scelta, la costruzione dei varî insiemi numerici. Suggeriamo a tutti di provare a leggere almeno qualcuna delle appendici, ma questo solo dopo una prima lettura completa del libro.

Fanno eccezione a questo schema soltanto il primo capitolo sulle nozioni preliminari, che non ha appendice, e l'ultimo capitolo che è da considerarsi tutto alla stregua di un'appendice.

Al termine, un dettagliato indice analitico è complemento indispensabile per una più facile e più produttiva lettura.

Anche se il libro, nel suo complesso, contiene decisamente più materiale di quanto viene svolto di solito in un corso universitario, ogni docente potrà trovare, nell'appendice dei varî capitoli, un'ampia scelta di argomenti che può includere nello svolgimento del programma del proprio corso.

Per rendere più immediata la lettura abbiamo usato le seguenti notazioni (oltre agli usuali simboli usati in matematica, che sono elencati a parte):

- ☞ per i richiami a figure, teoremi o formule collegate: ad esempio, "...fra le conseguenze del teorema di Lagrange (☞ corollario 7.23), vedremo ...";
- ✎ per indicare che a quel punto è opportuno svolgere un certo esercizio: ad esempio, "...il simbolo $\sqrt[n]{z}$ non indica un numero complesso (✎ es. 3.89), ma ...";
- ➡ per indicare che è stata inserita un'appendice con un approfondimento dell'argomento, o con un argomento collegato: ad esempio, "...l'importante concetto di limite (➡ appendice 5.5) formalizza ...";
- ⟦ ⟧ questa coppia di simboli è usata per indicare un'alternativa: ad esempio, la frase "se una successione è crescente ⟦decrescente⟧, allora è limitata inferiormente ⟦superiormente⟧" va intesa come "se una successione è crescente allora è limitata inferiormente, mentre se è decrescente allora è limitata superiormente";
- ■ indica la fine di una dimostrazione.

Nel libro abbiamo incluso numerose figure (più di 170) per rendere più comprensibili alcuni concetti e per associare alla lettura quella componente visiva che è tanto importante in Analisi matematica.

Non possiamo concludere questa presentazione senza un riconoscimento del lavoro svolto da Seraina Clavuot e Alessandra Coscia: il loro contributo è stato fondamentale alla riuscita di questo volume, che senza la loro collaborazione non sarebbe mai stato portato a termine.

Parma e Pisa, 31 Agosto 1997

Emilio Acerbi e Giuseppe Buttazzo

Indice

Primo corso di analisi matematica

Dedicato a tutti gli studenti
ai quali abbiamo cercato di far conoscere
qualcosa dell'Analisi matematica,
con la speranza che questo libro
renda più facile (ai prossimi ...)
il compito dell'apprendere

Capitolo 1

Conoscenze preliminari

Per poter capire ed utilizzare proficuamente il resto del libro, è indispensabile che siano ben chiare alcune (minime) conoscenze di base. Le elenchiamo qui di seguito, in modo che il lettore ne possa eventualmente ripassare qualcuna. Gli esercizi di questo capitolo sono un semplice controllo delle nozioni apprese negli anni delle scuole superiori, e il loro svolgimento **non deve** presentare alcun problema.

1.1 - Algebra elementare

Sulle proprietà delle operazioni con i numeri, l'unica osservazione (dettata da una lunga esperienza di correzione di elaborati) è che troppo spesso anche qui si trovano errori "di calcolo", che sono solo errori dovuti a distrazione o, qualche volta, a vecchie lacune di preparazione; chi vi fosse particolarmente soggetto, dovrebbe fare una buona cura di lunghe espressioni da semplificare meticolosamente. Un errore frequente è, ad esempio, semplificare l'equazione $(x-3)(x^5-2x^2-1)=(x-3)(x^5+x)$ in $x^5-2x^2-1=x^5+x$, senza preoccuparsi del fatto che così si perde $x=3$, che è soluzione della prima equazione ma non della seconda (la quale non ha soluzioni). Un'altra osservazione è che la frase "due (o tre, o altro) soluzioni coincidenti" non ha molto senso: l'equazione $x^2=0$ ha solo una soluzione, che è $x=0$; semmai si può dire che questa soluzione ha molteplicità due (si veda la proprietà d) qui sotto).

Per quanto riguarda le disequazioni, per ora useremo solo quelle di primo e di secondo grado in una incognita, e quelle del tipo $(x-a_1)\cdots(x-a_k)>0$. Ricordiamo che "positivo" significa maggiore di zero, quindi zero non è un numero positivo (e in particolare non è vero che un quadrato è sempre positivo): i numeri maggiori o uguali a zero si possono chiamare "non negativi".

Sulle operazioni con i polinomi è necessario avere ben chiaro:

a) che dividere un polinomio $P(x)$ per un polinomio $D(x)$ significa trovare un polinomio $Q(x)$, il quoziente, ed un polinomio $R(x)$, il resto, con le seguenti proprietà (analoghe a quelle della divisione tra numeri interi):
   $R(x)$ ha grado minore di quello di $D(x)$
   $P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$;
b) come si esegue la divisione tra polinomi;
c) che dire "a è una radice (o zero) del polinomio $P(x)$" significa che $P(a) = 0$, ovvero che $P(x)$ è divisibile per $(x - a)$;
d) che dire "a è una radice (o zero) del polinomio $P(x)$ con molteplicità m" significa che $P(x)$ è divisibile per $(x - a)^m$.

Infine, ricordiamo che un polinomio $P(x)$ si dice di grado k se la più grande potenza di x che compare in $P(x)$ con coefficiente diverso da zero è x^k : così, $3x^5 - 2x + x^7$ ha grado 7, mentre del polinomio $3x^5 - 2x + ax^7$ non possiamo dire lo stesso, dato che il grado è 7 solo se $a \neq 0$. Se in un polinomio compare come potenza più alta x^k, ma il coefficiente di x^k potrebbe essere nullo, si dice che P è un polinomio di ordine k ; quindi, un polinomio di ordine k non può avere grado superiore a k, ma può averlo anche inferiore.

1.2 - Trigonometria

In questo libro, gli angoli sono misurati sempre e solo in radianti, che bisogna quindi conoscere; la motivazione sarà chiara più avanti, ☞ formula (7.5) nella sezione 7.2; occorre sapere cosa sono seno, coseno e tangente di un angolo, nonché arcoseno, arcocoseno e arcotangente (su cui ritorneremo nella sezione 4.6); supporremo note le usuali formule di trigonometria, e in particolare

a) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
b) $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$, $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ (con le conseguenti formule per il seno e il coseno di $2x$)
c) se $t = \tan \frac{x}{2}$ allora $\operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ e $\cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$

e inoltre il valore di seno e coseno degli angoli 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ e $\pi/2$. Naturalmente, non guasta conoscere qualche altra formula, tipo quelle di bisezione e di prostaferesi.

1.3 - Geometria analitica

È necessario sapere che cosa sono le coordinate cartesiane nel piano, le equazioni di una retta nel piano (coefficiente angolare, rette parallele ed ortogonali, retta per due punti), l'equazione di una circonferenza generica, di una parabola, di un'ellisse e di un'iperbole.

1.4 - Potenze razionali

Sul significato di x^m con m intero positivo o negativo non dovrebbero esserci dubbi; per quanto riguarda l'esponente 0, poniamo per definizione $x^0 = 1$: in particolare, $0^0 = 1$ (questa scelta risulta molto comoda in un gran numero di situazioni algebriche, ma d'altra parte crea dei problemi con le forme indeterminate nei limiti, come vedremo nella sezione 5.8). Se n è un intero dispari, $x^{\frac{1}{n}}$ è l'unico numero che elevato alla n dà x ; se n è un intero pari, $x^{\frac{1}{n}}$ è definito solo per $x \geq 0$, ed è l'unico numero non negativo che elevato alla n dà x : in particolare, $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$, e non ± 2 . Con il simbolo $x^{\frac{m}{n}}$, se m ed n sono entrambi dispari, oppure se solo m è pari, indichiamo $(x^m)^{\frac{1}{n}}$ oppure $(x^{\frac{1}{n}})^m$, che sono uguali. La stessa definizione vale anche se n è pari ed m è dispari: in tal caso, $(x^m)^{\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$ se $x \geq 0$, e nessuno dei due esiste (e pertanto $x^{\frac{m}{n}}$ non esiste) se $x < 0$. La solita definizione, infine, vale anche se m ed n sono entrambi pari, ma solo se $x \geq 0$; invece, nel caso $x < 0$ ed m, n entrambi pari, non è vero che $(x^m)^{\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$, e pertanto $x^{\frac{m}{n}}$ non ha senso: infatti $(x^m)^{\frac{1}{n}}$ esiste, in quanto x^m è positivo ed $(x^m)^{\frac{1}{n}}$ ha senso, mentre $(x^{\frac{1}{n}})^m$ non esiste perché $x^{\frac{1}{n}}$ è una radice pari di un numero negativo (ad esempio, $[(-2)^2]^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$, ma $[(-2)^{\frac{1}{2}}]^2$ non esiste).

Le principali proprietà delle potenze sono:

a) se $x, y \geq 0$ oppure se n è dispari, allora $(xy)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} y^{\frac{m}{n}}$
b) $x^{\frac{m}{n}} x^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$
c) se tutte le potenze hanno senso, $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{mp}{nq}}$.

Esempio : l'equazione $\sqrt{4 - x^2} = x - 2$, elevando alla cieca al quadrato ambo i membri, diventa $4 - x^2 = x^2 - 4x + 4$, cioè $2x^2 - 4x = 0$, che ha soluzioni $x = 0$ e $x = 2$; tuttavia $x = 0$ non risolve l'equazione originaria, che diventerebbe $\sqrt{4} = -2$. L'errore qui sta nel fatto che l'equazione $a = b$ non è sempre equivalente ad $a^2 = b^2$: lo è solo se a e b sono concordi; nel nostro caso $a = \sqrt{4 - x^2} \geq 0$, quindi è necessario imporre che $b = x - 2 \geq 0$ per "poter" elevare al quadrato.

Questa osservazione ci deve far riflettere sul significato di "potere" effettuare un'operazione: per noi, questo non deve certo indicare la possibilità materiale ("possiamo" tranquillamente scrivere $1 = 7$, e ogni genere di assurdità). Ogni volta che si usa la frase "posso compiere la tale operazione", è sottintesa la frase "e ottengo qualcosa che è equivalente a quello che avevo prima". Daremo una sistemazione precisa a questi concetti nel capitolo 2, con il concetto di implicazione fra proposizioni.

a^x è definita se $a>0$ e $\forall x$ ⇒ esponenziale
$e^{x+y}=e^xe^y$
$(e^x)^y=e^{xy}$
$e^0=1$

1.5 - Esponenziali e logaritmi

$\log_a x$ è definito per $a>0, a\neq 1$ e $\forall x>0$

Definiremo la funzione esponenziale solo fra un po' (nella sezione 5.9), ma la useremo talvolta per degli esempi. La funzione a^x è definita se $a>0$ ed x è qualsiasi, e nel caso $a=1$ si riduce alla funzione costante 1. Nel resto del libro parleremo quasi solo del caso in cui la base a ha un particolare valore, che si indica con il simbolo e (il numero e vale circa 2.7 ed è introdotto nella sezione 5.9); come per la misurazione in radianti, anche le motivazioni di questa scelta saranno chiare più avanti, ☞ formula (7.6) nella sezione 7.2. Tra le proprietà della funzione esponenziale e^x (che a volte indicheremo $\exp(x)$, specialmente se l'argomento è un po' lungo e complicato) abbiamo:

a) $e^{x+y}=e^xe^y$
b) $(e^x)^y=e^{xy}$
c) $e^0=1$

Il logaritmo in base a, $\log_a x$, è definito per $a>0$, salvo il caso $a=1$, e soltanto per $x>0$. Nel caso $a=e$ ometteremo l'indice e, e scriveremo soltanto $\log x$ anziché $\log_e x$; in alcuni libri però (specie in quelli di materie tecniche) si usa una convenzione diversa, scrivendo $\ln x$ per il logaritmo in base e, e $\log x$ per quello in base 10. Poiché questo accade anche sui tasti di molte calcolatrici, bisogna stare attenti a non confondersi. Tra le proprietà del logaritmo abbiamo:

d) se $x>0$ allora $a^{\log_a x}=x$
e) per tutti gli x si ha $\log_a(a^x)=x$
f) se $x,y>0$ allora $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$
g) se $x>0$ allora $\log_a(x^y)=y\log_a x$
h) se $x,y>0$ con $y\neq 1$ allora $\log_a x=\log_a y\cdot\log_y x$;

$x>0$ $a^{\log_a x}=x$
$\forall x$ $\log_a(a^x)=x$
$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$
$\log_a x=\log_a y\log_y x$

in particolare, se $a=e$, si ricava

$$\log_y x=\frac{\log x}{\log y},$$

cioè conoscendo i logaritmi in base e si possono ricavare i logaritmi in una base y qualsiasi.

Osserviamo che dalle proprietà precedenti "segue"

$$a^x=\exp(x\log a);$$

le virgolette sono d'obbligo in quanto questa è in realtà la definizione di a^x, ☞ sezione 5.9, dalla quale seguiranno le proprietà scritte sopra.

1.6 - Funzioni elementari

Riportiamo i grafici di alcune funzioni, che devono essere ben presenti in mente, perché sono gli ingredienti del resto del libro.

funzione pari

funzione dispari

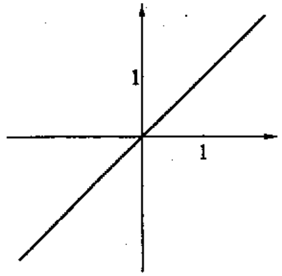


Fig. 1.1 : $y=x$

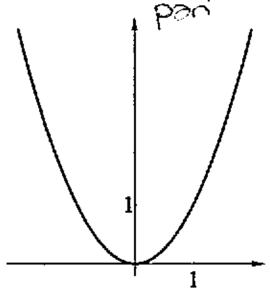


Fig. 1.2 : $y=x^2$

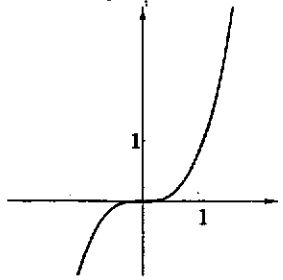


Fig. 1.3 : $y=x^3$

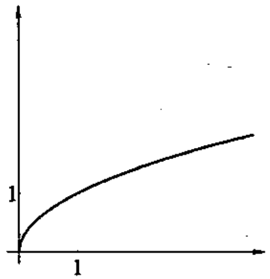


Fig. 1.4 : $y=\sqrt{x}$

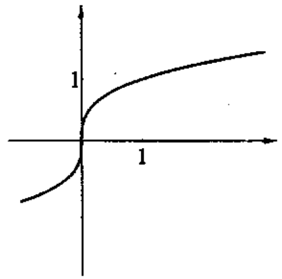


Fig. 1.5 : $y=\sqrt[3]{x}$

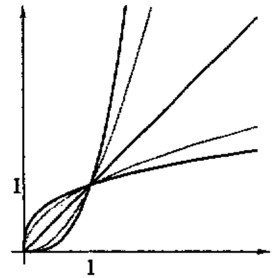


Fig. 1.6 : $y=x^3,x^2,x,\sqrt{x},\sqrt[3]{x}$

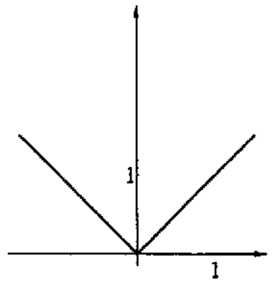


Fig. 1.7 : $y=|x|$

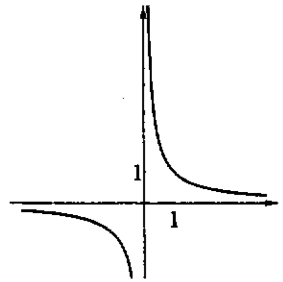


Fig. 1.8 : $y=1/x$

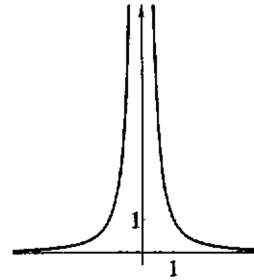


Fig. 1.9 : $y=1/x^2$

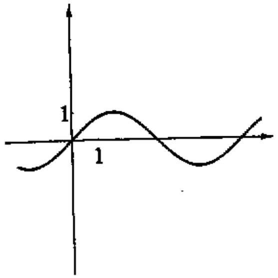


Fig. 1.10 : $y = \operatorname{sen} x$

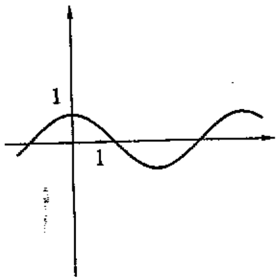


Fig. 1.11 : $y = \cos x$

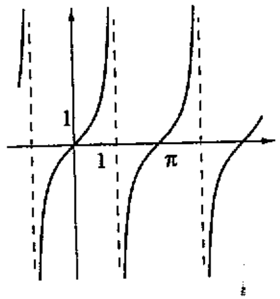


Fig. 1.12 : $y = \tan x$

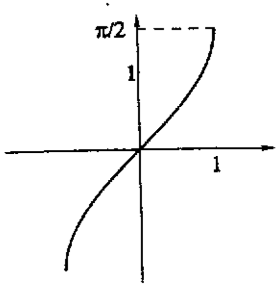


Fig. 1.13 : $y = \operatorname{arcsen} x$

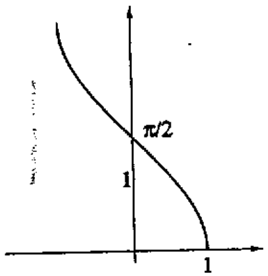


Fig. 1.14 : $y = \arccos x$

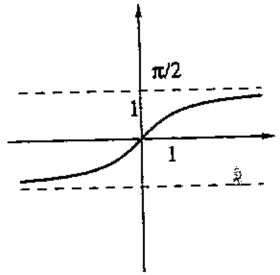


Fig. 1.15 : $y = \arctan x$

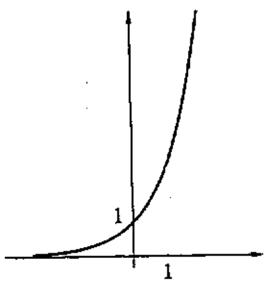


Fig. 1.16 : $y = e^x$

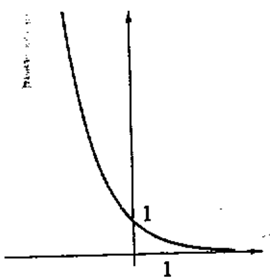


Fig. 1.17 : $y = e^{-x}$

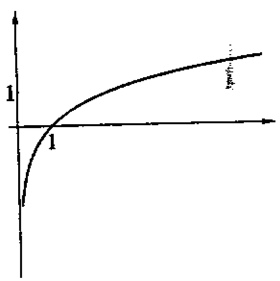


Fig. 1.18 : $y = \log x$

Esercizi relativi al capitolo 1

Esercizio 1.1 : dite quali fra le seguenti uguaglianze sono corrette:

$$\frac{x}{\frac{2}{3}} = \frac{2x}{3}\,, \qquad \frac{2+x}{2y} = \frac{1+x}{y}\,, \qquad \frac{\sqrt{3(1+a^2)}}{3} = \sqrt{1+a^2}\,, \qquad \frac{x}{x} = 1\,.$$

Esercizio 1.2 : semplificate l'espressione

$$\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b-c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b-c}}\left(2+\frac{a^2-b^2-c^2}{bc}\right)+\frac{(a+b)^2}{2bc}\,.$$

Esercizio 1.3 : risolvete l'equazione $x^2 - x - 6 = 0$.

Esercizio 1.4 : dite se l'equazione $x^2 - 5x + 7 = 1$ ha soluzioni.

Esercizio 1.5 : risolvete l'equazione

$$\frac{(2x^2+4)^2}{x(x^2-1)(x^2-4)} = 0\,.$$

Esercizio 1.6 : dite (senza servirvi della calcolatrice, naturalmente) quali fra le seguenti disuguaglianze sono vere:

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{2}\,, \qquad -\frac{1}{5} < -1\,, \qquad \frac{1}{2} \le \frac{2}{4}\,, \qquad \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} \ge 1\,.$$

Esercizio 1.7 : se $a < 0 < b < c$, dite quali fra le seguenti disuguaglianze sono vere:

$$ab < ac\,, \qquad ab \ge ac\,, \qquad ab \le ac\,, \qquad ab > 0\,.$$

Esercizio 1.8 : risolvete le seguenti disequazioni:
a) $x^2 - 15x + 16 > 0$
b) $(x+2)(x-2)(x-3) < 0$
c) $(x-1)(x+2)(x^2 - x - 6) \geq 0$.

Esercizio 1.9 : risolvete la disequazione $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} < 2$.

Esercizio 1.10 : dite se $x = 2$ è radice del polinomio $2x^3 - x^2 - 4x - 4$, e in caso affermativo dividete il polinomio per $x - 2$.

Esercizio 1.11 : dividete il polinomio $P(x) = 6x^3 - 2ax + a^2x^2 - 1$ per il polinomio $D(x) = a - 2x$.

Esercizio 1.12 : traducete in radianti la misura degli angoli la cui ampiezza, espressa in gradi, è pari a $180°$, $60°$, $-45°$, $105°$.

Esercizio 1.13 : traducete in gradi la misura degli angoli la cui ampiezza, espressa in radianti, è pari a $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{12}$.

Esercizio 1.14 : trovate la legge per ottenere seno e coseno degli angoli $-x$, $x+\pi$, $\pi - x$ e $\frac{\pi}{2} - x$ sapendo seno e coseno di x .

Esercizio 1.15 : determinate seno, coseno e tangente degli angoli di ampiezza $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{3}$.

Esercizio 1.16 : determinate seno e coseno degli angoli di ampiezza $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{8}$.

Esercizio 1.17 : determinate i valori di x per cui si ha $\operatorname{sen} x = \sqrt{3}/2$.

Esercizio 1.18 : determinate i valori di x per cui si ha $\cos x \leq 1/2$.

Esercizio 1.19 : determinate i valori di x per cui si ha $\sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x = 2$.

Esercizio 1.20 : determinate i valori di x per cui si ha $\operatorname{sen} x - \cos x > 1$.

Esercizio 1.21 : determinate la tangente di x , dove x risolve l'equazione $\operatorname{sen}^2 x - 6\cos^2 x - \operatorname{sen} x \cos x = 0$.

Esercizio 1.22 : determinate la tangente di $x/2$, dove x risolve l'equazione $\operatorname{sen} x + 7\cos x + 5 = 0$.

Esercizio 1.23 : trovate la distanza fra i punti $(1,2)$ e $(-2,3)$.

Esercizio 1.24 : scrivete l'equazione della retta passante per i punti $(2,-1)$ e $(-1,0)$.

Esercizio 1.25 : scrivete l'equazione della retta passante per i punti $(-2,1)$ e $(-2,3)$.

Esercizio 1.26 : scrivete l'equazione della retta passante per i punti $(1,2)$ e $(-1,-1)$, e trovatene il punto di intersezione con la retta dell'esercizio 1.24.

Esercizio 1.27 : scrivete l'equazione della retta passante per il punto $(2,-1)$ ed avente coefficiente angolare -1 ; tracciate inoltre tale retta.

Esercizio 1.28 : tracciate la retta di equazione $y = -3x + 5$ e quella di equazione $3x - 4y - 9 = 0$.

Esercizio 1.29 : scrivete l'equazione della retta passante per il punto $(1,2)$ e parallela alla retta dell'esercizio 1.24.

Esercizio 1.30 : scrivete l'equazione della retta passante per il punto $(1,2)$ ed ortogonale alla retta dell'esercizio precedente.

Esercizio 1.31 : trovate la distanza del punto $(1,1)$ dalla retta dell'esercizio 1.25, e quella dalla retta dell'esercizio 1.27.

Esercizio 1.32 : scrivete l'equazione della circonferenza centrata nell'origine ed avente raggio 2 .

Esercizio 1.33 : scrivete l'equazione della circonferenza centrata nel punto $(-1,2)$ ed avente raggio 1 .

Esercizio 1.34 : trovate centro e raggio della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$, e tracciate tale circonferenza.

Esercizio 1.35 : trovate i punti di intersezione della retta di equazione $x - y + 2 = 0$ con la circonferenza centrata in $(1,2)$ ed avente raggio 1 .

Esercizio 1.36 : scrivete l'equazione della circonferenza centrata nel punto $(1,1)$ e tangente alla retta di equazione $3x - 4y - 9 = 0$.

Esercizio 1.37 : trovate i valori di k per cui la retta di equazione $x - y + k = 0$ risulta esterna alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$, quelli per cui è secante, e quelli per cui è tangente; in quest'ultimo caso, determinate le coordinate del punto di tangenza.

Esercizio 1.38 : disegnate la parabola di equazione $y = 3x^2 - x + 1$, e determinate i punti di intersezione della parabola con la retta di equazione $y = x + 1$.

Esercizio 1.39 : determinate i valori di k per cui la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + k$ interseca la retta di equazione $2x + y = 0$ in due punti (badate che due punti significa due punti distinti, e non "due punti coincidenti").

Esercizio 1.40 : determinate l'equazione della parabola avente l'asse parallelo all'asse y e passante per i punti $(0,0)$, $(1,3)$ e $(4,0)$.

Esercizio 1.41 : dite se è vero che $\left((1+a^2)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt{1+a^2}$.

Esercizio 1.42 : dite se è vero che $\left((1+a)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt{1+a}$.

Esercizio 1.43 : semplificate l'espressione $\sqrt{x^2 - x^4} / \sqrt[3]{x^4 - x^3}$, facendo attenzione ai valori di x .

Esercizio 1.44 : risolvete le seguenti equazioni:
a) $\sqrt{x^2 - 4}\,\sqrt{x-2} = (x-2)\sqrt{x+2}$
b) $2\sqrt{x-2} = 4 - x$
c) $\sqrt{3x - 2\sqrt{x}} = \sqrt{2-x}$.

Esercizio 1.45 : risolvete le seguenti equazioni:

a) $10^x = 100$
b) $7^x = 1$
c) $4^x = 3$
d) $4^x = 2 \cdot 3^x$
e) $10^x = 3^{x+1}$
f) $3^{2x} - 3^x - 5 = 0$.

Esercizio 1.46 : risolvete le seguenti equazioni:
a) $\log_3 x = 3$
b) $\log_3 x = \log_3 2 - \log_3(x+1)$
c) $\log_2 x + \log_4 x = 3$
d) $4 \log_4 x - \log_2(1+x) = 0$
e) $\log_x e + \log x - 2 = 0$.

Esercizio 1.47 : tracciate, senza guardarli sul libro, i grafici delle funzioni x, $|x|$, x^2, x^3, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $1/x$, $1/x^2$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x$, $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$, $\arctan x$, e^x, e^{-x}, $\log x$.

Esercizio 1.48 : utilizzando una calcolatrice, tracciate i grafici delle funzioni x^2, x^3, $\operatorname{sen} x$, e^x, calcolando il valore delle funzioni in una decina di punti.

Esercizio 1.49 : dite per quali x ha senso calcolare $\sqrt{x^2 - x^4 + 1}$.

Esercizio 1.50 : dite per quali x ha senso calcolare $\operatorname{sen}\big((2x - \log(1-x)\big)$.

Esercizio 1.51 : dite per quali x ha senso calcolare $\log(\operatorname{sen} x + \cos x)\, e^{3x}$.

Capitolo 2

Logica, insiemi, funzioni, relazioni

2.1 - Proposizioni e predicati

Introduciamo il vocabolario essenziale per una corretta interpretazione logica delle dimostrazioni; più che dare definizioni e giustificazioni sofisticate (che sono oggetto di studio di un ramo apposito della matematica, la Logica matematica), procederemo per esempi, assumendo tacitamente come "primitivi" (cioè intuitivi) svariati concetti.

Gli oggetti su cui operiamo sono le proposizioni: chiameremo proposizione ogni frase di senso compiuto che dà delle informazioni.

Esempio : "oggi", "se oggi piove", "che ore sono?" non sono delle proposizioni, mentre "oggi piove" lo è, come pure "a, b, c sono i lati di un triangolo" (✎ es. 2.1).

Una proposizione (che verrà generalmente indicata con una lettera corsiva maiuscola, $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, ...) può essere vera o falsa (non contemporaneamente), e quando si considerano più proposizioni simultaneamente è utile tracciare la loro tabella di verità, ovvero una tabella che ha su ogni riga una diversa proposizione, e nelle cui colonne compaiono tutte le combinazioni di vero/falso che possono verificarsi.

Esempio : la tabella di verità delle due proposizioni $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ può essere scritta

$\mathscr{A}$	:	V	V	F	F
$\mathscr{B}$	:	V	F	V	F,

così che alla penultima colonna corrisponde il caso "$\mathscr{A}$ falso, $\mathscr{B}$ vero"; la tabella delle tre proposizioni $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ è

$\mathscr{A}$	:	V	V	V	V	F	F	F	F
$\mathscr{B}$	:	V	V	F	F	V	V	F	F
$\mathscr{C}$	:	V	F	V	F	V	F	V	F.

Definizione : *si dicono equivalenti due proposizioni che hanno lo stesso valore di verità, cioè tali che nella tabella di verità delle due le righe ad esse corrispondenti sono uguali.*

Vi sono alcuni operatori (connettivi logici) che trasformano una o più proposizioni in altre proposizioni, i cui valori di verità sono determinati da quelli delle proposizioni di partenza; essi sono dati dai simboli **non** , **e** , **o** , $\Rightarrow$ e $\iff$.

Definizione : *date due proposizioni* $\mathscr{A}$ *e* $\mathscr{B}$, *si definiscono le proposizioni* **non** $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}$ **e** $\mathscr{B}$, $\mathscr{A}$ **o** $\mathscr{B}$, $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$ ed $\mathscr{A} \iff \mathscr{B}$ *mediante la seguente tabella di verità:*

$\mathscr{A}$	:	V	V	F	F
$\mathscr{B}$	:	V	F	V	F
non $\mathscr{A}$	:	F	F	V	V
$\mathscr{A}$ **e** $\mathscr{B}$	:	V	F	F	F
$\mathscr{A}$ **o** $\mathscr{B}$	:	V	V	V	F
$\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$	:	V	F	V	V
$\mathscr{A} \iff \mathscr{B}$	:	V	F	F	V.

La proposizione **non** $\mathscr{A}$, negazione di $\mathscr{A}$, è vera quando $\mathscr{A}$ è falsa, e viceversa. L'operatore di negazione, applicato due volte, si cancella: in altri termini, **non(non** $\mathscr{A}$**)** equivale ad $\mathscr{A}$ (✎ es. 2.2).

La proposizione $\mathscr{A}$ **e** $\mathscr{B}$ è vera esclusivamente quando sono vere sia $\mathscr{A}$ che $\mathscr{B}$, mentre $\mathscr{A}$ **o** $\mathscr{B}$ è vera quando almeno una tra $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ è vera: notiamo che non è esclusa la possibilità che siano vere entrambe, cioè l'operatore **o** assume uno solo dei due possibili significati della particella italiana "o", quello corrispondente al latino "vel".

Il simbolo di implicazione $\Rightarrow$ crea una nuova proposizione, che si legge "$\mathscr{A}$ implica $\mathscr{B}$" oppure "se $\mathscr{A}$ allora $\mathscr{B}$" o anche "$\mathscr{B}$ se $\mathscr{A}$" (intendendo che $\mathscr{B}$ è sicuramente vera se $\mathscr{A}$ è vera), o infine "$\mathscr{A}$ solo se $\mathscr{B}$" (cioè $\mathscr{A}$ può essere vera soltanto se $\mathscr{B}$ è vera): dunque, $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$ significa che se $\mathscr{A}$ è vera, necessariamente anche $\mathscr{B}$ deve essere vera, mentre se $\mathscr{A}$ è falsa $\mathscr{B}$ può indifferentemente essere vera o falsa. Talvolta conviene scrivere un'implicazione da destra a sinistra, e per fare ciò si rovescia il simbolo: la proposizione $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$ si può allora scrivere anche $\mathscr{B} \Leftarrow \mathscr{A}$.

L'ultimo simbolo, $\iff$, dà una proposizione che è vera esclusivamente quando $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ hanno lo stesso valore di verità (cioè sono entrambe vere o entrambe false),

pertanto se è vera $\mathscr{A} \iff \mathscr{B}$ le due proposizioni $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ sono equivalenti. La proposizione $\mathscr{A} \iff \mathscr{B}$ equivale a $[(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B})$ **e** $(\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A})]$ (✎ es. 2.3).

Abbiamo introdotto una certa quantità di simboli, che sono molto pratici; in realtà, a patto di sobbarcarci notazioni pesanti, avremmo potuto introdurne solo due, ad esempio **non** ed **o** , e costruire tutti gli altri a partire da questi.

Esempio : la proposizione $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$ equivale a (**non** $\mathscr{A}$) **o** $\mathscr{B}$ (✎ es. 2.4).

Come nell'algebra elementare, le parentesi indicano le operazioni da compiersi per prime; tuttavia, per evitare l'affastellarsi di parentesi, conveniamo che l'operatore **non** abbia la precedenza su tutti gli altri: così, **non** $\mathscr{A}$ **o** $\mathscr{B}$ sta per (**non** $\mathscr{A}$) **o** $\mathscr{B}$, e non è equivalente a **non**($\mathscr{A}$ **o** $\mathscr{B}$) (✎ es. 2.6). Nonostante questa convenzione (ed altre che seguiranno), nel dubbio è sempre meglio mettere in più una coppia inutile di parentesi, piuttosto che rischiare di non metterne una coppia indispensabile.

L'operatore **e** è commutativo, cioè

$$[\mathscr{A} \text{ e } \mathscr{B}] \iff [\mathscr{B} \text{ e } \mathscr{A}]\,,$$

ed è associativo, cioè

$$[(\mathscr{A} \text{ e } \mathscr{B}) \text{ e } \mathscr{C}] \iff [\mathscr{A} \text{ e } (\mathscr{B} \text{ e } \mathscr{C})]\,;$$

per questo motivo, l'ultima proposizione potrà essere scritta senza ambiguità $\mathscr{A}$ **e** $\mathscr{B}$ **e** $\mathscr{C}$, omettendo le parentesi. Abitualmente, nel corso di un testo in italiano, in una lunga lista di "e" la particella viene omessa, e sostituita da una virgola: così faremo anche noi, e ad esempio troveremo scritto "se $x \geq 1$, $x^2 < 4$, $\cos x > 0$ allora ..." anziché "se $[(x \geq 1)$ **e** $(x^2 < 4)$ **e** $(\cos x > 0)]$ allora ...".

Delle proprietà commutativa e associativa gode anche l'operatore **o** . Invece, ($\mathscr{A}$ **e** $\mathscr{B}$) **o** $\mathscr{C}$ non è equivalente ad $\mathscr{A}$ **e** ($\mathscr{B}$ **o** $\mathscr{C}$) (✎ es. 2.7), anzi vale una proprietà distributiva (✎ es. 2.8):

$$[(\mathscr{A} \text{ e } \mathscr{B}) \text{ o } \mathscr{C}] \iff [(\mathscr{A} \text{ o } \mathscr{C}) \text{ e } (\mathscr{B} \text{ o } \mathscr{C})]$$

$$[(\mathscr{A} \text{ o } \mathscr{B}) \text{ e } \mathscr{C}] \iff [(\mathscr{A} \text{ e } \mathscr{C}) \text{ o } (\mathscr{B} \text{ e } \mathscr{C})]\,.$$

Una proprietà simile vale anche per la negazione: precisamente si ha (✎ es. 2.10)

$$[\textbf{non}(\mathscr{A} \text{ e } \mathscr{B})] \iff [(\textbf{non}\,\mathscr{A}) \text{ o } (\textbf{non}\,\mathscr{B})]$$

$$[\textbf{non}(\mathscr{A} \text{ o } \mathscr{B})] \iff [(\textbf{non}\,\mathscr{A}) \text{ e } (\textbf{non}\,\mathscr{B})]$$

(per il momento, non facciamo ancora uso della convenzione sulla precedenza di **non** , dato che le formule sono ugualmente corte e risultano più chiare).

Dalle proprietà elencate finora segue la traduzione della negazione di un'implicazione:

$$[\textbf{non}(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B})] \iff [\mathscr{A} \text{ e } (\textbf{non}\,\mathscr{B})]\,.$$

Infatti, nel precedente esempio si è visto che $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$ equivale a $(\textbf{non}\,\mathscr{A})$ **o** $\mathscr{B}$, pertanto $\textbf{non}(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B})$ equivale a $\textbf{non}[(\textbf{non}\,\mathscr{A})\ \textbf{o}\ \mathscr{B}]$ che, distribuendo la negazione mediante le formule appena trovate (e ricordando che una doppia negazione si cancella), si traduce nella proposizione cercata (✎ es. 2.12). Possiamo allora provare una proprietà fondamentale:

$$[\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}] \quad \Longleftrightarrow \quad [(\textbf{non}\,\mathscr{B}) \Rightarrow (\textbf{non}\,\mathscr{A})]\,. \tag{2.1}$$

Infatti, la negazione della seconda proposizione è $(\textbf{non}\,\mathscr{B})$ **e** $\textbf{non}(\textbf{non}\,\mathscr{A})$, che equivale alla negazione della prima proposizione (✎ es. 2.13). La (2.1) è il principio della dimostrazione contronominale: provare che dall'ipotesi $\mathscr{A}$ segue la tesi $\mathscr{B}$ è lo stesso che provare che negando la tesi ($\mathscr{B}$) si ottiene che pure l'ipotesi ($\mathscr{A}$) è falsa.

Capita di avere bisogno di usare svariate proposizioni, che differiscono fra loro per pochi particolari, se non per uno solo. Sprecare una lettera per ciascuna di esse è poco pratico (se non impossibile, come quando si tratta di infinite proposizioni), pertanto introduciamo il concetto di predicato: chiameremo predicato ogni frase, contenente una o più variabili, che diviene una proposizione quando viene specificato il valore delle variabili.

Esempio : sono predicati i seguenti (che useremo come esempi più avanti):
$\mathscr{L}(x) =$ "nel luogo x sta piovendo"
$\mathscr{P}(x,y) =$ "il giorno y nel luogo x piove" (✎ es. 2.14).

Oltre che dando un valore alle variabili, un predicato può essere trasformato in proposizione anche usando uno dei due quantificatori, quello universale $\forall$ (si legge "per ogni") o quello esistenziale $\exists$ (si legge "esiste"):

Esempio :
$[\forall x,\ \mathscr{L}(x)] =$ "sta piovendo in ogni luogo"
$[\exists x : \mathscr{L}(x)] =$ "c'è un luogo dove sta piovendo" (✎ es. 2.15).

L'ultima frase si legge "esiste un x tale che $\mathscr{L}(x)$", ed è da intendersi nel senso che esiste almeno un valore di x (non necessariamente uno solo) per cui $\mathscr{L}(x)$ è vera. Per indicare invece che esiste un unico tale valore, si possono usare il simbolo $\exists!$ o il simbolo $\exists_1$; entrambi si leggono "esiste unico".

Esempio :
$[\exists! x : \mathscr{L}(x)] =$ "esiste uno ed un solo luogo in cui sta piovendo".

Osservazione : se la variabile x può assumere solo un numero finito di valori, le proposizioni $\forall x,\ \mathscr{P}(x)$ ed $\exists x : \mathscr{P}(x)$ sono delle abbreviazioni per delle sequenze di **e** e di **o** rispettivamente.

Esempio : se x può assumere solo i valori 1 , 2 e 3 allora

$$[\forall x,\ \mathscr{P}(x)] \quad \Longleftrightarrow \quad [\mathscr{P}(1)\ \textbf{e}\ \mathscr{P}(2)\ \textbf{e}\ \mathscr{P}(3)]$$
$$[\exists x : \mathscr{P}(x)] \quad \Longleftrightarrow \quad [\mathscr{P}(1)\ \textbf{o}\ \mathscr{P}(2)\ \textbf{o}\ \mathscr{P}(3)]\,.$$

Quando il predicato dipende da più variabili, si possono presentare mescolanze di più quantificatori, ed eventualmente di indicazioni del valore delle variabili.

Esempio :
$[\exists y : \mathscr{P}(\text{Sahara}, y)] =$ "anche nel Sahara qualche volta piove"
$[\forall x,\ \exists y : \mathscr{P}(x,y)] =$ "in ogni luogo c'è qualche giorno in cui piove".

Notiamo cosa succede invertendo l'ordine di $\forall x$ e $\exists y$:
$[\exists y : \forall x,\ \mathscr{P}(x,y)] =$ "c'è un giorno in cui piove dappertutto(!)" (✎ es. 2.17).
Dunque, non è possibile in generale invertire due quantificatori adiacenti senza alterare il significato della proposizione; si può farlo solo se i due quantificatori sono dello stesso tipo: $(\exists x : \exists y : \ldots)$ equivale a $(\exists y : \exists x : \ldots)$, e $(\forall x,\ \forall y,\ \ldots)$ equivale a $(\forall y,\ \forall x,\ \ldots)$, così che d'ora in poi scriveremo queste frasi semplicemente $(\exists x, y : \ldots)$ e $(\forall x, y,\ \ldots)$.

Introduciamo un'altra convenzione: la proposizione $\exists x : [\mathscr{A}(x)\ \textbf{e}\ \mathscr{B}(x)]$ verrà talvolta scritta

$$\exists \mathscr{A}(x) : \mathscr{B}(x)\,, \tag{2.2}$$

mentre la proposizione $\forall x,\ [\mathscr{A}(x) \Rightarrow \mathscr{B}(x)]$ verrà scritta $\forall \mathscr{A}(x),\ \mathscr{B}(x)$ o anche $\mathscr{B}(x)\,\forall \mathscr{A}(x)$.

Esempio : scriveremo $\exists x > 0 : x^2 = 2$ anziché $\exists x : [x > 0, x^2 = 2]$, mentre scriveremo $\forall x > 3,\ x^2 > 9$ anziché $\forall x,\ [(x > 3) \Rightarrow (x^2 > 9)]$ (✎ es. 2.18).

Osserviamo come si costruisce la negazione di una proposizione contenente quantificatori:

$$\textbf{non}(\forall x,\ \mathscr{A}(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{"non è vero che } \mathscr{A}(x) \text{ è sempre vera"}$$
$$\Longleftrightarrow \quad \text{"c'è almeno un } x \text{ per cui } \mathscr{A}(x) \text{ è falsa"},$$

cioè

$$[\textbf{non}(\forall x,\ \mathscr{A}(x))] \quad \Longleftrightarrow \quad [\exists x : \textbf{non}\,\mathscr{A}(x)]\,, \tag{2.3}$$

e così pure (✎ es. 2.19)

$$[\textbf{non}(\exists x : \mathscr{A}(x))] \quad \Longleftrightarrow \quad [\forall x,\ \textbf{non}\,\mathscr{A}(x)]\,. \tag{2.4}$$

Esempio : si ha (✎ es. 2.20)

$$[\textbf{non}(\exists x : \forall y,\ \mathscr{B}(x,y))] \quad \Longleftrightarrow \quad [\forall x,\ \textbf{non}(\forall y,\ \mathscr{B}(x,y))]$$
$$\Longleftrightarrow \quad [\forall x,\ \exists y : \textbf{non}\,\mathscr{B}(x,y)]\,.$$

La matematica è essenzialmente un insieme di proposizioni, la cui verità vorremmo dimostrare usando solo alcune regole logiche, tra cui le tre fondamentali sono:
a) $\forall \mathscr{A},\ (\mathscr{A}\ \textbf{o}\ \textbf{non}\,\mathscr{A})$ (principio del terzo escluso)
b) $\forall \mathscr{A},\ \textbf{non}(\mathscr{A}\ \textbf{e}\ \textbf{non}\,\mathscr{A})$ (principio di non contraddizione)
c) $\forall \mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C},\ [((\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B})\ \textbf{e}\ (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C})) \Rightarrow (\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{C})]$ (principio di transitività).

Tutte e tre sono molto sensate, e in realtà abbiamo già usato le prime due (per introdurre le tabelle di verità, e dedurne le proprietà dei connettivi logici: infatti in ogni casella abbiamo messo o V o F, niente altro e mai entrambi contemporaneamente). Notiamo che partendo solo da queste regole, non è possibile dimostrare la verità di alcuna proposizione utile: le prime due dicono cose (apparentemente) ovvie su una proposizione $\mathscr{A}$, ma non dicono se è vera, e usando la terza, per dimostrare che è vera $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{C}$ abbiamo bisogno di sapere già che sono vere addirittura due altre proposizioni. Come possiamo allora dimostrare qualcosa? È indispensabile partire con un certo numero di proposizioni la cui verità noi assumiamo come postulato (cioè **decidiamo noi** che sono vere): si tratta degli assiomi; ad esempio, l'intera geometria euclidea è basata sui cinque assiomi di Euclide. L'unica richiesta che facciamo è che gli assiomi scelti rispettino le tre regole fondamentali: ad esempio, non potremmo mettere tra gli assiomi che $1+1=2$, che $1+1=3$ e che $2 \neq 3$, perché troveremmo una contraddizione (dai primi due si ricava che la proposizione $2=3$ è vera, dal terzo che è falsa). In questo senso, la matematica è "vera" relativamente agli assiomi iniziali; naturalmente, potremmo costruire una matematica differente, ed altrettanto "vera", modificando (in modo non contraddittorio) gli assiomi di partenza: pensiamo ad esempio alla geometria iperbolica, che si adatta bene alla teoria della relatività e si ottiene modificando il postulato delle parallele.

L'utilità della nostra matematica nella vita pratica (dopo tutto, i missili ci arrivano, sulla Luna) è una conferma non tanto della "verità" degli assiomi iniziali, ma piuttosto della ragionevolezza della loro scelta, dato il mondo in cui viviamo. Incontreremo più avanti alcuni di questi assiomi, come l'assioma della scelta (➡ appendice 2.6), il lemma di Zorn (➡ appendice 2.10), gli assiomi dei numeri reali 3.11 e 3.12, gli assiomi di Peano (➡ appendice 3.1), l'ipotesi del continuo (➡ appendice 3.11), e ne useremo altri implicitamente.

2.2 - Insiemi

Anche per questa sezione valgono le considerazioni fatte all'inizio della precedente. Talvolta è utile considerare una pluralità di oggetti diversi come un tutt'uno, come si fa in italiano usando i nomi collettivi: "gli Italiani", "la classe tale", oppure con costruzioni del tipo "il contenuto di quella scatola" e simili. La corrispondente struttura matematica è il concetto di insieme; chiameremo insieme una collezione di oggetti, che sono detti elementi dell'insieme. Se E è un insieme ed x è ~~un suo elemento, si dice che~~ x ~~appartiene~~ ad E, e si scrive $x \in E$; per scrivere che x non appartiene ad E ~~si usa il simbolo~~ $\notin$, quindi $(x \notin E) \iff \mathbf{non}(x \in E)$. Per evitare alcuni problemi, ~~ammettiamo l'esistenza~~ di un particolare insieme U, una sorta di universo, dei cui elementi fanno parte tutti gli enti matematici che considereremo (numeri, funzioni eccetera).

Nel seguito useremo per numerosi esempi due insiemi che non abbiamo ancora introdotto rigorosamente: l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali (si tratta di "tutti" i numeri, 0, -2, $3/5$, $\sqrt{2}$ eccetera), e quello $\mathbb{Z}$ dei numeri interi o "interi relativi" (cioè 0, 7, -3 eccetera).

Un insieme si può dare elencandone esplicitamente tutti gli elementi (definizione per enumerazione) oppure descrivendo la proprietà che li individua: nel primo caso si usa la scrittura

$$E = \{ \ldots \text{ lista degli elementi di } E \text{, separati da virgole } \ldots \} ,$$

mentre nel secondo si scrive

$$E = \{x : \mathscr{P}(x)\} ,$$

che si legge "E è l'insieme degli x tali che $\mathscr{P}(x)$", dove x (o un qualunque altro simbolo) è una variabile, $\mathscr{P}$ è un predicato e si intende che gli elementi di E sono quelli per cui $\mathscr{P}$ è vero, così che $[x \in E] \iff \mathscr{P}(x)$. In questo secondo caso, perché E risulti un insieme deve essere (teoricamente) possibile per ogni x determinare se $x \in E$ o se $x \notin E$ (➡ appendice 2.1).

Abitualmente, ~~quando~~ $\mathscr{P}(x)$ è del tipo $(x \in F)$ e $\mathscr{C}(x)$, la scrittura $\{x : (x \in F)$ e $\mathscr{C}(x)\}$ si contrae in $\{x \in F : \mathscr{C}(x)\}$. Inoltre, conveniamo che anziché $(\forall x \in A, \forall y \in A, \ldots)$, oppure $(\exists x \in A : \exists y \in A : \ldots)$, scriveremo semplicemente $(\forall x, y \in A, \ldots)$ e $(\exists x, y \in A : \ldots)$.

Esempio : $E = \{1, 7, \bullet\}$ è un insieme con tre elementi: $1 \in E$, $7 \in E$ e $\bullet \in E$; $F = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ e } x^2 < 4\}$ è l'insieme dei numeri tra zero e due esclusi gli estremi (✎ es. 2.21).

Conformemente alla convenzione (2.2), anziché $\forall x, [x \in E \Rightarrow \mathscr{P}(x)]$ scriveremo $\forall x \in E, \mathscr{P}(x)$, e anziché $\exists x : [x \in E$ e $\mathscr{P}(x)]$ scriveremo $\exists x \in E : \mathscr{P}(x)$. Notiamo che la negazione si comporta molto bene con queste abbreviazioni: infatti (✎ es. 2.23)

$$\begin{aligned} \mathbf{non}[\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)] &\iff [\exists x \in E : \mathbf{non}\ \mathscr{P}(x)] \\ \mathbf{non}[\exists x \in E : \mathscr{P}(x)] &\iff [\forall x \in E,\ \mathbf{non}\ \mathscr{P}(x)] . \end{aligned} \tag{2.5}$$

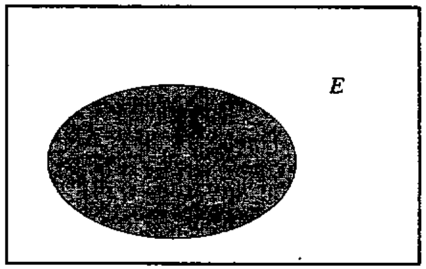


Fig. 2.1 : F è un sottoinsieme di E, cioè $F \subset E$

Definizione : *si dice che un insieme F è sottoinsieme di un insieme E se tutti gli elementi di F appartengono anche ad E, cioè se $\forall x \in F,\ x \in E$: in tal caso si scrive $F \subset E$, che si legge " F è contenuto in E " o " F è sottoinsieme di E " o " F è incluso in E ", oppure si scrive $E \supset F$, che si legge " E contiene F "* (☞ figura 2.1).

Osserviamo che non viene escluso il caso che i due insiemi siano coincidenti: dunque, per ogni insieme E è vero che $E \subset E$.

Esempio : se E è l'insieme dei numeri reali positivi, è $E \subset \mathbb{R}$. Nel seguito indicheremo con $\mathbb{R}^+$ l'insieme dei numeri reali positivi (cioè quelli maggiori di zero: in particolare, $0 \notin \mathbb{R}^+$), e con $\mathbb{R}^-$ quello dei numeri reali negativi; entrambi sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Notiamo che

$$[E = F] \iff [(E \subset F) \text{ e } (E \supset F)] :$$

questa è la strada più comune per provare che due insiemi sono uguali, mostrare che ciascuno dei due è sottoinsieme dell'altro (a dire il vero, è la definizione del simbolo di uguaglianza tra insiemi).

Esempio : proviamo che $\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Detto E il primo insieme ed F il secondo, dobbiamo anzitutto provare che $E \subset F$. Questo significa provare che

$$\forall x,\ [(x \in E) \Rightarrow (x \in F)]$$

Prendiamo allora un generico $x \in E$: certamente x è un numero reale, perché tutti gli elementi di E lo sono; inoltre $x \neq 0$, perché altrimenti sarebbe $x^2 = 0$, mentre sappiamo che $x^2 > 0$. Allora $(x \in \mathbb{R})$ e $(x \neq 0)$, cioè $x \in F$. Ora dobbiamo provare che $F \subset E$, cioè che preso un generico $x \in F$ si ha $x \in E$. Ancora, x è un numero reale; inoltre, essendo $x \neq 0$ deve essere $x > 0$ (e in tal caso $x^2 > 0$) oppure $x < 0$ (e anche in tal caso $x^2 > 0$), pertanto è $x^2 > 0$, ovvero $x \in E$, e questo conclude la dimostrazione.

Oltre al simbolo $\subset$ si trovano i simboli $\subseteq$, che in questo libro è sinonimo di $\subset$ (e sarà usato solo occasionalmente, per sottolineare che i due insiemi potrebbero essere uguali), e $\subsetneq$, che si legge "è strettamente contenuto in": si dice che $F \subsetneq E$ se $F \subset E$ e $F \neq E$.

Definizione : *si dicono rispettivamente unione ed intersezione di E ed F gli insiemi*

$$E \cup F = \{x : x \in E \text{ o } x \in F\}, \qquad E \cap F = \{x : x \in E \text{ e } x \in F\}.$$

$x \in E$ oppure $x \in F$ elementi che appartengono ad almeno un insieme tra

$x \in E$ e $x \in F$ elementi comuni ad E e F.

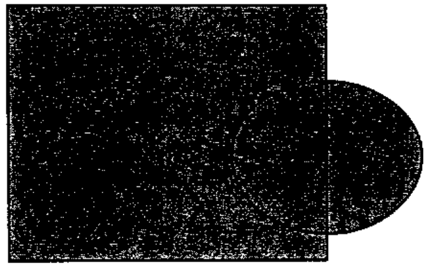


Fig. 2.2 : l'unione $E \cup F$

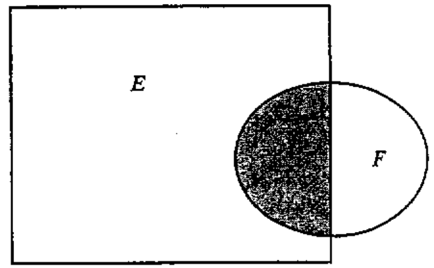


Fig. 2.3 : l'intersezione $E \cap F$

Dunque, $E \cup F$ rappresenta gli elementi che appartengono ad almeno uno tra E ed F, mentre $E \cap F$ rappresenta gli elementi comuni a E ed F.

Esempio : se $E = \mathbb{R}^+$ e $F = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 4\}$ allora $E \cup F = \{x \in \mathbb{R} : x > -2\}$, mentre $E \cap F = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ e } x < 2\}$.

Introduciamo un'altra convenzione ben nota: se $a, b \in \mathbb{R}$ ed $a < b$, la notazione $a < x < b$ significa che $x > a$ e $x < b$ (e analogamente per $a \leq x < b$ eccetera).

Definizione : *si dice complementare di E l'insieme E^c degli elementi dell'insieme universale U che non appartengono ad E*:

$$E^c = \{x \in U : x \notin E\}.$$

È chiaro che $(E^c)^c = E$.
Un particolare insieme, privo di elementi, è l'insieme vuoto, $\varnothing = \{\ \}$; questo simbolo si usa specialmente per rendere più leggibili certe notazioni, come nel caso della formula $E \cap F = \varnothing$ che significa che E ed F non hanno punti in comune (✎ es. 2.24).

