I$ -numerabile ma non  $II$ -numerabile).

Sia  $X$  un insieme più che numerabile dotato della topologia discreta. Esso è chiaramente  $I$ -numerabile in quanto metrizzabile e un SFI per  $x_0$  è  $\{x_0\}$ . Osserviamo però che lo spazio non è secondo numerabile perché ogni base deve contenere i singoletti (aperti scrivibili solo come unione di se stessi ed eventualmente  $\emptyset$ ) e ce ne sono di una quantità più che numerabile.

#### Prodotti

**Esempio 2.380** (Prodotto di  $I$ -numerabili non  $I$ -numerabile).

Sia  $I$  tale che  $|I| > |\mathbb{N}|$  e per ogni  $i \in I$  sia  $X_i = \{0, 1\}$  con la topologia discreta. Si ha che  $X = \prod_{i \in I} X_i$  non è  $I$ -numerabile.



*Dimostrazione.*

Consideriamo  $x \in X$  tale che  $\pi_i(x) = 0$  per ogni  $i \in I$ . Vogliamo mostrare che  $x$  non ammette SFI numerabile. Sia per assurdo  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un tale sistema di intorno. Senza perdita di generalità supponiamo che  $U_n$  sia un aperto di base per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , tanto sicuramente contiene un aperto di base e rimpiazzare  $U_i$  con questo restituisce un altro sistema fondamentale di intorno numerabile.

Per definizione della topologia prodotto sappiamo che per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , l'insieme

$$A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid \pi_k(U_n) \neq \{0, 1\}\}$$

è finito. Si ha dunque che  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  è un insieme al più numerabile di indici.

Dato che per ipotesi  $I$  è più che numerabile,  $I \setminus A \neq \emptyset$ , esiste dunque  $i_0 \in I \setminus A$ . Consideriamo il seguente aperto di base:

$$V = \prod_{i \in I} V_i \quad \text{dove } V_i = \begin{cases} \{0, 1\} & \text{se } i \neq i_0 \\ \{0\} & \text{se } i = i_0 \end{cases}.$$

Osserviamo che  $x \in V$ , quindi  $V$  è un intorno di  $x$ .

Per costruzione  $\pi_{i_0}(U_n) = \{0, 1\}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , quindi  $U_n \not\subseteq V$ . Abbiamo quindi trovato un intorno che non contiene alcun aperto del nostro SFI, che è assurdo.  $\nmid$  □

*Osservazione 2.381.*

L'esempio precedente mostra anche che il prodotto più che numerabile di spazi metrizzabili può non essere metrizzabile.

**Esempio 2.382** (Le proiezioni non sono sempre chiuse).

Consideriamo  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ : esso è preimmagine di 1 tramite la mappa continua  $(x, y) \mapsto xy$ , quindi è un chiuso in quanto preimmagine di un chiuso tramite una mappa continua, eppure  $\pi_1(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  che non è chiuso in  $\mathbb{R}$ .

## Assiomi di separazione

### Proposizione 2.383.

Le implicazioni  $T_2 \implies T_1 \implies T_0$  sono strette.

*Dimostrazione.*

$T_1 \not\Rightarrow T_2$ ) Consideriamo  $X$  infinito con la topologia cofinita. Non è  $T_2$  perché due aperti non vuoti si intersecano sempre. È però  $T_1$ , infatti dati  $x \neq y$  in  $X$  posso considerare  $U = X \setminus \{y\}$  e  $V = X \setminus \{x\}$ , che sono aperti.

$T_0 \not\Rightarrow T_1$ ) Consideriamo  $X = \mathbb{R}$  con la **topologia semicontinuità inferiore** (gli aperti sono  $(a, +\infty)$  con  $a \in \mathbb{R}$  oltre che a  $\emptyset$  e  $\mathbb{R}$ ). Esso è  $T_0$ , infatti dati  $x \neq y$  in  $\mathbb{R}$ ,  $U = (\frac{x+y}{2}, +\infty)$  contiene il maggiore tra  $x$  e  $y$  ma non l'altro. Ma lo spazio non è  $T_1$  perché dati  $x \neq y$  in  $\mathbb{R}$ , se  $x < y$  ogni aperto che contiene  $x$  contiene anche  $y$ . □

**Esempio 2.384** (Spazio  $T_1$  non  $T_0$ ).

La topologia indiscreta su  $X$  di cardinalità almeno 2 rende lo spazio vuotamente sia  $T_3$  che  $T_4$ , ma come sappiamo questo tipo di spazio non è  $T_0$

**Definizione 2.385** (Retta di Sorgenfrey).

La **retta di Sorgenfrey** è  $\mathbb{R}$  dotato della topologia con la seguente base:

$$\{[a, b) \mid a < b, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

*Osservazione 2.386.*

La topologia di Sorgenfrey è più fine della topologia euclidea, infatti posso scrivere  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  come unione di aperti di Sorgenfrey come segue: sia  $x_n \rightarrow a - \varepsilon$  una successione monotona contenuta in  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Segue che

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \bigcup_i [x_i, a + \varepsilon).$$

**Esempio 2.387.**

La retta di Sorgenfrey è normale.

*Dimostrazione.*

Poiché la topologia è più fine di quella euclidea, la retta di Sorgenfrey è  $T_1$ . Basta allora mostrare che è  $T_4$ .

Siano  $C, D$  chiusi disgiunti per la topologia di Sorgenfrey. Per ogni  $c \in C$ , siccome  $c \notin D$  e  $\mathbb{R} \setminus D$  è aperto, esiste  $[a, b)$  aperto di base di Sorgenfrey tale che  $c \in [a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus D$ , cioè  $c \in [a, b)$  e  $[a, b) \cap D = \emptyset$ .

Dato che  $c \in [a, b)$ , segue chiaramente che  $c \in [c, b)$  con  $[c, b) \cap D = \emptyset$ . Evidenziamo la dipendenza di  $b$  da  $c$  scrivendo  $b = b_c$ . Al variare di  $c \in C$  costruiamo  $[c, b_c)$  aperti tali che  $[c, b_c) \cap D = \emptyset$ . Sia

$$\Omega_1 = \bigcup_{c \in C} [c, b_c).$$

Per costruzione  $\Omega_1 \cap D = \emptyset$ .

In modo analogo costruiamo  $\Omega_2 = \bigcup_{d \in D} [d, b_d)$  con  $D \subseteq \Omega_2$  e  $\Omega_2 \cap C = \emptyset$ .

Per costruzione  $\Omega_1, \Omega_2$  sono aperti e  $C \subseteq \Omega_1, D \subseteq \Omega_2$ . Per concludere basta mostrare che  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ .

Supponiamo per assurdo che  $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ . In tal caso, per costruzione, esistono  $c \in C$  e  $d \in D$  tali che

$$[c, b_c) \cap [d, b_d) \neq \emptyset,$$

ma in tal caso l'intersezione contiene  $c$  o  $d$ , che è assurdo per costruzione.  $\nmid \quad \square$

**Lemma 2.388.**

Sia  $Z$  uno spazio  $T_4$  e separabile. Se  $D$  è un suo sottoinsieme chiuso e discreto allora  $|D| < |\mathbb{R}|$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $W \subseteq Z$  un denso numerabile. Osserviamo che se riusciamo a costruire una funzione

$$\psi : \mathcal{P}(D) \rightarrow \mathcal{P}(W)$$

iniettiva allora abbiamo finito, infatti in tal caso

$$|D| < |\mathcal{P}(D)| \leq |\mathcal{P}(W)| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|.$$

*Definizione*) Dato  $C \subseteq D$  osserviamo che  $C$  e  $D \setminus C$  sono chiusi in  $D$  (in quanto  $D$  discreto), dunque, essendo  $D$  chiuso, sono chiusi anche in  $Z$ . Per ipotesi  $Z$  è  $T_4$ , quindi esistono  $A_C, B_C$  aperti disgiunti tali che

$$C \subseteq A_C \quad D \setminus C \subseteq B_C.$$

Pongo  $\psi(C) = A_C \cap W$ .

*Inieltività*) Siano  $C, C' \subseteq D$  distinti. Allora  $C \setminus C' \neq \emptyset$  o  $C' \setminus C \neq \emptyset$ . Supponiamo senza perdita di generalità  $C \setminus C' \neq \emptyset$ , cioè esiste  $c \in C \cap (D \setminus C')$ .

Per costruzione  $c \in A_C \cap B_{C'}$ , che è un aperto di  $Z$  non vuoto. Dato che  $W$  è denso osserviamo che  $W \cap A_C \cap B_{C'} \neq \emptyset$ , dunque

$$\emptyset \neq W \cap A_C \cap B_{C'} \subseteq W \cap A_C = \psi(C),$$

mentre

$$(W \cap A_C \cap B_{C'}) \cap \psi(C') = W \cap A_C \cap \underbrace{B_{C'} \cap A_{C'}}_{=\emptyset} \cap W = \emptyset.$$

Abbiamo quindi mostrato che  $W \cap A_C \cap B_{C'}$  è un sottoinsieme non vuoto di  $\psi(C)$  disgiunto da  $\psi(C')$ , in particolare  $\psi(C) \neq \psi(C')$ .  $\square$

**Esempio 2.389** (Piano di Sorgenfrey).

Il piano di Sorgenfrey, cioè il prodotto di due rette di Sorgenfrey, non è  $T_4$ .

*Dimostrazione.*

Osserviamo che  $\mathbb{Q}$  è denso nella retta di Sorgenfrey, quindi  $\mathbb{Q}^2$  è denso nel piano di Sorgenfrey, in particolare il piano di Sorgenfrey è separabile. Per mostrare che non è  $T_4$  basta esibire un sottoinsieme discreto, chiuso e con cardinalità del continuo (lemma 2.388). Consideriamo  $D = \{(x, -x)\}$ . Chiaramente  $|D| = |\mathbb{R}|$  ed è un chiuso perché è un chiuso euclideo. E anche discreto, infatti preso  $(x_0, -x_0) \in D$  posso considerare l'aperto  $U = [x_0, +\infty) \times [-x_0, +\infty)$ , che interseca  $D$  solo in quel punto, cioè  $\{(x_0, -x_0)\}$  è aperto in  $D$ .  $\square$

**Esempio 2.390** (Spazio Hausdorff non regolare).

Consideriamo  $\mathbb{R}$  dotato della topologia generata dagli aperti euclidei e  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ .

*Dimostrazione.*

In quanto raffinamento della topologia euclidea, questo spazio è  $T_2$ , dobbiamo quindi mostrare che non è  $T_3$ . Sia  $C = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ , il quale è chiuso per costruzione.

Osserviamo che una base della topologia in questione è data da

$$\{A \mid A \text{ aperto euclideo}\} \cup \{A \setminus C \mid A \text{ aperto euclideo}\},$$

infatti prendere intersezione finite di aperti euclidei e potenzialmente  $\mathbb{R} \setminus C$  restituisce insiemi come sopra.

Da quanto detto segue che se  $B$  è un aperto tale che  $0 \in B$  allora  $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus C \subseteq B$ . Sia ora  $A$  un aperto che contiene  $C$ . Se  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , siccome  $\frac{1}{n} \in C \subseteq A$ ,  $A$  contiene un aperto di base della forma  $(\frac{1}{n} - \varepsilon', \frac{1}{n} + \varepsilon') = I$ . Osserviamo ora che  $I \cap (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus C \neq \emptyset$  in quanto per costruzione  $\frac{1}{n} < \varepsilon$  e quindi  $\frac{1}{n} - \varepsilon' < \frac{1}{n} < \varepsilon$  ma

$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n} + \varepsilon'$ , cioè  $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap (\frac{1}{n} - \varepsilon', \frac{1}{n} + \varepsilon') \neq \emptyset$ , ma questo insieme è più che numerabile quindi anche sottraendo  $C$  si mantiene una intersezione non vuota.

Abbiamo dunque mostrato che se  $A \supset C$  e  $0 \in B$  si avrà necessariamente che  $A \cap B \subseteq I \cap (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus C \neq \emptyset$ , cioè il nostro spazio non è  $T_3$  perché non riesce a separare il punto 0 dal chiuso  $C$  con aperti disgiunti.  $\square$

## Ricoprimenti

**Esempio 2.391** (Ricoprimento chiuso non fondamentale).

Su  $\mathbb{R}$  il ricoprimento  $\{\{x\}\}_{x \in \mathbb{R}}$  non è fondamentale.

## Connessi

**Esempio 2.392** (Connesso ma non connesso per archi).

L'insieme  $Y = \{(0, 0)\} \cup \{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0, x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$  è connesso ma non connesso per archi

*Dimostrazione.*

Sia  $Z = \{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0, x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ . Osserviamo che  $Z$  è connesso per archi in quanto immagine di  $(0, +\infty)$  tramite  $x \mapsto (x, \sin(1/x))$ , che è continua. In particolare  $Z$  è connesso. Consideriamo ora  $Y = Z \cup \{(0, 0)\}$ . Chiaramente  $(0, 0) \in \overline{Z}$ , per esempio perché limite della successione a valori in  $Z$  data da

$$\{(1/(2\pi k), \sin(2\pi k))\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

Per la proposizione (2.194)  $Y$  è connesso, vogliamo ora mostrare che  $Y$  non è connesso per archi. Arriveremo a mostrare che se  $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$  è continua e  $\gamma(0) = (0, 0)$  allora  $\gamma$  è costante, in particolare non esiste un cammino che congiunge  $(0, 0)$  con gli altri punti di  $Y$ .

Per mostrare quanto sopra basta vedere che  $\gamma^{-1}((0, 0)) \subseteq [0, 1]$  è sia aperto che chiuso (e chiaramente non vuoto), da cui per la connessione di  $[0, 1]$  ricaviamo che  $\gamma^{-1}((0, 0)) = [0, 1]$ , ovvero  $\gamma$  è costante.

Poiché  $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $Y$  eredita la proprietà  $T_1$ , quindi  $(0, 0)$  è un chiuso di  $Y$ , da cui  $\gamma^{-1}((0, 0))$  è chiuso in  $[0, 1]$ . Mostriamo ora che è effettivamente aperto. Sia  $t_0 \in [0, 1]$  tale che  $\gamma(t_0) = (0, 0)$  (cioè  $t_0 \in \gamma^{-1}((0, 0))$ ). Per continuità di  $\gamma$  (e quindi di  $\pi_2 \circ \gamma : t \rightarrow \sin(1/t)$ ) esiste un intorno  $U$  di  $t_0$  in  $[0, 1]$  tale che

$$|\pi_2(\gamma(t))| < \frac{1}{2}$$

per ogni  $t \in U$  (cioè  $\pi_2(\gamma(U)) \subseteq B(0, \frac{1}{2}) \subseteq \mathbb{R}$ ). Affermo che  $\gamma(U) = \{(0, 0)\}$ , che conclude la dimostrazione in quanto  $U \subseteq \gamma^{-1}((0, 0))$  e quindi  $\gamma^{-1}((0, 0))$  sarebbe intorno di ogni suo punto.

Per assurdo supponiamo che esista  $t_1 \in U$  tale che  $\gamma(t_1) \neq (0, 0)$ . in particolare  $\pi_1(\gamma(t_1)) \neq 0$ . Poiché  $\pi_1 \circ \gamma$  è continua  $\pi_1 \circ \gamma([t_0, t_1])$  (se  $t_0 < t_1$ , altrimenti prendiamo  $\pi_1 \circ \gamma([t_1, t_0])$ ) è connesso, in quanto immagine di connesso tramite una continua. Essendo i connessi di  $\mathbb{R}$  intervalli (2.193)

$$\{0\} \neq [0, \pi_1(\gamma(t_1))] \subseteq \pi_1 \circ \gamma([t_0, t_1]),$$

ma in un tale intervallo esistono infiniti punti della forma  $(1/(\pi/2 + 2k\pi), 1) \notin \pi_2^{-1}(B(0, \frac{1}{2}))$ . Dato che  $[t_0, t_1] \subseteq U$  e  $\pi_1(\gamma([t_0, t_1])) \supseteq [0, \pi_1(\gamma(t_1))]$  esiste  $t_2 \in [t_0, t_1] \subseteq U$  tale che  $\pi_2(\gamma(t_2)) = 1$ , che è assurdo perché avevamo supposto  $|\pi_2(\gamma(t))| < 1/2$  per ogni  $t \in U$ .  $\nmid$   $\square$

**Esempio 2.393** (Pettine infinito).

Sia  $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2$ . Dotato della topologia di sottospazio di  $\mathbb{R}^2$ ,  $X$  è uno spazio connesso per archi ma non localmente connesso per archi.

*Dimostrazione.*

Dati due punti  $(a, b)$  e  $(c, d)$  qualsiasi del pettine un cammino che li congiunge è la composizione seguente composizione:

$$((a, b) \rightarrow (a, 0)) * ((a, 0) \rightarrow (c, 0)) * ((c, 0) \rightarrow (c, d))$$

dove con la notazione  $P \rightarrow Q$  intendiamo il cammino

$$(P \rightarrow Q)(t) = tQ + (1 - t)P.$$

Questo mostra che  $X$  connesso per archi.

Consideriamo ora un punto di  $X \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$ . Per un raggio abbastanza piccolo troviamo una palla centrata in questo punto che non incontra  $\mathbb{R} \times \{0\}$ . Senza perdita di generalità consideriamo  $(0, 1)$  e  $B((0, 1), \frac{1}{2}) \cap X$ .

Se  $\{U_i\}$  è un sistema fondamentale di intorno sappiamo che esiste  $i$  tale che  $U_i \subseteq B((0, 1), \frac{1}{2})$ , da cui  $U_i \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = \emptyset$ . Mostriamo che  $U_i$  è sconnesso, in particolare non potrà essere connesso per archi.

Osserviamo che se  $q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \cap \pi_1(U_i)$  allora preso  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  con  $q_1 < \alpha < q_2$ , si ha che  $U_i \cap \{x < \alpha\}$  e  $U_i \cap \{x > \alpha\}$  sono aperti disgiunti non vuoti di  $U_i$  che lo coprono: le prime tre condizioni sono evidenti per costruzione, quindi dobbiamo solo mostrare che coprono. Gli unici punti che possono mancare sono quelli di  $\{x = \alpha\} \cap U_i$ , ma questo insieme è vuoto per definizione di  $X$  e per il fatto che  $U_i \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = \emptyset$ .  $\square$

**Esempio 2.394** (Insieme con parti connesse non aperte).

$\mathbb{Q}$  è totalmente sconnesso ma i singoletti non sono aperti.

*Dimostrazione.*

Osserviamo che i singoletti non sono aperti, infatti un aperto di  $\mathbb{Q}$  è l'intersezione di  $\mathbb{Q}$  e un aperto di  $\mathbb{R}$  e ogni aperto di  $\mathbb{R}$  (eccetto  $\emptyset$ ) contiene infiniti punti di  $\mathbb{Q}$ .

Basta dunque mostrare che  $C(q) = \{q\}$  per ogni  $q \in \mathbb{Q}$ . Fissiamo dunque  $q \in \mathbb{Q}$  e consideriamo  $C$  connesso in  $\mathbb{Q}$  che contiene  $q$ . Osserviamo che la mappa di inclusione  $i : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  è continua, quindi  $C$  deve essere un connesso di  $\mathbb{R}$  interamente contenuto in  $\mathbb{Q}$ . Sappiamo che i connessi di  $\mathbb{R}$  sono intervalli (2.193), dunque l'unica possibilità affinché  $C \subseteq \mathbb{Q}$  è che  $C$  sia un punto, cioè  $C = \{q\}$  come volevasi dimostrare.  $\square$

**Esempio 2.395** (Insieme con parti conn. per archi né aperte né chiuse).

$Y = \{(0, 0)\} \cup \{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ . Sappiamo che i due pezzi specificati sono connessi per archi ma l'insieme non è connesso per archi, dunque questa è la partizione. Osserviamo che  $\{(0, 0)\}$  non è aperto e  $\{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0\}$  non è chiuso.

## Compattezza

**Esempio 2.396** ( $\mathbb{R}^n$  non è compatto).

$\mathbb{R}^n$  non è compatto, infatti il ricoprimento  $\{B(x_0, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  non ammette un sottoricoprimento finito (se  $m$  fosse il massimo raggio allora tutti gli elementi fuori da  $B(x_0, m)$  non sarebbero coperti).

**Esempio 2.397** (Famiglie che godono della proprietà dell'intersezione finita). Se  $X = \mathbb{R}$  gli insiemi della forma  $[n, +\infty)$  godono della proprietà dell'intersezione finita. Similmente per  $X = [0, 1]$  e gli insiemi della forma  $(0, \frac{1}{n})$ . Inoltre in entrambi i casi l'intersezione di tutti i termini è vuota.

**Esempio 2.398** (Sottoinsiemi compatti non sono necessariamente chiusi). Si consideri  $\{1, 2\}$  con la topologia  $\{\emptyset, \{1, 2\}\}$ . Chiaramente  $\{1\}$  è un sottospazio compatto ma non è un chiuso.

Un esempio meno particolare è dato dalla topologia cofinita su  $\mathbb{N}$ , infatti anche in questo spazio ogni sottoinsieme è compatto. Infatti se  $A \subseteq \mathbb{R}$  e  $\{U_i\}$  è un ricoprimento aperto, osservo che  $|A \setminus U_i| \in \mathbb{N}$  per ogni  $i$ , dunque fissato un primo insieme bastano finiti altri per finire di coprire  $A$ .

**Esempio 2.399** (Spazio compatto ma non compatto per successioni). Lo spazio  $X = [0, 1]^{[0,1]}$  con la topologia della convergenza puntuale è compatto ma non compatto per successioni.

*Dimostrazione.*

È banalmente compatto per il teorema di Tychonoff (2.248), cerchiamo di costruire una successione senza sottosuccessioni convergenti.

Consideriamo la seguente successione di funzioni:

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & [0, 1] \\ x & \longmapsto & ([10^n x] - 10[10^{n-1}x])/10 \end{array} ,$$

cioè  $f_n(x)$  è l' $n$ -esima cifra dello sviluppo decimale di  $x$  divisa per 10.

Mostriamo che per ogni sottosuccessione  $f_{n_k}$  possiamo trovare  $x \in [0, 1]$  tale che  $f_{n_k}(x)$  non abbia limite. Scegliamo  $x$  in modo che la sua  $n_k$ -esima cifra decimale sia  $k \pmod{10}$ , cioè poniamo che  $f_{n_k}(x)$  segua il ciclo

$$0.1 \rightarrow 0.2 \rightarrow 0.3 \rightarrow \dots \rightarrow 0.8 \rightarrow 0.9 \rightarrow 0 \rightarrow 0.1 \rightarrow \dots$$

Chiaramente per un tale  $x$ ,  $f_{n_k}(x)$  non converge. Osserviamo che un  $x$  che rispetta le proprietà richieste è

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \pmod{10}}{10^{n_k}}.$$

□

**Esempio 2.400** (Spazio compatto per successioni ma non compatto).

Sia  $X = [0, 1]^{[0,1]}$  e per ogni  $f \in X$  sia  $\text{supp}(f) = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \neq 0\}$  il supporto di  $f$ . Poniamo

$$Y = \{f \in X \mid \text{supp}(f) \text{ è al più numerabile}\}.$$

Si ha che  $Y$  è compatto per successioni ma non compatto con la topologia di sottospazio.

*Dimostrazione.*

Organizziamo la dimostrazione nei seguenti passi:

$Y$  è denso in  $X$  Osserviamo che  $Y$  è denso in  $X$ , infatti se  $U = \prod_{x \in [0,1]} U_x$  è

un aperto di base che contiene  $f \in X$ , sappiamo per definizione di topologia prodotto che  $U_x \neq [0, 1]$  solo per un numero finito di indici. Sia allora

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } U_x = [0, 1] \\ f(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per costruzione  $f' \in U$  e ha supporto finito (in particolare al più numerabile), quindi  $f' \in U \cap Y \neq \emptyset$ , quindi  $\forall f \in X$  si ha che  $f \in \bar{Y}$ , cioè  $Y$  è denso in  $X$ .

$Y$  non è compatto) In quanto prodotto di spazi  $T_2$ ,  $X$  è uno spazio  $T_2$ . Osserviamo che  $Y \neq X$ , in quanto per esempio la funzione  $f(x) = 1$  appartiene a  $X$  ma non ad  $Y$ . Segue che  $Y$  è un insieme non chiuso in uno spazio Hausdorff, quindi non può essere compatto (proposizione 2.239).

$Y$  è compatto per successioni) Sia  $f_n$  una successione in  $Y$ . Osserviamo preliminarmente che  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{supp}(f_n)$  è al più numerabile in quanto unione numerabile di insiemi al più numerabili. Possiamo quindi scrivere i punti dell'unione dei supporti come  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ .

Se riusciamo a trovare una sottosuccessione di  $f_n$  tale che  $f_{n_k}(x_i)$  converge per ogni  $i$  allora avremo trovato una sottosuccessione convergente, dato che per ogni altro punto del dominio tutte le  $f_n$  sono nulle<sup>5</sup>.

Costruiamo  $f_{n_k}$  per induzione su  $i$  l'indice dei punti dell'unione dei supporti:  $i = 1$ ) Osserviamo che  $f_n(x_1)$  è una successione in  $[0, 1]$ , che è compatto per successioni, quindi esiste una sottosuccessione  $f_{n_{k,1}}(x_1)$  convergente. Poniamo infine  $f_{n_1} = f_{n_{k,1}}$ .

$i > 1$ ) Osserviamo che  $f_{n_{k,i-1}}(x_i)$  è una successione in  $[0, 1]$ , quindi possiamo estrarre una sottosuccessione convergente  $f_{n_{k,i}}(x_i)$ . Definiamo  $f_{n_i} = f_{n_{k,i}}$ .

Osserviamo che per ogni  $i \in \mathbb{N}$ ,  $f_{n_k}(x_i)$  è definitivamente una sottosuccessione di  $f_{n_{k,i}}(x_i)$ , quindi converge. Mettendo tutto insieme abbiamo mostrato che  $f_{n_k}(x)$  converge per ogni  $x \in [0, 1]$  (se  $x \notin \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\}$  allora  $f_{n_k}(x) = 0$ ), cioè  $f_{n_k}$  converge in  $X$ . Sia  $f$  il suo limite. Osserviamo che  $\text{supp}(f) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\}$ , in particolare è al più numerabile, dunque  $f \in Y$  e questo conclude.  $\square$

**Esempio 2.401** (Spazio limitato, completo ma non compatto).

Sia  $X$  un insieme infinito dotato della distanza discreta. Questo è uno spazio metrico limitato e completo ma non compatto.

*Dimostrazione.*

Limitato) La distanza discreta ricordiamo è definita come

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

ne segue che  $X$  è limitato (ha diametro 1).

Completo) Se  $x_n$  è una successione di Cauchy in questo spazio, scegliendo  $\varepsilon < 1$ , troviamo che

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon < 1 \implies d(x_n, x_m) = 0 \implies x_n = x_m$$

quindi le successioni di Cauchy in questo spazio sono definitivamente costanti, in particolare convergono.

<sup>5</sup>Il procedimento adottato per trovare questa sottosuccessione è molto simile a quello usato nel Teorema di Ascoli Arzelà (vedi Analisi 2)

*Non compatto*) Consideriamo ora il ricoprimento  $\{B(x, \frac{1}{2})\}_{x \in X}$ , il quale, per come è fatta la distanza, è il ricoprimento dato dai singoletti. Dato che  $X$  è infinito, non possiamo estrarre un sottoricoprimento finito perché dobbiamo includere ogni singoletto per coprire.  $\square$

**Esempio 2.402** (Ricoprimento senza numero di Lebesgue).

Consideriamo  $X = \mathbb{R}$  e  $\Omega = \{B(x, \frac{1}{x^2+1}) \mid x \in \mathbb{R}\}$ . Chiaramente  $\Omega$  è un ricoprimento aperto di  $X$  perché ho una palla per ogni punto, ma per  $|x| \rightarrow \infty$  si ha che il raggio delle palle diminuisce quindi se  $\varepsilon$  fosse un ipotetico numero di Lebesgue possiamo trovare un elemento del ricoprimento che non contiene alcuna palla di raggio  $\varepsilon$  spostandoci abbastanza.

**Esempio 2.403** (Funzione continua non estendibile alla chiusura del dominio).

Siano  $X = Y = \mathbb{R}$ ,  $A = (0, +\infty)$  e  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Osserviamo che non possiamo estendere  $f$  a  $[0, +\infty)$  in modo continuo, infatti porre  $f(0) \in \mathbb{R}$  creerebbe una discontinuità in 0.

**Esempio 2.404** (Funzione continua ma non uniformemente continua).

Sia  $X = (0, +\infty)$  e definiamo  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x) = x^2$ . Affermiamo che  $f$  è continua ma non uniformemente continua.

*Dimostrazione.*

È evidentemente continua.

Osserviamo che

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y||x + y|,$$

quindi

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \iff |x - y| < \frac{\varepsilon}{x + y}.$$

Supponiamo che  $\delta$  sia una valida costante per la continuità uniforme e consideriamo  $y = x + \frac{\delta}{2}$ . Chiaramente

$$|y - x| = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

ma osserviamo che per  $x \rightarrow \infty$  si ha che  $\frac{\varepsilon}{x+y} = \frac{\varepsilon}{2x+\delta/2} \rightarrow 0$ , in particolare esiste  $x$  tale che  $\frac{\varepsilon}{x+y} < \frac{\delta}{2}$ . Se  $f$  fosse uniformemente continua dovremmo avere

$$\frac{\delta}{2} = |y - x| < \frac{\varepsilon}{x + y} < \frac{\delta}{2},$$

che è assurdo.  $\nexists$

$\square$

## Quozienti

**Esempio 2.405** (Identificazione né aperta né chiusa).

Sia  $X = \{(x, y) \mid x \geq 0\} \cup \{(x, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$  e consideriamo la mappa

$$\pi : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array}.$$

Osservo che  $\pi$  non è né aperta né chiusa, per esempio  $B((0, 1), \frac{1}{2})$  è aperto in  $X$  ma la sua immagine tramite  $\pi$  è  $[0, \frac{1}{2})$  che non è aperto. Similmente l'immagine di  $\{(x, y) \mid xy = 1\}$ , che è un chiuso, è  $(0, +\infty)$  che non è chiusa.



Ma  $\pi$  è una identificazione: è chiaramente surgettiva e in quanto restrizione di una proiezione di  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  si ha che  $\pi$  è continua. Se  $C \subseteq \mathbb{R}$  è tale che  $\pi^{-1}(C)$  è chiuso in  $X$  osserviamo che  $C$  è chiuso per successione, che in uno spazio metrico è equivalente ad essere chiuso. Infatti se  $\{x_n\}$  è una successione a valori in  $C$  convergente in  $\mathbb{R}$  ( $x_n \rightarrow \bar{x}$ ) considero  $(x_n, 0) \in \pi^{-1}(C)$ . Dato che  $\pi^{-1}(C)$  è chiuso e  $(x_n, 0) \rightarrow (\bar{x}, 0)$  si deve avere che  $(\bar{x}, 0) \in \pi^{-1}(C)$  e quindi  $\bar{x} \in C$ .

**Esempio 2.406** (Proiezione a quoziente per azione non chiusa).  
Considerando l'azione  $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$  data dalla traslazione si ha che

$$\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

non è una mappa chiusa.

*Dimostrazione.*

Consideriamo la successione  $x_n = n + 2^{-n}$ . Osserviamo che  $\{x_n\}$  è chiuso come sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  (sono tutti punti isolati), ma  $\{[x_n]\}$  non è chiuso in  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , infatti

$$\pi(x_n) = \pi(n + 2^{-n}) = \pi(2^{-n})$$

e per continuità di  $\pi$  si ha che  $2^{-n} \rightarrow 0$  implica  $\pi(2^{-n}) \rightarrow \pi(0)$ , eppure  $\pi(0) \neq \pi(x_n)$  per ogni  $n$ , quindi abbiamo trovato un punto di accumulazione che non appartiene al supporto di  $\pi(x_n)$  e per l'inclusione della chiusura per successione nella chiusura (2.99) si ha che  $\pi(0) \in \overline{\{\pi(x_n)\}} \setminus \{\pi(x_n)\}$ .  $\square$

**Esempio 2.407** ( $\mathbb{R}$  quoziente  $\mathbb{Q}$ ).

Consideriamo l'azione  $\mathbb{Q} \curvearrowright \mathbb{R}$  di traslazione. Si ha che  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$  non è  $T_1$ .

*Dimostrazione.*

Per la caratterizzazione (2.141) basta mostrare che per  $[x_0] \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$  si ha  $\pi^{-1}([x_0])$  non chiuso in  $\mathbb{R}$ . Infatti  $\pi^{-1}([x_0]) = x_0 + \mathbb{Q}$ , che è denso in  $\mathbb{R}$  ma diverso da  $\mathbb{R}$  stesso. In particolare non è chiuso.  $\square$

**Esempio 2.408** ( $M(2, \mathbb{R})$  quoziente similitudine).

Consideriamo lo spazio delle matrici  $X = M(2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$  e definiamo l'azione di  $GL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright X$  come

$$\ell_P(A) = PAP^{-1}.$$

Si ha che  $X/GL(2, \mathbb{R})$  non è  $T_1$ .

*Dimostrazione.*

Consideriamo la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Osserviamo che nella sua orbita per l'azione troviamo  $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  (coniugando per  $\begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-2} \end{pmatrix}$ ) per ogni  $\varepsilon \neq 0$ , ma non  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  (coniugare non cambia il rango).

Dato che  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  è un punto di accumulazione per l'insieme  $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  si ha che l'orbita non può essere chiusa, dunque per (2.141) lo spazio non è  $T_1$ .  $\square$

**Esempio 2.409** (Spazio localmente euclideo ma non  $T_2$ ).

Lo spazio quoziente definito da  $X = \mathbb{R} \times \{1, -1\}$  con la relazione  $(x, \varepsilon) \sim (y, \varepsilon') \iff x = y \neq 0$  oppure  $(x, \varepsilon) = (y, \varepsilon')$ , è localmente euclideo ma non  $T_2$ . Questo spazio si chiama **retta con due origini**.

*Dimostrazione.*

Sia  $Y$  lo spazio quoziente. Affermiamo che

$$i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & [x, 1] \end{array}$$

è una immersione topologica. Siccome è continua (composizione di continue) basta esibire  $J : Y \rightarrow \mathbb{R}$  continua tale che  $J \circ i = id_{\mathbb{R}}$ , e una tale  $J$  si può definire come segue:

$$J : \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ [x, \varepsilon] & \longmapsto & x \end{array} .$$

Questo mostra che ogni punto di  $i(\mathbb{R}) = Y \setminus \{[0, -1]\}$  è contenuto in un insieme omeomorfo a  $\mathbb{R}$  (questo è  $i(\mathbb{R})$ ). Per coprire  $[0, -1]$  basta costruire  $i'(x) = [x, -1]$  in modo analogo a  $i$ .

Affermiamo che  $Y \setminus \{[0, -1]\}$  (e simmetricamente  $Y \setminus \{[0, 1]\}$ ) è aperto e localmente  $\mathbb{R}$ , infatti sappiamo che  $\{[0, -1]\}$  è chiuso in quanto la sua saturazione/preimmagine è un chiuso ( $\{(0, -1)\} \subseteq \mathbb{R} \times \{\pm 1\}$ ).

Mostriamo ora che  $Y$  non è  $T_2$ . Siano  $U_1$  e  $U_{-1}$  intorni aperti di  $[(0, 1)]$  e  $[(0, -1)]$  rispettivamente. Per definizione di topologia quoziente  $V_1 = \pi^{-1}(U_1)$  e  $V_{-1} = \pi^{-1}(U_{-1})$  sono aperti saturi di  $\mathbb{R} \times \{\pm 1\}$  che contengono  $(0, 1)$  e  $(0, -1)$ .

Per come è fatta la topologia di  $\mathbb{R} \times \{\pm 1\}$  sappiamo che esistono  $\varepsilon, \varepsilon' > 0$  tali che  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \{1\} \subseteq V_1$  e  $(-\varepsilon', \varepsilon') \times \{-1\} \subseteq V_{-1}$ , ma allora  $U_1$  e  $U_{-1}$  si intersecano, per esempio in  $[(\min\{\varepsilon, \varepsilon'\}, 1)] = [(\min\{\varepsilon, \varepsilon'\}, -1)]$ .  $\square$

## Capitolo 3

# Teoria dell'omotopia e Rivestimenti

Avendo definito diverse nozioni basilari di topologia possiamo cominciare a porci seriamente il problema di classificare spazi a meno di omeomorfismo. Purtroppo capire se spazi diversi sono o meno omeomorfi è molto difficile in generale. In questo capitolo definiamo una teoria che ci aiuterà in alcuni casi a distinguere spazi non omeomorfi: la teoria dell'omotopia.

Vedremo che spazi omotopicamente equivalenti sono omeomorfi, quindi se riusciamo a mostrare che spazi non sono omotopicamente equivalenti avremo mostrato che non sono omeomorfi. L'idea dell'omotopia è quella di una deformazione continua *nel tempo* (vedremo il significato rigoroso in seguito). La relazione di equivalenza omotopica è molto più lasca di quella di omeomorfismo e questo ci permette di estrarre proprietà più grezze e (di solito) più facilmente calcolabili.

Uno dei maggiori strumenti che svilupperemo in questo capitolo è il gruppo fondamentale, il quale ci informa sulla struttura dei cammini chiusi lungo le componenti connesse di uno spazio. Lo studio di caratteristiche di dimensione più alta è oggetto dei corsi di topologia algebrica.

Concluderemo il capitolo studiando i rivestimenti, le loro proprietà categoriche e i risultati che forniscono circa il sollevamento di cammini/omotopie e il calcolo di alcuni gruppi fondamentali.

### 3.1 La categoria $\mathbf{hTop}$

Prima di poter parlare di spazi "omotopi", dobbiamo definire una omotopia. L'idea dell'omotopia è quella di trasformare gradualmente una mappa in un'altra, in questo modo le immagini verranno gradualmente trasformate l'una nell'altra. Visivamente questo tipo di trasformazione è una deformazione continua dell'immagine. Per definire l'equivalenza omotopica sfrutteremo questa intuizione trasformando la mappa identità nella deformazione desiderata.

**Definizione 3.1** (Omotopia).

Siano  $f, g : X \rightarrow Y$  funzioni continue. Una **omotopia** tra  $f$  e  $g$  è una funzione

continua

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

tale che

- $H(x, 0) = f(x)$
- $H(x, 1) = g(x)$

*Osservazione 3.2.*

Stiamo definendo una famiglia di funzioni  $H_t = H(\cdot, t) : X \rightarrow Y$  che possiamo interpretare come “snapshot” di una trasformazione continua di  $f$  in  $g$ .

**Notazione 3.3.**

Se esiste una omotopia tra  $f$  e  $g$  scriviamo<sup>1</sup>  $f \simeq g$  e diciamo che  $f$  e  $g$  sono mappe **omotope**.

**Proposizione 3.4** (Omotopia è relazione di equivalenza).

*La relazione  $f \sim g \iff f \simeq g$  è una relazione di equivalenza sull'insieme delle funzioni continue da  $X$  a  $Y$ .*

*Dimostrazione.*

*Riflessiva*)  $H(x, t) = f(x)$  è una omotopia da  $f$  a  $f$ .

*Simmetrica*) Se  $H$  è una omotopia da  $f$  a  $g$  allora

$$H'(x, t) = H(x, 1 - t)$$

è una omotopia da  $g$  a  $f$ .

*Transitiva*) Sia  $H^1$  una omotopia da  $f$  a  $g$  e sia  $H^2$  una omotopia da  $g$  a  $h$ , allora

$$H(x, t) = \begin{cases} H^1(x, 2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ H^2(x, 2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

è continua perché  $\{X \times [0, \frac{1}{2}], X \times [\frac{1}{2}, 1]\}$  è un ricoprimento chiuso finito di  $X \times [0, 1]$ , quindi è fondamentale (2.178) e  $H$  è continua su ogni pezzo e sull'intersezione  $H(x, \frac{1}{2}) = H^1(x, 1) = H^2(x, 0) = g(x)$ . Abbiamo quindi definito una omotopia da  $f$  a  $h$ .  $\square$

**Notazione 3.5.**

Se  $C(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ continue}\}$  allora poniamo

$$[X, Y] = C(X, Y) / \simeq$$

e data  $f \in C(X, Y)$  indichiamo la sua classe in  $[X, Y]$  con  $[f]$  o  $[f]_{\simeq}$  se si presenta ambiguità.

**Proposizione 3.6** (Composizione passa alla relazione di omotopia).

*Siano  $X, Y, Z$  spazi topologici. Se  $f, f' : X \rightarrow Y$  e  $g, g' : Y \rightarrow Z$  sono mappe continue tali che  $f \simeq f'$  e  $g \simeq g'$  allora*

$$g \circ f \simeq g' \circ f'.$$

<sup>1</sup>I professori usano la notazione  $f \sim g$ , ma data l'abbondanza di relazioni di equivalenza in questo corso, e dato che la notazione  $\simeq$  è usata in alcuni libri, l'ho preferita per evitare ambiguità nel lettore (e per gusto personale).

*Dimostrazione.*

Sia  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  una omotopia tra  $f$  e  $f'$  e sia  $K : Y \times [0, 1] \rightarrow Z$  una omotopia tra  $g$  e  $g'$ . Definiamo

$$\tilde{H}(x, t) = K(H(x, t), t)$$

e verifichiamo che è una omotopia tra le composizioni della tesi:

- $\tilde{H}$  è continua perché composizione di continue
- $\tilde{H}(x, 0) = K(H(x, 0), 0) = g(f(x))$
- $\tilde{H}(x, 1) = K(H(x, 1), 1) = g'(f'(x))$ .

□

Grazie a queste proprietà possiamo dare la definizione degli isomorfismi tra spazi equivalenti per omotopia:

**Definizione 3.7** (Inversa omotopica e Equivalenza omotopica).

Sia  $f : X \rightarrow Y$  continua. Una **inversa omotopica** di  $f$  è una mappa  $g : Y \rightarrow X$  continua tale che

$$g \circ f \simeq id_X \quad f \circ g \simeq id_Y.$$

Se  $f$  ammette inversa omotopica diremo che  $f$  è una **equivalenza omotopica** e che  $X$  e  $Y$  sono **omotopicamente equivalenti**.

*Osservazione 3.8.*

Spazi omeomorfi sono omotopicamente equivalenti.

**Notazione 3.9.**

Se  $X$  e  $Y$  sono omotopicamente equivalenti scriviamo

$$X \simeq Y.$$

**Proposizione 3.10** (Equivalenza omotopica è una equivalenza).

La relazione  $X \sim Y \iff X \simeq Y$  è una relazione di equivalenza.

*Dimostrazione.*

Riflessiva)  $X$  è omeomorfo a  $X$ , quindi a maggior ragione vi è omotopicamente equivalente.

Simmetrica) Se  $f$  è una equivalenza omotopica da  $X$  a  $Y$  allora ammette una inversa omotopica  $g : Y \rightarrow X$ . Per concludere basta osservare che  $f$  è una inversa omotopica di  $g$ .

Transitiva) Siano  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow X$  inverse omotopiche e siano  $h : Y \rightarrow Z$  e  $k : Z \rightarrow Y$  inverse omotopiche. Per concludere basta mostrare che  $h \circ f$  e  $g \circ k$  inverse omotopiche.

$$g \circ \underbrace{k \circ h}_{\simeq id_Y} \circ f \simeq g \circ id_Y \circ f \simeq id_X,$$

dove la prima omotopia segue dal fatto che la composizione di mappe omotope restituisce mappe omotope (3.6). L'altra composizione si fa allo stesso modo.

□

Riassumendo, abbiamo definito la categoria  $hTop$ , ovvero la categoria i cui oggetti sono spazi topologici e le cui frecce sono mappe continue considerate a meno di omotopia. In questa categoria gli isomorfismi sono detti equivalenze omotopiche.

### 3.1.1 Le omotopie passano al quoziente

**Proposizione 3.11.**

Sia  $f : X \rightarrow Y$  un'identificazione e  $Z$  uno spazio localmente compatto, allora la funzione

$$H : \begin{array}{ccc} X \times Z & \longrightarrow & Y \times Z \\ (x, t) & \longmapsto & (f(x), t) \end{array}$$

è un'identificazione.

*Dimostrazione.*

Osserviamo che  $H$  è continua perché continua in ogni componente e surgettiva perché  $f$  surgettiva.

Per verificare la definizione di identificazione è dunque sufficiente mostrare che  $H^{-1}(A)$  aperto implica  $A$  aperto per ogni  $A \subseteq Y \times Z$ . Mostriamo sotto questa ipotesi che  $A$  è intorno di ogni suo punto. Sia dunque  $(y, z) \in A$  e sia  $x \in X$  tale che  $f(x) = y$  (che possiamo fare per surgettività di  $f$ ).

Per definizione di topologia prodotto e locale compattezza esistono  $U_1$  intorno di  $x$  e  $\bar{V}$  intorno compatto di  $z$  tali che  $U_1 \times \bar{V} \subseteq H^{-1}(A)$ .

Per mostrare la tesi al posto di  $U_1$  avremmo bisogno di un aperto saturo, in modo che applicando  $H$  troveremmo un prodotto di aperti contenuti in  $A$ .

Osserviamo che

$$H^{-1}(H(U_1 \times \bar{V})) = f^{-1}(f(U_1)) \times \bar{V} \subseteq H^{-1}(H(H^{-1}(A))) = H^{-1}(A).$$

Per il teorema di Wallace (2.250)<sup>2</sup> si ha che per ogni punto  $u_1 \in f^{-1}(f(U_1))$  esiste un intorno  $W_{u_1}$  tale che  $\{u_1\} \times \bar{V} \subseteq W_{u_1} \times \bar{V} \subseteq H^{-1}(A)$ . Definiamo dunque

$$U_2 = \bigcup_{u_1 \in f^{-1}(f(U_1))} W_{u_1}.$$

Reiterando questa costruzione definiamo  $U_i$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$  e infine poniamo  $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ . Per costruzione  $U$  è un aperto saturo e  $U \times \bar{V} \subseteq H^{-1}(A)$  come voluto.  $\square$

**Corollario 3.12** (Omotopie passano al quoziente).

Se  $\sim$  è una relazione di equivalenza su  $X$  e  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Z$  è una omotopia tale che  $x \sim y \implies H(x, t) = H(y, t)$  allora

$$\bar{H} : \begin{array}{ccc} X/\sim \times [0, 1] & \longrightarrow & Z \\ ([x], t) & \longmapsto & H(x, t) \end{array}$$

è un'omotopia.

*Dimostrazione.*

Osserviamo che  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  è una identificazione, quindi per la proposizione precedente  $\pi \times id$  è una identificazione ( $[0, 1]$  è chiaramente localmente compatto).

Sia  $A \subseteq Z$  aperto. Dato che  $\pi \times id$  è una identificazione,  $\bar{H}^{-1}(A)$  è aperto se e solo se  $(\pi \times id)^{-1}(\bar{H}^{-1}(A)) = H^{-1}(A)$  è aperto, ma questo insieme è aperto per continuità di  $H$ .  $\square$

---

<sup>2</sup> $\{u_1\} \subseteq X$  e  $\bar{V} \subseteq Z$  giocano il ruolo dei compatti e  $H^{-1}(A)$  dell'aperto

### 3.1.2 Funtore delle componenti connesse per archi

Ricordiamo che  $\pi_0$  è un funtore dalla categoria degli spazi topologici  $Top$  alla categoria degli insiemi  $Set$  (2.213), sappiamo cioè che

$$\pi_0(X) = \{\text{componenti connesse per archi di } X\}$$

è un insieme e che  $f : X \rightarrow Y$  continua induce una mappa  $f_* = \pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  ben definita. Vediamo che il funtore e le omotopie sono compatibili, cioè

**Teorema 3.13** (Mappe omotope inducono la stessa mappa nei  $\pi_0$ ).

*Se  $f, g : X \rightarrow Y$  sono mappe omotope allora inducono la stessa mappa  $f_* = g_* : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ .*

*Dimostrazione.*

Sia  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  una omotopia da  $f$  a  $g$ . Osserviamo che  $\gamma_x(t) = H(x, t)$  è un cammino in  $Y$  che unisce  $f(x)$  e  $g(x)$ , quindi in particolare

$$f_*([x]_{\pi_0(X)}) = [f(x)]_{\pi_0(Y)} = [g(x)]_{\pi_0(Y)} = g_*([x]_{\pi_0(X)}).$$

□

Il teorema può essere interpretato come la buona definizione del funtore  $\pi_0 : hTop \rightarrow Set$  per quanto riguarda le frecce. Una conseguenza immediata della funtorialità è il seguente

**Corollario 3.14.**

*Se  $X \simeq Y$  allora  $\pi_0(X)$  è in bigezione con  $\pi_0(Y)$ .*

*Dimostrazione.*

Se  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow X$  sono inverse omotopiche allora  $f_*$  e  $g_*$  sono inverse insiemistiche. Infatti

$$f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (id_Y)_* = id_{\pi_0(Y)},$$

dove abbiamo usato il teorema e il fatto che  $f \circ g \simeq id_Y$ . L'altra composizione segue in modo analogo. □

## 3.2 Gruppo fondamentale

In questa sezione definiamo l'oggetto più importante del capitolo, cioè il gruppo fondamentale.

### 3.2.1 Omotopia di cammini

**Notazione 3.15.**

Indichiamo l'insieme dei cammini da  $x_0$  a  $x_1$  in  $X$  come

$$\Omega(X, x_0, x_1).$$

Se  $X$  è chiaro dal contesto potremo ometterlo. Se  $x_0 = x_1$  potremo scrivere  $\Omega(X, x_0)$ , o addirittura  $\Omega(x_0)$ .

Un cammino tale che  $x_0 = x_1$  è detto **laccio** o **loop**.

Per lavorare bene coi cammini notiamo che non possiamo usare le omotopie “libere” definite precedentemente, infatti

*Osservazione 3.16.*

Un cammino  $\gamma$  è omotopo alla funzione costante  $x \mapsto \gamma(0)$ . In particolare cammini con un estremo in comune sono sempre omotopi.

*Dimostrazione.*

Osserviamo che  $H(s, t) = \gamma((1-t)s)$  è una omotopia della forma cercata.  $\square$

Per aggirare questo inconveniente diamo la seguente

**Definizione 3.17** (Omotopia di cammini).

Una **omotopia di cammini** (o **omotopia a estremi fissati**) fra  $\gamma_0, \gamma_1 \in \Omega(X, x_0, x_1)$  è una omotopia  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  tale che

1.  $H(x, 0) = \gamma_0(x)$  e  $H(x, 1) = \gamma_1(x)$
2.  $H(0, t) = x_0$  e  $H(1, t) = x_1$ , cioè  $H(\cdot, t) \in \Omega(X, x_0, x_1)$ .

**Proposizione 3.18.**

*Le omotopie di cammini inducono una relazione di equivalenza su  $\Omega(X, x_0, x_1)$ .*

*Dimostrazione.*

*Riflessiva*)  $H(x, t) = \gamma(x)$  è una omotopia a estremi fissati.

*Simmetrica*) Se  $H$  è una omotopia a estremi fissati da  $f$  a  $g$  allora  $\tilde{H}(x, t) = H(x, 1-t)$  è una omotopia a estremi fissati da  $g$  a  $f$ .

*Transitiva*) Se  $H$  è una omotopia a estremi fissati da  $\gamma_0$  a  $\gamma_1$  e  $K$  una da  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$  allora

$$\tilde{H}(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ K(x, 2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

è una omotopia a estremi fissati da  $\gamma_0$  a  $\gamma_2$ .  $\square$

**Notazione 3.19.**

Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono omotopi a estremi fissati scriviamo  $\gamma_1 \simeq \gamma_2$ .

Dato che cammini sono sempre omotopi a costanti per omotopie libere, con la notazione sopra intenderemo che esiste una omotopia a estremi fissi che porta l'uno nell'altro se non altrimenti specificato.

Se scriviamo che  $\gamma_1 \simeq \gamma_2$  in  $\Omega(X, x_0, x_1)$  allora intendiamo che sono omotopi a estremi fissati.

**Teorema 3.20.**

*Se  $\gamma_1 \simeq \gamma'_1$  in  $\Omega(x_0, x_1)$  e  $\gamma_2 \simeq \gamma'_2$  in  $\Omega(x_1, x_2)$ , allora  $\gamma_1 * \gamma_2 \simeq \gamma'_1 * \gamma'_2$  in  $\Omega(x_0, x_2)$ .*

*Dimostrazione.*

Se  $H$  è una omotopia di cammini tra  $\gamma_1$  e  $\gamma'_1$  e  $K$  una tra  $\gamma_2$  e  $\gamma'_2$  allora

$$H * K(s, t) = \begin{cases} H(2s, t) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ K(2s-1, t) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

è ben definita (in quanto  $H(1, t) = K(0, t) = x_1$ ) e continua. Osserviamo che  $H * K$  è una omotopia da  $\gamma_1 * \gamma_2$  a  $\gamma'_1 * \gamma'_2$ , e che  $H * K(0, t) = x_0$ ,  $H * K(1, t) = x_2$ , quindi è anche una omotopia di cammini.  $\square$



### 3.2.2 Gruppo Fondamentale

**Definizione 3.21** (Gruppo Fondamentale).

Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $x_0 \in X$ . Il **gruppo fondamentale** (o **primo gruppo di omotopia**) di  $X$  con **punto base**  $x_0 \in X$  è

$$\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0, x_0) / \simeq,$$

cioè l'insieme delle classi di equivalenza di lacci in  $X$  passanti per  $x_0$  per la relazione di omotopia a estremi fissati.

*Osservazione 3.22.*

$\pi_1(X, x_0)$  dipende solo dalla componente connessa per archi che contiene  $x_0$ .

Mostriamo che il gruppo fondamentale è effettivamente un gruppo con l'operazione di giunzione. Consideriamo prima il seguente lemma

**Lemma 3.23** (Riparametrizzazioni).

Sia  $j : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continua tale che  $j(0) = 0$  e  $j(1) = 1$ . Allora  $\alpha \simeq \alpha \circ j$  per ogni  $\alpha \in \Omega(X, x_0, x_1)$ .

*Dimostrazione.*

Consideriamo la mappa

$$H(s, t) = \alpha(ts + (1 - t)j(s)).$$

Osserviamo che è continua perché composizione di continue. Inoltre

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha \circ j(s), \\ H(s, 1) &= \alpha(s), \\ H(0, t) &= \alpha((1 - t)j(0)) = \alpha(0), \\ H(1, t) &= \alpha(t + (1 - t)j(1)) = \alpha(t + 1 - t) = \alpha(1), \end{aligned}$$

cioè  $H$  è una omotopia di cammini da  $\alpha \circ j$  a  $\alpha$ . □

**Teorema 3.24** (Il gruppo fondamentale è un gruppo).

Se  $*$  è la mappa indotta dalla giunzione in omotopia, si ha che

$$(\pi_1(X, x_0), *) \text{ è un gruppo.}$$

*Dimostrazione.*

*Chiusura per operazione*) Evidente.

*Associatività*) Dati  $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X, x_0)$ , vogliamo mostrare che

$$(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma).$$

Questo segue dal lemma 3.23 considerando  $j : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definita a tratti

$$j(t) = \begin{cases} t/2 & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ t - \frac{1}{4} & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ 2t - 1 & t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}.$$

Più precisamente  $\alpha * (\beta * \gamma) = ((\alpha * \beta) * \gamma) \circ j$ .

*Elemento Neutro*) Sia  $1 = [c_{x_0}]$ , dove  $c_{x_0} : [0, 1] \rightarrow X$  è il cammino costante  $c_{x_0}(t) = x_0$ . Mostriamo che dato  $\alpha \in \Omega(X, x_0)$  abbiamo  $\alpha * c_{x_0} \simeq \alpha \simeq c_{x_0} * \alpha$ .

Questo segue osservando che  $\alpha * c_{x_0}$  è una riparametrizzazione di  $\alpha$ , infatti  $\alpha * c_{x_0} = \alpha \circ j$  per

$$j(t) = \begin{cases} 2t & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Analogamente  $c_{x_0} * \alpha$  è una riparametrizzazione di  $\alpha$ .

Esistenza inversi Poniamo  $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ <sup>3</sup> e verifichiamo che  $\alpha * \bar{\alpha} \simeq c_{x_0} \simeq \bar{\alpha} * \alpha$ . Dato che  $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$ , basta verificare che  $\alpha * \bar{\alpha} \simeq c_{x_0}$ .

Definiamo la seguente mappa

$$H(s, t) = \begin{cases} \alpha(2s) & t \geq 2s \\ \alpha(t) & t \leq 2s \text{ e } t \leq 2-2s \\ \alpha(2-2s) & t \geq 2-2s \end{cases}$$

Osserviamo che  $H(s, 0) = \alpha(0) = x_0$  e che  $H(s, 1) = \begin{cases} \alpha(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \alpha(2-2s) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ ,  
cioè  $H(s, 1) = \alpha * \bar{\alpha}$ . Si ha che  $H$  è continua, infatti per  $t = 2s$  abbiamo  $\alpha(2s) = \alpha(t)$  e per  $t = 2-2s$  abbiamo  $\alpha(t) = \alpha(2-2s)$ . Per concludere che  $H$  è una omotopia di cammini basta notare che  $H(0, t) = \alpha(0) = x_0$  e  $H(1, t) = \alpha(2-2) = \alpha(0) = x_0$ .  $\square$

**Definizione 3.25** (Semplicemente connesso).

Uno spazio topologico  $X$  è **semplicemente connesso** se è connesso per archi e  $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$  per qualsiasi  $x_0 \in X$

### 3.2.3 Cammini chiusi come applicazioni dal cerchio

Per questa sezione poniamo

$$p : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & e^{2\pi i t} \end{array}$$

dove consideriamo  $S^1 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi)\} \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ .

*Osservazione 3.26.*

Esiste una corrispondenza biunivoca tra  $\Omega(X, x_0)$  e  $\{f : S^1 \rightarrow X \mid x_0 \in \text{Imm } f\}$

*Dimostrazione.*

Ricordiamo che  $[0, 1] / \sim \cong S^1$ . Data  $\alpha \in \Omega(x_0)$ , poiché  $\alpha(0) = \alpha(1)$ , abbiamo che  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  passa al quoziente  $[0, 1] / \sim \cong S^1 \rightarrow X$ . Dato che il quoziente topologico è un quoziente categorico (2.306), vale la proprietà universale, cioè esiste un'unica  $\hat{\alpha} : S^1 \rightarrow X$  tale che il diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{\alpha} & X \\ p \downarrow & \nearrow \hat{\alpha} & \\ S^1 & & \end{array}$$

<sup>3</sup>Preferisco  $\bar{\alpha}$  al posto di  $\alpha^{-1}$  perché  $\alpha^{-1}$  potrebbe riferirsi alla preimmagine del cammino.

Viceversa, data  $\hat{\alpha} : S^1 \rightarrow X$  continua con  $\hat{\alpha}(1) = x_0$ <sup>4</sup> si ha che  $\alpha = \hat{\alpha} \circ p \in \Omega(x_0)$ .  $\square$

Dalla definizione del gruppo fondamentale sospettiamo che questo ci permetta di determinare quando nello spazio sono presenti “buchi” (definizioni più precise saranno date dopo). La seguente proposizione comincia a far intravedere questo concetto in modo più formale:

**Proposizione 3.27** (Continua su bordo si estende se e solo se classe di omotopia banale).

*Dato  $\alpha \in \Omega(x_0)$ , si ha che*

$$[\alpha] = 1 \text{ in } \pi_1(X, x_0) \iff \hat{\alpha} \text{ si estende da } S^1 \text{ a } D^2.$$

*Dimostrazione.*

$\implies$ ) Sia  $[\alpha] = 1$ . Per definizione esiste una omotopia di cammini  $H$  tra  $\alpha$  e  $c_{x_0}$ . Possiamo collassare i tre lati dell’omotopia che non contengono  $\alpha$

$$[0, 1] \times [0, 1] \setminus \{0, 1\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{1\}$$

per ottenere un disco. Sia  $\hat{H}$  il passaggio di  $H$  al quoziente. Osserviamo che  $\hat{H}$  ristretta a  $\partial D^2 = S^1$  coincide con  $\hat{\alpha}$ , quindi  $\hat{H}$  è l’estensione di  $\hat{\alpha}$  a tutto  $D^2$ .

$\impliedby$ ) Supponiamo di avere a disposizione  $\hat{H} : D^2 \rightarrow X$  continua tale che  $\hat{H}|_{S^1} = \hat{\alpha}$ . Sia  $\pi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D^2$  l’identificazione già menzionata al punto precedente, cioè tale che  $\pi(s, 0) = e^{2\pi i s}$  e  $\pi(s, 1) = \pi(0, t) = \pi(1, t) = 1$ . Per concludere basta osservare che  $H = \hat{H} \circ \pi$  è un’omotopia di cammini tra  $\alpha$  e  $c_{x_0}$ .  $\square$

**Proposizione 3.28.**

*La corrispondenza  $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$  induce una mappa  $\psi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow [S^1, X]$  ben definita.*

*Dimostrazione.*

Vogliamo mostrare che se  $\alpha \simeq \beta$  con omotopia di cammini allora  $\hat{\alpha} \simeq \hat{\beta}$  con omotopia libera. Sia  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  una omotopia di cammini da  $\alpha$  a  $\beta$ .

Per trovare l’omotopia immaginiamo di identificare i lati opposti del rettangolo  $[0, 1]^2$  che corrispondono a  $x_0$  per ottenere un cilindro i cui bordi superiore e inferiore saranno  $\hat{\beta}$  e  $\hat{\alpha}$  rispettivamente.

Osserviamo che  $H(0, t) = H(1, t) = x_0$ . Segue che  $H$  induce

$$\bar{H} : [0, 1] \setminus \{0, 1\} \times [0, 1] \rightarrow X,$$

che a meno di omeomorfismo posso interpretare come

$$\tilde{H} : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X,$$

la quale è una omotopia da  $\hat{\alpha}$  a  $\hat{\beta}$ .  $\square$

<sup>4</sup>stiamo considerando  $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ , quindi 1 corrisponde a  $(1, 0)$  in  $\mathbb{R}^2$ .

**Lemma 3.29** (Cammini complementari sul bordo di convesso).

Sia  $D$  un sottoinsieme convesso di  $\mathbb{R}^2$  chiuso e limitato. Siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  due archi complementari su  $\partial D$  (che per le ipotesi è connesso per archi) che vanno da  $p$  a  $q$ , cioè  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ ,  $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = q$ ,  $\text{Imm } \gamma_1 \cap \text{Imm } \gamma_2 = \{p, q\}$  e hanno supporto nel bordo.

Allora  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono omotope a estremi fissi.

*Dimostrazione.*

Consideriamo  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$  data da  $H(s, t) = t\gamma_2(s) + (1-t)\gamma_1(s)$ . Chiaramente  $H$  è continua perché composizione di continue, ed è ben definita perché  $D$  è convesso. Osserviamo che  $H(0, t) = t\gamma_1(0) + (1-t)\gamma_2(0) = tp + (1-t)p = p$ , similmente  $H(1, t) = q$ ,  $H(s, 0) = \gamma_1(s)$  e  $H(s, 1) = \gamma_2(s)$ , quindi  $H$  è una omotopia a estremi fissati da  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$  in  $D$ .  $\square$

**Teorema 3.30** (Proprietà della corrispondenza tra  $\pi_1(X)$  e  $[S^1, X]$ ).

Valgono le seguenti affermazioni:

- Se  $X$  è connesso per archi la  $\psi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow [S^1, X]$  definita prima è surgettiva.
- $\psi(g) = \psi(h)$  se e solo se  $g$  e  $h$  sono coniugati in  $\pi_1(X, x_0)$ .

*Dimostrazione.*

★) Sia  $\gamma : S^1 \rightarrow X$  una mappa continua. Cerchiamo  $\alpha \in \Omega(x_0)$  tale che  $\psi([\alpha]) = [\gamma]$ , cioè tale che  $\hat{\alpha} \simeq \gamma$  con omotopia libera.

Poniamo  $\gamma(1) = x_1$ . Siccome  $X$  è connesso per archi esiste un cammino  $\delta : [0, 1] \rightarrow X$  tale che  $\delta(0) = x_0$  e  $\delta(1) = x_1$ . Sia  $\tilde{\gamma} \in \Omega(x_1)$  tale che  $\gamma = \hat{\tilde{\gamma}}$ , cioè

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(e^{2\pi it}).$$

Possiamo ora definire il loop cercato come  $\alpha = \delta * \tilde{\gamma} * \bar{\delta} \in \Omega(x_0)$ .

Mostriamo che  $\hat{\alpha} \simeq \gamma$ . L'idea è accorciare gradualmente  $\delta$  facendo avvicinare il primo estremo da  $x_0$  a  $x_1$ . Poniamo dunque

$$\delta_t(s) = \begin{cases} \delta(s) & s \in [0, t] \\ \delta(s) & s \in [t, 1] \end{cases},$$

cioè  $\delta_t$  sta fermo in  $\delta(t)$  fino al tempo  $t$  e poi prosegue da lì in poi come faceva  $\delta$ . Osserviamo che  $\delta_0 = \delta$  e  $\delta_1 = c_{x_1}$  è la mappa costante a  $x_1$ . Poniamo

$$H(s, t) = (\delta_t * \tilde{\gamma} * \bar{\delta}_t)(s).$$

Chiaramente  $H$  è continua. Osserviamo che  $H(s, 0) = \delta * \tilde{\gamma} * \bar{\delta} = \alpha(s)$  e  $H(s, 1) = c_{x_1} * \tilde{\gamma} * c_{x_1} \simeq \tilde{\gamma}$ , dove questa omotopia deriva dal fatto che questi cammini sono riparametrizzazioni l'uno dell'altro (3.23).

Dato che  $H(0, t) = \delta(t) = H(1, t)$  si ha che  $H$  induce un'omotopia

$$\bar{H} : [0, 1] / \{0, 1\} \times [0, 1] \rightarrow X,$$

che a sua volta induce per omeomorfismo una omotopia  $\hat{H} : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X$  tra  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\tilde{\gamma}} = \gamma$ , come volevamo.

★)  $\Leftarrow$ ) Supponiamo che  $g$  e  $h$  siano coniugati, cioè esistono  $\alpha, \delta \in \Omega(x_0)$  tali

che  $g = [\alpha]$ ,  $h = [\delta] * [\alpha] * [\delta]^{-1} = [\delta * \alpha * \bar{\delta}]$ . Vogliamo mostrare che  $\psi(g) = \psi(h)$ , cioè  $\widehat{\alpha} \simeq \widehat{\delta * \alpha * \bar{\delta}}$  con omotopia libera.

Come prima basta accorciare gradualmente  $\delta$ : definiamo  $\delta_t(s)$  come sopra e ponendo

$$H(s, t) = (\delta_t * \alpha * \bar{\delta}_t)(s)$$

induciamo una omotopia  $\widehat{H} : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X$  tra  $\widehat{\delta * \alpha * \bar{\delta}}$  e  $\widehat{\alpha}$ <sup>5</sup>.

$\implies$  ) Supponiamo che  $\psi(g) = \psi(h)$ , cioè che esistano  $\alpha, \beta \in \Omega(x_0)$  tali che  $g = [\alpha]$ ,  $h = [\beta]$  e  $\widehat{\alpha} \simeq \widehat{\beta}$  in  $[S^1, X]$ . Sia allora  $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X$  una omotopia libera da  $\widehat{\alpha}$  a  $\widehat{\beta}$ . Definiamo  $\widetilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  come

$$\widetilde{H}(s, t) = H(e^{2\pi i t}, t).$$

Osserviamo che  $\widetilde{H}(s, 0) = \alpha(s)$  e che  $\widetilde{H}(s, 1) = \beta$ . Se poniamo  $\delta(t) = \widetilde{H}(0, t) = \widetilde{H}(1, t)$ , osserviamo che  $\alpha$  e  $\delta * \beta * \bar{\delta}$  sono cammini complementari di  $\partial[0, 1] \times [0, 1]$  (bordo del dominio di  $\widetilde{H}$ ). Per il lemma (3.29) esiste una omotopia a estremi fissi tra  $\alpha$  e  $\delta * \beta * \bar{\delta}$ , quindi

$$[\alpha] = [\delta * \beta * \bar{\delta}] = [\delta] * [\beta] * [\delta]^{-1},$$

cioè  $g$  e  $h$  sono coniugati nel gruppo fondamentale. □

Riassumiamo i risultati ottenuti in questa sezione nella seguente

**Proposizione 3.31** (Corrispondenza tra omotopie di cammini in  $\Omega(X, x_0)$  e omotopie libere in  $[S^1, X]$ ).

*Valgono i seguenti fatti:*

- *C'è una corrispondenza biunivoca tra  $\Omega(X, x_0)$  e le funzioni continue da  $S^1$  a  $X$  tali che  $x_0$  appartiene all'immagine.*
- *Un loop corrisponde alla classe banale nel gruppo fondamentale se e solo se la sua mappa su  $S^1$  corrispondente si può estendere in modo continuo a tutto  $D^2$*
- *La corrispondenza sopra induce  $\psi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow [S^1, X]$  tale che*
  - *è costante sulle classi di coniugio del gruppo fondamentale e su classi diverse ha immagine diversa*
  - *Se  $X$  è connesso per archi allora è surgettiva.*

### 3.2.4 Funtorialità del gruppo fondamentale

Abbiamo visto come gli spazi topologici considerati con le funzioni continue formano una categoria. Se consideriamo gli spazi topologici fissando anche un punto, detto **punto base**, e consideriamo le mappe continue che mandano il punto base nel punto base troviamo un'altra categoria molto simile, che indichiamo con  $Top_*$ . Più formalmente

<sup>5</sup>Se può aiutare il lettore, stiamo facendo assumere a  $\delta * \alpha * \bar{\delta}$  il ruolo che prima aveva  $\alpha$  e ad  $\alpha$  il ruolo che prima aveva  $\delta * \gamma * \delta$

**Definizione 3.32** (Categoria degli spazi topologici puntati).

Definiamo  $Top_*$  come la categoria i cui oggetti sono coppie della forma  $(X, x_0)$  con  $X$  spazio topologico e  $x_0 \in X$ , e i cui morfismi sono mappe continue  $f : X \rightarrow Y$  che rispettano i punti base, cioè se  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  allora  $f$  è continua e  $f(x_0) = y_0$ .

Gli oggetti di  $Top_*$  sono detti **spazi topologici puntati** e i morfismi di  $Top_*$  sono detti **mappe continue puntate**.

*Osservazione 3.33.*

Se  $f : X \rightarrow Y$  continua manda  $x_0$  in  $y_0$  allora se  $\alpha \in \Omega(x_0)$  abbiamo che  $f \circ \alpha \in \Omega(y_0)$ .

Inoltre, se  $\alpha \simeq \beta$  come cammini allora  $f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$ , sempre come cammini (basta comporre l'omotopia con  $f$ ).

Quanto appena osservato ci dice che  $f : X \rightarrow Y$  induce una mappa

$$f_* : \begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, f(x_0)) \\ [\alpha] & \longmapsto & [f \circ \alpha] \end{array} .$$

**Proposizione 3.34** (Functor da  $Top_*$  a  $Grp$ ).

Consideriamo la seguente associazione:

$$\begin{aligned} (X, x_0) &\mapsto \pi_1(X, x_0) \\ f : X \rightarrow Y &\mapsto f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0) \end{aligned}$$

dove  $f_*$  indica la mappa indotta da  $f$  come sopra.

Si ha che questa associazione è un functor da  $Top_*$  a  $Grp$ , cioè

- $id_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$
- Se  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  continue tali che  $y_0 = f(x_0)$  e  $z_0 = g(y_0)$ , allora

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Z, z_0)$$

- $f_*$  è un omomorfismo di gruppi.

*Dimostrazione.*

★) Ovvio

★) Segue dal seguente calcolo

$$(g \circ f)_*([\alpha]) = [g \circ f \circ \alpha] = g_*([f \circ \alpha]) = g_* \circ f_*([\alpha]).$$

★) Siano  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ , si ha che

$$\begin{aligned} f_*([\alpha] * [\beta]) &= [f \circ (\alpha * \beta)] = \\ &= [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] = \\ &= [f \circ \alpha] * [f \circ \beta] = \\ &= f_*([\alpha]) * f_*([\beta]). \end{aligned}$$

□

**Corollario 3.35.**

Se  $f : X \rightarrow Y$  è un omeomorfismo allora  $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$  è un isomorfismo di gruppi.

Definiamo ora l'analogo delle omotopie su  $Top_*$ :

**Definizione 3.36** (Omotopia puntata).

Se  $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  sono continue e puntate definiamo una **omotopia puntata** da  $f$  a  $g$  una omotopia  $H$  da  $f$  a  $g$  tale che  $H_t(\cdot, t)$  è una mappa continua puntata da  $(X, x_0)$  a  $(Y, y_0)$ , cioè  $H(x_0, t) = y_0$  per ogni  $t \in [0, 1]$ .

**Proposizione 3.37** (Mappe omotope puntate inducono la stessa mappa sui gruppi fondamentali).

Siano  $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  mappe continue puntate omotope tramite una omotopia puntata  $H$ . Allora  $f_* = g_*$  come mappe da  $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ . Cerchiamo una omotopia a estremi fissi da  $f \circ \alpha$  a  $g \circ \alpha$ . Poniamo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] & \longrightarrow & Y \\ (s, t) & \longmapsto & H(\alpha(s), t) \end{array} .$$

Questa è una omotopia da  $f \circ \alpha$  a  $g \circ \alpha$  per costruzione, ed è a estremi fissi perché  $H$  è una omotopia puntata, infatti per ogni  $t \in [0, 1]$  abbiamo

$$\tilde{H}(0, t) = H(\alpha(0), t) = H(x_0, t) = H(\alpha(1), t) = \tilde{H}(1, t).$$

□

Abbiamo quindi mostrato che  $\pi_1$  è un funtore da  $hTop_*$  a  $Grp$ .

### 3.2.5 Dipendenze del gruppo fondamentale

**Teorema 3.38** (Il punto base determina  $\pi_1(X)$  a meno di isomorfismo).

Sia  $X$  connesso per archi e siano  $x_0, x_1 \in X$ . Ogni cammino  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  da  $x_0$  a  $x_1$  induce un isomorfismo di gruppi  $\gamma_\# : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ .

*Dimostrazione.*

Definiamo la mappa

$$\begin{array}{ccc} \Omega(X, x_1) & \longrightarrow & \Omega(X, x_0) \\ \alpha & \longmapsto & \gamma * \alpha * \bar{\gamma} \end{array} .$$

Osserviamo che questa mappa rispetta le omotopie di cammini, infatti

$$\alpha \simeq \beta \implies \gamma * \alpha \simeq \gamma * \beta \implies \gamma * \alpha * \bar{\gamma} \simeq \gamma * \beta * \bar{\gamma},$$

quindi è ben definita

$$\gamma_\# : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0).$$

Con il seguente conto si verifica che  $\gamma_\#$  è un omomorfismo di gruppi:

$$\gamma * \alpha * \beta * \bar{\gamma} \simeq \gamma * \alpha * \bar{\gamma} * \gamma * \beta * \bar{\gamma}.$$

Infine basta osservare che  $(\bar{\gamma})_\# = \gamma_\#^{-1}$ , da cui seguirà che  $\gamma_\#$  è un isomorfismo di gruppi:

$$\begin{aligned} \gamma_\#((\bar{\gamma})_\#([\alpha])) &= \gamma_\#([\bar{\gamma} * \alpha * \gamma]) = \\ &= [\gamma * \bar{\gamma} * \alpha * \gamma * \bar{\gamma}] = \\ &= [\gamma] * [\gamma]^{-1} * [\alpha] * [\gamma] * [\gamma]^{-1} = \\ &= [\alpha]. \end{aligned}$$

L'altra composizione è analoga.

□

*Osservazione 3.39.*

L'isomorfismo dipende dal cammino.

**Proposizione 3.40** (Mappa omotopa all'identità induce isomorfismo).

*Sia  $f : X \rightarrow X$  una mappa omotopa all'identità e sia  $x_0 \in X$ . Allora  $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, f(x_0))$  è un isomorfismo di gruppi.*

*Dimostrazione.*

Sia  $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$  una omotopia da  $id$  a  $f$  e poniamo  $\gamma(t) = H(x_0, t)$ , cioè  $\gamma$  è il cammino che segue  $x_0$  durante l'omotopia. Per concludere mostriamo che  $f_* = \gamma_{\#}^{-1}$  (in particolare  $f_*$  sarà un isomorfismo per (3.38)): dato  $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$  consideriamo

$$K(s, t) = H(\alpha(s), t).$$

Per il lemma sui cammini complementari (3.29) si ha che  $\gamma * f \circ \alpha \simeq \alpha * \gamma$ , quindi  $[\alpha] = \gamma_{\#}(f_*([\alpha]))$ , che è cioè che volevamo.  $\square$

**Corollario 3.41** (Invarianza omotopica).

*Sia  $f : X \rightarrow Y$  una equivalenza omotopica e sia  $x_0 \in X$ . Si ha che  $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$  è un isomorfismo. In particolare spazi omotopi hanno  $\pi_1$  isomorfo.*

*Dimostrazione.*

Sia  $g : Y \rightarrow X$  l'inversa omotopica e poniamo  $g_* : \pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \pi_1(X, g(f(x_0)))$ .

Osserviamo che  $g_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, g(f(x_0)))$  è un isomorfismo per la proposizione precedente, infatti  $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$  e  $g \circ f \simeq id$  per definizione di inverse omotopiche. Si ha dunque che  $f_*$  è iniettiva. Con un ragionamento simile, considerando  $f'_* : \pi_1(X, g(f(x_0))) \rightarrow \pi_1(Y, f(g(f(x_0))))$ , si trova che  $g_*$  è iniettiva.

Essendo  $g_* \circ f_*$  bigettiva, è in particolare surgettiva. Siccome  $g_*$  è iniettiva si deve avere che  $f_*$  è surgettiva, quindi  $f_*$  è sia iniettiva che surgettiva e sappiamo (3.34) che  $f_*$  è un omomorfismo, quindi  $f_*$  è un isomorfismo, come voluto.  $\square$

## 3.3 Spazi contraibili e retratti

### 3.3.1 Spazi contraibili

Studiamo la classe banale per equivalenza omotopica:

**Definizione 3.42** (Spazio contraibile).

Uno spazio  $X$  è **contraibile** se è omotopicamente equivalente ad un punto.

Uno degli esempi più comuni di spazi contraibili sono i seguenti:

**Definizione 3.43** (Insieme stellato).

Un insieme  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  è **stellato** rispetto a  $x_0 \in \Omega$  se

$$\forall x \in \Omega, [x, x_0] \subseteq \Omega,$$

dove  $[x, x_0] = \{tx + (1-t)x_0 \mid t \in [0, 1]\}$  indica il segmento con estremi  $x$  e  $x_0$ .



**Definizione 3.44** (Insieme Convesso).

Un insieme  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  è **convesso** se è stellato rispetto a ogni suo punto, cioè se

$$\forall x, y \in \Omega, [x, y] \subseteq \Omega.$$

*Osservazione 3.45.*

Ogni insieme convesso è stellato, ma non ogni insieme stellato è convesso.

*Osservazione 3.46.*

Un insieme stellato è connesso per archi, infatti ogni punto appartiene alla classe di  $x_0$  nel  $\pi_0$ .

**Proposizione 3.47** (Mappe a immagine in stellato).

Se  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  è stellato e  $X$  è uno spazio topologico qualsiasi allora tutte le mappe continue da  $X$  a  $\Omega$  sono omotope.

*Dimostrazione.*

Supponiamo che  $\Omega$  sia stellato rispetto a  $x_0 \in \Omega$ . Mostriamo che tutte le mappe continue  $f : X \rightarrow \Omega$  sono omotope alla mappa costante  $h(X) = \{x_0\}$ , così facendo avremo concluso dato  $\simeq$  è una relazione di equivalenza.

Vogliamo costruire una omotopia  $H : X \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  tale che  $H_0 = f$  e  $H_1 = h$ . Per definizione di insieme stellato sappiamo che per ogni  $\omega \in \Omega$  e per ogni  $t \in [0, 1]$  si ha  $tx_0 + (1 - t)\omega \in \Omega$ , definiamo dunque

$$H(x, t) = tx_0 + (1 - t)f(x).$$

Questa mappa è ben definita per quanto appena detto osservando che  $f(x) \in \Omega$ . Evidentemente abbiamo anche  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = x_0$ . Per concludere basta osservare che  $H$  è continua perché composizione di continue.  $\square$

**Corollario 3.48.**

*Gli insiemi stellati sono contraibili.*

*Dimostrazione.*

Sia  $p \in \Omega$  qualsiasi e poniamo  $X = \{p\}$ . Sia  $f : \Omega \rightarrow X$  l'unica mappa possibile e mostriamo che è una equivalenza omotopica:

Sia  $g : X \rightarrow \Omega$  una mappa qualsiasi. Chiaramente  $f \circ g : X \rightarrow X = id_X$  perché è l'unica mappa possibile. Consideriamo ora  $g \circ f : \Omega \rightarrow \Omega$ : siccome è una mappa a immagine in uno stellato, questa è omotopa ad una qualsiasi altra mappa  $\Omega \rightarrow \Omega$ , in particolare  $f \circ g \simeq id_\Omega$  come voluto.  $\square$

*Osservazione 3.49.*

Dato che  $\mathbb{R}^n$  è stellato rispetto a 0, esso è contraibile.

### 3.3.2 Retratti di Deformazione

Nel definire un “retrato” di  $X$  potremmo pensare alla seguente

**Definizione 3.50** (Retrato).

Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $Y \subseteq X$ .  $Y$  è un **retrato** di  $X$  se esiste una mappa  $r : X \rightarrow Y$  continua (detta **retrazione**) tale che  $r(y) = y$  per ogni  $y \in Y$ .

**Proposizione 3.51** (Proprietà dei retratti).

Sia  $Y \subseteq X$  un retratto e sia  $r : X \rightarrow Y$  una retrazione. Si ha che

- Se  $X$  è  $T_2$  allora  $Y$  è chiuso.
- Chiamando  $i : Y \hookrightarrow X$  l'inclusione si ha che  $i_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, y_0)$  è iniettiva.

*Dimostrazione.*

\*) Ricordiamo che se  $X$  è  $T_2$  allora la diagonale  $\Delta = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$  è un chiuso (2.142). Osserviamo che

$$Y = \{x \in X \mid id(x) = i(r(x))\} = h^{-1}(\Delta),$$

dove  $h(x) = (x, i(r(x)))$ . Dato che  $h$  è continua, abbiamo mostrato che  $Y$  è chiuso perché preimmagine di chiuso.

\*) Per definizione di retrazione  $r \circ i : Y \rightarrow Y$  è l'identità, perciò  $r_* \circ i_* = id$ , che è iniettiva, dunque necessariamente  $i_*$  è iniettiva.  $\square$

Purtroppo questa definizione non è molto significativa da sola, come ci mostra la seguente

*Osservazione 3.52.*

Ogni punto  $x_0 \in X$  è un retratto di  $X$ .

Le omotopie ci permettono di catturare meglio il concetto che volevamo descrivere:

**Definizione 3.53** (Retratto di deformazione).

Sia  $X$  uno spazio topologico e  $Y \subseteq X$ .  $Y$  è un **retratto di deformazione** di  $X$  se esiste una mappa  $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$  continua tale che

1.  $H(x, 0) = x$  per ogni  $x \in X$ ,
2.  $H(x, 1) \in Y$  per ogni  $x \in X$
3.  $H(y, t) = y$  per ogni  $y \in Y$  e per ogni  $t \in [0, 1]$ ,

chiediamo cioè che esista una omotopia tra  $id_X$  e una retrazione  $r : X \rightarrow Y$  che fissi  $Y$  ad ogni istante.

$H(\cdot, 1) : X \rightarrow Y \subseteq X$  è detta **retrazione di deformazione**.

*Osservazione 3.54.*

Se  $Y$  è un retratto di deformazione di  $X$  allora  $Y \simeq X$

*Dimostrazione.*

Sia  $r = H(\cdot, 1) : X \rightarrow Y$  una retrazione di deformazione e  $i : Y \rightarrow X$  l'inclusione. Mostriamo che sono inverse omotopiche:

Per definizione di retrazione

$$r \circ i = id_Y,$$

mentre

$$i \circ r \simeq id_X$$

tramite l'omotopia  $H$ .  $\square$

*Osservazione 3.55.*

Non tutti i retratti sono retratti di deformazione, infatti se  $\#\pi_0(X) > 1$  allora un punto è un retratto di  $X$  ma non un retratto di deformazione perché  $\#\pi_0(X) \neq \#\pi_0(\{pt.\}) = 1$  (3.14).

*Osservazione 3.56.*

$S^n$  è un retratto di deformazione di  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ .

*Dimostrazione.*

La mappa

$$H(x, t) = tx + (1 - t) \frac{1}{|x|} x$$

è una omotopia che rispetta la definizione di retratto di deformazione. □

## 3.4 Rivestimenti

### 3.4.1 Omeomorfismi locali

**Definizione 3.57** (Omeomorfismo Locale).

Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è un **omeomorfismo locale** se per ogni  $x \in X$  esiste un intorno aperto  $U$  di  $x$  tale che  $f(U)$  è aperto in  $Y$  e  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  è un omeomorfismo.

Le mappe  $s : f(U) \rightarrow U$  definite come  $f|_U^{-1}$  sono dette **sezioni** di  $f$ .

*Osservazione 3.58.*

Una mappa continua, iniettiva e aperta è un omeomorfismo locale.

*Dimostrazione.*

Osservo che  $f(X)$  è aperto in quanto  $f$  è una mappa aperta. Per iniettività,  $f : X \rightarrow f(X)$  è continua e bigettiva, inoltre è anche aperta per ipotesi, dunque  $f : X \rightarrow f(X)$  è un omeomorfismo. □

**Proposizione 3.59** (Omeomorfismo locale implica aperta).

Se  $f : X \rightarrow Y$  è un omeomorfismo locale allora  $f$  è una mappa aperta.

*Dimostrazione.*

Sia  $\Omega \subset X$  aperto e sia  $y \in f(\Omega)$ . Vogliamo mostrare che  $f(\Omega)$  è un intorno di  $y$ , così per la caratterizzazione (2.75) avremo  $f(\Omega)$  aperto.

Sia  $x \in \Omega$  tale che  $f(x) = y$ . Dalla definizione di omeomorfismo locale esiste  $x \in U \subseteq X$  aperto tale che  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  omeomorfismo. Osserviamo che  $U \cap \Omega$  è un aperto che contiene  $x$ . Dato che  $f|_U$  è un omeomorfismo,  $f(U \cap \Omega)$  è aperto in  $f(U)$ , il quale è esso stesso aperto in  $Y$  per definizione di omeomorfismo locale. Si ha dunque che  $f(U \cap \Omega)$  è aperto in  $Y$ . Dall'inclusione

$$y \in f(U \cap \Omega) \subseteq f(\Omega)$$

segue che  $f(\Omega)$  è un intorno di  $y$ , come voluto. □

*Osservazione 3.60.*

La restrizione di un omeomorfismo locale ad un aperto è un omeomorfismo locale.

*Dimostrazione.*

La restrizione di una mappa continua è continua e la restrizione di una mappa aperta ad un aperto è aperta. Se  $f : X \rightarrow Y$  è un omeomorfismo locale e  $U$  è aperto in  $X$  si ha che per ogni  $x \in X$ , se  $V$  è un aperto tale che  $f|_V : V \rightarrow f(V)$  è un omeomorfismo, si ha che  $f|_{V \cap U} : V \cap U \rightarrow f(V \cap U)$  continua ad essere un omeomorfismo, quindi  $f|_U$  è un omeomorfismo locale.  $\square$

### 3.4.2 Rivestimenti

**Definizione 3.61** (Rivestimento).

Una funzione continua  $p : E \rightarrow X$  è un **rivestimento** se

1.  $X$  è connesso<sup>6</sup>
2. Per ogni  $x \in X$  esiste un intorno  $U$  di  $x$  aperto, detto intorno **ben rivestito**, tale che

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} W_i,$$

dove per ogni  $i \in I$  abbiamo che  $W_i$  è aperto in  $E$  e che  $p|_{W_i} : W_i \rightarrow U$  è un omeomorfismo.

In questa definizione,  $X$  è detto **spazio base**, mentre  $E$  è detto **spazio totale**.

**Proposizione 3.62** (Rivestimento implica Omeomorfismo locale).

Se  $p : E \rightarrow X$  è un rivestimento allora è anche un omeomorfismo locale.

*Dimostrazione.*

Sia  $\tilde{x} \in E$  e consideriamo  $x = p(\tilde{x})$ . Sia  $U$  un intorno aperto ben rivestito di  $x$ , cioè

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} W_i.$$

Poiché  $\tilde{x} \in p^{-1}(U)$ , esiste un indice  $i_0 \in I$  tale che  $\tilde{x} \in W_{i_0}$ . Per ipotesi su  $U$  abbiamo che  $p(W_{i_0}) = U$  è aperto in  $X$  e per definizione di ricoprimento  $p|_{W_{i_0}} : W_{i_0} \rightarrow U$  è un omeomorfismo.  $\square$

**Definizione 3.63** (Fibra).

Se  $p : E \rightarrow X$  è un rivestimento e  $x_0 \in X$  chiamiamo  $p^{-1}(x_0) \subseteq E$  la **fibra** di  $x_0$ .<sup>7</sup>

**Teorema 3.64** (Teorema delle Fibre).

Sia  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento e siano  $x, y \in X$ . Si ha che  $|p^{-1}(x)| = |p^{-1}(y)|$ , cioè le fibre hanno cardinalità costante.

*Dimostrazione.*

Fissiamo  $x_0 \in X$  e poniamo

$$\Omega = \{x \in X \mid |p^{-1}(x)| = |p^{-1}(x_0)|\}.$$

<sup>6</sup>Questa condizione è negoziabile. Alcuni testi non la includono mentre altri la rafforzano.

<sup>7</sup>Spesso il termine fibra si riferisce alla preimmagine di un singoletto tramite *qualsiasi* funzione (non solo i rivestimenti), ma durante il corso è stato scelto di dare questa definizione più particolare e io la ripropongo.

Dato che  $X$  è connesso per definizione di rivestimento, se mostriamo che  $\Omega$  e  $\Omega^c = X \setminus \Omega$  sono aperti avremo che  $\Omega = X$  oppure  $\Omega = \emptyset$ , ma dato che  $x_0 \in \Omega$  si dovrà avere che  $\Omega = X$ .

$\Omega$  aperto) Sia  $x \in \Omega$  e mostriamo che  $\Omega$  è un intorno di  $x$ . Consideriamo un intorno aperto ben rivestito  $U$  di  $x$  in  $X$ , vale cioè

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} W_i \quad \text{con } p|_{W_i} : W_i \rightarrow U \text{ omeomorfismo per ogni } i \in I.$$

Un omeomorfismo è in particolare una mappa bigettiva, dunque per ogni  $z \in U$  si ha che  $|p^{-1}(z) \cap W_i| = 1$  per ogni  $i \in I$ . Segue che  $p^{-1}(z)$  è in bigezione con  $I$  tramite la corrispondenza  $i \mapsto p^{-1}(z) \cap W_i$  (ricordiamo che  $p^{-1}(z) \subseteq \bigsqcup W_i$ , quindi effettivamente la mappa è surgettiva).

Abbiamo quindi mostrato che per ogni  $z \in U$

$$|p^{-1}(z)| = |I| = |p^{-1}(x)| = |p^{-1}(x_0)|,$$

dove l'ultima uguaglianza è la definizione di  $x \in \Omega$ . Abbiamo dunque mostrato che  $x \in U \subseteq \Omega$  e quindi  $\Omega$  è intorno di  $x$  per ogni  $x \in \Omega$ .

$\Omega$  chiuso) Mostriamo che  $\Omega^c$  è un intorno di  $x$  per ogni  $x \in \Omega^c$ . Fissato  $x \in \Omega^c$  abbiamo che  $|p^{-1}(x)| \neq |p^{-1}(x_0)|$ . Per il ragionamento fatto sopra esiste un intorno aperto  $U$  di  $x$  tale che per ogni  $z \in U$

$$|p^{-1}(z)| = |p^{-1}(x)| \neq |p^{-1}(x_0)|,$$

dunque  $x \in U \subseteq \Omega^c$  come voluto.  $\square$

Il teorema ci permette di definire una quantità importate per i rivestimenti:

**Definizione 3.65** (Grado di un rivestimento).

Dato un rivestimento  $p : E \rightarrow X$ , chiamiamo **grado** del rivestimento la cardinalità di una qualsiasi fibra.

*Osservazione 3.66.*

Il teorema delle fibre (3.64) può essere riformulato in “Il grado è definito per ogni rivestimento”.

*Osservazione 3.67* (I rivestimenti sono surgettivi).

Se  $p : E \rightarrow X$  è un rivestimento e  $E \neq \emptyset$  allora  $p$  è surgettivo.