Proposizione (leggi di de Morgan) 2.1 : *si ha:*

$$(E \cup F)^c = (E^c) \cap (F^c) \qquad (E \cap F)^c = (E^c) \cup (F^c).$$

DIMOSTRAZIONE : per dimostrare la prima uguaglianza dobbiamo anzitutto provare che $(E \cup F)^c \subset (E^c) \cap (F^c)$; se $x \in (E \cup F)^c$, si ha che $x \notin E \cup F$, dunque $x \notin E$ (altrimenti $x \in E \cup F$) ed $x \notin F$, cioè $x \in E^c$ ed $x \in F^c$, quindi $x \in E^c \cap F^c$. Ora passiamo all'inclusione opposta $(E^c) \cap (F^c) \subset (E \cup F)^c$: se $x \in E^c \cap F^c$, è $x \in E^c$ ed $x \in F^c$, quindi $x \notin E$ ed $x \notin F$. Allora $x \notin E \cup F$, perché altrimenti dovrebbe essere $x \in E$ o $x \in F$, pertanto $x \in (E \cup F)^c$. La seconda formula rimane per esercizio (✎ es. 2.26); tuttavia, c'è un modo molto più rapido per dimostrare queste formule (➡ appendice 2.2). ■

Definizione : *se E ed F sono due insiemi, si dice differenza fra E ed F l'insieme*

$$E \setminus F = \{x \in E : x \notin F\}$$

x non appartiene a F ma appartiene ad E
$= E \setminus F$

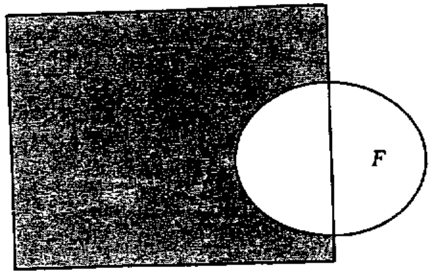
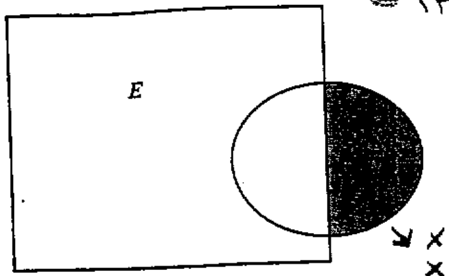


Fig. 2.4 : la differenza $E \setminus F$ ...



$x \in F$
$x \notin E$

Fig. 2.5 : ... e la differenza $F \setminus E$

Esempio : $\mathbb{R}^+ \setminus \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 4\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$. Analogamente $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.

Notiamo che $E \setminus F$ è un sottoinsieme di E , e che gli insiemi $E \setminus F$ ed $F \setminus E$ sono disgiunti, cioè (✎ es. 2.27)

$$(E \setminus F) \cap (F \setminus E) = \emptyset$$

l'intersezione della differenza tra due insiemi è vuota

Un altro operatore talvolta usato è la differenza simmetrica fra due insiemi:

$$E \,\Delta\, F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$$

differenza simmetrica

Definizione : *si dice insieme delle parti di un insieme E l'insieme*

l'insieme delle parti è l'insieme di tutti i sottoinsiemi

$$\mathscr{P}(E) = \{F : F \subset E\}$$

$E \in P(E)$ e $\emptyset \in P(E)$

L'insieme $\mathscr{P}(E)$ è dunque l'insieme di tutti i sottoinsiemi di E ; notiamo che per ogni insieme E si ha $E \in \mathscr{P}(E)$ e $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$.

se $\# E = n$
$\Rightarrow P(E) = \# 2^n$

Esempio : se $E = \{a, b\}$ abbiamo $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, E\}$ (✎ es. 2.28).

Vedremo più oltre che se E è un insieme con n elementi allora $\mathscr{P}(E)$ ha 2^n elementi (✎ es. 3.25).

L'ultima operazione insiemistica che introduciamo è il prodotto cartesiano:

Definizione : *se E ed F sono due insiemi, si dice prodotto cartesiano ~~di E per F~~ l'insieme*

$$E \times F = \{(x, y) : x \in E, y \in F\} .$$

$x \in E$
$y \in F$

Gli elementi del prodotto cartesiano $E \times F$ sono dunque oggetti della forma (parentesi – elemento di E – virgola – elemento di F – parentesi) , e si chiamano coppie ordinate con il primo termine in E e il secondo in F (✎ es. 2.30) (➡ appendice 2.3). Si può definire nello stesso modo anche il prodotto di più di due insiemi: ad esempio, dati tre insiemi E , F , G , il loro prodotto è un insieme di terne ordinate:

$$E \times F \times G = \{(x, y, z) : x \in E, y \in F, z \in G\} .$$

Esempio : se $\mathbb{R}$ indica l'insieme dei numeri reali, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ indica il piano cartesiano, cioè l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali il primo dei quali rappresenta l'ascissa, il secondo l'ordinata.

Terminiamo con una convenzione: indicheremo con $\mathbb{R}^2$ il prodotto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, e analogamente con $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ eccetera il prodotto di tre, quattro, o più copie dell'insieme $\mathbb{R}$. Il generico elemento di $\mathbb{R}^n$ è dunque una n-upla (si legge "ennupla") ordinata di numeri reali.

Funzione $\Rightarrow$ $a \in A, \exists ! b \in B : b = f(a)$
una funzione può far corrispondere lo stesso b a diversi valori di a

2.3 - Funzioni

Il concetto di funzione che introduciamo è molto generale:

Definizione : *si dice funzione (o applicazione) una terna di oggetti, di cui i primi due, detti rispettivamente dominio e codominio, sono insiemi, e il terzo è una legge che ad ogni elemento del dominio fa corrispondere uno ed un solo elemento del codominio. Si scrive $f : A \to B$ (e si legge "f da A in B") per indicare che A è il dominio, B il codominio ed f la legge; se $a \in A$, l'unico elemento di B che la legge f fa corrispondere ad a si indica $f(a)$ e si dice immagine di a , o valore assunto dalla funzione f in a .*

Dunque, perché f sia una funzione occorre che

$$\forall a \in A \ \ \exists! b \in B : b = f(a)$$

Notiamo che una funzione può far corrispondere lo stesso b a diversi valori di a. A prima vista non è molto chiaro il ruolo del codominio: sembra una specie di contenitore dei valori assunti da f e niente più, e sembra che, allargandolo, la funzione non cambi per niente. Non sono obiezioni prive di senso (si veda la convenzione più oltre), ma capiremo l'utilità del codominio quando introdurremo la funzione inversa.

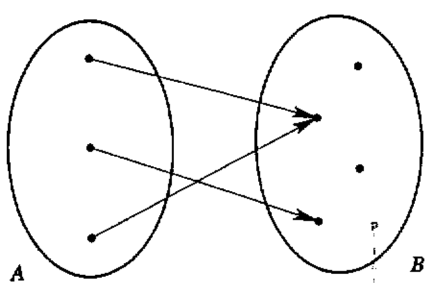


Fig. 2.6 : una funzione $f : A \to B$

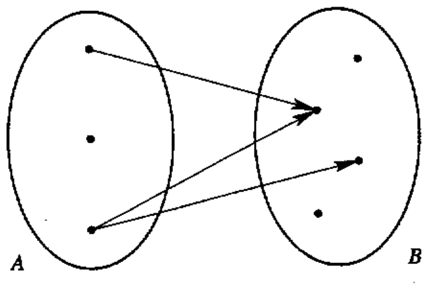


Fig. 2.7 : questa non è una funzione

Esempio : in un normale impianto elettrico, è una funzione quella che ad ogni interruttore fa corrispondere il lampadario che viene acceso (a volte, più interruttori accendono lo stesso lampadario). La somma tra numeri reali è una funzione $s : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, che ad ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ associa il numero $s(x, y) = x + y$; lo stesso si può dire del prodotto. Non si ha una funzione dicendo "$f(a)$ è la soluzione dell'equazione $x^2 + 2x + a = 0$": infatti, se $a > 1$ l'equazione non ha soluzione, quindi per tali valori di a l'immagine $f(a)$ non esiste, e per $a < 1$ l'equazione ha due diverse soluzioni, quindi f assocerebbe a tali a due diverse immagini (✎ es. 2.32).

A volte, per evitare di usare troppe lettere, indicheremo il dominio di una funzione, la cui legge sia f, con il simbolo $\operatorname{dom} f$.

In questo libro trattiamo pressoché soltanto con funzioni reali di variabile reale, cioè tali che sia il dominio sia il codominio sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ (ad esse è dedicato il capitolo 4). In tal caso, parleremo di una funzione citandone solo la legge, e sottintenderemo, salvo diversa esplicita menzione, che il codominio è tutto $\mathbb{R}$, e che il dominio è il più grande sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ su cui ha senso la legge (il cosiddetto "dominio naturale").

Esempio : parleremo della funzione $f(x) = (2x + c)/(x - 1)$, intendendo la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ che ha come legge $f(x) = (2x + c)/(x - 1)$.

Per indicare la sola legge, senza assegnarle un simbolo, si usa la notazione

$$\langle \text{nome-della-variabile} \rangle \mapsto \langle \text{legge} \rangle ,$$

o anche semplicemente si cita la legge.

Esempio : possiamo scrivere la funzione dell'esempio precedente come $x \mapsto (2x+c)/(x-1)$, oppure solo $(2x + c)/(x - 1)$.

Tuttavia, l'ultima notazione va usata con precauzione: parlando di $(2x+c)/(x-1)$, non si può capire se ci riferiamo alla funzione $x \mapsto (2x + c)/(x - 1)$ o alla funzione (completamente diversa!) $c \mapsto (2x + c)/(x - 1)$ (✎ es. 2.34).

identità $id : A \to A$ definita $id(a) = a$ è una legge che ad ogni punto di A associa se stesso

Esempio : alcune funzioni interessanti sono:

a) le applicazioni costanti: fissato $\hat{b} \in B$ la legge $\forall a \in A,\ f(a) = \hat{b}$ definisce una funzione che assume sempre il valore $\hat{b}$, e la indicheremo con $f(a) \equiv \hat{b}$;
b) l'identità di A: è l'applicazione $i_A : A \to A$ definita dalla legge $i_A(a) = a$, che ad ogni punto di A associa se stesso;
c) l'inclusione di un sottoinsieme E di A in A: questa applicazione, indicata con il simbolo $E \hookrightarrow A$, ha dominio E, codominio A e ad ogni $a \in E$ associa se stesso;
d) le proiezioni canoniche sui fattori di un prodotto cartesiano: la proiezione sul primo fattore $\Pi_1 : E \times F \to E$ è l'applicazione che alla coppia (x, y) associa la prima coordinata x; allo stesso modo è definita la proiezione Π_2 sul secondo fattore (e quelle sugli altri fattori in un prodotto di più di due insiemi).

Definizione : *si dice grafico di una funzione* $f : A \to B$ *il sottoinsieme* $\mathscr{G}_f$ *di* $A \times B$ *definito da*

$$\mathscr{G}_f = \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\} .$$

Il grafico di f ha la proprietà che

$$\forall a \in A,\ \exists! b \in B : (a, b) \in \mathscr{G}_f \tag{2.6}$$

(✎ es. 2.35) (➡ appendice 2.4).

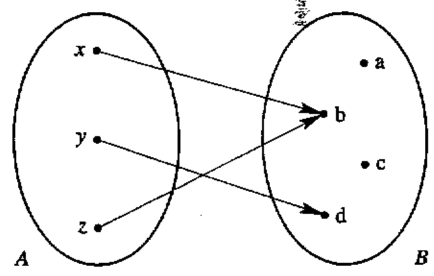


Fig. 2.8 : una funzione $f : A \to B$

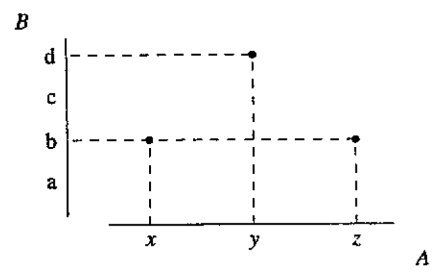


Fig. 2.9 : il grafico della funzione f

Esempio : la circonferenza $\gamma = \{(x, y) : -1 \le x \le 1, x^2 + y^2 = 1\}$ non è il grafico di una funzione da $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \le x \le 1\}$ ad $\mathbb{R}$, perché in corrispondenza al punto $x = 0$ (e non solo a quello) esistono due valori (1 e -1) di y per i quali $(x, y) \in \gamma$. Invece, $\gamma \cap \{(x, y) : x \in A, y \ge 0\}$ è un grafico (✎ es. 2.36).

Definizione : *si dice che una funzione* $f : A \to B$ *è iniettiva se*

$$\forall a_1, a_2 \in A,\ [(a_1 \ne a_2) \Rightarrow (f(a_1) \ne f(a_2))] .$$

f è iniettiva se $\forall a_1, a_2 \in A$ date $a_1 \ne a_2 \Rightarrow f(a_1) \ne f(a_2)$
a elementi distinti associo

suriettiva ⇒ $\forall b \in B, \exists a \in A . b \; f(a)$ tutti i punti del codominio sono immagine di qualche punto del dominio

Una funzione è dunque iniettiva se presi comunque due punti distinti in A le loro immagini sono anch'esse distinte. Un modo equivalente per definire la iniettività (✎ es. 2.37) è

$$\forall a_1, a_2 \in A, \ [(f(a_1) = f(a_2)) \Rightarrow (a_1 = a_2)] . \tag{2.7}$$

È importante non confondere l'ordine in cui è scritta la formula precedente: infatti, la proposizione

$$\forall a_1, a_2 \in A, \ [(a_1 = a_2) \Rightarrow (f(a_1) = f(a_2))]$$

è una banalità, verificata da ogni funzione (controllatelo).

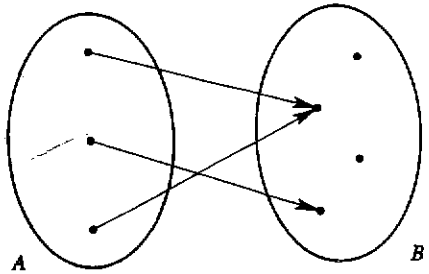


Fig. 2.10 : questa funzione non è iniettiva ...

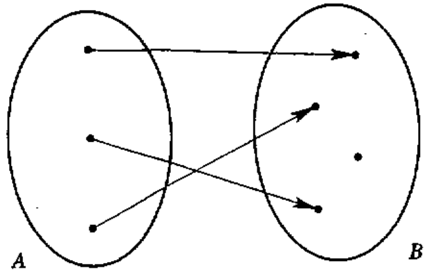


Fig. 2.11 : ... mentre questa è iniettiva

Esempio : la funzione $f(x) = (2x+1)/(x-1)$ è iniettiva, perché

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1}$$
$$\Rightarrow 2x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 1 = 2x_1x_2 - 2x_2 + x_1 - 1$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2 .$$

se un certo punto b è ⇒ immagine di qualche punto del dominio ⇒ è immagine di un solo punto

Invece, $g(x) = (2x^2+1)/(x^2-1)$ non è iniettiva (✎ es. 2.38), perché ad esempio $g(2) = g(-2)$.

Riassumendo, la caratteristica delle funzioni iniettive è che se un certo punto b è immagine di qualche punto del dominio, allora è immagine di un solo punto (✎ es. 2.39). Osserviamo che non tutti i punti del codominio sono necessariamente immagine di qualche punto del dominio: ad esempio, la funzione $(2x+1)/(x-1)$ non assume mai il valore 2 (✎ es. 2.40).

Definizione : *si dice che una funzione $f : A \to B$ è surgettiva (o suriettiva) se*

$$\forall b \in B, \ \exists a \in A : b = f(a) .$$

Una funzione è dunque surgettiva se tutti i punti del codominio sono immagine di qualche punto del dominio.

f è biunivoca se $\forall b \in B \ \exists! a \in A : b = f(a)$

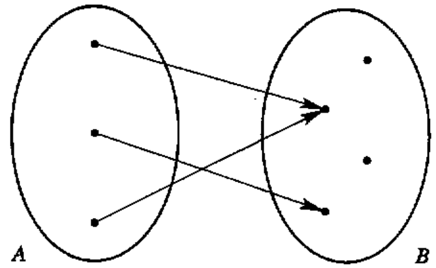


Fig. 2.12 : questa funzione non è surgettiva ...

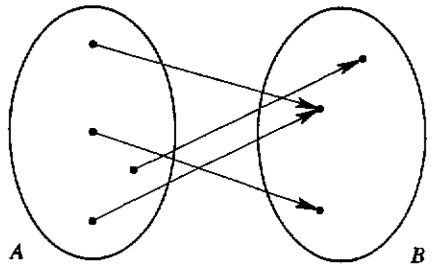


Fig. 2.13 : ... mentre questa è surgettiva

Esempio : la funzione $(2x+1)/(x-1)$ non è surgettiva, perché come visto prima l'equazione $(2x+1)/(x-1) = 2$ non ha soluzioni, dunque la funzione non assume mai il valore 2. Invece la funzione $x-1$ (intesa, come si è detto, con dominio quello naturale, cioè $\mathbb{R}$, e codominio $\mathbb{R}$) è surgettiva, perché per ogni $y \in \mathbb{R}$ l'equazione $x - 1 = y$ ha soluzione (la soluzione è $x = 1 + y$), dunque ogni $y \in \mathbb{R}$ è immagine di qualche punto $x \in \mathbb{R}$. Poiché tale punto x è unico, la funzione $x-1$ è anche iniettiva (✎ es. 2.42).

Osserviamo che le due nozioni di iniettività e surgettività sono indipendenti: vi possono essere funzioni iniettive ma non surgettive, così come vi possono essere funzioni surgettive ma non iniettive (✎ es. 2.43).

Definizione : *si dice che una funzione $f : A \to B$ è biunivoca (o biiettiva, o bigettiva) se è contemporaneamente iniettiva e surgettiva.*

Se $f : A \to B$ è biunivoca, si ha:

a) f è surgettiva, quindi per ogni $b \in B$ esiste (almeno) un $a \in A$ tale che $b = f(a)$

b) f è iniettiva, quindi tale a è unico,

pertanto f è biunivoca se e solo se

$$\forall b \in B, \ \exists! a \in A : b = f(a) .$$

La formula precedente (che è equivalente a dire che f è biunivoca) è una legge che ad ogni $b \in B$ associa uno ed un solo $a \in A$, quello tale che $f(a) = b$: dunque, definisce una funzione da B in A.

Definizione : *se $f : A \to B$ è biunivoca, si dice funzione inversa di f la funzione $f^{-1} : B \to A$ che all'elemento $b \in B$ associa l'unico elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$.*

se f è biunivoca ⇒ $f^{-1} : B \to A$

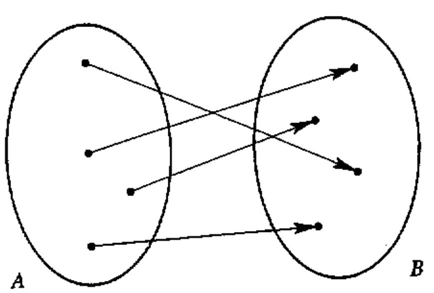


Fig. 2.14 : una funzione biunivoca $f : A \to B$

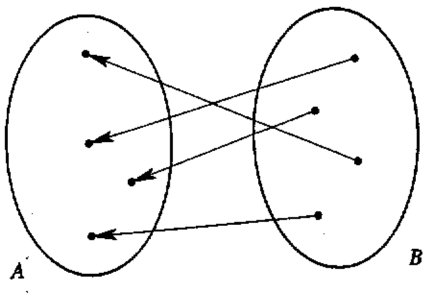


Fig. 2.15 : la sua inversa $f^{-1} : B \to A$

Esempio : la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 3x + 1$ è biunivoca (verificatelo); da $b = f(a)$ segue $a = (b-1)/3$: la funzione inversa è allora $f^{-1}(x) = (x-1)/3$ (✎ es. 2.45).

$y = F(x)$ $x = \frac{y-1}{3} \Rightarrow a = \frac{b-1}{3}$
$b \quad a$

Osservazione : è un errore (che si trova molto frequentemente) pensare che l'inversa della somma di due funzioni a valori reali sia la somma delle due inverse. Questo è falso anche in casi semplicissimi, come si vede prendendo ad esempio $f(x) = g(x) = x$: allora $f^{-1}(x) = g^{-1}(x) = x$, $(f+g)(x) = 2x$ e $(f+g)^{-1}(x) = x/2$, quindi $(f+g)^{-1}(x) \neq f^{-1}(x) + g^{-1}(x)$.

Osserviamo che se $f : A \to B$ è biunivoca, ~~il grafico della funzione inversa~~ è (✎ es. 2.50)

$$\mathscr{G}_{f^{-1}} = \{(b,a) \in B \times A : a = f^{-1}(b)\} = \{(b,a) \in B \times A : (a,b) \in \mathscr{G}_f\} : \qquad (2.8)$$

questo significa che il grafico dell'inversa è il simmetrico del grafico di ~~f, perché~~ si ottiene ~~scambiando A con B~~ (se A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ il grafico di f^{-1} è il simmetrico di quello di f rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante).

Se $f : A \to B$ è una funzione (non necessariamente biunivoca), si indicano con gli stessi simboli f ed f^{-1} anche altre due funzioni, diverse da f e dalla sua inversa (che può anche non esistere), che definiamo qui sotto. Questo è chiaramente un abuso di notazione, ma è molto comodo, è prassi comune e con un minimo di attenzione è impossibile confondersi.

Definizione : se $f : A \to B$, *si chiama immagine tramite f la funzione $f : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(B)$ definita per ogni $E \subset A$ da*

immagine di E tramite F

$$f(E) = \{b \in B : \exists a \in E : b = f(a)\} .$$

E è un sottoinsieme di A

insieme delle immagini dei punti di E, dove E ⊂ A

F: P(A) → P(B)
∀E ⊂ A
la funzione immagine tramite F ha per argomenti i sottoinsiemi di A.

L'insieme ~~$f(E)$, immagine di E tramite f, è dunque~~ l'insieme delle immagini dei punti di E . Si capisce chiaramente con quale delle due funzioni f si abbia a che fare, guardandone l'argomento: la funzione f ha per argomenti punti di A , mentre la funzione immagine tramite f ha per argomenti sottoinsiemi di A ; ad esempio, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(3)$ fa riferimento alla "vera" funzione f , mentre in $f(\mathbb{R}^+)$ il simbolo f sta per la funzione immagine tramite f .

La notazione $\{b \in B : \exists a \in E : b = f(a)\}$ per indicare $f(E)$ è corretta, ma un po' involuta; nel seguito la abbrevieremo scrivendo al suo posto la formula

$$\{f(a) : a \in E\} ,$$

che è di più immediata lettura.

Definizione : se $f : A \to B$, *si chiama immagine inversa tramite f la funzione $f^{-1} : \mathscr{P}(B) \to \mathscr{P}(A)$ definita per ogni $E \subset B$ da*

$$f^{-1}(E) = \{a \in A : f(a) \in E\} .$$

L'insieme $f^{-1}(E)$ è allora l'insieme dei punti di A la cui immagine appartiene ad E (✎ es. 2.52). La notazione f^{-1} è giustificata dal fatto che in certi casi la funzione immagine inversa è l'inversa della funzione immagine (➡ appendice 2.5).

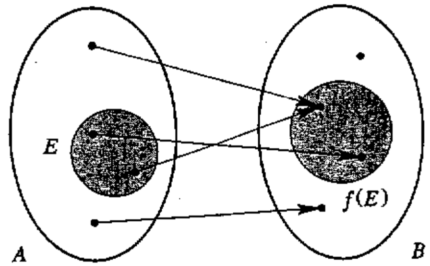


Fig. 2.16 : l'immagine di E tramite f

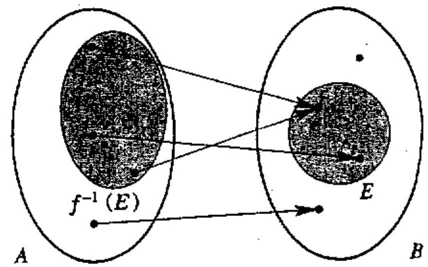


Fig. 2.17 : l'immagine inversa di E tramite f

Esempio : se $f(x) = x^2 + 1$, si ha

$$f(\{a \in \mathbb{R} : 1 < a < 2\}) = \{b \in \mathbb{R} : 2 < b < 5\} :$$

infatti, se $1 < a < 2$ si ha $1 < a^2 < 4$, quindi $2 < f(a) < 5$, ovvero $f(\{a \in \mathbb{R} : 1 < a < 2\}) \subset \{b \in \mathbb{R} : 2 < b < 5\}$; viceversa, se $2 < b < 5$ il numero $a = \sqrt{b-1}$ verifica $1 < a < 2$ e $f(a) = b$, quindi $\{b \in \mathbb{R} : 2 < b < 5\} \subset f(\{a \in \mathbb{R} : 1 < a < 2\})$ e l'uguaglianza è dimostrata; invece (✎ es. 2.55),

$$f^{-1}(\{b \in \mathbb{R} : 2 < b < 5\}) = \{a \in \mathbb{R} : 1 < a < 2 \text{ o } -2 < a < -1\} . \qquad (2.9)$$

Definizione : se $f : A \to B$, si dice *immagine* di f l'insieme $f(A)$.

Possiamo allora dire che una funzione $f : A \to B$ è surgettiva se e solo se $f(A) = B$ (✎ es. 2.57). Osserviamo che non è difficile passare da una data funzione f ad una che non differisce da f in modo troppo profondo, e che è surgettiva: se $f : A \to B$, consideriamo la funzione $\hat{f} : A \to f(A)$ definita dalla legge $\hat{f}(x) = f(x)$; questo significa considerare la stessa legge, sullo stesso dominio, ma prendere come codominio esattamente l'insieme dei valori effettivamente assunti da f, anziché un "contenitore" troppo grosso. Inoltre, se f era iniettiva la funzione $\hat{f}$ è biunivoca, quindi ammette inversa; poiché la differenza fra le due funzioni è abbastanza sfumata, in questo libro useremo la frase "f è invertibile" come sinonimo di "f è iniettiva", in quanto se f è iniettiva almeno $\hat{f}$ ammette inversa. Se invece f non è iniettiva, le operazioni da compiere per trovare una funzione biunivoca e che somiglia in qualche modo ad f sono molto più drastiche (➡ appendice 2.6).

Definizione : *se $f : A \to B$ ed $E \subset A$, si dice* restrizione *di f ad E la funzione $f|_E : E \to B$ definita da $f|_E(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$.*

Esempio : possiamo vedere l'utilizzo del concetto di restrizione in un caso interessante: posto $E = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, la funzione $f : \mathbb{R} \to E$ definita da $f(x) = x^2$ non è iniettiva, perché ad esempio $f(-1) = f(1)$; invece, la restrizione $f|_E$ risulta iniettiva (e anche surgettiva), e la sua inversa è $\sqrt{x}$ (che non è l'inversa di f). ⇒ la restrizione suriettiva ⇒ solo $x \geq 0$.
⇒ la restrizione è anche biunivoca ⇒ ammette inversa $= \sqrt{x}$.

Osservazione : più in generale, possiamo definire la restrizione di $f : A \to B$ anche ad un insieme E che non sia contenuto nel dominio A di f, purché però l'insieme $E \cap A$ non sia vuoto; questa, che si indica ugualmente con il simbolo $f|_E$, ha allora dominio $E \cap A$, ed è definita da $f|_E(x) = f(x)$ per ogni $x \in E \cap A$.

Esempio : se $E = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$, ed $f(x) = \sqrt{x}$, potremo scrivere semplicemente $f|_E$ anziché $f|_{E \cap \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}}$.

Per calcolare la maggior parte delle funzioni che incontriamo, noi procediamo a passi successivi: così, ad esempio, per calcolare $\log(\cos(x^2))$ prima si calcola il quadrato di x, poi del risultato si calcola il coseno, poi del nuovo risultato si calcola il logaritmo. Questo procedimento a catena si formalizza nel concetto di composizione.

Definizione : *se $f : A \to B$ e $g : B \to C$, si dice* funzione composta *di g ed f la funzione $g \circ f : A \to C$ definita dalla legge $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

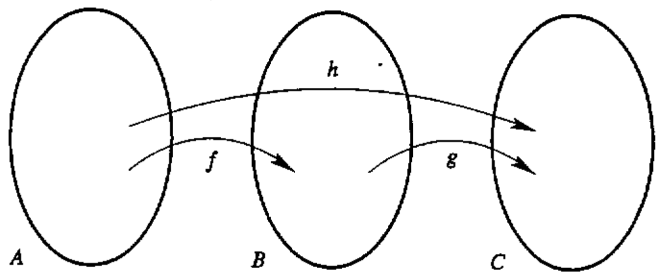


Fig. 2.18 : $f : A \to B$, $g : B \to C$ e la funzione composta $h = g \circ f : A \to C$

Osservazione : più in generale, si può definire la composizione di due funzioni $f : A \to B$ e $g : B' \to C$, purché vi siano punti $x \in A$ in cui si può calcolare $g(f(x))$: ciò accade quando c'è qualche punto del tipo $f(x)$ (cioè nell'immagine di f) in cui possiamo calcolare g (cioè nel dominio di g), vale a dire se

$$f(A) \cap B' \neq \emptyset .$$

Se questa condizione è soddisfatta, la funzione composta $g \circ f$ ha dominio $f^{-1}(f(A) \cap B')$ (che è l'insieme dei punti di A la cui immagine tramite f sta nel dominio di g).

Esempio : se $f(x) = x^2$ e $g(x) = \cos(x)$, allora $(g \circ f)(x) = \cos(f(x)) = \cos(x^2)$, mentre $(f \circ g)(x) = (\cos x)^2$. Notiamo in particolare che anche nei casi in cui possiamo scrivere entrambe le funzioni $g \circ f$ e $f \circ g$ queste possono essere diverse (e lo sono, salvo casi molto particolari). Se $f(x) = x - 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$, la composizione $(g \circ f)(x) = \sqrt{x-1}$ ha dominio $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$, mentre $(f \circ g)(x) = \sqrt{x} - 1$ ha dominio $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ (✎ es. 2.59).

Esempio : se $f(z) = z^2$ e $g(y) = \cos(y)$, allora $(g \circ f)(x)$ è ancora uguale a $\cos(x^2)$. Questo esempio è proprio banale, ma l'incertezza su questo punto è molto diffusa: nella legge di una funzione, il simbolo della variabile è muto, quindi la funzione $x \mapsto f(x)$ è esattamente la stessa della funzione $\clubsuit \mapsto f(\clubsuit)$.

Esempio : se $E \subset A$ ed $i_{E \hookrightarrow A}$ indica l'immersione di E in A, la restrizione $f|_E$ è la composizione $f \circ i_{E \hookrightarrow A}$.

Proposizione 2.2 : *la composizione di funzioni è associativa, cioè $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

La dimostrazione di questa osservazione è un facile esercizio (✎ es. 2.60); in particolare, si può scrivere senza ambiguità $h \circ g \circ f$, senza parentesi.

Abbiamo notato che la restrizione di $f : A \to B$ ad un sottoinsieme E di A si può vedere come la composizione di f con l'inclusione $E \hookrightarrow A$. Osserviamo poi che per ogni funzione $f : A \to B$ si ha $f \circ i_A = i_B \circ f = f$, cioè la composizione con le applicazioni identiche lascia inalterata la funzione.

$f: A \to B$ è biunivoca $\Rightarrow f^{-1} \circ f = id_A$ e $f \circ f^{-1} = id_B$ inoltre se $\exists g: B \to A$ tale che $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B \Rightarrow f$ è biunivoca e g è l'inverso di f

Proposizione 2.3 : *se* $f : A \to B$ *è biunivoca si ha* $f^{-1} \circ f = i_A$ *e* $f \circ f^{-1} = i_B$ *; inoltre, se esiste una funzione* $g : B \to A$ *tale che* $g \circ f = i_A$ *e* $f \circ g = i_B$ *la funzione* f *è biunivoca, e* g *è l'inversa di* f *.*

Anche questa dimostrazione è lasciata per esercizio (✎ es. 2.61).

Proposizione 2.4 : *se* $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$ *sono biunivoche, anche* $g \circ f$ *lo è, e la sua inversa è* $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ *.*

DIMOSTRAZIONE : che $g \circ f$ è biunivoca segue dal fatto, più generale, che se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ sono iniettive la loro composizione $g \circ f$ è iniettiva (✎ es. 2.62), mentre se sono entrambe surgettive la loro composizione è surgettiva (✎ es. 2.64); a questo punto, per determinare l'inversa, osserviamo che

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ i_B \circ f = f^{-1} \circ f = i_A ,$$

e analogamente $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = i_C$, che per la proposizione 2.3 conclude la dimostrazione. ■

Concludiamo la sezione sulle funzioni introducendo un simbolo che permette di abbreviare alcune notazioni.

Definizione : *se* A *è un insieme, ed* E *un suo sottoinsieme, la funzione caratteristica di* E *in* A *è la funzione* $\mathbb{1}_E : A \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E . \end{cases}$$

Se $f : A \to \mathbb{R}$, oltre alla restrizione di f ad un insieme E utilizzeremo talvolta la funzione $f \mathbb{1}_E$, che vale f su E ed è nulla fuori di E .

2.4 - Relazioni d'ordine e di equivalenza

Considerando le relazioni di disuguaglianza ($\leq$) e di uguaglianza ($=$) fra numeri reali, ci rendiamo conto facilmente che, fra le altre, esse hanno alcune proprietà nelle quali le operazioni dei numeri reali (somma e prodotto) non intervengono. Partendo da queste osservazioni, introduciamo le relazioni d'ordine e le relazioni di equivalenza, strutture che non sono legate in modo particolare ai numeri reali e si prestano bene a generalizzare il concetto di "minore o uguale" e quello di "uguale".

Definizione : *dato un insieme* A *, si dice relazione su* A *un qualunque sottoinsieme* R *di* $A \times A$ *; se* $(x, y) \in R$ *, si dice che* x *è in relazione con* y *.*

Esempio : sull'insieme $A = \mathbb{R}$ possiamo considerare la relazione (cioè il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$) $R_= = \{(x, y) : x = y\}$, rappresentata dalla bisettrice del primo e terzo quadrante. In questo caso, abbiamo $(x, y) \in R_= \iff x = y$, cioè la relazione $R_=$ è la relazione di uguaglianza.

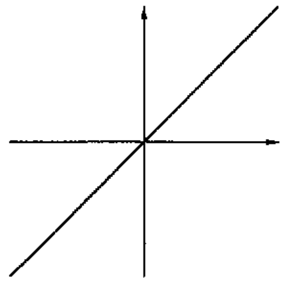


Fig. 2.19 : la relazione $R_=$

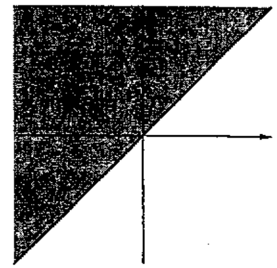


Fig. 2.20 : la relazione $R_\leq$

Sempre su $A = \mathbb{R}$, consideriamo la relazione $R_\leq = \{(x, y) : x \leq y\}$. In questo caso, $(x, y) \in R_\leq \iff x \leq y$, cioè $R_\leq$ è la relazione di disuguaglianza; le comuni relazioni $=$ e $\leq$ rientrano pertanto fra quelle definite come sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$.

Data una relazione R su A (➡ appendice 2.7), spesso anziché $(x, y) \in R$ scriveremo $x R y$, oppure useremo tra x ed y un altro simbolo associato alla relazione: molto frequentemente questo simbolo sarà $\leq$ (quando parleremo delle relazioni d'ordine) o $\simeq$ (per le relazioni di equivalenza).

Definizione : *si dice che una relazione* R *su* A *è un preordine (o preordinamento) se gode delle proprietà*

1) *riflessiva:* $\forall x \in A, \ x R x$
2) *transitiva:* $\forall x, y, z \in A, \ [(x R y) \text{ e } (y R z) \Rightarrow x R z]$.

Esempio : definiamo una relazione sulle parole del vocabolario ponendo che $x R y$ se la parola x viene in ordine alfabetico prima della parola y ; questa relazione è transitiva (se x è prima di y e y è prima di z , allora x è prima di z), però non è riflessiva (x non viene "prima" di x), dunque non è un preordine. Abbiamo invece un preordine se sostituiamo alle parole "prima di" le parole "non dopo di". Otteniamo un preordine sulla popolazione mondiale se, ad esempio, poniamo che $x R y$ se x ed y sono nati nello stesso anno (✎ es. 2.66).

Definizione : *si dice relazione d'ordine su* A *una relazione* R *che gode delle proprietà*

1) *riflessiva:* $\forall x \in A, \ x R x$
2) *antisimmetrica:* $\forall x, y \in A, \ [(x R y) \text{ e } (y R x) \Rightarrow x = y]$
3) *transitiva:* $\forall x, y, z \in A, \ [(x R y) \text{ e } (y R z) \Rightarrow x R z]$.

Una relazione d'ordine è allora un preordine che ha in più la proprietà antisimmetrica. Un esempio di relazione d'ordine su $\mathbb{R}$, che è quella su cui è modellata la definizione, è la relazione "minore o uguale": diciamo che xRy se $x \leq y$. È facile constatare che le proprietà delle relazioni d'ordine sono soddisfatte (✎ es. 2.68). Se R è una relazione d'ordine su un insieme A, anziché xRy scriveremo d'ora in poi $x \leq y$, e diremo che $(A, \leq)$ è un insieme ordinato.

Esempio : la relazione su $\mathbb{R}$ data da xRy se $x < y$ non è una relazione d'ordine: infatti non soddisfa la proprietà riflessiva (➡ appendice 2.8).

Esempio : costruiamo un altro esempio di preordine: qual è il "migliore" acquisto? Parlando di un qualsiasi prodotto, vi sono molti parametri da tenere in considerazione, ma limitiamoci per semplicità al costo e alla funzionalità; certamente, possiamo dire che un prodotto x che costa meno e funziona meglio del prodotto y è "meglio" del prodotto y. Poiché invece non è ovvio se sia meglio un prodotto più caro ma che funziona meglio, piuttosto di uno più economico ma che funziona peggio, scegliamo di dare sull'insieme dei prodotti presi in considerazione solo la seguente relazione: $x \leq y$ se x costa meno e funziona meglio di y (✎ es. 2.69). Se fra quelli considerati esistono due prodotti diversi che però hanno ugual prezzo e uguale funzionalità, allora la relazione precedente è soltanto un preordine, non essendo verificata la proprietà antisimmetrica; in caso contrario la relazione è d'ordine e rientra nella categoria delle relazioni su $\mathbb{R}^n$ date da $(x_1, \ldots, x_n) \leq (y_1, \ldots, y_n) \iff [(x_1 \leq y_1)$ e $\ldots$ e $(x_n \leq y_n)]$ (✎ es. 2.71).

Data una relazione d'ordine $\leq$ su A, usiamo l'abbreviazione

$$x < y \iff [(x \leq y) \text{ e } (x \neq y)]$$

Inoltre, come d'abitudine, usiamo anche i simboli $\geq$ e $>$: possiamo così scrivere la proposizione $x \leq y$ (o $x < y$) come $y \geq x$ (o $y > x$). Infine, scriveremo $x \leq y \leq z$ al posto di $(x \leq y)$ e $(y \leq z)$.

Definizione : *una relazione d'ordine $\leq$ su A si dice totale (e l'insieme A si dice totalmente ordinato) se $\forall x, y \in A$, $(x \leq y)$ o $(y \leq x)$.*

Una relazione d'ordine è allora totale se presi comunque due elementi di A questi sono confrontabili, cioè possiamo stabilire quale dei due è maggiore dell'altro (se sono diversi); in altre parole, A è totalmente ordinato se e solo se, presi comunque $x, y \in A$, è vera una ed una sola delle tre proposizioni seguenti: $x < y$, $x = y$, $x > y$.

Esempio : l'abituale relazione $\leq$ su $\mathbb{R}$ è totale; invece, in generale la relazione dell'esempio precedente sui prodotti da acquistare non lo è. Una relazione d'ordine particolarmente importante su $\mathscr{P}(E)$, l'insieme delle parti di E, è quella data dall'inclusione: diciamo che $A \leq B$ se $A \subset B$ (✎ es. 2.73); avremmo anche potuto scegliere di dire che $A \leq B$ se $A \supset B$. In generale, la relazione d'inclusione non è totale (➡ appendice 2.9).

$A \subseteq B \Rightarrow a \in A$ è un maggiorante di B se $\forall x \in B$, $x \leq a$

$\Rightarrow$ un sottoinsieme B è limitato superiormente se ha dei maggioranti

Formalizziamo ora i concetti di massimo e minimo, insieme ad altri che ci saranno utili in seguito.

Definizione : *se $(A, \leq)$ è un insieme ordinato e B è un suo sottoinsieme, si dice che un elemento a di A è un maggiorante di B se*

$$\boxed{\forall x \in B,\ x \leq a}$$

L'insieme dei maggioranti di B si indica con $\mathscr{M}_B$.

Esempio : se $A = \mathbb{R}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$, il numero $a = 0$ è un maggiorante di B, e così anche $a = 3$, $a = 2.24$, $a = 100000 + \pi$, ...; si verifica subito che tutti i numeri maggiori o uguali a zero sono maggioranti di B. Invece, se $a < 0$, a non è un maggiorante di B, in quanto $a/2 \in B$ (perché è negativo) ma non è vero che $a/2 \leq a$. Allora, $\mathscr{M}_B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Esempio : se $A = \mathbb{R}$ e $B = \{-7, -\pi, 0\}$ si ha ancora $\mathscr{M}_B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ (✎ es. 2.74).

Esempio : se $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{Z}$ non esistono maggioranti di B (anche se potremo provarlo solo dopo aver definito con precisione $\mathbb{Z}$ ed $\mathbb{R}$), quindi $\mathscr{M}_{\mathbb{Z}} = \varnothing$ (☛ corollario 3.24).

Osservazione : si vede subito che se $a \in \mathscr{M}_B$ e $x \geq a$ allora $x \in \mathscr{M}_B$. Da questa osservazione segue in particolare che se un insieme ha dei maggioranti, potrebbe averne parecchi altri. Questo non accade sempre: se $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ e $B = A$, l'insieme B ha un solo maggiorante in A, lo zero.

Proposizione 2.5 : *se $B' \subset B''$ allora $\mathscr{M}_{B'} \supset \mathscr{M}_{B''}$.*

La dimostrazione è molto facile, e consigliamo di svolgerla per esercizio.

Definizione : *si dice che un sottoinsieme B di un insieme ordinato è limitato superiormente se ha dei maggioranti, cioè se $\mathscr{M}_B \neq \varnothing$.*

Esempio : i primi due insiemi degli esempi precedenti sono limitati superiormente, il terzo non lo è.

Definizione : *se $(A, \leq)$ è un insieme ordinato e B è un suo sottoinsieme, si dice che un elemento a di A è il massimo di B se*

$$\boxed{\begin{cases} a \in B \\ \forall x \in B,\ x \leq a \end{cases}}$$

$A \subseteq B \Rightarrow a \in A$ è il massimo di B se $a \in B$
$\forall x \in B$ $x \leq a$
$\Rightarrow a = \max$

In tal caso si scrive $a = \max B$.

Dunque, il massimo di B è un maggiorante di B che appartiene a B (✎ es. 2.77).

il max di B è un maggiorante di B che appartiene a B

il max=0 il max ∄

Esempio : se $B_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ e $B_2 = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$, solo il primo insieme ha massimo, nonostante il secondo insieme abbia gli stessi maggioranti.

Notiamo che nella definizione di maggiorante si parla di "un" maggiorante, dato che come abbiamo osservato vi possono essere molti maggioranti, mentre qui si dice "il" massimo, come è giustificato dalla prossima proposizione.

Proposizione 2.6 : *il massimo, se esiste, è unico.* → si dimostra con la proprietà antisimmetrica

DIMOSTRAZIONE : supponiamo che $a = \max B$ e $a' = \max B$; per definizione di massimo, $a \in B$ ed $a' \in B$, dunque $a' \leq a$, perché a è un maggiorante di B, ed $a \leq a'$, perché lo è anche a'; da $a \leq a'$ e $a' \leq a$ segue, per la proprietà antisimmetrica, $a = a'$, cioè il massimo è unico. ∎

Proposizione 2.7 : *se due sottoinsiemi B' e B'' di un insieme totalmente ordinato A hanno massimo, anche $B' \cup B''$ ha massimo, e* non vale per l'intersezione

$$\max[B' \cup B''] = \max\{\max B', \max B''\}.$$

DIMOSTRAZIONE : poniamo $m' = \max B'$ e $m'' = \max B''$; dato che l'insieme è totalmente ordinato, possiamo confrontare m' e m''. Supponiamo (il che non è restrittivo, altrimenti basta scambiare $'$ con $''$) che sia $m' \leq m''$: allora $\max\{\max B', \max B''\} = \max\{m', m''\} = m''$, e dobbiamo provare che m'' è il massimo di $B' \cup B''$. Anzitutto per definizione di massimo $\forall x \in B''$, $m'' \geq x$; poi, $\forall x \in B'$, $m' \geq x$, ma $m'' \geq m'$, e per la proprietà transitiva $m'' \geq x$: in definitiva, m'' è maggiorante sia di B' sia di B'', quindi anche di $B' \cup B''$, ma $m'' \in B' \cup B''$, perché $m'' \in B'' \subset B' \cup B''$, quindi m'' è il massimo di $B' \cup B''$. ∎

Osservazione : questa proprietà non vale per l'intersezione (✎ es. 2.82).

Definizione : *diciamo che a è un minorante di B se $\forall x \in B$, $a \leq x$; diciamo che B è limitato inferiormente se ha dei minoranti, e che $a = \min B$ se $a \in B$ è un minorante di B* (➡ appendice 2.10).

Osservazione : se un insieme B ha sia massimo che minimo, abbiamo evidentemente $\min B \leq \max B$. Inoltre, $\min B = \max B$ se e solo se B è costituito da un solo punto (✎ es. 2.83).

Vale per i minimi una proprietà analoga alla proposizione 2.7.

Proposizione 2.8 : *se due sottoinsiemi B' e B'' di un insieme totalmente ordinato A hanno minimo, anche $B' \cup B''$ ha minimo, e*

$$\min[B' \cup B''] = \min\{\min B', \min B''\}.$$

Definizione : *diciamo che un insieme è limitato se è limitato sia superiormente che inferiormente.*

Esempio : i numeri reali positivi sono un insieme limitato inferiormente; i numeri reali tra 2 e 7 costituiscono un insieme limitato, perché hanno sia dei minoranti (ad esempio, -1.7) che dei maggioranti (ad esempio, 12).

Uno degli esempi di preordine che abbiamo visto, quello di essere nati nello stesso anno, non è una relazione d'ordine, in quanto non vale la proprietà antisimmetrica; tale preordine considera "equivalenti" due persone aventi lo stesso anno di nascita. In questo spirito definiamo le relazioni di equivalenza.

Definizione : *si dice relazione di equivalenza su A una relazione R che gode delle proprietà*

1) *riflessiva:* $\forall x \in A,\ x\,R\,x$
2) *simmetrica:* $\forall x, y \in A,\ [(x\,R\,y) \Rightarrow (y\,R\,x)]$
3) *transitiva:* $\forall x, y, z \in A,\ [(x\,R\,y)$ e $(y\,R\,z) \Rightarrow x\,R\,z]$.

Una relazione di equivalenza è un preordine che ha in più la proprietà simmetrica. Un esempio banale di relazione di equivalenza su A è l'uguaglianza: diciamo che $x\,R\,y$ se $x = y$ (in questo caso l'insieme R è la diagonale di $A \times A$, cioè l'insieme delle coppie (x, x) con $x \in A$). Se R è una relazione di equivalenza, anziché $x\,R\,y$ scriveremo d'ora in poi $x \simeq y$.

Esempio : la relazione $\leq$ su $\mathbb{R}$ non è una relazione di equivalenza; invece, lo è la relazione data da $(x \simeq y) \iff (|x| = |y|)$ (✎ es. 2.85). Una relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^2$ è data da

$$(x_1, x_2) \simeq (y_1, y_2) \iff x_1 - x_2 = y_1 - y_2$$

(✎ es. 2.88); in questo caso, tutti i punti (x_1, x_2) per i quali $x_1 - x_2 = 0$ sono equivalenti tra loro, e così pure tutti quelli per cui $x_1 - x_2 = 3$, e lo stesso per ogni altra costante.

Definizione : *sia $\simeq$ una relazione di equivalenza su A, ed $a \in A$; si dice classe di equivalenza di a rispetto alla relazione $\simeq$ l'insieme $[a]$ dei punti di A che sono equivalenti ad a:*

$$[a] = \{x \in A : x \simeq a\}.$$

Esempio : nel caso appena visto, la classe di equivalenza del punto $(2, 1)$ è la retta di equazione $x - y = 1 (= 2 - 1)$ (✎ es. 2.89).

Proposizione 2.9 : *se $\simeq$ è una relazione di equivalenza su A, e se $a \not\simeq b$, allora $[a] \cap [b] = \varnothing$, cioè le classi di equivalenza sono disgiunte; se invece $a \simeq b$ si ha $[a] = [b]$. Infine, ogni elemento di A appartiene ad una (ed una sola) classe di equivalenza.*

La dimostrazione viene lasciata per esercizio.

Definizione : *sia $\simeq$ una relazione di equivalenza su A ; si dice insieme quoziente di A modulo la relazione $\simeq$ l'insieme $A/\simeq$ delle classi di equivalenza degli elementi di A rispetto alla relazione $\simeq$:*

$$A/\simeq = \{[a] : a \in A\}\,.$$

Questo insieme, che è un sottoinsieme di $\mathscr{P}(A)$, contiene tanti elementi quante sono le classi di equivalenza distinte indotte da $\simeq$ (➡ appendice 2.11).

Esempio : proseguendo con l'esempio precedente, l'insieme quoziente è l'insieme delle rette di $\mathbb{R}^2$ parallele a quella di equazione $x = y$ (✎ es. 2.90) (➡ appendice 2.12).

Esempio : un altro caso interessante è quello della congruenza modulo k ; fissiamo un intero positivo k , e introduciamo in $\mathbb{Z}$ una relazione di equivalenza ponendo

due numeri sono equivalenti' se differiscono tra loro per multipli di K

$$m \simeq n \iff \exists p \in \mathbb{Z} : m - n = pk\,, \tag{2.10}$$

cioè due numeri sono equivalenti se differiscono per un multiplo intero di k (✎ es. 2.91). Ogni classe di equivalenza è formata tutta da numeri che differiscono fra loro per multipli di k : ad esempio, per $k = 2$, le classi di equivalenza sono i numeri pari e i numeri dispari, dunque l'insieme quoziente può essere rappresentato come $\{[0], [1]\}$. In generale, l'insieme quoziente può essere rappresentato come $\{[0], [1], \ldots, [k-1]\}$. Notiamo che i numeri $0, \ldots, k-1$ sono i possibili resti della divisione per k (✎ es. 2.92) (➡ appendice 2.13).

Esercizi relativi al capitolo 2

Esercizio 2.1 : fornite tre esempi di proposizioni, e tre di frasi che non sono proposizioni.

Esercizio 2.2 : dimostrate che $[\mathbf{non}(\mathbf{non}\,\mathscr{A})] \iff \mathscr{A}$.

Esercizio 2.3 : provate che $\mathscr{A} \iff \mathscr{B}$ equivale a $[(\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B})\ \mathbf{e}\ (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A})]$.

Esercizio 2.4 : dimostrate che $[(\mathbf{non}\,\mathscr{A})\ \mathbf{o}\ \mathscr{B}] \iff [\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}]$.

Esercizio 2.5 : costruite con **non** ed **o** l'operatore **e** .

Esercizio 2.6 : dimostrate, scrivendo la tabella di verità, che $(\mathbf{non}\,\mathscr{A})\ \mathbf{o}\ \mathscr{B}$ non è equivalente a $\mathbf{non}(\mathscr{A}\ \mathbf{o}\ \mathscr{B})$.

Esercizio 2.7 : dimostrate che non è vero che $[(\mathscr{A}\ \mathbf{e}\ \mathscr{B})\ \mathbf{o}\ \mathscr{C}] \iff [\mathscr{A}\ \mathbf{e}\ (\mathscr{B}\ \mathbf{o}\ \mathscr{C})]$.

Esercizio 2.8 : provate che $[(\mathscr{A}\ \mathbf{e}\ \mathscr{B})\ \mathbf{o}\ \mathscr{C}] \iff [(\mathscr{A}\ \mathbf{o}\ \mathscr{C})\ \mathbf{e}\ (\mathscr{B}\ \mathbf{o}\ \mathscr{C})]$.

Esercizio 2.9 : provate che $[(\mathscr{A}\ \mathbf{o}\ \mathscr{B})\ \mathbf{e}\ \mathscr{C}] \iff [(\mathscr{A}\ \mathbf{e}\ \mathscr{C})\ \mathbf{o}\ (\mathscr{B}\ \mathbf{e}\ \mathscr{C})]$.

Esercizio 2.10 : dimostrate che $[\mathbf{non}(\mathscr{A}\ \mathbf{e}\ \mathscr{B})] \iff [(\mathbf{non}\,\mathscr{A})\ \mathbf{o}\ (\mathbf{non}\,\mathscr{B})]$.

Esercizio 2.11 : senza fare uso di tabelle di verità, dimostrate che

$$[\mathbf{non}(\mathscr{A}\ \mathbf{o}\ \mathscr{B})] \iff [(\mathbf{non}\,\mathscr{A})\ \mathbf{e}\ (\mathbf{non}\,\mathscr{B})]\,.$$

Esercizio 2.12 : trovate la negazione di $[\mathscr{A} \iff \mathscr{B}]$.

Esercizio 2.13 : dimostrate la formula (2.1) mediante le tabelle di verità.

Esercizio 2.14 : date tre esempi di predicati con una o due variabili.

Esercizio 2.15 : date tre esempi di proposizioni ottenute con i quantificatori, leggetele come sono scritte e datene una traduzione intelligibile in italiano.

Esercizio 2.16 : dite quali tra le seguenti proposizioni sono vere:

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 1$
b) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1$
c) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ ✓
d) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$.

Esercizio 2.17 : scrivete davanti a $\mathscr{P}(x,y)$ tutte le possibili combinazioni di un quantificatore per la x ed uno per la y, in tutti gli ordini possibili, traducete in italiano tutte le proposizioni che ne risultano e vedete quali hanno lo stesso significato.

Esercizio 2.18 : scrivete in maniera abbreviata la proposizione $\forall x,\ \{(x > 1) \Rightarrow [\exists y : ((y > 1)\ \text{e}\ (y^2 < x))]\}$; scrivete in maniera estesa la proposizione $\exists x > 2 : \forall y \geq 1,\ y^2 - y + 3 \geq x]$.

Esercizio 2.19 : dimostrate la formula (2.4), usando la formula (2.3) e le proprietà della doppia negazione.

Esercizio 2.20 : scrivete, e traducete in italiano, la negazione di ognuna delle proposizioni ottenute nell'esercizio 2.17.