*Dimostrazione.*

Se  $E \neq \emptyset$  allora esiste  $\tilde{x} \in E$ . Sia  $x = p(\tilde{x})$ . La sua fibra non è vuota (in particolare contiene  $\tilde{x}$ ), dunque  $|p^{-1}(x)| \geq 1$ . Per il Teorema delle fibre (3.64) avremo  $|p^{-1}(z)| \geq 1$  per ogni  $z \in X$ . In particolare per ogni  $z \in X$  esiste  $\tilde{z} \in E$  tale che  $p(\tilde{z}) = z$ , cioè  $p$  è surgettiva.  $\square$

**Definizione 3.68** (Rivestimento banale).

Un rivestimento è **banale** se ha grado 1.

*Osservazione 3.69.*

Un rivestimento è un omeomorfismo locale surgettivo, ma non vale l'implicazione opposta.

**Esempio 3.70.**

La retta con doppia origine e  $(0, 5) \xrightarrow{t} S^1$   $\xrightarrow{e^{2\pi it}}$  sono omeomorfismi locali surgettivi ma non sono rivestimenti, per esempio perché il grado non è ben definito.

Concludiamo la sezione fornendo un modo per trovare rivestimenti

**Teorema 3.71** (Rivestimento da azione propriamente discontinua).

Sia  $G \curvearrowright X$  una azione propriamente discontinua tale che  $X/G$  sia connesso. Allora  $\pi : X \rightarrow X/G$  è un rivestimento.

*Dimostrazione.*

Sia  $x_0 \in X/G$  e sia  $\tilde{x} \in X$  un suo rappresentante. Per definizione di azione propriamente discontinua, esiste un intorno  $W$  di  $\tilde{x}$  aperto tale che  $gW \cap W = \emptyset$  per ogni  $g \in G \setminus \{1_G\}$ . Poniamo  $U = \pi(W)$ , il quale è aperto perché le proiezioni rispetto ad azioni sono aperte (2.344), e contiene  $x_0$  per la scelta di  $\tilde{x}$ . Mostriamo che  $U$  è ben rivestito.

★) Osserviamo che

$$\pi^{-1}(U) = \pi^{-1}(\pi(W)) = \bigcup_{g \in G} gW.$$

Poiché l'azione è propriamente discontinua  $gW \cap hW = g(W \cap g^{-1}hW) = g(\emptyset) = \emptyset$ , quindi

$$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{g \in G} gW.$$

★) Osserviamo che  $\pi|_{gW} : gW \rightarrow U$  è continua e aperta in quanto restrizione di una mappa continua e aperta ad un aperto. Per concludere dobbiamo mostrare che è bigettiva:

Iniettiva) Siano  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in gW$  tali che  $\pi(\tilde{x}_1) = \pi(\tilde{x}_2)$ . Per definizione della proiezione si deve avere che  $\tilde{x}_1 = h\tilde{x}_2$  per qualche  $h \in G$ . Si ha dunque che

$$gW \ni \tilde{x}_1 = h\tilde{x}_2 \in h(gW),$$

in particolare  $gW \cap hgW \neq \emptyset \implies h = 1_G$ , dunque  $\tilde{x}_1 = 1_G\tilde{x}_2 = \tilde{x}_2$ .

Surgettiva) Per definizione  $U = \pi(W) = \pi(gW)$  in quanto  $\pi$  identifica traslati.  $\square$

*Osservazione 3.72* (Grado rivestimenti derivanti da propriamente discontinue). Un'azione propriamente discontinua è libera, quindi le orbite sono in bigezione con  $G$ . Dato che le orbite corrispondono a fibre, il grado di un rivestimento ottenuto da una azione propriamente discontinua è  $|G|$ .

*Osservazione 3.73* (Rivestimento di proiettivi reali).

Consideriamo la proiezione che identifica gli antipodali

$$\pi : S^n \rightarrow S^n / \{\pm id\} \cong \mathbb{P}^n \mathbb{R}.$$

L'azione  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright S^n$  corrispondente è propriamente discontinua e come sappiamo  $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$  è connesso. Segue che l'identificazione antipodale è un rivestimento di grado 2 di  $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ .

### 3.4.3 Sollevamenti

I rivestimenti ci permettono di prendere funzioni a valori nello spazio base e di “sollevarle” a funzioni nello spazio totale. Questo ci permette di evidenziare differenze difficili da esplicitare nello spazio base.

**Definizione 3.74** (Sollevamento).

Sia  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento e sia  $f : Y \rightarrow X$  una funzione continua data. Un **sollevamento** di  $f$  è una funzione continua  $\tilde{f} : Y \rightarrow E$  tale che  $f = p \circ \tilde{f}$ , cioè fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

**Teorema 3.75** (Unicità del sollevamento).

Siano  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento e  $f : Y \rightarrow X$  funzione continua fissata con  $Y$  connesso. Se  $\tilde{f}_1$  e  $\tilde{f}_2$  sono due sollevamenti di  $f$  che coincidono in un punto allora  $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ .

*Dimostrazione.*

Poiché  $Y$  è connesso, basta mostrare che

$$\Omega = \{y \in Y \mid \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)\}$$

è sia chiuso che aperto (è non vuoto perché per ipotesi  $\tilde{f}_1$  e  $\tilde{f}_2$  coincidono in qualche punto).

$\Omega$  aperto Vogliamo mostrare che  $\Omega$  è intorno di ogni suo punto. Sia allora  $y \in \Omega$  tale che  $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y) = \tilde{x}$  e sia  $U$  un intorno aperto ben rivestito di  $\tilde{x} = p(\tilde{x}) = f(y)$ . Abbiamo cioè che

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} W_i.$$

Per costruzione esiste  $i_0 \in I$  tale che  $\tilde{x} \in W_{i_0}$ . Per continuità di  $\tilde{f}_1$  e  $\tilde{f}_2$  abbiamo che

$$V = \tilde{f}_1^{-1}(W_{i_0}) \cap \tilde{f}_2^{-1}(W_{i_0}) \ni y$$

è un intorno aperto di  $y$  in  $Y$  tale che  $\tilde{f}_1(V) \subseteq W_{i_0}$  e  $\tilde{f}_2(V) \subseteq W_{i_0}$ .

Per concludere basta mostrare che  $V \subseteq \Omega$ . Dato che  $p|_{W_{i_0}}$  è un omeomorfismo, è in particolare iniettiva, quindi per ogni  $z \in V$  abbiamo che

$$p(\tilde{f}_1(z)) = f(z) = p(\tilde{f}_2(z)) \implies \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z),$$

cioè  $z \in \Omega$ .

$\Omega$  chiuso Mostriamo che  $Y \setminus \Omega = \Omega^c$  è intorno di ogni suo punto. Sia  $y \in \Omega^c$ , cioè  $\tilde{f}_1(y) \neq \tilde{f}_2(y)$ . Dato che  $\tilde{f}_1(y)$  e  $\tilde{f}_2(y)$  appartengono alla fibra di  $\tilde{x} = f(y)$  tramite  $p$  si deve avere che se  $U$  è un intorno ben rivestito di  $\tilde{x}$ , e quindi

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} W_i,$$

allora  $\tilde{f}_1(y) \in W_{i_1}$  e  $\tilde{f}_2(y) \in W_{i_2}$  con  $i_1 \neq i_2$ .

Poniamo  $V = \tilde{f}_1^{-1}(W_{i_1}) \cap \tilde{f}_2^{-1}(W_{i_2})$ , il quale è un intorno aperto di  $y$  e mostriamo che  $V \subseteq \Omega^c$ . Per costruzione  $\tilde{f}_1(V) \subseteq W_{i_1}$  e  $\tilde{f}_2(V) \subseteq W_{i_2}$ , dunque

$$\tilde{f}_1(V) \cap \tilde{f}_2(V) \subseteq W_{i_1} \cap W_{i_2} = \emptyset,$$

cioè  $\tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z)$  per ogni  $z \in V$ , come cercato.  $\square$

**Teorema 3.76** (Esistenza e unicità del sollevamento dei cammini).

Sia  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  un cammino tale che  $\gamma(0) = x_0$  e sia  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento. Allora per ogni  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$  esiste un unico sollevamento  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow E$  di  $\gamma$  tale che  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ .

*Dimostrazione.*

Poiché  $[0, 1]$  è connesso, l'unicità segue dal teorema di unicità (3.75). Sia  $\mathcal{U}$  un ricoprimento di  $X$  composto da aperti ben rivestiti. Per continuità di  $\gamma$  abbiamo che  $\{\gamma^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$  è un ricoprimento aperto di  $[0, 1]$ . Poiché  $[0, 1]$  è un compatto di  $\mathbb{R}$ , il ricoprimento ammette numero di Lebesgue  $\varepsilon > 0$  (2.288). Scelto  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $\frac{1}{n} < \varepsilon$  si ha che per ogni  $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\left[ \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \subseteq \left( \frac{2k+1}{2n} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{2k+1}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \subseteq \gamma^{-1}(U_k)$$

per qualche  $U_k \in \mathcal{U}$ .

Fissato  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ , costruiamo  $\tilde{\gamma}$  definendo  $\tilde{\gamma}|_{[0, \frac{k+1}{n}]}$  progressivamente su  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ .

$k=0$ ) Per quanto detto  $\gamma([0, \frac{1}{n}]) \subseteq U_0$ . Per definizione di rivestimento, siccome  $U_0$  è stato scelto ben rivestito, si ha che

$$p^{-1}(U_0) = \bigsqcup_{i \in I} W_i.$$

Sia  $W'_0$  l'unico aperto  $W_i$  come sopra che contiene  $\tilde{x}_0$ . Sia  $s_0 : U_0 \rightarrow W'_0$  la sezione di  $p$  corrispondente a  $W'_0$ , cioè  $s_0 = p|_{W'_0}^{-1}$ . Poniamo

$$\tilde{\gamma} : \begin{array}{ccc} [0, \frac{1}{n}] & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & s_0 \circ \gamma|_{[0, \frac{1}{n}]}(t) \end{array} .$$

$k > 0$ ) Supponiamo di aver definito  $\tilde{\gamma}$  su  $[0, \frac{k}{n}]$ . Per come abbiamo definito  $n$  si ha che esiste un aperto ben rivestito  $U_k$  tale che  $\gamma([\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]) \subseteq U_k$ . Sia  $W'_k$  l'unico aperto nell'unione

$$p^{-1}(U_k) = \bigsqcup_{i \in I} W_i$$

tale che  $\tilde{\gamma}(\frac{k}{n}) \in W'_k$ . Definiamo  $s_k : U_k \rightarrow W'_k$  come la sezione di  $p$  adeguata e poniamo

$$\tilde{\gamma}|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]} : \begin{array}{ccc} [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & s_k \circ \gamma|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}(t) \end{array} .$$

Per concludere l'estensione di  $\tilde{\gamma}$  la aggiorniamo come segue:

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}|_{[0, \frac{k}{n}]} * \tilde{\gamma}|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]} .$$

Dopo  $n$  passi avremo definito  $\tilde{\gamma}$  continua tale che  $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ , come voluto.  $\square$



**Notazione 3.77.**

Se  $p : E \rightarrow X$  è un rivestimento,  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  è un cammino e  $\tilde{x}_0$  è un punto della fibra di  $\alpha(0)$  allora indichiamo con  $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}$  l'unico sollevamento di  $\alpha$  che parte da  $\tilde{x}_0$ .

**Teorema 3.78** (Sollevamento dell'omotopia).

Siano  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento,  $f : Y \rightarrow X$  continua,  $\tilde{f} : Y \rightarrow E$  un sollevamento di  $f$  e  $H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$  una omotopia tale che  $H(\cdot, 0) = f$ . Allora esiste un (unico) sollevamento  $\tilde{H} : Y \times [0, 1] \rightarrow E$  di  $H$  ( $p \circ \tilde{H} = H$ ) tale che  $\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{f}$ .

*Dimostrazione.*

Definiamo una mappa  $\tilde{H}$  su  $Y \times [0, 1]$  che fa commutare il diagramma di sollevamento e mostriamo che è continua.

Definisco  $\tilde{H}$  Dato  $y \in Y$  consideriamo  $\gamma_y : [0, 1] \rightarrow X$  definito da  $\gamma_y(t) = H(y, t)$ . Poiché  $p \circ \tilde{f} = f$ , il punto  $\tilde{f}(y)$  appartiene alla fibra di  $f(y) = \gamma_y(0)$ , dunque per l'esistenza e unicità del sollevamento di cammini (3.76) esiste un unico cammino  $\tilde{\gamma}_y : [0, 1] \rightarrow E$  sollevamento di  $\gamma_y$  tale che  $\tilde{\gamma}_y(0) = \tilde{f}(y)$ . Definiamo allora  $\tilde{H}$  nell'unico modo possibile:

$$\tilde{H}(y, t) = \tilde{\gamma}_y(t).$$

$\tilde{H}$  è continua) L'idea è simile a quella per il sollevamento di cammini: mostriamo che localmente  $\tilde{H} = s \circ H$  per  $s$  un'opportuna sezione di  $p$ .

Mostriamo che  $\tilde{H}$  è continua in ogni punto  $(y_0, t) \in Y \times [0, 1]$ , che darà la tesi per (2.77). Più propriamente mostreremo che è continua su un opportuno intorno di ogni punto.

Per ogni  $t \in [0, 1]$  considero un aperto ben rivestito di  $X$  contenente  $H(y_0, t)$ . La preimmagine di questo, per continuità di  $H$ , è un aperto di  $Y \times [0, 1]$  contenente  $(y_0, t)$ . Dato che i rettangoli sono una base per la topologia prodotto, esiste un intorno in  $Y \times [0, 1]$  di  $(y_0, t)$  della forma  $U_t \times V_t$  tale che  $U_t$  è un aperto di  $Y$  che contiene  $y_0$ ,  $V_t$  è un aperto di  $[0, 1]$  che contiene  $t$  e  $H(U_t \times V_t)$  è contenuto nell'aperto ben rivestito di partenza.

Osservando che

$$\{y_0\} \times [0, 1] \subseteq \bigcup_{t \in [0, 1]} U_t \times V_t,$$

per compattezza di  $\{y_0\} \times [0, 1] \cong [0, 1]$  si ha che esistono  $t_1, \dots, t_n$  tali che

$$\{y_0\} \times [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{t_i} \times V_{t_i}.$$

Ponendo  $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$  (aperto perché intersezione finita di aperti) si ha ancora che

$$\{y_0\} \times [0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n U \times V_{t_i}.$$

Dato che  $U \times V_t \subseteq U_t \times V_t$  abbiamo ancora che  $H(U \times V_t)$  finisce in un aperto ben rivestito.

Poiché  $\{V_{t_1}, \dots, V_{t_n}\}$  è un ricoprimento aperto di  $[0, 1]$ , che è compatto, questo ammette un numero di Lebesgue  $\varepsilon$  (2.288). Per un opportuno  $m \in \mathbb{N}$  si avrà che per ogni  $k \in \{0, \dots, m-1\}$  l'intervallo  $[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}]$  è incluso in una palla di raggio  $\varepsilon$  che è inclusa in un qualche  $V_{t_i}$ , quindi

$$U \times \left[ \frac{k}{m}, \frac{k+1}{m} \right] \subseteq U \times V_{t_i}$$

per qualche  $i \in \{1, \dots, n\}$ . In particolare  $H(U \times [\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}]) \subseteq Z_k$  con  $Z_k$  aperto ben rivestito di  $X$  (quello che avevamo scelto per  $\tilde{H}(y_0, t_i)$ ).

Per definizione di aperto ben rivestito si ha che

$$p^{-1}(Z_k) = \bigsqcup_{i \in I} W_i.$$

Osserviamo dunque che esiste un unico foglio  $W'_k$  tra questi tale che

$$\tilde{\gamma}_{y_0} \left( \frac{k}{m} \right) = H \left( y_0, \frac{k}{m} \right) \in W'_k.$$

Sia  $s_k : Z_k \rightarrow W'_k$  l'inversa locale di  $p$ .

Per mostrare che  $\tilde{H}$  è continua in  $(y_0, t_0)$  è sufficiente mostrare che  $\tilde{H}$  coincide con  $s_k \circ H$  (composizione di continue) su una opportuna restrizione di  $U \times [\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}]$  (che continua a contenere  $(y_0, t_0)$  per qualche  $k$ ) per ogni  $k \in \{0, \dots, m-1\}$ .

Procediamo per induzione su  $k$ :

$k=0$ ) Per costruzione  $\tilde{H}(y, 0) = \tilde{f}(y)$  per ogni  $y \in Y$ . Poiché  $\tilde{H}(y_0, 0) = \tilde{\gamma}_{y_0}(0) \in W'_0$  si ha che esiste un intorno aperto  $U_0 \subseteq U$  di  $y_0$  tale che  $\tilde{H}(U_0 \times \{0\}) \subseteq W'_0$  (per esempio  $U_0 = U \cap \tilde{f}^{-1}(W'_0)$ ). A questo punto per l'unicità del sollevamento di cammini (3.76) si ha che

$$s_0 \circ H|_{U_0 \times [0, \frac{1}{m}]} = \tilde{H}|_{U_0 \times [0, \frac{1}{m}]}$$

$k \implies k+1$ ) Per ipotesi induttiva  $g(y) = \tilde{H}(y, \frac{k}{m})$  è continua su  $U_{k-1}$ . Poiché  $\tilde{H}(y_0, \frac{k}{m}) = \tilde{\gamma}_{y_0}(\frac{k}{m}) \in W'_k$  si ha che esiste un intorno  $U_k \subseteq U$  di  $y_0$  tale che  $\tilde{H}(U_k \times \{\frac{k}{m}\}) \subseteq W'_k$  (per esempio  $U_k = U_{k-1} \cap g^{-1}(W'_k)$ ).

Per ogni  $y \in U_k$  si ha dunque che  $s_k \circ H(y, \frac{k}{m}) = \tilde{H}(y, \frac{k}{m})$ . Per l'unicità dei sollevamenti di cammini (3.76)  $\tilde{H} = s_k \circ H$  su  $U_k \times [\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}]$ .

Dato che stiamo considerando un numero finito di  $k$ , restringendo opportunamente gli aperti ad ogni passo, si ha che  $y_0 \in U_m$  e  $\tilde{H}|_{U_m \times [0, 1]}$  è continua, in particolare è continua in  $(y_0, t_0)$ .  $\square$

**Teorema 3.79** (Sollevamento delle omotopie di cammini).

Sia  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  un'omotopia di cammini da  $\alpha$  a  $\beta$  in  $\Omega(X, x_0, x_1)$ . Sia  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento e fissiamo  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ . Allora  $H$  si solleva ad una omotopia di cammini da  $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}$  a  $\tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}$ . In particolare se  $\alpha \simeq \beta$  come cammini allora  $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}$  e  $\tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}$  hanno lo stesso punto finale.

*Dimostrazione.*

Per il teorema sul sollevamento delle omotopie (3.78) possiamo sollevare  $H$  ad un'omotopia  $\tilde{H}$  tale che  $\tilde{H}(s, 0) = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(s)$ . Osserviamo che, per l'unicità del sollevamento dei cammini (3.76), siccome  $H(0, t)$  è il cammino costante a  $x_0$ , si deve avere che  $\tilde{H}(0, t)$  è il cammino costante a  $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(0) = \tilde{x}_0$ . Similmente  $\tilde{H}(1, t) = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(1)$ . Questo mostra che  $\tilde{H}$  è una omotopia a estremi fissi da  $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}$  ad un sollevamento di  $H(s, 1) = \beta(s)$  tale che  $\tilde{H}(0, 1) = \tilde{x}_0$ , cioè  $\tilde{H}(s, 1) = \beta_{\tilde{x}_0}$  come voluto.  $\square$

**Corollario 3.80** (Mappa sui  $\pi_1$  indotta da rivestimento).

Se  $p : E \rightarrow X$  è un rivestimento allora  $p_* : \pi_1(E, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  è iniettiva (abbiamo scelto  $\tilde{x}_0$  e  $x_0$  tali che  $p(\tilde{x}_0) = x_0$ ).

*Dimostrazione.*

Mostriamo che  $\ker p_* = \{[c_{\tilde{x}_0}]\}$ . Sia  $[\gamma] \in \pi_1(E, \tilde{x}_0)$  tale che  $p_*([\gamma]) = 1$ , cioè  $p \circ \gamma \simeq c_{x_0}$ . Per il teorema, una omotopia di cammini tra  $p \circ \gamma$  e  $c_{x_0}$  si solleva ad un'omotopia di cammini che da la seguente equivalenza

$$\gamma = \widetilde{(p \circ \gamma)}_{\tilde{x}_0} \simeq \widetilde{(c_{x_0})}_{\tilde{x}_0} = c_{\tilde{x}_0},$$

cioè  $[\gamma] = 1$  in  $\pi_1(E, \tilde{x}_0)$ .  $\square$

*Osservazione 3.81* (Il cerchio non è semplicemente connesso).

$\pi_1(S^1) \neq 0$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^1$  il loop dato da  $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ . Consideriamo il rivestimento  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dato da  $p(t) = e^{2\pi it}$ . Sollevando  $\gamma$  troviamo un cammino  $\tilde{\gamma}_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dato da  $\tilde{\gamma}_0(t) = t$ .

Supponiamo per assurdo che  $[\gamma] = 1$ , cioè che  $\gamma$  sia omotopo al cammino costante in  $S^1$ . In tal caso per il teorema sul sollevamento delle omotopie di cammini (3.79) si dovrebbe avere che  $\tilde{\gamma}_0$  è omotopo a estremi fissi al cammino costante (unico sollevamento del cammino costante). Eppure constatiamo che  $\tilde{\gamma}_0(1) = 1$ , mentre se fosse omotopo al cammino costante dovremmo avere  $\tilde{\gamma}_0(1) = 0$ .  $\neq$   $\square$

## 3.5 Azione di Monodromia

In questa sezione trattiamo una azione del gruppo fondamentale. Questa sarà una azione destra, cioè rispetta i soliti assiomi di una azione eccetto la seguente differenza nell'associatività:

$$\underbrace{(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g(h(x))}_{\text{azione sinistra}} \quad \underbrace{x \cdot (gh) = (x \cdot g) \cdot h = h(g(x))}_{\text{azione destra}}$$

**Definizione 3.82** (Azione di monodromia).

Sia  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento,  $x_0 \in X$  e sia  $F = p^{-1}(x_0)$  la fibra di  $x_0$ . Definiamo l'**azione di monodromia** di  $\pi_1(X, x_0)$  su  $F$  come segue:

$$\begin{aligned} F \times \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow F \\ (\tilde{x}, [\alpha]) &\longmapsto \tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1) \end{aligned}$$

**Proposizione 3.83.**

*L'azione di monodromia è una azione destra.*

*Dimostrazione.*

Buona definizione) Segue dal fatto che se  $\alpha \simeq \beta$  come lacci in  $x_0$  allora  $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1) = \tilde{\beta}_{\tilde{x}}(1)$  (3.79).

Neutro fissa) Ricordiamo che l'elemento neutro del gruppo fondamentale corrisponde alla classe del cammino costante  $[c_{x_0}]$ . Vediamo che

$$\tilde{x} \cdot [c_{x_0}] = \widetilde{(c_{x_0})}_{\tilde{x}}(1) = c_{\tilde{x}}(1) = \tilde{x}.$$

Composizione) Segue per calcolo:

$$\begin{aligned} \tilde{x} \cdot ([\alpha] * [\beta]) &= \tilde{x} \cdot [\alpha * \beta] = \widetilde{(\alpha * \beta)}_{\tilde{x}}(1) = \\ &= \tilde{\alpha}_{\tilde{x}} * \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1)}(1) = \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1)}(1) = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1) \cdot [\beta] = \\ &= (\tilde{x} \cdot [\alpha]) \cdot [\beta], \end{aligned}$$

dove per spezzare  $\widetilde{(\alpha * \beta)}_{\tilde{x}}(1)$  abbiamo usato l'unicità dei sollevamenti (3.75).  $\square$

**Teorema 3.84** (Proprietà dell'azione di monodromia).

Siano  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento,  $x_0 \in X$  e  $F = p^{-1}(x_0)$  la fibra di  $x_0$ . Si ha che

1. Se  $X$  è connesso per archi<sup>8</sup> l'azione di monodromia  $\pi_1(X, x_0) \curvearrowright F$  è transitiva se e solo se  $E$  è connesso per archi.
2. Per ogni  $\tilde{x} \in E$  si ha che

$$\text{stab}(\tilde{x}) = \{[\alpha] \in \pi_1(X, x_0) \mid \tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{x}\} = p_*(\pi_1(E, \tilde{x})).$$

*Dimostrazione.*

1)  $\Leftarrow$ ) Dati  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in F$ , siccome  $E$  è connesso per archi, esiste  $\tilde{\alpha} \in \Omega(E, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  cammino che li connette. Poniamo  $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$ . Siccome  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in F$  abbiamo che  $\alpha$  è un laccio su  $x_0$ . Per l'unicità dei sollevamenti di cammini (3.76) si ha  $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_1} = \tilde{\alpha}$ . Quindi,  $\tilde{x}_1 \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_1}(1) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_2$ , cioè l'azione è transitiva.

$\Rightarrow$ ) Siano  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$  punti di  $E$  e cerchiamo di connetterli. Poniamo  $p(\tilde{x}_1) = x_1$  e  $p(\tilde{x}_2) = x_2$ . Siccome  $X$  è connesso per archi, esiste un cammino  $\gamma_1$  da  $x_1$  a  $x_0$  in  $X$ , analogamente trovo un cammino da  $x_2$  a  $x_0$ . Solleviamo  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  in  $E$  partendo da  $\tilde{x}_1$  e  $\tilde{x}_2$  rispettivamente. Per costruzione  $\tilde{y}_1 = \tilde{\gamma}_{1\tilde{x}_1}(1)$ ,  $\tilde{y}_2 = \tilde{\gamma}_{2\tilde{x}_2}(1) \in F_{x_0}$ . Siccome l'azione è transitiva esiste  $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$  tale che  $\tilde{y}_1 \cdot [\alpha] = \tilde{y}_2$ , dunque il sollevamento  $\tilde{\alpha}_{\tilde{y}_1}$  è tale che  $\tilde{\alpha}_{\tilde{y}_1}(1) = \tilde{y}_2$ . Per concludere osserviamo che

$$\tilde{\gamma}_1 * \tilde{\alpha}_{\tilde{y}_1} * \widetilde{\gamma_2}$$

è un cammino in  $E$  da  $\tilde{x}_1$  a  $\tilde{x}_2$ .

2)  $\subseteq$ ) Sia  $[\alpha] \in \text{stab}(\tilde{x})$ , cioè  $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1) = \tilde{x}$ . Si ha dunque che  $[\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}] \in \pi_1(E, \tilde{x})$ . Per definizione di  $p_*$

$$p_*[\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}] = [p \circ \tilde{\alpha}_{\tilde{x}}] = [\alpha],$$

<sup>8</sup>La premessa sulla connessione per archi non è stata data a lezione ma è necessaria per la veridicità del risultato.

cioè  $[\alpha] \in p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))$ .

$\supseteq$ ) Sia  $g \in p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))$ , cioè  $g = p_*([\tilde{\alpha}]) = [p \circ \tilde{\alpha}]$  con  $\tilde{\alpha} \in \pi_1(E, \tilde{x})$ .

Poniamo  $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$ , allora  $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$  (gli estremi sono entrambi  $p(\tilde{x}) = x_0$ ), inoltre  $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}} = \tilde{\alpha}$  per unicità del sollevamento (3.76), dunque

$$\tilde{x} \cdot g = \tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}.$$

□

### Corollario 3.85.

Se  $X$  ammette rivestimento connesso non banale allora  $\pi_1(X, x_0) \neq \{1\}$  per ogni  $x_0 \in X$ , cioè  $X$  NON è semplicemente connesso.

*Dimostrazione.*

$\pi_1(X, x_0)$  deve agire transitivamente sulla fibra di  $x_0$ , che ha più di un punto, dunque deve esistere un elemento di  $\pi_1(X, x_0)$  diverso dall'identità che sposta un primo elemento della fibra in un altro. □

### Corollario 3.86.

Ogni rivestimento connesso di uno spazio semplicemente connesso è banale, cioè è un omeomorfismo.

### Corollario 3.87.

$S^1$  e  $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$  non sono semplicemente connessi.

*Dimostrazione.*

Hanno rivestimenti connessi non banali, l'elica e l'identificazione antipodale. □

## Sollevamento di mappe qualsiasi

Grazie alle proprietà dell'azione di monodromia possiamo dare una caratterizzazione esatta di quando le mappe ammettono sollevamento:

### Teorema 3.88 (Sollevamento di mappe qualsiasi).

Sia  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un rivestimento e fissiamo  $x_0 \in X$  e  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ . Sia  $f : Y \rightarrow X$  continua e  $y_0 \in Y$  tale che  $f(y_0) = x_0$ .

Supponiamo che  $Y$  sia connesso e localmente connesso per archi, allora

$$\exists! \tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X} \text{ t.c. } \tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0, p \circ \tilde{f} = f \iff f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \end{array}$$

*Dimostrazione.*

$\implies$ ) Supponiamo che  $\tilde{f}$  esista. Se  $f = p \circ \tilde{f}$  allora  $f_* = p_* \circ \tilde{f}_*$ , dunque

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_*(\tilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0))) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

$\impliedby$ ) Supponiamo che  $\tilde{f}$  esista. Per ogni  $y \in Y$  sia  $\gamma \in \Omega(Y, y_0, y)$ . Osserviamo che  $f \circ \gamma$  è un cammino in  $X$  da  $x_0$  a  $f(y)$ , inoltre  $\tilde{f} \circ \gamma$  è l'unico sollevamento di  $f \circ \gamma$  che parte da  $\tilde{x}_0$  (3.76). Si ha dunque che

$$\tilde{f}(y) = \tilde{f}(\gamma(1)) = \widetilde{(f \circ \gamma)}_{\tilde{x}_0}(1),$$

dove  $\widetilde{(f \circ \gamma)}_{\tilde{x}_0}$  è l'unico sollevamento di  $f \circ \gamma$  che parte da  $\tilde{x}_0$ .

Unicità) È l'unicità dei sollevamenti (3.75).

Esistenza) Dato ciò che abbiamo detto sull'unicità, diamo l'unica definizione possibile di  $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ :

per ogni  $y \in Y$  sia  $\gamma \in \Omega(Y, y_0, y)$  e sia  $\widetilde{(f \circ \gamma)}_{\tilde{x}_0}$  l'unico sollevamento di  $f \circ \gamma$  che parte da  $\tilde{x}_0$ . Poniamo  $\tilde{f}(y) = \widetilde{(f \circ \gamma)}_{\tilde{x}_0}(1)$ .

Buona definizione) Dobbiamo mostrare che  $\tilde{f}$  non dipende da  $\gamma$ . Sia  $\gamma_1 \in \Omega(Y, y_0, y)$ , allora  $\gamma * \gamma_1$  è un laccio in  $Y$  con punto base  $y_0$ . Osserviamo che

$$[f \circ \gamma * \overline{(f \circ \gamma_1)}] = f_*([\gamma * \gamma_1]) \in f_*(\pi_1(Y, y_0)) \stackrel{\text{ipotesi}}{\subseteq} p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \stackrel{(3.84)}{=} \text{stab}(\tilde{x}_0),$$

dove lo stabilizzatore è considerato rispetto all'azione di monodromia. Si ha dunque che  $f \circ \gamma * \overline{(f \circ \gamma_1)}$  si solleva a un laccio in  $\tilde{X}$  con punto base  $\tilde{x}_0$ . In particolare

$$\widetilde{(f \circ \gamma)}_{\tilde{x}_0}(1) = \widetilde{(f \circ \gamma_1)}_{\widetilde{(f \circ \gamma)}_{\tilde{x}_0}(1)}(0) \stackrel{(3.75)}{=} \widetilde{(f \circ \gamma_1)}_{\tilde{x}_0}(1).$$

$p \circ \tilde{f} = f$  e  $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ ) Se  $\gamma \in \Omega(Y, y_0, y)$  si ha

$$p(\tilde{f}(y)) = p(\widetilde{(f \circ \gamma)}_{\tilde{x}_0}(1)) = f \circ \gamma(1) = f(y).$$

Dato che  $c_{y_0}$  è un cammino da  $y_0$  a  $y_0$  in  $Y$ ,  $\tilde{f}(y_0) = \widetilde{c_{y_0}}_{\tilde{x}_0}(1) = c_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{x}_0$ .

Continuità) Mostriamo che  $\tilde{f}$  è continua in  $y$  per ogni  $y \in Y$ . Cerchiamo un intorno di  $y$  dove  $\tilde{f}$  è continua.

Sia  $U$  un intorno ben rivestito di  $f(y)$  in  $X$  per  $p$  e siano  $\tilde{U}$  la componente connessa per archi di  $p^{-1}(U)$  contenente  $\tilde{f}(y)$  e  $V$  la componente connessa per archi di  $f^{-1}(U)$  contenente  $y$ . Poiché  $p$  è un rivestimento e  $U$  è ben rivestito si ha che  $\tilde{U}$  è aperto e  $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$  è un omeomorfismo. Poiché  $f$  è continua e  $Y$  è localmente connessi per archi, si ha per (2.221) che  $V$  è un aperto connesso per archi.

Vogliamo mostrare che  $\tilde{f}|_V$  è continua. Osserviamo che se  $\tilde{f}$  manda connessi per archi in connessi per archi allora

$$\tilde{f}(y) \in \tilde{f}(V) \cap \tilde{U} \neq \emptyset \implies \tilde{f}(V) \subseteq \tilde{U}$$

e quindi  $p \circ \tilde{f}|_V = p|_{\tilde{U}} \circ \tilde{f}|_V$ , da cui

$$f|_V = p \circ \tilde{f}|_V = p|_{\tilde{U}} \circ \tilde{f}|_V \implies \tilde{f}|_V = p|_{\tilde{U}}^{-1} \circ f|_V,$$

che è continua perché composizione di continue.

Dimostriamo dunque che  $\tilde{f}$  manda connessi per archi in connessi per archi:

Se  $V \subseteq Y$  è connesso per archi, per  $y_1, y_2 \in V$  consideriamo  $\gamma_0 \in \Omega(Y, y_0, y_1)$  e  $\gamma_1 \in \Omega(V, y_1, y_2)$  e osserviamo che  $\gamma_0 * \gamma_1 \in \Omega(Y, y_0, y_2)$ .

Per definizione di  $\tilde{f}$

$$(\tilde{f} \circ \gamma_0) * (\tilde{f} \circ \gamma_1) = \tilde{f} \circ (\gamma_0 * \gamma_1)$$

è il sollevamento di

$$f \circ (\gamma_0 * \gamma_1) = (f \circ \gamma_0) * (f \circ \gamma_1) \text{ che parte da } \tilde{x}_0.$$

In particolare il sollevamento di  $f \circ \gamma_1$  che parte da  $\tilde{f}(y_1) = \tilde{f} \circ \gamma_0(1)$  è  $\tilde{f} \circ \gamma_1$ , quindi  $\tilde{f} \circ \gamma_1$  è un cammino da  $\tilde{f}(y_1)$  a  $\tilde{f}(y_2)$  contenuto in  $\tilde{f}(V)$ .  $\square$

### 3.5.1 Applicazioni dell'azione di Monodromia

Siamo (finalmente) pronti per calcolare il gruppo fondamentale di  $S^1$ :

**Teorema 3.89** (Gruppo fondamentale del cerchio).

$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$  tramite l'isomorfismo

$$\psi : \begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, 1) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ [\alpha] & \longmapsto & 0 \cdot [\alpha] \end{array}$$

dove il punto indica l'azione di monodromia per il rivestimento  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dato da  $p(t) = e^{2\pi i t}$ .

*Dimostrazione.*

Buona definizione) La mappa  $\psi$  è ben definita perché  $p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$ .

$\psi$  è surgettivo)  $\mathbb{R}$  è connesso per archi e quindi l'azione è transitiva (3.84), cioè la nostra mappa è surgettiva.

$\psi$  è un omomorfismo di gruppi) Osserviamo che

$$\begin{aligned} \psi([\alpha] * [\beta]) &= \psi([\alpha * \beta]) = \widetilde{(\alpha * \beta)}_0(1) = \tilde{\alpha}_0 * \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)}(1) = \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)}(1) \\ \psi([\alpha]) + \psi([\beta]) &= \tilde{\alpha}_0(1) + \tilde{\beta}_0(1). \end{aligned}$$

Notiamo che  $\tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)}$  è il sollevamento di  $\beta$  che parte da  $\tilde{\alpha}_0(1)$ . Se  $\tilde{\beta}_0$  è il sollevamento di  $\beta$  che parte da 0, poniamo  $\hat{\beta} = \tilde{\alpha}_0(1) + \tilde{\beta}_0$ . Chiaramente  $\hat{\beta}(0) = \tilde{\alpha}_0(1)$ , inoltre

$$p \circ \hat{\beta} = e^{2\pi i(\tilde{\alpha}_0(1) + \tilde{\beta}_0)} = \underbrace{e^{2\pi i \tilde{\alpha}_0(1)}}_{=1} e^{2\pi i \tilde{\beta}_0} = p \circ \tilde{\beta}_0 = \beta.$$

Abbiamo quindi mostrato che  $\hat{\beta} = \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)}$  per l'unicità dei sollevamenti di cammini (3.76), dunque, valutando in 1,

$$\tilde{\alpha}_0(1) + \tilde{\beta}_0(1) = \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)}(1).$$

$\psi$  iniettivo) Ora che sappiamo che  $\psi$  è un omomorfismo, basta calcolare il nucleo.

$$\ker \psi = \{[\alpha] \in \pi_1(S^1, 1) \mid 0 \cdot [\alpha] = 0\} = \text{stab}(0) = p_*(\pi_1(\mathbb{R}, 0)) = \{1\}$$

dove abbiamo usato il fatto che  $\mathbb{R}$  è semplicemente connesso e le proprietà dell'azione di monodromia (3.84).  $\square$

*Osservazione 3.90.*

Questo è un caso particolare del seguente risultato, che mostreremo verso la fine del capitolo (3.161):

Se  $p : E \rightarrow X$  è un rivestimento con  $E$  semplicemente connesso, allora  $\pi_1(X) \cong \text{Aut}(p) = \{\gamma : E \rightarrow E \mid \gamma \text{ omeomorfismo t.c. } p \circ \gamma = p\}.$

**Corollario 3.91.**

Se  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  è semplicemente connesso e  $D \supseteq S^1$  allora  $S^1$  non è un retratto di  $D$ .

*Dimostrazione.*

Se  $r : D \rightarrow S^1$  fosse una retrazione, allora  $i : S^1 \hookrightarrow D$  indurrebbe  $i_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(D, 1)$  iniettiva (perché  $r_* \circ i_* = id_{\pi_1(S^1, 1)}$ ), ma non esiste una mappa iniettiva da  $\mathbb{Z}$  a  $\{0\}$ .  $\square$

**Teorema 3.92** (Teorema di Brower).

Sia  $f : D^2 \rightarrow D^2$  continua. Allora  $f$  ha un punto fisso, cioè esiste  $x \in D$  tale che  $f(x) = x$ .

*Dimostrazione.*

Per assurdo, supponiamo che esista una  $f$  senza punti fissi. Costruiamo una retrazione di  $D^2$  su  $S^1$  usando  $f$ .

Sia  $r(x) : D^2 \rightarrow S^1$  data come segue:  $r(x)$  è il punto di  $S^1$  che incontra la semiretta con origine in  $f(x)$  e passante per  $x$  (ben definita perché  $f(x) \neq x$ ).

Vediamo che è una retrazione:

Fissa  $S^1$ ) Per costruzione  $r(x) = x$  per  $x \in S^1$ .

$r$  continua) La semiretta che intersechiamo con  $S^1$  è parametrizzata da  $t \mapsto f(x) + t(x - f(x))$  con  $t > 0$ . Si ha che

$$r(x) = f(x) + t_x(x - f(x)),$$

dove  $t_x$  è l'unica soluzione positiva di

$$1 = |f(x) + t(x - f(x))|^2 = |f(x)|^2 + 2t(\langle f(x), x - f(x) \rangle) + t^2|x - f(x)|^2.$$

Questa è una equazione di secondo grado e data la struttura dei coefficienti è tutta roba continua in  $x$ .  $\square$

*Osservazione 3.93.*

Il teorema di Brower vale per  $f : D \rightarrow D$  se  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  con  $D$  convesso compatto. L'idea è più o meno la stessa sfruttando l'idea che  $S^{n-1}$  non è un retratto di  $D^n$ , però il  $\pi_1$  non basta per mostrare questo fatto.

*Osservazione 3.94.*

Esistono  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue senza punti fissi. Più in generale esiste  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  continua senza punti fissi anche con  $\Omega$  aperto, limitato e contraibile.

Esiste  $f : C \rightarrow C$  continua senza punti fissi con  $C$  chiuso illimitato contraibile.

## 3.6 Teorema di Seifert-Van Kampen

In questa sezione e la prossima cerchiamo di rispondere alla domanda

Come calcolo i gruppi fondamentali?

Chiaramente se  $X \simeq Y$ , per l'invarianza omotopica del gruppo fondamentale (3.41),  $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$ .



**Esempio 3.95.**

$S^1$  è un retratto di  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , quindi  $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ .

Ma come calcolo il gruppo di  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 1\}$ <sup>9</sup> per esempio? Si vede che  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 1\}$  è omotopicamente equivalente a  $S^1 \vee S^1$ , ma come calcolo il gruppo fondamentale di questo Bouquet?

Un'idea può essere spezzare lo spazio che ci interessa in pezzi più gestibili. Questo approccio è incapsulato dal seguente

**Teorema 3.96** (Seifert-Van Kampen).

Sia  $X$  uno spazio topologico e siano  $A, B$  aperti di  $X$  tali che  $X = A \cup B$ . Supponiamo che  $A$ ,  $B$  e  $A \cap B \neq \emptyset$  siano connessi per archi. Indichiamo le inclusioni come segue

$$\begin{array}{ll} i_A : A \hookrightarrow X & j_A : A \cap B \hookrightarrow A \\ i_B : B \hookrightarrow X & j_B : A \cap B \hookrightarrow B \end{array}$$

Fissiamo  $x_0 \in A \cap B$ .

Sia  $G$  un gruppo e siano  $\varphi_A : \pi_1(A, x_0) \rightarrow G$  e  $\varphi_B : \pi_1(B, x_0) \rightarrow G$  tali che

$$\varphi_A \circ (j_A)_* = \varphi_B \circ (j_B)_* : \pi_1(A \cap B, x_0) \rightarrow G.$$

Allora esiste un unico omomorfismo  $\varphi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$  tale che  $\varphi_A = \varphi \circ (i_A)_*$  e  $\varphi_B = \varphi \circ (i_B)_*$ , cioè esiste un'unica  $\varphi$  che fa commutare il seguente diagramma<sup>10</sup>

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_1(A, x_0) & \xrightarrow{\varphi_A} & \\ & \nearrow (j_A)_* & & \searrow (i_A)_* & \\ \pi_1(A \cap B, x_0) & & & & \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\varphi} G \\ & \searrow (j_B)_* & & \nearrow (i_B)_* & \\ & & \pi_1(B, x_0) & \xrightarrow{\varphi_B} & \end{array}$$

Inoltre  $\pi_1(X, x_0)$  è generato da  $(i_A)_*(\pi_1(A, x_0))$  e  $(i_B)_*(\pi_1(B, x_0))$ .

*Dimostrazione.*

Primo passo Mostriamo che  $\pi_1(X, x_0)$  è generato da  $(i_A)_*(\pi_1(A, x_0))$  e  $(i_B)_*(\pi_1(B, x_0))$ .

Consideriamo  $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ . L'obiettivo è definire  $\varphi([\alpha]) \in G$ . Per distinguere la classe di  $\alpha$  in  $\pi_1(X, x_0)$ ,  $\pi_1(A, x_0)$  o  $\pi_1(B, x_0)$  scriviamo  $[\alpha]_X$ ,  $[\alpha]_A$  o  $[\alpha]_B$  rispettivamente.

Se  $\text{Imm } \alpha \subseteq A$  allora

$$[\alpha]_X = (i_A)_*([\alpha]_A),$$

quindi basta porre  $\varphi([\alpha]_X) = \varphi_A([\alpha]_A)$  (questa è l'unica possibilità per far commutare il digramma). Analogamente per il caso  $\text{Imm } \alpha \subseteq B$ .

<sup>9</sup>Sto identificando  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$ .

<sup>10</sup>Il teorema afferma che  $\pi_1(X, x_0)$  con le mappe date è il coprodotto fibrato di  $\pi_1(A, x_0)$  e  $\pi_1(B, x_0)$  rispetto a  $\pi_1(A \cap B, x_0)$  nella categoria  $Grp$ . In termini più adatti al corso, vedremo che ne è il prodotto amalgamato perché rispetta la proprietà universale (3.111).

L'idea è suddividere  $\alpha \in \Omega(X, x_0)$  in pezzi contenuti interamente in  $A$  o interamente in  $B$ . Per ogni  $x \in X$  fissiamo un cammino  $\gamma_x$  tale che:

$$\gamma_x \in \begin{cases} \{c_{x_0}\} & x = x_0 \\ \Omega(A \cap B, x_0, x) & x \in A \cap B \setminus \{x_0\} \\ \Omega(A, x_0, x) & x \in A \setminus B \\ \Omega(B, x_0, x) & x \in B \setminus A \end{cases}$$

Useremo i  $\gamma_x$  per spezzare  $\alpha$  a meno di omotopia a estremi fissi in lacci contenuti interamente in  $A$  o  $B$ . Se avremo successo, dato che  $\varphi$  dovrà essere un omomorfismo che fa commutare il diagramma, avremo definito univocamente  $\varphi([\alpha])$  se ben definita.

Dato  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  con  $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ , sappiamo che  $\{\alpha^{-1}(A), \alpha^{-1}(B)\}$  è un ricoprimento aperto di  $[0, 1]$ . Sia  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $\frac{1}{n}$  sia un numero di Lebesgue (2.288), cioè

$$\alpha\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right) \subseteq A \text{ oppure } B$$

per ogni  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ . Poniamo

$$x_k = \alpha\left(\frac{k}{n}\right), \quad \alpha_k = \gamma_{x_k} * \alpha|_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]} * \bar{\gamma}_{x_{k+1}}.$$

Per costruzione  $\text{Imm } \alpha_k$  è contenuta interamente in  $A$  o  $B$ , inoltre  $x_0 = x_n$  perché  $\alpha$  laccio.