Esercizio 2.21 : determinate gli insiemi $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1\ \text{o}\ x^2 \geq 5\}$ e $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\ \text{e}\ (2x - 1 \leq 0\ \text{o}\ x > 7)\}$.

Esercizio 2.22 : dite quali fra le seguenti uguaglianze sono vere:
a) $\{x \in \mathbb{R} : (x > 2\ \text{e}\ x < 6)\ \text{o}\ x < 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\ \text{e}\ (x < 6\ \text{o}\ x < 0)\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} : (x < 1\ \text{o}\ x > 3)\ \text{e}\ x \leq 2\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\ \text{o}\ (x < 1\ \text{e}\ x \geq -3)\}$.

Esercizio 2.23 : verificate le formule (2.5). $x \notin E$ e $x \notin F \Rightarrow x \in E^c$ e $x \in F^c$
$\Downarrow$

Esercizio 2.24 : come potete scrivere la formula $E \cap F = \varnothing$ senza usare il simbolo dell'insieme vuoto? $x \in E^c \cap F^c$
$x \in E^c \cap F^c$
$\Downarrow$
$E \cap F = \varnothing$

Esercizio 2.25 : quanti elementi ha l'insieme $\varnothing$? E l'insieme $\{\varnothing\}$?

Esercizio 2.26 : dimostrate la seconda delle formule di de Morgan (se possibile, senza avere sotto gli occhi la dimostrazione della prima).

Esercizio 2.27 : provate le seguenti formule:
a) $[G \subset E] \iff [\forall F,\ E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup G]$
b) $E \setminus F = E \cap F^c$
c) $[E \setminus F = \varnothing] \iff [E \subset F]$
d) $(E \setminus F) \cap (F \setminus E) = \varnothing$.

Esercizio 2.28 : determinate $\mathscr{P}(\{a, 1, \bullet\})$.

Esercizio 2.29 : determinate $\mathscr{P}(\varnothing)$, e dite quanti elementi ha. Determinate poi $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))$.

Esercizio 2.30 : determinate tutti gli elementi di $\{1, x\} \times \{a, 1, \bullet\}$.

Esercizio 2.31 : è vero o falso che $E \subset E \times F$? E che $E \subset E \times \{0\}$?

Esercizio 2.32 : date alcuni esempi di funzioni, ed altri di leggi che non sono funzioni.

Esercizio 2.33 : dite se le seguenti scritture sono funzioni o no: $x^2 - y = 1$, $y = x^2 - 1$, $g(x) = x^3 - 5x$, $h(x, y) = x^2 - y - 1$.

Esercizio 2.34 : trovate il dominio naturale delle seguenti funzioni:
a) $\sqrt{x - 2}$
b) $\sqrt{|x - 2|}$
c) $\sqrt{|x| - 2}$
d) $\sqrt{\log x + 1}$
e) $\log(\sqrt{x^2 - 6x + 5})$
f) $\operatorname{sen}(x - \sqrt{1 - 2x})$.

Esercizio 2.35 : provate la formula (2.6).

Esercizio 2.36 : trovate la funzione di cui è grafico l'insieme $\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, y \geq 0, x^2 + y^2 = 1\}$.

Esercizio 2.37 : dimostrate che una funzione è iniettiva se e solo se vale (2.7).

Esercizio 2.38 : scrivete (in formula) la negazione di " f è iniettiva".

Esercizio 2.39 : dite quali tra le seguenti funzioni sono iniettive (dimostrando le vostre asserzioni):
a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\quad f(x) = x + \frac{1}{x}$
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$
c) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\quad f(x) = x - \frac{1}{x}$
d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) = x^3 - 2$.

Esercizio 2.40 : provate che la funzione $f(x) = (2x + 1)/(x - 1)$ non assume mai il valore 2 .

Esercizio 2.41 : provate che una funzione $f : A \to B$ è iniettiva se e solo se per ogni $b \in B$ l'equazione $f(x) = b$ ha al più una soluzione.

Esercizio 2.42 : tra le funzioni dell'esercizio 2.39, dite quali sono surgettive (dimostrando le vostre asserzioni; è l'ultima volta che questa frase viene scritta esplicitamente: "dire" significa sempre "dimostrare").

Esercizio 2.43 : trovate quattro esempi di funzioni: una che non è né iniettiva né surgettiva, una iniettiva non surgettiva, una surgettiva non iniettiva, ed una iniettiva e surgettiva.

Esercizio 2.44 : provate che una funzione $f : A \to B$ è surgettiva se e solo se per ogni $b \in B$ l'equazione $f(x) = b$ ha almeno una soluzione (confrontate il testo con quello dell'esercizio 2.41).

Esercizio 2.45 : tra le funzioni dell'esercizio 2.39, dite quali sono biunivoche, e trovatene le funzioni inverse.

Esercizio 2.46 : dite in quali casi un'applicazione costante è iniettiva, o surgettiva, o biunivoca.

Esercizio 2.47 : provate che i_A è sempre biunivoca.

Esercizio 2.48 : provate che l'inclusione $B \hookrightarrow A$ è sempre iniettiva, e dite quando è surgettiva.

Esercizio 2.49 : provate che le proiezioni canoniche sono sempre surgettive, e dite in quali casi sono iniettive.

Esercizio 2.50 : provate che se $f : A \to B$ è biunivoca si ha $\mathscr{G}_{f^{-1}} = \{(b,a) \in B \times A : (a,b) \in \mathscr{G}_f\}$.

Esercizio 2.51 : provate che se f è biunivoca lo è anche f^{-1}, e che allora l'inversa di f^{-1} è f.

Esercizio 2.52 : sono date le funzioni

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x > 0 \\ 2+2x & \text{se } x \le 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \ge 0 \\ -x-1 & \text{se } -1 < x < 0 \\ 2x+1 & \text{se } x \le -1; \end{cases}$

determinatene l'immagine, dite se sono iniettive, se sono surgettive, se sono biunivoche e in tal caso calcolatene la funzione inversa

Esercizio 2.53 : posto $A = \{x,y,z\}$ e $B = \{r,s,t\}$, considerate la funzione $f : A \to B$ definita da $f(x) = f(y) = s$, $f(z) = t$; disegnate gli insiemi $\mathscr{P}(A)$ e $\mathscr{P}(B)$, nonché le due funzioni immagine e immagine inversa tramite f.

Esercizio 2.54 : sia $f : A \to B$ una funzione, e siano $C, C_1, C_2 \subset A$ e $D, D_1, D_2 \subset B$; provate che:

a) $f(C_1 \cup C_2) = f(C_1) \cup f(C_2)$;
b) $f(C_1 \cap C_2) \subset f(C_1) \cap f(C_2)$ (e trovate un caso in cui vale l'inclusione stretta, cioè i due insiemi non sono uguali);
c) la formula precedente vale per ogni C_1, C_2 con $=$ anziché $\subset$ se e solo se f è iniettiva;
d) $f^{-1}(D_1 \cup D_2) = f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2)$;
e) $f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$;
f) $f^{-1}(C^c) = \left(f^{-1}(C)\right)^c$;
g) $C \subset f^{-1}\left(f(C)\right)$, e la formula vale per ogni C con $=$ anziché $\subset$ se e solo se f è iniettiva;
h) $D \supset f\left(f^{-1}(D)\right)$, e la formula vale per ogni D con $=$ anziché $\supset$ se e solo se f è surgettiva.

Esercizio 2.55 : dimostrate l'uguaglianza (2.9).

Esercizio 2.56 : è data la funzione $f(x) = x + \frac{1}{x}$; trovate l'immagine tramite f di $\{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 0 \text{ o } 0 < x < 1\}$ e l'immagine inversa tramite f di $\{x \in \mathbb{R} : -4 < x < 4\}$.

Esercizio 2.57 : dimostrate che $f : A \to B$ è surgettiva se e solo se $f(A) = B$.

Esercizio 2.58 : dimostrate che $f : A \to B$ è iniettiva se e solo se $f(A) \setminus f(A \setminus \{a\}) \neq \varnothing$ per ogni $a \in A$.

Esercizio 2.59 : scrivete, se è possibile farlo, la composizione $g \circ f$ e la composizione $f \circ g$, con i rispettivi domini, nei seguenti casi:

a) $f(x) = x - 2$, $g(x) = 4 - 3x$
b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3} - 1$, $g(x) = \log x$
c) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, $g(x) = \sqrt{2x - 2}$
d) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x > 0 \\ 2-2x & \text{se } x \le 0 \end{cases}$, $g(x) = x^2$
e) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x > 0 \\ 2-2x & \text{se } x \le 0 \end{cases}$, $g(x) = f(x)$.

Esercizio 2.60 : dimostrate la proposizione 2.2.

Esercizio 2.61 : dimostrate la proposizione 2.3.

Esercizio 2.62 : siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni; provate che se entrambe sono iniettive anche $g \circ f$ lo è, e che se $g \circ f$ è iniettiva allora anche f lo è; trovate un esempio in cui f e $g \circ f$ sono iniettive ma g non lo è.

Esercizio 2.63 : se $f : A \to B$ e $g : B' \to C$, con $f(A) \cap B' \neq \varnothing$, sono entrambe iniettive, è ancora vero che $g \circ f$ è iniettiva?

Esercizio 2.64 : siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni; provate che se entrambe sono surgettive anche $g \circ f$ lo è, e che se $g \circ f$ è surgettiva allora anche g lo è; trovate un esempio in cui g e $g \circ f$ sono surgettive ma f non lo è.

Esercizio 2.65 : se $f : A \to B$ e $g : B' \to C$, con $f(A) \cap B' \neq \varnothing$, sono entrambe surgettive, è ancora vero che $g \circ f$ è surgettiva?

Esercizio 2.66 : trovate tre esempi di relazioni che sono preordini e tre di relazioni che non sono preordini.

Esercizio 2.67 : provate che la relazione $(xRy) \iff (x^2 \le y^2)$ risulta essere un preordine su $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.68 : provate che $\le$ è una relazione d'ordine su $\mathbb{R}$. A quale sottoinsieme R di $\mathbb{R}^2$ corrisponde questa relazione?

Esercizio 2.69 : sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione; definiamo una relazione R su A ponendo $x R y$ se $f(x) \le f(y)$. Provate che R è un preordine, e che invece è una relazione d'ordine se e solo se f è iniettiva (☞ esercizio 2.67).

Esercizio 2.70 : trovate tre esempi di relazioni d'ordine.

Esercizio 2.71 : dimostrate che la seguente è una relazione d'ordine su $\mathbb{R}^2$ (ordinamento lessicografico, perché sarebbe quello del vocabolario, se le parole avessero tutte due lettere ...):

$$(x_1, x_2) \le (y_1, y_2) \iff (x_1 < y_1) \text{ o } [(x_1 = y_1) \text{ e } (x_2 \le y_2)].$$

È una relazione d'ordine totale?

Esercizio 2.72 : dite se la seguente è una relazione d'ordine su $\mathbb{R}^2$:

$$(x_1, x_2) \le (y_1, y_2) \iff (x_1 \le y_1) \text{ o } (x_2 \le y_2).$$

Esercizio 2.73 : dimostrate che la relazione su $\mathscr{P}(E)$, l'insieme delle parti di E , data da $A \leq B \iff A \subset B$ è una relazione d'ordine, e che non è totale, se non su insiemi molto particolari: quali?

Esercizio 2.74 : provate che i maggioranti di $B = \{-7, -\pi, 0\}$ sono $\mathscr{M}_B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Esercizio 2.75 : determinate i maggioranti dell'insieme $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x - 2 < 0\}$.

Esercizio 2.76 : sia A un insieme, B un suo sottoinsieme, e considerate l'insieme $\mathscr{P}(A)$ ordinato per inclusione; determinate i maggioranti dell'insieme $\{B\}$ (perché le parentesi graffe?).

Esercizio 2.77 : provate che un insieme B ha massimo se e solo se $B \cap \mathscr{M}_B \neq \varnothing$, e che in tal caso l'intersezione consta di un solo punto, il massimo.

Esercizio 2.78 : provate che in $\mathbb{R}^2$ la seguente formula definisce una relazione d'ordine:

$$(a, b) \leq (c, d) \quad \iff \quad [(b < d) \text{ o } ((a = c) \text{ e } (b = d))] ;$$

dite inoltre se tale relazione d'ordine è totale.

Esercizio 2.79 : dopo avere disegnato gli insiemi

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(1, 3)\} \\ A_2 &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b < 0\} \\ A_3 &= A_2 \cup \{(0, 0)\} \\ A_4 &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b \leq 0\} \\ A_5 &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b \leq a^2\} , \end{aligned}$$

determinate i maggioranti di ciascuno di essi per la relazione d'ordine dell'esercizio 2.78.

Esercizio 2.80 : dite se qualcuno degli insiemi dell'esercizio precedente ha massimo.

Esercizio 2.81 : è ancora vera la proposizione 2.7 se la relazione d'ordine non è totale? Cercate un controesempio, pensando agli esercizi precedenti.

Esercizio 2.82 : provate che se esistono tutti e tre i massimi indicati allora si ha $\max[B' \cap B''] \leq \min\{\max B', \max B''\}$, e trovate un esempio in cui vale la disuguaglianza stretta.

Esercizio 2.83 : dimostrate che se $\min B = \max B$ allora B contiene un solo punto.

Esercizio 2.84 : provate che in $\mathbb{R}^2$ la seguente formula definisce una relazione d'ordine:

$$(a, b) \leq (c, d) \quad \iff \quad [(c - a \geq d - b) \text{ e } (c - a \geq b - d)] ;$$

dite inoltre se tale relazione d'ordine è totale, e disegnate i maggioranti dei seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(1, 3)\} \\ B_2 &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a < 0, b = 0\} \\ B_3 &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 2\} . \end{aligned}$$

Esercizio 2.85 : provate che la relazione su $\mathbb{R}$ data da $x \simeq y \iff |x| = |y|$ è di equivalenza. Quali sono i numeri equivalenti a 2 ? E a -5 ? E a 0 ?

Esercizio 2.86 : se $x \in \mathbb{R}$, la parte intera $\lfloor x \rfloor$ è il più grande numero intero minore o uguale a x (così $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -1.5 \rfloor = -2$), ☞ corollario 3.21; provate che sono relazioni di equivalenza su $\mathbb{R}$ le seguenti:
a) $x \simeq y \iff \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$
b) $x \simeq y \iff x - \lfloor x \rfloor = y - \lfloor y \rfloor$
(il numero $x - \lfloor x \rfloor$ si dice parte frazionaria di x).

Esercizio 2.87 : sia $f : A \to B$ una funzione; dimostrate che la relazione su A data da $x \simeq y \iff f(x) = f(y)$ è di equivalenza.

Esercizio 2.88 : provate che $(x_1, x_2) \simeq (y_1, y_2) \iff x_1 - x_2 = y_1 - y_2$ definisce una relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2.89 : determinate le classi di equivalenza che si ottengono dalle relazioni degli esercizi 2.85, 2.86 e 2.87, usando in quest'ultimo caso la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Esercizio 2.90 : descrivete, se possibile, gli insiemi quoziente dell'esercizio 2.89.

Esercizio 2.91 : provate che la relazione data dalla formula (2.10) è di equivalenza.

Esercizio 2.92 : provate che la formula (2.10) definisce la stessa relazione di

$$m \simeq n \quad \iff \quad m \text{ ed } n \text{ danno lo stesso resto se divisi per } k .$$

Appendice al capitolo 2

Appendice 2.1 - Paradosso di Russell

Si può superare la difficoltà della definizione di insieme ammettendo che un insieme possa essere definito solo per enumerazione o come sottoinsieme di un insieme già esistente: $E = \{x \in F : \mathscr{P}(x)\}$.

La questione non è banale: se ci lasciamo prendere troppo dall' intuizione, e pensiamo che ogni collezione che descriviamo con un predicato sia un insieme, rischiamo di cadere in contraddizioni, come mostra il celebre paradosso di Russell: l'espressione

$$A = \{x : x \notin x\}$$

non può definire un insieme, perché se fosse $A \in A$ avremmo, per definizione di A, che $A \notin A$, che è in contraddizione con $A \in A$; d'altra parte, se fosse $A \notin A$ allora, per definizione di A, dovremmo avere anche $A \in A$, di nuovo una contraddizione. Allora non può essere vero né che $A \in A$ né la sua negazione $A \notin A$, in contrasto con il principio del terzo escluso.

Troviamo più o meno lo stesso fenomeno se definiamo il barbiere come "colui che fa la barba a tutti quelli che non se la fanno da sè, e solo a loro": il tal caso, il barbiere si fa la barba da solo o no?

Appendice 2.2 - Rapporti tra insiemi e predicati

C'è una forte simmetria fra i risultati di operazioni logiche ed operazioni insiemistiche: il complementare si comporta come una negazione, l'unione e l' intersezione si distribuiscono come e e o , ... Questo non è casuale, e anzi permette di evitare buona parte delle dimostrazioni insiemistiche, rimandandole a quelle logiche corrispondenti, o viceversa: infatti, siano E ed F due insiemi, e definiamo i predicati $\mathscr{E}(x) \iff (x \in E)$ e $\mathscr{F}(x) \iff (x \in F)$; si ha allora:

a) $[x \in E^c] \iff [\text{non } \mathscr{E}(x)]$
b) $[x \in E \cup F] \iff [\mathscr{E}(x) \text{ o } \mathscr{F}(x)]$
c) $[x \in E \cap F] \iff [\mathscr{E}(x) \text{ e } \mathscr{F}(x)]$.

Viceversa, le stesse formule si ottengono partendo da due predicati $\mathscr{E}(x)$ e $\mathscr{F}(x)$ e definendo i due insiemi $E = \{x : \mathscr{E}(x)\}$ ed $F = \{x : \mathscr{F}(x)\}$. Dalle formule precedenti è possibile ottenere ad esempio le leggi di de Morgan (e molte altre relazioni insiemistiche) deducendole dalle proprietà degli operatori logici.

Come si traduce la formula $F \subset E$?

Appendice 2.3 - Coppie ordinate definite come insiemi

Volendo, possiamo evitare di assumere come "primitiva" la nozione di coppia ordinata, usando la definizione

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \;:$$

infatti, con tale definizione si ha (dimostratelo per esercizio)

$$(x, y) = (x', y') \iff (x = x') \text{ e } (y = y') \,.$$

In questo modo, la coppia (x, y) risulta essere un sottoinsieme di $\mathscr{P}(E \cup F)$, quindi un elemento dell' insieme $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E \cup F))$.

Appendice 2.4 - Rapporti tra f e il suo grafico

A proposito della formula (2.6), si può facilmente dimostrare che se un insieme $G \subset A \times B$ verifica

$$\forall a \in A, \; \exists! b \in B : (a, b) \in G$$

allora esiste una funzione $f : A \to B$ tale che $G = \mathscr{G}_f$, cioè la formula (2.6) caratterizza i grafici di funzioni.

In realtà, la definizione di funzione che abbiamo dato non è molto precisa, perché usa la parola "legge", e non abbiamo definito cosa sia una legge, o regola. Per superare questo ostacolo, si può dare prima la definizione di grafico, come sottoinsieme G di $A \times B$ che verifica la proprietà precedente, quindi definire una funzione come grafico, così che l'immagine del punto $a \in A$ sarà l'unico $b \in B$ tale che $(a, b) \in G$.

Appendice 2.5 - Rapporti tra f e immagine tramite f

Se una funzione $f : A \to B$ è biunivoca, anche la funzione immagine tramite f lo è, e la sua inversa è la funzione immagine inversa tramite f : infatti, sia $D \subset B$, e poniamo $C = f^{-1}(D)$; si ha

$$x \in C \iff f(x) \in D ,$$

pertanto $f(C) \subset D$; per giunta, se $y \in D$ i punti x tali che $f(x) = y$, che esistono perché f è surgettiva, appartengono a C (in quanto $f(x) = y \in D$), e per l'appunto $f(x) = y$; ma $f(x) \in f(C)$, quindi $D \subset f(C)$: abbiamo ottenuto allora che $f(C) = D$, cioè che la funzione immagine tramite f è surgettiva. Notiamo che in realtà abbiamo provato che

a) f surgettiva $\Rightarrow$ anche l'immagine tramite f lo è.

In modo simile possiamo provare (fatelo per esercizio) che

b) f iniettiva $\Rightarrow$ anche l'immagine tramite f lo è,

che conclude la dimostrazione di quanto asserito. È possibile dimostrare anche il viceversa, cioè che se la funzione immagine tramite f è surgettiva (oppure iniettiva) anche la funzione f lo è (queste dimostrazioni sono molto più facili, e le lasciamo per esercizio).

Come sottoprodotto delle dimostrazioni precedenti, abbiamo anche:

c) per ogni $D \subset B$, $f\big(f^{-1}(D)\big) \subset D$, e vale l'uguaglianza per ogni D se e solo se f è surgettiva;

d) per ogni $C \subset A$, $C \subset f^{-1}\big(f(C)\big)$, e vale l'uguaglianza per ogni C se e solo se f è iniettiva.

Appendice 2.6 - Caratterizzazione dell'iniettività; assioma della scelta

Non è difficile provare che $f : A \to B$ è iniettiva se e solo se esiste una funzione $g : B \to A$ tale che $g \circ f = i_A$: infatti, se f non è iniettiva esistono $a_1 \neq a_2$ tali che $f(a_1) = f(a_2)$; se per assurdo esistesse una funzione g come indicato, dovrebbe essere $a_1 = g\big(f(a_1)\big) = g\big(f(a_2)\big) = a_2$, e questo prova un'implicazione; se f è iniettiva, fissiamo a piacere un punto $\hat{a} \in A$, e definiamo la funzione g in questo modo: se $b \notin f(A)$, poniamo $g(b) = \hat{a}$; se invece $b \in f(A)$, per l'iniettività di f esiste un solo $a \in A$ tale che $f(a) = b$, e allora poniamo $g(b)$ uguale a quel punto a . La verifica che $g \circ f = i_A$ è facile.

Diversa è la situazione per quest'altra proposizione: una funzione $f : A \to B$ è surgettiva se e solo se esiste una funzione $g : B \to A$ tale che $f \circ g = i_B$. Infatti, una delle implicazioni è facile: se esiste una funzione come si è detto, per ogni $b \in B$ si ha $b = f\big(g(b)\big)$, ovvero b è immagine tramite f del punto $g(b)$, e pertanto appartiene all'immagine di f ; ma allora, tutti i punti di B stanno nell'immagine di f , quindi f è surgettiva. Il viceversa è spinoso, perché dobbiamo costruire la funzione g . Fissiamo dunque $\hat{b} \in B$: sappiamo che f è surgettiva, quindi esistono dei punti $a \in A$ tali che $\hat{b} = f(a)$. Se di tali a ne esiste uno solo, $\hat{a}$, la scelta del valore di g in $\hat{b}$ è obbligata, e dobbiamo porre $g(\hat{b}) = \hat{a}$, l'unico punto che la f manda in $\hat{b}$. Se invece di punti a tali che $f(a) = \hat{b}$ ne esistono parecchi, dobbiamo sceglierne uno, e questa operazione va ripetuta per tutti i b che sono in questa condizione, i quali possono essere infiniti (per la funzione $f(x) = x^2$, tutti i numeri $b > 0$ sono immagine di più di un punto a). Chi ci assicura che sia possibile compiere questa infinità di scelte? Materialmente è certo impossibile. I matematici invocano a questo punto il cosiddetto *assioma della scelta*, che in sostanza dice che questo è possibile.

Assioma della scelta A2.1 : *sia I un insieme (insieme degli indici), e per ogni $i \in I$ sia E_i un insieme; posto $E = \bigcup_{i \in I} E_i$, supponiamo che:*

1) *per ogni i , $E_i \neq \varnothing$*

2) *se $i \neq j$, allora $E_i \cap E_j = \varnothing$;*

allora esiste un sottoinsieme F di E tale che per ogni $i \in I$ l'intersezione $F \cap E_i$ è formata da esattamente un punto.

Nel nostro caso, l'insieme di indici è B , ed E_b è $f^{-1}(b)$; la funzione g è allora definita in modo che $g(b)$ è l'unico punto in $F \cap E_b$.

Vediamo come da una funzione generica $f : A \to B$ si può passare ad una funzione biunivoca da un insieme $A' \subset A$ ad un insieme $B' \subset B$ la quale conserva in parte il comportamento di f : poniamo $B' = f(A)$, e consideriamo la funzione $\hat{f} : A \to B'$ che ha legge $\hat{f}(x) = f(x)$; poiché $\hat{f}$ è surgettiva, applichiamo ad essa la proposizione appena dimostrata, e sia $g : B' \to A$ tale che $\hat{f} \circ g = i_{B'}$. Posto $A' = g(B')$ ed $\bar{f} = \hat{f}_{|A'}$ la funzione $\bar{f}$ è biunivoca, e per ogni $x \in A'$ si ha $\bar{f}(x) = f(x)$. Peraltro, non abbiamo alcun controllo sulla funzione g , dunque il dominio A' di $\bar{f}$ potrebbe essere molto frammentato; questo tipo di operazione è allora consigliabile solo in casi molto particolari in cui sappiamo costruire materialmente una funzione g con buone proprietà di regolarità.

Appendice 2.7 - Relazioni generiche

In realtà, è possibile definire una relazione da un insieme A ad un insieme B, come un generico sottoinsieme R di $A \times B$; in tal modo, se $f : A \to B$ è una funzione, il suo grafico definisce una relazione da A a B che gode di speciali proprietà (è ovunque definita, cioè $\forall x \in A,\ \exists y \in B : (x, y) \in R$, ed è funzionale, cioè $[(x, y_1) \in R, (x, y_2) \in R] \Rightarrow y_1 = y_2$). Tornando all'esempio della circonferenza γ, che non è il grafico di una funzione, possiamo dire che γ è una relazione da $\{x : -1 \le x \le 1\}$ a $\mathbb{R}$, ovunque definita ma non funzionale.

Appendice 2.8 - Relazioni d'ordine stretto

La nostra definizione di relazione d'ordine è modellata sulla relazione $\le$, e come si è detto la relazione $x < y$ non è una relazione d'ordine; volendo, si può dare una nuova definizione, modellata stavolta su $<$, dicendo che R è una relazione d'ordine stretto se gode delle proprietà
a) antisimmetrica stretta: $x \, R \, y \Rightarrow \mathbf{non}(y \, R \, x)$
b) transitiva (solita definizione).
Notiamo che è scomparsa la proprietà riflessiva (ovviamente). Si può verificare facilmente che se R è una relazione d'ordine stretto, allora la relazione $\tilde{R}$ definita da $x \tilde{R} y \iff [(x \, R \, y) \text{ o } (x = y)]$ è d'ordine.

Appendice 2.9 - Insiemi diretti

Oltre agli insiemi totalmente ordinati si può parlare di un'altra categoria di insiemi ordinati, gli insiemi diretti.

Definizione : *si dice insieme diretto (o filtrante) un insieme D dotato di una relazione d'ordine $\le$ con la seguente proprietà:*

$$\forall x, y \in D,\ \exists z \in D : (x \le z) \text{ e } (y \le z) .$$

Dunque, in un insieme diretto non è detto che due punti qualsiasi sono confrontabili tra loro, come accade negli insiemi totalmente ordinati, ma quantomeno c'è qualche punto dell'insieme che è maggiore o uguale a entrambi.

Esempio : la relazione d'ordine dell'esercizio 2.84 rende $\mathbb{R}^2$ un insieme diretto, perché (verificatelo) se $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ allora un punto $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2)$ che è maggiore o uguale di entrambi si trova ad esempio risolvendo il sistema

$$\begin{cases} z_1 - x_1 = |z_2 - x_2| \\ z_1 - y_1 = |z_2 - y_2| \end{cases}$$

(la cui soluzione $\boldsymbol{z}$ è esattamente il minimo dei maggioranti comuni, cioè $\boldsymbol{z} = \sup\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$, il che suona piuttosto strano!); la verifica è più facile osservando in figura i maggioranti di $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$.

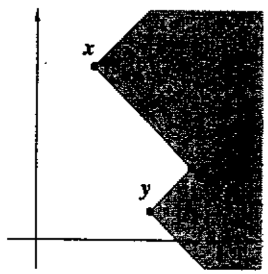


Fig. A2.1 : i maggioranti di $\boldsymbol{x}$ e di $\boldsymbol{y}$

Gli insiemi totalmente ordinati sono insiemi diretti, e il punto z può essere scelto sempre come x o y; l'insieme $\mathscr{P}(E)$ ordinato per inclusione (ponendo $A \le B \iff A \subset B$) è un insieme diretto, perché $A \cup B$ è maggiore o uguale sia di A che di B. Torneremo più avanti sugli insiemi diretti.

Appendice 2.10 - Lemma di Zorn

In un insieme ordinato $(A, \leq)$, si può parlare anche di elementi massimali (e naturalmente di elementi minimali): si dice che $a \in B$ è un elemento massimale di B se in B non vi sono elementi più grandi di a, cioè se $\forall x \in B$, $[a \leq x \Rightarrow x = a]$. Se A è totalmente ordinato, cioè tutti gli elementi sono confrontabili tra loro, le nozioni di elemento massimale e di massimo coincidono, ma in generale non è così se A non è totalmente ordinato: ad esempio, consideriamo l'insieme $\mathscr{P}(E)$ ordinato per inclusione, siano E' ed E'' due sottoinsiemi disgiunti di E, entrambi non vuoti, e consideriamo $B = \{E', E''\}$. Allora B non ha massimo, anche se ha dei maggioranti (E, oppure $E' \cup E''$, che è il più piccolo dei maggioranti), e sia E' che E'' sono elementi massimali.

Osserviamo ora che se $(A, \leq)$ è un insieme ordinato e $B \subset A$, anche $(B, \leq)$ è ordinato, con l'ordinamento indotto da A (cioè diciamo che due elementi di B sono in un certo ordine se lo erano in A). Può accadere che un sottoinsieme di un insieme ordinato risulti totalmente ordinato; in tal caso, diciamo che questo sottoinsieme è una catena: ad esempio, $\{\varnothing, E', E\}$ è una catena in $\mathscr{P}(E)$. Questa catena può essere ampliata, e rimanere ancora una catena, ad esempio aggiungendo $E' \cup E''$. Tuttavia sussiste un teorema (che equivale all'assioma della scelta) che dice che questo processo di ampliamento non sempre è possibile.

Teorema A2.2 : *in ogni insieme ordinato esiste qualche catena che non può essere ampliata.*

Questo risultato ha un'altra conseguenza importante.

Lemma di Zorn A2.3 : *se $(A, \leq)$ è un insieme ordinato non vuoto tale che ogni catena di A è limitata superiormente, allora A ha almeno un elemento massimale.*

Appendice 2.11 - Dal preordine all'ordine

Grazie alle relazioni di equivalenza, possiamo aggiungere qualcosa sulle relazioni d'ordine; se R è un preordinamento su A, l'unica proprietà che manca perché sia una relazione d'ordine è quella antisimmetrica, cioè potrebbero esistere elementi distinti $x, y \in A$ tali che $(x\, R\, y)$ e $(y\, R\, x)$. Per ottenere da R una relazione d'ordine definiamo su A una relazione di equivalenza (provate per esercizio che lo è) ponendo

$$x \simeq y \quad \Longleftrightarrow \quad [(x\, R\, y) \text{ e } (y\, R\, x)] ,$$

e definiamo sull'insieme quoziente una relazione d'ordine ponendo

$$[x] \leq [y] \quad \Longleftrightarrow \quad x\, R\, y .$$

Questa definizione è ben posta, cioè non dipende dal particolare rappresentante scelto: infatti, se $[x_1] = [x_2]$ e $[y_1] = [y_2]$ allora $x_1 \simeq x_2$ e $y_1 \simeq y_2$, quindi per definizione di $\simeq$ e per la proprietà transitiva del preordinamento R

$$x_1\, R\, y_1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_2\, R\, y_2 ,$$

cioè

$$[x_1] \leq [y_1] \quad \Longleftrightarrow \quad [x_2] \leq [y_2] .$$

Potete verificare per esercizio che questa è una relazione d'ordine sul quoziente $A/\simeq$; inoltre, se R era già una relazione d'ordine allora $\simeq$ è l'uguaglianza, il quoziente si può rappresentare con A, e la relazione $\leq$ è R.

Appendice 2.12 - Insieme dei rappresentanti; partizioni

Notiamo che l'insieme quoziente di A modulo una relazione di equivalenza soddisfa le ipotesi dell'assioma della scelta (ogni classe è non vuota, e sono a due a due disgiunte), e che l'unione delle classi di equivalenza è tutto A. Allora, data una relazione di equivalenza, l'assioma della scelta ci permette di costruire un insieme dei rappresentanti, che contiene un solo elemento (un rappresentante, appunto) di ciascuna classe di equivalenza. Questa osservazione, insieme all'esercizio 2.87, ci suggerisce un altro modo per vedere la costruzione della funzione $\tilde{f}$ vista sopra: $\tilde{f}$ non è altro che la restrizione di $\hat{f}$ a un insieme di rappresentanti della relazione data da $x \simeq y \iff f(x) = f(y)$.

Possiamo osservare che vi è una corrispondenza biunivoca tra relazioni di equivalenza su un insieme A e partizioni di A.

Definizione : *si dice che una collezione $\mathscr{F}$ di sottoinsiemi di A è una partizione di A se*

1) $\forall E \in \mathscr{F}$, $E \neq \varnothing$
2) $\forall x \in A$, $\exists E \in \mathscr{F} : x \in E$
3) $\forall E_1, E_2 \in \mathscr{F}$, $(E_1 \cap E_2 \neq \varnothing \Rightarrow E_1 = E_2)$.

Dunque una partizione di A è un insieme $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(A)$ di sottoinsiemi non vuoti e disgiunti di A che coprono tutto A, cioè tali che l'unione di tutti gli elementi di $\mathscr{F}$ dà tutto A.

È facile osservare che se $\simeq$ è una relazione di equivalenza su un insieme A il quoziente $A/\simeq$ è una partizione di A. Viceversa, se $\mathscr{F}$ è una partizione di A, la relazione

$$x \simeq y \quad \Longleftrightarrow \quad \exists E \in \mathscr{F} : x, y \in E$$

è di equivalenza su A, e le classi di equivalenza sono proprio gli elementi di $\mathscr{F}$.

Appendice 2.13 - Aritmetica modulo k

La relazione di congruenza modulo k si indica di solito con il simbolo

$$m \equiv n \pmod k ;$$

l'insieme quoziente si indica $\mathbb{Z}_k$, ed ha come insieme di rappresentanti $\{0, 1, \dots, k-1\}$. In $\mathbb{Z}_k$ si costruisce un'aritmetica ponendo

$$[m] + [n] = [m+n] , \qquad [m] \cdot [n] = [mn] \ :$$

queste definizioni sono ben poste perché la classe di equivalenza di $m+n$ (e analogamente quella di mn) non dipende da m ed n, ma solo dalle loro classi di equivalenza, cioè

$$\{m \equiv p \pmod k\} \text{ e } \{n \equiv q \pmod k\} \quad \Rightarrow \quad m + n \equiv p + q \pmod k .$$

Ad esempio, in $\mathbb{Z}_9$, $[7] + [5] = [3]$, perché $12 \equiv 3 \pmod 9$; questa è la base per costruire i varî "criteri di divisibilità": per esercizio, provate che un numero è divisibile per 9 se e solo se lo è la somma delle sue cifre, oppure dimostrate la validità della "prova del nove".

Capitolo 3

Insiemi numerici

In questo capitolo parliamo dei numeri e delle loro proprietà; presenteremo i numeri reali in modo più o meno assiomatico, e daremo solo alcune proprietà dei numeri naturali, interi e razionali, lasciando le formalizzazioni e gli approfondimenti agli esercizi ed all'appendice. Al termine, introdurremo i numeri complessi, che spesso fanno parte del programma dei corsi di Analisi.

Introduciamo subito il simbolo di sommatoria, che permette di abbreviare notevolmente parecchie notazioni e di renderle più precise. Il suo uso, molto facile, si capisce bene da qualche esempio; grossomodo, se abbiamo una "ricetta" per determinare alcuni numeri, con il simbolo di sommatoria ne possiamo indicare la somma. Questo procedimento dovrebbe essere familiare a chi ha una conoscenza anche solo superficiale di un linguaggio di programmazione.

Esempio : con la scrittura

$$\sum_{h=1}^{3} \operatorname{sen}(2h)$$

intendiamo la somma $\operatorname{sen} 2$ (che corrisponde al valore $h = 1$) $+ \operatorname{sen} 4 + \operatorname{sen} 6$.

Esempio : se sono dati i numeri a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, possiamo scrivere

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \sum_{p=1}^{5} a_p = \cdots ,$$

cioè l'indice della sommatoria è muto, non ha importanza quale usiamo purché siamo coerenti e lo usiamo in tutta la sommatoria (✎ es. 3.1).

Un altro caso in cui i termini della sommatoria hanno due indici:

$$\sum_{i=0}^{3} b_{ij} = b_{0j} + b_{1j} + b_{2j} + b_{3j} \,.$$

Non è necessario che l'indice della sommatoria parta da 0, o da 1, anche perché possiamo cambiarlo facilmente:

$$a_6 + a_7 + a_8 = \sum_{i=6}^{8} a_i = \sum_{h=0}^{2} a_{6+h} = \cdots \,.$$

Più in generale, se I è un insieme finito di indici, con la scrittura

$$\sum_{i \in I} a_i$$

indichiamo la somma di tutti i numeri della forma a_i, dove l'indice i assume tutti i valori compresi nell'insieme I.

Esempio : se S indica l'insieme dei numeri interi tra 1 e 5, la somma $\sum_{i=1}^{5} a_i$ si può anche scrivere $\sum_{i \in S} a_i$.

Ancora più in generale, useremo talvolta la notazione di sommatoria con un generico predicato $\mathscr{P}(i)$, come nel caso

$$\sum_{1 \le i \le 5,\ i \ne 3} a_i = a_1 + a_2 + a_4 + a_5 \,.$$

Facili proprietà della sommatoria sono le seguenti, dove I e J sono insiemi finiti di indici e tutti i numeri che compaiono sono numeri reali:

a) se I e J sono disgiunti, $\sum_{i \in I \cup J} a_i = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in J} a_i$ $\Rightarrow I \sqcup J$ disgiunti
b) $\sum_{i \in I}(a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$
c) $\sum_{i \in I}(c \cdot a_i) = c \cdot \sum_{i \in I} a_i$ posso isolare c
d) $\sum_{i \in I}\left(\sum_{j \in J} a_{ij}\right) = \sum_{j \in J}\left(\sum_{i \in I} a_{ij}\right)$,

cioè il simbolo di sommatoria commuta con l'addizione e la moltiplicazione per una costante.

Notazioni analoghe si possono usare per il prodotto, con il simbolo di produttoria:

$$\prod_{i=1}^{3} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \,,$$

oppure con i simboli di unione o intersezione di insiemi, nel qual caso non è più necessario che l'insieme degli indici sia finito: data una famiglia $\{E_i\}_{i \in I}$ di insiemi, dove I è un qualsiasi insieme non vuoto, $\cup_{i \in I} E_i$ e $\cap_{i \in I} E_i$ sono rispettivamente l'insieme di tutti gli elementi che appartengono a qualche E_i, e quello degli elementi comuni a tutti gli insiemi E_i.

Proprietà

3.1 - Numeri naturali e principio di induzione

I numeri naturali sono ben ordinati ⇒ ogni sottoinsieme non vuoto di N ammette minimo

∀n ∃ il suo successore il primo numero in N maggiore di n,

Il più elementare tra gli insiemi numerici che consideriamo è quello dei numeri naturali, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$; indicheremo poi con $\mathbb{N}^+$ l'insieme dei numeri naturali positivi (cioè tutti tranne zero); bisogna dire che in alcuni libri il numero zero non fa parte di $\mathbb{N}$, ma questa discrepanza non è molto rilevante, purché rimaniamo coerenti con la notazione. A parte le ben note proprietà relative alla somma e al prodotto, i numeri naturali hanno due particolarità interessanti, la prima delle quali è che sono bene ordinati, cioè ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ammette minimo. Notiamo subito che nei numeri reali questa proprietà non è verificata: ad esempio, non ci può essere il più piccolo numero reale maggiore di zero; infatti, se ci fosse, non potrebbe essere negativo né nullo (non sarebbe maggiore di zero), e non potrebbe essere neppure positivo (altrimenti, la sua metà sarebbe anch'essa positiva, e più piccola di lui). In particolare, in $\mathbb{N}$, dato un qualsiasi numero naturale n esiste il suo successore, vale a dire il primo (il più piccolo) numero naturale maggiore di n.

La seconda particolarità dei numeri naturali, che è molto ragionevole e che prendiamo come assioma, è il principio di induzione:

Assioma (principio di induzione) 3.1 : *sia $S \subseteq \mathbb{N}$ un insieme che verifica le seguenti proprietà:*
1) $0 \in S$,
2) *per ogni $n \in S$, anche $n + 1 \in S$.*

Allora $S = \mathbb{N}$.

Se S contiene lo 0 ⇒ contiene tutti i numeri naturali, perché contiene n + 1

In generale, si dice che un insieme $S \subseteq \mathbb{N}$ è induttivo se verifica almeno la seconda di queste proprietà. Questo assioma non stupisce troppo: se un insieme contiene zero e verifica la seconda proprietà, contiene anche 1, ma allora contiene anche 2, e allora anche 3, e così via, quindi contiene tutti i numeri naturali (➡ appendice 3.1). Il principio di induzione è lo strumento che ci permette di evitare questo "e così via" nelle dimostrazioni; osserviamo che si tratta di uno strumento molto potente, in quanto permette di dimostrare la verità di infinite proposizioni in un colpo solo. In formula, questo assioma può essere scritto

$$[(S \subseteq \mathbb{N}) \text{ e } (0 \in S) \text{ e } (\forall n,\ (n \in S \Rightarrow n + 1 \in S))] \Rightarrow (S = \mathbb{N}) \,.$$

A titolo di esempio, proviamo una formula sulla somma degli interi.

Esempio : la somma dei numeri naturali da 0 ad n vale $n(n+1)/2$, cioè

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \,. \tag{3.1}$$

Per usare il principio di induzione, indichiamo con S l'insieme dei numeri naturali n per i quali è vero che la somma dei numeri da 0 ad n fa proprio $n(n+1)/2$, cioè

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \right\} .$$

Se proviamo che $S = \mathbb{N}$ abbiamo dimostrato che la formula è vera per tutti gli n, cioè è sempre vera. Dobbiamo verificare le due proprietà ($0 \in S$ ed S induttivo); la prima è facile, perché

$$0 \in S \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2} = 0\,,$$

che è vero. Proviamo ora che S è induttivo; per fare ciò dobbiamo prendere un generico elemento n di S, e provare che $n+1 \in S$: dunque l'ipotesi è che $n \in S$, cioè

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,,$$

e la tesi è che $n+1 \in S$, cioè

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\,.$$

Usando l'ipotesi possiamo scrivere

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = (n+1) + \sum_{i=0}^{n} i = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,,$$

che è la tesi. Per induzione, la formula (3.1) è dimostrata (✎ es. 3.3).

Notiamo che quello che abbiamo fatto nell'esempio precedente è stato dimostrare la verità per ogni n di un predicato $\mathscr{P}(n)$, cioè appunto di infinite proposizioni, una per ogni n. Conviene allora scrivere il principio di induzione anche sotto altre forme, che sono tutte equivalenti.

Proposizione 3.2 : *sia $\mathscr{P}(n)$ un predicato definito per ogni $n \in \mathbb{N}$, che verifica le seguenti proprietà:*
1) *$\mathscr{P}(0)$ è vero*
2) *per ogni n, supponendo vero $\mathscr{P}(n)$ risulta vero anche $\mathscr{P}(n+1)$.*

Allora $\mathscr{P}(n)$ è vero per ogni n.

È facile dimostrare questa proposizione: basta porre $S = \{n : \mathscr{P}(n) \text{ è vero}\}$ ed applicare il principio di induzione. Poi, possiamo provare (✎ es. 3.4) l'equivalenza tra questa proposizione e il principio di induzione 3.1, cioè dimostrare il principio di induzione prendendo questa proposizione come assioma (qui dovremo scegliere il predicato $\mathscr{P}$ in modo opportuno). In formula, la proposizione precedente si scrive

$$[\mathscr{P}(0) \text{ e } (\forall n,\ (\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)))] \quad \Rightarrow \quad [\forall n,\ \mathscr{P}(n)]\,;$$

un errore estremamente frequente è usare come ipotesi la proposizione, apparentemente simile,

$$[\mathscr{P}(0) \text{ e } (\forall n,\ \mathscr{P}(n))]\,,$$

cercare di dimostrare $\mathscr{P}(n+1)$ e pretendere che questo implichi $\forall n,\ \mathscr{P}(n)$. Sono solo spostate le parentesi, ma questa formula è ovvia, perché nell'ipotesi è già contenuta la tesi!

La prossima è un'altra versione equivalente all'assioma 3.1, il quale si chiama anche "prima forma del principio di induzione".

Proposizione (seconda forma del principio di induzione) 3.3 : *sia $S \subseteq \mathbb{N}$ un insieme che verifica le seguenti proprietà:*
1) *$0 \in S$*
2) *per ogni n tale che tutti i numeri minori o uguali ad n appartengono ad S, anche $n+1 \in S$.*

Allora $S = \mathbb{N}$.

In formula,

$$[(S \subseteq \mathbb{N}) \text{ e } (0 \in S) \text{ e } (\forall n,\ ((\forall m \leq n,\ m \in S) \Rightarrow n+1 \in S))] \quad \Rightarrow \quad (S = \mathbb{N})\,.$$

Osserviamo che questa forma è in apparenza più forte della prima forma, perché ha ipotesi più deboli (quindi questa proposizione implica subito il principio di induzione), tuttavia, come si è già detto, le due forme sono in realtà equivalenti (✎ es. 3.5).

Vediamo una terza forma del principio di induzione:

Proposizione (principio del minimo intero) 3.4 : *ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ha minimo.*

Questa proposizione è apparentemente ovvia, ma la dimostrazione richiede l'induzione, e anzi è equivalente a 3.1 (✎ es. 3.6), dunque (come accade su altri testi) avremmo potuto prendere questo come assioma, e dedurne il principio di induzione.

Osservazione : vale la pena di notare che talvolta non si riesce a far partire l'induzione da $n = 0$, ma non tutto è perduto, se l'insieme è induttivo almeno da un qualche suo elemento in poi. In questi casi, è possibile utilizzare il principio di induzione in questa forma (che potete facilmente dimostrare per esercizio partendo dall'assioma 3.1):
Sia $S \subseteq \mathbb{N}$, e sia $k \in \mathbb{N}$; supponiamo che siano verificate le seguenti proprietà:
1) *$k \in S$*
2) *per ogni $n \geq k$, se $n \in S$ anche $n+1 \in S$.*

Allora $S \supseteq \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}$.

Questo significa che se riusciamo ad applicare l'induzione solo da un certo k in poi, l'insieme S contiene almeno tutti i numeri da k in poi. Ciò non vuol dire che l'insieme S contiene solo quei numeri: potrebbe contenerne anche altri, ma la verifica per quelli prima di k va fatta con metodi diversi dall'induzione (✎ es. 3.7).

È chiaro che possiamo riformulare in questi termini anche le proposizioni 3.2 e 3.3.

Il principio di induzione si può usare anche per dare delle definizioni, come vediamo nel prossimo esempio (fondamentale).

Esempio : definiamo una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la funzione "fattoriale", ponendo

Funzione f. IN → IN Fattoriale

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n+1) = (n+1) \cdot f(n) & \text{se } n \geq 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

→ definisce fn.

Questa formula definisce la funzione per tutti i valori di n: infatti, se chiamiamo S l'insieme degli n per i quali $f(n)$ esiste, si ha $0 \in S$, perché abbiamo posto $f(0) = 1$, e se $n \in S$ allora conosciamo $f(n)$, quindi anche $f(n+1)$ per la definizione data, dunque $n+1 \in S$. Per induzione, $S = \mathbb{N}$.

Le prossime proposizioni formalizzano l'idea di definizione per induzione; l'esempio del fattoriale è un caso particolare della proposizione 3.6.

Proposizione 3.5 : *se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, ed $a \in \mathbb{R}$, la formula*

$$\begin{cases} g(0) = a \\ g(n+1) = f\big(g(n)\big) & \text{se } n \geq 0 \end{cases}$$

definisce una funzione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Più in generale, se $f : A \to A$ ed $a \in A$ la formula precedente definisce una funzione $g : \mathbb{N} \to A$.

Dimostrazione : dobbiamo solo verificare che il dominio di g è tutto $\mathbb{N}$, e lo facciamo per induzione; indicato con S il dominio di g, è immediato verificare che $0 \in S$, e d'altra parte se $n \in S$ possiamo calcolare $g(n) \in \mathbb{R}$, quindi calcoliamo anche $f\big(g(n)\big)$, così anche $n+1 \in S$, quindi $S = \mathbb{N}$ per il principio di induzione. ■

Notiamo esplicitamente che se il dominio e il codominio di f non coincidono, può darsi che g non risulti definita su tutto $\mathbb{N}$: ad esempio,

$$\begin{cases} g(0) = 2 \\ g(n+1) = \log\big(g(n)\big) & \text{se } n \geq 0 \end{cases}$$

definisce solo $g(0) = 2$, $g(1) = \log 2 \ (< 1)$ e $g(2) = \log(\log 2) \ (< 0)$, così $g(3)$ non è definito.

Proposizione 3.6 : *se $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione, ed $a \in \mathbb{R}$, la formula*

[fn · (n+1)]

$$\begin{cases} g(0) = a \\ g(n+1) = f\big(n, g(n)\big) & \text{se } n \geq 0 \end{cases}$$

definisce una funzione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Più in generale, se $f : \mathbb{N} \times A \to A$ ed $a \in A$ la formula precedente definisce una funzione $g : \mathbb{N} \to A$.

La dimostrazione è lasciata per esercizio (✎ es. 3.11). Un'altra generalizzazione è la seguente, per dimostrare la quale occorre la seconda forma del principio di induzione (✎ es. 3.12).

Proposizione 3.7 : *sia $k \in \mathbb{N}$ fissato, sia $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ una funzione e siano $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$; la formula*

$$\begin{cases} g(0) = a_0, \ \dots, \ g(k) = a_k \\ g(n+1) = f\big(n, g(n), \dots, g(n-k)\big) & \text{se } n \geq k \end{cases}$$

definisce una funzione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Più in generale, se $f : \mathbb{N} \times A^{k+1} \to A$ ed $a_0, \dots, a_k \in A$ la formula precedente definisce una funzione $g : \mathbb{N} \to A$.

Troveremo varî esempi dell'uso di queste proposizioni nella sezione 5.10, quando studieremo le successioni definite per induzione, e nella sezione 10.4.

Nel seguito, incontreremo di frequente la funzione fattoriale, che ha un simbolo proprio: scriveremo $n!$ per indicare il fattoriale di n, e il simbolo ! ha la precedenza sulle altre operazioni, così $2 \cdot (n!) = 2n! \neq (2n)!$. A parte il caso $n = 0$, per il quale la definizione (3.2) è data per rendere più brevi certe notazioni, $n!$ è il prodotto dei numeri naturali tra 1 ed n, cioè

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i \qquad \forall n \geq 1. \tag{3.3}$$

Questa è una formula esplicita per il fattoriale, mentre la definizione induttiva che ne abbiamo dato è implicita, nel senso che, ad esempio, in (3.2) non compare esplicitamente 100!, mentre questo compare in (3.3). Tuttavia, (3.3) non è la definizione del fattoriale, e va dimostrata (usando il principio di induzione) a partire da (3.2) (✎ es. 3.13). Molto più avanti, usando gli integrali, riusciremo a dare una "estensione" del fattoriale al di fuori dei numeri naturali (➡ appendice 8.15).

Esempio : $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$; i fattoriali crescono piuttosto rapidamente con n: ad esempio, 22! è un numero di 22 cifre ...

Una funzione simile al fattoriale è il semifattoriale; il semifattoriale di un numero naturale positivo n si indica con $n!!$, ed è il prodotto di tutti i numeri naturali positivi minori o uguali ad n e che hanno la stessa parità di n, dunque è il prodotto dei numeri pari [dispari] minori o uguali ad n se n è pari [dispari]. Come per 0!, anche 0!! è uguale a 1 per convenzione, dunque

$$(2k+1)!! = \prod_{i=0}^{k} (2i+1) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad (2k)!! = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ \prod_{i=1}^{k} (2i) & \text{se } k > 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Inoltre, per futura comodità di notazione conviene definire anche

$$(-1)!! = 1. \tag{3.5}$$

Esempio : $5!! = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$, $12!! = 12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 46080$.

Useremo in seguito questa disuguaglianza, la cui dimostrazione è un esercizio (✎ es. 3.14).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; n! \geq 2^{n-1} . \tag{3.6}$$

Un'altra formula interessante è quella che dà la somma dei termini di una progressione geometrica (✎ es. 3.15): se $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} , \tag{3.7}$$

mentre per $q = 1$ la somma è $n+1$ (☞ esercizio 3.1); osserviamo che qui facciamo uso della convenzione $0^0 = 1$, e la formula resta vera anche per $q = 0$.

- Dato B, C(B) = n. Preso K ≤ n, $C_{n,K}$ è il num. dei sottoinsiemi composti da K elementi
- Dati A e B, C(A) = K e C(B) = n, $F_{n,K}$ num. delle applicazioni da A in B
- Dati A e B, C(A) = K e C(B) = n, $D_{n,K}$ è il num. delle applicazioni iniettive da A in B.

3.2 - Calcolo combinatorio

P_n · num. totale delle permutazioni di n oggetti = n!

Dati n oggetti distinti, disposti in fila in un certo ordine, ogni altro modo di disporli in fila si chiama permutazione della disposizione di partenza; se indichiamo con P_n il numero totale di permutazioni di n oggetti, cioè il numero di modi diversi in cui questi oggetti possono essere disposti in fila, si ha ovviamente $P_1 = 1$. Inoltre, presi $n+1$ oggetti da disporre in fila, possiamo mettere al primo posto uno qualsiasi di essi (e questo lo possiamo fare in $n+1$ modi diversi), dopo di che, per ciascuno di questi modi, disponiamo i rimanenti n (e questo lo possiamo fare in P_n modi): dunque, $P_{n+1} = (n+1) \cdot P_n$. Se poi poniamo $P_0 = 1$, questo significa che $P_n = n!$, per la definizione (3.2).

Esempio : un mazzo da poker di trentadue carte può essere mescolato in $32! \simeq 2.6 \cdot 10^{35}$ modi diversi.

Possiamo porci un problema analogo, quello delle disposizioni di n oggetti presi a k per volta, dove $k \leq n$: il simbolo $D_{n,k}$ indica il numero di modi distinti in cui possiamo disporre in fila k oggetti scelti tra un gruppo di n . Un modo per eseguire questa operazione è mettere in fila tutti e n gli oggetti (cosa che possiamo fare in $n!$ modi diversi) e poi scartare gli ultimi $n-k$. Per ciascuna disposizione dei primi k oggetti, i restanti $n-k$ possono essere messi in fila in $(n-k)!$ modi distinti, senza influenzare la disposizione dei primi k , e in totale otteniamo tutte le permutazioni degli n oggetti; questo vuol dire che $n! = P_n = D_{n,k} \cdot (n-k)!$, quindi $D_{n,k} = n!/(n-k)!$.