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \alpha_0 * \dots * \alpha_{n-1} &= (c_{x_0} * \alpha|_{\left[0, \frac{1}{n}\right]} * \bar{\gamma}_{x_1}) * \dots * (\gamma_{x_{n-1}} * \alpha|_{\left[\frac{n-1}{n}, 1\right]} * \bar{c}_{x_0}) \stackrel{\text{Estr.Fix.}}{\simeq} \\ &\simeq c_{x_0} * \alpha|_{\left[0, \frac{1}{n}\right]} * c_{x_1} * \alpha|_{\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]} * \dots * \alpha|_{\left[\frac{n-1}{n}, 1\right]} * \bar{c}_{x_0} \simeq \\ &\simeq \alpha|_{\left[0, \frac{1}{n}\right]} * \alpha|_{\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]} * \dots * \alpha|_{\left[\frac{n-1}{n}, 1\right]} = \alpha. \end{aligned}$$

Quindi  $[\alpha]_X = [\alpha_0 * \dots * \alpha_{n-1}] = [\alpha_0]_X * \dots * [\alpha_{n-1}]_X$ . Per costruzione  $\text{Imm } \alpha_j$  è contenuta in  $A$  o  $B$ , quindi

$$[\alpha_j]_X = (i_A)_*([\alpha_j]_A) \quad \text{oppure} \quad [\alpha_j]_X = (i_B)_*([\alpha_j]_B).$$

In particolare  $\pi_1(X, x_0)$  è generato da  $(i_A)_*(\pi_1(A, x_0))$  e  $(i_B)_*(\pi_1(B, x_0))$ .

Secondo passo) Osserviamo che se una  $\varphi$  come nella tesi esiste allora essa è univocamente determinata: dato  $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ , scriviamo  $\alpha \simeq \alpha_1 * \dots * \alpha_n$  con  $\alpha_j \in \Omega(A, x_0) \cup \Omega(B, x_0)$ , a quel punto

$$[\alpha]_X = (i_{A,B})_*([\alpha_1]) * \dots * (i_{A,B})_*([\alpha_n]),$$

dove

$$(i_{A,B})_*([\alpha_j]) = \begin{cases} (i_A)_*([\alpha_j]_A) & \alpha_j \in \Omega(A, x_0) \\ (i_B)_*([\alpha_j]_B) & \alpha_j \in \Omega(B, x_0) \end{cases}$$

A questo punto,  $\varphi$  esiste,

$$\varphi([\alpha]_X) = \varphi((i_{A,B})_*([\alpha_1])) * \dots * \varphi((i_{A,B})_*([\alpha_n])) = \varphi_{A,B}([\alpha_1]) * \dots * \varphi_{A,B}([\alpha_n]).$$

Terzo passo) Preso  $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$  scriviamo

$$[\alpha]_X = (i_{A,B})_*([\alpha_1]) * \cdots * (i_{A,B})_*([\alpha_n])$$

e poniamo

$$\varphi([\alpha]_X) = \varphi_{A,B}([\alpha_1]) * \cdots * \varphi_{A,B}([\alpha_n]).$$

Dobbiamo verificare che è una buona definizione, ovvero vogliamo

1. Se  $\alpha_i \in \Omega(A \cap B, x_0)$  allora  $\varphi_A([\alpha_i]_A) = \varphi_B([\alpha_i]_B)$
2. Due suddivisioni diverse di  $\alpha$  forniscono lo stesso valore di  $\varphi([\alpha])$
3. Se  $\beta \simeq \alpha$  allora la costruzione fornisce lo stesso valore di  $\varphi$
4.  $\varphi$  è un omomorfismo
5.  $\varphi$  rende commutativo il diagramma.

1) Se  $\alpha_i \in \Omega(A \cap B, x_0)$  allora  $[\alpha_i]_A = (j_A)_*([\alpha_i]_{A \cap B})$  per definizione di  $(j_A)_*$ . Similmente per  $B$ . Allora

$$\varphi_A([\alpha_i]_A) = \varphi_A \circ (j_A)_*([\alpha_i]_{A \cap B}) = \varphi_B \circ (j_B)_*([\alpha_i]_{A \cap B}) = \varphi_B([\alpha_i]_B),$$

dove abbiamo usato le ipotesi sulla commutatività del diagramma in partenza.

2) Due suddivisioni diverse  $\{t_{a_1}, \dots, t_{a_n}\}$  e  $\{t_{b_1}, \dots, t_{b_m}\}$  di  $[0, 1]$  con un numero finito di punti ammettono un raffinamento comune (per esempio l'unione). Siccome un raffinamento si può ottenere iterativamente aggiungendo un punto alla volta, basta far vedere che se aggiungiamo un punto  $\bar{x} = \alpha(\bar{t})$  compreso tra  $x_k = \alpha(t_k)$  e  $x_{k+1} = \alpha(t_{k+1})$  otteniamo lo stesso valore per  $\varphi$ .

Senza perdita di generalità supponiamo che  $\alpha([t_k, t_{k+1}]) \subseteq A$  (se fosse contenuto in  $B$  il ragionamento è analogo). Poniamo

$$\beta_1 = \gamma_{x_n} * \alpha|_{[t_k, \bar{t}]} * \bar{\gamma}_{\bar{x}}, \quad \beta_2 = \gamma_{\bar{x}} * \alpha|_{[\bar{t}, t_{k+1}]} * \bar{\gamma}_{x_{k+1}}.$$

Abbiamo visto che

$$\beta_1 * \beta_2 \simeq \gamma_{x_n} * \alpha|_{[t_k, t_{k+1}]} * \bar{\gamma}_{x_{k+1}} = \alpha_k.$$

Per costruzione,  $\beta_1, \beta_2, \alpha_k \in \Omega(A, x_0)$ . Siccome  $\varphi_A$  è un omomorfismo

$$\varphi_A([\alpha_k]_A) = \varphi_A([\beta_1]_A * [\beta_2]_A) = \varphi_A([\beta_1]_A) * \varphi_A([\beta_2]_A).$$

Osserviamo dunque che il valore di  $\varphi$  della suddivisione di partenza (senza  $\bar{x}$ ) è

$$\varphi([\alpha]_X) = \varphi_{A,B}([\alpha_0]) * \cdots * \varphi_{A,B}([\alpha_{k-1}]) * \varphi_A([\alpha_k]) * \cdots * \varphi_{A,B}([\alpha_{n-1}]),$$

mentre usando la suddivisione con  $\bar{x}$  troviamo

$$\varphi([\alpha]_X) = \varphi_{A,B}([\alpha_0]) * \cdots * \varphi_{A,B}([\alpha_{k-1}]) * \varphi_A([\beta_1]_A) * \varphi_A([\beta_2]_A) * \cdots * \varphi_{A,B}([\alpha_{n-1}]),$$

ma per quanto detto queste espressioni in realtà coincidono.

3) Sia  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  una omotopia di cammini da  $\alpha$  a  $\beta$ . Per compattezza di  $[0, 1] \times [0, 1]$ , esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $\frac{1}{n}$  è un numero di Lebesgue per il ricoprimento  $\{H^{-1}(A), H^{-1}(B)\}$  (2.288). In particolare

$$H\left(\left[\frac{h}{n}, \frac{h+1}{n}\right] \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right) \subseteq A \text{ oppure } B \quad \forall h, k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Poniamo  $\delta_{k/n}(s) = H(s, \frac{k}{n})$ , in modo che  $\delta_0 = \alpha$ ,  $\delta_1 = \beta$ ,  $\delta_{k/n} \in \Omega(X, x_0)$  e  $\delta_{k/n}|_{[\frac{h}{n}, \frac{h+1}{n}]} \subseteq A$  oppure  $B$ <sup>11</sup>. Per concludere vogliamo mostrare che per ogni  $k$

$$\varphi([\delta_{k/n}]) = \varphi([\delta_{(k+1)/n}]).$$

Guardando la figura<sup>12</sup>, un modo per farlo può essere estendere entrambi in modo che abbiano gli stessi estremi sul quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$  e provare gradualmente a trasformare un cammino nell'altro.

A questo fine osserviamo che

$$\varphi([c_{x_0} * \delta_{k/n}]) = \varphi([\delta_{k/n}]) \quad e \quad \varphi([\delta_{(k+1)/n} * c_{x_0}]) = \varphi([\delta_{(k+1)/n}]),$$

dove abbiamo staccato il cammino con la definizione di  $\varphi$  e usato il fatto che  $[c_{x_0}] = 1 \in \pi_1(A \cap B, x_0)$  e che  $(i_A)_*$ ,  $(i_B)_*$ ,  $(j_A)_*$  e  $(j_B)_*$  sono omomorfismi di gruppi.

Vogliamo quindi mostrare che

$$\varphi([c_{x_0} * \delta_{k/n}]) = \varphi([\delta_{(k+1)/n} * c_{x_0}]).$$

Per alleggerire la notazione scriviamo  $\gamma = \delta_{(k+1)/n} * c_{x_0}$  e  $\eta = c_{x_0} * \delta_{k/n}$ .

Siano

$$x_j = \delta_{k/n} \left( \frac{j}{n} \right) \quad e \quad y_j = \delta_{(k+1)/n} \left( \frac{j}{n} \right)$$

i vertici delle immagini dei quadrati  $[\frac{h}{n}, \frac{h+1}{n}] \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ . Geometricamente i punti  $x_j$  corrispondono ai vertici lungo  $\gamma$  e i  $y_j$  a quelli lungo  $\eta$ .

Suddividiamo  $\gamma$  e  $\eta$  tagliandoli in corrispondenza di questi punti:

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_0 * \cdots * \gamma_{n-1} * c_{x_0} \\ \eta &= c_{x_0} * \eta_0 * \cdots * \eta_{n-1}. \end{aligned}$$

Poiché  $\frac{1}{n}$  è un numero di Lebesgue per  $\{H^{-1}(A), H^{-1}(B)\}$ , si ha che  $\text{Imm } \gamma_j$  e  $\text{Imm } \eta_j$  sono contenuti interamente in  $A$  oppure  $B$  per ogni  $j$ .

Per mostrare che  $\varphi$  non cambia da  $\gamma$  a  $\eta$  mostriamo il seguente

**Claim:** Se percorro  $\gamma$  fino ad un vertice  $x_j$ , scendo lungo il lato sinistro del quadrato  $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}] \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$  a  $y_j$  e poi proseguo lungo  $\eta$ , oppure se proseguo su  $\gamma$  fino a  $x_{j+1}$  e poi scendo lungo il lato destro dello stesso quadrato, si ha che  $\varphi$  valutata su entrambi questi cammini non cambia.

Mostrare il claim conclude, perché partendo da  $\gamma$  posso trasformarlo in  $\eta$  dopo  $n$  applicazioni, una volta per quadrato  $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}] \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ .

Chiamiamo i lati citati nel claim con  $\omega$  e  $\varepsilon$ , cioè

$$\omega = H(x_j, \cdot)|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}, \quad \varepsilon = H(x_{j+1}, \cdot)|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}.$$

Il claim sostiene che

$$\begin{aligned} &\varphi([\gamma_0 * \cdots * \gamma_j * \omega * \eta_{j+1} * \eta_{j+2} * \cdots * \eta_{n-1}]) = \\ &= \varphi([\gamma_0 * \cdots * \gamma_j * \gamma_{j+1} * \varepsilon * \eta_{j+2} * \cdots * \eta_{n-1}]). \end{aligned}$$

<sup>11</sup>Sono le immagini di  $[0, 1] \times \{\frac{h}{n}\}$ , cioè abbiamo affettato l'omotopia orizzontalmente

<sup>12</sup>che purtroppo dovreste disegnarvi. Mi dispiace.

Ricordando che  $\gamma_x$  indica un cammino da  $x_0$  a  $x$  che resta contenuto in  $A$  se  $x \in A$  e similmente per  $x \in B$  e  $x \in A \cap B$ , poniamo

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_i &= \gamma_{x_i} * \gamma_i * \bar{\gamma}_{x_{i+1}}, \\ \tilde{\eta}_i &= \gamma_{y_i} * \eta_i * \bar{\gamma}_{y_{i+1}}.\end{aligned}$$

Similmente poniamo

$$\tilde{\omega} = \gamma_{x_j} * \omega * \bar{\gamma}_{y_j}, \quad \tilde{\varepsilon} = \gamma_{x_{j+1}} * \varepsilon * \bar{\gamma}_{y_{j+1}}.$$

Per definizione di  $\varphi$  si ha

$$\begin{aligned}\varphi([\gamma_0 * \cdots * \gamma_j * \omega * \eta_{j+1} * \eta_{j+2} * \cdots * \eta_{n-1}]_X) &= \\ = \varphi_{A,B}([\tilde{\gamma}_0]) * \cdots * \varphi_{A,B}([\tilde{\gamma}_j]) * \\ &\quad * \varphi_{A,B}([\tilde{\omega}]) * \varphi_{A,B}([\tilde{\eta}_{j+1}]) * \\ &\quad * \varphi_{A,B}([\tilde{\eta}_{j+2}]) * \cdots * \varphi_{A,B}([\tilde{\eta}_{n-1}])\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\varphi([\gamma_0 * \cdots * \gamma_j * \gamma_{j+1} * \varepsilon * \eta_{j+2} * \cdots * \eta_{n-1}]_X) &= \\ = \varphi_{A,B}([\tilde{\gamma}_0]) * \cdots * \varphi_{A,B}([\tilde{\gamma}_j]) * \\ &\quad * \varphi_{A,B}([\tilde{\gamma}_{j+1}]) * \varphi_{A,B}([\tilde{\varepsilon}]) * \\ &\quad * \varphi_{A,B}([\tilde{\eta}_{j+2}]) * \cdots * \varphi_{A,B}([\tilde{\eta}_{n-1}]),\end{aligned}$$

dove  $\varphi_{A,B}$  si comporta come  $\varphi_A$  se viene applicato ad una classe in  $\pi_1(A, x_0)$  e come  $\varphi_B$  se viene applicato ad una classe in  $\pi_1(B, x_0)$ .

Ci siamo ricondotti a dover mostrare

$$\varphi_{A,B}([\tilde{\gamma}_j]) * \varphi_{A,B}([\tilde{\varepsilon}]) = \varphi_{A,B}([\tilde{\omega}]) * \varphi_{A,B}([\tilde{\eta}_j]).$$

Dato che  $\frac{1}{n}$  è un numero di Lebesgue per  $\{H^{-1}(A), H^{-1}(B)\}$  si ha che

$$H\left(\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right) \subseteq A \text{ oppure } B,$$

senza perdita di generalità supponiamo  $A$ .

Siccome  $H|_{[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}] \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}$  ha immagine in  $A$  e  $\gamma_j * \varepsilon$  e  $\omega * \eta_j$  sono immagini di cammini complementari su  $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}] \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ , per il lemma sui cammini complementari (3.29) si ha che  $H$  induce una omotopia a estremi fissi in  $A$  tra  $\gamma_j * \varepsilon$  e  $\omega * \eta_j$ . Da questa segue che

$$\tilde{\gamma}_j * \tilde{\varepsilon} \simeq \gamma_{x_j} * \gamma_j * \varepsilon * \bar{\gamma}_{y_{j+1}} \simeq \gamma_{x_j} * \omega * \eta_j * \bar{\gamma}_{y_{j+1}} \simeq \tilde{\omega} * \tilde{\eta}_j,$$

in  $\Omega(A, x_0)$ , in particolare le loro classi in  $\pi_1(A, x_0)$  coincidono. Allora

$$\varphi_A([\tilde{\gamma}_j * \tilde{\varepsilon}]_A) = \varphi_A([\tilde{\omega} * \tilde{\eta}_j]_A),$$

e siccome  $\varphi_A$  è un omomorfismo

$$\varphi_A([\tilde{\gamma}_k]_A) * \varphi_A([\tilde{\varepsilon}]_A) = \varphi_A([\tilde{\omega}]_A) * \varphi_A([\tilde{\eta}_k]_A)$$

come voluto.

4) Se  $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$ , ogni sottoarco delle suddivisioni di  $\alpha, \beta$  fornisce una suddivisione di  $\alpha * \beta$ , quindi per come è definito  $\varphi$  abbiamo

$$\varphi([\alpha * \beta]) = \text{suddividi} = \varphi([\alpha])\varphi([\beta])$$

5) Per costruzione  $\varphi \circ (i_A)_* = \varphi_A$ , perché se  $\alpha \in \Omega(A, x_0)$  allora  $[\alpha]_X = (i_A)_*([\alpha]_A)$  e usando la suddivisione banale  $\varphi((i_A)_*([\alpha]_A)) = \varphi_A([\alpha]_A)$ . Analogamente per  $B$ .  $\square$

**Corollario 3.97** (Divisione in semplicemente connessi con intersezione connessa per archi implica semplicemente connesso).

*Sia  $X = A \cup B$  con  $A, B$  semplicemente connessi e  $A \cap B$  connesso per archi. Allora  $X$  è semplicemente connesso.*

*Dimostrazione.*

Siamo nelle ipotesi del Teorema di Seifert-Van Kampen (3.96), quindi  $\pi_1(X, x_0)$  è generato da due immagini di gruppi banali, cioè è banale.  $\square$

**Corollario 3.98.**

*$S^n$  è semplicemente connesso per  $n \geq 2$ .*

*Dimostrazione.*

Dividiamo  $S^n$  in  $S^n$  meno il polo nord e  $S^n$  meno il polo sud. L'intersezione è  $S^n$  meno due punti, che è connessa per archi e i due pezzi citati sono omeomorfi a  $\mathbb{R}^n$ , che è contraibile. <sup>13</sup>  $\square$

## 3.7 Calcolo del Gruppo fondamentale

### 3.7.1 Gruppo fondamentale del prodotto

**Teorema 3.99** (Gruppo fondamentale del prodotto).

*Siano  $X, Y$  spazi topologici connessi per archi e siano  $x_0 \in X, y_0 \in Y$ . Si ha che*

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

*Dimostrazione.*

Consideriamo

$$\begin{aligned} \tilde{p}: \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \\ [\gamma] &\longmapsto (p_{1*}([\gamma]), p_{2*}([\gamma])) \end{aligned}$$

dove  $p_1$  e  $p_2$  sono le proiezioni di  $X \times Y$  su  $X$  e  $Y$  rispettivamente. Questa mappa è evidentemente ben definita, un omomorfismo di gruppi e invertibile.  $\square$

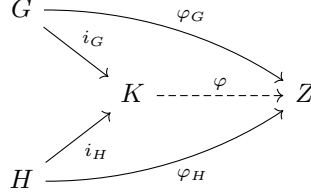
### 3.7.2 Prodotto libero e gruppi liberi

**Definizione 3.100** (Prodotto libero).

Dati due gruppi  $G, H$ , un **prodotto libero** di  $G$  e  $H$  è un gruppo  $K$  con omomorfismi  $i_G: G \rightarrow K$  e  $i_H: H \rightarrow K$  tale che per ogni coppia di omomorfismi

<sup>13</sup>la dimostrazione fallisce per  $n = 1$  perché l'intersezione non è più connessa per archi.

$\varphi_G : G \rightarrow Z$ ,  $\varphi_H : H \rightarrow Z$  esiste un unico  $\varphi : K \rightarrow Z$  tale che  $\varphi_G = \varphi \circ i_G$  e  $\varphi_H = \varphi \circ i_H$ .



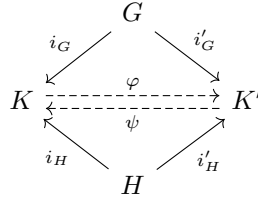
**Teorema 3.101** (Esistenza del prodotto libero).

Il prodotto libero  $K$  esiste ed è unico a meno di isomorfismo. Si denota  $K = G * H$ .

*Dimostrazione.*

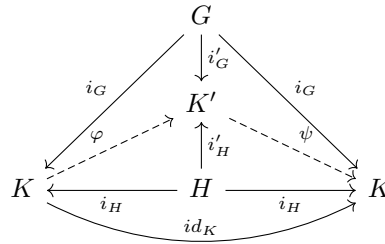
Seguiamo lo schema tipico di una dimostrazione per proprietà universale, cioè mostriamo l'unicità grazie alla proprietà universale e poi esibiamo un modello che la realizza.

Unicità) Supponiamo che  $K'$ ,  $i'_G : G \rightarrow K'$  e  $i'_H : H \rightarrow K'$  sia un secondo prodotto libero.



Penso  $K'$  come  $Z$  e  $i'_G, i'_H$  come  $\varphi_G$  e  $\varphi_H$ . Applico la proprietà universale di  $K$  e trovo  $\varphi : K \rightarrow K'$  omomorfismo di gruppi con  $\varphi \circ i_G = i'_G$  e  $\varphi \circ i_H = i'_H$ .

Analogamente trovo  $\psi : K' \rightarrow K$  omomorfismo di gruppi tale che  $\psi \circ i'_G = i_G$  e  $\psi \circ i'_H = i_H$ . Vogliamo mostrare che  $\varphi$  e  $\psi$  sono inverse. Per simmetria basta mostrare una delle due composizioni. Consideriamo il diagramma



Siccome deve commutare, per l'unicità nella definizione di prodotto libero,  $\psi \circ \varphi = id_K$  perché sono due percorsi che portano dal  $K$  a sinistra al  $K$  a destra.

Esistenza) Sia  $\mathcal{P}$  l'insieme delle liste finite ordinate di elementi di  $G \sqcup H$ , compresa la lista vuota, cioè

$$\mathcal{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (G \sqcup H)^n, \quad \text{con } (G \sqcup H)^0 = \emptyset.$$

dove l'ultima relazione si applica se  $x_k$  e  $x_{k+1}$  appartengono allo stesso gruppo.<sup>15</sup>

Sia  $\overline{\mathcal{P}}$  il quoziente di  $\mathcal{P}$  rispetto a questa relazione. Osserviamo che se ho stringhe  $s_1, s_2, s'_1$  e  $s'_2$  tali che  $s_1 \sim s'_1$  e  $s_2 \sim s'_2$  allora  $s_1 s_2 \sim s'_1 s'_2$ , cioè  $\overline{\mathcal{P}}$  è un monoide associativo. In realtà è un gruppo perché trovo un inverso ribaltando l'ordine degli elementi e sostituendo i termini con i loro inversi.

Mostriamo che  $\overline{\mathcal{P}}$  è un prodotto libero. Definiamo le mappe

$$i_G: \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \overline{\mathcal{P}} \\ q & \longmapsto & q \end{array} \quad i_H: \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \overline{\mathcal{P}} \\ h & \longmapsto & h \end{array}.$$

$$\begin{array}{ccccc}
 G & & & & \\
 \searrow i_G & \nearrow \varphi^G & & & \\
 & \overline{\mathcal{P}} & \xrightarrow{\varphi} & & Z \\
 \nearrow i_H & \searrow \varphi^H & & & \\
 H & & & & 
 \end{array}$$
$$\varphi(g_1 h_1 g_2 h_2 \cdots g_n h_n) = \varphi_G(g_1) \varphi_H(h_1) \cdots \varphi_G(g_n) \varphi_H(h_n)$$

*Osservazione 3.102.*

---

<sup>14</sup>Ad esempio  $g_1 h_1 g_2 \cdot g_3 h_2 h_3 = g_1 h_1 g_2 g_3 h_2 h_3$ .

<sup>15</sup> Ad esempio  $g_1 h_1 g_2 g_2^{-1} h_1^{-1} g_1^{-1} \sim g_1 h_1 1 G h_1^{-1} g_1^{-1} \sim g_1 h_1 h_1^{-1} g_1^{-1} \sim \emptyset$ .



**Fatto 3.103** (Proprietà dei prodotti liberi).

*Valgono le seguenti proposizioni*

1.  $G * \{1\} \cong G$
2.  $G * H \cong H * G$
3.  $(G_1 * G_2) * G_3 \cong G_1 * (G_2 * G_3)$
4. Se  $G \neq \{1\}$  e  $H \neq \{1\}$  allora  $G * H$  non è abeliano <sup>16</sup>

**Definizione 3.104** (Gruppo libero).

Il **gruppo libero** di rango  $n$  è il gruppo

$$F_n \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n \text{ volte}}.$$

Se  $x_i$  è un generatore dell' $i$ -esima copia di  $\mathbb{Z}$  nel prodotto libero allora un generico elemento di  $F_n$  è dato da

$$x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \cdots x_{i_k}^{n_k} \quad \text{con } k \in \mathbb{N}, i_k \in \{1, \dots, n\}, n_i \in \mathbb{Z}.$$

**Teorema 3.105** (Proprietà universale del gruppo libero).

*Sia  $X$  un insieme e sia  $f : X \rightarrow Z$  una funzione con  $Z$  gruppo. Sia  $F(X)$  il gruppo libero su  $X$ , cioè*

$$F(X) = \bigstar_{x \in X} \mathbb{Z}_x,$$

*dove  $\mathbb{Z}_x$  è una copia di  $\mathbb{Z}$  generata formalmente da  $x$ .*

*Allora esiste un unico  $\varphi : F(X) \rightarrow Z$  omomorfismo di gruppi che estende  $f$ , in particolare quello dato da  $\varphi(x) = f(x)$ , dove interpreto l'argomento di  $\varphi$  come la stringa data da un solo carattere.*

*Dimostrazione.*

La funzione  $f : X \rightarrow Z$  induce una famiglia di omomorfismi  $\varphi_x : \mathbb{Z}_x \rightarrow Z$  in quanto  $x$  genera  $\mathbb{Z}_x$ . Per definire  $\varphi$  basta separare i pezzi a secondo del generatore in  $x$  e poi usare questi omomorfismi.  $\square$

### 3.7.3 Van Kampen per intersezioni semplicemente connesse

**Lemma 3.106** (Van Kampen per intersezione semplicemente connessa).

*Sia  $X = A \cup B$  con  $A, B$  aperti connessi per archi,  $A \cap B$  connesso per archi e semplicemente connesso. Sia  $x_0 \in A \cap B$ . Allora*

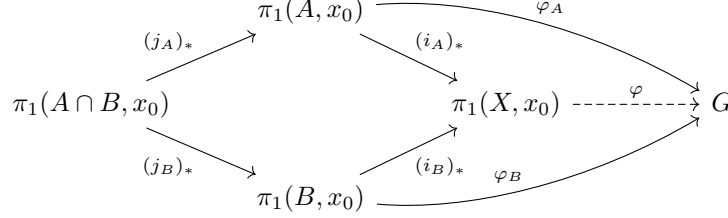
$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0).$$

*Dimostrazione.*

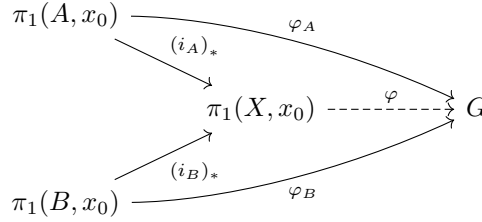
Per il teorema di Seifert-Van Kampen (3.96)  $\pi_1(X, x_0)$  gode della proprietà

<sup>16</sup>Per esempio, se  $g \in G \setminus \{1_G\}$  e  $h \in H \setminus \{1_H\}$  allora  $gh \neq hg$  perché forme ridotte diverse.

universale associata al diagramma



Dato che  $A \cap B$  è semplicemente connesso,  $\pi_1(A \cap B, x_0) = \{1\}$ , dunque il diagramma si riduce a



che è la proprietà universale del gruppo libero.  $\square$

**Teorema 3.107** (Gruppo fondamentale del Bouquet di  $n$  circonferenze).

Sia  $X_n = \underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{n \text{ volte}}$ , allora

$$\pi_1(X_n) = F_n$$

*Dimostrazione.*

Procediamo per induzione su  $n$ .

$n = 1$ )  $X_n = S^1$  e  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z} = F_1$ .

$n > 1$ ) Invochiamo il teorema di Seifert-Van Kampen (3.96) considerando i seguenti aperti:  $A$  intorno di una circonferenza,  $B$  intorno delle altre  $n - 1$  circonferenze in modo tale che  $A \cap B$  sia un intorno del punto base  $x_0$ . Osserviamo che  $A$  si retrae per deformazione su  $S^1$ , quindi  $\pi_1(A, x_0) \cong \mathbb{Z}$ , mentre  $B$  si retrae sul Bouquet di  $n - 1$  circonferenze, dunque  $\pi_1(B, x_0) \cong F_{n-1}$  per ipotesi induttiva. Osserviamo infine che  $A \cap B$  è contraibile, dunque  $\pi_1(A \cap B, x_0) = \{1\}$ . Per il lemma (3.106) abbiamo

$$\pi_1(X_n, x_0) \cong \mathbb{Z} * F_{n-1} \cong F_n.$$

$\square$

### 3.7.4 Prodotto amalgamato

Vogliamo generalizzare il prodotto libero in modo da poterlo usare nel calcolo anche per  $A \cap B$  non semplicemente connesso.

**Definizione 3.108** (Prodotto amalgamato).

Siano  $H, G_1, G_2$  gruppi e siano  $j_1 : H \rightarrow G_1$  e  $j_2 : H \rightarrow G_2$  omomorfismi. Il **prodotto amalgamato** di  $G_1$  e  $G_2$  lungo  $H$  è un gruppo  $K$  con omomorfismi

$$\begin{array}{ccccc}
 & & G_1 & & \\
 j_1 \nearrow & & & \searrow i_1 & \varphi_1 \\
 H & & & & \\
 j_2 \searrow & & & \nearrow i_2 & \\
 & & G_2 & & \\
 & & & & K \xrightarrow{\varphi} Z \\
 & & & \nearrow \varphi_2 & \\
 & & & & 
 \end{array}$$

*Osservazione 3.109.*

Dato un gruppo  $G$  e un sottoinsieme  $S$  poniamo

$$\langle\langle S \rangle\rangle = \bigcap_{\substack{Z \triangleleft G \\ Z \supset S}} Z.$$

*Dimostrazione.*

Poniamo come notazione  $\tilde{i}_1 : G_1 \rightarrow G_1 * G_2$ ,  $\tilde{i}_2 : G_2 \rightarrow G_1 * G_2$  per gli omomorfismi di inclusione. Consideriamo ora il sottogruppo normale  $N \triangleleft G_1 * G_2$  generato da  $S = \{\tilde{i}_1(j_1(h))\tilde{i}_2(j_2(h))^{-1} \in G_1 * G_2 \mid h \in H\}$ , cioè

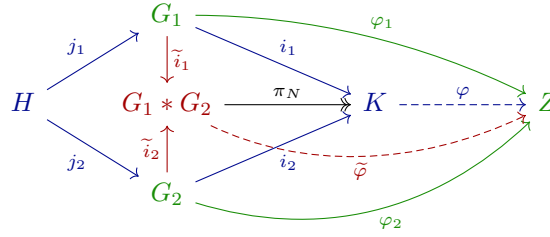
Infine poniamo  $K = G_1 * G_2 / N$ . Definiamo le mappe  $i_1 : G_1 \rightarrow K$  e  $i_2 : G_2 \rightarrow K$  come le composizioni delle inclusioni  $\tilde{i}_1, \tilde{i}_2$  con la proiezione  $\pi_N : G_1 * G_2 \rightarrow G_1 * G_2 / N = K$ , infatti per costruzione di  $K$  avremo  $i_1 \circ j_1 = i_2 \circ j_2$ .

$$\varphi_1 = \tilde{\varphi} \circ \tilde{i}_1 \quad e \quad \varphi_2 = \tilde{\varphi} \circ \tilde{i}_2.$$
$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(\tilde{i}_1(j_1(h))\tilde{i}_2(j_2(h))^{-1}) &= \tilde{\varphi}(\tilde{i}_1(j_1(h)))\tilde{\varphi}(\tilde{i}_2(j_2(h)))^{-1} = \\ &= \varphi_1(j_1(h))\varphi_2(j_2(h))^{-1} = 1\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che  $\varphi_1 \circ j_1 = \varphi_2 \circ j_2$ , dunque  $\tilde{\varphi}$  passa al quoziente definendo  $\varphi : K \rightarrow Z$ .

L'omomorfismo  $\varphi$  è unico perché ha immagini forzate su  $i_1(G_1)$  e  $i_2(G_2)$ , che generano  $K$  in quanto  $K$  è un quoziente di  $G_1 * G_2$  e  $\tilde{i}_1(G_1) \cup \tilde{i}_2(G_2)$  genera  $G_1 * G_2$ .

Per seguire meglio i passaggi di questa dimostrazione può essere utile osservare il seguente diagramma. In blu abbiamo evidenziato le parti che riguardano solo il prodotto amalgamato, in rosso quelle che riguardano solo il prodotto libero e in verde le parti comuni ai due diagrammi.



□

### Fatto 3.112.

Con le notazioni del teorema, se  $\Omega$  è un insieme di generatori di  $H$  allora al posto di  $S = \{j_1(h)j_2(h)^{-1} \mid h \in H\}$  si può considerare  $S' = \{j_1(h)j_2(h)^{-1} \mid h \in \Omega\}$  e generare comunque  $N$ .

## 3.7.5 Presentazioni di gruppi

**Definizione 3.113** (Presentazione).

Dato un insieme di simboli  $S$  e  $R \subseteq F(S)$  (dette **relazioni**) allora

$$G = \langle S \mid R \rangle = F(S) / \langle\langle R \rangle\rangle.$$

La scrittura  $\langle S \mid R \rangle$  è detta **presentazione** di  $G$ .

*Osservazione 3.114* (Problema della parola).

Chiedersi se una parola  $w \in F(S)$  rappresenta l'identità di  $\langle S \mid R \rangle$  è equivalente a chiedersi se esistono  $j \in \mathbb{N}$ ,  $w_i \in F(S)$  e  $r_{k_i} \in R$  tali che

$$w = \prod_{i=1}^j w_i r_{k_i}^{\pm 1} w_i^{-1}.$$

Questo problema in generale non ammette soluzione algoritmica (non possiamo stimare quanti tentativi dovremmo fare).

**Proposizione 3.115** (Proprietà universale delle presentazioni).

Siano  $G = \langle S \mid R \rangle$ ,  $H$  un gruppo e  $f : S \rightarrow H$  una funzione. Si ha che esiste un unico omomorfismo  $\varphi : G \rightarrow H$  tale che per ogni  $s \in S$

$$\varphi(\bar{s}) = f(s),$$

dove  $\bar{s}$  è la classe della parola data dal solo carattere  $s$  se e solo se per ogni  $s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{i_j}^{\varepsilon_j} \in R$  si ha

$$f(s_{i_1})^{\varepsilon_1} \cdots f(s_{i_j})^{\varepsilon_j} = 1_H.$$

*Dimostrazione.*

$\implies$  ) Per definizione di relazione,  $\bar{r} = 1_G$  per ogni  $r \in R$ . Se  $r = s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{i_j}^{\varepsilon_j}$  allora

$$1_H = \varphi(\bar{r}) = \varphi(\bar{s}_{i_1})^{\varepsilon_1} \cdots \varphi(\bar{s}_{i_j})^{\varepsilon_j} = f(s_{i_1})^{\varepsilon_1} \cdots f(s_{i_j})^{\varepsilon_j}.$$

$\impliedby$  ) Per la proprietà universale del gruppo libero (3.105),  $f$  induce un omomorfismo  $\tilde{f}: F(S) \rightarrow H$ . Dato che

$$1_H = f(s_{i_1})^{\varepsilon_1} \cdots f(s_{i_j})^{\varepsilon_j}$$

per ogni  $s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{i_j}^{\varepsilon_j} \in R$ , si ha che  $\tilde{f}$  si annulla su ogni elemento di  $R$ . Dato che  $\ker \tilde{f}$  è normale, per quanto appena detto, si ha  $\ker \tilde{f} \supseteq \langle\langle R \rangle\rangle$ . Per il primo teorema di omomorfismo esiste un unico omomorfismo  $\varphi: F(S)/\langle\langle R \rangle\rangle \rightarrow H$  indotto da  $\tilde{f}$ .  $\square$

**Esempio 3.116** (Esempio del calcolo di una presentazione).

$$\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

*Dimostrazione.*

La funzione  $f: \{a, b\} \rightarrow \mathbb{Z}^2$  data da  $f(a) = (1, 0)$  e  $f(b) = (0, 1)$  rispetta la relazione che vogliamo imporre, infatti

$$f(a)f(b)f(a)^{-1}f(b)^{-1} = (1, 0) + (0, 1) - (1, 0) - (0, 1) = (0, 0),$$

dunque per la proprietà universale delle presentazioni (3.115) esiste un omomorfismo  $\varphi: \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \rightarrow \mathbb{Z}^2$  tale che  $\varphi(\bar{a}) = (1, 0)$  e  $\varphi(\bar{b}) = (0, 1)$ . Mostriamo che è un isomorfismo:

*surgettiva*) Per costruzione, l'immagine di  $\varphi$  contiene un insieme di generatori per  $\mathbb{Z}^2$ . Dato che  $\varphi$  è un omomorfismo di gruppi questo mostra la surgettività. *iniettiva*) Osserviamo che  $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$  è abeliano in quanto generato da  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  e questi generatori commutano per costruzione. Osserviamo allora che un generico elemento di  $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$  si può scrivere nella forma

$$\bar{a}^m \bar{b}^n \text{ per } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Per concludere osserviamo che

$$\begin{aligned} g = \bar{a}^m \bar{b}^n \in \ker \varphi &\iff \\ \iff (0, 0) = \varphi(\bar{a}^m, \bar{b}^n) = \varphi(\bar{a})^m \varphi(\bar{b})^n = m(1, 0) + n(0, 1) = (m, n) &\iff \\ \iff m = n = 0 &\iff \\ \iff g = \bar{a}^0 \bar{b}^0 = 1, & \end{aligned}$$

cioè  $\varphi$  ha nucleo banale.  $\square$

**Proposizione 3.117** (Presentazione del prodotto amalgamato).

Siano  $j_1: H \rightarrow G_1$  e  $j_2: H \rightarrow G_2$  omomorfismi. Siano  $h_1, \dots, h_k$  dei generatori di  $H$  e siano  $G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$ ,  $G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$ . Allora una presentazione di  $G_1 *_H G_2$  è data da

$$G_1 *_H G_2 = \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_3 \rangle,$$

dove  $R_3 = \{w_i z_i^{-1} \mid i \in \{1, \dots, k\}\}$ , dove  $w_i$  è una parola in  $F(S_1)$  che rappresenta  $j_1(h_i)$  e  $z_i$  è una parola in  $F(S_2)$  che rappresenta  $j_2(h_i)$ .

*Dimostrazione.*

Come notato in (3.112), basta imporre le relazioni del quoziente che definisce il prodotto amalgamato per dei generatori di  $H$ . Per definizione abbiamo dunque che

$$\begin{aligned} G_1 *_H G_2 &= G_1 * G_2 / \langle \langle R_3 \rangle \rangle = \\ &= \left( F(S_1 \cup S_2) / \langle \langle R_1 \cup R_2 \rangle \rangle \right) / \langle \langle R_3 \rangle \rangle = \\ &= F(S_1 \cup S_2) / \langle \langle R_1 \cup R_2 \cup R_3 \rangle \rangle = \\ &= \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_3 \rangle. \end{aligned}$$

□

### 3.7.6 Rango

**Definizione 3.118** (Rango).

Dato un gruppo  $G$ , il suo **rango** (che indichiamo  $\text{rnk } G$ ) è il minimo numero di generatori di  $G$  (evitiamo questioni di buona definizione).

**Esempio 3.119** (Rango di  $\mathbb{Z}^n$ ).

$\text{rnk } \mathbb{Z}^n = n$ .

*Dimostrazione.*

Osserviamo che  $\text{rnk } \mathbb{Z} \leq n$ , infatti  $\mathbb{Z}^n$  è generato da

$$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1).$$

Sia  $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{Z}^n$  un insieme di generatori. Pensandoli come vettori in  $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{Z}^n = \text{Span}_{\mathbb{Z}}(v_1, \dots, v_m) \subseteq \text{Span}_{\mathbb{R}}(v_1, \dots, v_m),$$

dunque  $\text{Span}_{\mathbb{R}}(v_1, \dots, v_m) \supseteq \text{Span}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{R}^n$ , dunque  $\{v_1, \dots, v_m\}$  genera  $\mathbb{R}^n$  e siccome  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$ , necessariamente  $m \geq n$ . □

*Osservazione 3.120* (Rango e omomorfismi surgettivi).

Se  $\varphi : G \rightarrow H$  è un omomorfismo di gruppi surgettivo allora  $\text{rnk } G \geq \text{rnk } H$ .

*Osservazione 3.121* (Rango di sottogruppi può crescere).

Esistono esempi di gruppi  $G$  tali che  $H \leq G$  e  $\text{rnk } H > \text{rnk } G$ .

**Esempio 3.122** (Gruppo con sottogruppo di rango più grande).

Il gruppo libero  $F_2 = \langle a, b \rangle$  ha rango 2. Per ogni  $k \geq 1$  poniamo  $y_k = x^k y x^{-k}$  e per  $m \geq 3$  sia  $G_m < F_2$  il sottogruppo generato da  $y_1, \dots, y_m$ . Si verifica che  $G_m = F(\{y_1, \dots, y_m\})$ , che ha rango  $m > 2$ .

### 3.7.7 Gruppi fondamentali di proiettivi

**Teorema 3.123** (I proiettivi complessi sono semplicemente connessi).

$\mathbb{P}^n \mathbb{C}$  è semplicemente connesso per ogni  $n$ .

*Dimostrazione.*

Procediamo per induzione su  $n$ .

$n = 0$ )  $\mathbb{P}^0\mathbb{C} = \{[0]\}$  è un punto.

$n \geq 0$ ) Supponiamo che  $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$  sia semplicemente connesso. Poniamo

$$A = \mathbb{P}^{n+1}\mathbb{C} \setminus \{[1:0:\dots:0]\} \quad \text{e} \quad B = U_0.$$

Per costruzione  $A \cup B = \mathbb{P}^{n+1}\mathbb{C}$ . Mostriamo che  $H_0 \cong \mathbb{P}^n\mathbb{C}$  è un retratto di deformazione di  $A$ :

$$K: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+2} \setminus \text{Span}((1, 0, \dots, 0)) \times [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+2} \setminus \text{Span}((1, 0, \dots, 0)) \\ ((x_0, \dots, x_{n+1}), t) & \longmapsto & ((1-t)x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \end{array}.$$

Osserviamo che  $K$  è una omotopia ben definita perché almeno uno tra  $x_1, \dots, x_{n+1}$  non è nullo (altrimenti il punto starebbe in  $\text{Span}((1, 0, \dots, 0))$ ).

Se  $\sim$  è la relazione che definisce il proiettivo, sapendo che omotopie passano al quoziente (3.12), si ha che  $K$  definisce

$$\bar{K}: \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{n+1} \setminus \{[1:0:\dots:0]\} \times [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{P}^{n+1} \setminus \{[1:0:\dots:0]\} \\ ([x_0, \dots, x_{n+1}], t) & \longmapsto & [(1-t)x_0, x_1, \dots, x_{n+1}] \end{array}$$

e questa è la retrazione cercata.

Questo mostra che  $A$  è connesso per archi e semplicemente connesso in quanto  $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$  lo è e  $A \simeq H_0 \cong \mathbb{P}^n\mathbb{C}$ .

Osserviamo ora che  $B = U_0 \cong \mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$  che è contraibile.

Infine vediamo che  $A \cap B$  è connesso per archi, infatti

$$A \cap B = U_0 \setminus \{[1:0:\dots:0]\} \cong \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$$

tramite la carta  $J_0$  e il membro di destra è chiaramente connesso per archi perché isomorfo a  $\mathbb{R}^{2n+2} \setminus \{0\}$ .

Per avere la tesi basta applicare il teorema di Seifert-Van Kampen (3.96) e osservare che un gruppo generato da gruppi banali è banale.  $\square$

**Teorema 3.124** (Gruppi fondamentali dei proiettivi reali).

*Valgono le seguenti identità*

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbb{P}^1\mathbb{R}) &= \mathbb{Z}, \\ \pi_1(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

*Dimostrazione.*

$n = 1$ )  $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$  è omeomorfo a  $S^1$ .

$n \geq 2$ ) Considero il rivestimento di grado due  $p: S^n \rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{R}$  dato dalla mappa antipodale. Fissiamo  $[x_0] \in \mathbb{P}^n\mathbb{R}$  e sia  $F = \{x_0, -x_0\}$  la sua fibra in  $S^n$ .

Se troviamo una bigezione tra  $\pi_1(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, [x_0])$  e  $F$  allora in particolare il gruppo fondamentale avrà due elementi e un gruppo con due elementi è necessariamente isomorfo a  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Ricordando l'azione di monodromia di  $\pi_1(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, [x_0])$  su  $F$ , consideriamo la mappa

$$\psi: \begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, [x_0]) & \longrightarrow & F \\ g & \longmapsto & x_0 \cdot g \end{array}.$$

$\psi$  surgettiva) Poiché  $S^n$  è connesso per archi, l'azione di monodromia è transitiva (3.84), dunque  $\psi$  è surgettiva.

$\psi$  iniettiva) Se  $\psi(g_1) = \psi(g_2)$  allora  $x_0 g_1 = x_0 g_2$ , dunque  $x_0 = x_0(g_2 g_1^{-1})$ , cioè

$$g_2 g_1^{-1} \in \text{stab}(x_0) \stackrel{\text{monodromia}}{=} p_*(\pi_1(S^n, x_0)) = \{1\},$$

dove l'ultima uguaglianza segue perché  $S^n$  è semplicemente connesso (qui abbiamo usato  $n \geq 2$ ). Dunque  $g_2 g_1^{-1} = 1$ , cioè  $g_1 = g_2$ , ovvero  $\psi$  è iniettiva.  $\square$

### 3.7.8 Gruppi fondamentali di superfici

#### Toro

Potremmo usare il fatto che  $T^2 = S^1 \times S^1$  e che i gruppi fondamentali rispettano il prodotto diretto, ma preferiamo dare un'altra dimostrazione che si generalizza ad una classe più ampia di superfici.

**Teorema 3.125** (Gruppo fondamentale del toro).

*Si ha che*

$$\pi_1(T^2) = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

*Dimostrazione.*

Ricordiamo che, se  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ , possiamo scrivere  $T^2 = Q/\sim$ , dove  $\sim$  identifica lati opposti senza cambiare orientazione:

$$(x, y) \sim (x', y') \iff \begin{cases} x = x, y = y' & \text{oppure} \\ x = x', \{y, y'\} = \{0, 1\} & \text{oppure} \\ y = y', \{x, x'\} = \{0, 1\} \end{cases}$$

Sia  $\pi : Q \rightarrow T^2$  la proiezione al quoziente per questa relazione. Vorremmo applicare il teorema di Seifert-Van Kampen (3.96); definiamo allora i seguenti aperti:

$$A = T^2 \setminus \pi((1/2, 1/2)) = \pi(Q \setminus (1/2, 1/2)), \quad B = \pi((0, 1) \times (0, 1)).$$

Coprono)  $A \cup B = T^2$  in quanto  $\pi^{-1}(A) \cup \pi^{-1}(B) = Q$ .

Primo aperto) Osserviamo che la retrazione per deformazione radiale di  $Q \setminus \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$  su  $\partial Q$  passa al quoziente (3.12). Osserviamo dunque che  $A$  si retrae per deformazione su  $\pi(\partial Q) \cong S^1 \vee S^1$ . Da questo segue che  $A$  è connesso per archi e che

$$\pi_1(A) = \pi_1(S^1 \vee S^1) = F(a, b).$$

Ricordando come abbiamo calcolato  $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ , possiamo interpretare quei generatori come un laccio che fa un giro attorno la prima copia di  $S^1$  e l'altro come un laccio che fa un giro attorno l'altra copia. Ricordando come agisce l'identificazione  $\pi$ , osserviamo che al laccio  $a$  corrisponde una coppia di lati opposti di  $\partial Q$  e a  $b$  l'altra coppia.