→ num. delle applicazioni iniettive

$F_{n,K} = n^K$ $\quad D_{n,K} = \dfrac{n!}{(n-K)!}$ $\quad C_{n,K} = \dfrac{n!}{K!(n-K)!}$

il num. delle sostituzioni, o applicazioni suriettive con K = n → $D_{n,n} = n!$

Osserviamo che questa frazione rappresenta in realtà un numero intero, perché in $n!$ ci sono tutti i fattori che compaiono al denominatore, e si ha

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \prod_{i=0}^{k-1} (n-i) = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) .$$

Esempio : le possibili premiazioni (primi tre arrivati, nell'ordine di arrivo) in una gara con otto partenti sono $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Un altro problema è quello delle combinazioni di n oggetti a k per volta, vale a dire i modi diversi in cui possiamo scegliere (senza badare all'ordine) k oggetti da un insieme di n (✎ es. 3.19). Osserviamo subito che se $C_{n,k}$ indica tale numero, per ciascuna di queste combinazioni (scelte di k oggetti) possiamo ottenere $k!$ disposizioni diverse, permutando i k oggetti scelti; questo vuol dire che $D_{n,k} = C_{n,k} \cdot k!$, da cui possiamo ricavare $C_{n,k} = n!/k!(n-k)!$.

Esempio : il numero di modi in cui possiamo essere serviti durante una partita di poker è dato dalle combinazioni di 32 oggetti presi a 5 per volta, quindi è $(32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28)/5! = 201376$.

Osserviamo che anziché con il calcolo combinatorio, avremmo potuto introdurre le permutazioni, disposizioni e combinazioni anche tramite il calcolo del numero di certe applicazioni fra due insiemi (✎ es. 3.21).

Per indicare le combinazioni si usa comunemente, oltre a $C_{n,k}$, un altro simbolo: poniamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{Z}$

vale se K è compreso tra 0 e n.

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{se } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Questi numeri si chiamano anche "coefficienti binomiali", per motivi che saranno chiariti dalla proposizione 3.10. Le prossime proposizioni elencano le principali proprietà dei coefficienti binomiali.

Proposizione 3.8 : *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si ha:*

1) $\binom{n}{0} = 1$, e $\binom{n}{n} = 1$
2) $\forall k < 0$, $\binom{n}{k} = 0$, e $\forall k > n$, $\binom{n}{k} = 0$ $\quad \binom{n}{k} \neq 0 \iff 0 \leq K \leq n$
3) $\forall k$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

La dimostrazione è una semplice verifica, l'unica proprietà non immediata è l'ultima (✎ es. 3.24). La prossima proposizione permette di calcolare tutti i coefficienti binomiali di ordine $n+1$ se si conoscono quelli di ordine n .

Proposizione 3.9 : *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *ed ogni* $k \in \mathbb{Z}$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} .$$

DIMOSTRAZIONE : la proprietà è ovvia se $k < 0$ o se $k > n+1$ (tutto fa zero), ed è immediata pure se $k = 0$ o $k = n+1$, casi in cui si riduce rispettivamente a

$$\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0} + \binom{n}{-1}, \qquad \binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n+1} + \binom{n}{n},$$

che sono entrambe immediate conseguenze della proposizione 3.8. Rimane solo il caso $1 \le k \le n$; allora, è $0 \le k-1 < n$, quindi la formula diventa

$$\frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!},$$

cioè, semplificando un po' di fattori,

$$\frac{n+1}{k(n-k+1)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1},$$

che è vera. ■

La proposizione precedente poteva anche essere dimostrata in termini di combinazioni: se abbiamo $n+1$ oggetti, fissiamone uno in particolare. Le combinazioni di $n+1$ oggetti a k per volta si dividono in quelle che non contengono l'oggetto fissato (che quindi sono combinazioni degli altri n oggetti a k per volta) e quelle che lo contengono (per ottenere le quali dobbiamo scegliere solo $k-1$ oggetti tra i rimanenti n), quindi $C_{n+1,k} = C_{n,k} + C_{n,k-1}$.

Notiamo che dalla proposizione 3.9 si ottiene che i coefficienti binomiali non nulli formano nel piano (n,k) una specie di triangolo

$k \to$	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$n=0$	0	0	1	0	0	0	0	0
$n=1$	0	0	1	1	0	0	0	0
$n=2$	0	0	1	2	1	0	0	0
$n=3$	0	0	1	3	3	1	0	0
$n=4$	0	0	1	4	6	4	1	0

ogni elemento del triangolo è la somma di quello sopra (n diminuisce, k invariato) con quello sopra a sinistra (n, k diminuiscono)

che si dice triangolo di Tartaglia: la proposizione dice che ogni elemento del triangolo è la somma di quello di sopra (n diminuisce di uno, k invariato) con quello sopra e a sinistra (n e k diminuiscono di uno).

La ragione del nome di coefficienti binomiali sta nel prossimo risultato, noto come formula del binomio di Newton (anche qui usiamo la convenzione $0^0 = 1$)

Proposizione 3.10 : *se* $a, b \in \mathbb{R}$ *ed* $n \in \mathbb{N}$, *la potenza n-esima del binomio* $a+b$ *si esprime con la formula*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{3.8}$$

Potenza n-esima del binomio

Notiamo che

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$
$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

e che il triangolo di Tartaglia ci offre il modo di calcolare rapidamente la potenza di un binomio, per esponenti ragionevolmente piccoli: ad esempio, dalla tabella riportata sopra segue

$$(a+b)^4 = 1\cdot a^4 + 4\cdot a^3b + 6\cdot a^2b^2 + 4\cdot ab^3 + 1\cdot b^4.$$

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 3.10 : si tratta di provare che questa formula vale per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi procederemo per induzione. Sia dunque S l'insieme degli n per cui vale la formula (3.8); per $n = 0$ essa è vera, quindi $0 \in S$. Supponiamo allora che $n \in S$ (cioè prendiamo la (3.8) come ipotesi) e dimostriamo che $n+1 \in S$ (cioè proviamo la (3.8) con $n+1$ al posto di n): abbiamo

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k,$$

usando subito (3.8); per le proprietà delle sommatorie, possiamo proseguire con

$$\cdots = a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{(n+1)-(k+1)}b^{k+1}$$
$$= \sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}a^{n+1-h}b^h + \sum_{h=1}^{n+1}\binom{n}{h-1}a^{n+1-h}b^h,$$

dove abbiamo semplicemente riscritto h anziché k nella prima sommatoria, mentre abbiamo sostituito l'indice $h = k+1$ nella seconda. Le due sommatorie hanno molti termini che si somigliano, ma gli indici h assumono valori diversi: isolando il termine $h = 0$ nella prima e quello $h = n+1$ nella seconda, possiamo raccogliere le due sommatorie rimaste in una sola:

$$\cdots = \binom{n}{0}a^{n+1}b^0 + \left\{\sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h}a^{n+1-h}b^h + \sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h-1}a^{n+1-h}b^h\right\} + \binom{n}{n}a^0b^{n+1}$$
$$= a^{n+1} + \left\{\sum_{h=1}^{n}\left[\binom{n}{h} + \binom{n}{h-1}\right]a^{n+1-h}b^h\right\} + b^{n+1}.$$

Grazie alla proposizione 3.9, e ricordando che $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$, abbiamo

$$\cdots = \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{h=1}^{n} \binom{n+1}{h} a^{n+1-h} b^h + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1},$$

che dà subito la tesi. ■

Notiamo che dalla proposizione 3.10 segue in particolare che la somma di tutti i coefficienti binomiali di ordine n è 2^n (✎ es. 3.25):

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \rightarrow \text{coefficienti binomiali di ordine } n$$

Possiamo ora enunciare alcune disuguaglianze che ci saranno utili in seguito, nelle quali a, b sono numeri reali, e la cui dimostrazione è lasciata per esercizio: la disuguaglianza di Bernoulli (✎ es. 3.32)

$$\forall a \geq -1,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+a)^n \geq 1 + na, \tag{3.9}$$

che è una disuguaglianza stretta se $a \neq 0$ e $n \geq 2$ (✎ es. 3.34), con la sua conseguenza (✎ es. 3.35)

$$\forall 0 < a < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^+, \quad (1-a)^n < \frac{1}{1+na}, \tag{3.10}$$

e la disuguaglianza di continuità per i polinomi (✎ es. 3.36)

$$\forall a > b > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^+, \quad 0 < a^n - b^n < (a+b)^{n-1}(a-b). \tag{3.11}$$

3.3 - Numeri interi e razionali

Abbiamo già utilizzato l'insieme $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ dei numeri interi, che presentano qualche differenza rispetto ai numeri naturali: anzitutto è presente la sottrazione, o meglio, di ogni numero $n \in \mathbb{Z}$ esiste l'opposto rispetto alla somma (➡ appendice 3.3).

Definizione : *si dice operazione interna su un insieme E una qualsiasi applicazione $\circledast : E \times E \to E$; se $\circledast$ è un'operazione interna su E, anziché scrivere $\circledast(x,y)$ scriveremo di solito $x \circledast y$. Una operazione interna $\circledast$ su E si dice associativa se*

$$\forall x, y, z \in E,\ (x \circledast y) \circledast z = x \circledast (y \circledast z),$$

si dice commutativa se

$$\forall x, y \in E,\ x \circledast y = y \circledast x.$$

Se esiste un elemento $e \in E$ tale che

$$\forall x \in E,\ x \circledast e = e \circledast x = x,$$

si dice che e è un elemento neutro dell'operazione $\circledast$. Se un tale elemento neutro esiste, e per qualche $x \in E$ esiste un elemento $y \in E$ tale che $x \circledast y = y \circledast x = e$, tale y si dice inverso di x rispetto all'operazione $\circledast$.

È facile riconoscere in questa definizione varie strutture alle quali siamo abituati; è utile pensarci, prima di leggere gli esempi (✎ es. 3.38).

Esempio : la somma in $\mathbb{Z}$, dove l'elemento neutro è 0 e l'inverso di n rispetto a $+$ (che generalmente chiamiamo opposto di n) è $-n$, quindi ogni numero intero ha inverso rispetto a $+$.

Esempio : i connettivi **e** e **o** nell'insieme delle proposizioni (✎ es. 3.42), o gli operatori di unione e intersezione in $\mathscr{P}(A)$ (✎ es. 3.43).

Definizione : *se un'operazione interna $\circledast$ su un insieme E è associativa ed ha elemento neutro, e se ogni elemento di E ha inverso rispetto a $\circledast$, si dice che E è un gruppo rispetto a $\circledast$. Se $\circledast$ è anche commutativa, si dice che E è un gruppo commutativo rispetto a $\circledast$.*

Esempio : $\mathbb{Z}$ è un gruppo commutativo rispetto alla somma.

È importante citare anche l'operazione di cui si tratta, anziché nominare solo l'insieme, perché vi sono casi — comunissimi — di insiemi su cui sono definite più operazioni interne, con proprietà diverse: ad esempio, sugli interi è definito anche il prodotto (✎ es. 3.46).

Un'altra particolarità di $\mathbb{Z}$ è che negli interi, come nei naturali, ogni numero ha il successore, ma chiaramente non vale più il principio di induzione (intuitivamente, il principio di induzione è "unidirezionale", mentre i numeri interi si allontanano da zero in due direzioni). Se ne può però salvare una parte, simile al principio del minimo intero 3.4, aggiungendo un'ipotesi supplementare: enunceremo e dimostreremo questa proprietà un po' più avanti (☛ proposizione 3.20).

Introduciamo a questo punto i numeri razionali, partendo dalle frazioni: la scrittura $3/4$ è indubbiamente diversa dalla scrittura $6/8$, quindi queste due "frazioni" sono differenti, ma sappiamo che esse rappresentano lo stesso numero (o meglio, così ci è stato insegnato). Più precisamente, possiamo introdurre i numeri razionali (➡ appendice 3.4) come classi di equivalenza dell'insieme delle frazioni modulo un'opportuna relazione di equivalenza: $m/n \simeq p/q \iff mq = np$ (✎ es. 3.47). Allora, i numeri razionali, indicati con il simbolo $\mathbb{Q}$, sono tutti i numeri che si possono rappresentare come rapporto di due interi. In termini di rappresentazione decimale (quella abituale, tipo $2.71828\cdots$) si può vedere (➡ appendice 3.5) che i numeri razionali sono tutti e soli quelli rappresentati da allineamenti periodici.

I razionali sono un gruppo rispetto alla somma, e i razionali non nulli (cioè $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$) sono un gruppo anche rispetto al prodotto (✎ es. 3.48).

Definizione : *si dice corpo commutativo (o campo) un insieme* $\mathbb{K}$ *dotato di due operazioni interne, che abitualmente si indicano con* $+$ *e* $\cdot$ *, tali che:*

1) $\mathbb{K}$ *è un gruppo commutativo rispetto a* $+$
2) *se* e_+ *è l'elemento neutro di* $+$ *, l'insieme* $\mathbb{K}\setminus\{e_+\}$ *è un gruppo commutativo rispetto a* $\cdot$
3) *l'operazione* $\cdot$ *è distributiva rispetto a* $+$ *, cioè*

$$\forall a,b,c \in \mathbb{K},\ (a+b)\cdot c = (a\cdot c)+(b\cdot c)\ .$$

Esempio : sia l'insieme dei numeri reali che quello dei numeri razionali sono corpi commutativi.

Dalla definizione precedente si ottengono tutte le proprietà dei campi, tra cui alcune "regole" ben note.

Esempio : in un campo $\mathbb{K}$ si ha per ogni elemento a che $a\cdot e_+ = e_+$, e in particolare in $\mathbb{R}$ abbiamo $a\cdot 0 = 0$: infatti, visto che e_+ è l'elemento neutro di $+$ si ha $e_+ = e_+ + e_+$, quindi $a\cdot e_+ = a\cdot(e_+ + e_+) = (a\cdot e_+)+(a\cdot e_+)$ per la proprietà distributiva. Aggiungendo a entrambi i termini l'inverso di $(a\cdot e_+)$ rispetto a $+$ otteniamo, per la definizione di inverso, $e_+ = e_+ + (a\cdot e_+)$, cioè la tesi per le proprietà dell'elemento neutro (✎ es. 3.51).

Infine, i razionali sono totalmente ordinati (ma non sono bene ordinati: infatti non esiste il più piccolo numero razionale maggiore di zero, ad esempio), e la relazione d'ordine dei razionali ha ottime proprietà algebriche: $\mathbb{Q}$ possiede tutte le proprietà algebriche di $\mathbb{R}$ (☞ assiomi 3.11).

I numeri razionali ci permettono di eseguire tutti i calcoli aritmetici, e inoltre sono gli unici numeri che incontriamo nella vita di ogni giorno: infatti, le misure (di lunghezze, masse, tempi, ...) che possiamo prendere sono necessariamente approssimate, perché non è possibile, né a noi né a una macchina, eseguire misurazioni con precisione infinita. Ci potrebbe venire allora la tentazione di fermarci qui, e costruire la matematica solo con i numeri razionali, ma andremmo incontro a due problemi: anzitutto, come già avevano notato i Pitagorici, esistono (nel mondo ideale) delle misure che non possono essere espresse da un numero razionale, in quanto ad esempio la diagonale di un quadrato di lato 1 ha lunghezza $\sqrt{2}$, che non è un numero razionale (✎ es. 3.49). Poi, e questa è un'altra faccia della stessa medaglia, esistono delle equazioni molto semplici, come $x^2 - 2 = 0$, che non possiamo risolvere nel campo dei numeri razionali (le soluzioni, $x = \pm\sqrt{2}$, non sono numeri razionali).

In un certo senso, i razionali sono un insieme "bucherellato": se consideriamo l'insieme A dei numeri razionali positivi il cui quadrato non supera 2 , e l'insieme B dei razionali positivi il cui quadrato è maggiore di 2 , è facile vedere che ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B . Infatti, se per assurdo fosse $a \in A$, $b \in B$ e $a \geq b$, essendo $a,b \geq 0$ avremmo, per le proprietà delle disuguaglianze, $a^2 = a\cdot a \geq b\cdot a$, e d'altra parte $a\cdot b \geq b\cdot b = b^2$, quindi $a^2 \geq b^2$, il che è assurdo perché $a^2 \leq 2 < b^2$. Poi, possiamo trovare elementi di A e di B arbitrariamente vicini tra loro (ad esempio, $1.41421356 \in A$ e $1.41421357 \in B$ ...), quindi A e B sono contigui, e ci aspettiamo che ci sia un punto, in A o in B , che lascia da un lato gli elementi di A e dall'altro quelli di B . Invece, come dimostreremo fra poco (proposizione 3.19), questo punto manca (sarebbe $\sqrt{2}$, ma non è razionale).

Per i vari motivi citati, i numeri razionali non sono sufficienti a costruire una matematica ragionevolmente ricca e non ridotta a strutture troppo elementari.

3.4 - Numeri reali

I numeri reali (➡ appendice 3.6) hanno tutte le proprietà algebriche dei razionali, cioè $\mathbb{R}$ è un corpo commutativo totalmente ordinato (anche se non bene ordinato), e la relazione d'ordine ha buone proprietà algebriche. Per comodità, elenchiamo tutte queste proprietà, che prendiamo come assiomi dei numeri reali (insieme all'assioma di Dedekind 3.12).

Assiomi algebrici dei numeri reali 3.11 : *esiste un insieme* $\mathbb{R}$ *con due operazioni interne,* $+$ *e* $\cdot$ *, ed una relazione d'ordine,* $\leq$ *, con le seguenti proprietà:*

1) *la somma,* $+$ *, è associativa*
2) *la somma è commutativa*
3) *la somma ha un elemento neutro,* 0
4) *ogni numero reale ha inverso rispetto alla somma (usualmente viene detto opposto)*
5) *il prodotto,* $\cdot$ *, è associativo*
6) *il prodotto è commutativo*
7) *il prodotto ha un elemento neutro,* 1
8) *ogni numero reale diverso da* 0 *ha inverso rispetto al prodotto (detto anche reciproco)*
9) *il prodotto è distributivo rispetto alla somma*
10) *se* $a \leq b$ *allora per ogni* c *si ha* $a+c \leq b+c$ *.*
11) *se* $a \leq b$ *allora per ogni* $c \geq 0$ *si ha* $a\cdot c \leq b\cdot c$ *.*

In più, i numeri reali hanno una proprietà caratteristica (➡ appendice 3.7), che diamo come assioma (si dice anche assioma di separazione, o di continuità).

Assioma di Dedekind 3.12 : *se* A *,* B *sono due sottoinsiemi non vuoti di* $\mathbb{R}$ *tali che*

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leq b$$

$\forall a\in A, \forall b\in B \; a<b \Rightarrow \exists c\in\mathbb{R}: \forall a\in A, \forall b\in B \; a<c<b$ il più piccolo maggiorante di A

allora
$$\exists c \in \mathbf{R} : \forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \le c \le b\,.$$

Un tale c si dice elemento separatore di A e B.

$\xi = \sup A \iff \xi \in M_A$, $\forall \lambda < \xi \; \lambda \notin M_A$, $\forall a\in A\; a\le\xi$, $\forall \lambda<\xi \; \exists a\in A: \lambda < a$

Osservazione : un errore frequente e molto grave è enunciare la tesi come

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ \exists c \in \mathbb{R} : a \le c \le b\ :$$

infatti, qui, c si può scegliere dopo aver scelto a e b, e basta per esempio prendere $c = a$; invece, nell'assioma di separazione, il numero c è indipendente dai particolari a e b, e separa i due insiemi.

Osserviamo che in generale l'elemento separatore non è unico (se A sono i numeri minori di -1 e B quelli maggiori di 1, sono separatori tutti i numeri tra -1 ed 1 compresi). Lo è, invece, se A e B sono contigui, cioè se in A e in B esistono elementi arbitrariamente vicini. Questa frase è imprecisa: cosa significa che due numeri sono vicini? Qual è la distanza fra due numeri? Per precisare questo concetto, introdurremo più avanti (☞ sezione 4.5) la funzione valore assoluto.

L'assioma di Dedekind (che insieme alle proprietà algebriche caratterizza i numeri reali) ci permette di generalizzare il concetto di massimo, che come sappiamo non sempre esiste, introducendo un altro ente, l'estremo superiore, sul quale è fondata gran parte dell'Analisi matematica.

La nozione di estremo superiore di un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ formalizza l'idea del punto dove "termina" l'insieme, se ci muoviamo dai numeri negativi verso quelli positivi; osserviamo alcuni esempi, per chiarire la definizione che daremo immediatamente dopo.

Esempio : $A = \mathbb{R}$; questo insieme non ha maggioranti, quindi non è limitato superiormente, e non "termina" da nessuna parte, visto che continua indefinitamente. Forse potremmo dire che finisce a $+\infty$? Però, $+\infty$ non è un numero reale (✎ es. 3.53), e non lo abbiamo ancora introdotto. Anche per $A = \mathbb{N}$ valgono le stesse considerazioni.

Esempio : $A = \varnothing$; questo esempio è banale, ma serve per capire il perché di un'ipotesi più avanti. Anche l'insieme vuoto non "termina" da nessuna parte.

Esempio : $A = \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\}$; senz'altro questo insieme finisce in zero. I suoi maggioranti sono tutti i numeri maggiori o uguali a zero, e zero è il massimo di A. Non importa che A sia una semiretta: lo stesso discorso vale per l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : x \le -1\} \cup \{0\}$.

Esempio : $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$; i maggioranti di questo insieme sono gli stessi dell'esempio precedente, e zero è il più piccolo di essi. L'insieme A non ha massimo, però non avremmo difficoltà a dire dove "termina" A, qual è il suo confine: zero.

Motivati da questi esempi, diamo la definizione di estremo superiore (➡ appendice 3.8).

$\xi = \sup A \iff \forall a\in A,\ a\le\xi,\ \forall \varepsilon>0\ \exists a\in A: \xi-\varepsilon<a$

Definizione : *se $A \subset \mathbf{R}$ è un insieme non vuoto e limitato superiormente, si dice che un numero reale ξ è l'estremo superiore di A se ξ è il più piccolo maggiorante di A; in tal caso si scrive $\xi = \sup A$.*

Notiamo che l'estremo superiore è definito come un minimo, pertanto (se esiste) esso è unico, grazie alla proposizione 2.6.

Osservazione : un numero reale ξ è l'estremo superiore di A se e solo se

$$\begin{cases} \xi \in \mathscr{M}_A \\ \forall \lambda < \xi,\ \lambda \notin \mathscr{M}_A\,. \end{cases} \tag{3.12}$$

Questa osservazione è una traduzione in formula della definizione. Un'altra caratterizzazione dell'estremo superiore, che è a sua volta una traduzione della formula (3.12), è la seguente.

Osservazione : si ha $\xi = \sup A$ se e solo se

$$\begin{cases} \forall a \in A,\ a \le \xi \\ \forall \lambda < \xi,\ \exists a \in A : \lambda < a\,. \end{cases} \tag{3.13}$$

Infatti, dire che $\lambda \notin \mathscr{M}_A$ significa che qualche elemento di A è maggiore di λ. Dato che i numeri minori di un dato numero reale ξ si possono scrivere tutti come $\xi - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$, possiamo dare un'ulteriore traduzione (ancora più operativa della precedente) della definizione di estremo superiore.

Osservazione : un numero reale ξ è l'estremo superiore di A se e solo se

$$\begin{cases} \forall a \in A,\ a \le \xi \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A : \xi - \varepsilon < a\,. \end{cases} \tag{3.14}$$

Fin qui, abbiamo definito l'estremo superiore, senza preoccuparci della sua esistenza. Iniziamo con una constatazione immediata.

Proposizione 3.13 : *se A ha massimo, questo è anche l'estremo superiore di A.*

DIMOSTRAZIONE : se $m = \max A$, abbiamo (☞ esercizio 2.77) $m \in A$ e $m \in \mathscr{M}_A$, dunque tutti i numeri minori di m non sono maggioranti di A (appunto perché sono minori di m, che appartiene ad A). Allora $m = \sup A$ per la caratterizzazione (3.12). ■

Proposizione 3.14 : *se $\xi = \sup A$ e $\xi \in A$ allora A ha massimo, e $\xi = \max A$*

La dimostrazione ricalca la precedente (✎ es. 3.54). Il prossimo risultato è fondamentale.

Teorema 3.15 : *ogni insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente ha estremo superiore.*

ξ … $\xi = \max A$

DIMOSTRAZIONE : utilizzeremo l'assioma di Dedekind. Consideriamo l'insieme A, che non è vuoto, e l'insieme $\mathscr{M}_A$, che non è vuoto perché A è limitato superiormente. Per definizione di maggiorante, tutti gli elementi di $\mathscr{M}_A$ sono maggiori o uguali di tutti gli elementi di A, cioè

$$\forall a \in A,\ \forall m \in \mathscr{M}_A,\ a \le m\,.$$

Sono allora verificate le ipotesi dell'assioma di Dedekind, pertanto esiste un elemento separatore:

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \forall a \in A,\ \forall m \in \mathscr{M}_A,\ a \le \xi \le m\,;$$

in particolare, ξ è un maggiorante di A (per la disuguaglianza di sinistra), ed è più piccolo degli altri maggioranti (per la disuguaglianza di destra), cioè è il minimo dei maggioranti di A. ■

A differenza del massimo, dunque, l'estremo superiore esiste sempre — almeno per tutti gli insiemi per i quali è ragionevole cercarlo, cioè quelli non vuoti (➡ appendice 3.9) e limitati superiormente. Per poterne parlare senza preoccuparsi se l'insieme sia o no limitato superiormente, introduciamo una convenzione.

Definizione : *se* $A \subset \mathbb{R}$, *la scrittura* $\sup A = +\infty$ *significa che* A *non è limitato superiormente.*

Dunque, $+\infty$ è un simbolo che per ora può essere usato solo in una scrittura del tipo $\sup \ldots = +\infty$, e questa non significa che "$+\infty$ è il minimo dei maggioranti", ma è una semplice stenografia per la frase "l'insieme ... non è limitato superiormente". Con questa convenzione, possiamo parlare dell'estremo superiore di un qualsiasi sottoinsieme (non vuoto) di $\mathbb{R}$.

Esempio : l'estremo superiore dell'insieme dei numeri reali negativi è zero; l'estremo superiore di $\mathbb{R}$ è $+\infty$.

Come abbiamo già fatto parlando del massimo e del minimo, anche qui tutte le definizioni e proprietà si possono rovesciare: parleremo dell'estremo inferiore di un insieme per indicare il massimo dei minoranti; ogni sottoinsieme non vuoto e limitato inferiormente di $\mathbb{R}$ ha estremo inferiore; tale estremo inferiore coincide con il minimo se quest'ultimo esiste; scriveremo $\inf A = -\infty$ per dire che A non è limitato inferiormente; infine (✎ es. 3.55), valgono per l'estremo inferiore caratterizzazioni simili a (3.12), (3.13) e (3.14). Per dimostrare tutte queste proprietà, è utilissima la prossima osservazione.

Definizione : *se* $A \subset \mathbb{R}$, *definiamo l'opposto di* A *come l'insieme degli opposti degli elementi di* A, *ponendo*

$$-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}\,.$$

Esempio : se $A = [-1, 3[$ è $-A =]-3, 1]$; se $A = \{\pi\}$ è $-A = \{-\pi\}$.

Proposizione 3.16 : *se* A *è un sottoinsieme non vuoto di* $\mathbb{R}$

$$\sup A = -\inf(-A)\,, \qquad \inf A = -\sup(-A)\,.$$

La dimostrazione è lasciata per esercizio (✎ es. 3.56).

La prossima convenzione dà una sistemazione teorica alle scritture $\sup A = +\infty$ e $\inf A = -\infty$: definiamo l'insieme $\overline{\mathbb{R}}$ dei numeri reali estesi, che è costituito dai numeri reali e dai due simboli $+\infty$ e $-\infty$ (che non sono numeri reali). Su $\overline{\mathbb{R}}$ introduciamo una relazione d'ordine, estendendo quella su $\mathbb{R}$ e ponendo:

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}},\ -\infty \le x \le +\infty\,;$$

inoltre, introduciamo parzialmente le due operazioni di somma e prodotto: queste non saranno definite su tutto $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$, quindi non sono vere operazioni (per i motivi, ☞ esercizio 3.53); estendiamo nel modo naturale la somma e il prodotto di $\mathbb{R}$ ponendo

$$\forall x < +\infty,\ x + (-\infty) = -\infty\,, \qquad \forall x > -\infty,\ x + (+\infty) = +\infty$$
$$\forall x > 0,\ x \cdot (+\infty) = +\infty\,, \qquad \forall x < 0,\ x \cdot (+\infty) = -\infty$$

e analogamente

$$\forall x > 0,\ x \cdot (-\infty) = -\infty\,, \qquad \forall x < 0,\ x \cdot (-\infty) = +\infty\,.$$

Osserviamo esplicitamente che non sono definite (e quindi non hanno senso) le operazioni $(\pm\infty) + (\mp\infty)$ e $(\pm\infty) \cdot 0$. Con queste aggiunte, $\overline{\mathbb{R}}$ è un insieme totalmente ordinato, nel quale ogni insieme non vuoto ha dei maggioranti (almeno $+\infty$), e nel quale ogni insieme non vuoto ha estremo superiore e inferiore (✎ es. 3.57). Delle caratterizzazioni dell'estremo superiore, sopravvivono (3.12) e (3.13), ma non (3.14), che vale solo se l'estremo superiore è un numero reale.

Le prossime proposizioni danno qualche proprietà degli estremi superiore e inferiore (generalizzando una proprietà del massimo e del minimo).

Proposizione 3.17 : *se* A *è un sottoinsieme non vuoto di* $\mathbb{R}$

$$\inf A \le \sup A\,;$$

l'uguaglianza vale se e solo se A *contiene un solo punto.*

DIMOSTRAZIONE : preso un qualsiasi $a \in A$, per definizione abbiamo $\inf A \le a \le \sup A$, che prova la disuguaglianza; inoltre, se $\inf A = \sup A = \xi$, abbiamo che ξ è sia un maggiorante, sia un minorante di A, dunque tutti gli elementi di A sono contemporaneamente maggiori o uguali a ξ e minori o uguali a ξ, cioè ogni elemento di A coincide con ξ. ■

Proposizione 3.18 : *se* A' *e* A'' *sono due sottoinsiemi non vuoti di* $\mathbb{R}$ *con* $A' \subset A''$, *si ha*

$$\inf A'' \le \inf A'\,, \qquad \sup A' \le \sup A''\,.$$

DIMOSTRAZIONE : anzitutto per la proposizione 2.5 abbiamo $\mathscr{M}_{A'} \supset \mathscr{M}_{A''}$, quindi $\sup A' = \min \mathscr{M}_{A'}$ è minore o uguale a tutti i maggioranti di A'', cioè è minore o uguale a $\sup A''$. Lo stesso ragionamento si adatta a provare la disuguaglianza tra gli estremi inferiori. ∎

Altre proprietà sono tra gli esercizi (✎ es. 3.58).

Come avevamo anticipato, mostriamo che la proprietà di Dedekind 3.12 è caratteristica di $\mathbb{R}$.

Proposizione 3.19 : *l'insieme $\mathbb{Q}$ non verifica la proprietà di Dedekind.*

DIMOSTRAZIONE : abbiamo detto al termine della sezione sui numeri razionali che posto $A = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0, q^2 \leq 2\}$ e $B = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0, q^2 > 2\}$ si ha $a \leq b$ per ogni $a \in A$ ed ogni $b \in B$; inoltre i due insiemi non sono vuoti ($1 \in A$ e $2 \in B$, per esempio). Se la proprietà di Dedekind valesse anche in $\mathbb{Q}$, dovrebbe esistere un numero razionale c che verifica

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leq c \leq b\,. \tag{3.15}$$

Mostriamo che ciò non può essere, facendo vedere che c^2 non può essere né uguale a 2 , né maggiore, né minore.

Che c^2 non può essere 2 è già noto, perché sappiamo (☞ esercizio 3.49) che non esistono numeri razionali il cui quadrato è 2 . Questa osservazione ha un'implicazione importante: nei numeri razionali, non sempre esiste la radice quadrata (ad esempio, non esiste la radice quadrata del numero razionale 2 , mentre esiste quella di 4).

Supponiamo ora che sia $c^2 < 2$, e mostriamo che si giunge ad un assurdo: precisamente, proviamo che è possibile trovare un elemento di A più grande di c , contraddicendo (3.15). Questo significa trovare un numero razionale non negativo, maggiore di c e avente quadrato minore o uguale a 2 . Osserviamo che $c > 0$, perché $1 \in A$, quindi i numeri razionali non negativi e maggiori di c hanno tutti la forma $c + h$, con h numero razionale positivo; dobbiamo allora trovare almeno un tale h per il quale si abbia $(c+h)^2 \leq 2$. Facili calcoli mostrano che questo equivale a trovare almeno un numero razionale positivo h che risolve la disequazione

$$h^2 + 2ch + c^2 \leq 2\,,$$

ma sfortunatamente non sappiamo risolverla esplicitamente, perché non possiamo usare la radice quadrata! Siamo costretti a ricorrere a un piccolo artificio, per modificare la disequazione (che è di secondo grado) e riportarci ad una di primo grado (è chiaro che il termine dannoso è h^2). Visto che non vogliamo trovare tutte le soluzioni della disequazione, ma almeno una, e visto che ci aspettiamo che i numeri h che cerchiamo saranno piuttosto piccoli (ovviamente, se h è grande $c + h$ sarà grande, quindi potrà ben avere quadrato maggiore di 2), scegliamo di cercare soluzioni h che verificano la condizione $h \leq c$. Per tali h , dato che $h > 0$ abbiamo

$$h^2 = h \cdot h \leq h \cdot c\,,$$

quindi

$$(c+h)^2 = h^2 + 2ch + c^2 \leq 3ch + c^2\,.$$

Se riusciamo a trovare un numero razionale h tale che

$$\begin{cases} 0 < h \leq c \\ 3ch + c^2 \leq 2 \end{cases}$$

allora, per la proprietà transitiva delle disuguaglianze, anche $(c+h)^2 \leq 2$, quindi $c+h \in A$ e c non è un maggiorante di A , il che è assurdo. Il sistema precedente, tenuto conto del fatto che $c > 0$, diviene

$$\begin{cases} 0 < h \leq c \\ h \leq (2-c^2)/3c\,; \end{cases}$$

poiché $c^2 < 2$ per ipotesi (che fin qui non abbiamo usato, e dalla quale discende l'assurdo), abbiamo $(2-c^2)/3c > 0$, e basta scegliere

$$h = \frac{1}{2}\min\{c, (2-c^2)/3c\}$$

per trovare la soluzione cercata (notiamo che abbiamo usato un modo semplice, senza distinguere in casi, per indicare un numero più piccolo di altri due: basta prendere il minimo tra i due, se basta la disuguaglianza $\leq$, oppure, come abbiamo fatto, metà, o un altro multiplo minore di uno, di questo minimo, se occorre la disuguaglianza stretta).

Per concludere la dimostrazione bisogna solo mostrare, circa allo stesso modo, che non può essere neppure $c^2 > 2$, perché questo permetterebbe di trovare un elemento di B minore di c (✎ es. 3.60). ∎

Avendo a disposizione l'estremo inferiore, possiamo completare un'osservazione lasciata in sospeso, la versione valida in $\mathbb{Z}$ del principio del minimo intero 3.4.

Proposizione 3.20 : *ogni insieme di numeri interi $A \subset \mathbb{Z}$ non vuoto e limitato inferiormente ha minimo.*

DIMOSTRAZIONE : poiché $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, l'insieme A è anche sottoinsieme di $\mathbb{R}$, quindi A ha estremo inferiore $\xi \in \mathbb{R}$; per la caratterizzazione (3.14) adattata all'estremo inferiore, scelto $\varepsilon = 1/2$ (basta qualunque numero minore di 1) esiste un numero $\bar{x} \in A$ tale che $\xi \leq \bar{x} < \xi + 1/2$. Proviamo che $\xi = \bar{x}$: se così non fosse, il numero ξ non sarebbe intero (tra ξ e $\xi + 1/2$ può cadere al più un solo intero, e c'è già $\bar{x}$), ma allora $\bar{x}$ sarebbe un minorante di A , perché non vi sono elementi di A minori di ξ e non vi sono numeri interi (e quindi neanche elementi di A) maggiori o uguali di ξ e minori di $\bar{x}$, contro l'ipotesi che ξ è il massimo dei minoranti di A . Allora $\xi = \bar{x}$, quindi in particolare $\xi \in A$. Essendo $\xi = \inf A$ e $\xi \in A$, per la proposizione 3.14 è $\xi = \min A$. ∎

Possiamo riformulare l'osservazione precedente nella direzione opposta.

Corollario 3.21 : *ogni insieme $A \subset \mathbb{Z}$ non vuoto e limitato superiormente ha massimo.*

In particolare, se $x \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$ ha massimo, e questo massimo, indicato con $\lfloor x \rfloor$, è la parte intera di x, il più grande numero intero minore o uguale ad x, che abbiamo già utilizzato nell'esercizio 2.86.

Corollario 3.22 : *il principio di induzione (assioma 3.1) è una conseguenza delle proprietà di* $\mathbb{R}$.

Per provare questo corollario, basta osservare che la proposizione precedente implica in particolare la proposizione 3.4 (principio del minimo intero), che abbiamo detto essere equivalente al principio di induzione. Dunque, se prendiamo come assiomi le proprietà dei numeri reali non è necessario dare come assioma anche il principio di induzione; nelle appendici a questo capitolo mostriamo che è vero anche il viceversa, cioè potremmo assumere come vero il principio di induzione e dedurne la proprietà di Dedekind.

La prossima proposizione equivale sostanzialmente a dire che $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente, e una sua traduzione in termini non matematici potrebbe essere che qualunque distanza può essere superata, sia pur facendo molti passi (di lunghezza costante) ...

Proposizione (proprietà di Archimede) 3.23 : *se $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b > 0$ esiste un numero naturale n tale che $na > b$.*

DIMOSTRAZIONE : indichiamo con A l'insieme dei multipli di a, cioè $A = \{na : n \in \mathbb{N}\}$; chiaramente A non è vuoto.

Supponiamo che A sia limitato superiormente: allora $\xi = \sup A$ è un numero reale; per la caratterizzazione (3.13) con $\lambda = \xi - a$, esiste almeno un elemento di A compreso tra $\xi - a$ e ξ. Poiché gli elementi di A hanno tutti la forma na con $n \in \mathbb{N}$, questo significa che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\xi - a < \bar{n}a \leq \xi$, pertanto $(\bar{n}+1)a > \xi$; ma $(\bar{n}+1)a \in A$, e questo contraddice il fatto che ξ è un maggiorante di A, dunque A non è limitato superiormente.

Da questo segue che in particolare b non è un maggiorante di A, quindi esiste un elemento di A, cioè un multiplo di a, maggiore di b. ■

Corollario 3.24 : *gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ non sono limitati superiormente.*

$\Rightarrow \sup \mathbb{N} = +\infty$

DIMOSTRAZIONE : poiché $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (➡ appendice 3.10), per la proposizione 3.18 ci basta dimostrare che $\sup \mathbb{N} = +\infty$, e questo discende dalla proprietà di Archimede con $a = 1$: per ogni $b \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > b$. ■

Corollario 3.25 : *se $x > 0$ allora esiste $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $\frac{1}{n} < x$; se $x \in \mathbb{R}$ verifica*

$$\forall n \in \mathbb{N}^+,\ x \leq \frac{1}{n}$$

allora $x \leq 0$.

DIMOSTRAZIONE : la prima parte è la proprietà di Archimede, con $a = 1$ e $b = x$; la seconda parte è identica alla prima (☞ formula (2.1), la negazione della tesi implica la negazione dell'ipotesi). ■

Esempio : ora possiamo calcolare l'estremo superiore dell'insieme $\{n/(n+1) : n \in \mathbb{N}\}$; anzitutto osserviamo la notazione abbreviata che abbiamo usato, e che significa $\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : x = n/(n+1)\}$, l'immagine di $\mathbb{N}$ tramite la funzione $n \mapsto n/(n+1)$. Notiamo che

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

quindi tutti gli elementi dell'insieme sono minori di 1. Questo significa che 1 è un maggiorante (non ancora che è l'estremo superiore). Preso $\varepsilon > 0$, per la proprietà di Archimede esiste un numero naturale $\bar{n}$ tale che $\bar{n}\varepsilon > 1$; allora anche $(\bar{n}+1)\varepsilon > 1$, cioè $\varepsilon > 1/(\bar{n}+1)$ e infine

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{\bar{n}+1}.$$

Per la caratterizzazione (3.14) abbiamo provato che l'estremo superiore dell'insieme è 1. Poiché 1 non appartiene all'insieme (l'equazione $1 = n/(n+1)$ non ha soluzioni in $\mathbb{N}$), esso non è massimo (✎ es. 3.61).

I simboli che introduciamo con le prossime definizioni sono molto comodi per indicare certi sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Definizione : *un sottoinsieme I di $\overline{\mathbb{R}}$ si dice un intervallo se*

un insieme è un intervallo se presi comunque due punti, contiene tutti i punti intermedi

$$\forall x, y \in I, \text{ con } x < y, \ \{z \in \mathbb{R} : x < z < y\} \subset I. \tag{3.16}$$

Dunque un insieme è un intervallo se, presi comunque due suoi punti, contiene tutti i punti intermedi: la nozione di intervallo traduce quindi l'idea di sottoinsieme di $\mathbb{R}$ privo di "buchi".

Esempio : i numeri tra 2 e π (compresi gli estremi, o esclusi, o uno compreso e uno escluso) sono un intervallo; i numeri diversi da zero non lo sono (verificate queste affermazioni).

Per indicare gli intervalli usiamo una notazione particolare: se $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a \leq b$ scriviamo

$$[a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x \leq b\}$$
$$]a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x \leq b\}$$
$$[a, b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x < b\}$$
$$]a, b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x < b\}.$$

Inoltre, quando intendiamo indicare uno qualsiasi degli intervalli di estremi a e b, senza preoccuparci se essi appartengono o meno all'intervallo, useremo talvolta la notazione (a, b). Questi insiemi sono tutti intervalli (✎ es. 3.62), e nel caso particolare $a = b$ si riducono a un insieme di un solo punto (l'intervallo $[a, a] = \{a\}$) o al vuoto (gli intervalli $[a, a[=]a, a] =]a, a[= \varnothing$).

Esempio : l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < \pi\}$ si scrive più rapidamente $[2, \pi[$. Anche i numeri reali, i positivi e i negativi sono intervalli, e si scrivono rispettivamente $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$, $]0, +\infty[= \mathbb{R}^+$ e $]-\infty, 0[= \mathbb{R}^-$.

Generalmente incontreremo intervalli di numeri reali; in tal caso, se un estremo dell'intervallo $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ è infinito (o se lo sono entrambi), questo estremo non appartiene certo ad I , quindi la parentesi corrispondente va messa nell'unico modo possibile: ad esempio, non scriveremo $[-\infty, 2]$, ma semmai $]-\infty, 2]$.

Definizione : *gli intervalli della forma* $]a, b[$ *con* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ *si dicono intervalli aperti, quelli della forma* $[a, b]$ *, oppure* $]-\infty, b]$ *, oppure* $[a, +\infty[$ *con* $a, b \in \mathbb{R}$ *si dicono intervalli chiusi; per convenzione, l'insieme vuoto e tutto* $\mathbb{R}$ *sono intervalli sia aperti sia chiusi.*

Torneremo più avanti sulle proprietà degli intervalli aperti o chiusi. La prossima proposizione caratterizza gli intervalli di $\mathbb{R}$; la facciamo precedere da un lemma.

Lemma 3.26 : *se* $A \subset \mathbb{R}$ *è limitato inferiormente ed* $a \in \mathbb{R}$ *è tale che* $a \leq \inf A$ *allora* $A \subset [a, +\infty[$.

La dimostrazione è un esercizio (✎ es. 3.63), e naturalmente vale anche un analogo risultato sull'estremo superiore: se $b \geq \sup A$ allora $A \subset]-\infty, b]$.

Proposizione 3.27 : *gli intervalli di* $\mathbb{R}$ *sono tutti e soli gli insiemi della forma* (a, b) *con* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ *ed* $a \leq b$.

DIMOSTRAZIONE : abbiamo già detto che tutti gli insiemi della forma (a, b) sono intervalli; verifichiamo ora il viceversa: la dimostrazione andrà spezzata in varî casi, e dimostreremo qui solo il più significativo.

Se I è un intervallo, questo può essere vuoto (e in tal caso scegliamo un qualsiasi numero a e si ha $I =]a, a[$) oppure no; in questo secondo caso, siano $a = \inf I$ e $b = \sup I$. Se I è limitato, questi sono entrambi numeri reali, e se coincidono abbiamo $I = [a, a]$ per la proposizione 3.17. Supponiamo ora che siano diversi, cioè $a < b$; per il lemma precedente, abbiamo $I \subset \left(]-\infty, b] \cap [a, +\infty[\right) = [a, b]$. Se proviamo che $I \supset]a, b[$ avremo dimostrato che I è uno dei quattro possibili intervalli di estremi a e b . Per mostrare che $I \supset]a, b[$ dobbiamo prendere un qualsiasi numero $c \in]a, b[$ e mostrare che $c \in I$.

Sia dunque $a < c < b$; dato che $c < \sup I$, esiste un punto $b' \in I$ tale che $c < b' \leq b$; analogamente, esiste un punto $a' \in I$ tale che $a \leq a' < c$. Poiché $a' < c < b'$ e $a', b' \in I$, per definizione di intervallo si ha $c \in I$, come dovevamo dimostrare.

Rimangono ancora da trattare i casi in cui I è limitato solo superiormente, o solo inferiormente, o non è limitato né superiormente né inferiormente, nel qual caso deve risultare $I = \mathbb{R}$ (✎ es. 3.64). ■

Dunque, un intervallo (a, b) è limitato se i suoi estremi sono numeri reali, e illimitato se almeno uno dei suoi estremi è infinito.

Perdiamo un momento per eliminare una frequente fonte di errori a proposito delle parole "finito" e "limitato" riferite a un insieme; un insieme è finito se è costituito da un numero finito di elementi (➡ appendice 3.11).

Proposizione 3.28 : *un sottoinsieme finito e non vuoto di* $\mathbb{R}$ *(o di un qualunque insieme totalmente ordinato) ha massimo e minimo.*

DIMOSTRAZIONE : la dimostrazione si fa per induzione sul numero n di elementi dell'insieme; la tesi è ovvia se $n = 1$, e anche se $n = 2$ (basta confrontare i due elementi dell'insieme). Supponiamo che la tesi sia vera per gli insiemi con n elementi, e sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con $n + 1$ elementi; scegliamone uno a caso, a , e poniamo $A' = A \setminus \{a\}$, così che A' ha n elementi. Per l'ipotesi induttiva A' ha massimo e minimo, e anche l'insieme $\{a\}$, quindi per la proposizione 2.7 ha massimo e minimo anche la loro unione A . ■

ogni sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$ è limitato

Osservazione : da questo risultato si ottiene facilmente che ogni sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$ è limitato. Infatti un sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$ ha massimo e minimo, ma questi sono due numeri reali e sono rispettivamente un maggiorante e un minorante, quindi l'insieme è limitato. Notiamo però che il viceversa non è vero (come invece capita di sentir dire): l'insieme $]0, 1[$ è limitato, ma contiene infiniti elementi, come tutti gli intervalli aperti non vuoti (✎ es. 3.65).

Un'altra conseguenza della proprietà di Archimede è che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

Definizione : *un insieme* $A \subset \mathbb{R}$ *si dice denso in* $\mathbb{R}$ *se ogni intervallo aperto non vuoto di* $\mathbb{R}$ *contiene almeno un punto di* A .

Esempio : $\mathbb{Z}$ non è denso in $\mathbb{R}$, in quanto ad esempio l'intervallo $]0, 1[$ non contiene punti di $\mathbb{Z}$; invece $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è denso in $\mathbb{R}$: infatti preso un qualsiasi intervallo aperto questo contiene infiniti punti, quindi anche punti diversi da zero.

Notiamo che (come si vede suddividendo un intervallo aperto in molti sottointervalli) se A è denso in $\mathbb{R}$ ogni intervallo aperto non vuoto di $\mathbb{R}$ contiene non uno solo, ma infiniti punti di A (✎ es. 3.66).

un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice denso in $\mathbb{R}$ se ogni intervallo aperto non vuoto di $\mathbb{R}$ contiene almeno un punto di A

Proposizione 3.29 : $\mathbb{Q}$ *è denso in* $\mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE : sia I un intervallo aperto (non vuoto); se non è limitato, consideriamo un qualsiasi intervallo aperto (non vuoto) e limitato $I' \subset I$ (basta prendere due punti $a, b \in I$ con $a < b$ e porre $I' =]a, b[$): se proviamo che $I' \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, allora anche $I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Quanto abbiamo detto sinora ci permette di restringerci al solo caso in cui $I =]\alpha, \beta[$ è un intervallo limitato (non vuoto).

Poiché $\mathbb{Q}$ non è limitato né superiormente né inferiormente (corollario 3.24), α non è un minorante di $\mathbb{Q}$, quindi esiste $q_0 \in \mathbb{Q}$ tale che $q_0 < \alpha$. Dato che l'intervallo è aperto e non è vuoto, $\alpha < \beta$, pertanto $d = \beta - \alpha > 0$. Per il corollario 3.25, scegliamo $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $d > 1/n$: adesso, partendo da q_0 (che è minore di α) muoviamoci a passi di $1/n$ (che sono più corti della lunghezza d dell'intervallo), così a un certo punto ci dovremmo trovare dentro all'intervallo.

Per farlo, consideriamo l'insieme $E = \{m \in \mathbb{N} : q_0 + m \cdot \frac{1}{n} > \alpha\}$: tale insieme è non vuoto per la proprietà di Archimede applicata con $a = 1/n$ e $b = \alpha - q_0 > 0$, quindi per la proprietà del minimo intero 3.4 ha minimo $\bar{m}$. Poniamo $q = q_0 + \bar{m}/n$, e osserviamo che $q > \alpha$ perché $\bar{m} \in E$. Dato che $q_0 < \alpha$, il numero $\bar{m}$ non può essere zero; allora $\bar{m} - 1 \notin E$, cioè

$$q - \frac{1}{n} = q_0 + \frac{\bar{m} - 1}{n} \leq \alpha ,$$

da cui

$$q \leq \alpha + \frac{1}{n} < \alpha + d = \beta .$$

Abbiamo provato che $q \in]\alpha, \beta[$, ma q è razionale perché somma di numeri razionali. ■

3.5 - Numeri complessi

Un modo per presentare i varî insiemi numerici (➡ appendice 3.12) è quello della soluzione di equazioni: con i numeri naturali è possibile risolvere l'equazione $x + 3 = 4$, con gli interi $x + 4 = 3$, con i razionali $2x = 1$, con i reali $x^2 - 2 = 0$, mentre per il momento non si sa dare un senso alla "soluzione" dell'equazione $x^2 + 1 = 0$. Per superare questa impasse nella teoria, furono "immaginati" dei numeri opportuni, appunto i numeri immaginari.

Per estendere i numeri reali, introduciamo dunque l'unità immaginaria i, che ha la proprietà che

$$\mathrm{i}^2 = -1 ,$$

e definiamo i numeri complessi come le scritture della forma $a + \mathrm{i}b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. L'insieme dei numeri complessi si indica $\mathbb{C}$; i numeri reali possono essere visti come un particolare sottoinsieme dei numeri complessi, quelli della forma $a + 0\mathrm{i}$ (che si scrive semplicemente a).

Per ogni numero $z = a + \mathrm{i}b$ definiamo la parte reale e la parte immaginaria

$$\Re(a + \mathrm{i}b) = a , \qquad \Im(a + \mathrm{i}b) = b :$$

il numero $z \in \mathbb{C}$ è reale $\Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0$

la parte Reale = a

la parte immaginaria = b

L'inverso di $a + \mathrm{i}b = \frac{a}{a^2+b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2+b^2}$

notiamo che entrambi sono numeri reali, e che $z \in \mathbb{C}$ è reale se e solo se $\Im z = 0$; inoltre per ogni numero $z \in \mathbb{C}$ si ha

$$z = \Re z + \mathrm{i}\Im z .$$

Sui numeri complessi è possibile definire la somma

$$(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = (a + c) + \mathrm{i}(b + d)$$

che estende quella di $\mathbb{R}$ e gode di tutte le proprietà della somma fra numeri reali (✎ es. 3.67), e il prodotto, che si esegue formalmente:

$$(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = ac + \mathrm{i}ad + \mathrm{i}bc + \mathrm{i}^2bd = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc) .$$

Anche il prodotto è commutativo, associativo, distributivo rispetto alla somma (✎ es. 3.68), ha elemento neutro 1 e ogni numero complesso diverso dall'elemento neutro della somma (zero) ha inverso, che è dato da una formula piuttosto complicata: l'inverso di $a + \mathrm{i}b$ è (✎ es. 3.70)

$$\frac{a}{a^2 + b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2 + b^2} ; \tag{3.17}$$

ad esempio, l'inverso di i è $-\mathrm{i}$. L'inverso è molto facile se il numero complesso è in realtà un numero reale non nullo a: in tal caso l'inverso (complesso) di a, dato dalla formula precedente, è $1/a$, quindi per dividere un numero complesso z per il numero reale a basta dividere per a sia la parte reale che quella immaginaria di z.

Esempio : $(2 - 3\mathrm{i})/4 = (1/2) - (3/4)\mathrm{i}$.

Osserviamo che il numero complesso 0 ha parte reale e parte immaginaria uguali a zero: questo ha come conseguenza il fatto che se due numeri complessi sono uguali allora la loro differenza (che è zero) ha parte reale e parte immaginaria zero, ma la parte reale della differenza è la differenza delle parti reali, quindi queste devono essere uguali, e lo stesso le parti immaginarie. Dunque un'equazione complessa dà origine, prendendone separatamente le parti reale e immaginaria, a due equazioni reali.

Esempio : l'equazione $2z + \mathrm{i} = \mathrm{i}z - 1$ equivale al sistema

$$\begin{cases} \Re(2z + \mathrm{i}) = \Re(\mathrm{i}z - 1) \\ \Im(2z + \mathrm{i}) = \Im(\mathrm{i}z - 1), \end{cases}$$

cioè, detta x la parte reale di z e y la sua parte immaginaria (che, ricordiamo, sono due numeri reali), equivale a

$$\begin{cases} \Re\big(2x + \mathrm{i}(2y + 1)\big) = \Re(-y - 1 + \mathrm{i}x) \\ \Im\big(2x + \mathrm{i}(2y + 1)\big) = \Im(-y - 1 + \mathrm{i}x) \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = -y - 1 \\ 2y + 1 = x , \end{cases}$$

che ha come soluzione $(x, y) = (-1/5, -3/5)$, pertanto $z = -1/5 - 3\mathrm{i}/5$. Peraltro, questo metodo non è molto efficiente; nel caso particolare l'equazione di partenza equivale a $(2 - \mathrm{i})z = -1 - \mathrm{i}$, cioè $z = -(1 + \mathrm{i})/(2 - \mathrm{i})$, che dà subito il risultato: z è il prodotto di $-(1 + \mathrm{i})$ per l'inverso (definito prima) di $2 - \mathrm{i}$.