Secondo aperto) Osserviamo che  $B \cong (0, 1) \times (0, 1)$  che è contraibile, in particolare è semplicemente connesso.

Intersezione) Osserviamo che

$$A \cap B \cong ((0, 1) \times (0, 1)) \setminus \{(1/2, 1/2)\} \simeq S^1,$$



dove l'equivalenza omotopica è data dal fatto che un quadrato senza un punto si retrae per deformazione su qualcosa di omeomorfo al suo bordo, che è omeomorfo a  $S^1$ . Osserviamo dunque che  $A \cap B$  è connesso per archi e  $\pi_1(A \cap B) \cong \mathbb{Z}$ .

Se  $[\alpha]$  è un laccio che genera  $\pi_1(A \cap B)$  osserviamo che possiamo identificare  $\alpha$  con una preimmagine di  $aba^{-1}b^{-1}$ , dove questi sono i generatori che avevamo citato prima per  $A$ . L'idea geometrica è che entrambe le espressioni rappresentano la proiezione tramite  $\pi$  del cammino che segue  $\partial Q$  e fa un solo giro. Gli inversi in  $aba^{-1}b^{-1}$  derivano dall'orientazione relative di come identificare i lati opposti.

Per il teorema di Seifert-Van Kampen (3.96), consci della definizione di prodotto amalgamato, si ha che

$$\pi_1(T^2) = \pi_1(A) *_{\pi_1(A \cap B)} \pi_1(B) = F(a, b) *_{\mathbb{Z}} \{1\}.$$

Su un diagramma la situazione è la seguente

$$\begin{array}{ccc} & F_2 & \\ j_1 \nearrow & & \searrow \\ \mathbb{Z} & & ? \\ j_2 \searrow & & \nearrow \\ & \{1\} & \end{array}$$

Chiaramente  $j_2$  è l'omomorfismo banale. Dato che  $\mathbb{Z}$  è ciclico,  $j_1$  è univocamente determinata da  $j_1(1) = j_1([\alpha])$ , dove  $[\alpha]$  genera  $\pi_1(A \cap B) \cong \mathbb{Z}$ .

Per la proposizione (3.117), date le presentazioni

$$\begin{aligned} \pi_1(A) &= \langle a, b \mid \emptyset \rangle \\ \pi_1(B) &= \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle \\ \pi_1(A \cap B) &= \langle \alpha \mid \emptyset \rangle, \end{aligned}$$

osservando che  $R_3 = \{j_1([\alpha])j_2([\alpha])^{-1}\}$ , si ha che

$$\pi_1(T^2) \cong \langle a, b \mid j_1([\alpha])j_2([\alpha])^{-1} \rangle \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1}1^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

□

### Superfici con dato genere

Per ogni  $g \in \mathbb{N}$  indichiamo con  $\Sigma_g$  la superficie compatta di genere  $g$  (cioè con  $g$  “buchi”). Per  $g = 0$  e  $g = 1$  si ha che  $\Sigma_g$  è  $S^2$  e  $S^1 \times S^1$  rispettivamente.

**Fatto 3.126** (Classificazione delle superfici compatte orientabili).

*La famiglia delle  $\Sigma_g$  contiene tutte e sole le superfici compatte orientabili.*<sup>17</sup>

Come per il toro, possiamo scrivere ogni  $\Sigma_g$  in termini di un poligono quozientato per una relazione che identifica dei lati:

<sup>17</sup> Evitiamo di dare le definizioni di questi concetti.

Costruzione di  $\Sigma_g$ ) Sia  $Q$  un  $4g$ -agone e numeriamo i vertici con  $v_1, \dots, v_{4g}$ . Diamo un nome ai lati come segue:

$$a_i = v_{4i-3}v_{4i-2}, \quad b_i = v_{4i-2}v_{4i-1}, \quad c_i = v_{4i-1}v_{4i}, \quad d_i = v_{4i}v_{4i+1}.$$

Scrivendo i lati in ordine troveremmo

$$a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, \dots, d_{g-1}, a_g, b_g, c_g, d_g.$$

Vogliamo imporre la seguente identificazione:  $a_i$  si identifica con  $c_i$  in modo tale che  $v_{4i-3} \sim v_{4i}$  e  $v_{4i-2} \sim v_{4i-1}$  e similmente  $b_i$  si identifica con  $d_i$  invertendo l'ordine di percorrenza del bordo.

Per rendere più chiaro come si realizzano queste identificazioni tagliamo  $Q$  con i lati  $v_1v_{4i+1}$  in modo da ottenere  $g$  pezzi.

Il primo e l'ultimo pezzo (come indice massimo del vertice presente) hanno 5 lati, mentre i pezzi centrali hanno 6 lati. In ogni pezzo, 4 lati adiacenti sono della forma  $a_i, b_i, c_i, d_i$ .

Identificando questi quattro lati come detto prima troviamo:

- per il primo e l'ultimo pezzo abbiamo un toro con un buco che ha come bordo una circonferenza
- per i pezzi in mezzo abbiamo un toro con un buco che ha come bordo un bouquet di due cerchi.

Per completare l'identificazione dobbiamo riattaccare i pezzi: il primo pezzo si attacca lungo la circonferenza che ne è il bordo al primo pezzo centrale colmando una delle due circonferenze del bouquet. Reiterando questi incollamenti attacchiamo a catena tutti i pezzi fino all'ultimo, che colma l'ultima circonferenza rimasta nel bouquet che definisce il bordo del penultimo pezzo.

Abbiamo così ottenuto una superficie senza bordo con  $g$  buchi, cioè  $\Sigma_g$ .

**Teorema 3.127** (Gruppo fondamentale delle superfici di genere  $g$ ).

*Si ha che*

$$\pi_1(\Sigma_g) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] \rangle,$$

dove le quadre indicano i commutatori<sup>18</sup>.

*Dimostrazione.*

La dimostrazione è identica a quella proposta per il toro. Riportiamo le idee chiave:

La proiezione di  $Q \setminus \{\text{punto interno}\}$  si retrae per deformazione sul bouquet  $S^1 \vee \dots \vee S^1$  di  $2g$  copie di  $S^1$ . La proiezione di  $Q \setminus \partial Q$  è contraibile, dunque semplicemente connessa. La proiezione di  $Q \setminus (\partial Q \cup \{\text{punto interno}\})$  è omotopicamente equivalente a  $S^1$  e un generatore del suo gruppo fondamentale è omotopo in  $\pi_1(Q \setminus \{\text{punto interno}\})$  a  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$  (geometricamente stiamo percorrendo  $\partial Q$  e poi proiettando). La tesi segue per il teorema di Seifert-Van Kampen (3.96).  $\square$

**Proposizione 3.128** (Genere determina univocamente il  $\pi_1$ ).

*Poniamo  $\Gamma_g = \pi_1(\Sigma_g)$ . Si ha che*

$$\Gamma_g \cong \Gamma_{g'} \iff g = g'.$$

<sup>18</sup> $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ .

*Dimostrazione.*

È sufficiente mostrare che  $\text{rk } \Gamma_g = 2g$ . Data la presentazione di  $\Gamma_g$  trovata sopra (3.127) si ha che

$$\text{rk } \Gamma_g \leq 2g.$$

Definiamo ora  $\psi : \{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\} \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}$  con

$$\psi(a_j) = e_j, \quad \psi(b_j) = e_{g+j},$$

dove  $e_1, \dots, e_{2g}$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^{2g} \supseteq \mathbb{Z}^{2g}$ . Dato che  $\mathbb{Z}^{2g}$  è abeliano

$$\underbrace{[\psi(a_1), \psi(b_1)]}_{=1} \cdots \underbrace{[\psi(a_g), \psi(b_g)]}_{=1} = 1,$$

quindi  $\psi$  induce un omomorfismo  $\tilde{\psi} : \Gamma_g \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}$ . Osserviamo che  $\tilde{\psi}$  è surgettivo perché la sua immagine contiene la base canonica, che genera  $\mathbb{Z}^{2g}$ . Questo implica (3.120) che

$$\text{rk } (\Gamma_g) \geq \text{rk } (\mathbb{Z}^{2g}) = 2g.$$

□

**Teorema 3.129** (Genere, classe di Omotopia e  $\pi_1$  sono invarianti completi).

*Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1.  $g = g'$
2.  $\Sigma_g \cong \Sigma_{g'}$  (omeomorfismo)
3.  $\Sigma_g \simeq \Sigma_{g'}$  (equivalenza omotopica)
4.  $\pi_1(\Sigma_g) \cong \pi_1(\Sigma_{g'})$

*Dimostrazione.*

Le implicazioni in discesa sono ovvie.  $4 \implies 1$  segue dal fatto che se i gruppi sono isomorfi allora hanno lo stesso rango e quindi  $2g = 2g' \implies g = g'$  (per dire che i ranghi sono  $2g$  e  $2g'$  abbiamo usato (3.128)). □

**Fatto 3.130.**

*È possibile dimostrare che ogni superficie compatta non orientabile ammette un rivestimento a due fogli dato da una superficie compatta orientabile.*

## 3.8 Rivestimento Universale

**Definizione 3.131** (Rivestimento universale).

Un rivestimento  $p : E \rightarrow X$  è **universale** se  $E$  è semplicemente connesso.

**Esempio 3.132.**

I seguenti sono rivestimenti universali

- $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  data da  $p(t) = e^{2\pi it}$
- $p : \mathbb{R}^n \rightarrow (S^1)^n$  data da  $p(t_1, \dots, t_n) = (e^{2\pi it_1}, \dots, e^{2\pi it_n})$
- Per  $n \geq 2$ ,  $p : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{R}$  data da  $p(v) = [v]$ .

Vedremo che il rivestimento universale, se esiste, è unico a meno di isomorfismo ed è definito da una proprietà universale.

**Teorema 3.133** (Gruppo fondamentale e fibra nel punto sono in bigezione).

Sia  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento universale e sia  $x_0 \in X$ . Allora

$$|\pi_1(X, x_0)| = |p^{-1}(x_0)|.$$

*Dimostrazione.*

Fissiamo  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0) = F$  e definiamo

$$\psi : \begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & F \\ \gamma & \longmapsto & \tilde{x}_0 \cdot \gamma \end{array},$$

dove il punto indica l'azione di monodromia  $\pi_1(X, x_0) \curvearrowright F$ . Mostriamo che è una bigezione:

*surgettività*) Poiché  $E$  è connesso per archi, l'azione è transitiva su  $F$  (3.84), dunque  $\psi$  è surgettiva.

*iniettività*) Se  $\psi(\gamma) = \psi(\eta)$  allora  $\tilde{x}_0 \cdot \gamma = \tilde{x}_0 \cdot \eta$ . Applichiamo  $\gamma^{-1}$ :

$$\tilde{x}_0 = (\tilde{x}_0 \cdot \gamma) \cdot \gamma^{-1} = (\tilde{x}_0 \cdot \eta) \cdot \gamma^{-1},$$

dunque  $\eta * \gamma^{-1} \in \text{stab}(\tilde{x}_0) = p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$ , dove l'ultima uguaglianza è una proprietà dell'azione di monodromia (3.84). Poiché  $E$  è semplicemente connesso  $\pi_1(E, \tilde{x}_0) = \{1\}$ , dunque  $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) = \{1\}$  e questo mostra che  $\eta = \gamma$ .  $\square$

**Esempio 3.134** (Gruppi fondamentali dei proiettivi).

Per  $n \geq 2$  si ha che  $\pi_1(\mathbb{P}^n \mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

*Dimostrazione.*

Il rivestimento  $S^n \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{R}$  dato dall'identificazione antipodale è universale, dunque  $|\pi_1(\mathbb{P}^n \mathbb{R})| = 2$  da cui la tesi.  $\square$

Cerchiamo di capire quando esistono i rivestimenti universali:

**Definizione 3.135** (Semilocalmente semplicemente connesso).

Uno spazio  $X$  è **semilocalmente semplicemente connesso**<sup>19</sup> se ogni  $x_0 \in X$  ammette un intorno  $U \subseteq X$  tale che se  $i : U \hookrightarrow X$  è l'inclusione allora  $i_* : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  è l'omomorfismo banale, cioè

“ogni laccio contenuto in  $U$  è omotopicamente equivalente a  $c_{x_0}$  in  $X$ .”

**Esempio 3.136** (Spazio non semilocalmente semplicemente connesso).

Consideriamo gli orecchini hawaiani

$$H = \bigcup_{n \geq 1} \underbrace{\left\{ (x, y) \left| x^2 + \left( y - \frac{1}{n} \right)^2 = \frac{1}{n^2} \right. \right\}}_{\doteq C_n} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

<sup>19</sup>altrimenti detto “non orribile” \j

*Dimostrazione.*

Sia  $U$  un intorno di  $0$  e scegliamo  $n \geq 1$  tale che  $C_n \subseteq U$ . Sia  $r : H \rightarrow C_n$  la retrazione data da  $r(C_j) = \{0\}$  per ogni  $j \neq n$  e  $r|_{C_n} = id_{C_n}$ . In particolare, se  $j : C_n \rightarrow H$  è l'inclusione,  $r \circ j = id_{C_n} \implies r_* \circ j_* = id_{\pi_1(C_n, 0)}$ , quindi  $j_*$  è iniettiva.

Se  $i : U \rightarrow H$  e  $k : C_n \rightarrow U$  sono le inclusioni osserviamo che  $j_* = i_* \circ k_*$ , quindi  $i_*$  non può essere banale perché  $j_*$  è iniettiva e  $\pi_1(C_n, 0) \cong \mathbb{Z}$ . Abbiamo mostrato che  $H$  non è semilocalmente semplicemente connesso in  $0$ .  $\square$

**Corollario 3.137.**

*L'orecchino hawaiano NON è omeomorfo al bouquet di infinite circonferenze perché questo È semilocalmente semplicemente connesso.*

*Dimostrazione.*

Il bouquet di infinite circonferenze non ha i vincoli di vicinanza imposti dall'inclusione in  $\mathbb{R}^2$ : se consideriamo un punto diverso dal punto che abbiamo incollato possiamo trovare un intorno interamente contenuto in una circonferenza. Consideriamo dunque il punto dove abbiamo incollato le circonferenze: un intorno piccolo di questo punto può essere l'unione dei semicerchi inferiori di tutte le circonferenze. Questo intorno è chiaramente contraibile.  $\square$

*Osservazione 3.138.*

Localmente semplicemente connesso implica semilocalmente semplicemente connesso.

**Esempio 3.139.**

Un bouquet di un numero finito di circonferenze e le varietà topologiche sono semilocalmente semplicemente connesse.

**Teorema 3.140** (Esistenza dei rivestimenti universali).

*$X$  ammette un rivestimento universale se e solo se  $X$  è semilocalmente semplicemente connesso.*

*Dimostrazione.*

$\implies$ ) Sia  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento universale e sia  $x_0 \in X$ . Sia  $U$  un intorno ben rivestito di  $x_0$  e sia  $V \subseteq p^{-1}(U)$  un foglio tale che  $p|_V : V \rightarrow U$  sia un omeomorfismo. Sia  $g = p|_V^{-1}$ . Consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & E \\ g \uparrow & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

in particolare  $i_* = p_* \circ j_* \circ g_*$ , ma  $E$  è semplicemente connesso, quindi  $j_* = 1$ , dunque  $i_* = 1$ , allora ogni laccio in  $U$  è omotopo al laccio banale in  $X$ .

$\Leftarrow$ ) [IDEA]<sup>20</sup>

Fissato  $x_0 \in X$ , definiamo

$$E = \{\text{cammini in } X \text{ uscenti da } x_0\} / \text{omotopia di cammini}.$$

<sup>20</sup>Durante il corso è stata data solo un'idea di dimostrazione. La formalizzazione non è richiesta.

Osserviamo che ha senso definire una mappa  $p : E \rightarrow X$  data da  $p([\gamma]) = \gamma(1)$ . L'idea della dimostrazione è definire una topologia su  $E$  in modo tale che  $p$  sia un rivestimento universale.

La topologia che si rivelerà vincente è la seguente:

Per ogni  $[\gamma] \in E$ , sia  $U \subseteq X$  un intorno semplicemente connesso di  $\gamma(1)$  e poniamo

$$[\gamma * U] = \{[\gamma * \eta] \mid \eta \text{ cammino in } U \text{ uscente da } \gamma(1)\}.$$

La topologia che consideriamo è quella generata da  $[\gamma * U]$  al variare di  $U$  e  $\gamma$ .  $\square$

### 3.8.1 Proprietà categoriche dei rivestimenti

**Lemma 3.141** (Fattorizzazione di rivestimenti).

*Dati  $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, X$  connessi per archi e localmente connessi per archi, se il diagramma commuta*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & & \\ p_1 \downarrow & \searrow \varphi & \\ X & \xleftarrow{p_2} & \tilde{X}_2 \end{array}$$

*e sia  $p_1$  che  $p_2$  sono rivestimenti allora anche  $\varphi$  lo è.*

*Dimostrazione.*

Cerchiamo un intorno ben rivestito per  $\varphi$ . Per concludere ci servirà mostrare che  $\varphi^{-1}(U) \neq \emptyset$  per  $U$  candidato, quindi mostriamo prima che  $\varphi$  è surgettiva:  *$\varphi$  surgettiva*) Sia  $\tilde{x} \in \tilde{X}_2$  qualsiasi. Fissiamo  $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$  e siano  $\tilde{x}_2 = \varphi(\tilde{x}_1)$ ,  $x_1 = p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$ . Siano  $\hat{\gamma} \in \Omega(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2, \tilde{x})$  e  $\gamma = p_2 \circ \hat{\gamma} \in \Omega(X, x_1, p_2(\tilde{x}))$ . Sia  $\tilde{\gamma}$  l'unico sollevamento di  $\gamma$  in  $\tilde{X}_1$  che parte da  $\tilde{x}_1$ . Allora

$$p_2 \circ \varphi \circ \tilde{\gamma} = p_1 \circ \tilde{\gamma} = \gamma,$$

dunque  $\varphi \circ \tilde{\gamma}$  è il sollevamento di  $\gamma$  in  $\tilde{X}_2$  che parte da  $\tilde{x}_2$  per l'unicità dei sollevamenti (3.75). Da questa unicità segue che  $\varphi \circ \tilde{\gamma} = \hat{\gamma}$ , da cui

$$\tilde{x} = \hat{\gamma}(1) = \varphi(\tilde{\gamma}(1)).$$

*$\varphi$  ammette intorni ben rivestiti*) Sia  $\tilde{x} \in \tilde{X}_2$  qualsiasi e  $x = p_2(\tilde{x}) \in X$ . Siano  $U_1, U_2 \subseteq X$  intorni ben rivestiti di  $x$  rispetto a  $p_1$  e  $p_2$  rispettivamente. Sia  $V \subseteq U_1 \cap U_2$  la componente connessa per archi che contiene  $x$  e sia  $U \subseteq p_2^{-1}(V)$  il foglio che contiene  $\tilde{x}$  (sono entrambi aperti per (2.221)).

Affermiamo che  $U$  è un intorno ben rivestito per  $\varphi$ :

Siccome  $U$  è aperto e chiuso in  $p_2^{-1}(V)$  (2.219) si ha che  $\varphi^{-1}(U)$  è sia aperto che chiuso in  $\varphi^{-1}(p_2^{-1}(V)) = p_1^{-1}(V)$ . Segue che  $\varphi^{-1}(U)$  è unione disgiunta di fogli di  $p_1^{-1}(V)$ , infatti se così non fosse un foglio di  $V$  rispetto a  $p_1$  non sarebbe connesso per archi e quindi non potrebbe essere omeomorfo a  $V$ .

Se  $U_\alpha$  è uno di questi fogli (sto usando  $\varphi^{-1}(U) \neq \emptyset$ ) allora, poiché  $p_1|_{U_\alpha}$  e  $p_2|_U$  sono omeomorfismi e  $p_1 = p_2 \circ \varphi$  si ha che  $\varphi|_{U_\alpha}$  è un omeomorfismo da  $U_\alpha$  a  $U$ .  $\square$

*Osservazione 3.142.*

Un risultato analogo vale se  $p_1$  e  $\varphi$  sono rivestimenti. Il caso per  $p_2$  e  $\varphi$  rivestimenti invece vale supponendo  $X$  semilocalmente semplicemente connesso, ma non in generale.

**Proposizione 3.143** (Proprietà universale del rivestimento universale).

Sia  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento universale e sia  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  un rivestimento con  $\tilde{X}$  connesso per archi. Fissiamo  $x_0 \in X$  e siano  $\hat{x}_0 \in E$ ,  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  tali che  $p(\hat{x}_0) = x_0 = \pi(\tilde{x}_0)$ . Allora esiste un unico  $\tilde{p} : E \rightarrow \tilde{X}$  rivestimento tale che  $p = \pi \circ \tilde{p}$ .

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{p} & \downarrow \pi \\ E & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

*Dimostrazione.*

L'esistenza e unicità di  $\tilde{p}$  segue immediatamente dal teorema sui sollevamenti (3.88) osservando che

$$p_*(\pi_1(E, \hat{x}_0)) \stackrel{\text{sempl.conn.}}{=} p_*(\{0\}) = \{0\} \subseteq \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

Basta mostrare che  $\tilde{p}$  è un rivestimento, ma questo segue dal lemma (3.141).  $\square$

**Corollario 3.144** (Rivestimenti universali inducono omeomorfismo tra gli spazi totali).

Se  $p_1 : E_1 \rightarrow X$  e  $p_2 : E_2 \rightarrow X$  sono rivestimenti universali allora esiste un omeomorfismo  $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$  tale che

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\varphi} & E_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & X & \end{array}$$

*Dimostrazione.*

Fissati i punti base si applica la proprietà universale dei rivestimenti universali (3.143) per ottenere  $\varphi$  e  $\varphi^{-1}$  continue, cioè  $\varphi$  omeomorfismo.  $\square$

**Definizione 3.145** (Morfismo di rivestimenti).

Siano  $p_1 : E_1 \rightarrow X$  e  $p_2 : E_2 \rightarrow X$  rivestimenti. Un **morfismo** tra  $p_1$  e  $p_2$  è una mappa  $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$  continua tale che  $p_2 \circ \varphi = p_1$ .

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\varphi} & E_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & X & \end{array}$$

Se esiste un morfismo  $\psi : E_2 \rightarrow E_1$  tale che  $\psi \circ \varphi = id_{E_1}$  e  $\varphi \circ \psi = id_{E_2}$  allora  $\varphi$  è un **isomorfismo** di rivestimenti.

Se  $E_1 = E_2$  e  $p_1 = p_2$ , un isomorfismo di rivestimenti è detto **automorfismo** di rivestimenti.

*Osservazione 3.146.*

I morfismi di rivestimenti sono chiusi per composizione e l'identità è un morfismo.

**Definizione 3.147** (Automorfismi di rivestimenti).

L'insieme degli automorfismi di  $p : E \rightarrow X$  è un gruppo, detto **gruppo degli automorfismi** di  $p$ , che indichiamo

$$\text{Aut}(p) = \text{Aut}_X(E) = \text{Aut}(E).$$

Osserviamo che  $\varphi \in \text{Aut}(p)$  se e solo se  $\varphi : E \rightarrow E$  è un omeomorfismo e  $p \circ \varphi = p$ .

*Osservazione 3.148.*

Un morfismo di rivestimenti manda fibre in fibre. In particolare gli automorfismi inducono permutazioni di una fibra in se stessa, infatti se  $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$  allora  $p(\varphi(\tilde{x})) = p(\tilde{x}) = x$  implica  $\varphi(\tilde{x}) \in p^{-1}(x)$ .

**Proposizione 3.149** (Azione di  $\text{Aut}(p)$  e di monodromia commutano).

L'azione di monodromia e quella di  $\text{Aut}(p)$  commutano, cioè per  $F = p^{-1}(x_0)$ , per ogni  $\varphi \in \text{Aut}(p)$ ,  $\forall [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ ,  $\forall \tilde{x} \in F$

$$\varphi(\tilde{x} \cdot [\gamma]) = (\varphi(\tilde{x})) \cdot [\gamma].$$

*Dimostrazione.*

Sia  $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}$  il sollevamento di  $\gamma \in \Omega(X, x_0)$  che parte da  $\tilde{x}$ , cioè quel sollevamento tale che

$$\tilde{x} \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(1).$$

Osserviamo che  $\varphi \circ \tilde{\gamma}_{\tilde{x}}$  è ancora un sollevamento di  $\gamma$ , che parte stavolta da  $\varphi(\tilde{x})$ , quindi per l'unicità dei sollevamenti (3.75) abbiamo

$$\varphi(\tilde{x}) \cdot [\gamma] = \varphi \circ \tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(1) = \varphi(\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(1)) = \varphi(\tilde{x} \cdot [\gamma]).$$

□

## Isomorfismi di rivestimenti

Data l'utilità che avrà  $\text{Aut}(p)$  cerchiamo di capire quando due rivestimenti sono isomorfi.

**Teorema 3.150** (Caratterizzazione di rivestimenti isomorfi fissato un punto).

Siano  $p_1 : E_1 \rightarrow X$  e  $p_2 : E_2 \rightarrow X$  rivestimenti e fissiamo  $\tilde{x}_1 \in E_1$ ,  $\tilde{x}_2 \in E_2$  tali che  $p_1(\tilde{x}_1) = x_0 = p_2(\tilde{x}_2)$ . Allora esiste un isomorfismo  $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$  con  $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$  se e solo se  $p_{1*}(\pi_1(E_1, \tilde{x}_1)) = p_{2*}(\pi_1(E_2, \tilde{x}_2))$  in  $\pi_1(X, x_0)$ .

*Dimostrazione.*

Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & (E_2, \tilde{x}_2) & \\ \nearrow \varphi & \downarrow p_2 & \\ (E_1, \tilde{x}_1) & \xrightarrow{p_1} & (X, x_0) \end{array}$$

$\Rightarrow$ ) Se  $\varphi$  esiste,  $p_2 \circ \varphi = p_1$ , dunque

$$p_{2*}(\pi_1(E_2, \tilde{x}_2)) = p_{2*}(\varphi_*(\pi_1(E_1, \tilde{x}_1))) = p_{1*}(\pi_1(E_1, \tilde{x}_1)).$$

$\Leftarrow$ ) Se i due gruppi coincidono, il teorema sui sollevamenti (3.88) ci assicura l'esistenza di un morfismo  $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$  e un morfismo  $\psi : E_2 \rightarrow E_1$ . Per l'unicità dei sollevamenti (3.75) si ha che  $\varphi \circ \psi = id_{E_2}$  e  $\psi \circ \varphi = id_{E_1}$ , cioè  $\varphi$  è un isomorfismo. □



**Corollario 3.151** (Criterio di esistenza per automorfismi).

Sia  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento e consideriamo  $x_0 \in X$ ,  $F = p^{-1}(x_0)$  e  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in F$ , allora esiste un automorfismo  $\varphi \in \text{Aut}(p)$  tale che  $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$  se e solo se  $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_1)) = p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_2))$  in  $\pi_1(X, x_0)$ .

*Dimostrazione.*

È il teorema per  $E_1 = E_2$  e  $p_1 = p_2$ . □

**Proposizione 3.152** (Caratterizzazione di rivestimenti isomorfi).

Siano  $p_1 : E_1 \rightarrow X$  e  $p_2 : E_2 \rightarrow X$  rivestimenti e scegliamo  $\tilde{x}_j \in E_j$  con  $p_1(\tilde{x}_1) = x_0 = p_2(\tilde{x}_2)$ . Allora esiste un isomorfismo  $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$  se e solo se  $p_{1*}(\pi_1(E_1, \tilde{x}_1))$  e  $p_{2*}(\pi_1(E_2, \tilde{x}_2))$  sono coniugati in  $\pi_1(X, x_0)$ .

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$ ) Supponiamo che  $\varphi$  esista e poniamo  $\tilde{x}'_2 = \varphi(\tilde{x}_1)$ . Per il teorema (3.150) si ha

$$p_{1*}(\pi_1(E_1, \tilde{x}_1)) = p_{2*}(\pi_1(E_2, \tilde{x}'_2)).$$

Per le proprietà dell'azione di monodromia (3.84) si ha che

$$p_{2*}(\pi_1(E_2, \tilde{x}'_2)) = \text{stab}(\tilde{x}'_2) \text{ e } p_{2*}(\pi_1(E_2, \tilde{x}_2)) = \text{stab}(\tilde{x}_2).$$

La tesi segue ricordando che gli stabilizzatori di un elemento rispetto alla stessa azione sono coniugati<sup>21</sup>.

$\Leftarrow$ ) Se i gruppi sono coniugati allora esiste  $[\gamma]$  tale che

$$p_{1*}(\pi_1(E_1, \tilde{x}_1)) = [\gamma]^{-1} p_{2*}(\pi_1(E_2, \tilde{x}_2)) [\gamma].$$

Sia  $\tilde{\gamma}$  il sollevamento di  $\gamma$  che parte da  $\tilde{x}_2$  e poniamo  $\tilde{x}'_2 = \tilde{\gamma}(1)$ . Osserviamo che

$$[\gamma]^{-1} p_{2*}(\pi_1(E_2, \tilde{x}_2)) [\gamma] = p_{2*}(\pi_1(E_2, \tilde{x}'_2)),$$

quindi per il teorema (3.150), ponendo  $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}'_2$ , si ha che i rivestimenti sono isomorfi tramite una qualche  $\varphi$ . □

### 3.8.2 Rivestimenti regolari e corrispondenza di Galois

Da questo momento supponiamo sempre che gli spazi siano connessi per archi e localmente connessi per archi.

Studiamo ora in più dettaglio l'azione di  $\text{Aut}(p)$  e i quozienti che ne possono derivare.

**Proposizione 3.153** (Azione di  $\text{Aut}(p)$  è propriamente discontinua).

$\text{Aut}(p)$  agisce in modo propriamente discontinuo su  $E$ .

*Dimostrazione.*

Siano  $\tilde{x} \in E$ ,  $x = p(\tilde{x})$  e  $U \subseteq X$  un intorno ben rivestito di  $x$ . Scriviamo  $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha} V_{\alpha}$  con  $V_{\alpha} \subseteq E$  aperto e  $p|_{V_{\alpha}} : V_{\alpha} \rightarrow U$  omeomorfismo. Sia  $V_0$  il foglio contenente  $\tilde{x}$ .

Per concludere basta mostrare che se  $\varphi \in \text{Aut}(p)$  con  $\varphi(V_0) \cap V_0 \neq \emptyset$  allora  $\varphi = \text{id}_E$ . Se  $\varphi(V_0) \cap V_0 \neq \emptyset$  allora esiste  $z \in V_0$  tale che  $\varphi(z) \in V_0$ . Poiché

---

<sup>21</sup>Fatto di Algebra

$p \circ \varphi = p$ , si ha che  $p(\varphi(z)) = p(z)$ . Dato che  $p|_{V_0}$  è iniettiva si deve avere che  $\varphi(z) = z$ .

Abbiamo dunque mostrato che  $id_E$  e  $\varphi$  sono sollevamenti di  $p$  con  $\varphi(z) = id_E(z)$  e quindi per l'unicità dei sollevamenti (3.75)  $\varphi = id_E$ .  $\square$

**Teorema 3.154** (Per rivestimento da azione propriamente discontinua gli automorfismi sono il gruppo).

*Sia  $G$  un gruppo che agisce su  $Y$  in modo propriamente discontinuo. Se  $p : Y \rightarrow Y/G$  è il rivestimento indotto dal quoziente (3.71) si ha che  $\text{Aut}(p) = G$ <sup>22</sup>.*

*Dimostrazione.*

$\supseteq$ ) Per definizione  $G \curvearrowright Y$  e se  $g \in G$  abbiamo  $p \circ g = p$  per definizione di  $Y/G$ .  
 $\subseteq$ ) Siano  $\varphi \in \text{Aut}(p)$  e  $\tilde{y} \in Y$ . Allora  $\varphi(\tilde{y})$  appartiene alla stessa fibra di  $\tilde{y}$ , quindi per definizione di  $p$  e  $Y/G$  esiste  $g \in G$  tale che  $\varphi(\tilde{y}) = g \cdot \tilde{y}$ . Segue che  $g^{-1} \circ \varphi(\tilde{y}) = \tilde{y}$ , cioè  $g^{-1} \circ \varphi \in \text{Aut}(p)$  e fissa un punto. Dato che l'azione di  $\text{Aut}(p)$  è propriamente discontinua (3.153) si ha che  $g^{-1} \circ \varphi = id_Y$ , dunque  $\varphi = g$  e quindi  $\text{Aut}(p) \subseteq G$ .  $\square$

Potremmo chiederci se *ogni* rivestimento si può scrivere come quoziente per azione propriamente discontinua di gruppo. Purtroppo non è vero perché una scrittura del genere implicherebbe  $\text{Aut}(p) = G$  transitivo sulle fibre (per definizione di quoziente  $p(x) = p(y)$  se e solo se esiste  $g \in G$  tale che  $x = g \cdot y$ ) ma non tutti i gruppi degli automorfismi sono transitivi sulle fibre.

Definiamo allora la classe dei rivestimenti che hanno quest'ultima proprietà:

**Definizione 3.155** (Rivestimento regolare).

Un rivestimento  $p : E \rightarrow X$  è **regolare** (o **normale** o **di Galois**) se l'azione di  $\text{Aut}(p)$  è transitiva su ogni fibra rispetto a  $p$ .

**Proposizione 3.156** (I rivestimenti universali sono regolari).

*I rivestimenti universali sono regolari.*

*Dimostrazione.*

Sia  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento universale. Poiché  $\pi_1(E, \tilde{x}) = \{1\}$  si ha che  $p_*(\pi_1(E, \tilde{x})) = \{1\}$  in  $\pi_1(X, x_0)$  per ogni  $\tilde{x} \in F = p^{-1}(x_0)$ . In particolare queste immagini coincidono per ogni coppia di punti in  $F$ , dunque per (3.151) si ha che  $p$  ammette un automorfismo da  $\tilde{x}_1$  a  $\tilde{x}_2$  per ogni  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in F$ , cioè  $\text{Aut}(p)$  è transitivo su  $F$ , ovvero  $p$  è regolare per definizione.  $\square$

**Lemma 3.157.**

*Siano  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento,  $x_0, x_1 \in X$  e  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ ,  $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_1)$ . Allora dato  $\tilde{\gamma} \in \Omega(E, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1)$  e posto  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$  si ha che*

$$\Phi_\gamma : \begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_1) \\ [\eta] & \longmapsto & [\bar{\gamma} * \eta * \gamma] \end{array}$$

*è un isomorfismo e induce l'isomorfismo*

$$\Phi_\gamma|_{p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))} : p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \rightarrow p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_1))$$

<sup>22</sup>stiamo identificando  $G$  con gli omeomorfismi che induce su  $Y$ , che possiamo fare perché l'azione è propriamente discontinua, infatti  $\ell_g^{-1} \circ \ell_h = id_Y$  se e solo se  $g^{-1}h = 1_G$

*Dimostrazione.*

Definiamo i seguenti isomorfismi (3.38)

$$\Phi_\gamma : \begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_1) \\ [\eta] & \longmapsto & [\bar{\gamma} * \eta * \gamma] \end{array}, \quad \Phi_{\tilde{\gamma}} : \begin{array}{ccc} \pi_1(E, \tilde{x}_0) & \longrightarrow & \pi_1(E, \tilde{x}_1) \\ [\tilde{\eta}] & \longmapsto & [\tilde{\gamma} * \tilde{\eta} * \tilde{\gamma}] \end{array}.$$

Osserviamo che il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(E, \tilde{x}_0) & \xrightarrow{\Phi_{\tilde{\gamma}}} & \pi_1(E, \tilde{x}_1) \\ p_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\Phi_\gamma} & \pi_1(X, x_1) \end{array}$$

infatti

$$p_*(\Phi_{\tilde{\gamma}}([\tilde{\eta}])) = [p \circ (\tilde{\gamma} * \tilde{\eta} * \tilde{\gamma})] = [\bar{\gamma} * p \circ \tilde{\eta} * \gamma] = \Phi_\gamma(p_*([\tilde{\eta}])).$$

In particolare anche il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(E, \tilde{x}_0) & \xrightarrow{\Phi_{\tilde{\gamma}}} & \pi_1(E, \tilde{x}_1) \\ p_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) & \xrightarrow{\Psi} & p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_1)) \end{array} \quad \text{dove } \Psi = \Phi_\gamma|_{p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))}.$$

Poiché  $\Phi_{\tilde{\gamma}}$  è un isomorfismo e  $p_*$  è un isomorfismo con l'immagine (3.80) si ha che  $\Phi_\gamma|_{p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))}$  è un isomorfismo.  $\square$

**Teorema 3.158** (Caratterizzazioni dei rivestimenti regolari).

Sia  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento e fissiamo  $x_0 \in X$  e  $F = p^{-1}(x_0)$ . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1.  $\text{Aut}(p)$  è transitivo su  $F$
2. Esiste  $\tilde{x} \in F$  tale che  $p_*(\pi_1(E, \tilde{x})) \triangleleft \pi_1(X, x_0)$
3. Per ogni  $\tilde{x} \in F$ ,  $p_*(\pi_1(E, \tilde{x})) \triangleleft \pi_1(X, x_0)$
4.  $p$  è regolare.

*Dimostrazione.*

$3 \iff 1$ )  $\text{Aut}(p)$  è transitivo su  $F$  se e solo se  $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))$  non dipende dalla scelta di  $\tilde{x} \in F$ , infatti  $\text{Aut}(p)$  è transitivo se e solo se esiste un automorfismo che porta un qualsiasi punto della fibra in un dato altro e questo succede se e solo se i  $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))$  coincidono per ogni  $\tilde{x} \in F$  (3.151). Per concludere osserviamo che per le proprietà dell'azione di monodromia (3.84)

$$p_*(\pi_1(E, \tilde{x})) = \text{stab}(\tilde{x})$$

e due stabilizzatori per una stessa azione sono sempre coniugati, quindi abbiamo mostrato che (1) vale se e solo se per ogni  $\tilde{x} \in F$

$$\begin{aligned} \forall [\gamma] \in \pi_1(X, x_0) \quad \text{stab}(\tilde{x}) = [\gamma]^{-1} \text{stab}(\tilde{x}) [\gamma] &\iff \\ &\iff p_*(\pi_1(E, \tilde{x})) = \text{stab}(\tilde{x}) \triangleleft \pi_1(X, x_0) \end{aligned}$$

e questa è la condizione (3).

3  $\implies$  2) Ovvio.

2  $\implies$  1) Basta ricordare che gli stabilizzatori per una certa azione sono tutti e soli i coniugati di uno stabilizzatore fissato.

4  $\implies$  1) Regolare significa che  $\text{Aut}(p)$  è transitivo su ogni fibra, in particolare lo è per quella di  $x_0$ .

1  $\implies$  4) Siano  $x_0, x_1 \in X$  e fissiamo  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$  e  $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_1)$ . Sia  $\tilde{\gamma}$  un cammino in  $E^{23}$  da  $\tilde{x}_0$  a  $\tilde{x}_1$  e poniamo  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma} \in \Omega(X, x_0, x_1)$ .

Per il lemma (3.157) il coniugio tramite  $[\gamma]$  induce due isomorfismi:

$$\Phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1) \quad \text{e} \quad \Phi|_{p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))} : p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \rightarrow p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_1)).$$

Dato che  $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$  è normale in  $\pi_1(X, x_0)$  (abbiamo già mostrato le equivalenze tra (1), (2) e (3)) e poiché gli isomorfismi mantengono la normalità, si ha che  $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_1))$  è normale in  $\pi_1(X, x_1)$ , dunque  $\text{Aut}(p)$  è transitivo anche su  $p^{-1}(x_1)$ . La tesi segue ricordando che  $p$  è regolare se e solo se  $\text{Aut}(p)$  è transitivo su ogni fibra.  $\square$

La caratterizzazione in termini di sottogruppi normali risulterà chiave per trovare la corrispondenza di Galois che cerchiamo. Infatti grazie al prossimo risultato potremo scrivere gli automorfismi di rivestimenti regolari come quoziente del gruppo fondamentale dello spazio base.

**Teorema 3.159** ( $\text{Aut}(p)$  in termini del gruppo fondamentale).

Sia  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento e  $\tilde{x}_0 \in E$ . Allora

$$\text{Aut}(p) \cong N_{\pi_1(X, x_0)}(p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))) / p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)),$$

dove  $x_0 = p(\tilde{x}_0)$  e  $N_G(H)$  indica il **normalizzatore** di  $H$  in  $G^{24}$ .

*Dimostrazione.*

L'isomorfismo sarà indotto dalla seguente mappa tramite il primo teorema di omomorfismo

$$\alpha : \begin{array}{ccc} N_{\pi_1(X, x_0)}(p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))) & \longrightarrow & \text{Aut}(p) \\ [\gamma] & \longmapsto & \varphi_\gamma \end{array}$$

dove  $\varphi_\gamma$  è l'unico automorfismo tale che  $\varphi_\gamma(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot [\gamma]$  (unico per l'unicità dei sollevamenti (3.75)).

Per semplificare la notazione poniamo  $H = p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$ .

$\alpha$  è ben definito) Sia  $[\gamma] \in N(H)$  e cerchiamo  $\varphi \in \text{Aut}(p)$  tale che  $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot [\gamma]$ . Per il teorema sull'isomorfismo di rivestimenti fissato un punto (3.150) basta mostrare che

$$p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0 \cdot [\gamma])) = H.$$

Calcoliamo  $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0 \cdot [\gamma]))$ :

Sia  $\tilde{\gamma}$  il sollevamento di  $\gamma$  uscente da  $\tilde{x}_0$ . Per definizione  $\tilde{x}_0 \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}(1)$ .

Per il lemma (3.157) si ha che il coniugio per  $[\gamma]$  induce un isomorfismo

$$\Psi : H \rightarrow p_*(\pi_1(E, \tilde{\gamma}(1))) = p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0 \cdot [\gamma])),$$

<sup>23</sup>Stiamo supponendo  $E$  connesso per archi in questa sezione.

<sup>24</sup>Se  $H \leq G$  allora  $N_G(H) = \{g \in G \mid g^{-1}Hg = H\}$

cioè

$$p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0 \cdot [\gamma])) = [\gamma]^{-1} H[\gamma].$$

Poiché  $[\gamma] \in N(H)$  abbiamo l'uguaglianza cercata.

$\alpha$  è un omomorfismo) Siano  $[\gamma_1], [\gamma_2] \in N(H)$ . Poniamo  $\varphi_j = \alpha([\gamma_j])$  e  $\varphi_{12} = \overline{\alpha([\gamma_1] * [\gamma_2])} = \alpha([\gamma_1 * \gamma_2])$ . Vogliamo verificare che  $\varphi_{12} = \varphi_1 \circ \varphi_2$ . Basta verificare che

$$\widetilde{\gamma_1 * \gamma_2}_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{x}_0 \cdot [\gamma_1 * \gamma_2] = \varphi_{12}(\tilde{x}_0) \stackrel{?}{=} \varphi_1(\varphi_2(\tilde{x}_0)) = \varphi_1((\widetilde{\gamma_2})_{\tilde{x}_0}(1)).$$

Per alleggerire la notazione evitiamo di scrivere  $\tilde{x}_0$  al pedice per il resto di questa dimostrazione.

Dato che  $p(\varphi_1 \circ \tilde{\gamma}_2) = p \circ \tilde{\gamma}_2 = \gamma_2$  si ha che  $\varphi_1 \circ \tilde{\gamma}_2$  è un sollevamento di  $\gamma_2$  che parte da  $\varphi_1(\tilde{\gamma}_2(0)) = \varphi_1(\tilde{x}_0) = \tilde{\gamma}_1(1)$ , dunque  $\tilde{\gamma}_1 * \varphi_1 \circ \tilde{\gamma}_2$  è un sollevamento di  $\gamma_1 * \gamma_2$  che parte da  $\tilde{x}_0$ . Per l'unicità dei sollevamenti (3.75) si ha che

$$\tilde{\gamma}_1 * (\varphi_1 \circ \tilde{\gamma}_2) = \widetilde{\gamma_1 * \gamma_2}.$$

In particolare

$$\widetilde{\gamma_1 * \gamma_2}(1) = \tilde{\gamma}_1 * \varphi_1 \circ \tilde{\gamma}_2(1) = \varphi_1(\tilde{\gamma}_2(1))$$

come voluto.

$\alpha$  è surgettivo) Sia  $\varphi \in \text{Aut}(p)$  e siano  $\tilde{x} = \varphi(\tilde{x}_0)$ ,  $\tilde{\gamma} \in \Omega(E, \tilde{x}_0, \tilde{x})$  e  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ . Per definizione  $\tilde{x} = \tilde{x}_0 \cdot [\gamma]$ . Affermiamo che  $[\gamma] \in N(H)$ , infatti

$$H = p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \stackrel{\text{Esiste aut.}}{=} p_*(\pi_1(E, \tilde{x})) \stackrel{(3.157)}{=} [\gamma]^{-1} H[\gamma].$$

Per concludere osserviamo che  $[\gamma] \in N(H)$  implica  $\varphi = \alpha([\gamma])$ , infatti

$$\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot [\gamma] = \alpha([\gamma])(\tilde{x}_0)$$

e questo basta a identificare univocamente l'automorfismo per l'unicità dei sollevamenti (3.75).

$\ker \alpha = H$ ) Sia  $[\gamma] \in N(H)$  e  $\varphi = \alpha([\gamma])$ . Si ha che

$$\varphi = id_E \iff \tilde{x}_0 = \varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{\gamma}(1) \iff [\tilde{\gamma}] \in \pi_1(E, \tilde{x}_0) \iff [\gamma] = p_*([\tilde{\gamma}]) \in H.$$

□

**Proposizione 3.160** (Automorfismi di rivestimenti regolari).

Se  $p$  è regolare allora  $\text{Aut}(p) \cong \pi_1(X, x_0) / p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$  con  $x_0 = p(\tilde{x}_0)$

*Dimostrazione.*

Per la caratterizzazione (3.158) si ha che  $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$  è normale in  $\pi_1(X, x_0)$ , quindi per il teorema (3.159) abbiamo la tesi. □

**Corollario 3.161** (Automorfismi del rivestimento universale sono il gruppo fondamentale).

Se  $p$  è un rivestimento universale allora  $\text{Aut}(p) \cong \pi_1(X, x_0)$ .

*Dimostrazione.*

Segue immediatamente da (3.160) osservando che, poiché  $E$  è semplicemente connesso, vale

$$p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) = p_*(\{1\}) = \{1\}.$$

□

**Corollario 3.162** (Corrispondenza di Galois per rivestimenti regolari).

*Esiste una corrispondenza biunivoca tra i rivestimenti regolari di  $X$  a meno di isomorfismo e sottogruppi normali di  $\pi_1(X, x_0)$ . Sotto questa corrispondenza il grado del rivestimento corrisponde all'indice del sottogruppo.*

*Dimostrazione (IDEA).*

La corrispondenza associa ad un rivestimento regolare  $p : E \rightarrow X$  il sottogruppo  $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$ , dove  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$  qualsiasi.

Dato invece  $H \triangleleft \pi_1(X, x_0)$  costruiamo il seguente rivestimento:

Sia  $\tilde{p} : E \rightarrow X$  un rivestimento universale di  $X$  (3.140). Siano  $G = \pi_1(X, x_0)$ ,  $\tilde{X} = E/H$ ,  $p_1 : E \rightarrow \tilde{X}$  e  $p_2 : \tilde{X} \rightarrow X$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p_1} & \tilde{X} = E/H \\ \tilde{p} \downarrow & \swarrow p_2 & \\ X = E/G & & \end{array}$$

dove  $X = E/G$  perché  $\text{Aut}(\tilde{p}) \cong G$  (3.161) e poiché  $\tilde{p}$  è regolare (3.156) si ha  $X \cong E/\text{Aut}(\tilde{p})$ .

Chiaramente  $p_1$  è un rivestimento (3.71) quindi anche  $p_2$  è un rivestimento. (versione non dimostrata di (3.141))

Per concludere basta verificare che l'azione di  $G/H$  su  $E/H$  è propriamente discontinua da cui discenderà che  $p_2$  è un rivestimento regolare (quello che cerchiamo).

Mostriamo che  $H = p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ :

Per le proprietà dell'azione di monodromia (3.84)

$$p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \text{stab}(\tilde{x}_0),$$

il quale è un coniugato di  $H$ . Dato che  $H$  è normale,  $p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = H$  come voluto. □

### 3.8.3 Applicazioni della teoria dei rivestimenti

**Teorema 3.163** (Borsuk-Ulam).

*Non esistono funzioni  $f : S^2 \rightarrow S^1$  continue tali che  $f(-x) = -f(x)$  per ogni  $z \in S^2$ .*

*Dimostrazione.*

Per assurdo sia  $f$  una tale funzione. Poiché  $S^2$  è semplicemente connesso,  $f$  si solleva a  $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f = \pi \circ \tilde{f}$ , dove  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  è il rivestimento universale, infatti

$$f_*(\pi_1(S^2)) = f_*(\{1\}) = \{1\} \subseteq \pi_*(\pi_1(\mathbb{R}))$$

e ho il sollevamento per (3.88).

Sia  $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $g(x) = \tilde{f}(x) - \tilde{f}(-x)$ . Chiaramente  $g$  è continua e per ogni  $x \in S^2$  si ha  $g(-x) = \tilde{f}(-x) - \tilde{f}(x) = -g(x)$ . Poiché  $S^2$  è connesso,  $g(S^2)$  è connesso in  $\mathbb{R}$ , cioè è un intervallo (2.193). Osserviamo che per ogni  $g(x) \in g(S^2)$  si ha che  $g(-x) = -g(x) \in g(S^2)$ , dunque  $g(S^2)$  è un intervallo simmetrico rispetto a 0 non vuoto. In particolare  $0 \in g(S^2)$ , cioè esiste  $x_0 \in S^2$  tale che  $g(x_0) = 0$ .

Si ha dunque che  $\tilde{f}(x_0) = \tilde{f}(-x_0)$ , quindi proiettando  $f(x_0) = f(-x_0)$ , ma questo è assurdo perché  $f(x_0) = -f(-x_0)$ .  $\square$

**Teorema 3.164.**

*Non esistono funzioni  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  continue e iniettive.*

*Dimostrazione.*

Per assurdo sia  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  iniettiva. Definiamo  $g : S^2 \rightarrow S^1$  data da

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|},$$

che è ben definita perché  $f$  è iniettiva e quindi  $f(x) \neq f(-x)$ . Allora  $g$  è continua e  $g(-x) = -g(x)$ , che è assurdo per Borsuk-Ulam (3.163).  $\square$

## Capitolo 4

# Funzioni Olomorfe

### 4.1 Richiami di calcolo in più variabili

**Definizione 4.1** (Differenziabilità e differenziale).

Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  un aperto e sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione.  $f$  è **differenziabile** in  $x_0 \in U$  se esiste una funzione lineare  $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + L(v) + o(|v|).$$

In tal caso  $L$  è unica e si dice **differenziale** di  $f$  in  $x_0$  e si denota  $df_{x_0} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ .<sup>1</sup>

*Osservazione 4.2.*

Se  $f$  è  $\mathbb{R}$ -lineare allora coincide con il proprio differenziale.

*Dimostrazione.*

Caso particolare della definizione di differenziale. □

*Osservazione 4.3.*

Il differenziale di una composizione è la composizione dei differenziali.

*Dimostrazione.*

Segue dalle seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned} g(f(x_0 + v)) &= g(f(x_0) + df_{x_0}(v) + o(|v|)) = \\ &= g(f(x_0)) + dg_{f(x_0)}(df_{x_0}(v) + o(|v|)) + o(df_{x_0}(v) + o(|v|)) = \\ &= g(f(x_0)) + dg_{f(x_0)}(df_{x_0}(v)) + dg_{f(x_0)}(o(|v|)) + o(|v|) = \\ &= g(f(x_0)) + dg_{f(x_0)}(df_{x_0}(v)) + o(|v|). \end{aligned}$$

□

**Definizione 4.4** (Derivate parziali).

Se  $\{e_i\}$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^m$  allora definiamo la  $i$ -esima derivata parziale di  $f$  come

$$df_{x_0}(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

---

<sup>1</sup>La notazione usata nel corso di analisi 2 è  $\mathcal{D}f(x_0)$  al posto di  $df_{x_0}$ .



Per il resto del capitolo identifichiamo  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$  tramite l'isomorfismo  $(x, y) \leftrightarrow x + iy$ .

*Osservazione 4.5.*

$\mathbb{C}$  è sia un  $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale (di dimensione 1 con base  $\{1\}$ ) che un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale (di dimensione 2 con base  $\{1, i\}$ ).

**Definizione 4.6** (Coniugio).

La seguente mappa

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x + iy & \longmapsto & x - iy \end{array}$$

è detta **coniugio**. Se  $x \in \mathbb{C}$  spesso indichiamo la sua immagine tramite la mappa di coniugio con  $\bar{z}$  e chiamiamo questo il **coniugato (complesso)** di  $z$ .

*Osservazione 4.7.*

Il coniugio è  $\mathbb{R}$ -lineare ma non  $\mathbb{C}$ -lineare ( $-i = \bar{i} \neq i\bar{1} = i$ ).

**Proposizione 4.8** (Il differenziale è  $\mathbb{C}$ -lineare).

*Il differenziale è  $\mathbb{C}$ -lineare, cioè*

$$d((a + bi)f)_P = (a + bi)df_P.$$

*Dimostrazione.*

Per alleggerire la notazione omettiamo i pedici  $P$  e identifichiamo liberamente  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$ :

$$d((a + bi)f) = d(af + ibf) = adf + bd(if).$$

Per concludere basta mostrare che  $d(if) = idf$ . Se  $f(z) = g(z) + ih(z)$  allora

$$d(if) = d(-h + ig) = \mathcal{D} \begin{pmatrix} -h \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{D}h \\ \mathcal{D}g \end{pmatrix} = i(\mathcal{D}g + i\mathcal{D}h) = idf.$$

□

**Proposizione 4.9** (Proprietà del differenziale).

*Siano  $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$  con  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  aperto mappe differenziabili in  $P$ , allora*

1.  $(d\bar{f}_1)_P = (\overline{df_1})_P$
2.  $d(f_1 f_2)_P = (df_1)_P f_2(P) + f_1(P)(df_2)_P$
3. Se  $f_1(P) \neq 0$  allora  $\frac{1}{f_1}$  è definita in un intorno di  $P$  e

$$d\left(\frac{1}{f_1}\right)_P = -\frac{(df_1)_P}{f_1(P)^2}.$$

*Dimostrazione.*

Per alleggerire la notazione omettiamo le valutazioni in  $P$  e i pedici quando non si presenta ambiguità.

1) Sia  $\varphi$  la mappa di coniugio. Poiché  $\varphi$  è  $\mathbb{R}$ -lineare si ha che  $d\varphi = \varphi$  in ogni punto. Per concludere osserviamo che

$$d(\varphi \circ f) = d\varphi \circ df = \varphi \circ df.$$

2) Siano  $f_1 = g_1 + ih_1$  e  $f_2 = g_2 + ih_2$ , allora

$$f_1 f_2 = g_1 g_2 - h_1 h_2 + i(g_1 h_2 + g_2 h_1).$$

La tesi segue dal seguente calcolo:

$$\begin{aligned} d(f_1 f_2) &= d(g_1 g_2 - h_1 h_2) + id(g_1 h_2 + g_2 h_1) = \\ &= g_1 dg_2 + g_2 dg_1 - h_1 dh_2 - h_2 dh_1 + i(g_1 dh_2 + h_2 dg_1 + g_2 dh_1 + h_1 dg_2) = \\ &= g_1 dg_2 - h_1 dh_2 + i(g_1 dh_2 + h_1 dg_2) + g_2 dg_1 - h_2 dh_1 + i(h_2 dg_1 + g_2 dh_1) = \\ &= (g_1 + ih_1)(dg_2 + idh_2) + (g_2 + ih_2)(dg_1 + idh_1) = \\ &= f_1 df_2 + f_2 df_1. \end{aligned}$$

3) La tesi segue dal seguente calcolo

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{f}\right) &= d\left(\frac{1}{g+ih}\right) = d\left(\frac{g-ih}{g^2+h^2}\right) = d\left(\frac{g}{g^2+h^2}\right) - id\left(\frac{h}{g^2+h^2}\right) = \\ &= \frac{g^2 dg + h^2 dg - 2g^2 dg - 2ghdh}{(g^2+h^2)^2} - i \frac{g^2 dh + h^2 dh - 2ghdg - 2h^2 dh}{(g^2+h^2)^2} = \\ &= \frac{-g^2 dg + h^2 dg + 2ighdg - ig^2 dh + ih^2 dh - 2ghdh}{(g+ih)^2(g-ih)^2} = \\ &= -\frac{(dg+idh)(g^2-h^2-2igh)}{(g+ih)^2(g^2-h^2-2igh)} = \\ &= -\frac{df}{f^2}. \end{aligned}$$

□

#### Notazione 4.10.

Per semplicità notazionale a volte scriveremo  $z$  al posto di  $id_{\mathbb{C}}$ ,  $\bar{z}$  al posto della mappa coniugio,  $x$  per  $a+bi \mapsto a = \Re(a+bi)$  e  $y$  per  $a+bi \mapsto b = \Im(a+bi)$ . Cercherò di rendere la notazione meno ambigua possibile quando possibile.

*Osservazione 4.11.*

$z = x + iy$  e  $\bar{z} = x - iy$  come funzioni. Osserviamo inoltre che

$$dz = dx + idy, \quad d\bar{z} = dx - idy$$

per linearità. Nonostante  $z = dz$  e  $\bar{z} = d\bar{z}$  manterremo le  $d$  quando questo renderà più chiari i ragionamenti (vale a dire nel contesto delle 1-forme).

Osserviamo che con queste notazioni  $dx = x$  e  $dy = y$ .

*Osservazione 4.12.*

Se  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  è differenziabile in  $P \in U$  si ha che

$$df_P = \frac{\partial f}{\partial x}(P)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(P)dy.$$

*Dimostrazione.*

Segue dal seguente calcolo:

$$\begin{aligned} df_P(a+bi) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(P) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(P) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(a+bi) \\ y(a+bi) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(P)x(a+bi) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)y(a+bi) = \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(P)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(P)dy \right) (a+bi), \end{aligned}$$

dove la prima uguaglianza segue ricordando la definizione di  $df_P$  in termini del gradiente di  $f$ .  $\square$

*Osservazione 4.13.*

Dato che  $dz = dx + idy$  e  $d\bar{z} = dx - idy$  si ha che

$$dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2}, \quad dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i}.$$

Da questo segue che

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dz + d\bar{z}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dz - d\bar{z}}{2i} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}. \end{aligned}$$

Motivati dall'espressione sopra per  $df$  diamo le seguenti definizioni:

**Notazione 4.14.**

Poniamo

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

da cui

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}.$$

*Osservazione 4.15.*

Si ha che  $\frac{\partial f}{\partial z}dz$  è  $\mathbb{C}$ -lineare e  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$  è  $\mathbb{C}$ -antilineare.

*Dimostrazione.*

$dz$  è  $\mathbb{C}$ -lineare, quindi anche una costante per  $dz$  lo è. Similmente per  $d\bar{z}$  e  $\mathbb{C}$ -antilinearità.  $\square$

Abbiamo dunque decomposto  $f$  in una componente  $\mathbb{C}$ -lineare e una componente  $\mathbb{C}$ -antilineare. La decomposizione in realtà è unica perché

**Proposizione 4.16** (Le  $\mathbb{R}$  lineari sono la somma diretta delle  $\mathbb{C}$  lineari e  $\mathbb{C}$  antilineari).

$$\{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid \mathbb{R} - \text{lin.}\} = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid \mathbb{C} - \text{lin.}\} \oplus \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid \mathbb{C} - \text{antilin.}\}$$

*Dimostrazione.*

$\supseteq$ ) Le funzioni  $\mathbb{C}$ -lineari e  $\mathbb{C}$ -antilineari sono entrambe  $\mathbb{R}$ -lineari.

$\subseteq$ ) Se  $f$  è  $\mathbb{R}$ -lineare allora  $f = df$  e abbiamo la decomposizione esibita.

Somma diretta) Se  $f$  è sia  $\mathbb{C}$ -lineare che  $\mathbb{C}$ -antilineare allora

$$-if(z) = \bar{i}f(z) \stackrel{\text{antilin.}}{=} f(iz) \stackrel{\text{lin.}}{=} if(z),$$

dunque  $2if(z) = 0$ , da cui  $f(z) = 0$ . □

## 4.2 Funzioni olomorfe

**Definizione 4.17** (Funzione olomorfa).

Siano  $U \subseteq \mathbb{C}$  un aperto,  $z_0 \in U$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . La funzione  $f$  si dice **olomorfa** (o **derivabile in senso complesso**) in  $z_0$  se il seguente limite esiste

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \in \mathbb{C}.$$

$f$  è **olomorfa** se lo è in  $z_0$  per ogni  $z_0 \in U$ .

Poniamo

$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ olomorfa}\}$$

Osserviamo che essere olomorfa ed essere differenziabile hanno definizioni formalmente molto simili, ma sono proprietà diverse come mostra la seguente proposizione. La differenza sostanziale sta nel fatto che  $z - z_0$  nella definizione è un numero complesso, non una distanza. Più esplicitamente, la differenziabilità richiede solo l'esistenza di

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{|z - z_0|},$$

che è una condizione più debole.

**Lemma 4.18.**

Se  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  è olomorfa in  $z_0 \in U$  e  $f'(z_0)$  denota il limite della definizione di olomorfa allora

$$df_{z_0}(w) = f'(z_0)w.$$

*Dimostrazione.*

Segue dalla seguente catena di equivalenze

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= f'(z_0) \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) &= 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - hf'(z_0)}{h} &= 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - hf'(z_0)}{|h|} &= \frac{1}{h} \cdot 0 = 0 \\ f(z_0 + h) - f(z_0) - hf'(z_0) &= o(|h|) \\ f(z_0 + h) &= f(z_0) + f'(z_0)h + o(|h|) \\ f'(z_0)h &= df_{z_0}(h). \end{aligned}$$

□

**Proposizione 4.19** (Caratterizzazioni delle funzioni olomorfe).

Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  con  $U$  aperto e  $z_0 \in U$ . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1.  $f$  è olomorfa in  $z_0$
2.  $f$  è differenziabile in  $z_0$  e  $df_{z_0}$  è  $\mathbb{C}$ -lineare
3.  $f$  è differenziabile in  $z_0$  e  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$
4.  $f$  è differenziabile e valgono le **equazioni di Cauchy-Riemann**, cioè

$$\frac{\partial \Re(f)}{\partial x} = \frac{\partial \Im(f)}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Re(f)}{\partial y} = -\frac{\partial \Im(f)}{\partial x}.$$

5.  $df_{z_0}(w) = f'(z_0)w$ .

*Dimostrazione.*

1  $\implies$  2) Per il lemma  $df_{z_0}(w) = f'(z_0)w$  e la moltiplicazione per uno scalare è una mappa  $\mathbb{C}$ -lineare.

2  $\iff$  3) Segue dal fatto che

$$df_{z_0} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)d\bar{z}$$

e dalla decomposizione delle  $\mathbb{R}$ -lineari in somma diretta (4.16).

3  $\iff$  4) Se  $a = \Re(f)$  e  $b = \Im(f)$  allora  $f = a + ib$ . La tesi segue dalla seguente catena di equivalenze

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= 0 \\ \frac{\partial a + ib}{\partial \bar{z}} &= 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a + ib}{\partial x} + i \frac{\partial a + ib}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial a}{\partial x} + i \frac{\partial b}{\partial x} + i \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial b}{\partial x} = -\frac{\partial a}{\partial y}. \end{aligned}$$

2  $\implies$  1) Poiché  $df_{z_0}$  è  $\mathbb{C}$ -lineare si ha che esiste  $\lambda \in \mathbb{C}$  tale che  $f(z_0 + h) = f(z_0) + \lambda h + o(|h|)$ , dunque

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lambda \in \mathbb{C},$$

cioè  $f$  è olomorfa in  $z_0$ . □

**Teorema 4.20** (Proprietà aritmetiche delle olomorfe).

Siano  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : V \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfe. Allora

1. se  $U = V$  allora  $f + g : U \rightarrow \mathbb{C}$  è olomorfa
2. se  $U = V$  allora  $fg : U \rightarrow \mathbb{C}$  è olomorfa e

$$(fg)' = f'g + fg'$$

3. se  $f(U) \subseteq V$  allora  $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}$  è olomorfa e

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$$

4. se  $f'(z_0) \neq 0$  e  $f \in C^1$  allora esistono un intorno  $W$  di  $f(z_0)$  in  $\mathbb{C}$  e un intorno  $Z$  di  $z_0$  in  $U$  tali che  $f(Z) = W$ ,  $f|_Z \rightarrow W$  è bigettiva e  $(f|_Z)^{-1} : W \rightarrow Z$  è olomorfa con

$$((f|_Z)^{-1})'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

*Dimostrazione.*

1) Osserviamo che

$$\begin{aligned}(f + g)(z) &= f(z_0) + g(z_0) + df_{z_0}(z - z_0) + dg_{z_0}(z - z_0) + o(|z - z_0|) = \\ &= (f + g)(z_0) + (df_{z_0} + dg_{z_0})(z - z_0) + o(|z - z_0|),\end{aligned}$$

dove  $(df_{z_0} + dg_{z_0})$  è  $\mathbb{C}$ -lineare perché somma di  $\mathbb{C}$ -lineari. Dall'espressione raggiunta è chiaro che  $d(f + g)_{z_0} = df_{z_0} + dg_{z_0}$  e quindi  $f + g$  è olomorfa perché ha differenziale  $\mathbb{C}$ -lineare (4.19).

2) Osserviamo che

$$\begin{aligned}(fg)(z_0 + z) &= (f(z_0) + df_{z_0}(z) + o(|z|))(g(z_0) + dg_{z_0}(z) + o(|z|)) = \\ &= (fg)(z_0) + g(z_0)df_{z_0}(z) + f(z_0)dg_{z_0}(z) + o(|z|),\end{aligned}$$

da cui

$$d(fg)_{z_0}(z) = g(z_0)df_{z_0}(z) + f(z_0)dg_{z_0}(z) = (g(z_0)f'(z_0) + f(z_0)g'(z_0))z,$$

che è la tesi ricordando le caratterizzazioni delle funzioni olomorfe (4.19).

3) Ricordiamo che

$$d(g \circ f)_{z_0} = dg_{f(z_0)} \circ df_{z_0},$$

da cui, ricordando che  $df_{z_0}(w) = f'(z_0)w$  (4.19) si ha che

$$d(g \circ f)_{z_0}(w) = g'(f(z_0))f'(z_0)w,$$

o equivalentemente  $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$ .

4) Passiamo con l'isomorfismo canonico da  $\mathbb{C}$  a  $\mathbb{R}^2$ :

$$df_{z_0} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

dove  $a + ib = f'(z_0)$ . Osserviamo che  $\det(df_{z_0}) = a^2 + b^2 = |f'(z_0)|^2 = 0$  se e solo se  $f'(z_0) = 0$ .

Poiché supponiamo che  $f'(z_0) \neq 0$  possiamo applicare il *teorema di invertibilità locale*<sup>2</sup>, cioè esistono  $W, Z$  intorno di  $f(z_0)$  e  $z_0$  rispettivamente tali che

$$f|_Z : Z \rightarrow W$$

---

<sup>2</sup>È la nostra tesi ma con  $C^1$  al posto di olomorfe. Vedi analisi 2 per dettagli.

è invertibile con inversa differenziabile e  $d((f|_Z)^{-1})_{f(z_0)} = (df_{z_0})^{-1}$ .

Se  $f'(z_0) \neq 0$  allora la moltiplicazione per  $(f'(z_0))^{-1}$  è ben definita ed è la funzione inversa di  $df_{z_0}$ , in particolare è  $\mathbb{C}$ -lineare (4.19).

Poiché  $f'(z_0) \neq 0$ , poiché  $f$  è  $C^1$  (cioè  $f'$  è continua) possiamo supporre che  $f'(z) \neq 0$  per ogni  $z \in Z$  a meno di restringerlo, quindi applicando quanto detto a tutti i punti di  $Z$  abbiamo mostrato che  $(f|_Z)^{-1}$  è olomorfa.  $\square$

**Proposizione 4.21** (Inversa moltiplicativa di olomorfa è olomorfa).

Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa in  $z_0$  e  $f(z_0) \neq 0$  allora  $1/f$  è olomorfa in  $z_0$  e

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}.$$

*Dimostrazione.*

Osserviamo che se  $1/f$  è olomorfa in  $z_0$  allora, poiché  $1 = f(z_0)/f(z_0)$ , invocando il secondo punto del teorema precedente (4.20) segue immediatamente che il valore di  $(1/f)'(z_0)$  è quello specificato nel testo.

Sappiamo dai corsi di analisi che  $1/f$  è di classe  $C^1$ . Per (4.19) basta verificare le equazioni di Cauchy-Riemann. Scriviamo  $f(z) = a(z) + ib(z)$  tramite l'usuale isomorfismo tra  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{R}^2$  e notiamo che, poiché  $f$  è olomorfa,  $a_x = b_y$  e  $a_y = -b_x$ . Segue che

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{a(z)}{a^2(z) + b^2(z)} + i \frac{-b(z)}{a^2(z) + b^2(z)}.$$

Concludiamo verificando le due equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{a}{a^2 + b^2} \right) &= \frac{a_x(a^2 + b^2) - 2a(aa_x + bb_x)}{(a^2 + b^2)^2} = \\ &= \frac{b_y(a^2 + b^2) - 2a(ab_y - ba_y)}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{b_y(-a^2 + b^2) + 2aba_y}{(a^2 + b^2)^2} = \\ &= \frac{-b_y(a^2 + b^2) + 2aba_y + 2b^2b_y}{(a^2 + b^2)^2} = \\ &= \frac{-b_y(a^2 + b^2) + 2b(aa_y + bb_y)}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{b}{a^2 + b^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{a}{a^2 + b^2} \right) &= \frac{a_y(a^2 + b^2) - 2a(aa_y + bb_y)}{(a^2 + b^2)^2} = \\ &= \frac{-b_x(a^2 + b^2) - 2a(-ab_x + ba_x)}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{b_x(a^2 - b^2) - 2aba_x}{(a^2 + b^2)^2} = \\ &= \frac{b_x(a^2 + b^2) - 2aba_x - 2b^2b_x}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{b_x(a^2 + b^2) - 2b(aa_x + bb_x)}{(a^2 + b^2)^2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{b}{a^2 + b^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{b}{a^2 + b^2} \right). \end{aligned}$$

$\square$

## 4.3 Analitiche

Studiamo una classe di funzioni apparentemente più piccola delle funzioni olomorfe. Mostriamo successivamente che le funzioni analitiche da  $U \subseteq \mathbb{C}$  aperto a

$\mathbb{C}$  sono esattamente le funzioni olomorfe. Per il momento limitiamoci a studiarle in quanto tali.

### 4.3.1 Serie di potenze

**Definizione 4.22** (Serie di potenze).

Una serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

è detta **serie di potenze di centro**  $z_0$ .

*Osservazione 4.23.*

Una serie di potenze ammette un **raggio di convergenza**, cioè esiste  $R > 0$  tale che la serie converge assolutamente in  $B_R(z_0)$  e diverge in  $\mathbb{C} \setminus \overline{B_R(z_0)}$ .

**Definizione 4.24** (Funzione analitica).

Una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  è **analitica** se per ogni  $z_0 \in U$  esiste  $R > 0$  tale che  $f$  sia esprimibile come serie di potenze centrata in  $z_0$  per ogni  $z \in B_R(z_0)$ .

**Proposizione 4.25** (Le analitiche sono continue).

*Una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analitica è continua.*

*Dimostrazione (Aggiunta per completezza).*

Mostriamo che  $f$  è continua in ogni punto  $z_0 \in U$ . Per un opportuno intorno di  $z_0$  sappiamo che  $f$  si scrive come serie di potenze centrata in  $z_0$ , sia  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  tale serie. Se  $R$  è il raggio di convergenza della serie si ha che in  $B(z_0, R)$  la serie è assolutamente convergente, dunque per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Verifichiamo che esiste  $\delta > 0$  tale che  $|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$  per ogni  $z \in B(z_0, R)$ :

Per continuità di  $\sum_{n=0}^N a_n (z - z_0)^n$  esiste  $\delta$  tale che

$$|z - z_0| < \delta \implies \left| \sum_{n=0}^N a_n (z - z_0)^n - f(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

quindi se  $|z - z_0| < \delta$  allora

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \left| \sum_{n=0}^N a_n (z - z_0)^n - f(z_0) \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

come voluto. □

**Teorema 4.26** (Serie di potenze sono analitiche).

*Supponiamo che*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

*per ogni  $z \in B_R(z_0)$  con  $R > 0$ . Allora  $f$  è analitica su  $B_R(z_0)$ .*



*Dimostrazione.*

Vogliamo mostrare che per ogni  $\tilde{z} \in B_R(z_0)$  esiste  $R' > 0$  tale che  $B_{R'}(\tilde{z}) \subseteq B_R(z_0)$  e  $f$  sia esprimibile come serie di potenze centrata in  $\tilde{z}$ . Scegliamo  $R' = R - |\tilde{z}|$  e sia  $z \in B_{R'}(\tilde{z})$ . Allora  $z = \tilde{z} + w$  con  $|w| < R'$ . Per costruzione  $|\tilde{z}| + |w| < R$ , dunque  $\sum a_n(|\tilde{z}| + |w|)^n$  converge assolutamente. Dunque

$$\sum a_n(|\tilde{z}| + |w|)^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} |\tilde{z}|^{n-i} |w|^i$$

converge assolutamente. Possiamo dunque riordinare i termini senza cambiare il limite. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{(\tilde{z} + w)^n}_{=z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} w^i \tilde{z}^{n-i} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} w^i \tilde{z}^{n-i} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \binom{n}{i}}_{\doteq b_i} \tilde{z}^{n-i} w^i = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} b_i (z - \tilde{z})^i, \end{aligned}$$

dove  $b_i$  è ben definito se la serie che lo definisce converge.  $b_i$  è sempre ben definito perché  $|\tilde{z} - z_0| < R$ ,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{R}$  e  $\binom{n}{i} \leq \frac{n^i}{i!}$ , dunque

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| \binom{n}{i}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \limsup_n \frac{\sqrt[n]{n^i}}{\sqrt[n]{i!}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{R}.$$

□

*Osservazione 4.27.*

Il teorema potrebbe sembrare banale ma ricordiamo che analitica significa che la funzione si esprime come serie di potenze centrata in un *qualsiasi* punto del dominio. La scrittura con centro in  $z_0$  non è sufficiente.

**Teorema 4.28** (Serie derivata).

Se  $f = \sum a_n(z - z_0)^n$  su  $B_R(z_0)$  allora  $f$  è olomorfa su  $B_R(z_0)$  e

$$f'(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z - z_0)^{n-1}}_{\text{serie derivata}} \quad \text{per ogni } z \in B_R(z_0)$$

*Dimostrazione.*

Supponiamo  $z_0 = 0$ . Basta mostrare che per ogni  $\tilde{z} \in B_R(0)$  si ha  $f'(\tilde{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \tilde{z}^{n-1}$ .

Caso  $\tilde{z} = 0$ ) Vogliamo mostrare che  $f'(0) = a_1$ :

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$$

e questa è una serie di potenze con raggio di convergenza uguale a quello della serie originale. Dato che le serie di potenze sono continue nel loro disco di convergenza il limite del rapporto incrementale per  $z \rightarrow 0$  è equivalente a valutare in  $z = 0$  e abbiamo la tesi.

*Caso generico*) Sia  $\tilde{z} \in B_R(0)$ . Dato che le serie di potenze sono analitiche (4.26) si ha che  $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i(z - \tilde{z})^i$  in un intorno di  $\tilde{z}$ . Per il caso precedente  $f$  è olomorfa in  $\tilde{z}$  con  $f'(\tilde{z}) = b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \tilde{z}^{n-1}$ .  $\square$

**Corollario 4.29.**

*Una funzione analitica complessa è  $C^\infty$  in senso complesso.*

**Corollario 4.30** (Serie di Taylor).

*Se  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  in un intorno di  $z_0$  allora*

$$f^{(n)}(z_0) = n! a_n,$$

*in particolare l'espressione di  $f$  come serie di potenze è unica:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

*Osservazione 4.31* (Composizione di analitiche è analitica).

Siano  $f : U \rightarrow V$  e  $g : V \rightarrow \mathbb{C}$  analitiche, allora  $g \circ f$  è analitica.

*Dimostrazione (NON DATA DURANTE IL CORSO).*

Mostriamo che  $g \circ f$  si scrive come serie di potenze in un intorno di  $z_0 \in U$ . In un opportuno intorno di  $z_0$  sappiamo che  $f$  si scrive come serie di potenze (sia  $R$  il raggio di convergenza) e in un opportuno intorno di  $f(z_0)$  sappiamo che  $g$  si scrive come serie di potenze (con raggio di convergenza  $S$ ). Senza perdita di generalità supponiamo che  $R$  sia tale che  $f(B_R(z_0)) \subseteq B_S(f(z_0))$ , che possiamo fare per continuità di  $f$ .

Si ha dunque che se  $f(z) = \sum a_i(z - z_0)^i$  e  $g(w) = \sum b_i(w - f(z_0))^i$  allora in  $B_R(z_0)$  si ha che

$$g \circ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \right)^n.$$

La tesi segue se mostriamo la convergenza assoluta della serie sopra:

poiché  $f$  è assolutamente convergente su  $B_R(z_0)$ , se consideriamo  $0 < r < R$  si ha che  $f$  è assolutamente convergente anche sul bordo, cioè

$$rM \doteq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \in \mathbb{R}.$$

Sia  $r' = \min\{S/M, r\}$ , in modo tale che se  $z \in B_{r'}(z_0)$  allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| |z - z_0|^k \leq |z - z_0| \sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+1}| |z - z_0|^k \leq r'M \leq S.$$

Da questo segue che se  $z \in B_r(z_0)$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \right)^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \left( \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r'^k \right)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| S^n \in \mathbb{R}$$

dove l'ultimo passo è l'assoluta convergenza di  $g$  in  $B_S(f(z_0))$  (per evitare questioni di bordo basta considerare  $S$  leggermente più piccolo del vero raggio di convergenza).  $\square$

### 4.3.2 Ordine di annullamento

Studiamo come si comportano gli zeri delle funzioni analitiche. Questo si rivelerà molto utile nel dare principi di rigidità per le olomorfe.

**Definizione 4.32** (Ordine di annullamento).

Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa. L'**ordine di annullamento** (o di **svanimento** o di **zero**) di  $f$  in  $z_0$  è dato da

$$\begin{cases} \min \{n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0\} & \text{se } \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } f^{(n)}(z_0) \neq 0 \\ \infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

*Osservazione 4.33.*

$f$  ha ordine di annullamento 0 se  $f(z_0) \neq 0$  e ha ordine  $\geq 1$  se  $f(z_0) = 0$ .

**Lemma 4.34** (Caratterizzazione dell'ordine di annullamento).

Sia  $f$  analitica (e quindi olomorfa per (4.29)). Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

1.  $z_0$  ha ordine di annullamento  $n_0$  per  $f$
2.  $f(z) = (z - z_0)^{n_0} g(z)$  in un intorno di  $z_0$  con  $g(z_0) \neq 0$  e  $g$  analitica.

*Dimostrazione.*

1  $\implies$  2) Ricordiamo che per definizione di funzione analitica esiste  $R > 0$  tale che  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  per ogni  $z \in B(z_0, R)$  e  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$  per (4.30). Per ipotesi dunque  $a_n = 0$  per ogni  $n < n_0$  e  $a_{n_0} \neq 0$ . Si ha allora che

$$f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^{n_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+n_0} (z - z_0)^n.$$

La serie del secondo membro ha lo stesso raggio di convergenza della serie originale<sup>3</sup>, dunque definisce una  $g : B(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$  analitica  $g(z_0) = a_{n_0} \neq 0$ .

2  $\implies$  1) Sia  $f(z) = (z - z_0)^{n_0} g(z)$  con  $g(z_0) \neq 0$  e  $g$  analitica. Per definizione di analitica  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$  con  $b_0 \neq 0$  in un intorno di  $z_0$ , dunque

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n+n_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

dove poniamo

$$a_n = \begin{cases} 0 & n < n_0 \\ b_{n-n_0} & n \geq n_0 \end{cases}.$$

Si ha per (4.30) che

$$f^{(n)}(z_0) = n! \cdot a_n,$$

dunque  $f^{(n)}(z_0) = 0$  per  $n < n_0$  e non è nullo se  $n = n_0$ , ovvero  $n_0$  è l'ordine di annullamento di  $f$  in  $z_0$ .  $\square$

<sup>3</sup>i raggi sono definiti da limiti di successioni che coincidono definitivamente

*Osservazione 4.35.*

Se  $f$  è analitica,  $z_0$  ha ordine di annullamento  $\infty$  per  $f$  se e solo se  $f = 0$  in un intorno di  $z_0$ .

*Dimostrazione.*

Scelgo l'intorno dove  $f$  si scrive come serie di potenze centrata in  $z_0$  e so che ogni coefficiente è nullo per la scrittura come serie di Taylor (4.30).  $\square$

**Lemma 4.36.**

Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analitica e sia  $Z = \{z_0 \in U \mid f(z_0) = 0\}$ . Sia  $z_0 \in Z$ . Si ha che  $z_0$  è un punto isolato di  $Z$  o  $z_0 \in \text{int}(Z)$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $n_0$  l'ordine di annullamento di  $z_0$  in  $f$ .

$n_0 = \infty$ ) Dato che  $f$  è analitica, per un opportuno intorno di  $z_0$  possiamo scrivere  $f$  come serie i cui coefficienti sono multipli di  $f^{(i)}(z_0)$ . Per ipotesi tutti questi sono nulli dunque  $z_0 \in \text{int}(Z)$  perché abbiamo trovato un suo intorno dove  $f$  si annulla.

$n_0 \in \mathbb{N}$ ) Si ha che in un opportuno intorno  $V$  di  $z_0$

$$f(z) = (z - z_0)^{n_0} g(z),$$

dove  $g : V \rightarrow \mathbb{C}$  è analitica e  $g(z_0) \neq 0$ . Dato che funzioni analitiche sono continue (4.25) si ha che, a meno di restringere  $V$ , possiamo supporre  $g(z) \neq 0$  per ogni  $z \in V$ , ma allora

$$\forall z \in V \setminus \{z_0\} \quad f(z) = \underbrace{(z - z_0)^{n_0}}_{\neq 0} \underbrace{g(z)}_{\neq 0} \neq 0.$$

$\square$

**Teorema 4.37** (Zeri di analitica sono isolati o coprono la comp. connessa).

Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analitica con  $U$  connesso. Supponiamo che  $Z = f^{-1}(0) \subseteq U$  abbia un punto di accumulazione in  $U$ . Allora  $f = 0$  come funzione su  $U$ .

*Dimostrazione.*

Poiché  $\tilde{z}$  è di accumulazione si ha che esiste una successione  $\{z_n\} \subseteq U$  tale che  $z_n \rightarrow \tilde{z} \in U$ ,  $z_n \neq \tilde{z}$  e  $f(z_n) = 0$  per ogni  $n$ . Per continuità di  $f$  (4.25) si ha che

$$f(\tilde{z}) = f(\lim z_n) = \lim f(z_n) = \lim 0 = 0,$$

perciò  $Z = f^{-1}(0) \supseteq \{z_n\} \cup \{\tilde{z}\}$ . Per costruzione  $\tilde{z}$  non è uno zero isolato, quindi per il lemma (4.36) abbiamo  $\tilde{z} \in \text{int}(Z) \neq \emptyset$ .

Poiché  $U$  è connesso, basta mostrare che  $\text{int}(Z)$  è sia aperto che chiuso.

*Aperto*) Definizione di parte interna.

*Chiuso*) Se per assurdo  $w \in \overline{\text{int}(Z)} \setminus \text{int}(Z)$  allora esisterebbe una successione  $w_n \in \text{int}(Z)$  con  $w_n \rightarrow w$  e  $w_n \neq w$  ( $w \notin \text{int}(Z)$ ). Allora avremmo  $f(w) = 0$  per continuità, in particolare  $w$  è uno zero non isolato. Per il lemma (4.36) avremmo  $w \in \text{int}(Z)$ , contraddicendo le ipotesi  $\nmid$ .  $\square$

Possiamo riformulare questo risultato nel potente

**Corollario 4.38** (Principio di identità per analitiche).

Se  $U$  è connesso e  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  sono analitiche e  $W \subseteq U$  contiene un punto non isolato allora  $f = g$  su  $U$  se e solo se  $f = g$  su  $W$ .

*Dimostrazione.*

Corollario sopra per  $f - g$ . □

## 4.4 Esponenziale e logaritmo complessi

### 4.4.1 Esponenziale complesso

**Definizione 4.39** (Esponenziale complesso).

Definiamo

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

*Osservazione 4.40.*

L'esponenziale ha raggio di convergenza infinito. In particolare è sempre assolutamente convergente.

*Dimostrazione.*

I coefficienti sono  $\frac{1}{n!}$  e osserviamo che

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \lim_n \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

□

**Proposizione 4.41** (Proprietà dell'esponenziale complesso).

Valgono i seguenti fatti

1.  $e^{z+w} = e^z e^w$  per ogni  $z, w \in \mathbb{C}$ . In particolare  $(e^z)^{-1} = e^{-z}$  quindi  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  è ben definita.
2. Se  $z = x + iy$  con  $x, y \in \mathbb{R}$  allora

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

3.  $|e^{iy}| = |\cos y + i \sin y| = 1$ , in particolare

$$|e^{x+iy}| = |e^x| = e^{\Re(z)}.$$

4.  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  è surgettiva

5. Essendo analitica,  $\exp$  è olomorfa ed evidentemente  $\exp'(z) = \exp(z)$ .

6.  $e^z = e^w$  se e solo se  $z - w = 2k\pi i$

*Dimostrazione.*

1) Segue dal seguente conto (useremo spesso la convergenza assoluta per riordinare i termini):

$$\begin{aligned}
 e^z e^w &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right) = \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} \frac{z^n w^m}{n! m!} = \\
 &= \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} \frac{(n+m)! (z^n w^m)}{n! m! (n+m)!} \stackrel{N=n+m}{=} \\
 &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n! (N-n)!} \frac{z^n w^{N-n}}{N!} = \\
 &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} z^n w^{N-n} = \\
 &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} (z+w)^N = \\
 &= e^{z+w}.
 \end{aligned}$$

2) L'unica cosa non ovvia è

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Segue dal seguente calcolo

$$\begin{aligned}
 e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} i = \\
 &= \cos y + i \sin y.
 \end{aligned}$$

4) Se  $a + ib \in \mathbb{C}^\times$  allora  $a + bi = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ . Poniamo  $z = \log \rho + i\theta$  e osserviamo che

$$e^z = e^{\log \rho} (\cos \theta + i \sin \theta) = a + bi.$$

5)  $\exp$  è definita come serie di potenze, quindi è analitica (4.26) e quindi è olomorfa (4.29). Osserviamo inoltre che

$$n \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!},$$

quindi la serie derivata coincide con l'originale.

6)  $e^w = e^z$  se e solo se  $e^w (e^{z-w} - 1) = 0$ , cioè, poiché  $\text{Imm } \exp = \mathbb{C}^\times$ ,  $e^{z-w} = 1$ . Questo vale se e solo se  $\Re(z-w) = 0$  per avere il modulo giusto e  $\Im(z-w) = k2\pi$ . Troviamo dunque la condizione  $z - w = 2k\pi i$ .  $\square$

#### 4.4.2 Logaritmo complesso

Sappiamo che  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  è surgettiva. Questa mappa non è iniettiva, dunque non ha senso cercare una inversa globale, ma possiamo provare perlomeno a cercare  $L : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $\exp L = \text{id}_{\mathbb{C}^\times}$ .

Insiemeisticamente una tale mappa esiste<sup>4</sup>, ma vorremmo cercarla continua. Purtroppo mostreremo che una tale funzione non esiste.

<sup>4</sup>(Curiosità) è una formulazione equivalente dell'assioma della scelta

**Proposizione 4.42** (L'esponenziale complesso è un rivestimento).

La mappa  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  è un rivestimento.

*Dimostrazione.*

Osserviamo che  $\mathbb{C}^\times$  è connesso, basta quindi mostrare l'esistenza degli intorni ben rivestiti.

Identifichiamo  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{C}^\times$  con  $\mathbb{R}^+ \times S^1 \cong \mathbb{R} \times S^1$  (coordinate polari). Tramite queste identificazioni l'esponenziale diventa

$$(x, y) \mapsto (e^x, (\cos y, \sin y)).$$

Questa mappa è la mappa prodotto  $(h, p)$ , dove

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}, \quad p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 \\ y & \longmapsto & (\cos y, \sin y) \end{array}.$$

Questa mappa è il prodotto di un omeomorfismo e il rivestimento universale di  $S^1$ . Dato  $(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times S^1$  costruiamo un intorno ben rivestito. Siano  $U_a$  un intorno di  $a$  in  $\mathbb{R}^+$  e  $U_b$  un intorno ben rivestito di  $b$  in  $S^1$  per il rivestimento  $p$ . Mostriamo che  $U_a \times U_b$  è ben rivestito per l'esponenziale:

Poiché  $h$  è un omeomorfismo,  $h^{-1}(U_a) = W_a$  è un aperto. Poiché  $U_b$  è ben rivestito,  $p^{-1}(U_b) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}} W_{b,i}$  con  $W_{b,i}$  aperti disgiunti. Da questo segue che i  $W_a \times W_{b,i}$  sono aperti disgiunti. Osserviamo dunque che

$$(h, p)^{-1}(U_a \times U_b) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}} W_a \times W_{b,i}.$$

Per concludere osserviamo che, poiché  $h|_{W_a}$  e  $p|_{W_{b,i}}$  sono omeomorfismi, si ha che  $(h, p)|_{W_a \times W_{b,i}}$  è un omeomorfismo, che termina la dimostrazione.  $\square$

**Corollario 4.43.**

Non esiste  $L : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}$  continua tale che  $e^{L(z)} = z$  per ogni  $z \in \mathbb{C}^\times$ .

*Dimostrazione.*

Se  $L$  esistesse potrei costruire il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C} & \\ L \nearrow & & \searrow \exp \\ \mathbb{C}^\times & \xrightarrow{id} & \mathbb{C}^\times \end{array}$$

per cui, scelti i punti base  $L(1) \in \mathbb{C}$  e  $1 \in \mathbb{C}^\times$ , potremmo costruire il seguente diagramma commutativo di gruppi fondamentali

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(\mathbb{C}, L(1)) & \\ L_* \nearrow & & \searrow \exp_* \\ \pi_1(\mathbb{C}^\times, 1) & \xrightarrow{id_{\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)}} & \pi_1(\mathbb{C}^\times, 1) \end{array}$$

Sappiamo che  $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1) \cong \mathbb{Z}$  in quanto  $\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cong S^1$  e che  $\pi_1(\mathbb{C}, L(1)) \cong \{0\}$ . Per la commutatività del diagramma avremmo

$$(id)_* = (\exp \circ L)_* = \exp_* \circ L_* = 0 \circ L_* = 0,$$

che è assurdo dato che  $\mathbb{Z} \neq \{0\}$ .  $\square$

Cerchiamo allora di invertire l'esponenziale su un sottodominio di  $\mathbb{C}^\times$  in modo continuo

**Teorema 4.44** (Branche del logaritmo).

Sia  $U \subseteq \mathbb{C}^\times$  aperto connesso tale che l'inclusione  $U \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$  induca l'omomorfismo banale  $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^\times)$ <sup>5</sup>. Allora esiste una mappa detta **branca del logaritmo** continua

$$L : U \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{t.c.} \quad e^{L(z)} = z \quad \forall z \in U.$$

Due tali branche che coincidono in un punto coincidono su tutto  $U$ .

*Dimostrazione.*

Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{C} \\ & \nearrow L & \downarrow \exp \\ U & \xrightarrow{i} & \mathbb{C}^\times \end{array}$$

Sappiamo (3.88) che  $L$  esiste (ed è unico fissata l'immagine in  $x_0 \in U$ ) se e solo se

$$i_*(\pi_1(\mathbb{C}^\times)) \subseteq \exp_*(\pi_1(\mathbb{C}))$$

e questo è vero perché  $i_*$  è l'omomorfismo banale per ipotesi (invocando il teorema abbiamo usato il fatto che  $\exp$  è un rivestimento (4.42)).  $\square$

Definiamo allora un logaritmo standard:

**Definizione 4.45** (Branca principale del logaritmo complesso).

Sia

$$U = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = 0 \text{ e } \Re(z) \leq 0\}.$$

Chiaramente  $U \subseteq \mathbb{C}^\times$  è semplicemente connesso quindi il teorema (4.44) garantisce l'esistenza di un logaritmo  $L : U \rightarrow \mathbb{C}$ , il quale è unico per l'unicità dei sollevamenti (3.75) se fissiamo  $L(1) = 0$  (scelta lecita perché  $\exp^{-1}(1) = \{2k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ).