A differenza dei numeri reali, su $\mathbb{C}$ non si definisce l'ordine (➡ appendice 3.13).

Definizione : *si dice coniugato del numero $z \in \mathbb{C}$ il numero complesso*

$$\bar{z} = \Re z - \mathrm{i}\Im z \,. \qquad \bar{z} = \mathrm{Re}\, z - i\, \mathrm{Im}\, z$$

Esempio : se $z = 3-2\mathrm{i}$, il numero $z+2\mathrm{i}\bar{z}-2\Re(z-\mathrm{i})$ vale $(3-2\mathrm{i})+2\mathrm{i}(3+2\mathrm{i})-2\Re(3-3\mathrm{i}) = 3-2\mathrm{i}+6\mathrm{i}-4-6 = -7+4\mathrm{i}$.

Proposizione 3.30 : *valgono le seguenti proprietà:*

1) $\Re(z+w) = \Re z + \Re w$, $\Im(z+w) = \Im z + \Im w$ $\qquad \mathrm{Re}(z+w) = \mathrm{Re}\, z + \mathrm{Re}\, w$, $\mathrm{Im}(z+w) = \mathrm{Im}\, z + \mathrm{Im}\, w$
2) $\Re\bar{z} = \Re z$, $\Im\bar{z} = -\Im z$ $\qquad \mathrm{Re}\,\bar{z} = \mathrm{Re}\, z$ $\quad \mathrm{Im}\,\bar{z} = -\mathrm{Im}\, z$
3) $\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}$
4) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
5) $\bar{\bar{z}} = z$ $\qquad \bar{\bar{z}} = z$
6) $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$. $\rightarrow z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z} \leftarrow$

Le dimostrazioni sono semplicissime (✎ es. 3.72); una facile conseguenza di queste sono le formule per esprimere la parte reale e la parte immaginaria di z in funzione di z e $\bar{z}$.

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}\, z = -\frac{i}{2}(z-\bar{z})$$

Proposizione 3.31 : *per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha*

$$\Re z = \frac{z+\bar{z}}{2}, \qquad \Im z = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}}{2}(z-\bar{z}) \,.$$

Definizione : *si dice modulo del numero complesso z il numero reale non negativo*

$$|z| = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} \,. \qquad |z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2}$$

Notiamo quindi che $z \mapsto |z|$ è un'applicazione da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{R}$, e che $|z| = 0 \iff z = 0$. Nel seguito del capitolo, usiamo già qualche proprietà elementare della funzione valore assoluto (di un numero reale), che introdurremo nella sezione 4.5.

Proposizione 3.32 : *se $z \in \mathbb{C}$ è reale, il modulo di z coincide con il valore assoluto del numero reale z; inoltre per ogni z si ha*

1) $|z| = |\bar{z}|$
2) $|\Re z| \le |z|$ *(il primo è un valore assoluto di un numero reale, il secondo è un modulo)*
3) $|\Im z| \le |z|$
4) $z\bar{z} = |z|^2$. $\qquad z\bar{z} = |z|^2$

Esempio : $|2-3\mathrm{i}| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{13}$; un errore molto frequente è prendere il quadrato di $-3\mathrm{i}$ anziché quello della sola parte immaginaria -3: in questo caso si otterrebbe $|2-3\mathrm{i}|^2 = -5$, che fa subito sospettare, ma se il risultato è positivo c'è il rischio di non accorgersi dell'errore (✎ es. 3.75).

¡Alura!

Corollario 3.33 : *per ogni $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ si ha*

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \,. \qquad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \text{inverso di } z$$

Dunque l'inverso di $z \neq 0$ è $\bar{z}/|z|^2$, e dividere per z è equivalente a moltiplicare per $\bar{z}$ (che è un numero complesso) e poi dividere il risultato per il numero reale $|z|^2$ (in particolare, non è indispensabile ricordare a memoria la formula (3.17) dell'inverso).

Esempio : dovendo calcolare $\dfrac{z}{w}$, ~~si può moltiplicare numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore~~:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2} \,.$$

Ad esempio (✎ es. 3.79),

$$\frac{2+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}} = \frac{(2+\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}{(3-2\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})} = \frac{4+7\mathrm{i}}{13} = \frac{4}{13} + \frac{7}{13}\mathrm{i} \,.$$

Usando la scrittura $z = a + \mathrm{i}b$ di un numero complesso, è possibile risolvere alcune ~~equazioni che non si sanno risolvere (o non hanno senso) in $\mathbb{R}$~~.

Esempio : per risolvere l'equazione $z^2+1=0$, poniamo $z = x+\mathrm{i}y$ e cerchiamo delle coppie (x,y) di numeri reali che risolvono l'equazione complessa $(x+\mathrm{i}y)^2+1=0$, cioè $x^2-y^2+2\mathrm{i}xy+1=0$. Prendendo la parte reale e la parte immaginaria dell'equazione otteniamo il sistema di due equazioni reali

$$\begin{cases} x^2-y^2+1=0 \\ 2xy=0 \,, \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} y=0 \\ x^2=-1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x=0 \\ y^2=1 \,: \end{cases}$$

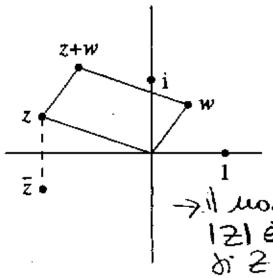
il primo sistema non ha soluzioni (x deve essere un numero reale), mentre il secondo ci dà le soluzioni cercate $z=\mathrm{i}$ e $z=-\mathrm{i}$ (✎ es. 3.81). Anche in questo caso, vedremo che ci sono metodi più efficienti della sostituzione $z = x+\mathrm{i}y$.

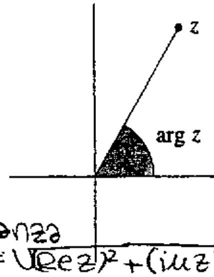
I numeri complessi possono essere rappresentati come punti del piano (piano di Gauss), associando al numero complesso z il punto $(\Re z, \Im z)$; in tal modo, la somma fra numeri complessi segue la consueta regola del parallelogrammo (☞ figura 3.1). Poiché l'ascissa corrisponde alla parte reale, e l'ordinata alla parte immaginaria, nel piano di Gauss è d'uso parlare di asse reale e di asse immaginario, anziché di asse delle ascisse e di asse delle ordinate. Nel piano di Gauss, il punto corrispondente a $\bar{z}$ è il simmetrico di quello corrispondente a z rispetto all'asse reale.

Con questa rappresentazione, la distanza del punto corrispondente a z dall'origine (che corrisponde al numero complesso 0) è data, mediante il teorema di Pitagora, da

$\sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}$: dunque, $|z|$ è la distanza di z da 0, e il modulo della differenza di due numeri complessi z e w è uguale alla distanza fra i due punti del piano che corrispondono a z e w . D'ora in poi, identificheremo tacitamente i numeri complessi con i punti del piano che li rappresentano.

Osserviamo che l'unico numero di modulo zero è lo zero, e che i numeri complessi di modulo $\varrho > 0$ sono i punti della circonferenza centrata nell'origine e di raggio ϱ; osserviamo inoltre che se $a > 0$ è un numero reale, az si ottiene dal punto z con un'omotetia di ragione a e centro l'origine del piano di Gauss.





l'angolo misurato in radianti è detto argomento di z
↓
definito a meno di multipli di 2
tra tutti i possibili valori dell'arg z
solo uno è compreso in
$[0, 2\pi[\to \arg\min z$

→ il modulo di z
$|z|$ è la distanza
di z da 0 $= \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2}$

Fig. 3.1 : il piano di Gauss

Fig. 3.2 : modulo e argomento

Se $z \neq 0$, la semiretta uscente da 0 e passante per z forma con il semiasse reale positivo un angolo che, misurato in radianti e con le solite convenzioni di verso, viene detto argomento di z (☞ figura 3.2). Poiché la misura dell'angolo è definita a meno di multipli interi di 2π, anche $\arg z$ non è univocamente determinato da z, ma è definito a meno di multipli di 2π. Tra tutti i possibili valori di $\arg z$, uno solo è compreso nell'intervallo $[0, 2\pi[$, e viene indicato con $\arg\min z$ (✎ es. 3.82).

Esempio : se $z = 1 + \mathrm{i}$ è $\arg\min z = \pi/4$; se $z = -1$ è $\arg\min z = \pi$.

Osserviamo che se $z \neq 0$ non è immaginario (questo non vuol dire che è reale, solo che non ha parte reale zero) e $\vartheta = \arg z$ allora

$$\tan\vartheta = \frac{\Im z}{\Re z} .$$

$\frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z} = \tan\theta$

Da questo (☞ sezione 4.6) non si deduce $\vartheta = \arctan(\Im z/\Re z)$: questo è vero, a meno di multipli di 2π, solo se $\Re z > 0$, mentre se $\Re z < 0$ bisogna aggiungere π, così che per ogni $z \neq 0$ si ha (✎ es. 4.63)

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{\Im z}{\Re z}\ (+2k\pi) & \text{se } \Re z > 0 \\ \pi + \arctan\dfrac{\Im z}{\Re z}\ (+2k\pi) & \text{se } \Re z < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}\ (+2k\pi) & \text{se } \Re z = 0 \text{ e } \Im z > 0 \\ \dfrac{3\pi}{2}\ (+2k\pi) & \text{se } \Re z = 0 \text{ e } \Im z < 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

$z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z))$

In ogni caso, però, se $z \neq 0$ possiamo scrivere

$$\cos(\arg z) = \frac{\Re z}{|z|} , \qquad \operatorname{sen}(\arg z) = \frac{\Im z}{|z|} ,$$

o anche

$$\Re z = |z|\cos(\arg z) , \qquad \Im z = |z|\operatorname{sen}(\arg z) .$$

In particolare

$$z = |z|\big(\cos(\arg z) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\arg z)\big) .$$

Definizione : *si dice che $z \in \mathbb{C}$ è scritto in forma trigonometrica se sono evidenziati i valori di $\varrho \geq 0$ e $\vartheta \in \mathbb{R}$ per cui si ha*

$$z = \varrho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\vartheta) .$$

Osserviamo subito che se z è scritto in forma trigonometrica (mentre la scrittura $z = a + ib$ si dice forma algebrica) allora $\varrho = |z|$ e, se $z \neq 0$, $\vartheta = \arg z$.

Esempio : per scrivere in forma trigonometrica il numero complesso $z = 1 - \mathrm{i}$ vediamo che $|z| = \sqrt{2}$, quindi $z = \sqrt{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{-1}{\sqrt{2}}\Big)$; un angolo che ha coseno $1/\sqrt{2}$ e seno $-1/\sqrt{2}$ è $-\pi/4$, quindi la forma trigonometrica è $\sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(-\pi/4))$ (✎ es. 3.84).

Osservazione : l'argomento di $\bar{z}$ è l'opposto dell'argomento di z, quindi se la forma trigonometrica di z è $\varrho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\vartheta)$ quella di $\bar{z}$ è

$$\bar{z} = \varrho\big(\cos(-\vartheta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(-\vartheta)\big) .$$

Inoltre, se $z \neq 0$ la forma trigonometrica di $1/z$ è

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\varrho}\big(\cos(-\vartheta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(-\vartheta)\big) .$$

La forma trigonometrica (che corrisponde alle coordinate polari nel piano di Gauss) si rivela molto utile per la facilità con cui si possono calcolare i prodotti.

Proposizione 3.34 : *se $z = \varrho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\vartheta)$ e $w = r(\cos\phi + \mathrm{i}\operatorname{sen}\phi)$ allora*

$$zw = (\varrho r)\big(\cos(\vartheta + \phi) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\vartheta + \phi)\big) , \tag{3.19}$$

cioè il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli, l'argomento del prodotto è la somma degli argomenti.

DIMOSTRAZIONE : basta scrivere il prodotto

$$zw = \varrho r[(\cos\vartheta\cos\phi - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\phi) + \mathrm{i}(\cos\vartheta\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\vartheta\cos\phi)]$$

e ricordare le formule del seno e del coseno della somma (☞ sezione 1.2). ■

Osserviamo che dalla forma trigonometrica dell'inverso si deduce anche (se $w \neq 0$)

$$\frac{z}{w} = \frac{\varrho}{r}\big(\cos(\vartheta - \phi) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\vartheta - \phi)\big)\ .$$

Esempio : se $|z| = 2$ e $\arg z = \pi/4$, e se $|w| = 3$ e $\arg w = \pi/6$, allora

$$zw = 6\Big(\cos\frac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}\Big)\ , \qquad \frac{z}{w} = \frac{2}{3}\Big(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\Big)\ .$$

Corollario 3.35 : *per ogni* $z, w \in \mathbb{C}$ *si ha*
1) $|zw| = |z||w|$
2) $|z + w| \leq |z| + |w|$
3) $|z| \leq |\Re z| + |\Im z|$.

DIMOSTRAZIONE : la prima proprietà è già dimostrata nella proposizione precedente; notiamo poi che la seconda equivale a $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$, cioè

$$(z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|$$

$$z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|\ .$$

Dato che $z\bar{w} + w\bar{z} = z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} = 2\Re(z\bar{w}) \leq 2|z\bar{w}| = 2|z||w|$, anche questa proprietà è dimostrata. Infine, l'ultima segue dalla seconda perché $z = \Re z + \mathrm{i}\Im z$ e $|\mathrm{i}\Im z| = |\Im z|$. ■

La seconda proprietà è la disuguaglianza triangolare in $\mathbb{C}$, che qui si può vedere nel suo significato geometrico (☞ figura 3.1): nel triangolo di vertici 0, z e $z + w$ le lunghezze dei lati sono $|z|$, $|w|$ e $|z + w|$, e come è noto ogni lato non può superare la somma delle lunghezze degli altri due.

Osserviamo ora in particolare cosa accade moltiplicando un numero z per un numero complesso w avente modulo 1 e argomento ϕ: il modulo di zw rimane uguale a $|z|$, quindi zw e z sono sulla stessa circonferenza centrata nell'origine del piano di Gauss, mentre l'argomento di zw aumenta di ϕ rispetto a $\arg z$. Allora, il punto zw si ottiene dal punto z ruotandolo di ϕ in senso antiorario; dunque i numeri complessi di modulo uno agiscono, nei prodotti, come rotazioni del piano di Gauss. Notiamo che qualunque numero complesso non nullo z può essere scritto come prodotto di $|z|$, che è un numero reale positivo, per $z/|z|$, che è un numero complesso di modulo uno e argomento uguale all'argomento di z. Allora la moltiplicazione per z equivale, nel piano di Gauss, ad una rotazione di $\arg z$ seguita da un'omotetia di ragione $|z|$.

Esempio : sapendo che $|w| = 2$, il prodotto zw è il seguente:

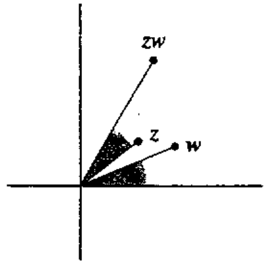


Fig. 3.3 : esempio di prodotto

Se moltiplichiamo fra loro n esemplari del numero z, scritto in forma trigonometrica, otteniamo un'importante conseguenza.

Corollario (formule di de Moivre) 3.36 : *se* $z = \varrho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\vartheta)$, *allora per ogni* $n \in \mathbb{Z}$ *si ha*

$$z^n = \varrho^n\big(\cos(n\vartheta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(n\vartheta)\big)\ . \tag{3.20}$$

Il corollario precedente ci dà la formula della potenza n-esima di z.

Esempio : se $z = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\pi/4)\big)$ allora

$$z^{60} = 2^{30}\Big(\cos\frac{60\pi}{4} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{60\pi}{4}\Big) = 2^{30}\big(\cos(15\pi) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(15\pi)\big) = -2^{30}\ .$$

È chiaramente improponibile trovare z^{60} svolgendo i calcoli interamente in forma algebrica (✎ es. 3.87).

Esempio : ricaviamo un'altra conseguenza; se $z = x + \mathrm{i}y = \cos\vartheta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\vartheta$ è un numero di modulo uno, dalle formule di de Moivre ricaviamo per $n \in \mathbb{N}^+$

$$z^n = \cos(n\vartheta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(n\vartheta)\ , \tag{3.21}$$

mentre dalla formula di Newton (☞ proposizione 3.10) abbiamo

$$z^n = (\cos\vartheta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\vartheta)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos\vartheta)^{n-k}\mathrm{i}^k(\operatorname{sen}\vartheta)^k\ .$$

Poiché $\mathrm{i}^0 = \mathrm{i}^4 = \mathrm{i}^8 = \cdots = \mathrm{i}^{4j} = 1$, $\mathrm{i}^1 = \mathrm{i}^5 = \cdots = \mathrm{i}^{4j+1} = \mathrm{i}$, $\mathrm{i}^2 = \mathrm{i}^6 = \cdots = \mathrm{i}^{4j+2} = -1$, e $\mathrm{i}^3 = \cdots = \mathrm{i}^{4j+3} = -\mathrm{i}$, dividendo la sommatoria negli indici k pari, per i quali i^k è uguale a 1 o -1 , quindi l'addendo corrispondente è reale, e negli indici dispari, per i quali l'addendo è puramente immaginario, otteniamo (ricordiamo che $\lfloor x \rfloor$ è la parte intera di x)

$$z^n = \Big(\sum_{h=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^h \binom{n}{2h} \operatorname{sen}^{2h}\vartheta \cos^{n-2h}\vartheta\Big) + \mathrm{i}\Big(\sum_{h=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^h \binom{n}{2h+1} \operatorname{sen}^{2h+1}\vartheta \cos^{n-2h-1}\vartheta\Big) ,$$

pertanto da (3.21) otteniamo le formule del seno e del coseno di $n\vartheta$ in funzione del seno e del coseno di θ :

$$\cos(n\vartheta) = \sum_{h=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^h \binom{n}{2h} \operatorname{sen}^{2h}\vartheta \cos^{n-2h}\vartheta$$
$$\operatorname{sen}(n\vartheta) = \sum_{h=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^h \binom{n}{2h+1} \operatorname{sen}^{2h+1}\vartheta \cos^{n-2h-1}\vartheta .$$

Ad esempio

$$\begin{cases} \cos(2\vartheta) = \cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta \\ \operatorname{sen}(2\vartheta) = 2\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta \end{cases}$$
$$\begin{cases} \cos(3\vartheta) = \cos^3\vartheta - 3\operatorname{sen}^2\vartheta\cos\vartheta \\ \operatorname{sen}(3\vartheta) = 3\operatorname{sen}\vartheta\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^3\vartheta \end{cases}$$
$$\begin{cases} \cos(4\vartheta) = \cos^4\vartheta - 6\operatorname{sen}^2\vartheta\cos^2\vartheta + \operatorname{sen}^4\vartheta \\ \operatorname{sen}(4\vartheta) = 4\operatorname{sen}\vartheta\cos^3\vartheta - 4\operatorname{sen}^3\vartheta\cos\vartheta . \end{cases}$$

Nella trattazione dei numeri reali, abbiamo introdotto (☞ sezione 1.4) la radice quadrata del numero non negativo x , che è l'unico numero maggiore o uguale a zero che ha quadrato x . Per estendere questa nozione in $\mathbb{C}$ il problema è la mancanza della struttura d'ordine: dato che come numeri complessi non possiamo più dire chi tra 1 e -1 è "maggiore o uguale a zero", come possiamo scegliere uno dei due e chiamarlo "la" radice quadrata di 1 ? La risposta è che non c'è alcun modo sensato di farlo, così in $\mathbb{C}$ non si potrà parlare della radice quadrata (o più in generale di quella n-esima), ma delle radici quadrate, al plurale. D'altra parte, il motivo per introdurre $\mathbb{C}$ era la possibilità di risolvere equazioni tipo $z^2 + 1 = 0$, che siamo riusciti a risolvere trovando $z = \pm\mathrm{i}$, le due radici quadrate di -1 . Il prossimo risultato chiarisce completamente la situazione.

Definizione : *se* $n \in \mathbb{N}^+$ *, un numero complesso* z *si dice radice* n*-esima di* w *se* $z^n = w$.

Teorema 3.37 : *per ciascun valore di* $n \in \mathbb{N}^+$ *, ogni numero complesso diverso da zero ha esattamente* n *radici* n*-esime distinte.*

DIMOSTRAZIONE : se z è una radice n-esima di w allora $z^n = w$, pertanto anche $|z^n| = |w|$; dalla formula (3.20) della potenza n-esima sappiamo che $|z^n| = |z|^n$, pertanto $|z|^n = |w|$. Dato che questa è un'uguaglianza tra numeri reali, ne deduciamo

$$|z| = \sqrt[n]{|w|} .$$

In particolare, se $w = 0$ l'unica radice n-esima di w è zero (l'unico numero di modulo zero). Se invece $w \neq 0$, scriviamo z e w in forma trigonometrica come

$$z = \varrho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\vartheta) , \qquad w = r(\cos\phi + \mathrm{i}\operatorname{sen}\phi) ,$$

così che da (3.20) ricaviamo

$$\varrho^n\big(\cos(n\vartheta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(n\vartheta)\big) = r(\cos\phi + \mathrm{i}\operatorname{sen}\phi) .$$

Già sappiamo che $\varrho^n = r \neq 0$, quindi possiamo semplificare l'uguaglianza precedente e ottenere l'equazione complessa

$$\cos(n\vartheta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(n\vartheta) = \cos\phi + \mathrm{i}\operatorname{sen}\phi$$

che equivale alle due equazioni reali

$$\begin{cases} \cos(n\vartheta) = \cos\phi \\ \operatorname{sen}(n\vartheta) = \operatorname{sen}\phi \end{cases} :$$

dunque gli angoli $n\vartheta$ e ϕ hanno lo stesso seno e lo stesso coseno, pertanto differiscono per un multiplo intero di 2π :

$$n\vartheta = \phi + 2m\pi , \quad m \in \mathbb{Z} .$$

Da questo ricaviamo

$$\vartheta = \frac{\phi}{n} + \frac{2m\pi}{n} .$$

Effettuando la divisione del numero intero m per il numero intero n , troviamo altri due numeri interi h, k tali che:

$$m = hn + k , \qquad k \in \{0, \dots, n-1\} ,$$

ma allora

$$\vartheta = \frac{\phi}{n} + 2h\pi + \frac{2k\pi}{n} .$$

Poiché l'argomento di z è definito a meno di multipli interi di 2π , possiamo tralasciare $2h\pi$ e porre

$$\begin{cases} \vartheta_0 = \dfrac{\phi}{n} \\ \vartheta_1 = \dfrac{\phi}{n} + \dfrac{2\pi}{n} \\ \vdots \\ \vartheta_{n-1} = \dfrac{\phi}{n} + \dfrac{2(n-1)\pi}{n} \end{cases}$$

e per ogni $k = 0, \dots, n-1$

$$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\vartheta_k + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\vartheta_k) \ :$$

questi n numeri hanno argomenti diversi e compresi tra 0 e 2π, quindi sono numeri tutti distinti, e abbiamo dimostrato che sono le uniche possibili radici di w. Poiché si verifica facilmente che la loro potenza n-esima è effettivamente w, il teorema è dimostrato. ■

In conclusione, se $w = r(\cos\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi)$ è diverso da zero le sue n radici n-esime sono date dalla formula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\Big[\cos\Big(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\Big) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\Big(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\Big)\Big], \qquad k = 0, \dots, n-1 .$$

Esempio : le radici cubiche di 1 (modulo 1, argomento 0) sono

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_1 = 1\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 = 1\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{4\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} . \end{cases}$$

Dunque, il simbolo $\sqrt[n]{z}$ non indica un numero complesso (✎ es. 3.89), ma un insieme di numeri complessi, quindi la radice n-esima non è una funzione da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ (semmai è una funzione da $\mathbb{C}$ a $\mathscr{P}(\mathbb{C})$). Un caso speciale è quello $n = 2$, in cui ci sono due radici quadrate i cui argomenti differiscono di π : poiché queste radici sono una l'opposto dell'altra, cioè $z_1 = -z_0$, nel caso $n = 2$ si scrive talvolta $\pm\sqrt{z}$ per indicare le due radici quadrate, intendendo che esse sono più o meno una qualsiasi di esse. Invece, nel caso generale, la scrittura $\sqrt[n]{z}$ indica n numeri diversi, uno per ciascuno degli n valori che può assumere la radice n-esima.

Nel caso particolare $n = 2$, si può trovare la radice quadrata anche senza passare alla forma trigonometrica (che non sempre è agevole da ricavare): infatti, se $w = a + \mathrm{i}b$ e $z = x + \mathrm{i}y$ l'equazione $z^2 = w$ equivale al sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

che, a parte il caso facile in cui w è un numero reale, equivale a

$$\begin{cases} x = b/2y \\ 4y^4 + 4ay^2 - b^2 = 0 . \end{cases}$$

La seconda equazione, ricordando che y è un numero reale e deve avere quadrato non negativo, diviene

$$y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2} - a}{2} ,$$

da cui si ricavano facilmente i valori di y e di $x = b/2y$.

Avendo a disposizione le radici, possiamo risolvere un certo numero di equazioni (➡ appendice 3.14).

la somma delle molteplicità delle radici di un polinomio complesso è pari al grado del polinomio.

Esempio : risolviamo l'equazione di secondo grado a coefficienti complessi; se $a, b, c \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$, vogliamo risolvere l'equazione

$$az^2 + bz + c = 0 .$$

Notiamo che $az^2 + bz + c = a(z^2 + 2bz/2a + b^2/4a^2) + c - b^2/4a$, quindi l'equazione equivale a

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} .$$

Questo significa che $z + b/2a$ è una delle radici quadrate del numero complesso al secondo membro (in generale due, una se il secondo membro è nullo), pertanto

$$z + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(le radici di $4a^2$ sono due, ma il $\pm$ tiene conto di tutti i casi), cioè

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} ,$$

che è la consueta formula ma con un significato diverso: qui la radice esiste sempre, perché siamo in campo complesso, quindi in $\mathbb{C}$ un'equazione di secondo grado ha sempre soluzione.

Esempio : mettiamo in pratica quanto visto per risolvere l'equazione $z^2 - 2z + 2 = 0$; la formula dà

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2\mathrm{i}}{2} = 1 \pm \mathrm{i} \ :$$

le soluzioni sono allora $z = 1 + \mathrm{i}$ e $z = 1 - \mathrm{i}$ (✎ es. 3.91).

Gli esempi precedenti non sono casi isolati: vale infatti il seguente risultato, del quale non diamo la dimostrazione.

Teorema fondamentale dell'algebra 3.38 : *se $P(z)$ è un polinomio di grado n a coefficienti complessi, esso ha almeno una radice complessa; da ciò segue che, se contiamo ogni radice con la sua molteplicità, P ha n radici complesse.*

Il teorema precedente significa che la somma delle molteplicità delle radici di un polinomio complesso è pari al grado del polinomio; questo teorema non vale in $\mathbb{R}$, perché ad esempio il polinomio $x^2 + 1$ ha grado due, ma nessuna radice. Un caso particolare è quello dei polinomi complessi, ma a coefficienti reali.

Proposizione 3.39 : *se $P(z)$ è un polinomio a coefficienti reali, e se z_0 è una radice di P con molteplicità m, allora anche $\bar{z}_0$ è una radice di P, con la stessa molteplicità.*

DIMOSTRAZIONE : dire che z_0 è una radice significa che $P(z_0) = 0$; allora anche il coniugato di $P(z_0)$ è uguale a zero, ma se

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

allora il coniugato di $P(z)$ è $P(\bar{z})$, perché il coniugato di a_k è ancora a_k. Dunque anche $P(\bar{z}_0) = 0$, cioè $\bar{z}_0$ è una radice di P ; allora

$$P(z) = (z - z_0)(z - \bar{z}_0)Q(z)$$

per un opportuno polinomio Q , che ha coefficienti reali perché (verificatelo per esercizio) il polinomio $(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$ è, come P , a coefficienti reali. Se la molteplicità m era maggiore di 1 , il polinomio Q ha ancora z_0 come radice, e si può riapplicare il ragionamento precedente. ■

Osserviamo che le radici n-esime di un numero complesso z

a) hanno tutte lo stesso modulo, quindi nel piano di Gauss sono sulla stessa circonferenza centrata nell'origine, di raggio pari alla radice n-esima del modulo di z

b) hanno argomenti che differiscono per $2\pi/n$, pertanto formano i vertici di un n-agono regolare inscritto nella circonferenza precedente

c) una delle radici ha argomento pari a $1/n$ dell'argomento di z , ed è quindi facilmente individuabile: basta dividere in n parti l'angolo tra il semiasse reale positivo e la semiretta per z uscente dall'origine (✎ es. 3.92).

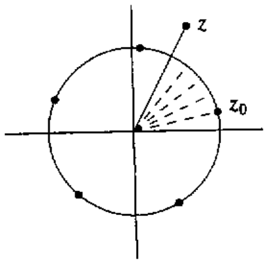


Fig. 3.4 : radici quinte di z

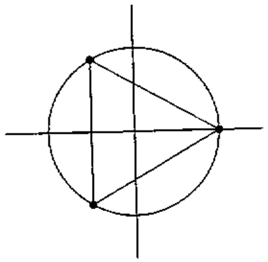


Fig. 3.5 : radici cubiche di 1

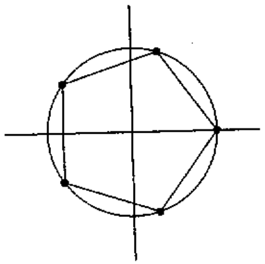


Fig. 3.6 : radici quinte di 1

In particolare, le radici n-esime di 1 sono i vertici dell'n-agono regolare inscritto nella circonferenza unitaria e avente un vertice in $(1, 0)$.

Osservazione : dette $1, e_1, \ldots, e_{n-1}$ le radici n-esime dell'unità, se z è una delle radici n-esime di un numero w le altre radici n-esime di w sono $ze_1, \ldots, ze_{n-1}$;

Concludiamo il capitolo con un'ulteriore notazione dei numeri complessi: se, con una scelta di simboli le cui ragioni saranno spiegate più avanti, ☞ formula (A9.7), poniamo per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$$

abbiamo definito una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ che risulta periodica di periodo 2π (in particolare, da $e^{ir} = e^{is}$ non segue $r = s$, ma solo $r = s + 2k\pi$). Allora il numero complesso di modulo ϱ e argomento ϑ può essere scritto in forma abbreviata come

$$\varrho e^{i\vartheta} .$$

Questa è la notazione esponenziale (➡ appendice 3.15), ed ha la sua ragione d'essere nel fatto che la formula del prodotto (3.19) e quella della potenza (3.20) danno rispettivamente

$$\varrho e^{i\vartheta} \cdot r e^{i\phi} = \varrho r e^{i(\vartheta + \phi)} , \qquad \left(\varrho e^{i\vartheta}\right)^n = \varrho^n e^{in\vartheta} ,$$

proprio come si avrebbe usando formalmente le proprietà dell'esponenziale (come vedremo, non è un caso). Non bisogna però cadere nell'errore di eseguire le radici allo stesso modo: da $\varrho^n e^{in\vartheta} = r e^{i\phi}$ non segue che $\vartheta = \phi/n$, ma solo (come detto sopra) $\vartheta = (\phi + 2k\pi)/n$.

Esempio : $e^{i\pi} = -1$, $e^{2i\pi} = 1$, $2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}$.

Esercizi relativi al capitolo 3

Esercizio 3.1 : esplicitate le seguenti sommatorie, e calcolatene il risultato:

a) $\sum_{j=3}^{6} \frac{j+1}{2}$
b) $\sum_{i=0}^{10}(2i+3)$
c) $\sum_{i=2}^{2} 3i$
d) $\sum_{i=0}^{10} 1$.

Esercizio 3.2 : scrivete in forma compatta le seguenti somme:

a) $1+2+3+\cdots+30$ $\sum_{n=1}^{30} n$
b) $2+4+6+\cdots+30$ $\sum_{n=1}^{15} 2n$
c) $3^2+5^2+7^2+\cdots+15^2$.
9 25 49

Esercizio 3.3 : provate che la somma dei quadrati dei numeri interi da 0 ad n vale $n(n+1)(2n+1)/6$; provate poi che la somma dei cubi dei numeri interi da 0 ad n vale $[n(n+1)/2]^2$ (➡ appendice 3.2).

Esercizio 3.4 : dimostrate che l'assioma 3.1 e la proposizione 3.2 sono equivalenti.

Esercizio 3.5 : dimostrate che l'assioma 3.1 e la proposizione 3.3 sono equivalenti.

Esercizio 3.6 : dimostrate che l'assioma 3.1 e la proposizione 3.4 sono equivalenti.

Esercizio 3.7 : provate per induzione che:

a) $\forall n,\ 3^n \geq \frac{n}{2}2^n$
b) $\forall n,\ 3^n \geq n2^n$
c) $\forall n \geq 2,\ 2^n+4^n \leq 5^n$
d) $\forall n \geq 6,\ n^n \geq 2^n n!$.

Esercizio 3.8 : provate che la proposizione $2^n \geq n^2$ è induttiva per $n \geq 3$; per quali valori di n la proposizione è vera?

Esercizio 3.9 : dimostrate che ogni sottoinsieme non vuoto e finito (cioè con un numero finito di elementi) di $\mathbb{N}$ ha massimo, senza guardare la dimostrazione della proposizione 3.28 (suggerimento: tentate per induzione sul numero n di elementi).

Esercizio 3.10 : provate più in generale che ogni sottoinsieme finito e non vuoto di un insieme totalmente ordinato ha massimo (sempre senza guardare la dimostrazione della proposizione 3.28).

Esercizio 3.11 : dimostrate la proposizione 3.6.

Esercizio 3.12 : dimostrate la proposizione 3.7.

Esercizio 3.13 : usando la definizione (3.2), dimostrate la formula (3.3).

Esercizio 3.14 : dimostrate la disuguaglianza (3.6).

Esercizio 3.15 : dimostrate per induzione la formula (3.7) sulla somma di una progressione geometrica.

Esercizio 3.16 : dimostrate la formula (3.7) senza usare il principio di induzione (suggerimento: moltiplicate per $1-q$).

Esercizio 3.17 : provate che $(ab+cd)^2 \leq (a^2+c^2)(b^2+d^2)$; usate questo risultato per dimostrare per induzione la disuguaglianza di Schwarz

$$\forall n \in \mathbb{N}^+,\ \forall \{a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n\},\quad \left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

(c'è anche un altra dimostrazione senza induzione: sviluppando $\sum_{i=1}^{n}(a_i+xb_i)^2$ si ottiene un trinomio in x che è sempre maggiore o uguale a zero, quindi ...).

Esercizio 3.18 : calcolate $\sum_{k=7}^{20} 2^k$.

Esercizio 3.19 : dite quanti sottoinsiemi con k elementi ha un insieme con n elementi. $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Esercizio 3.20 : siano A e B due insiemi, rispettivamente con k elementi e con n elementi; provate che il numero di applicazioni da A a B è n^k .

Esercizio 3.21 : siano A e B come sopra; provate che il numero di applicazioni iniettive da A a B è $\binom{n}{k}k!$.

Esercizio 3.22 : siano A e B come sopra; provate che il numero delle immagini di A tramite applicazioni iniettive è $\binom{n}{k}$.

Esercizio 3.23 : usando la formula del binomio di Newton dimostrate che se a è un numero reale positivo

$$\forall n \geq 1,\ (1+a)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}a^2 .$$

Esercizio 3.24 : dimostrate la proposizione 3.8.

Esercizio 3.25 : ricordando l'esercizio 3.19, dite quanti elementi ha $\mathscr{P}(A)$ se A ha n elementi.

Esercizio 3.26 : dite quanti sono i numeri formati da quattro cifre tutte diverse fra loro, e quanti di essi non cominciano per zero.

Esercizio 3.27 : tra tutti i numeri di quattro cifre, dite:
a) quanti hanno le cifre disposte in ordine crescente
b) quanti hanno due cifre pari e due dispari, tutte distinte
c) quanti hanno due cifre pari e due dispari.

Esercizio 3.28 : dite in quanti modi si possono disporre in fila $n+2$ palline, n blu e due rosse, con la condizione che sia al primo che all'ultimo posto vanno palline blu.

Esercizio 3.29 : in questo e nei prossimi due esercizi, il mazzo di carte è quello standard da poker, con 32 carte. Dite qual è la probabilità (numero dei casi favorevoli diviso numero totale dei casi possibili) di avere una qualsiasi scala reale servita, quale di avere (sempre servito) un poker, o un colore, un full, una qualsiasi scala, un tris, una doppia coppia, una coppia, o di non avere niente (cioè avere un punteggio inferiore alla coppia).

Esercizio 3.30 : avendo tris servito, è meglio scartare una carta o due carte? E se sbirciando le carte di un altro giocatore avete visto che non potrete fare poker?

Esercizio 3.31 : avendo coppia e scartando tre carte, quali sono le probabilità di realizzare doppia coppia, tris, full o poker?

Esercizio 3.32 : dimostrate per induzione la disuguaglianza di Bernoulli (3.9).

Esercizio 3.33 : risolvete l'esercizio 3.7 usando la disuguaglianza di Bernoulli.

Esercizio 3.34 : controllando la dimostrazione dell'esercizio 3.32, verificate che se $a \neq 0$ ed $n \geq 2$ la disuguaglianza in (3.9) diventa stretta.

Esercizio 3.35 : usando la disuguaglianza di Bernoulli provate la (3.10).

Esercizio 3.36 : provate la disuguaglianza (3.11).

Esercizio 3.37 : provate che la formula (3.11) equivale alla seguente:

$$\forall c > 0,\ \forall 0 < \varepsilon < c,\ \forall n \in \mathbb{N}^+,\ (c+\varepsilon)^n - (c-\varepsilon)^n \leq 2^n c^{n-1} \varepsilon .$$

Esercizio 3.38 : pensate a tutti i tipi di operazioni che conoscete e dite quali sono le loro proprietà, prima di leggere gli esempi o i prossimi esercizi.

Esercizio 3.39 : trovate un esempio di operazione interna senza elemento neutro.

Esercizio 3.40 : provate che se un insieme ha un elemento neutro rispetto ad un'operazione, tale elemento è unico (cioè: se ce n'è un altro, coincide con il precedente).

Esercizio 3.41 : provate che se un elemento x ha inverso rispetto ad un'operazione, tale inverso è unico.

Esercizio 3.42 : dite di quali proprietà delle operazioni godono i connettivi logici; in particolare, c'è l'elemento neutro? Se sì, chi è?

Esercizio 3.43 : dite di quali proprietà delle operazioni godono le operazioni di unione e intersezione in $\mathscr{P}(A)$.

Esercizio 3.44 : dite se la composizione di funzioni è un'operazione interna, almeno per un'opportuna scelta dei domini e dei codomini, e di che proprietà gode.

Esercizio 3.45 : se lo conoscete, dite se il prodotto di matrici (di dimensioni opportune) è un'operazione interna, e di che proprietà gode.

Esercizio 3.46 : dite quali sono le proprietà del prodotto in $\mathbb{N}$ e in $\mathbb{Z}$.

Esercizio 3.47 : provate che sulle frazioni la relazione $m/n \simeq p/q \iff mq = np$ è di equivalenza.

Esercizio 3.48 : provate che $\mathbb{Q}$ è un gruppo rispetto alla somma, e che $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ lo è rispetto al prodotto.

Esercizio 3.49 : provate che $\sqrt{2}$ non è razionale (suggerimento: se fosse $\sqrt{2} = m/n$, con m/n ridotta ai minimi termini, elevate al quadrato e cercate di mostrare che m ed n devono essere entrambi pari). Più in generale, provate che se $n \in \mathbb{N}$ allora $\sqrt{n}$ o è intero o è irrazionale, e che se n è un numero primo allora certamente $\sqrt{n}$ è irrazionale.

Esercizio 3.50 : provate che i numeri $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ e $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ sono irrazionali.

Esercizio 3.51 : in questo e nel prossimo esercizio, al posto dei numeri potremmo lavorare in un generico campo $\mathbb{K}$, con le operazioni $+$ e $\cdot$, e sostituire i numeri 0 ed 1 con e_+ ed $e.$ (i rispettivi elementi neutri). Provate che $a \cdot (-1) = -a$, cioè che un numero, moltiplicato per l'opposto di 1 , dà l'opposto del numero stesso.

Esercizio 3.52 : provate che $(-1)\cdot(-1) = 1$, e che $(-a)\cdot(-b) = a \cdot b$.

Esercizio 3.53 : provate che se si aggiungono ad $\mathbb{R}$ i simboli $+\infty$ e $-\infty$ non è possibile definire somma e prodotto mantenendo le proprietà di corpo commutativo.

Esercizio 3.54 : dimostrate la proposizione 3.14.

Esercizio 3.55 : scrivete la definizione, le proprietà e le caratterizzazioni dell'estremo inferiore, ricalcando quelle dell'estremo superiore.

Esercizio 3.56 : dimostrate la proposizione 3.16, e utilizzatela per dimostrare rapidamente le proprietà dell'estremo inferiore.

Esercizio 3.57 : provate che la caratterizzazione (3.13) continua a valere in $\overline{\mathbb{R}}$. Provate poi che ogni sottoinsieme non vuoto di $\overline{\mathbb{R}}$ ha estremo superiore.

Esercizio 3.58 : provate che $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$, e trovate la formula analoga per l'estremo inferiore.

Esercizio 3.59 : provate che se $A \cap B \neq \emptyset$ si ha $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$, e trovate un esempio in cui non vale l'uguaglianza; trovate poi la formula analoga per gli estremi inferiori.

Esercizio 3.60 : terminate la dimostrazione della proposizione 3.19.

Esercizio 3.61 : determinate sia l'estremo superiore che l'estremo inferiore dell'insieme $\{(n+n^2)/(n-1) : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$, dicendo se sono massimo e minimo.

Esercizio 3.62 : provate che gli insiemi $[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$ e $]a,b[$ sono intervalli.

Esercizio 3.63 : dimostrate il lemma 3.26.

Esercizio 3.64 : terminate la dimostrazione dell'osservazione 3.27.

Esercizio 3.65 : provate che un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con un numero finito $n > 1$ di elementi non può essere un intervallo.

Esercizio 3.66 : provate che se A è denso in $\mathbb{R}$ allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $A \cap]0,1[$ contiene almeno n punti.

Esercizio 3.67 : provate che la somma in $\mathbb{C}$ ha tutte le proprietà della somma fra numeri reali.

Esercizio 3.68 : provate che il prodotto in $\mathbb{C}$ è commutativo, associativo e distributivo rispetto alla somma.

Esercizio 3.69 : calcolate:
a) $(2-\mathrm{i})+(1+3\mathrm{i})$
b) $(2-\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})$
c) $-\mathrm{i}(2-\mathrm{i})+(3-\mathrm{i})(\mathrm{i}+2)$.

Esercizio 3.70 : provate che l'inverso di $a+ib$ è $\dfrac{a}{a^2+b^2}-\mathrm{i}\dfrac{b}{a^2+b^2}$.

Esercizio 3.71 : usando la formula precedente, trovate l'inverso di $2-3\mathrm{i}$.

Esercizio 3.72 : dimostrate le proprietà della parte reale, della parte immaginaria e del coniugato enunciate nel testo.

Esercizio 3.73 : calcolate la parte reale, la parte immaginaria e il coniugato del numero $\mathrm{i}(2\mathrm{i}-3)+(\mathrm{i}-1)\overline{(3+4\mathrm{i})}$.

Esercizio 3.74 : calcolate $3z-\mathrm{i}\bar{z}+(2+\mathrm{i})z^2$ se $z=1-\mathrm{i}$.

Esercizio 3.75 : calcolate $|3\mathrm{i}+5|$, $|-6\mathrm{i}|$, $|-\mathrm{i}+4|$.

Esercizio 3.76 : disegnate nel piano di Gauss l'insieme $A \cap B$, dove $A=\{z \in \mathbb{C} : |z|=1\}$ e $B=\{z \in \mathbb{C} : \Re z > 1/2\}$.

Esercizio 3.77 : calcolate $\dfrac{3z-\mathrm{i}|z|^2-(2-\mathrm{i})\bar{z}}{2\Re z-\Im z}$ se $z=2+\mathrm{i}$.

Esercizio 3.78 : calcolate $\Im\Big(\mathrm{i}z\bar{z}+\dfrac{|z|^2}{z}\Big)$ se $z=1+3\mathrm{i}$.

Esercizio 3.79 : calcolate:
a) $1/(2-3\mathrm{i})$
b) $(2-\mathrm{i})/\overline{(3+\mathrm{i})}$
c) $\dfrac{2+\mathrm{i}-\overline{(3-\mathrm{i})}}{3\mathrm{i}+1}$
d) $\dfrac{\mathrm{i}z-2\bar{z}}{\mathrm{i}+z}$ se $z=3+\mathrm{i}$
e) $\Re\Big(\dfrac{|z|^2-2\bar{z}}{\mathrm{i}z}\Big)$ se $z=2+\mathrm{i}$.

Esercizio 3.80 : trovate le soluzioni (z,w) , con $z,w \in \mathbb{C}$, dei sistemi

a) $\begin{cases} z\bar{w}=\mathrm{i} \\ |z|^2w+z=1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} z+w=1+\mathrm{i} \\ |w|^2+\bar{z}=1-\mathrm{i} \end{cases}$
c) $\begin{cases} z^2-\bar{z}^2=4\mathrm{i} \\ (1+\mathrm{i})z=(1-\mathrm{i})\bar{z} \, . \end{cases}$

Esercizio 3.81 : risolvete l'equazione $z^2=\bar{z}$, e rappresentatene le eventuali soluzioni nel piano di Gauss.

Esercizio 3.82 : dite (questa volta è proprio "dite", non "dimostrate") se $\arg\min(7+125\mathrm{i})$ appartiene a $[0,\pi/6]$, $[\pi/6,\pi/3]$ o $[\pi/3,\pi/2]$.

Esercizio 3.83 : trovate l'argomento di $-3-3\mathrm{i}$ e l'argomento di $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Esercizio 3.84 : esprimete in forma trigonometrica il numero complesso $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ e il numero complesso $-\mathrm{i}$.

Esercizio 3.85 : esprimete in forma algebrica il numero complesso che ha modulo 3 e argomento $16\pi/3$, e disegnatelo nel piano di Gauss.

Esercizio 3.86 : moltiplicate e dividete tra loro i numeri scritti in forma trigonometrica nell'esercizio 3.84, e fate la verifica eseguendo le operazioni in forma algebrica.

Esercizio 3.87 : scrivete il cubo e la decima potenza di $z=2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$, esprimendo poi il risultato sia in forma trigonometrica che in forma algebrica.

Esercizio 3.88 : se $z=1+\mathrm{i}$, calcolate $\bar{z}\,z^7$.

Esercizio 3.89 : scrivete le radici cubiche di $\mathrm{i}-1$ e le radici quarte di $-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Esercizio 3.90 : trovate $|w-2|$, dove w è la soluzione dell'equazione $w^3=1$ tale che $\Im w > 0$.

Esercizio 3.91 : risolvete le seguenti equazioni:
a) $z^2-2\mathrm{i}z-(3+\mathrm{i}\sqrt{3})/2=0$
b) $z^2+z+(3+2\mathrm{i}\sqrt{3})/4=0$.

Esercizio 3.92 : disegnate nel piano di Gauss:
a) le radici quadrate di $1-\mathrm{i}$
b) le soluzioni dell'equazione $z^4=2z$
c) le radici quinte di i
d) il poligono che ha come vertici le soluzioni delle equazioni $z^2=\mathrm{i}$ e $z^2=-2\mathrm{i}$.

Appendice al capitolo 3

Appendice 3.1 - Costruzione di $\mathbb{N}$ dagli assiomi di Peano

Il principio di induzione, con qualche altra proposizione, può essere preso come definizione dei numeri naturali, in questo senso: per semplicità, abbiamo supposto che esistano i numeri naturali con le proprietà di somma, prodotto e ordine che ben conosciamo, ma in realtà possiamo far discendere (faticosamente) tutto dagli assiomi di Peano. Quella che presentiamo è una tra le varie forme in cui possiamo trovarli.

Assiomi di Peano : *esiste una terna* $(\mathbb{N}, 0, \sigma)$ *con le seguenti proprietà:*
1) $\mathbb{N}$ *è un insieme*
2) 0 *è un elemento di* $\mathbb{N}$
3) σ *è un'applicazione da* $\mathbb{N}$ *in* $\mathbb{N}$ *tale che:*
   3a) σ *è iniettiva*
   3b) $0 \notin \sigma(\mathbb{N})$
   3c) *se* $S \subseteq \mathbb{N}$ *è tale che* $0 \in S$ *e* $\sigma(S) \subset S$ *allora* $S = \mathbb{N}$.

Gli assiomi di Peano, dunque, postulano l'esistenza di un certo insieme; vedremo più avanti, ☞ proposizione A3.3, che essenzialmente l'unico insieme che verifica queste proprietà sono i numeri naturali che conosciamo. Facciamo anzitutto un po' di osservazioni.

Da 2) segue in particolare che $\mathbb{N} \neq \varnothing$.

L'applicazione σ si chiama abitualmente "successore", e conviene pensarla come l'applicazione che ad n associa $n+1$; peraltro, chi è $n+1$, visto che negli assiomi di Peano la somma non è nominata? La definiremo noi più avanti, dopo le osservazioni.

Se togliamo una delle proprietà di σ, possiamo costruire degli insiemi che verificano tutte le proprietà rimanenti, ma sono ben diversi dai "nostri" numeri naturali; volendo, si può trovarli per esercizio, evitando di leggere gli esempi riportati di seguito:

a) se eliminiamo 3a), l'insieme $N = \{0, 1\}$ con l'applicazione σ definita da $\sigma(0) = \sigma(1) = 1$ verifica 3b) e 3c) (questa affermazione, come molte altre nel seguito, va controllata per esercizio);
b) se eliminiamo 3b), l'insieme $N = \{0\}$, con l'applicazione $\sigma(0) = 0$, verifica 3a) e 3c);
c) se eliminiamo 3c), l'insieme che risulta deve per forza contenere qualcosa di simile ad $\mathbb{N}$, perciò costruiamo un esempio aggiungendo qualcosa ad $\mathbb{N}$: poniamo $N = \mathbb{N} \cup \{a\}$, e definiamo σ ponendo $\sigma(a) = a$, e $\sigma(n) = n+1$ per $n \in \mathbb{N}$: questo insieme è ben diverso dai naturali (non verifica il principio di induzione!), e potremmo costruirne altri che contengono non uno, ma infiniti punti più di $\mathbb{N}$.

Precisiamo cosa abbiamo inteso dire sopra a proposito dell'individuazione di $\mathbb{N}$ tramite gli assiomi di Peano.

Proposizione A3.1 : *se* $(\mathbb{N}, 0, \sigma)$ *verifica gli assiomi di Peano,* $\sigma(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

DIMOSTRAZIONE : per la proprietà 3b), è equivalente provare che $\{0\} \cup \sigma(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$; basta porre $S = \{0\} \cup \sigma(\mathbb{N})$ e applicare 3c). ∎

Dalla proposizione precedente segue che per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esiste un altro elemento di $\mathbb{N}$, che indichiamo con n^-, tale che $n = \sigma(n^-)$; tale elemento (il "predecessore" di n, svolge il ruolo di $n-1$) è unico per l'iniettività di σ.

Proposizione A3.2 : *le proposizioni* 3.5 e 3.6 *continuano a valere, con* $\sigma(n)$ *al posto di* $n+1$.

La dimostrazione è un esercizio. Anche la proposizione 3.7 continua a valere, ma la notazione è un po' complicata (occorre sostituire $n+k$ con $(\sigma \circ \cdots \circ \sigma)(n)$, dove la composizione è fatta k volte).

Proposizione A3.3 : *se* $(\mathbb{N}', 0', \sigma')$ *è un'altra terna che verifica le proprietà* 1), 2) *e* 3), *allora esiste un isomorfismo tra* $(\mathbb{N}, 0, \sigma)$ *ed* $(\mathbb{N}', 0', \sigma')$, *cioè esiste una (unica) applicazione biunivoca* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ *tale che*

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0' \\ \varphi(\sigma(n)) = \sigma'(\varphi(n)) . \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE : basta prendere la formula come definizione di φ e applicare la proposizione precedente per avere che φ è definita su tutto $\mathbb{N}$; per vedere che φ è surgettiva, poniamo $S' = \varphi(\mathbb{N})$: si ha $0' \in S'$, e (verificatelo) $\sigma'(S') \subset S'$, quindi $S' = \mathbb{N}'$ per la proprietà 3c) di σ'. L'iniettività di φ è un pochino più delicata, e va dimostrata usando il principio 3c), come d'altra parte tutto il resto: 3c) è l'unico strumento dimostrativo che abbiamo a disposizione! Poniamo

$$S = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(m) = \varphi(n) \text{ solo per } m = n\} ,$$

e osserviamo che $0 \in S$, per la proposizione A3.1 applicata in $\mathbb{N}'$ (questo va verificato). Che $\sigma(S) \subset S$ rimane interamente per esercizio. ■

Non dobbiamo pensare che la proposizione precedente dica che esiste un solo insieme che verifica gli assiomi di Peano: un esempio è l'insieme $\mathbb{N}'$ dei naturali pari, con $0' = 0$ e $\sigma'(n) = n + 2$.

Per indicare il successore di n, al posto della scrittura $\sigma(n)$ useremo d'ora in poi il simbolo n^+.

Imbarchiamoci nella definizione della somma e nella verifica delle sue proprietà. Dovremo fare tutto quanto (c'è bisogno di dirlo?) per induzione.

Definiamo dunque un'applicazione $s_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la somma tra numeri naturali; anziché $s_{\mathbb{N}}(m, n)$, scriveremo $m \underset{\mathbb{N}}{\oplus} n$. Poniamo per ogni $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} m \underset{\mathbb{N}}{\oplus} 0 = m \\ m \underset{\mathbb{N}}{\oplus} (n^+) = (m \underset{\mathbb{N}}{\oplus} n)^+ , \end{cases}$$

dove l'ultima riga è la traduzione di "$m + (n + 1) = (m + n) + 1$" nel linguaggio che possediamo sinora (privo delle operazioni). Occorre fare una serie di verifiche, alcune delle quali sono lasciate per esercizio con qualche suggerimento:

Passo 1 : *la somma è definita su* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Questo equivale a provare che, per ogni fissato $m \in \mathbb{N}$, l'applicazione $n \mapsto m \underset{\mathbb{N}}{\oplus} n$ è definita su tutto $\mathbb{N}$, e questo si fa al solito modo, chiamando S il dominio di quest'ultima applicazione e mostrando per induzione che S è tutto $\mathbb{N}$.

Passo 2 : *la somma è associativa, cioè*

$$\forall k, m, n \in \mathbb{N}, \ (k \underset{\mathbb{N}}{\oplus} m) \underset{\mathbb{N}}{\oplus} n = k \underset{\mathbb{N}}{\oplus} (m \underset{\mathbb{N}}{\oplus} n) .$$

Fissati $k, m \in \mathbb{N}$ poniamo $S = \{n \in \mathbb{N} : (k \underset{\mathbb{N}}{\oplus} m) \underset{\mathbb{N}}{\oplus} n = k \underset{\mathbb{N}}{\oplus} (m \underset{\mathbb{N}}{\oplus} n)\}$; dobbiamo solo provare che $S = \mathbb{N}$. Questo secondo passo permette di non scrivere le parentesi.

Passo 3 : 0 *è l'elemento neutro di* $\underset{\mathbb{N}}{\oplus}$, *cioè* $\forall n \in \mathbb{N}, \ n \underset{\mathbb{N}}{\oplus} 0 = 0 \underset{\mathbb{N}}{\oplus} n = n$.

Passo 4 : *la somma è commutativa.*

Questo è il passo più delicato; poniamo $S = \{m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, \ m \underset{\mathbb{N}}{\oplus} n = n \underset{\mathbb{N}}{\oplus} m\}$: per il passo 3, sappiamo che $0 \in S$. Proviamo ora che se $m \in S$ anche $m^+ \in S$: poniamo $S_m = \{n \in \mathbb{N} : m^+ \underset{\mathbb{N}}{\oplus} n = n \underset{\mathbb{N}}{\oplus} m^+\}$. Sempre per il passo 3 si ha $0 \in S_m$; inoltre, se $n \in S_m$ abbiamo

$$\begin{aligned} m^+ \underset{\mathbb{N}}{\oplus} n^+ &= (m^+ \underset{\mathbb{N}}{\oplus} n)^+ && (\text{definizione di } \underset{\mathbb{N}}{\oplus}) \\ &= (n \underset{\mathbb{N}}{\oplus} m^+)^+ && (n \in S_m) \\ &= \left((n \underset{\mathbb{N}}{\oplus} m)^+\right)^+ && (\text{definizione di } \underset{\mathbb{N}}{\oplus}) \\ &= \left((m \underset{\mathbb{N}}{\oplus} n)^+\right)^+ && (m \in S) \\ &= (m \underset{\mathbb{N}}{\oplus} n^+)^+ && (\text{definizione di } \underset{\mathbb{N}}{\oplus}) \\ &= (n^+ \underset{\mathbb{N}}{\oplus} m)^+ && (m \in S) \\ &= n^+ \underset{\mathbb{N}}{\oplus} m^+ , && (\text{definizione di } \underset{\mathbb{N}}{\oplus}) \end{aligned}$$

ovvero $n^+ \in S_m$. Allora $S_m = \mathbb{N}$, cioè $m^+ \in S$, e questo prova che $S = \mathbb{N}$.

Indubbiamente, questa faccenda della definizione della somma è stata un po' pesante, ma è interessante perché mostra che la somma non è necessariamente un concetto primitivo, ma può essere definita (come abbiamo fatto) a partire dagli assiomi di Peano, e possiede tutte le proprietà che già conoscevamo.

Dopo la somma, possiamo introdurre il prodotto in $\mathbb{N}$ ponendo

$$\begin{cases} m \underset{\mathbb{N}}{\odot} 0 = 0 \\ m \underset{\mathbb{N}}{\odot} (n^+) = (m \underset{\mathbb{N}}{\odot} n) \underset{\mathbb{N}}{\oplus} m , \end{cases}$$

dove l'ultima riga traduce "$m \cdot (n+1) = m \cdot n + m$". Chi a questo punto ha il coraggio di enunciare e dimostrare tutte le proprietà del prodotto (associativa, elemento neutro, commutativa, distributiva)?

L'ultima struttura che introduciamo è l'ordine:

$$n \underset{\mathbb{N}}{\leq} m \iff \exists k \in \mathbb{N} : m = n \underset{\mathbb{N}}{\oplus} k .$$

Non è difficile (ma noioso, naturalmente) verificare che si tratta di una relazione d'ordine, con le consuete proprietà che la legano alla somma e al prodotto.

Facciamo ancora un'osservazione: anziché partire dagli assiomi di Peano, potremmo definire $\mathbb{N}$ a partire soltanto dall'esistenza di un insieme infinito, e chiamare "numeri naturali" le cardinalità degli insiemi finiti, cioè le classi di equivalenza degli insiemi finiti rispetto alla relazione di equivalenza definita dall'equipotenza fra insiemi (☞ appendice 3.11).

Appendice 3.2 - Formula per la somma delle potenze k-esime

Il principio di induzione permette di dimostrare le formule che danno la somma degli interi, dei loro quadrati, eccetera, ma solo una volta che le abbiamo indovinate. È necessario, cioè, conoscere già la formula che si vuole dimostrare. Vediamo come si possono ricavare le formule per la somma delle potenze intere positive dei numeri naturali.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ poniamo $N_k(n) = \sum_{i=0}^{n} i^k$: ad esempio, sappiamo che $N_0(n) = n+1$, che $N_1(n) = n(n+1)/2$, sappiamo anche le formule per N_2 ed N_3. Fissiamo k, supponiamo di conoscere già le formule per $N_0, \ldots, N_{k-1}$, e mostriamo come si ricava quella per N_k : se ci riusciamo, possiamo ricavare le formule di tutti gli N_k, per la seconda forma del principio di induzione 3.3. Abbiamo

$$N_{k+1}(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} i^{k+1} = \sum_{i=1}^{n+1} i^{k+1} = \sum_{j=0}^{n} (j+1)^{k+1} ,$$

dove abbiamo sostituito $i = j+1$; usando la formula di Newton (3.8) otteniamo

$$\cdots = \sum_{j=0}^{n} \sum_{h=0}^{k+1} \binom{k+1}{h} j^h = \sum_{h=0}^{k+1} \left[\binom{k+1}{h} \sum_{j=0}^{n} j^h \right] = \sum_{h=0}^{k+1} \binom{k+1}{h} N_h(n) .$$

Isolando i due termini della somma che corrispondono ad $h = k+1$ e $h = k$,

$$\cdots = N_{k+1}(n) + (k+1)N_k(n) + \sum_{h=0}^{k-1} \binom{k+1}{h} N_h(n) ;$$

d'altra parte $N_{k+1}(n+1)$, che è la somma delle potenze $(k+1)$-esime dei numeri fino ad $n+1$, è uguale a $N_{k+1}(n) + (n+1)^{k+1}$, quindi possiamo ricavare dall'uguaglianza precedente

$$(n+1)^{k+1} = (k+1)N_k(n) + \sum_{h=0}^{k-1} \binom{k+1}{h} N_h(n) ,$$

da cui

$$N_k(n) = \frac{1}{k+1} \left[(n+1)^{k+1} - \sum_{h=0}^{k-1} \binom{k+1}{h} N_h(n) \right] .$$

Ad esempio, per $k = 4$ si ricava

$$N_4(n) = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) .$$

Appendice 3.3 - Costruzione di $\mathbb{Z}$

Vediamo come si può costruire $\mathbb{Z}$, con relative operazioni, a partire da $\mathbb{N}$. Poiché ogni numero intero si può pensare come differenza tra due numeri naturali (ad esempio n e zero, se $n \geq 0$, zero e $-n$ se $n < 0$, nel qual caso $-n \in \mathbb{N}$), e questo si può fare in infiniti modi (con $(n+1)-1$, $(n+2)-2$ eccetera), potremmo definire gli interi come le differenze tra numeri naturali; d'altra parte, sui numeri naturali non abbiamo definito la differenza. Allora, al posto della differenza tra m ed n consideriamo la coppia $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, e pensiamo che questa coppia rappresenti il numero $m-n$: per evitare però l'indeterminazione accennata sopra (la stessa differenza è data anche dalla coppia $(m+1, n+1)$, ad esempio), introduciamo in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ una relazione di equivalenza: poniamo

$$(m_1, n_1) \simeq (m_2, n_2) \iff m_1 \underset{\mathbb{N}}{\oplus} n_2 = m_2 \underset{\mathbb{N}}{\oplus} n_1 .$$

Verificate per esercizio che questa è una relazione di equivalenza; poiché due coppie sono equivalenti se danno origine alla stessa differenza (☞ esercizio 2.88), le classi di equivalenza potrebbero essere rappresentate dai numeri interi (se li conoscessimo già), che sono tutte le differenze tra numeri naturali. Definiamo allora gli interi come l'insieme quoziente

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \simeq ,$$

cioè l'insieme delle classi di equivalenza delle coppie di numeri naturali: il numero intero che noi chiamiamo -1 è dunque definito come $[(0,1)]$, la classe di equivalenza di $(0,1)$.

Introduciamo in $\mathbb{Z}$ la somma, il prodotto e l'ordine utilizzando la fatica già fatta in $\mathbb{N}$: per esercizio, potete indovinare le definizioni (in cui non devono comparire differenze!) prima di guardarle qui sotto.

Poniamo

$$[(m_1,n_1)] \underset{\mathbb{Z}}{\oplus} [(m_2,n_2)] = [(m_1 \underset{\mathbb{N}}{\oplus} m_2, n_1 \underset{\mathbb{N}}{\oplus} n_2)]$$

$$[(m_1,n_1)] \underset{\mathbb{Z}}{\odot} [(m_2,n_2)] = \left[\left((m_1 \underset{\mathbb{N}}{\odot} m_2) \underset{\mathbb{N}}{\oplus} (n_1 \underset{\mathbb{N}}{\odot} n_2), (m_1 \underset{\mathbb{N}}{\odot} n_2) \underset{\mathbb{N}}{\oplus} (m_2 \underset{\mathbb{N}}{\odot} n_1) \right) \right]$$

$$[(m_1,n_1)] \underset{\mathbb{Z}}{\circledleq} [(m_2,n_2)] \iff (m_1 \underset{\mathbb{N}}{\oplus} n_2) \underset{\mathbb{N}}{\circledleq} (m_2 \underset{\mathbb{N}}{\oplus} n_1) .$$

Per esercizio, verificate che tutte queste definizioni sono ben poste, cioè dipendono solo dalle classi di equivalenza (che sono quelle che compaiono al primo membro) e non dai particolari rappresentanti che usiamo al secondo membro; verificate poi che le operazioni godono delle proprietà che ci aspettiamo, e che la relazione d'ordine è davvero tale.

Per comodità poniamo

$$0_{\mathbb{Z}} = [(0,0)] , \qquad 1_{\mathbb{Z}} = [(1,0)] , \qquad \underset{\mathbb{Z}}{\ominus} [(m,n)] = [(n,m)] ,$$

così $0_{\mathbb{Z}}$ è l'elemento neutro della somma, $1_{\mathbb{Z}}$ quello del prodotto, e se $k \in \mathbb{Z}$ il suo opposto è $\underset{\mathbb{Z}}{\ominus} k$.

Osserviamo che, per come li abbiamo definiti, i numeri naturali non sono certo un sottoinsieme degli interi! Peraltro, c'è un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ isomorfo ai numeri naturali, nel senso che ne ha tutte le caratteristiche; in questi casi, visto che non si può parlare di inclusione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$, si parla di immersione: definiamo un'applicazione $\underset{\mathbb{N}\to\mathbb{Z}}{\mathscr{I}} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ponendo

$$\underset{\mathbb{N}\to\mathbb{Z}}{\mathscr{I}}(n) = [(n,0)] .$$

Se indichiamo con $\mathbb{N}_{\mathbb{Z}} = \underset{\mathbb{N}\to\mathbb{Z}}{\mathscr{I}}(\mathbb{N})$ l'immagine di questa applicazione, $\underset{\mathbb{N}\to\mathbb{Z}}{\mathscr{I}}$ è un isomorfismo tra gli spazi $(\mathbb{N}, \underset{\mathbb{N}}{\oplus}, \underset{\mathbb{N}}{\odot}, \underset{\mathbb{N}}{\textcircled{\le}})$ e $(\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}, \underset{\mathbb{Z}}{\oplus}, \underset{\mathbb{Z}}{\odot}, \underset{\mathbb{Z}}{\textcircled{\le}})$, cioè tramuta le operazioni (e l'ordine) di $\mathbb{N}$ in quelle di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{N}_{\mathbb{Z}}$: ad esempio (come potete verificare facilmente)

$$\underset{\mathbb{N}\to\mathbb{Z}}{\mathscr{I}}(m \underset{\mathbb{N}}{\oplus} n) = \underset{\mathbb{N}\to\mathbb{Z}}{\mathscr{I}}(m) \underset{\mathbb{Z}}{\oplus} \underset{\mathbb{N}\to\mathbb{Z}}{\mathscr{I}}(n) .$$

Questo insieme può allora prendere (ancora per poco ...) il posto dei numeri naturali, per cui parlando di $\mathbb{N}$ nell'ambito degli interi intenderemo quest'altro insieme, che è isomorfo al "vero" $\mathbb{N}$.

Un esercizio: provate che in $\mathbb{Z}$ si ha

$$h \underset{\mathbb{Z}}{\textcircled{\le}} k \quad \Rightarrow \quad \forall m \in \mathbb{Z},\ (h \underset{\mathbb{Z}}{\oplus} m) \underset{\mathbb{Z}}{\textcircled{\le}} (k \underset{\mathbb{Z}}{\oplus} m)$$

$$[h \underset{\mathbb{Z}}{\textcircled{\le}} k \text{ e } 0_{\mathbb{Z}} \underset{\mathbb{Z}}{\textcircled{\le}} m] \quad \Rightarrow \quad (h \underset{\mathbb{Z}}{\odot} m) \underset{\mathbb{Z}}{\textcircled{\le}} (k \underset{\mathbb{Z}}{\odot} m) ,$$

il che dimostra che le usuali proprietà delle disuguaglianze non sono delle regole in più, ma sono conseguenze della definizione di ordine in $\mathbb{N}$.

Appendice 3.4 - Costruzione di $\mathbb{Q}$

A questo punto, costruiamo i numeri razionali: consideriamo l'insieme delle coppie (k,n), dove k è un numero intero ed n è un numero naturale diverso da zero (osserviamo che le frazioni sono tutte fatte così, a parte la grafia), e su di esso definiamo la relazione di equivalenza

$$(k,n) \simeq (h,m) \quad \Longleftrightarrow \quad k \underset{\mathbb{Z}}{\odot} m = h \underset{\mathbb{Z}}{\odot} n$$

(quindi, (k,n) ha il ruolo della frazione k/n, che ancora non esiste). Poniamo

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{N}_{\mathbb{Z}} \setminus \{0_{\mathbb{Z}}\}))/\simeq ,$$

e definiamo le operazioni (qui, quella delicata è la somma, mentre il prodotto è facile)

$$[(k,n)] \underset{\mathbb{Q}}{\oplus} [(h,m)] = \left[\left((k \underset{\mathbb{Z}}{\odot} m) \underset{\mathbb{Z}}{\oplus} (h \underset{\mathbb{Z}}{\odot} n), n \underset{\mathbb{Z}}{\odot} m\right)\right]$$

$$[(k,n)] \underset{\mathbb{Q}}{\odot} [(h,m)] = [(k \underset{\mathbb{Z}}{\odot} h, n \underset{\mathbb{Z}}{\odot} m)] ,$$

l'ordine (che sarebbe stato più complicato se fossimo partiti da $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, ammettendo "denominatori" di segno qualunque)

$$[(k,n)] \underset{\mathbb{Q}}{\textcircled{\le}} [(h,m)] \quad \Longleftrightarrow \quad (k \underset{\mathbb{Z}}{\odot} m) \underset{\mathbb{Z}}{\textcircled{\le}} (h \underset{\mathbb{Z}}{\odot} n) ,$$

e scriviamo

$$0_{\mathbb{Q}} = [(0_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}})] , \qquad 1_{\mathbb{Q}} = [(1_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}})] , \qquad \underset{\mathbb{Q}}{\ominus}[(k,n)] = [(\underset{\mathbb{Z}}{\ominus} k, n)] .$$

Introduciamo poi l'inverso (rispetto al prodotto) dei numeri non nulli, ponendo per ogni $[(k,n)] \in \mathbb{Q} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\}$

$$[(k,n)]^{-1} = \begin{cases} [(n,k)] & \text{se } 0_{\mathbb{Z}} \le k \\ [(\underset{\mathbb{Z}}{\ominus} n, \underset{\mathbb{Z}}{\ominus} k)] & \text{se } k \le 0_{\mathbb{Z}}. \end{cases}$$

Infine, come nel caso visto prima, definiamo un'immersione $\underset{\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}}{\mathscr{I}}$ da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ che dà un isomorfismo tra $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}} = \underset{\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}}{\mathscr{I}}(\mathbb{Z})$, sottoinsieme dei razionali (quindi la composizione con l'immersione $\underset{\mathbb{N}\to\mathbb{Z}}{\mathscr{I}}$ dà un isomorfismo tra i naturali $\mathbb{N}$ ed $\mathbb{N}_{\mathbb{Q}}$, che è un opportuno sottoinsieme dei razionali — i quali sono classi di equivalenza di coppie di classi di equivalenza di coppie di numeri naturali ...): l'applicazione $\underset{\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}}{\mathscr{I}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definita da

$$\underset{\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}}{\mathscr{I}}(k) = [(k, 1_{\mathbb{Z}})]$$

è un isomorfismo tra $(\mathbb{Z}, \underset{\mathbb{Z}}{\oplus}, \underset{\mathbb{Z}}{\odot}, \underset{\mathbb{Z}}{\textcircled{\le}})$ e $(\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}}, \underset{\mathbb{Q}}{\oplus}, \underset{\mathbb{Q}}{\odot}, \underset{\mathbb{Q}}{\textcircled{\le}})$.

Appendice 3.5 - Allineamenti decimali e numeri razionali

Un allineamento decimale è, nella nostra esperienza, una scrittura del tipo $123,4567\cdots$, formata da alcune cifre tra 0 e 9 prima della virgola (o punto) decimale, ed infinite altre cifre (magari definitivamente nulle) dopo di essa. In termini matematici, limitandoci per semplicità agli allineamenti tra $0,000\cdots$ e $0,999\cdots$, possiamo mettere gli allineamenti decimali in corrispondenza biunivoca con le applicazioni da $\mathbb{N}^+$ in $\{0,\ldots,9\}$ in questo modo: all'applicazione $n \mapsto a_n$ associamo l'allineamento $0,a_1a_2a_3\cdots$ (per gli altri allineamenti occorrono applicazioni un po' più complicate: a_0 è un numero intero che dà la parte dell'allineamento prima del punto decimale, e la restante parte dell'allineamento comincia con a_1). D'ora in poi, un allineamento sarà sinonimo dell'applicazione ad esso associata.

Che rapporto c'è tra allineamenti decimali e numeri? Se all'applicazione a_n associamo la somma della serie $\sum_n (a_n/10^n)$, che è convergente perché $0 \le a_n/10^n \le 9/10^n$, e quest'ultimo è il termine generico di una serie geometrica con ragione minore di 1, otteniamo un'applicazione tra $\{0,\ldots,9\}^{\mathbb{N}^+}$ e $[0,1]$ (per la notazione, ☞ appendice

3.11). Tale applicazione non è iniettiva, perché ad esempio agli allineamenti $0.10000\cdots$ e $0.09999\cdots$ è associato lo stesso numero $0.1 = 1/10^1 = \sum_{n\geq 2}(9/10^n)$. Volendo, per renderla iniettiva, possiamo scegliere che ammettiamo come allineamenti quelli che definitivamente sono tutti 0, e non ammettiamo quelli che definitivamente sono tutti 9, e in tal caso 1 non è più nell'immagine dell'applicazione, o il viceversa (e allora non c'è più 0). Scegliamo ad esempio la prima alternativa.

Non è difficile mostrare che l'applicazione tra gli allineamenti e $[0,1[$ è biunivoca; vediamo ora come sono gli allineamenti dei numeri razionali. Se p e q sono numeri naturali con $p < q$, la frazione p/q è associata ad un numero razionale in $[0,1[$. Le cifre dell'allineamento decimale che rappresenta p/q si ottengono così:

$$\begin{cases} 10\,p = k_1 q + r_1 & \text{con } 0 \leq k_1 \leq 9 \text{ e } 0 \leq r_1 < q \\ 10\,r_1 = k_2 q + r_2 & \text{con } 0 \leq k_2 \leq 9 \text{ e } 0 \leq r_2 < q \\ 10\,r_2 = k_3 q + r_3 & \text{con } 0 \leq k_3 \leq 9 \text{ e } 0 \leq r_3 < q \\ \vdots & \\ 10\,r_n = k_{n+1} q + r_{n+1} & \text{con } 0 \leq k_{n+1} \leq 9 \text{ e } 0 \leq r_{n+1} < q \\ \vdots & \end{cases}$$

Allora avremo

$$p = q\frac{k_1}{10} + \frac{r_1}{10} = q\Big(\frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2}\Big) + \frac{r_2}{10^2} = \cdots = q\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{10^i} + \frac{r_n}{10^n}\,.$$

Poiché il resto va a zero, abbiamo $p = q\sum_n (k_i/10^i)$, quindi l'allineamento decimale di p/q è $0.k_1k_2\cdots$; dato che $0 \leq r_i < q$, tra gli r_i ce ne sono al più q diversi tra loro, ed abbiamo

$$r_i = r_j \quad\Rightarrow\quad [k_{i+1} = k_{j+1}] \text{ e } [r_{i+1} = r_{j+1}]\,,$$

quindi se la prima ripetizione dei resti si ha tra r_i ed r_{i+h}, avremo che l'allineamento $k_{i+1}k_{1+2}\cdots k_{i+h}$ è uguale a $k_{i+h+1}k_{1+h+2}\cdots k_{i+2h}$, e così via, cioè l'allineamento è periodico (da un certo punto in poi). Per la posizione fatta, dovremmo ancora verificare che l'allineamento non è definitivamente di tutte cifre 9: se così fosse a partire da k_{i+1}, avremmo $r_i < q$, ma anche

$$10\,r_i = k_{i+1}q + r_{i+1} = 9\,q + r_{i+1} \quad\Rightarrow\quad 10\,r_i \geq 9\,q \quad\Rightarrow\quad r_i \geq \frac{9}{10}q$$

e anche

$$100\,r_i = 90\,q + 10\,r_{i+1} = 99\,q + r_{i+2} \quad\Rightarrow\quad r_i \geq \frac{99}{100}q\,,$$

e per ogni n (va dimostrato per induzione)

$$r_i \geq \frac{10^n - 1}{10^n}q = q - \frac{q}{10^n}\,;$$

per la proprietà di Archimede questo implica $r_i \geq q$, contro l'ipotesi $q > r_i$.

Abbiamo provato che ogni numero razionale ha un allineamento decimale definitivamente periodico; vediamo il viceversa. Supponiamo che un allineamento $0.k_1k_2\cdots$ sia periodico a partire da k_{i+1} e che il periodo sia h: posto

$$a = \sum_{n=1}^{i}\frac{k_n}{10^n}\,, \qquad b = \sum_{n=1}^{h}\frac{k_{i+n}}{10^n}$$

i numeri a e b sono razionali, e l'allineamento rappresenta il numero

$$a + \frac{b}{10^i} + \frac{b}{10^{i+h}} + \frac{b}{10^{i+2h}} + \cdots = a + \frac{b}{10^i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(10^h)^k} = a + \frac{b\,10^h}{10^i(10^h - 1)}\,,$$

che è razionale.

Come applicazione, mostriamo che esistono numeri irrazionali: l'allineamento

$$0.1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\,14\,15\cdots$$

(abbiamo spaziato, per maggiore evidenza, cifre che in realtà sono adiacenti) non rappresenta un numero razionale. Infatti, se fosse un numero razionale l'allineamento dovrebbe essere definitivamente periodico di un certo periodo h, ma dopo un numero sufficiente di cifre comparirebbero nell'allineamento anche le cifre di 10^h, che hanno h zeri consecutivi, quindi il periodo sarebbe fatto tutto di zeri e le cifre dovrebbero essere definitivamente uguali a zero, cosa che invece non accade.

In modo un po' più complicato, dimostreremo più avanti anche l'irrazionalità di e (➡ appendice 7.11) e di π (➡ appendice 8.11).

Appendice 3.6 - Costruzione di $\mathbb{R}$

Vediamo uno dei numerosi modi per costruire $\mathbb{R}$ a partire da $\mathbb{Q}$ (al termine di questa costruzione accenneremo ad altri modi): definiremo i reali come semirette sinistre aperte di numeri razionali.

Per capire la costruzione, pensiamo che le semirette sinistre di numeri reali sono di due tipi, gli intervalli chiusi $]-\infty, a]$ e gli intervalli aperti $]-\infty, a[$; a ciascuna semiretta possiamo associare il suo estremo superiore, a; se scegliamo di usare solo gli intervalli aperti, l'applicazione (semiretta $\mapsto$ sup) diventa biunivoca: l'unica semiretta sinistra aperta di numeri reali che ha estremo superiore a è $]-\infty, a[$. Preso poi un qualunque numero reale a, per la proposizione 3.29 abbiamo $\sup(\mathbb{Q}\cap]-\infty, a[) = a$, quindi è biunivoca anche l'applicazione che a $\mathbb{Q}\cap]-\infty, a[$, che è una semiretta sinistra aperta di numeri razionali, associa il suo estremo superiore a. Allora, se conosciamo solo i numeri razionali, possiamo pensare alle semirette sinistre aperte di $\mathbb{Q}$ come un rappresentanti dei numeri reali, come faremo ora.

Diciamo che un sottoinsieme s di $\mathbb{Q}$ è una semiretta sinistra aperta se:

a) $s \neq \varnothing$

b) s è limitato superiormente

c) se $x \in s$ e $y \leq x$ allora $y \in s$

d) se $x \in s$ esiste $y \in s$ tale che $y > x$

La proprietà c) dice che s è una semiretta sinistra, la d) che è aperta, e la b) esclude che s sia tutto $\mathbb{Q}$.

Indichiamo con $\mathbb{R}$ l'insieme delle semirette sinistre aperte di $\mathbb{Q}$. Dobbiamo definire le operazioni e l'ordine in $\mathbb{R}$, verificare che soddisfano le proprietà che abbiamo dato come assiomi (3.11), e verificare la proprietà di Dedekind (3.12).

Se $r, s \in \mathbb{R}$ poniamo

$$r + s = \{x \underset{\mathbb{Q}}{\oplus} y : x \in r, y \in s\} ;$$

occorre usare le proprietà di $\mathbb{Q}$ per dimostrare (e questo è lasciato per esercizio) che $r + s \in \mathbb{R}$, cioè che $r + s$ è una semiretta sinistra aperta di $\mathbb{Q}$, e che la somma rende $\mathbb{R}$ un gruppo commutativo, con elemento neutro

$$0 = \{x \in \mathbb{Q} : x \underset{\mathbb{Q}}{\leq} 0_{\mathbb{Q}}, x \neq 0_{\mathbb{Q}}\} .$$

L'ordine è molto facile: se $r, s \in \mathbb{R}$ poniamo

$$r \leq s \iff r \subseteq s$$

(ricordiamo che $r, s \subset \mathbb{Q}$).

Il prodotto è più complicato, e la sua definizione (in cui bisogna fare attenzione al segno di quel che si moltiplica) è lasciata per esercizio.

Verificato che le operazioni e l'ordine soddisfano le proprietà 3.11 osserviamo che se $A, B \subset \mathbb{R}$ verificano le ipotesi di 3.12 allora il sottoinsieme di $\mathbb{Q}$

$$a = \bigcup_{x \in A} x$$

è una semiretta sinistra aperta di $\mathbb{Q}$, cioè un elemento di $\mathbb{R}$, e separa A e B (in realtà è l'estremo superiore di A).

Come avevamo anticipato, vi sono altri modi per definire i numeri reali a partire da $\mathbb{Q}$: con le sezioni di $\mathbb{Q}$, che è sostanzialmente equivalente a usare le semirette, oppure con le successioni di Cauchy di numeri razionali. Questo modo è molto interessante, lo troveremo nell'appendice al capitolo sulle successioni (☞ appendice 5.13).

Appendice 3.7 - Unicità di $\mathbb{R}$

Se un insieme $\hat{\mathbb{R}}$ dotato di operazioni $\hat{+}$ e $\hat{\cdot}$ e di ordine $\hat{\leq}$ verifica le proprietà 3.11 e 3.12, è isomorfo ad $\mathbb{R}$, cioè si può costruire (esercizio delicato) un'applicazione biunivoca $\varphi : \mathbb{R} \to \hat{\mathbb{R}}$ che commuta con la somma (cioè $\varphi(a+b) = \varphi(a) \hat{+} \varphi(b)$), con il prodotto e con l'ordine, e tale che $\varphi(\sup A) = \sup[\varphi(A)]$.

Appendice 3.8 - Estremo superiore in un insieme ordinato

La definizione di estremo superiore come minimo dei maggioranti ha senso in un qualunque insieme ordinato, ma non possiamo dire lo stesso per le caratterizzazioni del sup. A parte (3.14), che fa addirittura intervenire la differenza e potrebbe valere solo in un insieme in cui tale operazione sia definita, le due caratterizzazioni (3.12) e (3.13) valgono solo in un insieme totalmente ordinato: infatti $\xi = \sup A$ significa che

$$\begin{cases} \xi \in \mathscr{M}_A \\ \forall \lambda,\ [\lambda \in \mathscr{M}_A \Rightarrow \xi \leq \lambda] , \end{cases}$$

e la seconda riga equivale a

$$\forall \lambda,\ [\mathbf{non}(\xi \leq \lambda) \Rightarrow \lambda \notin \mathscr{M}_A] .$$

Per l'appunto, se l'ordine è totale allora $\mathbf{non}(\xi \leq \lambda)$ equivale a $\lambda < \xi$, altrimenti (se l'ordine è solo parziale) equivale a

$$(\lambda < \xi)\ \mathbf{o}\ (\lambda \text{ e } \xi \text{ non sono confrontabili}) .$$

Inoltre, in un insieme che non sia quello dei numeri reali, l'idea dell'estremo superiore come "confine" tra un insieme e i suoi maggioranti è piuttosto sfumata: ad esempio, per la relazione d'ordine su $\mathbb{R}^2$ dell'esercizio 2.84 l'estremo superiore dell'insieme $\{(0,1), (0,-1)\}$ è il punto $(1,0)$, ☞ appendice 2.9.

Appendice 3.9 - Estremo superiore e inferiore dell'insieme vuoto

Preso un numero reale x, questo è maggiore di tutti gli elementi dell'insieme vuoto, in quanto la proposizione $\forall y,\ [y \in \emptyset \Rightarrow y \leq x]$ è vera. Infatti, l'implicazione $y \in \emptyset \Rightarrow y \leq x$ equivale a $[\mathbf{non}(y \in \emptyset)]$ o $[y \leq x]$, cioè a $[y \notin \emptyset]$ o $[y \leq x]$, che è sempre vera perché è vera la prima parte. Allora, tutti i numeri reali sono maggioranti dell'insieme vuoto, e questo giustifica le seguenti convenzioni:

$$\sup \emptyset = -\infty , \qquad \inf \emptyset = +\infty .$$

Se da un lato viene eliminata la necessità di dire "ogni insieme *non vuoto* ha estremo superiore e inferiore", dall'altro non è più vero che per ogni insieme $\inf A \leq \sup A$ (inoltre, anche se l'abbiamo giustificata, è abbastanza sconcertante).

Appendice 3.10 - $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Qui, intendiamo che l'immagine $\mathbb{N}_{\mathbb{R}}$ di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ tramite l'immersione $\mathscr{I}_{N\to R}$, composizione delle varie immersioni definite sopra, è un sottoinsieme di $\mathbb{Z}_{\mathbb{R}}$, e considerazioni analoghe valgono per le altre inclusioni.

Appendice 3.11 - Cardinalità degli insiemi

Diamo qui un cenno alla teoria della cardinalità, che è un modo per stimare "quanti" elementi ha un insieme infinito.

Definizione : *si dice che due insiemi E ed F hanno la stessa cardinalità (sono equipotenti) se possono essere messi in corrispondenza biunivoca. In tal caso si scrive* $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F)$.

Osserviamo che se A è un insieme la relazione $E \simeq F \iff \mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F)$ è di equivalenza in $\mathscr{P}(A)$.

Definizione : *un insieme E si dice finito se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che E è equipotente ad $I_n = \{k \in \mathbb{N} : k < n\}$; se E non è finito si dice infinito. Un insieme E si dice numerabile se è equipotente ad $\mathbb{N}$.*

Osserviamo che $I_n = \emptyset$ se $n = 0$, altrimenti $I_n = \{0, \ldots, n-1\}$ ha n elementi. Gli insiemi finiti si comportano in modo nettamente diverso da quelli finiti: ad esempio, l'insieme $\mathbb{N}^+$ è un sottoinsieme proprio dei naturali, cioè è strettamente contenuto in $\mathbb{N}$, tuttavia l'applicazione $n \mapsto (n+1) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ è biunivoca, quindi un insieme infinito può essere in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria. Questo non è un caso eccezionale, come mostra il prossimo risultato.

Teorema A3.4 : *le seguenti condizioni sono equivalenti:*
1) *E è infinito*
2) *E contiene un sottoinsieme numerabile*
3) *E è equipotente ad una sua parte propria.*

La 3) significa che esiste un sottoinsieme proprio di E che è equipotente ad E. Dunque, gli insiemi infiniti sono esattamente quelli che sono in corrispondenza biunivoca con una loro parte propria.

Dimostrazione : diamo solo una dimostrazione abbreviata. Se E è infinito non è vuoto, quindi contiene almeno un punto e_1; posto $E_1 = \{e_1\}$, questo è equipotente a I_1. Se $E \setminus E_1 = \emptyset$, E sarebbe uguale ad E_1, quindi finito: allora c'è almeno un punto e_2 in $E \setminus E_1$; in particolare, $e_2 \neq e_1$, quindi l'insieme $E_2 = E_1 \cup \{e_2\}$ è equipotente ad I_2. Di qui si dovrebbe procedere per induzione, e mostrare che per ogni n esiste un punto $e_n \in E$ tale che $e_i \neq e_j$ se $i \neq j$. Allora l'insieme di tutti gli e_n è numerabile, ed è un sottoinsieme di E, così abbiamo provato che 1) $\Rightarrow$ 2).

Per vedere che E è equipotente ad una sua parte propria se contiene un sottoinsieme numerabile F, osserviamo che esiste un'applicazione biunivoca $f : F \to \mathbb{N}$; se poniamo $e_n = f^{-1}(n)$, l'applicazione che manda ogni e_n in e_{n+1} — cioè l'applicazione $f^{-1}(f(x)+1)$ — è biunivoca da F al suo sottoinsieme proprio $F \setminus \{e_0\}$. Allora l'applicazione che vale l'identità su $E \setminus F$ e manda ogni e_n in e_{n+1} è biunivoca tra E e la sua parte propria $E \setminus \{e_0\}$; così abbiamo provato che 2) $\Rightarrow$ 3).

Per dimostrare che 3) $\Rightarrow$ 1) e chiudere il ciclo, mostriamo che un insieme finito non può verificare 3): se così fosse anche l'insieme I_n dovrebbe verificare 3), e questo non può essere (si dimostra per induzione). ■

Osserviamo che, alla luce del teorema precedente, avremmo potuto procedere così, senza usare i numeri naturali: definire gli insiemi infiniti come quelli equipotenti ad una loro parte propria; poi definire gli insiemi finiti come quelli che non sono infiniti; poi definire i cardinali come le classi di equivalenza degli insiemi rispetto all'equipotenza; infine definire i numeri naturali come le classi di equivalenza dei soli insiemi finiti.

Vediamo qualche proprietà degli insiemi finiti e di quelli numerabili:
a) se E ed F sono finiti anche $E \cup F$ ed $E \cap F$ lo sono, e $\mathrm{card}(E) + \mathrm{card}(F) = \mathrm{card}(E \cup F) + \mathrm{card}(E \cap F)$;
b) se E ed F sono finiti anche $E \times F$ lo è, e $\mathrm{card}(E \times F) = \mathrm{card}(E)\,\mathrm{card}(F)$;
c) un sottoinsieme di un insieme finito è finito;
d) un sottoinsieme di un insieme numerabile è finito o numerabile (si dice anche "è al più numerabile");

e) una partizione di un sottoinsieme numerabile è finita o numerabile;
f) se E ed F sono numerabili anche $E \cup F$ è numerabile;
g) se E ed F sono numerabili anche $E \times F$ è numerabile;
h) l'unione di un'infinità numerabile di insiemi numerabili è numerabile.

Le prime cinque proprietà sono un esercizio, quindi mostriamo solo le altre. Intanto, osserviamo che (come già visto prima) gli elementi di un insieme numerabile E si possono indicare con $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, dove e_n è l'elemento di E associato ad n dall'applicazione biunivoca tra E ed $\mathbb{N}$.

Per provare f), se $E = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ed $F = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, costruiamo un'applicazione biunivoca tra $\mathbb{N}$ ed $E \cup F$ associando ai numeri pari gli elementi di E, ai dispari quelli di F: poniamo cioè

$$\begin{cases} g(2k) = e_k \\ g(2k+1) = f_k , \end{cases}$$

così $g(0) = e_0$, $g(1) = f_0$, $g(2) = e_1$, $g(3) = f_1$ eccetera. In realtà avremmo dovuto procedere con più attenzione, perché se E ed F hanno elementi comuni l'applicazione costruita non è iniettiva, ma si rimedia presto: basta osservare che $E \cup F = E \cup (F \setminus E)$, e che $F \setminus E$ è un sottoinsieme di F, quindi al più numerabile. Se è numerabile, sostituiamo F con $F \setminus E$ nella costruzione di g; se invece è finito ed ha k elementi $f_0, \dots, f_{k-1}$, costruiamo g ponendo

$$g(n) = \begin{cases} f_n & \text{se } n \le k-1 \\ e_{n-k} & \text{se } n \ge k . \end{cases}$$

Anziché scrivere queste definizioni precise di g, è più pratico e più immediatamente visibile mettere in fila i valori di $g(0), g(1), \dots$, scrivendo ad esempio le due applicazioni introdotte prima come

$$e_0, f_0, e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_n, f_n, \dots$$

e

$$f_0, f_1, \dots, f_{k-1}, e_0, e_1, \dots, e_n, \dots$$

rispettivamente.

Con questa notazione, dimostriamo g): scriviamo gli elementi di $E \times F$ in una tabella

$$\begin{matrix} (e_0, f_0) & (e_0, f_1) & (e_0, f_2) & \cdots \\ (e_1, f_0) & (e_1, f_1) & (e_1, f_2) & \cdots \\ (e_2, f_0) & (e_2, f_1) & (e_2, f_2) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

e poi la leggiamo lungo le diagonali che corrono da sudovest a nordest: scrivendo per comodità $p_{ij} = (e_i, f_j)$ l'applicazione biunivoca tra $\mathbb{N}$ ed $E \times F$ è

$$p_{00}, p_{10}, p_{01}, p_{20}, p_{11}, p_{02}, p_{30}, p_{21}, \dots .$$

Osserviamo che gli elementi su una diagonale hanno somma degli indici costante.

La dimostrazione di h) è simile alla precedente: se gli insiemi sono $E_0, E_1, \dots, E_n, \dots$ e indichiamo con p_{ij} l'i-esimo elemento dell'insieme E_j, la stessa funzione di prima risolve il problema.

Osserviamo che le proprietà relative all'unione e al prodotto di due insiemi si generalizzano facilmente a un qualunque numero finito di insiemi.

Esempio : l'insieme $\mathbb{Z}$ è numerabile, perché è unione di $\mathbb{N}$, che è numerabile, e degli interi negativi, che possono essere facilmente messi in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}^+$ (che è numerabile) mediante l'applicazione $-x$.

Esempio : anche $\mathbb{Q}$ è numerabile, perchè usando l'assioma della scelta possiamo vederlo come sottoinsieme (insieme dei rappresentanti) delle frazioni, e queste ultime sono un insieme numerabile perché prodotto di $\mathbb{Z}$ ed $\mathbb{N}^+$.

Esempio : dato un numero $n \in \mathbb{N}^+$, l'insieme delle radici reali di tutti i polinomi di grado n a coefficienti razionali è numerabile. Infatti, se al polinomio $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ associamo il vettore $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^{n+1}$ vediamo che questa applicazione è biunivoca; ma $\mathbb{Q}^{n+1}$ è numerabile, quindi i polinomi lo sono, e ogni polinomio di grado n ha al più n radici reali.

Se A e B sono due insiemi, l'insieme di tutte le applicazioni da A a B si indica con B^A; questa notazione è giustificata dalla proprietà che se E ed F sono finiti, allora $\operatorname{card}(F^E) = [\operatorname{card}(F)]^{\operatorname{card}(E)}$. La dimostrazione è molto facile (✎ es. 3.20).

Possiamo definire un preordinamento sui sottoinsiemi di un dato insieme A ponendo

$$E \le F \iff \text{esiste un'applicazione iniettiva } f : E \to F .$$

Osserviamo ad esempio che se $k < n$ si ha $I_k \le I_n$ ma $I_n \not\le I_k$; notiamo poi che se $E \subset F$ certamente $E \le F$, perché l'inclusione $E \hookrightarrow F$ è iniettiva.

Dal preordinamento possiamo ricavare una relazione di equivalenza in $\mathscr{P}(A)$:

$$E \simeq F \iff [E \le F \text{ e } F \le E] ;$$

il prossimo risultato è fondamentale.

Teorema di Bernstein A3.5 : *la relazione di equivalenza appena introdotta non è altro che l'equipotenza, cioè*

$$[E \le F \text{ e } F \le E] \iff [\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)] .$$

DIMOSTRAZIONE : se i due insiemi hanno la stessa cardinalità c'è un'applicazione biunivoca tra di essi, ma allora questa è iniettiva e la sua inversa è iniettiva, dunque $E \le F$ e $F \le E$.

L'altra implicazione è piuttosto delicata: il problema è costruire un'applicazione da E in F che sia non solo iniettiva, ma anche surgettiva, ma il "materiale" a disposizione sono solo le due funzioni iniettive $f : E \to F$ e $g : F \to E$ (naturalmente, supponiamo che nessuna delle due sia già surgettiva). In realtà abbiamo anche altre due funzioni: se pensiamo f come una funzione a valori in $f(E)$, questa ha un'inversa $f^{-1} : f(E) \to E$, che è biunivoca; allo stesso modo possiamo considerare la funzione $g^{-1} : g(F) \to F$ (attenzione: non sono le inverse di $f : E \to F$ e di $g : F \to E$).

Consideriamo i punti di F: non tutti sono immagine di qualche punto di E tramite f, ma tutti sono immagine di qualche punto di E tramite g^{-1}; quest'ultima funzione, però, non è definita su tutto E. Costruiremo una funzione che coincide con f su una parte opportuna di E, e con g^{-1} sul resto di E, in modo da risultare biunivoca.

Poniamo per comodità $E_0 = E$, $F_0 = F$, e consideriamo (è utile farsi un disegno dove seguire la dimostrazione) gli insiemi

$$F_1 = f(E_0) \qquad F_1' = F_0 \setminus f(E_0) \qquad E_1' = g(F_1') \qquad E_1 = E_0 \setminus E_1' :$$

abbiamo allora:
a) $E_0 = E_1 \cup E_1'$, $E_1 \cap E_1' = \varnothing$, e lo stesso con F al posto di E
b) visto che g è iniettiva, $g(F_1)$ non interseca $g(F_1') = E_1'$, quindi $g(F_1) \subset E_1$
c) anche $f(E_1) \subset f(E_0) = F_1$
d) dato che $g(F_1')$ è tutto E_1', la funzione g^{-1} (ristretta ad E_1') è biunivoca tra E_1' ed F_1'.

Dunque abbiamo trovato una funzione biunivoca tra E_1' ed F_1', mentre le funzioni (sono delle restrizioni, ma la notazione corretta introdurrebbe troppi simboli) $f : E_1 \to F_1$ e $g : F_1 \to E_1$ sono iniettive (se f è anche surgettiva, abbiamo terminato). Ora ripartiamo dall'inizio, sostituendo E_0 ed F_0 con E_1 ed F_1, ed ottenendo degli insiemi E_2, E_2' eccetera; in tal modo (qui il ragionamento andrebbe fatto per induzione) si trovano per ogni n degli insiemi tali che:
a) $E_{n-1} = E_n \cup E_n'$, $E_n \cap E_n' = \varnothing$, e lo stesso con F al posto di E
b) $g(F_n) \subset E_n$
c) $f(E_n) \subset F_n$
d) g^{-1} è biunivoca tra E_n' ed F_n'.

A questo punto osserviamo che posto

$$E' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n' \qquad F' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n'$$

e

$$E^* = E \setminus E' = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \qquad F^* = F \setminus F' = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

si ha che g^{-1} è biunivoca tra E' ed F', e inoltre f è biunivoca tra E^* ed F^*: infatti, per l'iniettività di f è

$$f\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(E_n)$$

(☞ esercizio 2.54, esteso al caso di intersezione numerabile di insiemi), dunque

$$f(E^*) = f\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(E_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{n+1} = F^* ,$$

perché gli insiemi F_n sono contenuti uno nell'altro. ■

Dato il teorema di Bernstein, la prossima definizione risulta naturale.

Definizione : *si dice che* $\operatorname{card}(E) \le \operatorname{card}(F)$ *se* $E \preceq F$, *cioè se esiste un'applicazione iniettiva* $f : E \to F$.

Dal preordinamento possiamo allora passare ad una relazione d'ordine in $\mathscr{P}(A)/\simeq$ ponendo $[E] \le [F] \iff \operatorname{card}(E) \le \operatorname{card}(F)$. Utilizzando l'assioma della scelta, si può dimostrare che tale relazione d'ordine è totale, cioè dati due insiemi o questi sono equipotenti, o uno dei due ha cardinalità maggiore dell'altro.

Esempio : $\operatorname{card}(\mathbb{R}) = \operatorname{card}(]0,1[) = \operatorname{card}([0,1])$. Infatti, poiché

$$]0,1[\subset [0,1] \subset \mathbb{R}$$

abbiamo certamente

$$\operatorname{card}(]0,1[) \le \operatorname{card}([0,1]) \le \operatorname{card}(\mathbb{R}) ,$$

quindi ci basta dimostrare che

$$\operatorname{card}(\mathbb{R}) \le \operatorname{card}(]0,1[) .$$

Questo segue dal fatto che la funzione $f : \mathbb{R} \to]0,1[$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}$$

è strettamente crescente, quindi iniettiva.

Esempio : indichiamo con il simbolo $\mathscr{P}^f(\mathbb{N})$ le parti finite di $\mathbb{N}$, cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti dei naturali; allora $\mathscr{P}^f(\mathbb{N})$ è numerabile. Infatti, l'applicazione $n \mapsto \{n\}$ è iniettiva, quindi $\operatorname{card}(\mathbb{N}) \le \operatorname{card}(\mathscr{P}^f(\mathbb{N}))$; per costruire un'applicazione iniettiva da $\mathscr{P}^f(\mathbb{N})$ ad $\mathbb{N}$, che dimostrerebbe la disuguaglianza opposta, consideriamo i numeri primi, e poniamo $p_0 = 2$ (il primo numero primo), $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$, $p_4 = 11$ eccetera. Allora se $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ è un sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$ possiamo associare ad esso il prodotto $p_{n_1} p_{n_2} \cdots p_{n_k}$, che è un numero naturale (al vuoto, associamo 1): per l'unicità della fattorizzazione, tale applicazione è iniettiva.

Se anziché le parti finite avessimo considerato tutte le parti di $\mathbb{N}$, la situazione sarebbe stata differente, come mostra il prossimo risultato.

Teorema A3.6 : *per ogni insieme* E *si ha* $\operatorname{card}(E) < \operatorname{card}(\mathscr{P}(E))$.

DIMOSTRAZIONE : l'applicazione $x \mapsto \{x\}$ è iniettiva da E a $\mathscr{P}(E)$, quindi $\operatorname{card}(E) \le \operatorname{card}(\mathscr{P}(E))$. Per finire la dimostrazione, dobbiamo escludere che le due cardinalità siano uguali, quindi, grazie al teorema di Bernstein, ci basta mostrare che non esistono applicazioni surgettive da E a $\mathscr{P}(E)$; se $f : E \to \mathscr{P}(E)$ è una funzione, consideriamo il sottoinsieme di E

$$F = \{x \in E : x \notin f(x)\} .$$

L'insieme F non appartiene all'immagine di f (quindi f non è surgettiva), in quanto se fosse $F = f(a)$ per qualche a si avrebbe per definizione di F

$$a \in F \quad \Rightarrow \quad a \notin f(a) \quad \Rightarrow \quad a \notin F$$

e anche

$$a \notin F \quad \Rightarrow \quad a \in f(a) \quad \Rightarrow \quad a \in F\,,$$

che dà un assurdo. ∎

Facciamo qualche altra osservazione, di cui omettiamo la dimostrazione: se E è equipotente ad F anche $\mathscr{P}(E)$ è equipotente a $\mathscr{P}(F)$; l'insieme delle funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ è equipotente a $\mathscr{P}(\mathbb{N})$; se un insieme E è infinito allora è equipotente ad $E \times E$.

Daremo invece la dimostrazione del prossimo importante risultato.

Teorema A3.7 : $\mathbb{R}$ *non è numerabile.*

DIMOSTRAZIONE : basta provare che $[0,1[$ non è numerabile. Abbiamo visto (☞ appendice 3.4) che tutti i numeri tra 0 ed 1 si possono rappresentare in modo unico come allineamenti decimali di cifre tra 0 e 9 che non sono definitivamente tutti 9, e che tale insieme di allineamenti è in corrispondenza biunivoca con $[0,1[$, quindi ne ha la stessa cardinalità. Se tale insieme fosse numerabile, dovrebbe esistere un'applicazione biunivoca f da $\mathbb{N}^+$ a questo insieme.

Vogliamo costruire un allineamento che non è nell'immagine di f, che così non può essere surgettiva; indichiamo con x_n la n-esima cifra decimale dell'allineamento $f(n)$, e poniamo

$$y_n = \begin{cases} 5 & \text{se } 0 \le x_n \le 4 \\ 1 & \text{se } 5 \le x_n \le 9 \end{cases} :$$

allora $x_n \neq y_n$, quindi in particolare l'allineamento $0.y_1y_2y_3\ldots$ non è uguale all'allineamento $f(n)$ per alcun valore di n, dunque non appartiene all'immagine di f. ∎

Concludiamo citando un ulteriore assioma, che va sotto il nome di "ipotesi del continuo": questa dice che non vi sono insiemi la cui cardinalità sia maggiore di quella di $\mathbb{N}$ e minore di quella di $\mathbb{R}$. È stato dimostrato che sia l'assioma della scelta, sia l'ipotesi del continuo non possono né essere dimostrati, né essere confutati, quindi ciascuno è libero di assumerne la verità o no. A differenza dell'assioma della scelta, che è accettato da quasi tutti i matematici, l'ipotesi del continuo è un po' più controversa, pertanto esistono due matematiche, una con questa ipotesi e l'altra senza.

Appendice 3.12 - Costruzione di $\mathbb{C}$

Anche i numeri complessi possono essere introdotti come abbiamo fatto per le altre classi di numeri, a partire dai numeri reali.

Nell'insieme $\mathbb{R}^2$ è possibile definire una somma, quella componente per componente, che lo rende gruppo additivo:

$$(a,b) \oplus_{\mathbb{C}} (c,d) = (a+b, c+d)\,.$$

L'elemento neutro è $(0,0)$; cerchiamo di definire un prodotto che abbia le proprietà di quello di $\mathbb{R}$, e che inoltre preservi qualcosa della struttura geometrica del piano: precisamente, se la norma di (a,b) è $\sqrt{a^2+b^2}$, vogliamo che la norma del prodotto sia uguale al prodotto delle norme dei fattori.

Un primo tentativo potrebbe essere quello componente per componente

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac, bd)\,,$$

ma in tal caso l'elemento neutro è $(1,1)$, e ci sono elementi di $\mathbb{R}^2$ diversi da $(0,0)$ che non hanno inverso: ad esempio $(1,0)$ non ha inverso perché non esiste alcun (a,b) tale che $(1,0) \cdot (a,b) = (1,1)$.

Ci si convince rapidamente che se un prodotto come quello cercato esiste esso deve mescolare le componenti dei fattori. Si può dimostrare che il più generale prodotto in $\mathbb{R}^2$ che è commutativo ed è distributivo rispetto alla somma è del tipo

$$(a,b) \cdot (c,d) = (\alpha ac + \beta(ad+bc) + \gamma bd, \alpha' ac + \beta'(ad+bc) + \gamma' bd)\,.$$

Se imponiamo che la norma del prodotto sia il prodotto delle norme otteniamo

$$\alpha^2 + (\alpha')^2 = 1\,, \quad (\gamma, \gamma') = -(\alpha, \alpha')\,, \quad (\beta, \beta') = \pm(\alpha', -\alpha)\,.$$

A questo punto il prodotto è del tipo

$$(a,b) \cdot (c,d) = \big(\alpha(ac-bd) \pm \alpha'(ad+bc), \alpha'(ac-bd) \mp \alpha(ad+bc)\big)\,,$$

con la condizione $\alpha^2 + (\alpha')^2 = 1$. Se imponiamo che esista un elemento neutro otteniamo che

$$(\beta, \beta') = -(\alpha', -\alpha)$$

e che l'elemento neutro è $(\alpha, -\alpha')$.

Se scegliamo che il prodotto di $\mathbb{R}^2$ estenda il prodotto di $\mathbb{R}$, imponendo che sui punti della forma $(a,0)$ il prodotto dia

$$(a,0) \cdot (b,0) = (ab, 0)\,,$$

l'unico prodotto che rimane è

$$(a,b) \odot_{\mathbb{C}} (c,d) = (ac-bd, ad+bc)\,.$$

Se poniamo $\mathrm{i} = (0,1)$, e indichiamo con 1 l'elemento neutro $(1,0)$, ogni elemento di $\mathbb{R}^2$ si può scrivere

$$(a,b) = (a,0) \underset{\mathbb{C}}{\oplus} (0,b) = [(a,0) \underset{\mathbb{C}}{\odot} 1] \underset{\mathbb{C}}{\oplus} [(b,0) \underset{\mathbb{C}}{\odot} \mathrm{i}]$$

che, se decidiamo di scrivere semplicemente a per il punto $(a,0)$, che in definitiva si comporta come il numero reale a per quanto riguarda il prodotto, si può riscrivere

$$(a,b) = a + b\mathrm{i}\,.$$

È chiaro che nel testo, quando abbiamo detto " z è reale" avremmo in realtà dovuto dire che $z \in \mathscr{I}_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.

Appendice 3.13 - Numeri complessi e ordine

Su $\mathbb{C}$ non è possibile definire una relazione d'ordine totale che sia compatibile con somma e prodotto, cioè che goda delle usuali proprietà presenti in $\mathbb{R}$: infatti, se i fosse confrontabile con 0 dovrebbe essere minore o maggiore di esso. Ma

$$0 \underset{\mathbb{C}}{\lessgtr} \mathrm{i} \quad\Rightarrow\quad 0 \underset{\mathbb{C}}{\lessgtr} \mathrm{i}^2 = -1 \quad\Rightarrow\quad 0 \underset{\mathbb{C}}{\lessgtr} (-1)^2 = 1 \quad\Rightarrow\quad -1 \underset{\mathbb{C}}{\lessgtr} 0$$

e quindi $0 = -1$, assurdo. Alla stessa conclusione si arriva supponendo $\mathrm{i} \underset{\mathbb{C}}{\lessgtr} 0$, cioè $0 \underset{\mathbb{C}}{\lessgtr} (-\mathrm{i})$.