**Proposizione 4.46** (Formula esplicita per la branca principale del logaritmo).

Se  $L$  è la branca principale del logaritmo si ha che

$$L(z) = \log |z| + i \arg(z),$$

dove  $\log$  è il logaritmo reale e  $\arg(z)$  è l'argomento principale di  $z$ , definito per esempio da

$$\arg(x + iy) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & y \leq 0 \end{cases}$$

<sup>5</sup>Per esempio possiamo prendere  $U$  semplicemente connesso. L'idea geometrica è che non possiamo considerare un insieme che contenga lacci che si attorcigliano attorno all'origine.



*Dimostrazione.*

Per l'unicità dei sollevamenti (3.75) è sufficiente mostrare che  $f(z) = \log|z| + i \arg(z)$  è una inversa destra di  $\exp$ , è continua e che  $f(1) = 0$ .

$\exp(f(z)) = z$  Calcoliamo

$$\begin{aligned} e^{f(z)} &= e^{\log|z|} e^{i \arg(z)} = \\ &= |z| \left( \cos \left( \arccos \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sgn}(y) i \sin \left( \arccos \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right) \right) = \\ &= |z| \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \operatorname{sgn}(y) i \sin \left( \arcsin \left( \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right) \right) = \\ &= |z| \left( \frac{z}{|z|} \right) = z \end{aligned}$$

Continua) Sappiamo che  $\log(x)$  è continua, quindi basta verificare che  $\arg(z)$  è continua. Osserviamo che  $\{U \cap \{y \geq 0\}, U \cap \{y \leq 0\}\}$  è un ricoprimento fondamentale di  $U$  in quanto ricoprimento chiuso finito (2.178). In ogni pezzo  $\arg$  è definito da composizioni di continue, quindi è continua. Sull'intersezione entrambe le definizioni di  $\arg$  valgono identicamente 0, in particolare coincidono. Per definizione di ricoprimento fondamentale abbiamo che  $\arg$  è continua su  $U$ .  $f(1) = L(1) = 0$  Segue dal fatto che  $\arg(1) = 0$  e  $\log 1 = 0$ .  $\square$

**Proposizione 4.47** (Le branche del logaritmo sono olomorfe).

*Le branche del logaritmo complesso sono olomorfe.*

*Dimostrazione.*

Poiché  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  verifica  $\exp'(z) = \exp(z)$  e non è mai nulla, si ha per le proprietà delle olomorfe (4.20) che le branche del logaritmo sono olomorfe.  $\square$

**Teorema 4.48** (Espansione in serie del logaritmo).

*Sia  $L : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \mid z \leq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$  la branca principale del logaritmo. Allora per ogni  $z \in B_1(0)$  abbiamo*

$$L(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

*Dimostrazione.*

La serie in questione ha raggio di convergenza 1, quindi definisce una funzione  $g : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa (vedi (4.26) e (4.29)). Inoltre  $\exp(g(x)) = 1 + x$  per ogni  $x \in B_1(0) \cap \mathbb{R}$  per noti risultati di analisi. Allora  $\exp \circ g$  e  $h(z) = 1 + z$  sono analitiche (la prima per (4.31), la seconda evidentemente) e coincidono su un insieme che contiene punti non isolati, dunque  $\exp(g(z)) = 1 + z$  su  $B_1(0)$  per il teorema (4.38). Questo mostra che  $g(z)$  è un logaritmo di  $1 + z$  su  $B_1(0)$  e, poiché  $g(0) = 0 = L(1 + 0)$ , abbiamo per l'unicità dei sollevamenti (3.75) che  $g(z) = L(1 + z)$  su  $B_1(0)$ .  $\square$

## 4.5 1-Forme complesse

**Definizione 4.49** (1-forma continua).

Sia  $U \subseteq \mathbb{C}$  un aperto. Una **1-Forma** continua su  $U$ <sup>6</sup> è una funzione  $\omega : U \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  continua e  $\mathbb{R}$ -lineare nel secondo argomento.

Di solito al posto di  $\omega(z_0, v)$  si scrive  $\omega(z_0)(v)$  o  $\omega_{z_0}(v)$  per rimarcare il fatto che  $\omega(z_0, \cdot)$  è una funzione  $\mathbb{R}$ -lineare.

*Osservazione 4.50.*

Se  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  è  $C^1$  allora  $df$  è una 1-forma, infatti

$$df(z, w) = df_z(w),$$

dove la continuità rispetto a  $z$  è la definizione di  $C^1$ .

**Definizione 4.51** (Forme esatte e chiuse).

Una 1-forma  $\omega$  si dice **esatta** se esiste  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  di classe  $C^1$  tale che  $\omega = df$ .

In tal caso  $f$  si chiama **primitiva** di  $\omega = df$ .

Una 1-forma  $\omega$  su  $U$  si dice **chiusa** se è localmente esatta, cioè se per ogni  $z_0 \in U$  esiste un intorno  $V$  di  $z_0$  con  $z_0 \in V \subseteq U$  tale che  $\omega|_V$  è esatta, cioè esiste  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  di classe  $C^1$  con  $\omega|_V \doteq \omega|_{V \times \mathbb{C}} = df$ .

*Osservazione 4.52.*

Per definizione ogni forma esatta è chiusa.

*Osservazione 4.53* (1-forme in coordinate).

Poiché  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  è un  $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale e sia  $\{dx, dy\}$  che  $\{dz, d\bar{z}\}$  ne sono basi, possiamo scrivere ogni 1-forma  $\omega$  su  $U$  nelle forme

$$\omega(x + iy) = a(x, y)dx + b(x, y)dy,$$

dove  $a, b : U \rightarrow \mathbb{C}$  sono continue oppure

$$\omega(z) = f(z)dz + g(z)d\bar{z}$$

dove  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  sono continue.

### 4.5.1 Integrazione di 1-forme

**Definizione 4.54** (Integrale di funzione da intervallo reale a  $\mathbb{C}$ ).

Se  $f(t) = g(t) + ih(t)$  con  $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  allora

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt + i \int_a^b h(t)dt.$$

**Definizione 4.55** (Integrale lungo una curva  $C^1$ ).

Sia  $\omega$  una 1-forma su  $U \subseteq \mathbb{C}$  e sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  un cammino  $C^1$ . **L'integrale di  $\omega$  lungo  $\gamma$**  è dato da

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt.$$

---

<sup>6</sup>sottointenderemo “continua” quasi sempre

**Definizione 4.56** (Curva  $C^1$  a tratti).

Una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  è  $C^1$  **a tratti** se esiste una partizione  $\{t_0, \dots, t_n\}$ <sup>7</sup> di  $[a, b]$  tale che  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  è  $C^1$  per ogni  $i$ .

*Osservazione 4.57* (Caso per curve  $C^1$  a tratti).

Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  è  $C^1$  a tratti poniamo

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt$$

**Proposizione 4.58** (Invarianza dell'integrale per riparametrizzazione).

Sia  $\delta : [c, d] \rightarrow U$  una riparametrizzazione di  $\gamma$ , cioè  $\delta = \gamma \circ \varphi$  con  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  di classe  $C^1$  con  $\varphi(c) = a$  e  $\varphi(d) = b$ . Allora

$$\int_{\delta} \omega = \int_{\gamma} \omega$$

*Dimostrazione.*

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_{\delta} \omega &= \int_c^d \omega(\delta(t))(\delta'(t)) dt = \int_c^d \omega(\gamma(\varphi(t)))(\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)) dt \stackrel{\text{linearità}}{=} \\ &= \int_c^d \omega(\gamma(\varphi(t)))(\gamma'(\varphi(t)))\varphi'(t) dt \stackrel{s=\varphi(t)}{=} \\ &= \int_a^b \omega(\gamma(s))(\gamma'(s)) ds = \\ &= \int_{\gamma} \omega \end{aligned}$$

□

**Proposizione 4.59** (Integrazione di 1-forme esatte).

Se  $\omega$  è esatta con primitiva  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  allora

$$\int_{\gamma} \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

*Dimostrazione.*

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_a^b df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \\ &= \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt = \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio è il teorema fondamentale del calcolo in una variabile applicato nelle due entrate. □

<sup>7</sup>Ricordiamo da Analisi 1 che una partizione ha la forma

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

**Corollario 4.60.**

Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  è una curva  $C^1$  a tratti chiusa e  $\omega$  è una forma esatta su  $U$  allora  $\int_\gamma \omega = 0$ .

**Esempio 4.61** (Forma chiusa non esatta).

Consideriamo la forma  $\omega = \frac{1}{z} dz$  definita su  $\mathbb{C}^\times$ .

Chiusa) Segue dal fatto che il logaritmo è localmente olomorfo e la sua derivata è

$$L'(z) = \frac{1}{z}.$$

Non Esatta) Sia  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$  data da  $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ . Allora

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \frac{1}{\gamma(t)} \gamma'(t) dt = \int_0^1 e^{-2\pi it} 2\pi i e^{2\pi it} dt = 2\pi i \neq 0.$$

Poiché diremo spesso “aperto connesso” diamo la seguente

**Definizione 4.62** (Dominio).

Un insieme  $D \subseteq \mathbb{C}$  è un **dominio** se è aperto e connesso.

**Osservazione 4.63.**

Poiché  $\mathbb{C}$  è localmente connesso per archi si ha che un dominio è anche connesso per archi e localmente connesso per archi (2.219).

**Proposizione 4.64** (Caratterizzazione esattezza con integrali su lacci).

Sia  $D \subseteq \mathbb{C}$  dominio e  $\omega$  una 1-forma su  $D$ . Allora  $\omega$  è esatta se e solo se  $\int_\gamma \omega = 0$  per ogni  $\gamma$  laccio su  $D$  di classe  $C^1$  a tratti.

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$ ) Segue immediatamente da (4.59).

$\Leftarrow$ ) Fissiamo  $z_0 \in D$ . Dato  $z \in D$  sia  $\gamma_z : [0, 1] \rightarrow D$  una curva  $C^1$  a tratti tale che  $\gamma_z(0) = z_0$  e  $\gamma_z(1) = z$ . Poniamo  $F(z) = \int_{\gamma_z} \omega$ .

Osserviamo che  $F(z)$  non dipende da  $\gamma_z$  ma solo da  $z$ , infatti se  $\tilde{\gamma}_z$  è una seconda curva con le stesse proprietà osserviamo che  $\gamma_z * \overline{\tilde{\gamma}_z}$  è una curva chiusa in  $D$ . Segue dunque che

$$0 = \int_{\gamma_z * \overline{\tilde{\gamma}_z}} \omega = \int_{\gamma_z} \omega - \int_{\tilde{\gamma}_z} \omega.$$

La funzione  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$  è quindi ben definita.

Supponiamo che  $\omega = Pdx + Qdy$  e mostriamo che  $F$  ne è una primitiva. Basta verificare che  $dF(z) = \omega(z)$ , cioè che  $\frac{\partial F}{\partial x}(z) = P(z)$  e  $\frac{\partial F}{\partial y}(z) = Q(z)$  per ogni  $z \in D$ . Calcoliamo  $\frac{\partial F}{\partial x}(z)$ , l'altra derivata si svolge in maniera analoga

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( \int_{\gamma_{z+t}} \omega - \int_{\gamma_z} \omega \right),$$

dove  $t$  è pensata come una variabile reale ( $z + t = z + t \cdot 1 = z + te_1$ ).

Per l'invarianza di  $F$  rispetto al cammino scelto supponiamo  $\gamma_{z+t} = \gamma_z * \ell_{z,t}$ , dove

$$\ell_{z,t} : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ s & \longmapsto & z + st \end{array}.$$

Questa operazione è lecita se  $\ell_{z,t}([0,1]) \subseteq D$ , ma questo è il caso per  $|t| < \varepsilon$  dove  $\varepsilon > 0$  è tale che  $B_\varepsilon(z) \subseteq D$ . Consci di questa decomposizione abbiamo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\ell_{z,t}} \omega = \frac{d}{dt} \left( \int_{\Re(z)}^{\Re(z)+t} P(s, \Im(z)) ds \right) (0) = P(z).$$

□

**Corollario 4.65** (Caratterizzazione di forme esatte in disco).

Se  $D$  è un disco allora  $\omega$  è esatta in  $D$  se e solo se  $\int_\gamma \omega = 0$  per ogni curva chiusa  $\gamma$  bordo di un rettangolo parallelo agli assi.

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$ ) Segue immediatamente da (4.59).

$\Leftarrow$ ) È la dimostrazione del teorema precedente dove ammettiamo solo  $\gamma$  “spigolosi”. L’unica cosa che può fallire è l’esistenza dei cammini da  $z_0$  a  $z$  al variare di  $z \in D$ , ma è evidente che come  $\gamma_z$  possiamo scegliere due lati adiacenti opportuni del rettangolo con lati paralleli agli assi determinato da  $z_0$  e  $z$ . □

**Corollario 4.66.**

Se  $D$  è un disco allora  $\omega$  è esatta in  $D$  se e solo se  $\omega$  è chiusa in  $D$ .

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$ ) Vale sempre.

$\Leftarrow$ ) Supponiamo che  $\omega$  sia chiusa. Vogliamo mostrare che

$$\int_{\partial R} \omega = 0$$

per ogni  $R$  rettangolo con lati paralleli agli assi contenuto in  $D$  in modo da invocare la caratterizzazione (4.65). Siccome  $\bar{R}$  è compatto ammette numero di Lebesgue (2.402), possiamo quindi suddividerlo in un numero finito di rettangolini sui quali  $\omega$  è esatta (considero un ricoprimento di  $\bar{R}$  di aperti dove  $\omega$  è esatta, estraggo un numero di Lebesgue  $\varepsilon$  e divido  $R$  in rettangoli con diametro minore di  $\varepsilon$ ). A questo punto

$$\int_{\partial R} \omega = \sum_j \int_{\partial R_j} \omega = \sum_j 0 = 0,$$

dove la prima uguaglianza segue dal fatto che gli integrali lungo i segmenti interni vengono percorsi in entrambi i versi dando un contributo netto nullo. □

## 4.5.2 Primitive lungo curve e lungo omotopie

**Lemma 4.67** (Numero di Lebesgue per forme chiuse).

Siano  $\gamma : [a,b] \rightarrow D$  continua e  $\omega$  una 1-forma chiusa su  $D$ . Allora esiste  $\varepsilon > 0$  tale che se  $[c,d] \subseteq [a,b]$  e  $d - c < \varepsilon$  allora esiste un disco  $U \subseteq D$  tale che  $\omega$  è esatta su  $U$  e  $\gamma([c,d]) \subseteq U$ . Per brevità diremo che  $\varepsilon$  è un **numero di Lebesgue** per  $\omega$  sulla curva  $\gamma$ <sup>8</sup>.

<sup>8</sup>Questa definizione NON è standard e NON è stata data durante il corso. L’ho data io per rendere più scorrevole il testo quando useremo questo lemma.

*Dimostrazione.*

Per ogni punto di  $\gamma([a, b])$  consideriamo un disco centrato nel punto dove  $\omega$  è esatta. L'insieme di questi dischi è un ricoprimento di  $\gamma([a, b])$ , dunque prendendo le preimmagini dei dischi troviamo un ricoprimento di  $[a, b]$ . Per la compattezza di  $[a, b]$  il ricoprimento costruito ammette un numero di Lebesgue  $\varepsilon$  (2.288). Questo è l' $\varepsilon$  cercato.  $\square$

**Definizione 4.68** (Primitiva lungo una curva).

Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  continua. Sia  $\omega = Pdx + Qdy$  una 1-forma chiusa su  $D$ . Una **primitiva** per  $\omega$  **lungo**  $\gamma$  è una funzione continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  tale che per ogni  $t_0 \in [a, b]$  esistono  $U \subseteq D$  intorno aperto di  $\gamma(t_0)$  e  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  primitiva di  $\omega$  su  $U$  tale che  $F(\gamma(t)) = f(t)$  per ogni  $t \in \gamma^{-1}(U)$ .<sup>9</sup>

**Teorema 4.69** (Esistenza e quasi unicità delle primitive lungo curve).

Per ogni  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  continua e per ogni 1-forma  $\omega$  chiusa su  $D$  esiste una primitiva di  $\omega$  lungo  $\gamma$ , che è unica a meno di costanti additive.

*Dimostrazione.*

Unicità) Siano  $f, g$  due primitive di  $\omega$  lungo  $\gamma$ . Fissiamo  $t_0 \in [a, b]$ . Poiché  $\omega$  è chiusa esistono due intorni di  $\gamma(t_0)$  dove  $\omega$  ammette primitive  $F$  e  $G$  tali che

$$F(\gamma(t)) = f(t) \quad e \quad G(\gamma(t)) = g(t).$$

A meno di intersecare questi intorni e prendere la componente connessa<sup>10</sup> contenente  $\gamma(t_0)$ , definiamo  $U$  intorno connesso di  $\gamma(t_0)$  tale che  $F$  e  $G$  sono delle primitive di  $\omega$  su  $U$  come sopra. Poiché  $F$  e  $G$  sono primitive di  $\omega$  su  $U$  connesso si ha che  $F - G = c$  su  $U$  con  $c$  costante<sup>11</sup>, dunque  $f(t) - g(t) = c$  per  $t \in \gamma^{-1}(U)$ . Questo mostra che  $f - g$  è localmente costante su  $[a, b]$ , che è connesso, dunque  $f - g$  è costante su tutto  $[a, b]$  come voluto.

Esistenza) Per il lemma (4.67) esiste  $\varepsilon$  numero di Lebesgue per  $\omega$  su  $\gamma$ . A questo punto consideriamo

$$a = a_0 < a_1 < b_0 < a_2 < b_1 < \cdots < a_n < b_{n-1} < b_n = b$$

tali che  $I_0 = [a_0, b_0]$ ,  $I_j = (a_j, b_j)$  e  $I_n = (a_n, b_n]$  siano intervalli di ampiezza minore di  $\varepsilon$ . Osserviamo dunque che  $\gamma(I_j) \subseteq U_j$  con  $U_j$  disco aperto su cui  $\omega$  ammette primitiva. Definiamo  $f$  ricorsivamente:

Per  $t \in I_0$  poniamo  $f(t) = F_0(\gamma(t))$  dove  $F_0$  è una qualche primitiva di  $\omega$  su  $U_0$ . Supponendo ora di aver definito  $f$  su  $I_0 \cup \cdots \cup I_{k-1}$ , per  $t \in I_k$  definiamo

$$f(t) = F_k(\gamma(t)),$$

dove  $F_k$  è la primitiva di  $\omega$  su  $U_k$  per la quale

$$F_{k-1}|_{U_{k-1} \cap U_k} = F_k|_{U_{k-1} \cap U_k},$$

che esiste ed è unica per l'unicità delle primitive su connessi a meno di costante ( $U_k \cap U_{k-1}$  è connesso perché intersezione di dischi).

<sup>9</sup>Ricordo che la notazione che uso in queste dispense assegna il simbolo  $\bar{\gamma}$  al cammino inverso. Con  $\gamma^{-1}(U)$  intendo la preimmagine di  $U$  tramite la mappa  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$

<sup>10</sup>La componente connessa è un intorno perché  $\mathbb{C}$  è localmente connesso per archi (2.221).

<sup>11</sup>Abbiamo che  $d(F - G) = dF - dG = \omega - \omega = 0$  su  $U$  connesso, dunque  $F - G$  è costante. Per i dettagli vedi Analisi 2.

Al termine dell'induzione avremo definito  $f$  su  $I_0 \cup \dots \cup I_n$ . Per concludere basta osservare che  $\{I_i\}_{i \in \{0, \dots, n\}}$  è un ricoprimento fondamentale di  $[a, b]$  in quanto ricoprimento aperto (2.168), che  $f|_{I_i} = F_i \circ \gamma|_{I_i}$  e quindi è continua su ogni elemento del ricoprimento, e che sulle intersezioni dei membri del ricoprimento  $f$  è ben definita. Per il criterio (2.170)  $f$  è continua.  $\square$

**Definizione 4.70** (Primitiva lungo una omotopia).

Siano  $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow D$  una omotopia fra  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  e  $\omega$  una 1-forma chiusa su  $D$ . Una **primitiva di  $\omega$  lungo  $H$**  è  $f : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  tale che per ogni  $(s_0, t_0) \in [0, 1] \times [a, b]$  esistono  $U \subseteq D$  intorno di  $H(s_0, t_0)$  e  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  primitiva di  $\omega$  tale che  $F(H(s, t)) = f(s, t)$  per ogni  $(s, t) \in H^{-1}(U)$ .

*Osservazione 4.71.*

La restrizione di  $f$  primitiva lungo una omotopia ai segmenti orizzontali o verticali restituisce una primitiva di  $\omega$  lungo la curva corrispondente.

**Teorema 4.72** (Esistenza e quasi unicità delle primitive lungo omotopie).

Se  $\omega$  è una 1-forma chiusa allora ammette una primitiva lungo qualsiasi omotopia  $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow D$ .

*Dimostrazione (DATA PER ESERCIZIO).*

Unicità) Date due primitive  $f$  e  $g$  di  $\omega$  lungo  $H$  osserviamo che in un opportuno intorno connesso di  $H(s_0, t_0)$  queste due corrispondono alla composizione di due primitive di  $\omega$  con  $H$ , in particolare per l'unicità delle primitive a meno di costante si deve avere che  $f$  e  $g$  differiscono localmente di una costante. Questo mostra che  $f - g$  è localmente costante su  $[0, 1] \times [a, b]$ , che è connesso.

Esistenza) A meno di modificare qualche parola nella dimostrazione, vale ancora il lemma (4.67) e a questo punto basta dividere  $[0, 1] \times [a, b]$  in rettangoli abbastanza piccoli e ricalcare la dimostrazione di esistenza per (4.69).  $\square$

**Corollario 4.73** (Integrazione di forme chiuse tramite primitiva lungo curve).

Se  $\omega$  è chiusa,  $\gamma$  è  $C^1$  a tratti e  $f$  è primitiva di  $\omega$  lungo  $\gamma$  allora

$$\int_{\gamma} \omega = f(b) - f(a).$$

*Dimostrazione.*

Per il lemma (4.67) suddividiamo  $\gamma$  in tratti  $\gamma_j : [a_j, a_{j+1}] \rightarrow D$  per cui esiste una primitiva  $F_j$  in un intorno dell'immagine di  $\gamma_j$ . Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \sum_j \int_{\gamma_j} \omega = \sum_j (F_j(\gamma(a_{j+1})) - F_j(\gamma(a_j))) = \\ &= \sum_j (f(a_{j+1}) - f(a_j)) = \\ &= f(b) - f(a). \end{aligned}$$

$\square$

Se  $\gamma$  è continua ma non  $C^1$  a tratti diamo come definizione di integrale quella che mantiene vero questo risultato

**Definizione 4.74** (Integrale di 1-forme chiuse su cammini continui).

Data  $\omega$  una forma chiusa su  $U$  e  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ , allora, detta  $f$  una primitiva di  $\omega$  lungo  $\gamma$ , definiamo

$$\int_{\gamma} \omega = f(b) - f(a).$$

**Teorema 4.75** (Invarianza dell'integrale per cammini omotopi).

Siano  $D \subseteq \mathbb{C}$  dominio,  $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow D$  curve omotope a estremi fissi e  $\omega$  chiusa su  $D$ . Allora

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

*Dimostrazione.*

Sia  $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow D$  omotopia a estremi fissi fra  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  e sia  $f : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una primitiva di  $\omega$  lungo  $H$ . Allora  $s \mapsto f(s, a)$  è una primitiva di  $\omega$  lungo la curva costante  $s \mapsto H(s, a) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$  (la curva è costante perchè  $H$  è a estremi fissi). Questo implica che  $f(\cdot, a) = \alpha \in \mathbb{C}$  costante. Analogamente  $f(\cdot, b) = \beta \in \mathbb{C}$ .

Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} \omega &= \int_{H(0, \cdot)} \omega = \\ &= f(0, b) - f(0, a) = \\ &= \beta - \alpha = \\ &= f(1, b) - f(1, a) = \\ &= \int_{H(1, \cdot)} \omega = \int_{\gamma_1} \omega. \end{aligned}$$

□

### 4.5.3 Forme chiuse da funzioni olomorfe

Da questo momento in poi nel corso la definizione di “funzione olomorfa” diventerà implicitamente “funzione olomorfa e  $C^1$ ”. Il motivo verrà reso chiaro tra qualche risultato.

Citiamo il

**Teorema 4.76** (Gauss-Green).

Sia  $\omega = Pdx + Qdy$  una 1-forma  $C^1$  nell'intorno di un rettangolo  $\bar{R}$  con lati paralleli agli assi. Allora

$$\iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial R} \omega.$$

*Dimostrazione.*

NON DATA DURANTE IL CORSO.

□

*Osservazione 4.77.*

Se  $\omega = Adz + Bd\bar{z}$  allora

$$\iint_R \left( \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial \bar{z}} \right) dz d\bar{z} = \int_{\partial R} \omega.$$



**Teorema 4.78** (Caratterizzazione delle forme chiuse  $C^1$  con derivate parziali).  
Sia  $\omega = Pdx + Qdy$  una 1-forma  $C^1$  su  $D$  dominio. Allora

$$\omega \text{ chiusa} \iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

*Dimostrazione.*

$\implies$ )  $\omega$  chiusa implica che localmente  $P = \frac{\partial F}{\partial x}$  e  $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$ , dove  $F$  è una primitiva locale. Allora

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

dove abbiamo potuto scambiare le derivate perché  $\omega \in C^1 \implies F \in C^2$  e vale il teorema di Schwarz<sup>12</sup>.

$\impliedby$ ) Per Gauss-Green (4.76)

$$\int_{\partial R} \omega = 0$$

per ogni rettangolo  $R$  con lati paralleli agli assi contenuto in  $D$ . Quindi per (4.65)  $\omega$  è localmente esatta, cioè chiusa.  $\square$

**Corollario 4.79** ( $fdz$  chiusa se e solo se  $f$  olomorfa).

Sia  $f \in C^1(D)$ . Allora  $\omega = fdz$  è chiusa se e solo se  $f$  è olomorfa.

*Dimostrazione.*

Se  $f = u + iv$  allora  $fdz = (udx - vdy) + i(udy + vdx)$ . Per il teorema sopra (4.78) abbiamo che  $\omega$  è chiusa se e solo se

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x},$$

cioè, separando parte reale e immaginaria, se e solo se valgono le equazioni di Cauchy-Riemann, cioè  $f$  olomorfa.  $\square$

**Corollario 4.80.**

La forma  $fdz$  è esatta in  $D$  se e solo se esiste  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa tale che  $F' = f$ .

*Dimostrazione.*

La forma  $fdz$  è esatta se e solo se esiste  $F$  tale che  $dF = \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = fdz$ , quindi se e solo se

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = f.$$

$\square$

In realtà una implicazione della caratterizzazione (4.79) vale anche senza supporre  $f$  di classe  $C^1$ .

**Teorema 4.81** (Cauchy).

Se  $f$  è olomorfa allora  $fdz$  è chiusa.

*Dimostrazione.*

È STATO DIMOSTRATO NEGLI ANNI PASSATI.  $\square$

---

<sup>12</sup>Vedi Analisi 2

Poiché l'implicazione (4.81) non è stata dimostrata, la trattazione che segue è rigorosa solo se sostituiamo la parola “olomorfa” con “olomorfa  $C^1$ ”. Per rendere più generali le dispense procederò invocando quando necessario il teorema di Cauchy (4.81) quando il corso ha usato l'analogo per le  $C^1$ . Se preferite attenervi solo a ciò che è stato dimostrato considerate solo funzioni olomorfe di classe  $C^1$  e sostituite ogni riferimento a (4.81) con un riferimento a (4.79).

Concludiamo la sezione fornendo un utile risultato sull'estensione dell'olomorfia.

**Teorema 4.82** (Continua olomorfa fuori un segmento dà forma chiusa).

*Sia  $D \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $f$  continua in  $D$  e olomorfa fuori da un segmento  $L \subseteq D$ . Allora  $\int_D f dz$  è chiusa in  $D$ .*

*Dimostrazione.*

A meno di rotazioni supponiamo  $L$  orizzontale (basta ruotare anche le primitive locali). Poiché essere chiusi è una proprietà locale possiamo supporre che  $D$  sia un disco centrato in un punto  $z_0 \in L$ . Inoltre, a meno di traslazioni supponiamo  $z_0 = 0$  e  $L = D \cap \{\text{asse } x\}$ .

Vogliamo verificare che  $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$  dove  $\overline{R} \subseteq D$  è un rettangolo con lati paralleli agli assi per invocare (4.65) e trovare la tesi.

$\overline{R} \cap L = \emptyset$ ) In questo caso  $f$  è olomorfa in un intorno di  $\overline{R}$  quindi  $\int_D f dz$  è chiusa (4.81). Poiché  $\partial R$  è omotopo al cammino costante si ha che l'integrale è nullo per (4.75).

lato di  $R$  in  $L$ ) Senza perdita di generalità supponiamo  $R \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid \Im m(z) > 0\}$ . Sia  $\delta > 0$  e sia  $R_\delta = R \cap \{\Im m(z) > \delta\}$ . Osserviamo che

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} f dz - \int_{\partial R_\delta} f dz &= \int_a^b f(x, 0) dx + i \int_0^\delta f(b, y) dy + \\ &\quad - \int_a^b f(x, \delta) dx - i \int_0^\delta f(a, y) dy = \\ &= \int_a^b (f(x, 0) - f(x, \delta)) dx + i \int_0^\delta (f(b, y) - f(a, y)) dy. \end{aligned}$$

Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Poiché siamo in un compatto  $f$  è uniformemente continua (2.293), dunque esiste  $\delta < \varepsilon$  tale che  $|z - \zeta| < \delta \implies |f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon$  per ogni  $z, \zeta \in \overline{R}$ . Inoltre, ponendo  $M = \max_{z \in R} |f(z)| \in \mathbb{R}$  si ha che

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial R} f dz - \int_{\partial R_\delta} f dz \right| &\leq \int_a^b |f(x, 0) - f(x, \delta)| dx + \int_0^\delta |f(b, y) - f(a, y)| dy \leq \\ &\leq \varepsilon(b - a) + 2M\delta \stackrel{\delta \leq \varepsilon}{\leq} \varepsilon(2M + b - a). \end{aligned}$$

Poiché  $\int_{\partial R_\delta} f dz = 0$  per il caso precedente abbiamo mostrato che

$$\left| \int_{\partial R} f dz \right| \leq \varepsilon(2M + b - a) \rightarrow 0.$$

$L \cap R \neq \emptyset$ ) Basta spezzare  $R$  in due rettangoli lungo  $L$  e sfruttare il caso precedente per entrambi.  $\square$

**Corollario 4.83.**

Sia  $D \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $f$  continua in  $D$  e olomorfa  $C^1$  fuori da un segmento  $L \subseteq D$ . Allora  $f$  è olomorfa in  $D$ .

*Dimostrazione.*

Il teorema sopra unito a (4.79). □

## 4.6 Indice di avvolgimento e Formula di Cauchy

**Definizione 4.84** (Indice di avvolgimento).

Sia  $\gamma$  una curva chiusa in  $\mathbb{C}$  e sia  $z_0$  un punto che NON appartiene al supporto di  $\gamma$  ( $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$ ). Allora l'**indice di avvolgimento** di  $\gamma$  attorno  $z_0$  è dato da

$$\text{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

*Osservazione 4.85.*

La forma  $\frac{dz}{z - z_0}$  è chiusa in  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ , quindi ammette primitiva lungo  $\gamma$  anche se  $\gamma$  è continua ma non  $C^1$  (4.69). L'integrale nella definizione di  $\text{Ind}(\gamma, z_0)$  è quindi ben definito anche se  $\gamma$  non è  $C^1$  a tratti.

**Proposizione 4.86** (Indice di avvolgimento è intero).

Per ogni  $z_0$  e per ogni curva continua  $\gamma$  che non passa per  $z_0$  si ha che

$$\text{Ind}(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}.$$

*Dimostrazione.*

Caso di un giro) Se  $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$  con  $t \in [0, 2\pi]$  e  $r > 0$  allora

$$\text{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = 1.$$

Caso generale) Sia  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  e poniamo  $p = \gamma(0)$ . Per ipotesi  $z_0 \neq p$ . Sia

$$\langle \alpha \rangle = \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z_0\}, p) \cong \mathbb{Z},$$

dove  $\alpha$  è un generatore del gruppo fondamentale. Possiamo per esempio scegliere  $\alpha = [\gamma_1]$  dove  $\gamma_1(t) = z_0 + re^{it}$  con  $r = |z_0 - p|$ .

Per come è fatto il gruppo  $(\mathbb{Z}, +)$ , esiste  $n \in \mathbb{Z}$  tale che

$$[\gamma] = n\alpha = n[\gamma_1] = \underbrace{[\gamma_1 * \cdots * \gamma_1]}_{n \text{ volte}} = [\gamma_n],$$

dove  $\gamma_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  è la curva  $\gamma_n(t) = z_0 + re^{int}$ . Quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \stackrel{\text{omot.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{dz}{z - z_0} = n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z - z_0} = n$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal caso trattato sopra. □

*Osservazione 4.87.*

Intuitivamente  $\text{Ind}(\gamma, z_0)$  conta quante volte  $\gamma$  “gira attorno a  $z_0$ ”.

**Teorema 4.88** (Formula integrale di Cauchy).

Siano  $D \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $f \in \mathcal{O}(D)$  e  $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$  una curva chiusa omotopa ad una curva costante. Sia  $z \in D \setminus \gamma([0, 1])$ . Allora<sup>13</sup>

$$\text{Ind}(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

*Dimostrazione.*

Definiamo per  $\zeta \in D$

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \zeta \neq z \\ f'(z) & \zeta = z \end{cases}$$

Poiché  $f$  è olomorfa,  $g \in \mathcal{O}(D \setminus \{z\}) \cap C^0(D)$ , infatti è continua per definizione di  $f'(z)$  tramite rapporto incrementale ed è olomorfa fuori  $z$  perché composizione di olomorfe. Si ha dunque che  $gd\zeta$  è una forma chiusa per (4.82). Segue che

$$\int_{\gamma} g(\zeta) d\zeta \stackrel{\text{omot.}}{=} \int_{\text{punto}} g(\zeta) d\zeta = 0,$$

quindi

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Segue dunque che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \text{Ind}(\gamma, z)f(z).$$

□

*Osservazione 4.89.*

Dal teorema segue immediatamente che una funzione olomorfa definita su un disco è completamente determinata dal suo valore sul bordo del disco.

#### 4.6.1 Olomorfa implica analitica

Finalmente possiamo mostrare la corrispondenza biunivoca tra funzioni olomorfe e analitiche. Questo ci permetterà di ignorare problemi di regolarità sulle olomorfe dato che saranno  $C^\infty$  (eccetto la questione su  $C^1$  che abbiamo già discusso nella sezione precedente).

Come primo passo diamo un potente risultato di rigidità:

**Teorema 4.90** (Continue sul bordo di un disco definiscono olomorfa nel disco).

Sia  $B = B(z_0, R)$  e  $h : \partial B \rightarrow \mathbb{C}$  continua. Sia  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  data da  $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$  e poniamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Allora abbiamo che

<sup>13</sup>Qui e in futuro useremo  $\zeta$  quando  $z$  è già occupato. Quindi per  $d\zeta$  intendiamo comunque  $dx + idy$ .

1.  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  serie di potenze con raggio di convergenza maggiore o uguale a  $R$ .

2.  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$

In particolare  $f \in \mathcal{O}(B)$  e  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$

*Dimostrazione.*

Caso  $z_0 = 0$  Se  $\zeta \in \partial B$  e  $z \in B$  allora  $R = |\zeta| > |z|$ , da cui  $\left| \frac{z}{\zeta} \right| < 1$ . Vale dunque la seguente identità

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}},$$

inoltre la serie converge assolutamente e uniformemente in  $\zeta$ , infatti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{R^{n+1}} = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{|z|}{R} \right)^n = \frac{1}{R - |z|} \in \mathbb{R},$$

che non dipende da  $\zeta$ .

Allora

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h(\zeta) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} \right) d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left( \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^k \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} h(\zeta) \right) d\zeta \stackrel{\text{conv.unif. su limitato}}{=} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left( \sum_{n=0}^k \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} h(\zeta) \right) d\zeta = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^k \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta}_{\doteq a_n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \end{aligned}$$

che mostra entrambi i punti<sup>14</sup>.

Caso generale) Poniamo  $g(w) = f(w + z_0)$ ,  $z = w + z_0$  e  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) - z_0$ . Per il punto precedente

$$f(z) = g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{h(\zeta + z_0)}{\zeta - w} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Sostituendo in  $a_n$  troviamo la formula voluta:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{h(\zeta + z_0)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

□

<sup>14</sup>Per i dettagli su perché possiamo scambiare limite e integrale vi rimando ad Analisi 2.

**Corollario 4.91** (Una funzione olomorfa è analitica).

Dati  $D \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $f \in \mathcal{O}(D)$  e  $\overline{B} = \overline{B(z_0, R)} \subseteq D$  si ha che

1.  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  con raggio di convergenza maggiore o uguale a  $R$
2. Posto  $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$  si ha che

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

*Dimostrazione.*

Osserviamo che  $\text{Ind}(\gamma, z) = 1$  per ogni  $z \in B$ . Per la formula integrale di Cauchy (4.88) si ha dunque che

$$f(z) = \text{Ind}(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

e quindi per il teorema (4.90) abbiamo che su  $B$  vale l'identità

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

□

### Proprietà delle olomorfe ereditate dalle analitiche

**Corollario 4.92** (Proprietà delle olomorfe ereditate dalle analitiche).

Sia  $D \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $f \in \mathcal{O}(D)$  e  $\overline{B} = \overline{B(z_0, R)} \subseteq D$ , allora

1.  $f \in C^\infty(D)$
2. Per ogni  $z \in B$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(z) = n! \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

dove  $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ .

3. Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  abbiamo  $f^{(n)} \in \mathcal{O}(D)$

*Dimostrazione.*

- 1) Per il teorema (4.91)  $f$  è analitica e quindi  $C^\infty$ .
- 2) Si ottiene per induzione su  $n$  derivando la formula di Cauchy:  $n=0$ ) È la formula integrale di Cauchy (4.88) dove osserviamo che  $\text{Ind}(\gamma, z) = 1$ .

$n \implies n+1$ ) Calcoliamo:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(z) &= \frac{\partial f^{(n)}(z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} n! \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta = \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\zeta-z} \right)^{n+1} d\zeta = \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \frac{n+1}{(\zeta-z)^{n+2}} d\zeta = \\ &= (n+1)! \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+2}} d\zeta. \end{aligned}$$

3) Poiché  $f$  è olomorfa allora è analitica (4.91), quindi anche  $f^{(n)}$  è analitica (4.28) e dunque è olomorfa (4.29).  $\square$

Data l'importanza della seguente proprietà ereditata dalle analitiche la isoliamo in una proposizione:

**Proposizione 4.93** (Principio di identità).

Sia  $D$  un dominio e siano  $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfe. Se  $f$  e  $g$  coincidono su un aperto allora coincidono su tutto  $D$ .

*Dimostrazione.*

È il principio di identità per le analitiche (4.38).  $\square$

## 4.7 Applicazioni

### 4.7.1 Disuguaglianze di Cauchy e Teorema di Liouville

**Notazione 4.94.**

Siano  $D \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $z_0 \in D$ ,  $\overline{B} = \overline{B(z_0, R)} \subseteq D$  e  $f$  olomorfa su  $D$ . Per ogni  $r \leq R$  poniamo

$$M(r) = \max \{ |f(z)| \mid |z - z_0| = r \} = \max_{z \in \partial B_r(z_0)} \{ |f(z)| \}.$$

**Proposizione 4.95** (Disuguaglianze di Cauchy).

Siano  $D \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $z_0 \in D$ ,  $\overline{B} = \overline{B(z_0, r)} \subseteq D$  e  $f$  olomorfa su  $D$ . Allora

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n! M(r)}{r^n}.$$

*Dimostrazione.*

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \left| f^{(n)}(z_0) \right| &\stackrel{(4.91)}{=} \left| n! \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0 + re^{it}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| = \\ &= \frac{n!}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{(re^{it})^{n+1}} ire^{it} dt \right| \leq \\ &\leq \frac{n!}{r^n 2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt \leq \\ &\leq \frac{n!}{r^n} M(r). \end{aligned}$$

$\square$

*Osservazione 4.96.*

Le disuguaglianze di Cauchy danno una maggiorazione di  $|f^{(n)}(z_0)|$  in termini di  $n$ ,  $r$  e il massimo che  $f$  assume sul BORDO del disco di raggio  $r$  centrato in  $z_0$ .

**Corollario 4.97** (Teorema di Liouville).

Ogni funzione limitata olomorfa su  $\mathbb{C}$ <sup>15</sup> è costante.

*Dimostrazione.*

Per l'ipotesi di limitatezza esiste  $M \in \mathbb{R}$  tale che  $M \geq |f(z)|$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Allora per ogni  $r > 0$  abbiamo che

$$M(r) = \max_{z \in \partial B_r(z_0)} \{|f(z)|\} \leq M.$$

Per le disuguaglianze di Cauchy (4.95) si ha che per ogni  $z_0 \in \mathbb{C}$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$  abbiamo

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} M.$$

Per  $r \rightarrow +\infty$  abbiamo dunque che  $f^{(n)}(z_0) = o(1)$ , ma dato che  $f^{(n)}(z_0)$  non dipende da  $r$  abbiamo necessariamente che  $f^{(n)}(z_0) = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , cioè la tesi.  $\square$

**Corollario 4.98** (Teorema fondamentale dell'algebra).

Ogni polinomio  $p \in \mathbb{C}[z]$  di grado  $n \geq 1$  ha esattamente  $n$  radici distinte contate con molteplicità.

*Dimostrazione.*

Per come si fattorizzano i polinomi basta mostrare che ne ha almeno una e reiterare. Supponiamo dunque per assurdo che  $p$  non abbia radici. Allora per (4.21)

$$f(z) = \frac{1}{p(z)} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}),$$

inoltre, poiché  $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |p(z)| = +\infty$ , abbiamo che  $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |f(z)| = 0$ . In particolare abbiamo che  $|f|$  è limitata perché infinitesima continua. Per il teorema di Liouville (4.97)  $f$  è costante, quindi  $p$  è costante che è assurdo per ipotesi sul grado.  $\square$

## 4.7.2 Principio della media

**Definizione 4.99** (Proprietà della media).

Una funzione  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  soddisfa la **proprietà della media** se per ogni  $z_0 \in D$  esiste  $r_0 > 0$  tale che  $\overline{B_{r_0}(z_0)} \subseteq D$  e per ogni  $r \in (0, r_0)$  si ha che

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

**Proposizione 4.100** (Proprietà della media implica continua).

Se  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  soddisfa la proprietà della media allora è continua.

<sup>15</sup>Le funzioni olomorfe su  $\mathbb{C}$  si dicono **intere**.



*Dimostrazione (NON DATA DURANTE IL CORSO).*

□

**Teorema 4.101** (Principio della media).

Siano  $D \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $f \in \mathcal{O}(D)$  e  $\overline{B} = \overline{B}(z_0, r) \subseteq D$ . Allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt,$$

in particolare  $f$  soddisfa la proprietà della media.

*Dimostrazione.*

Poniamo  $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ . Per la formula integrale di Cauchy (4.88) si ha che

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} i re^{it} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \end{aligned}$$

□

*Osservazione 4.102.*

Nelle ipotesi del teorema, anche  $\Re(f)$  e  $\Im(f)$  soddisfano la proprietà della media.

*Dimostrazione.*

Basta prendere la parte reale e la parte immaginaria di entrambi i membri nell'identità

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

□

*Osservazione 4.103* (Proprietà della media su area).

Nelle ipotesi del teorema vale

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_B f(z) dx dy.$$

*Dimostrazione.*

NON DATA DURANTE IL CORSO.

□

### 4.7.3 Principio del massimo

**Teorema 4.104** (Principio del massimo 1).

Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  con la proprietà della media. Supponiamo che esista  $z_0 \in D$  massimo locale per  $|f|$  (oppure per  $f$  se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ). Allora  $f$  è costante in un intorno di  $z_0$ .

*Dimostrazione.*

Osserviamo che per (4.100) si ha che  $f$  è continua.

Caso  $|f|$ ) Riconduciamoci al caso  $f(z_0) \in \mathbb{R}^+$ :

Se  $|f(z_0)| = 0$  la tesi è ovvia. Supponiamo dunque che  $|f(z_0)| > 0$ . A meno di moltiplicare per un qualche  $e^{i\theta}$  (che ha modulo 1) possiamo supporre  $f(z_0) \in \mathbb{R}$  e  $f(z_0) > 0$  lasciando  $|f|$  invariata.

Fissiamo ora  $r_0 > 0$  che realizza la proprietà della media in  $z_0$  e per il quale  $f(z_0)$  è massimo assoluto di  $|f|$  in  $B_{r_0}(z_0)$ .

Per  $r \in (0, r_0)$  poniamo come usuale

$$M(r) = \max \{|f(z)| \mid |z - z_0| = r\} = \max_{z \in \partial B_r(z_0)} \{|f(z)|\}.$$

Evidentemente  $M(r) \leq f(z_0)$  per definizione di  $r_0$  ( $|f(z_0)|$  massimo), eppure

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{f(z_0 + re^{it})}_{\in \partial B(z_0, r)} dt \implies f(z_0) = |f(z_0)| \leq M(r),$$

dunque  $M(r) = f(z_0)$  per ogni  $0 < r < r_0$ . Allora

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(r) dt = M(r) = f(z_0) = \Re(f(z_0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re(f(z_0 + re^{it})) dt,$$

da cui

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (M(r) - \Re(f(z_0 + re^{it}))) dt = 0.$$

Ricordiamo però che  $M(r) \geq |f(z_0 + re^{it})| \geq \Re f(z_0 + re^{it})$  per ogni  $t \in [0, 2\pi]$ , quindi l'integrando è non negativo ma si integra a zero. Segue che  $\Re(f(z_0 + re^{it})) = M(r)$  Lebesgue-quasi ovunque, ma dato che queste funzioni sono continue in  $t$  si ha che sono proprio uguali. Si ha quindi che

$$\Re(f(z_0 + re^{it})) = M(r) = f(z_0) \implies \Re(f) = f(z_0) \quad \text{su } B_{r_0}(z_0).$$

Se  $f(D) \subseteq \mathbb{R}$  abbiamo concluso. Altrimenti osserviamo anche che

$$\begin{aligned} M(r) &\geq \sqrt{(\Re(f(z_0 + re^{it})))^2 + (\Im(f(z_0 + re^{it})))^2} = \\ &= \sqrt{M(r)^2 + (\Im(f(z_0 + re^{it})))^2} \geq \\ &\geq M(r), \end{aligned}$$

da cui  $\Im(f) = 0$ , che è costante come volevamo.