Appendice 3.14 - Risoluzione delle equazioni di terzo grado

Vediamo come si può risolvere l'equazione di terzo grado usando i numeri complessi. Per semplificare le notazioni, supponiamo che il coefficiente di z^3 sia uguale ad 1 (altrimenti basta dividere tutta l'equazione per questo coefficiente), così l'equazione ha la forma

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0\,.$$

Poi, analogamente a quanto fatto per l'equazione di secondo grado, consideriamo i primi due addendi come parte dello sviluppo del cubo di un binomio: l'equazione, infatti, può essere scritta

$$\left(z + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)z + \left(c - \frac{a^3}{27}\right) = 0\,,$$

o anche

$$\left(z + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)\left(z + \frac{a}{3}\right) + \left(c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}\right) = 0\,.$$

Ponendo

$$w = z + \frac{a}{3}\,, \qquad p = b - \frac{a^2}{3}\,, \qquad q = c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}\,,$$

l'equazione assume la forma più semplice

$$w^3 + pw + q = 0\,,$$

ma rimane pur sempre di terzo grado. Cerchiamo una radice dell'equazione nella forma

$$w = x + y$$

con la condizione

$$xy = -\frac{p}{3}$$

(d'accordo, è una posizione che non viene in mente facilmente; la formula risolutiva dell'equazione di terzo grado fu infatti mantenuta segreta dalla cerchia di Tartaglia per un certo periodo, finché — pare — dopo un litigio fu pubblicata da un matematico concorrente, Cardano, che la battezzò col suo nome), così abbiamo

$$\begin{cases} (x+y)^3 + p(x+y) + q = 0 \\ y = -p/3x \end{cases}$$

e quindi con facili calcoli

$$x^6 + qx^3 - \frac{p^3}{27} = 0\,. \tag{A3.1}$$

Le soluzioni di questa equazione danno i valori di x^3 ed y^3 (il sistema in (x,y) era simmetrico) che sono

$$x^3, y^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

(la radice è complessa, perché il radicando potrebbe essere negativo), quindi x ed y sono le tre radici cubiche complesse di questi numeri; se x_0, x_1, x_2 sono le radici cubiche di

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\,,$$

indichiamo con y_0 la radice cubica di

$$-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

che verifica la condizione $x_0 y_0 = -p/3$, e facciamo lo stesso per y_1 e y_2: le tre soluzioni dell'equazione di partenza sono

$$x_0 + y_0 - a/3\,, \qquad x_1 + y_1 - a/3\,, \qquad x_2 + y_2 - a/3\,.$$

Abbiamo risolto l'equazione di terzo grado mediante la (A3.1), che è essenzialmente un'equazione di secondo grado (in x^3). Citiamo qui il fatto che con trasformazioni abbastanza semplici è possibile ricondurre la risoluzione dell'equazione di quarto grado a quella di un'equazione accessoria di terzo grado, quindi anche le equazioni di quarto grado sono risolubili. Infine, e questo è più stupefacente, è stato dimostrato (da Abel, intorno al 1820, dopo secoli di tentativi di scoprire la formula risolutiva dell'equazione di quinto grado) che non è possibile trovare una formula risolutiva generale per alcuna equazione di grado superiore al quarto — ciò non vieta che si sappia risolvere qualche equazione particolare, ad esempio $z^6 = 1$.

$e^z = e^x e^{iy}$ dato che $z = x+iy$
$= e^{\mathrm{Re}\, z}(\cos(\mathrm{Im}\, z) + i \sin(\mathrm{Im}\, z))$

Appendice 3.15 - Esponenziale complesso e ~~logaritmo complesso~~

A partire dalla notazione esponenziale, possiamo introdurre l'esponenziale complesso $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ osservando che se $z = x + iy$ allora formalmente

$$e^z = e^x e^{iy} = e^{\Re z}(\cos(\Im z) + i\,\mathrm{sen}(\Im z)).$$

Come si può vedere facendo uso delle serie, ☞ formula (A9.8), tale notazione non è solo formale. Osserviamo subito che, a differenza dell'esponenziale reale, l'esponenziale complesso non è una funzione iniettiva, ma

$$e^z = e^w \iff [\Re z = \Re w \text{ e } \Im z = \Im w + 2k\pi].$$

e^z è 2π-periodica lungo l'asse immaginario

Ne segue l'impossibilità di definire il logaritmo come funzione inversa dell'esponenziale. A questo punto sono possibili due strade; la prima è osservare che e^z è 2π-periodica lungo l'asse immaginario, quindi che la restrizione di e^z alla striscia $\{z \in \mathbb{C} : 0 \le \Im z < 2\pi\}$ è iniettiva, e inoltre la sua immagine è $\mathbb{C} \setminus \{0\}$: preso $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e posto

$e^{x+iy} = w$

$$x = \log|w|, \qquad y = \arg\min w$$

$\log|w| + i \arg\min w$

si ha $e^{x+iy} = w$. Possiamo allora chiamare determinazione principale del logaritmo di w il numero $\log|w| + i \arg\min w$: ad esempio, il logaritmo principale di -1 è $i\pi$.

Purtroppo, questa funzione è discontinua, perché ad esempio i numeri $1 - \varepsilon i$ ed 1 hanno logaritmi molto diversi, pur essendo arbitrariamente vicini. Un'altra strada, invece, è considerare il logaritmo come un'applicazione a molti valori, anzi a infiniti valori, ma questo discorso esula dagli scopi del nostro libro.

f è limitata superiormente se $\sup f \in \mathbb{R}$
se $\xi = \max f$ e $f(x_0) = \xi$, x_0 è un punto di massimo e ξ è il valore massimo di f.
il $\sup f$ e $\inf f$ esistono sempre, ma non sempre esistono il massimo e il minimo.

Capitolo 4

Funzioni reali

In questo capitolo diamo alcune definizioni di proprietà tipiche delle funzioni reali di variabile reale, e studiamo alcune delle funzioni già incontrate nella sezione 1.6. Anzitutto, estendiamo alle funzioni reali la definizione di estremo superiore e inferiore, di massimo e di minimo.

4.1 - Estremi di funzioni reali

Definizione : *se $A \subset \mathbb{R}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$, si dice che un elemento $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ è l'estremo superiore di f, e si scrive $\xi = \sup f$, se ξ è l'estremo superiore dell'immagine di f, cioè se $\xi = \sup f(A)$. Diciamo che f è limitata superiormente se $\sup f \in \mathbb{R}$. Analoghe definizioni valgono per $\inf f$, $\max f$ e $\min f$. Se $\xi = \max f$ e $f(x_0) = \xi$, si dice che x_0 è un punto di massimo per f e che ξ è il valore massimo di f, e analogamente per il minimo* (➡ appendice 4.1).

Se poi $B \subset A$, si dice estremo superiore di f su B, e si scrive $\sup_B f$, l'estremo superiore dell'immagine di B tramite f, cioè $\sup f(B)$. Analoghe definizioni valgono per $\inf_B f$, $\max_B f$ e $\min_B f$, nonché per i punti di massimo e minimo di f in B.

Osserviamo che $\sup f$ ed $\inf f$ esistono sempre (sono estremo superiore ed inferiore di un sottoinsieme non vuoto di $\overline{\mathbb{R}}$), mentre non possiamo dire lo stesso per $\max f$ e ~~$\min f$, quindi il problema di stabilire se una funzione ha massimo e minimo non è banale;~~ ne daremo una soluzione parziale dopo aver parlato di funzioni continue, ☞ teorema 6.35.

superiore, questo è il massimo.

Esempio : per la funzione $f(x) = 3x - 2$, che è definita su $A = \mathbb{R}$, è $\sup f = +\infty$ ed $\inf f = -\infty$, perché l'immagine di f è tutto $\mathbb{R}$, quindi f non ha né massimo né minimo; scelto poi $B = [-1,1[$, è $f([-1,1[) = [-5,1[$, quindi abbiamo $\inf_{[-1,1[} f = \min_{[-1,1[} f = -5$, $\sup_{[-1,1[} f = 1$, ed f non ha massimo su $[-1,1[$.

Osservazione : le caratterizzazioni (3.13)e (3.14) dell'estremo superiore di un insieme si possono riformulare per le funzioni:

$$\xi = \sup f \iff \begin{cases} \forall x \in \operatorname{dom} f,\ f(x) \leq \xi \\ \forall \lambda < \xi,\ \exists x \in \operatorname{dom} f : \lambda < f(x)\ , \end{cases} \tag{4.1}$$

e se $\sup f \in \mathbb{R}$

$$\xi = \sup f \iff \begin{cases} \forall x \in \operatorname{dom} f,\ f(x) \leq \xi \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in \operatorname{dom} f : \xi - \varepsilon < f(x)\ ; \end{cases} \tag{4.2}$$

si può poi caratterizzare il massimo:

$$\xi = \max f \iff \begin{cases} \forall x \in \operatorname{dom} f,\ f(x) \leq \xi \\ \exists x_0 \in \operatorname{dom} f : f(x_0) = \xi\ . \end{cases} \tag{4.3}$$

Analogamente alla proposizione 3.14, se una funzione ha massimo questo è anche l'estremo superiore, e viceversa se in qualche punto la funzione assume come valore l'estremo superiore allora questo è il massimo (e lo stesso per l'estremo inferiore e il minimo)(✎ es. 4.1).

Analogamente alla proposizione 3.16 si ha (✎ es. 4.2)

$$\sup f = -\inf(-f)\ , \qquad \inf f = -\sup(-f)\ . \tag{4.4}$$

f deve essere definita nel punto sup A, cioè A deve avere massimo

Una frequente confusione è quella tra $\sup f = \sup f(A)$ ed $f(\sup A)$, che in generale non c'entrano uno con l'altro (però, ☞ teorema 6.13 e proposizione 6.25); infatti, tanto per cominciare $f(\sup A)$ non sempre esiste: occorre che f sia definita nel punto $\sup A$, cioè che A abbia massimo. Poi, anche se $f(\sup A)$ esiste, non è detto che $f(\sup A) = \sup f$, come mostra l'esempio $f(x) = -x$, $A = [-1,1]$.

Un'altra confusione comune è quella tra massimo, punto di massimo e punto del grafico corrispondente al massimo: osservando ad esempio (☞ figura 4.1) il grafico della funzione $\operatorname{sen} x$ nell'intervallo $[-\pi,\pi]$, il massimo è il numero 1, è un elemento del codominio e se proprio vogliamo segnalarlo sul piano cartesiano dobbiamo indicare il punto $A = (0,1)$; il punto di massimo è $\pi/2$, è un elemento del dominio e potrebbe essere segnalato indicando il punto $B = (\pi/2, 0)$; il punto $C = (\pi/2, 1)$ non è il massimo né il punto di massimo, ma è il punto del grafico corrispondente al valore massimo.

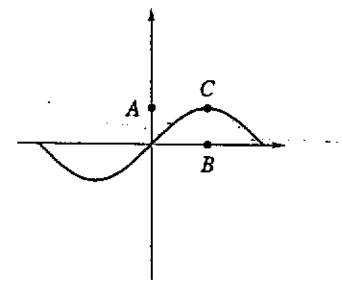


Fig. 4.1 : valore massimo, punto di massimo, punto sul grafico

Per gli estremi superiore e inferiore delle funzioni valgono alcune facili disuguaglianze.

Proposizione 4.1 : *se $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $\forall x,\ f(x) \leq g(x)$ allora*

$$\inf f \leq \inf g\ , \qquad \sup f \leq \sup g\ . \tag{4.5}$$

Se $f : A \to \mathbb{R}$ e $B \subset A$ non è vuoto, si ha

$$\inf f \leq \inf_B f \leq \sup_B f \leq \sup f\ . \tag{4.6}$$

DIMOSTRAZIONE : la seconda delle (4.5) è immediata dalla caratterizzazione (4.1), e la prima si ricava usando (4.4), perché se $f \leq g$ allora $-g \leq -f$. Per dimostrare (4.6) basta osservare che $f(B) \subset f(A)$ e usare la proposizione 3.18 (✎ es. 4.4). ■

A questo punto, non è difficile dimostrare alcune disuguaglianze importanti.

Proposizione 4.2 : *se $f, g : A \to \mathbb{R}$*

$$\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$$

$$\sup(f+g) \geq \sup f + \inf g$$

e anche

$$\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$$

$$\inf(f+g) \leq \sup f + \inf g\ .$$

Dimostrazione : poiché la funzione costante $\sup f$ è maggiore o uguale ad f, e analogamente $\sup g$ è maggiore o uguale a g, otteniamo che la funzione $(f+g)(x)$ è minore o uguale della funzione $(\sup f + \sup g)$, che essendo costante ha estremo superiore uguale a se stessa. Basta allora applicare la seconda delle (4.5) per ottenere la prima disuguaglianza.

Per ricavare la seconda, osserviamo che da $g(x) \geq \inf g$ segue che la funzione $(f+g)(x)$ è maggiore o uguale della funzione $f(x) + \inf g$; applicando (4.5) a queste due funzioni si ottiene la tesi poiché (✎ es. 4.5) l'estremo superiore di $f+k$ con k costante è uguale a $(\sup f) + k$.

Le altre disuguaglianze si ottengono dalle prime grazie alle formule (4.4). ■

Concludiamo la sezione con una facile osservazione, che tornerà utile più avanti.

Proposizione 4.3 : *se* $f : A \to \mathbb{R}$ *si ha*

$$\sup f - \inf f = \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in A\} = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in A\}. \tag{4.7}$$

Dimostrazione : poniamo

$$S_1 = \{f(x) - f(y) : x, y \in A\}, \qquad S_2 = \{|f(x) - f(y)| : x, y \in A\},$$

e osserviamo che se $\lambda \in S_2$ allora $\lambda = |f(x) - f(y)|$ per qualche $x, y \in A$; scambiando eventualmente x con y si può supporre che $f(x) - f(y) \geq 0$, quindi che $\lambda \in S_1$. Ciò significa che $S_2 \subset S_1$, quindi $\sup S_2 \leq \sup S_1$ (☞ proposizione 3.18). D'altra parte se $\lambda \in S_1$ allora $|\lambda| \in S_2$, e $|\lambda| \geq \lambda$, quindi $\sup S_2 \geq \sup S_1$ e l'uguaglianza tra i due estremi superiori è dimostrata.

Ora, per ogni $x, y \in A$ abbiamo

$$f(x) \leq \sup f, \qquad f(y) \geq \inf f,$$

e sottraendo membro a membro

$$f(x) - f(y) \leq \sup f - \inf f,$$

dunque $\xi = (\sup f - \inf f)$ è un maggiorante di S_1 e pertanto è maggiore o uguale a $\sup S_1$. Viceversa, scelto un qualsiasi numero minore di ξ, questo numero (mostratelo per esercizio) si può scrivere come $a - b$, dove $a < \sup f$ e $b > \inf f$. Allora per la (4.1) esistono $x, y \in A$ tali che $f(x) > a$ e $f(y) < b$, quindi $f(x) - f(y) > a - b$, ma $f(x) - f(y) \in S_1$, quindi $a - b \leq \sup S_1$. Per l'arbitrarietà di $a - b < \xi$, se ne deduce $\xi \leq \sup S_1$, e cioè l'ultima uguaglianza rimasta. ■

decrescente: $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

debolmente crescente $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

debolmente decrescente: $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ → f monotona.

4.2 - Funzioni monotone

una funzione crescente conserva l'ordine

Passiamo ad occuparci di un'importante classe di funzioni, quelle monotòne.

Definizione : *se* $A \subset \mathbb{R}$ *ed* $f : A \to \mathbb{R}$, *si dice che* f *è crescente se*

$$\forall x, y \in A, \; [x < y \Rightarrow f(x) < f(y)];$$

si dice che f *è debolmente crescente (o non decrescente) se*

$$\forall x, y \in A, \; [x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)];$$

si dice che f *è debolmente decrescente (o non crescente) se*

$$\forall x, y \in A, \; [x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)];$$

infine, si dice che f *è decrescente se*

$$\forall x, y \in A, \; [x < y \Rightarrow f(x) > f(y)].$$

Se f *verifica una delle quattro proprietà precedenti, si dice che* f *è monotòna; se* f *è crescente o se* f *è decrescente si dice che* f *è strettamente monotòna.*

Dunque una funzione crescente è una funzione che conserva l'ordine: se due punti x ed y sono in un certo ordine, le loro immagini sono nello stesso ordine; invece, una decrescente inverte l'ordine (➡ appendice 4.2). Osserviamo che una funzione crescente è anche debolmente crescente, e una decrescente è anche debolmente decrescente; a volte si parla di funzioni strettamente crescenti anziché semplicemente di funzioni crescenti (e lo stesso per le decrescenti), per sottolineare ancora di più la disuguaglianza stretta.

Esempio : la funzione $f(x) = 2x - 1$ è crescente, perché

$$x < y \quad \Rightarrow \quad 2x < 2y \quad \Rightarrow \quad 2x - 1 < 2y - 1;$$

la funzione $f(x) = -x^3$ è decrescente (✎ es. 4.6); la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 7 & \text{se } x \leq 2 \\ 1 - x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

è debolmente decrescente (✎ es. 4.7); infine, la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ non è monotona: infatti (☞ figura 4.2) non è debolmente crescente (e quindi neppure crescente) perché $\pi/2 < \pi$ ma $\operatorname{sen}(\pi/2) > \operatorname{sen}(\pi)$, e (☞ figura 4.3) non è debolmente decrescente (quindi neppure decrescente) perché $0 < \pi/2$ ma $\operatorname{sen}(0) < \operatorname{sen}(\pi/2)$. Qui abbiamo usato il fatto che la negazione della proposizione "f è debolmente crescente" è $\exists x, y \in A : [x < y \text{ e } f(x) > f(y)]$ (✎ es. 4.8).

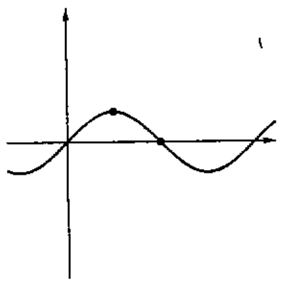


Fig. 4.2 : $\operatorname{sen} x$ non è debolmente crescente ...

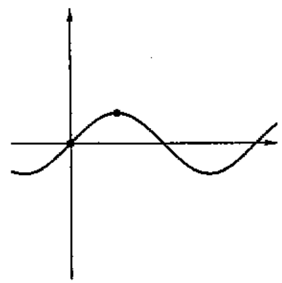


Fig. 4.3 : ... né debolmente decrescente

Definizione : *si dice che una funzione f è crescente su un insieme E se la restrizione $f|_E$ è crescente (e analogamente per i tre altri andamenti).*

Il prossimo esempio è particolarmente importante.

Esempio : la funzione $f(x) = 1/x$ è decrescente su $\mathbb{R}^+$, in quanto

$$0 < x < y \quad \Rightarrow \quad x \cdot \frac{1}{y} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} < \frac{1}{x} .$$

È decrescente anche su $\mathbb{R}^-$, perché

$$x < y < 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot \frac{1}{y} > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} < \frac{1}{x} .$$

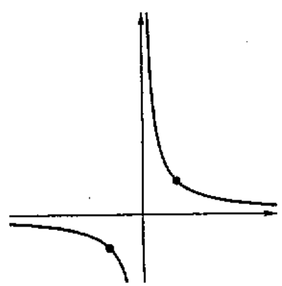


Fig. 4.4 : $1/x$ non è monotona

Però f non è una funzione decrescente (questo significa che la funzione $f : \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ non è decrescente), e neppure debolmente decrescente, perché ad esempio $-1 < 1$ e $f(-1) < f(1)$, che è il contrario della disuguaglianza di decrescenza. Dunque una funzione può essere decrescente su A e B e non esserlo sull'unione.

Tuttavia, c'è un utile risultato positivo.

Proposizione 4.4 : *se f è monotona dello stesso tipo sugli intervalli $(a, b]$ e $[b, c)$ allora è monotona su tutto l'intervallo (a, c).*

La dimostrazione è lasciata per esercizio (✎ es. 4.10).

Proposizione 4.5 : *la somma di due funzioni crescenti è ancora una funzione crescente un multiplo positivo di una funzione crescente è crescente, mentre un multiplo negativo di una funzione crescente è decrescente.*

La dimostrazione è lasciata per esercizio (✎ es. 4.11), e questa proposizione vale, con le dovute modifiche, anche per gli altri tre tipi di monotonia (la somma di due debolmente crescenti lo è anch'essa, eccetera).

Proposizione 4.6 : *la composizione di due funzioni monotone è monotona; se sono entrambe strettamente monotone, la composizione è strettamente monotona; se sono entrambe debolmente crescenti o entrambe debolmente decrescenti, la composizione è debolmente crescente; se una è debolmente crescente e l'altra debolmente decrescente, la composizione è debolmente decrescente.*

La dimostrazione è immediata se si pensa che una funzione crescente mantiene l'ordine tra due punti e le loro immagini, una decrescente inverte tale ordine; la "regola", non a caso, somiglia a quella del segno di un prodotto, e si generalizza facilmente: la composizione di un numero qualsiasi di funzioni monotone risulta debolmente crescente o debolmente decrescente, a seconda che il numero di funzioni debolmente decrescenti nella composizione sia pari oppure dispari (✎ es. 4.12).

La proposizione precedente ci permette di dimostrare la monotonia di un gran numero di funzioni.

Esempio : la funzione $(3x^5 + x^3 + 2x + 1)^7$ è strettamente crescente, perché le potenze dispari di x sono crescenti (☞ proposizione 4.9), così lo è la quantità tra parentesi e la nostra funzione è composizione della potenza settima (che è crescente) con questa funzione crescente.

Il prossimo risultato, molto facile, ha vaste applicazioni, perché (come abbiamo visto negli esempi del capitolo 2) generalmente non è semplice provare che una funzione è iniettiva (✎ es. 4.13).

Proposizione 4.7 : *una funzione strettamente monotona è iniettiva.*

DIMOSTRAZIONE : vi sono due casi: f è strettamente crescente, oppure f è strettamente decrescente. Nel primo caso, presi due punti distinti x, y uno dei due sarà minore dell'altro (l'ordine su $\mathbb{R}$ è totale), e possiamo supporre che sia $x < y$; allora $f(x) < f(y)$, e in particolare $f(x)$ ed $f(y)$ sono diverse, dunque f è iniettiva. Il caso rimanente è pressoché identico. ■

Osserviamo che il risultato non è vero in generale se f è debolmente crescente (o debolmente decrescente): basta pensare che le funzioni costanti sono monotone (✎ es. 4.15).

Esempio : la funzione $x^3 + (3x^5 + x^3 + 2x + 1)^7$ è iniettiva (provarlo direttamente a partire da $f(x_1) = f(x_2)$ sarebbe estremamente più complicato).

Non bisogna però credere che le uniche funzioni iniettive siano quelle strettamente monotone (qualcosa del genere è vero per le funzioni continue, ☞ teorema 6.32).

Esempio : la funzione $1/x$ è iniettiva, anche se non è monotona.

Un'altra proposizione interessante, simile alla precedente, riguarda l'inversa di una funzione monotona.

Proposizione 4.8 : *se $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è monotona e invertibile allora $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$ è monotona dello stesso tipo.*

La dimostrazione ricalca quella della proposizione precedente (✎ es. 4.16).

funzione pari se → $\forall x \in A$ $f(-x) = f(x)$
funzioni dispari se → $\forall x \in A$ $f(-x) = -f(x)$

4.3 - Funzioni pari e dispari

un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice simmetrico rispetto all'origine se $A = -A$, cioè se $\forall x \in A$, $-x \in A$.

Un'altra proprietà interessante di alcune funzioni è la simmetria. Ricordiamo che un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice simmetrico (rispetto all'origine) se $A = -A$, cioè se $\forall x \in A$, $-x \in A$.

Esempio : l'insieme $[-1, 2]$ non è simmetrico, l'insieme $[-2, -1[\cup]1, 2]$ è simmetrico.

Definizione : *sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme simmetrico, e sia $f : A \to \mathbb{R}$; si dice che f è una funzione pari se*

$$\forall x \in A, \ f(-x) = f(x) ,$$

mentre si dice che f è una funzione dispari se

$$\forall x \in A, \ f(-x) = -f(x) .$$

Il nome è dovuto al fatto che (✎ es. 4.17) le potenze pari di x sono funzioni pari, le potenze dispari sono funzioni dispari.

Esempio : la funzione $f(x) = 3x^2 - 1$ è pari, perché $f(-x) = 3 \cdot (-x)^2 - 1 = 3x^2 - 1 = f(x)$ (✎ es. 4.20).

Dire che una funzione è pari equivale a dire che il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate (✎ es. 4.18), mentre dire che una funzione è dispari equivale a dire che il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi (✎ es. 4.19).

Osservazione : come è facile vedere dai grafici della sezione 1.6, non tutte le funzioni sono pari o dispari. Facili proprietà delle funzioni pari e dispari sono le seguenti (che consigliamo di dimostrare per esercizio): la somma di due funzioni pari definite sullo stesso insieme, o un multiplo di una funzione pari, è ancora pari; la somma di due funzioni dispari definite sullo stesso insieme, o un multiplo di una funzione dispari, è dispari; ogni funzione dispari che è definita per $x = 0$, si annulla in quel punto. Il prodotto di due funzioni pari o di due funzioni dispari, definite sullo stesso insieme, è pari, mentre il prodotto di una funzione pari e una dispari è dispari.

L'osservazione precedente dice in particolare che le funzioni pari definite sullo stesso insieme sono uno spazio vettoriale, e lo stesso le dispari. La somma di una funzione pari e una dispari non è né pari né dispari, anzi può essere una qualsiasi funzione: se A è simmetrico ed $f : A \to \mathbb{R}$, le funzioni

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad f_d(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

sono una pari e una dispari (✎ es. 4.22), e la loro somma è f .

4.4 - Funzioni elementari: potenze

Iniziamo lo studio delle funzioni elementari partendo dalle più facili, le potenze intere positive di x .

Proposizione 4.9 : *sia $n \in \mathbb{N}^+$; se n è pari la funzione x^n è positiva su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, è crescente su $\mathbb{R}^+$ e decrescente su $\mathbb{R}^-$; se n è dispari la funzione x^n è crescente su $\mathbb{R}$, è positiva su $\mathbb{R}^+$ e negativa su $\mathbb{R}^-$.*

DIMOSTRAZIONE : proviamo per induzione su n che tutte le potenze sono positive e crescenti su $\mathbb{R}^+$, perché le altre affermazioni sono facili conseguenze: per $n = 1$ tutto è ovvio, pertanto supponiamo che la funzione $x \mapsto x^n$ sia positiva e crescente su $\mathbb{R}^+$, e dimostriamo la stessa cosa per la funzione $x \mapsto x^{n+1}$. Se $0 < x < y$, abbiamo per l'ipotesi di induzione che $0 < x^n < y^n$. Moltiplicando questa disuguaglianza per il numero positivo x otteniamo

$$0 < x^{n+1} < xy^n ;$$

d'altra parte, moltiplicando la disuguaglianza di partenza $0 < x < y$ per y^n , che è positivo per l'ipotesi di induzione, ricaviamo

$$0 < xy^n < y^{n+1} ,$$

che unita alla disuguaglianza precedente ci dà la tesi $0 < x^{n+1} < y^{n+1}$ per la proprietà transitiva (✎ es. 4.23). ∎

Da questa proposizione si ricava in particolare che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ la funzione $x^n : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ è iniettiva, e se n è dispari la funzione $x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva. A questo punto, potremmo imbarcarci in una variante della dimostrazione della proposizione 3.19 per provare il prossimo risultato; invece, sarà enormemente più facile dimostrarlo come conseguenza del teorema dei valori intermedi 6.29, perciò per ora lo assumiamo senza dimostrarne la verità. È opportuno osservare che in entrambe le dimostrazioni si deve usare, in modo più o meno evidente, la proprietà di Dedekind 3.12: la prossima proposizione è vera in $\mathbb{R}$, ma non in $\mathbb{Q}$.

Proposizione 4.10 : *sia* $n \in \mathbb{N}^+$ *; la funzione* $x^n : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *è surgettiva; se* n *è dispari la funzione* $x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è surgettiva.*

Una conseguenza fondamentale delle proposizioni precedenti è l'esistenza delle radici (che non avremmo se usassimo solo $\mathbb{Q}$).

Proposizione 4.11 : *sia* $n \in \mathbb{N}^+$ *; esiste la funzione inversa della funzione* x^n : $[0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *, che si chiama radice n-esima,* $\sqrt[n]{x} : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *. La radice n-esima di un numero non negativo* x *è l'unico numero non negativo la cui potenza n-esima vale* x *.*

Se n *è dispari, esiste l'inversa di* $x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *, che è* $\sqrt[n]{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *.*

È importante ricordare che la radice quadrata **non** è l'inversa della funzione x^2 , che non è neppure iniettiva, bensì l'inversa della restrizione di x^2 a $[0,+\infty[$, pensata come funzione a valori in $[0,+\infty[$; infatti, non è vero che $x = \sqrt{x^2}$, e neppure che $x = (\sqrt{x})^2$: basta provare con $x = -1$; queste uguaglianze sono vere se e solo se $x \geq 0$. Dopo aver introdotto il valore assoluto, potremo scrivere qualcosa di più (✎ es. 4.29).

Dalle proprietà finora viste segue in particolare che le potenze razionali positive di x sono crescenti e positive su $\mathbb{R}^+$, le potenze razionali negative sono decrescenti e positive su $\mathbb{R}^+$; per le potenze razionali con esponente a denominatore dispari, la monotonia

su $\mathbb{R}^-$ dipende dalla parità del numeratore. Di queste proprietà bisogna tenere conto quando si risolvono equazioni o disequazioni che contengono radici o potenze.

L'equazione $\sqrt{f(x)} = g(x)$, dove f e g sono due funzioni reali, equivale al sistema

$$\begin{cases} x \in \operatorname{dom} f & \text{per l'esistenza di } f(x) \\ f(x) \geq 0 & \text{per l'esistenza di } \sqrt{f(x)} \\ x \in \operatorname{dom} g & \text{per l'esistenza di } g(x) \\ g(x) \geq 0 & \text{perché } \sqrt{f(x)} \geq 0 \text{ dalle condizioni precedenti} \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$$

in quanto le prime quattro condizioni assicurano che sia $\sqrt{f(x)}$ sia $g(x)$ sono due numeri non negativi, e su $[0,+\infty[$ la funzione quadrato è biunivoca, ovvero $g(x) = \sqrt{f(x)} \iff [g(x)]^2 = [\sqrt{f(x)}]^2 = f(x)$. Possiamo osservare che in realtà l'ultima condizione contiene già la seconda, perché implica che $f(x)$ è uguale a un quadrato, che è sempre non negativo (tuttavia, è meglio mettere una condizione ridondante piuttosto che rischiare di ometterne una necessaria: se siete in dubbio su quale tra $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$ è inutile, scrivetele entrambe).

Esempio : l'equazione $\sqrt{2x-1} = x+3$ equivale al sistema

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 & \text{(inutile)} \\ x + 3 \geq 0 \\ 2x - 1 = (x+3)^2 , \end{cases}$$

che non ha soluzione (✎ es. 4.24).

Per quanto riguarda le disequazioni che contengono radici quadrate, ci limitiamo ai due casi modello: $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ e $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$. La disequazione $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ equivale al sistema

$$\begin{cases} x \in \operatorname{dom} f \\ f(x) \geq 0 \\ x \in \operatorname{dom} g \\ g(x) \geq 0 & \text{perché } g(x) \geq \sqrt{f(x)} \geq 0 \text{ dalle condizioni precedenti} \\ f(x) \leq [g(x)]^2 \end{cases}$$

in quanto le prime quattro condizioni assicurano che sia $\sqrt{f(x)}$ sia $g(x)$ sono due numeri non negativi, e su $[0,+\infty[$ la funzione quadrato è crescente, ovvero $\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Rightarrow f(x) \leq [g(x)]^2$. Poiché la funzione radice quadrata è anch'essa crescente, dalle prime quattro condizioni segue che $f(x) \leq [g(x)]^2 \Rightarrow \sqrt{f(x)} \leq g(x)$, e questo completa l'equivalenza. Qui la seconda condizione non è già contenuta nell'ultima, e non può quindi essere omessa.

Invece, la disequazione $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ va scissa in due casi: a parte l'esistenza di f , di g e della radice, la disequazione è certamente verificata dove $g(x) < 0$, perché una radice quadrata è sempre maggiore o uguale a zero; invece, dove $g(x) \geq 0$ si possono elevare al quadrato ambo i membri senza perdere né aggiungere soluzioni, per la crescenza della funzione quadrato su $[0, +\infty[$. In definitiva, la disequazione $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ equivale (✎ es. 4.26) a

$$\begin{cases} x \in \operatorname{dom} f \\ f(x) \geq 0 \\ x \in \operatorname{dom} g \\ [g(x) < 0] \quad \text{o} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq [g(x)]^2 \, . \end{cases} \end{cases}$$

4.5 - Funzioni elementari: valore assoluto

Il valore assoluto è una funzione sulla quale si concentra una buona fetta degli errori più frequenti.

Definizione : *la funzione valore assoluto (che ha dominio e codominio uguali ad* $\mathbb{R}$ *) è definita come quella legge che a ogni numero* $a \in \mathbb{R}$ *associa* $|a| = \max\{a, -a\}$.

Notiamo che la funzione valore assoluto è ben definita, perché un sottoinsieme finito e non vuoto di $\mathbb{R}$ ha sempre massimo (✎ es. 3.10).

Esempio : $|2.5| = 2.5$, $|0| = 0$, $|-3| = 3$.

Dalla definizione otteniamo le principali proprietà del valore assoluto.

Proposizione 4.12 : *per ogni* $a \in \mathbb{R}$,

1) $a \leq |a|$
2) $|a| = a$ *se* $a \geq 0$, *mentre* $|a| = -a$ *se* $a \leq 0$
3) $|a| \geq 0$
4) $|a| = 0 \iff a = 0$
5) $|a| = |-a|$
6) $-|a| \leq a \leq |a|$;

inoltre per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

7) $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$ (4.8)
8) $|a| \geq b \iff [(a \geq b) \text{ o } (a \leq -b)]$
9) $|a| < b \iff -b < a < b$
10) $|a| > b \iff [(a > b) \text{ o } (a < -b)]$.

DIMOSTRAZIONE : le prime sei proprietà sono molto facili (✎ es. 4.28).

Mostriamo la formula (4.8): $|a| \leq b \iff \max\{a, -a\} \leq b$, il che è equivalente a dire che b è un maggiorante di $\{a, -a\}$, ovvero che è maggiore o uguale di entrambi; questo si scrive $(b \geq a)$ e $(b \geq -a)$, che possiamo riscrivere $(a \leq b)$ e $(a \geq -b)$, o anche $-b \leq a \leq b$. Poiché tutti i passaggi che abbiamo svolto sono delle equivalenze, abbiamo provato entrambe le implicazioni.

Le successive tre proprietà sono simili alla precedente (✎ es. 4.30). ■

Generalmente la 2) viene presa come definizione di valore assoluto, ma osserviamo che con la nostra definizione le dimostrazioni risultano spesso più facili (✎ es. 4.31), ed è chiaro che il valore assoluto è una funzione, cioè assume un solo valore. Un errore che si trova molto frequentemente è ritenere che il valore assoluto di un numero x sia più o meno x , così che $|2| = \pm 2$ ... ; un altro, è scrivere che $|-a| = +a$: questo è vero se $a \geq 0$, ma è falso se $a < 0$.

Una conseguenza facile della proposizione precedente è una versione equivalente della definizione di insieme limitato, valida in $\mathbb{R}$.

Proposizione 4.13 : *un insieme* $A \subset \mathbb{R}$ *è limitato se e solo se esiste* $M > 0$ *tale che*

$$\forall a \in A, \; |a| \leq M \, .$$

DIMOSTRAZIONE : se A è limitato esistono due costanti H, K tali che per ogni $a \in A$ si abbia $H \leq a \leq K$; scelto allora $M = |H| + |K|$ abbiamo $K \leq M$ e $-M \leq H$, quindi anche $-M \leq a \leq M$, ovvero $|a| \leq M$ per la proprietà (4.8). Viceversa, se per ogni a si ha $|a| \leq M$ basta scegliere $H = -M$ e $K = M$ per avere $H \leq a \leq K$. ■

Osservazione : la proposizione precedente implica che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è limitata se e solo se

$$\exists M > 0 : \forall x \in A, \quad |f(x)| \leq M \, .$$

Le prossime proprietà hanno un'interpretazione geometrica nel contesto degli spazi vettoriali euclidei.

Proposizione (disuguaglianze triangolari) 4.14 : *se* $a, b \in \mathbb{R}$,

1) $|a + b| \leq |a| + |b|$ il valore assoluto della somma è minore della somma dei valori assoluti.
2) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

il valore assoluto della differenza di valori assoluti è minore del val[ore] assoluto della differenza

DIMOSTRAZIONE : osserviamo che per la proprietà 6) della proposizione 4.12

$$\begin{cases} -|a| \leq a \leq |a| \\ -|b| \leq b \leq |b| \end{cases}$$

e quindi, sommando membro a membro (✎ es. 4.32),

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq (|a| + |b|) \, .$$

A questo punto, basta applicare la formula (4.8), con $a+b$ al posto di a, e $|a|+|b|$ al posto di b.

Per provare 2), osserviamo che dalla disuguaglianza appena dimostrata segue

$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|,$$

da cui

$$|a| - |b| \leq |a-b|; \tag{4.9}$$

analogamente

$$|b| = |(b-a)+a| \leq |b-a| + |a| = |a-b| + |a|,$$

dove abbiamo usato il fatto che il valore assoluto di un numero è uguale a quello del suo opposto; da questa disuguaglianza ricaviamo

$$-|a-b| \leq |a| - |b|,$$

che unita alla formula (4.9) dà

$$-|a-b| \leq |a| - |b| \leq |a-b|.$$

Da questa si ottiene subito la seconda disuguaglianza triangolare, utilizzando ancora la formula (4.8). ■

Se decidiamo di prendere come distanza tra due numeri reali a e b la differenza tra il più grande e il più piccolo, notiamo subito che tale differenza è $|a-b|$, indipendentemente da quale dei due fosse il maggiore: dunque, usiamo il valore assoluto della differenza come definizione di distanza fra numeri reali (➡ appendice 4.3).

Osservazione : la prima disuguaglianza triangolare (il valore assoluto della somma è minore o uguale della somma dei valori assoluti) si generalizza al caso di un numero finito di addendi: se $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|. \tag{4.10}$$

La dimostrazione usa il principio di induzione (✎ es. 4.34).

Esempio : risolvere l'equazione $|2x+1| = 5-4x$ equivale a determinare l'insieme $S = \{x \in \mathbb{R} : |2x+1| = 5-4x\}$; poiché

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &= \{x \in \mathbb{R} : [2x+1 \geq 0] \text{ o } [2x+1<0]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 2x+1 \geq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2x+1<0\} = T_1 \cup T_2,\end{aligned}$$

abbiamo

$$S = \mathbb{R} \cap S = (T_1 \cup T_2) \cap S = (T_1 \cap S) \cup (T_2 \cap S), \tag{4.11}$$

ovvero

$$\begin{aligned}S = &\{x \in \mathbb{R} : [2x+1 \geq 0] \text{ e } [|2x+1| = 5-4x]\} \\ &\cup \{x \in \mathbb{R} : [2x+1<0] \text{ e } [|2x+1| = 5-4x]\}.\end{aligned}$$

L'equazione di partenza equivale allora a

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ |2x+1| = 5-4x \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} 2x+1 < 0 \\ |2x+1| = 5-4x; \end{cases}$$

dato che se $2x+1 \geq 0$ è $|2x+1| = 2x+1$ mentre se $2x+1<0$ è $|2x+1| = -2x-1$ (questo è il motivo della scelta degli insiemi T_1 e T_2), questi sistemi equivalgono a

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 2x+1 = 5-4x \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} 2x+1 < 0 \\ -(2x+1) = 5-4x, \end{cases}$$

cioè a

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x = 2/3 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} 2x+1 < 0 \\ x = 3. \end{cases}$$

Il secondo sistema non ha soluzione, il primo ha soluzione $x = 2/3$; come visto in (4.11), la soluzione dell'equazione di partenza è l'unione delle soluzioni dei sistemi, quindi l'unica soluzione dell'equazione di partenza è $x = 2/3$ (✎ es. 4.35).

A differenza di quanto accade per le equazioni lineari, non bisogna credere che un'equazione contenente valori assoluti nella quale compare solo la prima potenza dell'incognita abbia una e una sola soluzione: ad esempio, le equazioni $|x| = -1$ e $|x| = x$ hanno rispettivamente zero e infinite soluzioni.

Un errore molto frequente è scrivere qualcosa del tipo

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \geq 0 \\ -(2x+1) & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad (!!!!)$$

Invece la scrittura corretta è

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } 2x+1 \geq 0 \\ -(2x+1) & \text{se } 2x+1 < 0. \end{cases}$$

Probabilmente, un errore del genere ci è passato sotto gli occhi centinaia di volte, quindi questa osservazione non va sottovalutata.

Nella risoluzione delle disequazioni contenenti valori assoluti tornano spesso utili la proprietà (4.8) e quella successiva.

Esempio : risolviamo in tre modi la disequazione $\left|2x - |x^2-3|\right| < 1$: prima proviamo a scindere in casi il valore assoluto più esterno, così la disequazione diventa equivalente a

$$\begin{cases} 2x - |x^2-3| \geq 0 \\ 2x - |x^2-3| < 1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} 2x - |x^2-3| < 0 \\ |x^2-3| - 2x < 1 \end{cases}$$

che scindendo ancora in casi a seconda del segno di x^2-3 risulta equivalente a

$$\begin{cases} x^2-3\ge 0 \\ x^2-2x-3\le 0 \\ x^2-2x-2>0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x^2-3<0 \\ x^2+2x-3\ge 0 \\ x^2+2x-4<0 \end{cases}$$

$$\text{o} \quad \begin{cases} x^2-3\ge 0 \\ x^2-2x-3>0 \\ x^2-2x-4<0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x^2-3<0 \\ x^2+2x-3<0 \\ x^2+2x-2>0 \,, \end{cases}$$

con notevoli rischi di confusioni. In totale, si devono studiare dodici disequazioni di secondo grado, di cui solo sette sostanzialmente diverse tra loro, con ulteriori pericoli.

Provando invece a scindere il valore assoluto più interno, si arriva allo stesso punto, ma un po' più rapidamente e quindi con minori possibilità di errore.

Proviamo infine a non spezzare mai in casi, e a usare sistematicamente la proprietà (4.8) e quella successiva:

$$\begin{aligned} \big|2x-|x^2-3|\big|<1 &\iff -1<2x-|x^2-3|<1 \\ &\iff \begin{cases} |x^2-3|<2x+1 \\ |x^2-3|>2x-1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2x-1<x^2-3<2x+1 \\ [x^2-3>2x-1] \text{ o } [x^2-3<-2x+1] \end{cases} : \end{aligned}$$

quattro sole disequazioni, e pochissimi passaggi (✎ es. 4.36).

A partire dal valore assoluto, possiamo costruire altre due funzioni interessanti.

Definizione : *la parte positiva* x^+ *e la parte negativa* x^- *del numero* x *sono date da*

$$x^+ = \frac{|x|+x}{2} \qquad x^- = \frac{|x|-x}{2} \,.$$

Esempio : la parte positiva di 3 è 3, la parte positiva di -1.5 è 0, la parte negativa di 3 è 0 e la parte negativa di -1.5 è 1.5.

Osserviamo che per le proprietà 1) e 5) della proposizione 4.12, tanto la parte positiva che la parte negativa di ogni numero reale x sono numeri non negativi (✎ es. 4.39); abbiamo poi due uguaglianze immediate (✎ es. 4.40):

$$|x| = x^+ + x^- \,, \qquad x = x^+ - x^- \,.$$

Dalla definizione di valore assoluto si ricava facilmente (✎ es. 4.41)

$$x^+ = \max\{x,0\} = \begin{cases} x & \text{se } x\ge 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad x^- = -\min\{x,0\} = \begin{cases} -x & \text{se } x\le 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{4.12}$$

Notiamo infine che $x^- = (-x)^+$.

I grafici delle funzioni x^+ e x^- sono riportati qui di seguito.

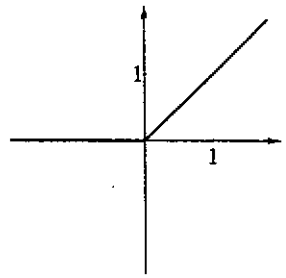


Fig. 4.5 : parte positiva di x

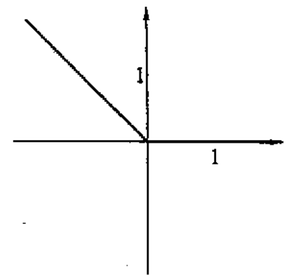


Fig. 4.6 : parte negativa di x

Esempio : l'equazione $(2x+1)^+ = 3-x$ equivale a $\frac{|2x+1|+(2x+1)}{2} = 3-x$, cioè a $|2x+1| = 5-4x$, che abbiamo risolto poco sopra; in alternativa, vista la caratterizzazione (4.12), l'equazione di partenza equivale a

$$\begin{cases} 2x+1<0 \\ 3-x=0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ 2x+1=3-x \,. \end{cases}$$

Il valore assoluto di x è definito come il massimo fra x e $-x$; più in generale, date due funzioni f e g, possiamo definire le funzioni massimo fra f e g e minimo fra f e g ponendo per ogni x per cui ha senso (cioè nell'intersezione dei domini)

$$(f\vee g)(x) = \max\{f(x),g(x)\} \,, \qquad (f\wedge g)(x) = \min\{f(x),g(x)\} \,.$$

Valgono le seguenti caratterizzazioni:

$$\begin{aligned} f\vee g = g+\max\{(f-g),0\} = g+(f-g)^+ &= g+\frac{(f-g)+|f-g|}{2} \\ &= \frac{(f+g)+|f-g|}{2} \,, \end{aligned} \tag{4.13}$$

e analogamente (✎ es. 4.44)

$$f\wedge g = \frac{(f+g)-|f-g|}{2} \,. \tag{4.14}$$

La parte positiva e la parte negativa sono casi particolari di questo.

4.6 - Funzioni elementari: funzioni trigonometriche

Per quanto riguarda le funzioni trigonometriche, si potrebbe darne una definizione precisa, che non utilizza disegni, angoli e intuizione geometrica, dopo aver studiato un po' di equazioni differenziali, o quantomeno (più laboriosamente) dopo aver introdotto le derivate. Tuttavia, la fatica richiesta è a questo punto sproporzionata, quindi ci limitiamo ad assumere la definizione abituale del seno e del coseno di un angolo (sempre misurato in radianti), nonché della tangente, rapporto tra seno e coseno.

Se individuiamo sulla circonferenza goniometrica, cioè (☞ figura 4.7) la circonferenza centrata nell'origine del piano cartesiano e avente raggio 1, il punto P corrispondente ad un angolo x, le coordinate di P sono $(\cos x, \operatorname{sen} x)$. Se P non è sull'asse delle ordinate (cioè se $\cos x \neq 0$), la retta che passa per P e per l'origine O degli assi interseca in un punto T la retta tangente alla circonferenza nel punto A di coordinate $(1,0)$. Facili proporzioni mostrano che le coordinate di T sono $(1, \tan x)$. Indichiamo poi con H il punto di coordinate $(\cos x, 0)$.

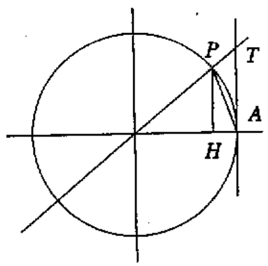


Fig. 4.7 : il cerchio goniometrico

Osserviamo che i valori di seno e coseno si ripetono ogni 2π: questa è la caratteristica delle funzioni periodiche.

Definizione : *se* $A \subset \mathbb{R}$ *e* $T > 0$, *una funzione* $f : A \to \mathbb{R}$ *si dice periodica di periodo* T, *o T-periodica, se*
1) $\forall x,\ [x \in A \iff x + T \in A]$
2) $\forall x \in A,\ f(x) = f(x+T)$.

Osserviamo che la funzione seno verifica la condizione precedente con $T = 2\pi$, ma anche con $T = 4\pi$, $T = 6\pi$ eccetera: è facile verificare (✎ es. 4.45) che una funzione periodica di periodo T è anche periodica di periodo nT per ogni $n = 2, 3, 4, \ldots$; in particolare, se f è T-periodica allora

$$f(x) = f(x + kT) \qquad \forall x \in A,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Se T è il minimo tra tutti i possibili valori del periodo di una funzione (non sempre il minimo esiste (✎ es. 4.46)), diciamo che f ha minimo periodo T (✎ es. 4.50).

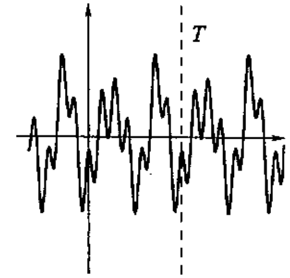


Fig. 4.8 : una funzione T-periodica

Se una funzione (che per comodità pensiamo definita su tutto $\mathbb{R}$) è T-periodica, basta conoscerla sull'intervallo $[0, T[$ per determinarla su tutto $\mathbb{R}$: infatti ogni numero x si può scrivere $x = kT + y$ con $k \in \mathbb{Z}$ e $y \in [0, T[$, quindi $f(x) = f(y)$. Si può anzi vedere facilmente (✎ es. 4.52) che dato un qualsiasi numero a si può scrivere $x = kT + y$ con $y \in [a, a+T[$, dunque per determinare una funzione T-periodica è sufficiente conoscerla su un intervallo $[a, a+T[$.

Ricaviamo immediatamente dalla definizione del seno e del coseno alcune proprietà che ci saranno utili in seguito: anzitutto, la funzione seno è dispari e la funzione coseno è pari, cioè

$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x), \qquad \cos x = \cos(-x);$$

poi,

$$-1 \le \operatorname{sen} x \le 1 \qquad \forall x$$
$$-1 \le \cos x \le 1 \qquad \forall x; \tag{4.15}$$

in particolare, dato che $1 < \pi/2$,

$$\operatorname{sen} x < x \qquad \forall x \ge \frac{\pi}{2}. \tag{4.16}$$

Per $0 < x < \pi/2$, la lunghezza dell'arco AP è x, e le lunghezze dei segmenti PH ed AH sono rispettivamente $\operatorname{sen} x$ ed $1 - \cos x$ (questo non è vero per tutti gli $x \in \mathbb{R}$: per quali è vero?), mentre la lunghezza del segmento AT è $\tan x$. Poiché AT è un segmento di tangente relativo all'arco AP, è più lungo di esso, dunque

$$\tan x > x \qquad \forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2}; \tag{4.17}$$

d'altra parte l'arco AP è più lungo della corda AP, che è l'ipotenusa del triangolo rettangolo AHP ed è a sua volta più lunga dei cateti PH ed AH, cioè

$$\operatorname{sen} x < x \qquad \forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2} \tag{4.18}$$

$$1 - \cos x < x \qquad \forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2} \,. \tag{4.19}$$

Da (4.16) e (4.18) ricaviamo

$$\operatorname{sen} x < x \qquad \forall x > 0 \,. \tag{4.20}$$

Poiché la funzione seno è dispari, da questa disuguaglianza otteniamo subito (✎ es. 4.53)

$$\operatorname{sen} x > x \qquad \forall x < 0 \,. \tag{4.21}$$

Dato che $\operatorname{sen} x > 0 > -x$ per $0 < x < \pi/2$, mentre $\operatorname{sen} x \geq -1 > -\pi/2 \geq -x$ per $x \geq \pi/2$, abbiamo anche

$$\operatorname{sen} x > -x \qquad \forall x > 0 \,,$$

quindi da (4.20) e (4.8), usando anche il fatto che il seno è dispari, ricaviamo (✎ es. 4.54)

$$|\operatorname{sen} x| < |x| \qquad \forall x \neq 0$$

$$|\operatorname{sen} x| \leq |x| \qquad \forall x \,. \tag{4.22}$$

In modo analogo, partendo da (4.15) e (4.19), otteniamo

$$1 - |x| \leq \cos x \leq 1 \qquad \forall x \,. \tag{4.23}$$

Da (4.17) e (4.20) otteniamo anche

$$0 < \operatorname{sen} x < x < \tan x \qquad \forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2} \,, \tag{4.24}$$

quindi

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \qquad \forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

e anche

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \qquad \forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2} \,. \tag{4.25}$$

Poiché il coseno è una funzione pari ed il seno è dispari, otteniamo subito che questa formula (che utilizzeremo più avanti), è vera anche per $-\pi/2 < x < 0$.

Per quanto riguarda monotonia ed invertibilità, è chiaro che seno, coseno e tangente non sono monotone, e neppure iniettive (come tutte le funzioni periodiche). Tuttavia, la funzione seno è strettamente crescente (dunque iniettiva) in tutti gli intervalli della forma $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Uno di tali intervalli è ad esempio $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; la restrizione della funzione $\operatorname{sen} x$ a questo intervallo è iniettiva, ed ha valori compresi tra -1 ed 1, che sono rispettivamente il suo valore minimo e il suo valore massimo. Vedremo in seguito, come conseguenza del teorema dei valori intermedi 6.29, che la restrizione della funzione seno all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ assume tutti i valori compresi tra -1 ed 1, così che

$$\operatorname{sen}|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$

risulta essere biunivoca, e come tale ammette inversa. L'inversa di questa funzione (non l'inversa della funzione seno) si chiama arcoseno; il numero $\operatorname{arcsen} x$ indica l'arco, compreso tra $-\pi/2$ e $\pi/2$, il cui seno è x. La funzione arcsen è allora definita su $[-1, 1]$, ha immagine $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e risulta strettamente crescente, perché inversa di una funzione strettamente crescente (☞ proposizione 4.8).

Osserviamo che per ogni $x \in [-1, 1]$ ci sono infiniti y tali che $\operatorname{sen} y = x$: ad esempio, per $x = 0$ basta scegliere $y = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$; tuttavia, uno solo di tali valori è $\operatorname{arcsen} x$, quello compreso tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ (nell'esempio, $y = 0$). La funzione $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)$ è definita in $[-1, 1]$; per tali x è sempre vero che $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$. Invece, non è sempre vero che $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x$: questo accade solo per i numeri x tali che $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.

Esempio : l'equazione $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = 1/2$ ha come soluzione $x = 1/2$; invece, l'equazione $\operatorname{sen}\big(\operatorname{arcsen}(2x+1)\big) = x - 3$ non ha soluzioni, perché essa equivale al sistema

$$\begin{cases} -1 \leq 2x + 1 \leq 1 \\ 2x + 1 = x - 3 \end{cases}$$

(la prima riga del sistema serve perché sia definito il primo membro dell'equazione), che non ha soluzioni. L'equazione $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = 2x - 1$ equivale al sistema

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq 2x - 1 \leq \frac{\pi}{2} \\ x = 2x - 1 \end{cases}$$

che ha soluzione $x = 1$.

Osserviamo che l'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ potrebbe essere sostituito da uno qualsiasi degli intervalli $[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}]$: in tal caso si otterrebbe l'inversa di un'altra restrizione del seno, quindi una funzione diversa dalla funzione arcoseno; la scelta fatta è convenzionale, anche se ci sono ovvî motivi pratici per preferire, tra tutti questi intervalli, proprio quello utilizzato.

In modo analogo si può trattare la funzione coseno: essa non è invertibile, ma la sua restrizione all'intervallo $[0, \pi]$

$$\cos|_{[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

è strettamente decrescente e biunivoca, quindi ammette inversa

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi] \,.$$

La funzione arcocoseno è strettamente decrescente.