*caso  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$*  Riconduciamoci al caso  $f(z_0) \in \mathbb{R}^+$ :

Sostituiamo  $f$  con  $f + 2|f(z_0)|$ , infatti se questa è costante chiaramente lo è anche  $f$ .

Fissiamo ora  $r_0 > 0$  che realizza la proprietà della media in  $z_0$  e per il quale  $f(z_0)$  è massimo assoluto di  $f$  in  $B_{r_0}(z_0)$ .

Per  $r \in (0, r_0)$  poniamo come usuale

$$M(r) = \max \{|f(z)| \mid |z - z_0| = r\} = \max_{z \in \partial B_r(z_0)} \{|f(z)|\}.$$

Evidentemente  $M(r) \leq f(z_0)$  per definizione di  $r_0$  ( $f(z_0)$  massimo), eppure

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{f(z_0 + re^{it})}_{\in \partial B(z_0, r)} dt \implies f(z_0) = |f(z_0)| \leq M(r),$$

dunque  $M(r) = f(z_0)$  per ogni  $0 < r < r_0$ . Allora

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(r) dt = M(r) = f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt,$$

da cui

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (M(r) - f(z_0 + re^{it})) dt = 0.$$

Ricordiamo però che  $M(r) \geq f(z_0 + re^{it})$  per ogni  $t \in [0, 2\pi]$ , quindi l'integrando è non negativo ma si integra a zero. Segue che  $f(z_0 + re^{it}) = M(r)$  Lebesgue-quasi ovunque, ma dato che queste funzioni sono continue in  $t$  si ha che sono proprio uguali. Si ha quindi che

$$f(z_0 + re^{it}) = M(r) = f(z_0) \implies f = f(z_0) \quad \text{su } B_{r_0}(z_0),$$

in particolare  $f$  è costante.  $\square$

**Corollario 4.105** (Olomorfa con massimo locale in modulo o per componente è costante).

Se  $D \subseteq \mathbb{C}$  dominio e  $f \in \mathcal{O}(D)$  è tale che esiste  $z_0 \in D$  punto di massimo locale per  $|f|$  (oppure  $\Re(f)$  oppure  $\Im(f)$ ) allora  $f$  è costante.

*Dimostrazione.*

Per le olomorfe vale il principio della media (4.101) e quindi possiamo applicare il principio del massimo (4.104) a  $|f|$ ,  $\Re(f)$  e  $\Im(f)$ . Se siamo nel caso  $|f|$  allora abbiamo già la tesi invocando il teorema (4.104) e il principio di identità (4.93), se invece siamo nel caso  $\Re(f)$  o  $\Im(f)$  abbiamo appena mostrato che una delle due è costante. Poiché  $f$  è olomorfa valgono le equazioni di Cauchy-Riemann (4.19), quindi  $\Re(f)$  costante implica

$$\frac{\partial \Im(f)}{\partial y} = \frac{\partial \Re(f)}{\partial x} = \frac{\partial \Re(f)}{\partial y} = -\frac{\partial \Im(f)}{\partial x} = 0,$$

e analogamente  $\Im(f)$  costante implica  $\Re(f)$  costante.  $\square$

**Corollario 4.106** (Principio del massimo 2).

Sia  $D \subseteq \mathbb{C}$  un dominio limitato. Sia  $f \in \mathcal{O}(D) \cap C^0(\overline{D})$ . Poniamo

$$M = \max_{x \in \partial D} |f(z)|.$$

Allora

1.  $|f(z)| \leq M$  per ogni  $z \in D$
2. se esiste  $z_0 \in D$  tale che  $|f(z_0)| = M$  allora  $f$  è costante.

Valgono anche risultati analoghi per  $\Re(f)$  e  $\Im(f)$  al posto di  $|f|$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $M' = \max_{z \in \overline{D}} |f(z)|$ .

Poiché  $\partial D \subseteq \overline{D}$  si ha che  $M \leq M' \in \mathbb{R}$ . Sia  $x \in \overline{D}$  che realizza  $|f(x)| = M'$ .

Se  $x \in D$  allora è un massimo globale per  $|f|$ , dunque  $f$  è costante per (4.105) e la tesi è banale.

Se  $x \in \partial D$  allora  $M' = M$ . Da questo segue immediatamente che  $|f(z)| \leq M' = M$  e se  $z_0 \in D$  è tale che  $|f(z_0)| = M = M'$  allora è un massimo locale per  $|f|$  e per (4.105) è costante.  $\square$

*Osservazione 4.107.*

L'ipotesi di limitatezza è necessaria. Consideriamo per esempio

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\} \quad \text{e} \quad f(z) = e^z.$$

Evidentemente  $e^z$  è olomorfa e continua su  $D$  perché restrizione di olomorfa su  $\mathbb{C}$ . Osserviamo che  $|f|_{\partial D} = 1$  ma  $\sup_{z \in D} |f(z)| = +\infty$ .

Il problema è il comportamento nel punto all'infinito.

*Osservazione 4.108.*

Nel caso  $\Re(f)$  e  $\Im(f)$  valgono anche dei principi del minimo. Basta applicare il principio del massimo a  $-\Re(f)$  e  $-\Im(f)$ .

**Teorema 4.109** (Teorema dell'applicazione aperta).

*Ogni  $f \in \mathcal{O}(D)$  non costante è una mappa aperta.*

*Dimostrazione.*

Basta mostrare che per ogni  $z_0 \in D$ ,  $f(D)$  è un intorno di  $f(z_0)$ .

Possiamo definire una palla  $\overline{B} = \overline{B_r(z_0)} \subseteq D$  tale che  $f(z) \neq f(z_0)$  per ogni  $z \in B \setminus \{z_0\}$ , infatti se non potessimo  $f$  sarebbe costante su un aperto e quindi per il principio di identità (4.93) sarebbe costante su  $D$  che è connesso, contraddicendo le ipotesi.

A meno di traslazione supponiamo  $f(z_0) = 0$ .

Definiamo  $\delta = \min_{\partial B} |f(z)| > 0$  e consideriamo  $w \in \mathbb{C} \setminus f(D)$ . Vogliamo mostrare che  $|w| \geq \frac{1}{2}\delta$ , infatti in questo caso avremmo  $B_{\frac{1}{2}\delta}(0) \subseteq f(D)$  e quindi  $f(D)$  sarebbe un intorno di  $f(z_0) = 0$ :

Se  $|w| \geq \delta$  allora  $|w| \geq \frac{1}{2}\delta$  e abbiamo finito.

Se  $|w| < \delta$  procediamo come segue: Poniamo

$$\phi(z) = \frac{1}{f(z) - w} \quad \begin{matrix} |w| < \min_{z \in \partial B} |f(z)| \\ \in \end{matrix} \mathcal{O}(D).$$

Per il principio del massimo (4.106) abbiamo che

$$\frac{1}{|w|} = |\phi(z_0)| \stackrel{\text{max2}}{\leq} \sup_{x \in \partial B} |\phi(z)| = \frac{1}{\min_{z \in \partial B} |f(z) - w|}.$$

Per ogni  $z \in \partial B$  si ha

$$|f(z) - w| \geq |f(z)| - |w| \geq \delta - |w|,$$

che, passando al minimo in  $\partial B$ , restituisce

$$\min_{z \in \partial B} |f(z) - w| \geq \delta - |w|$$

da cui

$$\frac{1}{\delta - |w|} \geq \frac{1}{\min_{z \in \partial B} |f(z) - w|} \geq \frac{1}{|w|} \iff |w| \geq \frac{1}{2}\delta$$

come voluto. □

## 4.8 Singolarità

**Definizione 4.110** (Singolarità).

Se  $f \in \mathcal{O}(B_r(z_0) \setminus \{z_0\})$  allora  $z_0$  è una **singolarità** per  $f$ .

**Definizione 4.111** (Corona).

Dati  $0 \leq r < R \leq +\infty$ , l'**anello** (o **corona**) definito da  $r$  e  $R$  è l'insieme

$$A(r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}.$$

Se  $r > R$  poniamo  $A(r, R) = \emptyset$ .

*Osservazione 4.112.*

Esempi particolari di anelli sono  $A(0, R) = B(0, R) \setminus \{0\}$ ,  $A(r, +\infty) = \mathbb{C} \setminus \overline{B(0, r)}$  e  $A(0, +\infty) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

**Lemma 4.113.**

Se  $f \in \mathcal{O}(A(r, R))$  allora dato  $\rho \in (r, R)$ ,  $\int_{\rho e^{2\pi i t}} f dz$  non dipende da  $\rho$ .

*Dimostrazione.*

Siano  $\gamma_1(t) = \rho_1 e^{2\pi i t}$ ,  $\gamma_2(t) = \rho_2 e^{2\pi i t}$ ,  $\delta(t) = \rho_1 + t(\rho_2 - \rho_1)$  e  $\tilde{\gamma}_2 = \delta * \gamma_2 * \bar{\delta}$ . Allora

$$\int_{\gamma_1} f dz \stackrel{\text{omot.}}{=} \int_{\tilde{\gamma}_2} f dz = \int_{\gamma_2} f dz + \int_{\delta} f dz - \int_{\delta} f dz = \int_{\gamma_2} f dz.$$

□

**Lemma 4.114.**

Sia  $f \in \mathcal{O}(A(r, R))$  e  $z_0 \in A(r, R)$ . Siano  $\rho_1 < \rho_2$  e  $r < \rho_1 < |z_0| < \rho_2 < R$ . Allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_2 e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_1 e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

*Dimostrazione.*

Definiamo la seguente funzione

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

Osserviamo che  $g \in \mathcal{O}(A(r, R))$  in quanto composizione di olomorfe su  $A(r, R) \setminus \{z_0\}$  e continua su tutto  $A(r, R)$  (abbiamo usato (4.83)). Per il lemma precedente (4.113) si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\rho_2 e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta &= \int_{\rho_2 e^{2\pi i t}} g(\zeta) d\zeta = \int_{\rho_1 e^{2\pi i t}} g(\zeta) d\zeta = \\ &= \int_{\rho_1 e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta, \end{aligned}$$

da cui

$$\int_{\rho_2 e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \int_{\rho_1 e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = f(z_0) \left( \int_{\rho_2 e^{2\pi i t}} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} - \int_{\rho_1 e^{2\pi i t}} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} \right).$$

Osserviamo che per definizione

$$1 = \text{Ind}(\rho_2 e^{2\pi i t}, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_2 e^{2\pi i t}} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0}$$

$$0 = \text{Ind}(\rho_1 e^{2\pi i t}, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_1 e^{2\pi i t}} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0},$$

quindi

$$\int_{\rho_2 e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \int_{\rho_1 e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = f(z_0)(2\pi i - 0)$$

come volevasi dimostrare.  $\square$

#### 4.8.1 Serie di Laurent

Poiché le serie di potenze convergono in un intero disco non possono essere lo strumento adatto per catturare le singolarità. Consideriamo allora una generalizzazione delle serie di potenze che ammette potenze negative, ovvero le serie di Laurent.

**Definizione 4.115** (Serie di Laurent).

Una **serie di Laurent** centrata in  $z_0$  è un'espressione della forma

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

con  $a_n \in \mathbb{C}$ .

Diremo che  $f$  è **convergente** se

$$f_+ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{e} \quad f_- = \sum_{m=0}^{\infty} a_{-m} \left( \frac{1}{z - z_0} \right)^m$$

sono convergenti.

*Osservazione 4.116* (Le serie di Laurent convergono in un anello).

Data  $f$  serie di Laurent proviamo a capire dove converge assolutamente.

Per ciò che sappiamo sulle serie di potenze si ha che  $f_+$  converge assolutamente in un disco. Sia  $R$  il raggio di questo disco.

Possiamo interpretare  $f_-$  come una serie di potenze nelle  $\frac{1}{z - z_0}$  e questo restituisce un raggio di convergenza assoluta  $\frac{1}{r}$ , cioè  $f_-$  converge assolutamente se

$$\frac{1}{|z - z_0|} < \frac{1}{r} \iff |z - z_0| > r.$$

Mettendo insieme queste informazioni abbiamo che  $f$  converge assolutamente nell'anello

$$z_0 + A(r, R).$$

Osserviamo che se  $r > R$  allora  $f$  non converge perché in ogni punto una tra  $f_+$  e  $f_-$  non converge.

**Proposizione 4.117** (proprietà delle serie di Laurent).

Se  $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$  converge in  $\Omega = z_0 + A(r, R)$  allora

1.  $f$  è olomorfa in  $\Omega$

2. per ogni  $r < \rho < R$  vale  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0 + \rho e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$ .

*Dimostrazione (NON DATA DURANTE IL CORSO).*

1) Definiamo esplicitamente la serie di Laurent derivata:

$$f'(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Osserviamo che l'anello di convergenza di questa serie è lo stesso di quello di  $f$  (segue da  $\lim_n \sqrt[n]{n+1} = 1$ ). Osserviamo ora che  $f'_+$  è olomorfa su  $B_R(z_0)$  perché derivata di una olomorfa, mentre  $f'_-$  è olomorfa su  $\mathbb{C} \setminus B_r(z_0)$  perché è la composizione di due olomorfe:  $\sum_{n=0}^{\infty} n n a_{-n} \zeta^{n-1}$  che è olomorfa su  $B_{\frac{1}{r}}(0)$  perché serie di potenze con raggio di convergenza  $\frac{1}{r}$  e  $z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$  che è olomorfa ovunque eccetto  $z_0$ .

2) Per gli  $a_n$  con  $n \geq 0$  questo segue da (4.92). Se  $n < 0$  allora consideriamo la serie

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{k-n} (z - z_0)^k = f(z) (z - z_0)^n.$$

Questa ha le stesse proprietà di convergenza, quindi possiamo scrivere

$$a_n = a_{0+n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0 + \rho e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta)(\zeta - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{0+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0 + \rho e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

come voluto.  $\square$

**Teorema 4.118** (Olomorfa su Anello è serie di Laurent).

Siano  $0 \leq r < R \leq +\infty$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$  e  $\Omega = z_0 + A(r, R)$ . Se  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  allora  $f$  si esprime tramite un'unica serie di Laurent in  $z_0$  convergente in  $\Omega$ .

*Dimostrazione.*

Unicità) Segue dal secondo punto della proposizione precedente (4.117).

Esistenza) Supponiamo  $z_0 = 0$ . Per trovare la tesi per  $z_0$  generico basterà traslarne una opportuna centrata in 0.

Sia  $z \in A(r, R)$ , allora per lemma (4.114) vale la seguente identità

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_2 e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_1 e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

per ogni  $\rho_1, \rho_2$  tali che  $r < \rho_1 < |z| < \rho_2 < R$ . Cerchiamo di trasformare i due addendi sopra nelle due serie che definiscono una serie di Laurent.

Se  $|\zeta| = \rho_2$  allora

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}.$$

Se  $|\zeta| = \rho_1$  allora

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - \zeta} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta^m}{z^{m+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{\zeta^{-n+1}}.$$

Osserviamo che le serie convergono uniformemente in  $\zeta$  dato che ha modulo fissato e per  $\zeta = \rho_{1,2}$  convergono. Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int_{\rho_2 e^{2\pi i t}} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta}_{=a_n} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_{\rho_1 e^{2\pi i t}} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n+1}} d\zeta}_{=a_{-n}} z^{-n} = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \end{aligned}$$

come voluto. La serie come data a priori converge in  $A(\rho_1, \rho_2)$ , ma poiché l'integrale che definisce  $a_n$  non cambia al variare di  $\rho_{1,2}$  (purché rimangano tali che  $r < \rho_1 < |z| < \rho_2 < R$ ) si ha che in realtà la scrittura vale su  $A(r, R)$ .  $\square$

## 4.8.2 Tipi di singolarità

**Definizione 4.119** (Tipi di singolarità).

Sia  $f \in \mathcal{O}(B_R(z_0) \setminus \{z_0\}) = \mathcal{O}(z_0 + A(0, R))$  e scriviamo  $f$  in serie di Laurent come segue

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n.$$

Si dice che  $z_0$  è

- una **singolarità eliminabile** se  $a_n = 0$  per ogni  $n < 0$ .
- un **polo di ordine**  $k > 0$  se  $a_{-k} \neq 0$  e  $a_n = 0$  per  $n < -k$ .  
Un polo si dice **semplice** se ha ordine 1.
- una **singolarità essenziale** altrimenti.

*Osservazione 4.120* (Singolarità eliminabili possono essere ignorate).

Se  $z_0$  è una singolarità eliminabile di  $f = \sum a_k (z - z_0)^k$  allora ponendo  $f(z_0) = a_0$  si ha che  $f \in \mathcal{O}(B_R(z_0))$ .

*Dimostrazione.*

Osserviamo che  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$ , quindi con la definizione data si ha che  $f$  è continua su  $B_R(z_0)$ . Poiché  $f$  è continua e olomorfa eccetto che in un punto si ha che è olomorfa (4.83).  $\square$

*Osservazione 4.121* (I poli si possono fattorizzare).

Se  $z_0$  è un polo di ordine  $k$  per  $f = \sum_n a_n$  allora

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} h(z)$$

dove  $h$  è una funzione olomorfa e  $h(z_0) \neq 0$ .



*Dimostrazione.*  
Osserviamo che

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-k}^{-1} a_n (z - z_0)^n + g(z) = \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^k} \sum_{n \geq -k} a_n (z - z_0)^{n+k} = \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^k} h(z), \end{aligned}$$

dove  $g$  e  $h$  olomorfe e  $h(z_0) = a_{-k} \neq 0$ . □

**Teorema 4.122** (Estensione di Riemann).

Sia  $f \in \mathcal{O}(B^*)$ , dove  $B^* = B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ . Allora se  $|f|$  è limitato in  $B^*$  si ha che  $z_0$  è una singolarità eliminabile.

*Dimostrazione.*

Se  $|f|$  è limitato allora  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$ <sup>16</sup>, quindi definiamo

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)f(z) & \text{se } z \neq z_0 \\ 0 & \text{se } z = z_0 \end{cases}$$

Per quanto detto  $g$  è continua, mostriamo che è anche olomorfa:

Poiché  $f \in \mathcal{O}(B^*)$ , si ha che  $g$  è olomorfa in ogni punto eccetto eventualmente  $z_0$ , ma sappiamo<sup>17</sup> che una mappa continua e olomorfa eccetto in un segmento è olomorfa (4.83).

Sia  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$  lo sviluppo di Laurent di  $f$  attorno  $z_0$  e  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n (z - z_0)^n$  lo sviluppo di Taylor di  $g$  sempre attorno  $z_0$ . Osserviamo che

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0 + \rho e^{2\pi i t}} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0 + \rho e^{2\pi i t}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n} d\zeta = a_{n-1},$$

dunque  $a_{n-1} = 0$  per  $n < 0$  (cioè  $a_n = 0$  per  $n < -1$ ) e  $a_{-1} = b_0 = g(z_0) = 0$ . Abbiamo dunque verificato che  $a_n = 0$  per  $n < 0$ , che è la definizione di singolarità eliminabile. □

**Teorema 4.123** (Casorati-Weierstass).

Sia  $f \in \mathcal{O}(B^*)$ , dove  $B^* = B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ . Se  $z_0$  è un singolarità essenziale allora  $f(B^*)$  è denso in  $\mathbb{C}$ .

*Dimostrazione.*

Supponiamo per assurdo che  $f(B^*)$  non sia denso in  $\mathbb{C}$ . Allora esistono  $w_0 \in \mathbb{C}$  e  $\rho > 0$  tali che  $\overline{f(B^*)} \cap B_\rho(w_0) = \emptyset$ . Sia  $g : B^* \rightarrow \mathbb{C}$  data da

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}.$$

<sup>16</sup>Prodotto tra limitata e infinitesima è infinitesima

<sup>17</sup>per quello che è stato mostrato a lezione dovremmo verificare anche che  $g$  è  $C^1$ , ma ripercorrendo la dimostrazione del teorema a cui ci stiamo appellando basterebbe sapere che  $f dz$  è una forma chiusa, che sappiamo essere il caso usando il teorema di Cauchy (4.81).

Osserviamo che  $g \in \mathcal{O}(B^*)$  perché composizione di olomorfe. Per definizione di  $w_0$  abbiamo  $|f(z) - w_0| \geq \rho$ , dunque per ogni  $z \in B^*$  vale

$$|g(z)| \leq \frac{1}{\rho} \in \mathbb{R}.$$

Poiché  $g$  è olomorfa su  $B^*$  ed è limitata, per il teorema di estensione di Riemann (4.122) abbiamo che  $z_0$  è una singolarità trascurabile per  $g$  e quindi possiamo considerare  $g \in \mathcal{O}(B)$  senza problemi. Per definizione  $(f(z) - w_0)g(z) = 1 \iff g(z)f(z) = 1 + w_0g(z)$  in  $B^*$ , cioè

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + w_0.$$

Scriviamo  $g(z) = (z - z_0)^k h(z)$  con  $h \in \mathcal{O}(B)$  e  $h(z_0) \neq 0$ , da cui

$$f(z) = w_0 + \frac{1}{(z - z_0)^k} \frac{1}{h(z)}.$$

Poiché  $h(z_0) \neq 0$  abbiamo che  $1/h$  è olomorfa in un intorno di  $z_0$ , quindi  $f$  ha un polo di ordine  $k$  in  $z_0$ , che è assurdo perché avevamo supposto  $z_0$  singolarità essenziale.  $\square$

## 4.9 Funzioni meromorfe e Residui

**Definizione 4.124** (Funzione meromorfa).

Sia  $U \subseteq \mathbb{C}$  aperto. Una funzione **meromorfa** su  $U$  è una funzione olomorfa  $f : U \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  dove  $S \subseteq U$  è discreto e per ogni  $z_0 \in S$  si ha che  $z_0$  è un polo.<sup>18</sup>

*Osservazione 4.125.*

Se  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  sono olomorfe con  $U$  connesso e  $g$  non costantemente nulla, allora  $\frac{f}{g}$  è meromorfa.

*Dimostrazione.*

Poiché  $U$  è connesso e  $g$  non è costantemente nulla si ha che  $S = g^{-1}(0)$  è discreto per (4.36). Dunque  $\frac{f}{g} : U \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  è olomorfa.  $\square$

*Osservazione 4.126* (Inversione mantiene l'ordine scambiando zeri e poli).

Se  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  è olomorfa non costantemente nulla con  $U$  dominio e  $f(z_0) = 0$  con ordine di annullamento  $n_0$  allora  $\frac{1}{f}$  ha un polo di ordine  $n_0$  in  $z_0$ .

*Dimostrazione.*

Osserviamo che

$$f(z) = (z - z_0)^{n_0} h(z)$$

con  $h(z) \neq 0$  e olomorfa in un intorno di  $z_0$  (4.34). In questo intorno abbiamo dunque che

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^{n_0}} \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^{n_0}} g(z),$$

con  $g$  olomorfa in questo intorno. Dunque  $z_0$  è un polo di ordine  $n_0$  per  $\frac{1}{f}$ .  $\square$

<sup>18</sup>Intuitivamente una funzione è meromorfa se è olomorfa ovunque eccetto in qualche polo isolato.

**Definizione 4.127** (Residuo).

Siano  $U \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $z_0 \in U$  e  $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa. Definiamo il **residuo** di  $f$  in  $z_0$  come

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-1+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} f(z) dz,$$

dove  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$  è lo sviluppo di Laurent di  $f$  su  $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$  per  $\varepsilon$  abbastanza piccolo e  $\alpha(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$ .

*Osservazione 4.128.*

Il residuo è una misura di “quanto la forma  $f dz$  non è esatta”.

**Proposizione 4.129** (Formula del residuo per rapporto di olomorfe).

Se  $g, h : U \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfe con  $z_0$  uno zero di ordine 1 per  $h$  e  $g(z_0) \neq 0$  allora posta  $f = \frac{g}{h}$  abbiamo che  $z_0$  è un polo di ordine 1 per  $f$  e

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

*Dimostrazione.*

Se  $z_0$  è un polo semplice allora

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{=k(z)},$$

dunque  $(z - z_0)f(z) = a_{-1} + (z - z_0)k(z)$ , da cui

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) - \overset{0}{\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)k(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z),$$

dove  $(z - z_0)k(z)$  va a 0 perché continua in  $z_0$  e ha valore 0 in  $z_0$ .

Segue che

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} \stackrel{h(z_0)=0}{=} g(z_0) \frac{1}{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

□

**Teorema 4.130** (Teorema dei Residui).

Sia  $U \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $S \subseteq U$  discreto chiuso<sup>19</sup>,  $f : U \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa. Sia  $K \subseteq U$  una regione compatta omeomorfa a  $D^2$ . Sia  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \partial K$  una parametrizzazione di  $\partial K$  in senso antiorario. Assumiamo anche  $S \cap \partial K = \emptyset$ . Allora valgono le seguenti affermazioni:

1.  $S \cap K$  è finito

$$2. \int_{\alpha} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_0 \in S \cap K} \text{Res}(f, z_0).$$

<sup>19</sup>Per esempio: una successione che tende a un punto in  $U$  non è ammessa, invece una che accumula a un punto sul bordo di  $U$  va bene perché come sottoinsieme di  $U$  è chiusa.

*Dimostrazione.*

1) Segue immediatamente osservando che  $S$  è discreto e  $K$  è compatto, infatti se  $S \cap K$  fosse infinito allora possiamo trovarne un punto di accumulazione dividendo  $K$  in regioni di diametro sempre più piccolo.<sup>20</sup>

2) Siano  $z_1, \dots, z_n$  i punti di  $K \cap S$ . Sia  $P = \alpha(0) = \alpha(1) \in \partial K$ .

Scegliamo  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  e  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tali che:

- $\gamma_i$  è un cammino da  $P$  a un punto vicino a  $z_i$  che non passa per alcun punto di  $S$ , dove per “vicino” si intende tale che  $(B_{|z_i - \gamma_i(1)|}(z_i) \setminus \{z_i\}) \cap S = \emptyset$ .
- $\alpha_i$  è un laccio con punto base  $\gamma_i(1)$  che gira attorno a  $z_i$  una volta in senso antiorario e che non gira attorno a nessun altro  $z_j$ .

Consideriamo la giunzione

$$\beta = \gamma_1 * \alpha_1 * \overline{\gamma_1} * \gamma_2 * \alpha_2 * \overline{\gamma_2} * \dots * \gamma_n * \alpha_n * \overline{\gamma_n}.$$

Usando il fatto che  $K \cong D^2$  si vede<sup>21</sup> che  $\alpha \simeq \beta$  a estremi fissi.

Questo mostra per (4.75) che

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \int_{\beta} f(z) dz,$$

in quanto  $f dz$  è chiusa in  $U \setminus S$ . Per concludere osserviamo che

$$\int_{\beta} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i * \alpha_i * \overline{\gamma_i}} f dz = \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i} f dz = \sum_{j=1}^n 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_j),$$

come volevamo. □

#### 4.9.1 Derivata Logaritmica

**Definizione 4.131** (Derivata logaritmica).

Data una funzione derivabile  $f$  definiamo la sua **derivata logaritmica** nei punti dove non si annulla come

$$\frac{f'}{f}.$$

*Osservazione 4.132* (La derivata logaritmica trasforma poli e zeri in poli semplici).

Se  $z_0$  è uno zero o polo di  $f$  tale che

$$f(z) = (z - z_0)^{n_0} g(z)$$

con  $g(z_0) \neq 0$ ,  $g(z)$  olomorfa vicina a  $z_0$  e  $n_0 \neq 0$  allora vicino a  $z_0$  si ha che

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{n_0(z - z_0)^{n_0-1} g(z) + (z - z_0)^{n_0} g'(z)}{(z - z_0)^{n_0} g(z)} = \\ &= \frac{n_0}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \end{aligned}$$

Osserviamo inoltre che  $\frac{g'(z)}{g(z)}$  è olomorfa vicino a  $z_0$  perché  $g(z_0) \neq 0$ .

<sup>20</sup>Questo è praticamente il teorema di Bolzano-Weierstrass

<sup>21</sup>Fidatevi o fate il disegnano.

*Osservazione 4.133.*

Simbolicamente si ha che

$$\frac{f'}{f} = \log(f)',$$

da cui il nome.

**Proposizione 4.134** (Residuo in polo della derivata logaritmica è l'ordine del polo/zero).

Se  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  è meromorfa anche  $\frac{f'}{f}$  lo è e i poli di  $\frac{f'}{f}$  coincidono esattamente con i poli e gli zeri di  $f$ , inoltre

$$\text{Res} \left( \frac{f'}{f}, z_0 \right) = n_0$$

dove  $n_0$  è l'ordine di  $z_0$  come zero di  $f$  se positivo o  $-n_0$  è l'ordine di  $z_0$  come polo di  $f$ .

*Dimostrazione.*

Scriviamo

$$\frac{f'}{f} = \frac{n_0}{z - z_0} + h$$

con  $h$  olomorfa vicino a  $z_0$ . Si ha dunque che  $\frac{f'}{f}$  ha un polo semplice in  $z_0$  e il corrispondente  $a_{-1}$  è  $n_0$ , quindi per definizione di residuo si ha che

$$\text{Res} \left( \frac{f'}{f}, z_0 \right) = n_0.$$

□

**Teorema 4.135** (Teorema di Derivata logaritmica).

Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  meromorfa e  $K \subseteq U$  compatto omeomorfo a  $D^2$ . Se  $\alpha$  è una parametrizzazione in senso antiorario di  $\partial K$  e  $\partial K$  non contiene né zeri né poli di  $f$  allora

$$\int_{\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (Z - P)$$

dove  $Z$  è la somma degli ordini di tutti gli zeri di  $f$  contenuti in  $K$  e  $P$  è la somma degli ordini di tutti i poli di  $f$  in  $K$ .

*Dimostrazione.*

Applico il teorema dei residui (4.130) e poi la proposizione (4.134). □

**Corollario 4.136** (Teorema di Rouché).

Siano  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfe e  $K \subseteq U$  un compatto omeomorfo a  $D^2$ . Supponiamo che  $|g(z)| < |f(z)|$  per ogni  $z \in \partial K$  (in particolare  $f(z) \neq 0$  per ogni  $z \in \partial K$ ). Allora il numero di zeri contati con molteplicità di  $f$  e di  $f - g$  in  $K$  coincidono.

*Dimostrazione.*

Per ogni  $t \in [0, 1]$  poniamo  $f_t = f - tg$ . Chiaramente  $f_t$  è olomorfa su  $U$ . Per il teorema di derivata logaritmica (4.135), se indichiamo con  $Z_t$  il numero di zeri

con molteplicità di  $f_t$  contenuti in  $K$  allora, poiché  $f_t(z) \neq 0$  per ogni  $z \in \partial K$  per ipotesi sui moduli di  $f$  e  $g$  in  $\partial K$ , abbiamo che

$$\mathbb{Z} \ni Z_t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f'_t(z)}{f_t(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f'(z) - tg'(z)}{f(z) - tg(z)} dz.$$

Osserviamo che  $f'_t$  e  $f_t$  sono continue in  $t$  (lineari), quindi il rapporto è continuo se il denominatore non si annulla, che non succede per ipotesi sui moduli di  $f$  e  $g$  sul bordo. Si ha dunque che  $Z_t$  è integrale di una funzione continua in  $t$ , quindi è una funzione continua in  $t$ . Poiché  $Z_t$  è continua in  $t$ , ma ha valori in  $\mathbb{Z}$ , che è discreto, necessariamente  $Z_t$  costante in  $t$ . In particolare

$$Z_0 = Z_1$$

che è la tesi. □

## Appendice A

# Appendice: Teoria delle categorie

In questo capitolo diamo le definizioni base e alcuni risultati di teoria delle categorie. Gli argomenti di questa sezione non sono parte del programma ma sono concetti che spuntano di continuo nel corso (e nei corsi degli anni prossimi). La prassi per l'apprendimento di questi concetti sembra essere “sentirli dire di passaggio così tante volte da capirli intuitivamente”, ma certamente non nuoce vederli scritti in modo esplicito almeno una volta nella vita.

### A.1 Definizione

**Definizione A.1** (Classe).

Data una formula  $\varphi(x)$ , la **classe**  $C$  associata a questa *formula* è un insieme formale definito da

$$x \in C \iff \varphi(x).$$

*Osservazione A.2.*

Ci sono classi che NON sono insiemi, per esempio la classe degli insiemi che non appartengono a se stessi. Una classe che non è un insieme è detta **propria**.

**Definizione A.3** (Categoria).

Una **categoria**  $\mathcal{C}$  consiste di una classe di **oggetti**, che denotiamo  $\text{obj}(\mathcal{C})$ , e una classe di **morfismi** (o **frecce**), che denotiamo  $\text{Mor}(\mathcal{C})$ , tali che

- Per ogni morfismo  $f$  esiste un'unica coppia di oggetti  $\text{dom}(f)$ ,  $\text{cod}(f) \in \text{obj}(\mathcal{C})$  detti **dominio** (o **oggetto sorgente**) e **codominio** (o **oggetto destinazione**).

Per indicare che  $f$  è un morfismo con dominio  $A$  e codominio  $B$  scriviamo

$$f : A \rightarrow B.$$

Denotiamo la classe dei morfismi con dominio  $A$  e codominio  $B$  con

$$\text{Mor}(A, B) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B),$$

dove usiamo la seconda notazione se si presentano ambiguità.

- Per ogni coppia di morfismi  $f, g$  tali che  $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$  è definito il morfismo **composizione**  $g \circ f : \text{dom}(f) \rightarrow \text{cod}(g)$ .
- La composizione di morfismi è associativa, ovvero  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .
- Per ogni oggetto  $X$  in  $\text{obj}(\mathcal{C})$  esiste un morfismo  $\text{id}_X : X \rightarrow X$  detto **morfismo identità** tale che:

$$\begin{aligned}\forall f \in \text{Mor}(A, X) \quad \text{id}_X \circ f &= f \\ \forall g \in \text{Mor}(X, B) \quad g \circ \text{id}_X &= g\end{aligned}$$

**Definizione A.4** (Categorie piccole e localmente piccole).

Una categoria  $\mathcal{C}$  è **piccola** se le classi  $\text{obj}(\mathcal{C})$  e  $\text{Mor}(\mathcal{C})$  sono insiemi.

Una categoria  $\mathcal{C}$  è **localmente piccola** se per ogni coppia di oggetti  $X, Y \in \text{obj}(\mathcal{C})$  si ha che  $\text{Mor}(X, Y)$  è un insieme.

*Osservazione A.5.*

Nella pratica abbiamo una categoria quando definiamo oggetti con una certa struttura e mappe che preservano questa struttura. Da questa descrizione si ha che quasi tutte le categorie che ci interessano (tutte nel caso di questo corso) sono localmente piccole.

**Definizione A.6** (Diagramma commutativo).

Un **diagramma** è un grafo i cui nodi sono oggetti di una categoria  $\mathcal{C}$  e le cui frecce sono dei morfismi tra gli oggetti considerati.<sup>1</sup> Di solito si omettono le identità e le composizioni.

Un diagramma si dice **commutativo** se per ogni coppia di vertici del diagramma, la composizione di frecce dall'uno all'altro non dipende dal cammino sul diagramma.

**Esempio A.7** (Diagrammi commutativi semplici).

Il seguente diagramma commuta se e solo se  $f = h \circ g$ :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ & \searrow f & \downarrow h \\ & & Z \end{array}$$

Il seguente diagramma commuta se e solo se  $g \circ f = q \circ p$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ p \downarrow & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{q} & D \end{array}$$

*Osservazione A.8.*

I diagrammi si possono comporre, cioè un diagramma commuta se e solo se tutti i suoi sotto-diagrammi commutano. Per esempio il seguente diagramma commuta se e solo se commutano il triangolo a sinistra e il quadrato a destra:

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & D \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & C & \longrightarrow & E \end{array}$$

<sup>1</sup>Se comodo possiamo considerare più vertici che rappresentano lo stesso oggetto e più frecce che rappresentano lo stesso morfismo.



**Definizione A.9** (Isomorfismo).

Un morfismo  $f : A \rightarrow B$  è un **isomorfismo** se esiste un morfismo  $g : B \rightarrow A$  tale che

$$\begin{aligned} g \circ f &= id_A \\ f \circ g &= id_B. \end{aligned}$$

Un tale  $g$  è detto **inverso di  $f$** .

**Proposizione A.10.**

*Se un inverso esiste è unico.*

*Dimostrazione.*

Siano  $g_1, g_2$  inversi di  $f$ , allora

$$g_2 \circ f = id_A \implies g_2 \circ f \circ g_1 = id_A \circ g_1 \implies g_2 \circ id_B = g_1 \implies g_2 = g_1.$$

□

**Proposizione A.11.**

*Se un morfismo ha inversa destra e inversa sinistra allora queste coincidono.*

*Dimostrazione.*

Se  $f : A \rightarrow B$  ammette inversa sinistra  $g_s$  e inversa destra  $g_d$  allora

$$g_s \circ f = id_A, f \circ g_d = id_B \implies g_s = g_s \circ id_A = g_s \circ f \circ g_d = id_B \circ g_d = g_d.$$

□

**Definizione A.12** (Automorfismi).

Se  $\mathcal{C}$  è una categoria localmente piccola e  $A \in \text{obj}(\mathcal{C})$ , l'insieme

$$\text{Aut}(A) = \{f \in \text{Mor}(A, A) \mid f \text{ isomorfismo}\}$$

dotato dell'operazione di composizione di morfismi è un gruppo che chiamiamo **gruppo degli automorfismi di  $A$** .

**Definizione A.13** (Functor).

Siano  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  due categorie.

Un **functor covariante**  $T$  da  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{D}$  (denotato  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ) è una collezione dei seguenti dati:

- una funzione classe  $T : \text{obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{obj}(\mathcal{D})$
- $\forall A, B \in \text{obj}(\mathcal{C})$  una funzione classe  $T : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(T(A), T(B))$ .

Questi dati rispettano inoltre le seguenti proprietà:

- $T(id_A) = id_{T(A)}$ ,
- $T(m_1 \circ m_2) = T(m_1) \circ T(m_2)$ .

Un **functor controvariante**  $T$  da  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{D}$  è definito come sopra eccetto per il fatto che se  $m : A \rightarrow B$  allora  $T(m) : T(B) \rightarrow T(A)$  e  $T(m_1 \circ m_2) = T(m_2) \circ T(m_1)$ .

*Osservazione A.14.*

Nella pratica un funtore è una mappa che trasforma relazioni in una categoria in relazioni in un'altra categoria, per esempio il f “gruppo fondamentale” associa ad uno spazio topologico con punto fissato il suo gruppo fondamentale con il dato punto base, inoltre con le mappe che abbiamo denotato con il pedice  $*$  questo funtore associa a mappe continue degli omomorfismi di gruppi.

**Teorema A.15.**

*Un funtore manda isomorfismi in isomorfismi.*

*Dimostrazione.*

Se  $g$  è l'inversa di  $f$  e  $T$  è un funtore allora

$$id_{F(a)} = F(id_a) = F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

e analogamente per  $F(f) \circ F(g)$ , quindi  $F(f)$  è un morfismo con inversa  $F(g)$ .  $\square$

**Definizione A.16** (Trasformazione naturale).

Date due categorie  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  e  $F_1, F_2$  funtori tra  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ , una **trasformazione naturale**  $\varphi$  tra  $F_1$  e  $F_2$  è una funzione dagli oggetti di  $\mathcal{C}$  ai morfismi di  $\mathcal{D}$  tale che per  $f : a \rightarrow b$  in  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}$  vale il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} F_1(a) & \xrightarrow[\text{ondulato}]{F_1(f)} & F_1(b) \\ \downarrow \varphi(a) & & \downarrow \varphi(b) \\ F_2(a) & \xrightarrow[\text{ondulato}]{F_2(f)} & F_2(b) \end{array}$$

dove per le frecce orizzontali il tratto liscio indica il caso dove i funtori sono covarianti e il tratto ondulato il caso dei funtori controvarianti.

**Definizione A.17** (Equivalenza di categorie).

Se  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  e  $F' : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  sono funtori tali che  $F \circ F'$  e  $F' \circ F$  sono naturalmente isomorfi ai funtori identità allora  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  si dicono **categorie equivalenti**.

**Esempio A.18.**

La categoria degli spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$  a dimensione finita è equivalente alla categoria i cui oggetti sono  $\mathbb{K}^n$  al variare di  $n$  e i cui morfismi sono matrici a coefficienti in  $\mathbb{K}$ .

## A.2 Proprietà universali

Fissata una categoria, una **proprietà universale** è una proprietà che determina un oggetto a meno di isomorfismo unico.

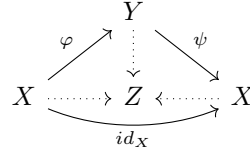
Spesso si usano proprietà universali per definire un oggetto con proprietà volute, dovendone però verificare l'esistenza.

Una **dimostrazione per proprietà universale** è una dimostrazione di buona definizione di un oggetto: viene data una proprietà universale (che garantisce l'unicità) e poi viene esibito un oggetto che rispetta la proprietà universale.

**Esempio A.19** (Schema di argomento di unicità per proprietà universale).

Siano  $X$  e  $Y$  oggetti che rispettano la stessa proprietà universale  $P$ . Poiché rispettano una proprietà universale esistono e sono unici  $\varphi : X \rightarrow Y$  e  $\psi : Y \rightarrow$

$X$  che fanno commutare tutti i diagrammi rilevanti. Poiché commutano tutti i diagrammi possiamo costruire un diagramma del tipo

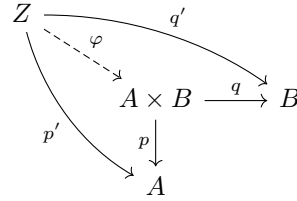


dove  $Z$  è un qualche oggetto con il quale  $X$  e  $Y$  hanno un morfismo in comune per la proprietà universale  $P$  (non è importante che le frecce abbiano come codominio  $Z$ , l'unico uso che facciamo di  $Z$  è costruire il triangolo esterno).

Dato che abbiamo composto diagrammi commutativi questo diagramma è commutativo, quindi  $\psi \circ \varphi = id_X$ . Con un ragionamento simmetrico troviamo l'altra composizione. Questo mostra che  $\varphi$  e  $\psi$  sono isomorfismi tra  $X$  e  $Y$ .

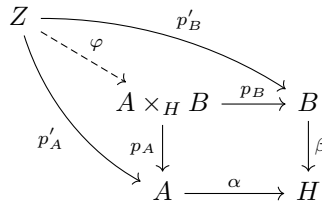
**Definizione A.20** (Prodotto).

Fissata una categoria  $\mathcal{C}$  e dati due oggetti  $A, B \in \text{obj}(\mathcal{C})$ , un **prodotto** di  $A$  e  $B$  è un oggetto  $A \times B$  munito di morfismi  $p : A \times B \rightarrow A$  e  $q : A \times B \rightarrow B$  tali che per ogni oggetto  $Z$  munito di morfismi  $p' : Z \rightarrow A$  e  $q' : Z \rightarrow B$  esiste un unico morfismo  $\varphi : Z \rightarrow A \times B$  tale che il diagramma commuta



**Definizione A.21** (Prodotto fibrato).

Fissata una categoria  $\mathcal{C}$  e dati tre oggetti  $A, B, H \in \text{obj}(\mathcal{C})$  muniti di morfismi  $\alpha : A \rightarrow H$  e  $\beta : B \rightarrow H$ , un **prodotto fibrato** di  $A$  e  $B$  rispetto ad  $H$  (e a  $\alpha$  e  $\beta$ ) è un oggetto  $P = A \times_H B$  munito di morfismi  $p_A : P \rightarrow A$  e  $p_B : P \rightarrow B$  tali che  $\alpha \circ p_A = \beta \circ p_B$  e per ogni oggetto  $Z$  munito di mappe  $p'_A : Z \rightarrow A$  e  $p'_B : Z \rightarrow B$  esiste un unico morfismo  $\varphi : Z \rightarrow P$  tale che il diagramma commuta



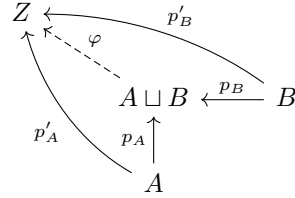
**Notazione A.22** (Il prefisso “co”).

Quando inseriamo il prefisso “co” a qualcosa definito tramite un diagramma (specialmente nel caso di oggetti definiti per proprietà universale) intendiamo che la definizione è identica se non per il fatto che tutti i morfismi hanno invertito verso.

**Definizione A.23** (Coprodotto).

Definito come il prodotto ma le frecce sono invertite, cioè commuta il seguente

diagramma



*Osservazione A.24.*

Il prodotto amalgamato di gruppi è il coprodotto fibrato nella categoria dei gruppi. Similmente il teorema di Van-Kampen (3.96) dà condizioni per poter scrivere gruppi fondamentali come coprodotti fibrati di altri gruppi fondamentali.

### A.3 Esempi di categorie

Categoria	Oggetti	Morfismi
$Set$	Insiemi	funzioni
$Subset_X$	Sottoinsiemi di $X$	inclusione
$Poset$	Insiemi parzialmente ordinati	“essere minori di”
$Grp$	Gruppi	omomorfismi di gruppi
$Ring$	Anelli commutativi con identità	omomorfismi di anelli
$Top$	Spazi topologici	funzioni continue
$Top_*$	Spazi topologici puntati	funzioni continue che rispettano il punto base
$hTop$	Spazi topologici	funzioni continue a meno di omotopia
$Riv$	Rivestimenti	morfismi di rivestimenti
$Mod_A$	Moduli sull’anello $A$	omomorfismi di moduli
$Vec_{\mathbb{K}}$	$\mathbb{K}$ –spazi vettoriali di dimensione finita	mappe lineari
$Ab$	Gruppi abeliani	omomorfismi di gruppi

Funtore	_variante	Partenza	Arrivo
Dimenticante	co	Roba	Roba - struttura
Comp. conn. per archi ( $\pi_0$ )	co	$Top$	$Set$
Gruppo fondamentale ( $\pi_1$ )	co	$Top_*$	$Grp$
Duale di sp.vett	contro	$Vec_{\mathbb{K}}$	$Vec_{\mathbb{K}}$

## Appendice B

# Ringraziamenti

Ringrazio i seguenti per aver collaborato nella stesura di alcune parti, per aver offerto consigli su come migliorare le dispense in generale o per aver segnalato degli errori:

- Alessandro Moretti
- Federico Allegri
- Tommaso Bellanova
- Lorenzo Contorni
- Davide Ranieri
- Cesare Pieve
- Gabriel Videtta
- Lorenzo Bonetti

Segnalo l'esistenza di una versione ridotta delle dispense a cura di Lombardo Luca: <https://github.com/lukefleed/G2-cheat-sheet>