Di nuovo, la funzione tangente è π-periodica, quindi non è iniettiva, ma la sua restrizione all'intervallo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} : \,]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\,\to \mathbb{R}$$

è strettamente crescente e biunivoca, quindi ha inversa

$$\arctan : \mathbb{R} \to \,]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\,,$$

che è anch'essa strettamente crescente (✎ es. 4.56).

4.7 - Funzioni iperboliche

Tra le funzioni elementari mancano ancora l'esponenziale e il logaritmo, che tratteremo diffusamente nella sezione 5.9, e le funzioni iperboliche: queste sono il seno iperbolico, il coseno iperbolico e la tangente iperbolica, e sono definite su tutto $\mathbb{R}$ in termini della funzione esponenziale come

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \tanh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} . \end{aligned}$$

I grafici di queste tre funzioni iperboliche sono i seguenti:

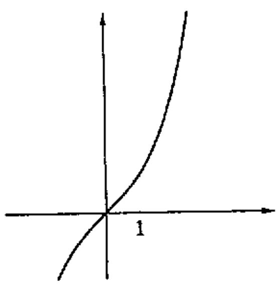


Fig. 4.9 : $y = \operatorname{senh} x$

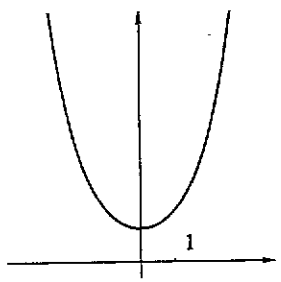


Fig. 4.10 : $y = \cosh x$

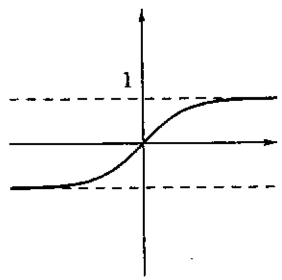


Fig. 4.11 : $y = \tanh x$

È molto facile dimostrare (✎ es. 4.65) che seno iperbolico e tangente iperbolica sono funzioni dispari, mentre il coseno iperbolico è pari; una relazione fondamentale fra le funzioni iperboliche è

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \ :$$

infatti

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = (\cosh x + \operatorname{senh} x)(\cosh x - \operatorname{senh} x) = e^x \cdot e^{-x} = 1 .$$

Valgono per le funzioni iperboliche altre uguaglianze, in qualche modo simili alle formule di addizione dei seni o altre, per le quali rimandiamo agli esercizi (✎ es. 4.67).

Mostriamo che il seno iperbolico è una funzione biunivoca da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, e ricaviamo la sua inversa, che si chiama "settore seno iperbolico": occorre risolvere l'equazione $x = \operatorname{senh} y$ in termini di y. Questa equazione si scrive

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} ,$$

cioè, posto $e^y = t$ e osservando che deve essere $t > 0$,

$$x = \frac{t - t^{-1}}{2} \qquad 2x = t - \frac{1}{t} \qquad t^2 - 2xt - 1 = 0 \ :$$

questa equazione di secondo grado è sempre risolubile ($\Delta = 4x^2 + 4$) e il prodotto delle sue radici è il terzo coefficiente, cioè -1. Allora una radice è positiva e l'altra è negativa (ci se ne può accorgere anche dopo averle scritte esplicitamente); dato che ci interessano solo le soluzioni con $t > 0$ dobbiamo scegliere solo la positiva, che è quella maggiore, vale a dire

$$t = x + \sqrt{x^2 + 1} ,$$

da cui finalmente (ricordiamo che $t > 0$)

$$y = \log t = \log\big(x + \sqrt{x^2+1}\big) \ :$$

abbiamo risolto l'equazione per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi la funzione

$$\operatorname{sett\,senh} x = \log\big(x + \sqrt{x^2+1}\big)$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$.

È facile verificare (✎ es. 4.68) che le funzioni $\cosh x$ e $\tanh x$ risultano invertibili rispettivamente da $[0,+\infty[$ a $[1,+\infty[$ e da $\mathbb{R}$ a $]-1,1[$, per cui in tali intervalli sono definite le loro inverse. Risulta

$$\begin{aligned} \operatorname{sett\,cosh} x &= \log\big(x + \sqrt{x^2-1}\big) \\ \operatorname{sett\,tanh} x &= \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} . \end{aligned}$$

Tracciamo anche i grafici delle funzioni iperboliche inverse:

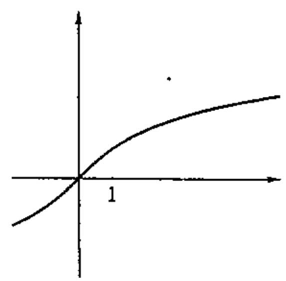


Fig. 4.12 : $y = \operatorname{sett\,senh} x$

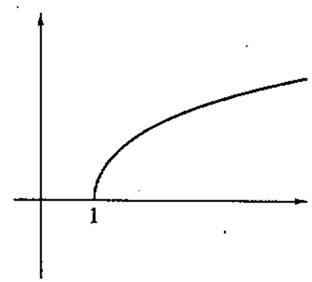


Fig. 4.13 : $y = \operatorname{sett\,cosh} x$

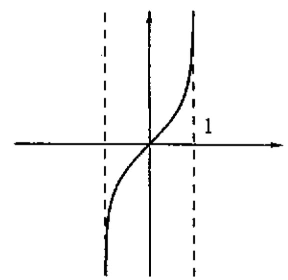


Fig. 4.14 : $y = \operatorname{sett\,tanh} x$

Non riportiamo nel testo l'interpretazione geometrica delle funzioni iperboliche, e la giustificazione della parola stessa (➡ appendice 4.4).

4.8 - Grafici di funzioni reali

Trattando di funzioni reali, possiamo dire qualcosa di più riguardo al grafico. Anzitutto, se abbiamo a disposizione il grafico di una data funzione possiamo dedurne, con una certa approssimazione, se la funzione è iniettiva o no, se è monotona o no, e qual è la sua immagine (quindi in particolare se è surgettiva o no). L'approssimazione è dovuta al fatto che i grafici non possono essere precisi (ammesso che non siano completamente errati, come spesso capita di vedere!), né rappresentare funzioni definite su insiemi illimitati, ad esempio tutto $\mathbb{R}$. Allora, le deduzioni che si fanno osservando un grafico devono essere prese solo come base per la dimostrazione, che va condotta con i normali metodi analitici; se sappiamo già cosa dobbiamo dimostrare, anziché procedere alla cieca imposteremo la dimostrazione in base alle congetture fatte: così non tenteremo di dimostrare la monotonia di una funzione, se dal grafico sembra essere non monotona, ma semmai useremo le informazioni del grafico per dimostrarne la non monotonia, e così via.

La monotonia dovrebbe essere già chiara dagli esempi fatti: una funzione è crescente se spostandoci verso destra il punto sul grafico continua a salire, e similmente per gli altri andamenti.

Dire che un punto b appartiene all'immagine di una funzione f significa che esiste qualche punto a tale che $f(a) = b$; tradotto in termini di grafico, questo vuol dire che il punto del grafico $(a, f(a))$ coincide con il punto (a, b), dunque che la retta di equazione $y = b$ interseca il grafico di f nel punto di ascissa a.

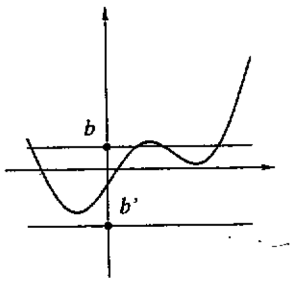


Fig. 4.15 : b sta nell'immagine di f, b' no

Allora, un punto b appartiene all'immagine di f se e solo se la retta di equazione $y = b$, cioè la retta orizzontale all'altezza b, interseca il grafico di f. L'immagine di f

risulta allora essere l'insieme dei punti di intersezione dell'asse y con le rette orizzontali che passano per i punti del grafico di f, cioè la proiezione del grafico di f sull'asse y. Ricordiamo infine (☛ esercizio 2.44) che l'immagine di f è l'insieme dei punti $b \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $f(x) = b$ ha soluzioni (✎ es. 4.70).

Osserviamo che con questo metodo è possibile anche risolvere (approssimativamente) delle disequazioni: ad esempio, risolvere la disequazione $f(x) \leq b$ significa trovare i punti x in cui $f(x) \leq b$, cioè i punti x tali che $(x, f(x))$ sta non al di sopra della retta di equazione $y = b$ (✎ es. 4.89).

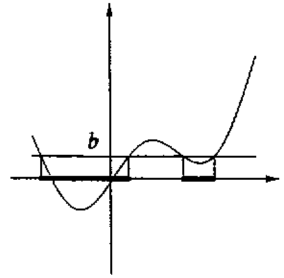


Fig. 4.16 : in neretto la soluzione della disequazione $f(x) \leq b$

Per quanto riguarda l'iniettività, ricordiamo che una funzione f non è iniettiva se e solo se esistono due punti distinti nei quali la funzione assume lo stesso valore. In termini di grafico, questo significa che c'è una retta orizzontale che interseca il grafico di f in due (o più) punti distinti, pertanto una funzione f risulta iniettiva se e solo se tutte le rette orizzontali intersecano il grafico di f in al più un punto (cioè o non lo intersecano per niente, se la quota corrispondente non appartiene all'immagine di f, o lo intersecano in un solo punto).

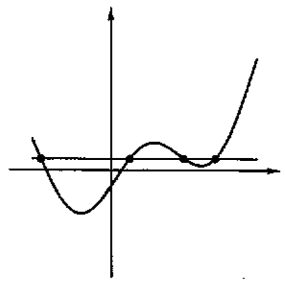


Fig. 4.17 : una funzione non iniettiva

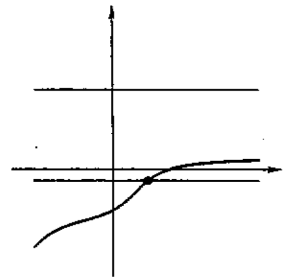


Fig. 4.18 : una funzione iniettiva

Se anche una sola retta orizzontale interseca il grafico di f in più punti, f non è iniettiva. Ricordiamo che un altro modo per esprimere l'iniettività (☞ esercizio 2.41) è dire che per ogni $b \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = b$ ha al più una soluzione (✎ es. 4.71).

Abbiamo visto come si possano dedurre immediatamente delle congetture se conosciamo il grafico di una funzione, anche quando non ne abbiamo l'espressione analitica (cioè non sappiamo la formula che definisce la funzione); se possibile, dovremo poi verificare queste congetture con una dimostrazione, ma il grafico convoglia con un'occhiata molte più informazioni di quante sia possibile ricavarne osservando brevemente l'espressione della funzione. Allora, vediamo come dall'espressione analitica di una funzione si può, in qualche caso, giungere rapidamente a disegnarne un grafico approssimativo; questa è un'operazione importante, anche in vista dell'introduzione, nel capitolo 7, di nuovi strumenti analitici per disegnare un grafico più preciso. Infatti, questi strumenti si basano su calcoli a volte complicati, che capita di sbagliare: se siamo riusciti a disegnare in anticipo un'approssimazione del grafico che ci aspettiamo, e questa non si accorda con il grafico ottenuto mediante i calcoli, è segno che c'è qualcosa da ricontrollare.

Iniziamo con le traslazioni: dato il grafico di una funzione f, ed un numero reale h, è facile disegnare i grafici delle funzioni $x \mapsto f(x) \pm h$ e $x \mapsto f(x \pm h)$. Infatti, se un punto (x, y) appartiene al grafico di f il valore dell'ordinata y è uguale ad $f(x)$, quindi il punto $(x, y+h)$ appartiene al grafico di $x \mapsto f(x)+h$ (in questa figura e nelle prossime il grafico di f è riportato per comodità, con una riga sottile, anche insieme al grafico della funzione trasformata).

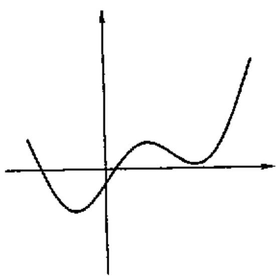


Fig. 4.19 : una generica funzione f

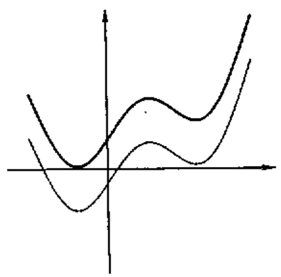


Fig. 4.20 : il grafico di $f(x)+2$

Ma $(x, y+h)$ si ottiene da (x, y) mediante una traslazione di h verso l'alto, pertanto il grafico di $x \mapsto f(x)+h$ si ottiene dal grafico di f traslando quest'ultimo di h verso l'alto (attenzione: se h è negativo, il movimento risulterà in realtà verso il basso). È chiaro che anche $f(x) - h$ rientra in questo caso, perché basta scriverla $f(x) + (-h)$ (✎ es. 4.72).

In modo analogo vediamo che se $g(x) = f(x-h)$ e il punto (x, y) appartiene al grafico di g, allora $y = g(x) = f(x-h)$, quindi il punto $(x-h, y) = (x-h, f(x-h))$ appartiene al grafico di f. Dunque (☞ figura 4.21) il grafico di f si ottiene da quello di g traslando quest'ultimo di h verso sinistra, ovvero, che è quello che ci interessa, il grafico di $x \mapsto f(x-h)$ si ottiene da quello di f traslando quest'ultimo di h verso destra (con la solita avvertenza: se h è negativo, il movimento reale sarà verso sinistra). Occorre quindi fare attenzione al segno (☞ figura 4.22): per disegnare $f(x+h)$ bisogna traslare il grafico di f di h verso sinistra (cioè in realtà muoverlo verso destra se h è negativo). Per non fare confusione, basta pensare che nel punto $x = 0$ la funzione $f(x+h)$ assume il valore che la funzione f aveva nel punto h, e traslare il grafico di conseguenza (✎ es. 4.73).

Un suggerimento pratico: spostare verso l'alto un grafico è lo stesso che spostare verso il basso l'asse orizzontale (molto più facile da disegnare ...), e analogamente per gli spostamenti a destra o sinistra.

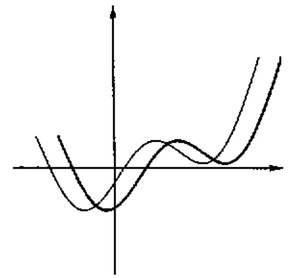


Fig. 4.21 : il grafico di $f(x-1)$

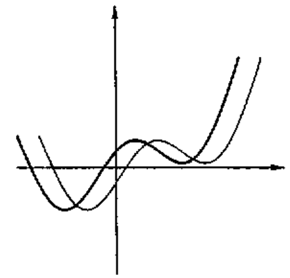


Fig. 4.22 : il grafico di $f(x+1)$

Possiamo disegnare anche le funzioni $\alpha f(x)$ e $f(\alpha x)$; cominciamo con un caso particolare, quello in cui $\alpha > 0$: allora i valori di $\alpha f(x)$, che sono quelli di f moltiplicati per α, si ottengono cambiando la scala sull'asse verticale: il grafico di f viene "gonfiato" se $\alpha > 1$, "appiattito" se $0 < \alpha < 1$.

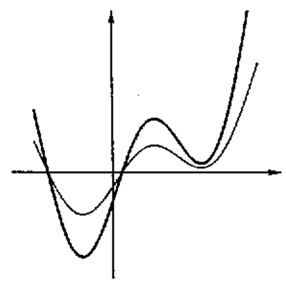


Fig. 4.23 : il grafico di $2f(x)$

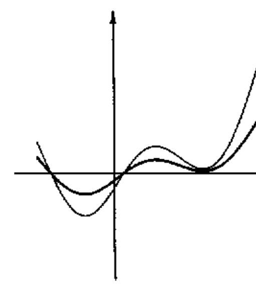


Fig. 4.24 : il grafico di $f(x)/2$

L'altro caso particolare (☞ figura 4.25) è $\alpha = -1$: in tal caso $\alpha f = -f$; se (x, y) sta sul grafico di f , $(x, -y)$ sta su quello di $-f$, che è dunque il simmetrico di quello di f rispetto all'asse x . Nel caso $\alpha < 0$ generico, basta osservare che $\alpha = -|\alpha|$ e che $|\alpha| > 0$: pertanto il grafico di $\alpha f = -(|\alpha| f)$ si ottiene dapprima disegnando il grafico di $|\alpha| f$, e poi ribaltandolo intorno all'asse x . Il caso $\alpha = 0$, poi, è banale (✎ es. 4.75).

In genere le trasformazioni di questo tipo, come pure quelle per disegnare $f(\alpha x)$, possono essere eseguite solo in modo un po' approssimativo.

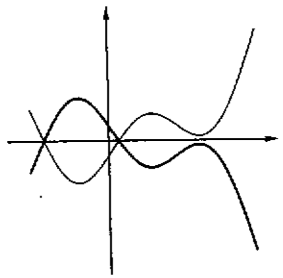


Fig. 4.25 : il grafico di $-f(x)$

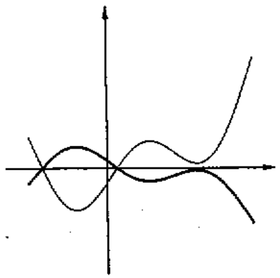


Fig. 4.26 : il grafico di $-f(x)/2$

A questo punto mostriamo alcuni esempi, lasciando per esercizio il compito di giustificare i disegni stessi: il grafico di $f(\alpha x)$ con $\alpha > 0$ si ricava da quello di f con un riscalamento dell'asse x .

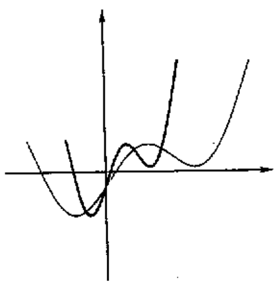


Fig. 4.27 : il grafico di $f(2x)$

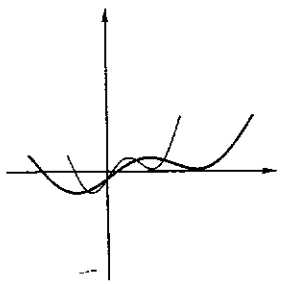


Fig. 4.28 : il grafico di $f(x/2)$

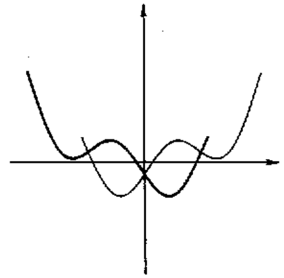


Fig. 4.29 : il grafico di $f(-x)$

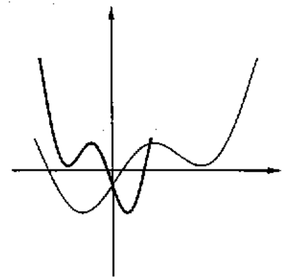


Fig. 4.30 : il grafico di $f(-2x)$

Il grafico di $f(-x)$ si ottiene (☞ figura 4.29) ribaltando il grafico di f intorno all'asse y (✎ es. 4.78).

Il grafico della funzione f^+ , la parte positiva di f , si ottiene lasciando invariato il grafico di f , nei punti dove $f(x) > 0$, e prendendo il valore zero nei restanti punti del dominio di f ; il grafico della parte negativa si può disegnare osservando che $f^- = (-f)^+$.

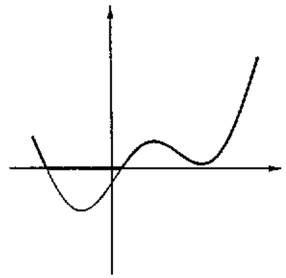


Fig. 4.31 : il grafico di f^+

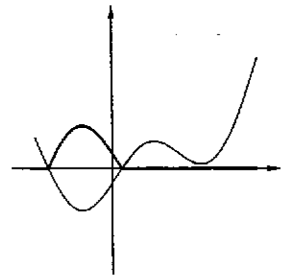


Fig. 4.32 : il grafico di f^-

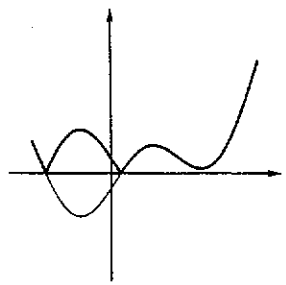


Fig. 4.33 : il grafico di $|f(x)|$

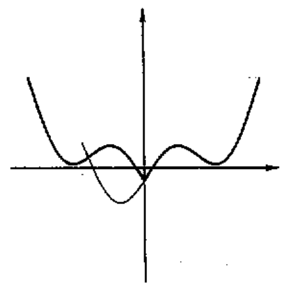


Fig. 4.34 : il grafico di $f(|x|)$

Il grafico del valore assoluto di f, cioè di $|f(x)|$, si ottiene (☞ figura 4.33) ribaltando intorno all'asse x la parte di grafico che sta al di sotto di esso (✎ es. 4.82). Invece, il

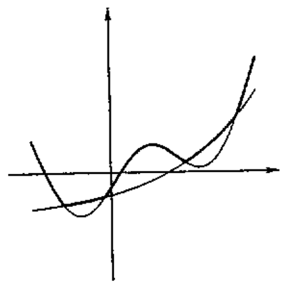


Fig. 4.35 : $f \vee g = \max\{f, g\}$

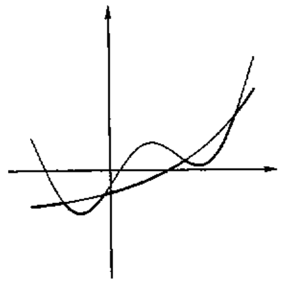


Fig. 4.36 : $f \wedge g = \min\{f, g\}$

grafico di f del valore assoluto, cioè di $f(|x|)$, si ottiene (☞ figura 4.34) prendendo solo la parte di grafico di f per $x \geq 0$, cioè quella a destra dell'asse y, e riportandola, ribaltata, anche a sinistra di tale asse (✎ es. 4.85).

Non è difficile disegnare i grafici del massimo (☞ figura 4.35) e del minimo (☞ figura 4.36) fra due funzioni.

Un po' più delicato è disegnare il grafico della somma di due funzioni, e ancora di più quello del prodotto: per quest'ultimo è utile trovare i punti dove le funzioni interessate valgono ± 1 (✎ es. 4.86).

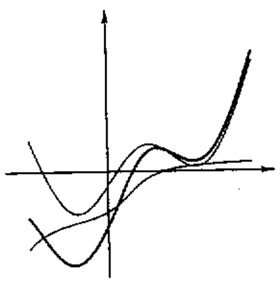


Fig. 4.37 : due funzioni e la loro somma

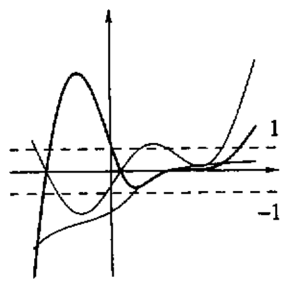


Fig. 4.38 : due funzioni e il loro prodotto

Torniamo un attimo indietro, e mostriamo fianco a fianco i grafici del valore assoluto di x, di una funzione generica $f(x)$ e della funzione $|f(x)|$, che è la composizione delle prime due:

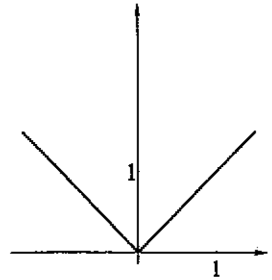


Fig. 4.39 : il grafico di $|x|$

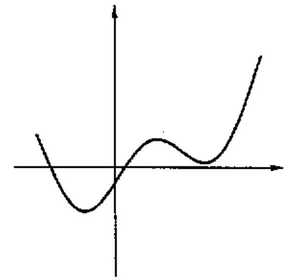


Fig. 4.40 : una funzione f

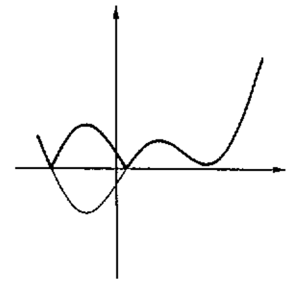


Fig. 4.41 : il grafico di $|f(x)|$

la parte più complessa del disegnare i grafici senza studiare le funzioni è proprio il grafico della composizione. Studiando i tre grafici qui riportati, dovrebbe essere possibile capire come fare a disegnare un'approssimazione del grafico della composizione di due funzioni generiche (✎ es. 4.87).

Esempio : riportiamo qui di seguito i grafici della funzione f usata per gli esempi precedenti, della funzione e^f e della funzione $\log f$ (i grafici di e^x e $\log x$ devono essere ben noti, comunque sono disegnati nella sezione 1.6).

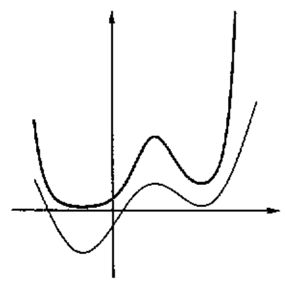


Fig. 4.42 : il grafico di $e^{f(x)}$

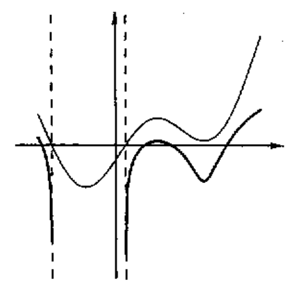


Fig. 4.43 : il grafico di $\log\bigl(f(x)\bigr)$

Esempio : applichiamo quanto abbiamo appreso per provare a tracciare il grafico della funzione $\bigl||x^2-2x|-1\bigr|$: cominciamo con x^2-2x ; potremmo tracciare i grafici di x^2 e di $-2x$, che conosciamo, e sommarli, oppure (in questo caso particolare) possiamo osservare che $x^2-2x=(x-1)^2-1$, quindi tracciamo (☞ figura 4.44) prima x^2, poi trasliamolo a destra (☞ figura 4.45) per ottenere $(x-1)^2$, e infine (☞ figura 4.46) traslando il grafico verso il basso otteniamo x^2-2x.

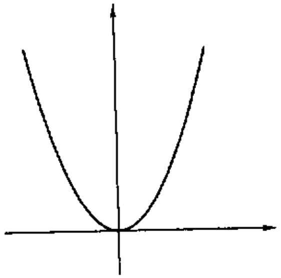


Fig. 4.44 : $y = x^2$

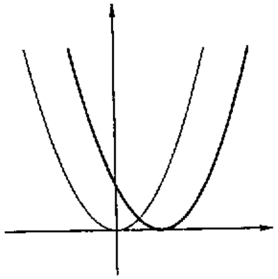


Fig. 4.45 : $y = (x-1)^2$

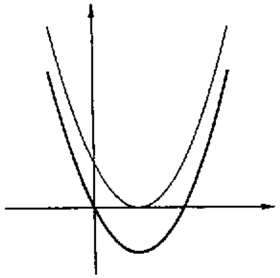


Fig. 4.46 : $y = (x-1)^2 - 1$

Poi, dobbiamo ribaltare in alto la parte di grafico sotto l'asse x per avere (☛ figura 4.47) il valore assoluto di questa funzione, ottenendo $|x^2 - 2x|$, a questa (☛ figura 4.48) sottrarre 1, che corrisponde a una nuova traslazione, verso il basso, e del tutto (☛ figura 4.49) prendere il valore assoluto.

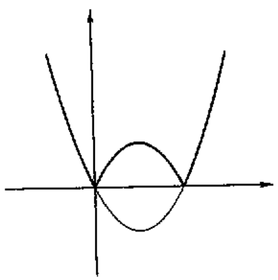


Fig. 4.47 : $y = |x^2 - 2x|$

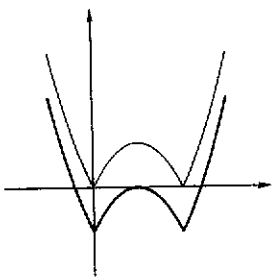


Fig. 4.48 : $y = |x^2 - 2x| - 1$

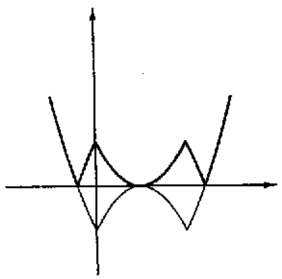


Fig. 4.49 : $y = \big||x^2 - 2x| - 1\big|$

Osserviamo che dal grafico è immediato constatare quante sono, ad esempio, le soluzioni dell'equazione $\big|1 - |x^2 - 2x|\big| = k$: due per k grande, nessuna per k negativo, tre per $k = 0$, sei per k piccolo e quattro per un particolare valore di k. Con queste informazioni, si vede anche cosa si deve fare per trovare questo valore: seguire a ritroso nella nostra costruzione la provenienza delle due punte del grafico, così da scoprire che il valore che divide il caso a sei soluzioni da quello a due soluzioni è $k = 1$ (✎ es. 4.89).

Esercizi relativi al capitolo 4

Esercizio 4.1 : dimostrate le caratterizzazioni (4.1), (4.2) e (4.3).

Esercizio 4.2 : provate che $\sup f = -\inf(-f)$.

Esercizio 4.3 : provate che se $\lambda > 0$ allora

$$\sup(\lambda f) = \lambda \sup f\,, \qquad \inf(\lambda f) = \lambda \inf f\,,$$

mentre se $\lambda < 0$

$$\sup(\lambda f) = \lambda \inf f\,, \qquad \inf(\lambda f) = \lambda \sup f\,;$$

in altri termini, se $\lambda \neq 0$ allora per ogni f limitata

$$\sup(\lambda f) = \lambda^+ \sup f - \lambda^- \inf f\,.$$

Esercizio 4.4 : completate nei dettagli la dimostrazione di (4.5) e (4.6).

Esercizio 4.5 : provate che se k è una costante reale allora $\sup(f+k) = (\sup f) + k$.

Esercizio 4.6 : provate che la funzione $f(x) = -x^3$ è decrescente.

Esercizio 4.7 : provate che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 7 & \text{se } x \le 2 \\ 1 - x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

è debolmente decrescente.

Esercizio 4.8 : negate la proposizione " f è decrescente".

Esercizio 4.9 : negate la proposizione " f è strettamente monotona".

Esercizio 4.10 : dimostrate la proposizione 4.4.

Esercizio 4.11 : dimostrate la proposizione 4.5.

Esercizio 4.12 : provate che la composizione di un numero qualsiasi di funzioni monotone risulta debolmente crescente se il numero di funzioni debolmente decrescenti nella composizione è pari, risulta debolmente decrescente se tale numero è dispari.

Esercizio 4.13 : provate, con degli esempi, che la somma di due funzioni iniettive non sempre è iniettiva, e che lo stesso vale per la somma di due funzioni surgettive o due biunivoche (questo mostra l'importanza della proposizione 4.7).

Esercizio 4.14 : sapendo che la funzione logaritmo è crescente ed è definita solo su $\mathbb{R}^+$, dite se la funzione $x^2 + \log(2x - e)$ è iniettiva.

Esercizio 4.15 : quali sono le funzioni che sono contemporaneamente debolmente crescenti e debolmente decrescenti?

Esercizio 4.16 : dimostrate che l'inversa di una funzione monotona e invertibile è anch'essa monotona.

Esercizio 4.17 : provate che le potenze pari di x sono funzioni pari, le potenze dispari sono funzioni dispari.

Esercizio 4.18 : provate che una funzione è pari se e solo se il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

Esercizio 4.19 : provate che una funzione è dispari se e solo se il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine. Trovate poi le funzioni pari e dispari tra quelle disegnate nella sezione 1.6.

Esercizio 4.20 : dite se la funzione $\arctan(2x - x^3)$ è pari o se è dispari.

Esercizio 4.21 : dite se la funzione $\operatorname{sen}(2x + x^2)$ è pari o se è dispari.

Esercizio 4.22 : dimostrate che la funzione $[f(x) + f(-x)]/2$ è pari.

Esercizio 4.23 : terminate la dimostrazione della proposizione 4.9.

Esercizio 4.24 : risolvete le seguenti equazioni:

a) $\sqrt{2x-1} = x + 3$
b) $\sqrt{1-2x} = x + 3$
c) $\sqrt{x-1} + x = 2$
d) $\dfrac{(x-1)\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} = x$.

Esercizio 4.25 : risolvete la disequazione $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 > 0$.

Esercizio 4.26 : risolvete le seguenti disequazioni:

a) $\sqrt{2x+1} \le x - 3$
b) $\sqrt{x+2} < x + 1$
c) $\sqrt{x+1} - \sqrt{6x+2} + \sqrt{x+3} > 0$.

Esercizio 4.27 : risolvete la disequazione $\sqrt{x+a} - \sqrt{6x+2a} + \sqrt{x+3a} > 0$ al variare di $a \in \mathbb{R}$ (errore frequentissimo: chi è più grande tra $-a$ e $-3a$?).

Esercizio 4.28 : usando la definizione di valore assoluto, dimostrate i primi sei punti della proposizione 4.12.

Esercizio 4.29 : dimostrate che $\sqrt{x^2} = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4.30 : usando la definizione di valore assoluto, dimostrate gli ultimi tre punti della proposizione 4.12.

Esercizio 4.31 : dimostrate tutte le proprietà del valore assoluto, prendendo come definizione quella abituale:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \ge 0 \\ -a & \text{se } a \le 0 \end{cases}$$

(occorrerà, specialmente per le proprietà (4.8) e seguenti, dividere la dimostrazione in moltissimi casi, a seconda dei segni di a e b ; questo esercizio vuole essere una giustificazione della definizione che abbiamo dato, con la quale le dimostrazioni riescono enormemente più brevi). Dimostrate poi le disuguaglianze triangolari, considerando tutti i casi che occorrono.

Esercizio 4.32 : usando le proprietà delle disuguaglianze (☛ assiomi 3.11), provate che se $a \le b$ e $c \le d$ allora $a + c \le b + d$.

Esercizio 4.33 : è vero che se $a \le b$ e $c \le d$ allora $ac \le bd$?

Esercizio 4.34 : generalizzate la prima disuguaglianza triangolare al caso di un qualunque numero finito di addendi.

Esercizio 4.35 : risolvete le seguenti equazioni:

a) $\dfrac{|x-2|}{x+\sqrt{x}} = 1$
b) $|2x - 1| = |x + 3|$
c) $x^2 - 2|x| + 1 = 0$
d) $x^2 + 2|x| + 1 = 0$.

Esercizio 4.36 : risolvete le seguenti disequazioni:

a) $\big|2x - |x^2 - 3|\big| < 1$
b) $x^2 - 2|x| + 1 > 0$
c) $\left|\dfrac{2x}{x-1}\right| < 1$
d) $x|x| < 2$
e) $\sqrt{x|x| - 2} < 1$
f) $\dfrac{x-2}{|x^2 - x|} \ge 2$
g) $\big|x - |x^2 + x + 2|\big| < 4$.

Esercizio 4.37 : dopo aver individuato gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R} : x|x-2| < 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x|x| > 1/9\}$, calcolate $\sup A$ e $\inf(A \cap B)$.

Esercizio 4.38 : dopo aver individuato gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x|x-1|} \le x\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| > 1\}$, calcolate $\sup B$ e $\inf(A \setminus B)$.

Esercizio 4.39 : provate che tanto x^+ che x^- sono numeri non negativi, per qualsiasi numero reale x .

Esercizio 4.40 : provate che $|x| = x^+ + x^-$ e che $x = x^+ - x^-$.

Esercizio 4.41 : dimostrate le formule (4.12).

Esercizio 4.42 : provate che $x^- = (-x)^+$.

Esercizio 4.43 : risolvete la disequazione $(x^2-3)^+ - 2x^- \geq 0$.

Esercizio 4.44 : dimostrate la formula (4.14).

Esercizio 4.45 : provate che ogni funzione T-periodica è anche kT-periodica per ogni valore di $k \in \mathbb{N}^+$.

Esercizio 4.46 : provate che una funzione costante su $\mathbb{R}$ è α-periodica per ogni valore di $\alpha > 0$, e in particolare non ha un minimo periodo.

Esercizio 4.47 : provate che la funzione di Dirichlet $f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$, che vale 1 su $\mathbb{Q}$ e 0 su $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, è α-periodica per ogni numero razionale $\alpha > 0$, e in particolare non ha un minimo periodo.

Esercizio 4.48 : provate che una funzione periodica non è mai iniettiva.

Esercizio 4.49 : provate che una funzione periodica non costante non può essere monotona.

Esercizio 4.50 : dimostrate che la funzione $\operatorname{sen} 6x + \cos 3x$ è periodica, e determinatene il minimo periodo.

Esercizio 4.51 : dite se la funzione $\operatorname{sen} x^2$ è periodica.

Esercizio 4.52 : sia $T > 0$; dopo aver mostrato che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ ed ogni $x \in \mathbb{R}$ esistono un intero k ed un numero $y \in [\alpha, \alpha + T[$ tali che $x = kT + y$, provate che il valore assunto da una funzione T-periodica in un punto x è uguale al valore assunto dalla funzione in un opportuno punto dell'intervallo $[\alpha, \alpha + T[$.

Esercizio 4.53 : provate (4.21) partendo da (4.20).

Esercizio 4.54 : provate la formula (4.22).

Esercizio 4.55 : provate la formula (4.23).

Esercizio 4.56 : dite a cosa è uguale $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$ se $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, e a che cosa è uguale se $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$.

Esercizio 4.57 : dite per quali x è vero che $\cos(\arccos x) = x$, e per quali è vero che $\arccos(\cos x) = x$.

Esercizio 4.58 : cercate di capire a cosa è uguale $\arccos(\cos x)$ per angoli non appartenenti all'intervallo $[0, \pi]$.

Esercizio 4.59 : determinate per quali valori di x si ha $\operatorname{arcsen}\big(\cos(x^2 - x)\big) = \pi/2$.

Esercizio 4.60 : risolvete l'equazione $\operatorname{sen}\big(\operatorname{arcsen} \frac{x^2}{2}\big) = x + \frac{3}{2}$.

Esercizio 4.61 : determinate per quali valori di x si ha $\arccos\big(\operatorname{sen}(x^2 - x)\big) = \frac{\pi}{2}$.

Esercizio 4.62 : risolvete l'equazione $\arctan\big(\tan(2x)\big) = 2x + 2\pi$.

Esercizio 4.63 : se $a = \cos x$ e $b = \operatorname{sen} x$, è vero che $\arctan(b/a) = x$? Se no, a cosa è uguale?

Esercizio 4.64 : dite se la funzione $x^3 + \arctan(1 + x)$ è iniettiva.

Esercizio 4.65 : mostrate che:

a) la funzione seno iperbolico è dispari
b) la funzione coseno iperbolico è pari
c) la funzione tangente iperbolica è dispari (per questa, cercate di usare i due risultati precedenti).

Le funzioni iperboliche hanno qualche proprietà di periodicità?

Esercizio 4.66 : osservandone i grafici, dite quali funzioni iperboliche sono monotone.

Esercizio 4.67 : dimostrate le seguenti relazioni:

a) $\operatorname{senh}(a + b) = \operatorname{senh} a \cosh b + \cosh a \operatorname{senh} b$
b) $\cosh(a + b) = \cosh a \cosh b + \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b$
c) $\tanh(a + b) = \dfrac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}$
d) $\operatorname{senh} x - \operatorname{senh} y = 2 \operatorname{senh} \dfrac{x - y}{2} \cosh \dfrac{x + y}{2}$
e) $\cosh x - \cosh y = 2 \operatorname{senh} \dfrac{x - y}{2} \operatorname{senh} \dfrac{x + y}{2}$
f) $\tanh x - \tanh y = \dfrac{\operatorname{senh}(x - y)}{\cosh x \cosh y}$.

Esercizio 4.68 : dimostrate che la funzione coseno iperbolico è biunivoca tra $[0, +\infty[$ e $[1, +\infty[$, e calcolatene l'inversa.

Esercizio 4.69 : dimostrate che la funzione tangente iperbolica è biunivoca tra $\mathbb{R}$ e $]-1, 1[$, e calcolatene l'inversa.

Esercizio 4.70 : determinate graficamente l'immagine della seguente funzione:

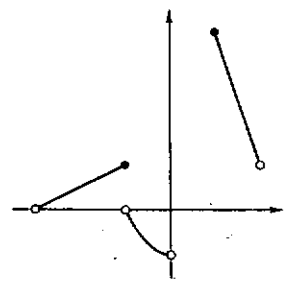


Fig. 4.50 : un grafico di funzione

Disegnate poi su fogli di carta varî grafici di funzioni a casaccio, note o inventate, e ripetete l'esercizio per ciascuna di esse.

Esercizio 4.71 : per ogni grafico dell'esercizio 4.70 dite se la funzione è iniettiva, e determinate approssimativamente al variare di k il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

Esercizio 4.72 : per ogni grafico dell'esercizio 4.70 tracciate i grafici di $f(x)+1$ e di $f(x)-2$.

Esercizio 4.73 : per ogni grafico dell'esercizio 4.70 tracciate i grafici di $f(x+1)$ e di $f(x-2)$.

Esercizio 4.74 : per un grafico dell'esercizio 4.70 tracciate il grafico di $f(x-1)+2$.

Esercizio 4.75 : per ogni grafico dell'esercizio 4.70 tracciate i grafici di $f(x)/4$ e di $-3f(x)$.

Esercizio 4.76 : per un grafico dell'esercizio 4.70 tracciate il grafico di $-3f(x+1)+2$.

Esercizio 4.77 : giustificate quanto asserito nel testo sul grafico di $f(\alpha x)$.

Esercizio 4.78 : per ogni grafico dell'esercizio 4.70 tracciate i grafici di $f(-3x)$ e di $f(x/10)$.

Esercizio 4.79 : per un grafico dell'esercizio 4.70 tracciate il grafico di $2f(2x+1)-1$; suggerimento: osservate che $2x+1 = 2(x+1/2)$ ....

Esercizio 4.80 : giustificate quanto asserito nel testo sui grafici di f^+ , f^- e $|f(x)|$.

Esercizio 4.81 : provate che $\sup f^+ = (\sup f)^+$ e che $\inf f^+ = (\inf f)^+$; trovate poi, e dimostrate, le analoghe formule per f^- .

Esercizio 4.82 : per qualcuno dei grafici dell'esercizio 4.70 tracciate i grafici di f^+ , f^- e $|f(x)|$.

Esercizio 4.83 : tracciate il grafico di $|2\,\mathrm{sen}(3x)-1|$.

Esercizio 4.84 : giustificate quanto asserito nel testo sul grafico di $f(|x|)$.

Esercizio 4.85 : tracciate il grafico di $\log|x|$.

Esercizio 4.86 : provate a tracciare il grafico della somma e del prodotto di due funzioni a caso aventi lo stesso dominio.

Esercizio 4.87 : per un grafico dell'esercizio 4.70 tracciate il grafico di $\mathrm{sen}(f(x))$ e quello di $e^{f(x)}$.

Esercizio 4.88 : a questo punto siete pronti: prendete un libro delle scuole superiori, e vedete quanti grafici di funzioni non troppo complicate riuscite a tracciare rapidamente con una ragionevole approssimazione (naturalmente, senza prima guardare il grafico vero). Confrontate i risultati con il tempo necessario a uno studio completo, che peraltro rimane insostituibile per ottenere grafici corretti.

Esercizio 4.89 : risolvete graficamente in modo approssimato nell'intervallo $[0, 2\pi]$ la disequazione $|2\,\mathrm{sen}(3x)-1| < 1$.

Appendice al capitolo 4

Appendice 4.1 - Punti di Weierstrass

Esiste anche per l'estremo superiore qualcosa di analogo ai punti di massimo; chiaramente, se in un punto $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$ la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ assume come valore il suo estremo superiore, x_0 è punto di massimo, ed è il punto (o uno di essi) nel quale f assume il suo massimo valore. Se però f non ha massimo, un punto dove f assume come valore il suo estremo superiore non può esistere. Si ricorre allora alla nozione di punto di Weierstrass.

Definizione : *se $f : A \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice punto di Weierstrass per f relativo all'estremo superiore se per ogni intorno U di x_0 si ha $U \cap A \neq \emptyset$ e $\sup_{U\cap A} f = \sup f$.*

I punti di Weierstrass relativi all'estremo inferiore sono definiti in modo analogo. Si può dimostrare (fatelo per esercizio) che qualche punto di Weierstrass relativo al sup esiste sempre (e lo stesso accade per l'inf); i punti di Weierstrass, che non sono molto utilizzati, dicono dov'è che f è "vicina" al suo estremo superiore.

Appendice 4.2 - Crescenza in un punto

Oltre alla definizione di funzione crescente, si può dare (☞ figura A4.1) la definizione di funzione crescente in un punto (e lo stesso per gli altri tipi di monotonia).

Definizione : *si dice che una funzione reale f è crescente nel punto $x_0 \in \operatorname{dom} f$ se esiste un intorno $B(x_0, r(x_0))$ tale che*

$$\forall x \in B(x_0, r(x_0)) \cap \operatorname{dom} f, \quad \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \\ x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)\,. \end{cases}$$ crescente

Proposizione A4.1 : *se $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo, una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è crescente se e solo se è crescente in ogni punto di I.*

DIMOSTRAZIONE : è immediato che se f è crescente allora è crescente in ogni punto (e non si usa neppure che I è un intervallo), mentre il viceversa è più delicato, ed è falso se il dominio di f non è un intervallo: ad esempio, la funzione $-1/x$ è crescente in ogni punto del suo dominio, ma non è una funzione crescente.

Supponiamo dunque che f sia crescente in ogni punto di I, e proviamo che è crescente: presi $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ dobbiamo provare che $f(x_1) < f(x_2)$. Poniamo

$$S = \{x \in I : x_1 \le x \le x_2 \text{ e } f(x) > f(x_1)\}\,, \qquad x_0 = \sup S\,,$$

dopo aver osservato che l'insieme S è limitato superiormente (è contenuto in $[x_1, x_2]$) e non è vuoto (contiene tutto $B(x_1, r(x_1)) \cap [x_1, x_2]$, quindi in particolare $x_0 \neq x_1$); cominciamo a provare che $x_0 \in S$: occorre mostrare che $f(x_0) > f(x_1)$. Per definizione di estremo superiore, nell'intorno sinistro $]x_0 - r(x_0), x_0]$ cade almeno un punto $x \in S$, ma allora o $x = x_0$, quindi $x_0 \in S$, o $x < x_0$, e per la crescenza di f in x_0 è $f(x_0) > f(x)$; d'altra parte $f(x) > f(x_1)$ perché $x \in S$, quindi per la proprietà transitiva $f(x_0) > f(x_1)$, e $x_0 \in S$.

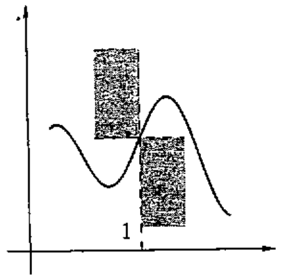


Fig. A4.1 : f è crescente in $x = 1$

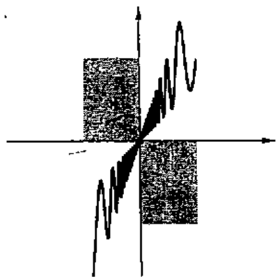


Fig. A4.2 : $y = 2x + x\,\mathrm{sen}(1/x)$ per $x \in [-0.1, 0.1]$

Ora mostriamo che $x_0 = x_2$: se fosse $x_0 < x_2$, l'insieme $]x_0, x_2] \cap]x_0, x_0 + r(x_0)[$ sarebbe non vuoto, e preso un qualunque punto x in questo insieme si avrebbe $x \le x_2$ e anche $f(x) > f(x_0) > f(x_1)$ per la crescenza di f in x_0, quindi $x \in S$, che è assurdo perché $x > x_0$ e $x_0 = \sup S$. ∎

Spesso capita di imbattersi in un'errata "estensione" della proposizione precedente: **non è vero** che se una funzione è crescente in un punto è per forza crescente in un qualche intorno del punto stesso, come mostra questo esempio.

Esempio : la funzione che vale 0 per $x = 0$ e $2x + x\,\mathrm{sen}(1/x)$ per $x \neq 0$ è crescente in 0 (è negativa su $\mathbb{R}^-$ e positiva su $\mathbb{R}^+$), ma non è crescente in alcun intorno di 0 (☞ figura A4.2); la verifica si effettua facilmente usando le derivate.

Appendice 4.3 - Spazi metrici

È possibile dare una nozione di "distanza" che generalizza quella data in $\mathbb{R}$ con il valore assoluto.

Definizione : *si dice metrica (o distanza) su un insieme E una qualunque funzione $\mathrm{d} : E \times E \to \mathbb{R}$ che verifica le seguenti proprietà:*

1) $\forall x, y,\ \mathrm{d}(x, y) \ge 0$, *e inoltre* $\mathrm{d}(x, y) = 0 \iff x = y$
2) $\forall x, y,\ \mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$
3) $\forall x, y, z,\ \mathrm{d}(x, z) \le \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$.

Se d è una distanza su E, si dice che (E, d) è uno spazio metrico.

Osserviamo che la funzione $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$ è una distanza su $\mathbb{R}$, grazie alla disuguaglianza triangolare:

$$|x - z| = |(x - y) + (y - z)| \le |x - y| + |y - z|\,;$$

questa si chiama distanza euclidea (o canonica) su $\mathbb{R}$, perché se identifichiamo i numeri reali con i punti di una retta, in modo che il punto 0 disti 1 dal punto 1, allora $\mathrm{d}(x, y)$ è proprio la lunghezza del segmento di estremi x ed y. In generale, per estensione, la terza proprietà delle distanze si chiama anch'essa disuguaglianza triangolare.

Esempio : in ogni insieme E possiamo definire la metrica (detta metrica banale o discreta)

$$\mathrm{d}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases} \tag{A4.1}$$

L'esempio mostra che in un insieme possono essere definite parecchie metriche differenti; vediamone qualcuna su $\mathbb{R}^2$

Esempio : su $E = \mathbb{R}^2$ indichiamo con $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ i punti e con $(x_1, x_2), (y_1, y_2), \ldots$ le loro coordinate. Allora le funzioni

$$\mathrm{d}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$
$$\mathrm{d}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2}$$
$$\mathrm{d}_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

sono metriche (la verifica della disuguaglianza triangolare è un po' noiosa, ed è lasciata per esercizio).

Vediamo come sono fatti, nei tre casi dell'esempio precedente, gli insiemi dei punti $\boldsymbol{x}$ che distano dall'origine non più di 1 : posto

$$B^{(1)} = \{\boldsymbol{x} : \mathrm{d}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) \leq 1\}, \quad B^{(2)} = \{\boldsymbol{x} : \mathrm{d}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) \leq 1\}, \quad B^{(\infty)} = \{\boldsymbol{x} : \mathrm{d}_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) \leq 1\},$$

abbiamo la seguente situazione:

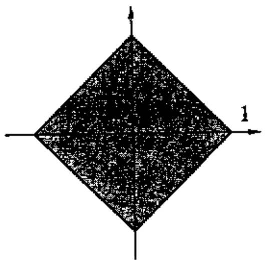


Fig. A4.3 : l'insieme $B^{(1)}$

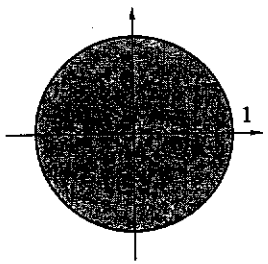


Fig. A4.4 : l'insieme $B^{(2)}$

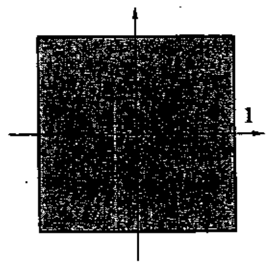


Fig. A4.5 : l'insieme $B^{(\infty)}$

La distanza d_2 è la metrica euclidea su $\mathbb{R}^2$ perché, come si vede dalla formula, se identifichiamo $\mathbb{R}^2$ con il piano cartesiano allora $\mathrm{d}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ è la lunghezza del segmento di estremi $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$. Notiamo che nelle altre due distanze questo non accade: ad esempio se $\boldsymbol{x} = (0,0)$ e $\boldsymbol{y} = (1,1)$ il segmento $\boldsymbol{xy}$ ha lunghezza $\sqrt{2}$, ma $\mathrm{d}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2$ e $\mathrm{d}_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1$.

Definizione : *se (E, d) è uno spazio metrico, si dice palla di centro $x \in E$ e raggio $r > 0$ l'insieme*

$$B_r(x) = \{y \in E : \mathrm{d}(x, y) < r\} ;$$

al posto di $B_r(x)$ si usa talvolta la notazione $B(x, r)$.

Esempio : in $\mathbb{R}$ la funzione

$$\mathrm{d}(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

è una metrica (la terza proprietà si può verificare facilmente), e la palla di centro 0 e raggio 1 è tutto $\mathbb{R}$.

Osserviamo che se (E, d) è uno spazio metrico ed $E' \subset E$, posto $\mathrm{d}' = \mathrm{d}|_{E' \times E'}$ la funzione d' è una distanza su E' , che si dice *metrica indotta* da d , ed (E', d') è ancora uno spazio metrico; se $x, y \in E'$, abbiamo $\mathrm{d}'(x, y) = \mathrm{d}(x, y)$.

Esempio : $[0, 5]$ con la distanza euclidea $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$ è ancora uno spazio metrico. Osserviamo che in questo spazio la palla $B_4(0) = [0, 4[$ è strettamente contenuta nella palla $B_3(2) = [0, 5[$, che ha raggio più piccolo!

Notiamo, però, che in qualsiasi spazio metrico se $y \in B_r(x)$ abbiamo $\mathrm{d}(x, y) < r$, quindi $r' = r - \mathrm{d}(x, y) > 0$. Non è difficile provare, usando la disuguaglianza triangolare, che se $\mathrm{d}(z, y) < r'$ allora $\mathrm{d}(z, x) < r$, cioè che (☞ figura A4.6)

$$[y \in B_r(x) \text{ e } r' = r - \mathrm{d}(x, y)] \implies B_{r'}(y) \subset B_r(x) . \tag{A4.2}$$

Dunque per ogni punto y di $B_r(x)$ esiste una palla centrata in y che è tutta contenuta in $B_r(x)$.

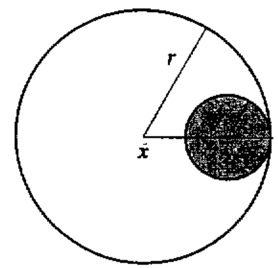


Fig. A4.6 : $B_{r'}(y) \subset B_r(x)$

Osserviamo che se $f : E \to \mathbb{R}$ è una funzione iniettiva allora

$$\mathrm{d}(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

è una metrica su E : la prima proprietà segue dall'iniettività, la seconda è ovvia e

$$\mathrm{d}(x, z) = \big|\big(f(x) - f(y)\big) + \big(f(y) - f(z)\big)\big| \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$$

per la disuguaglianza triangolare del valore assoluto.

Esempio : in $\mathbb{R}$ è una distanza anche la funzione

$$d(x,y) = |\arctan x - \arctan y| ;$$

più in generale, posto

$$f(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{se } x = +\infty \\ \arctan x & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ -\pi/2 & \text{se } x = -\infty \end{cases} \tag{A4.3}$$

la funzione $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ è una distanza su $\overline{\mathbb{R}}$. In questa distanza, le palle di centro $+\infty$ e raggio minore di π sono gli intervalli $]a, +\infty]$.

Abbiamo visto varie distanze su $\mathbb{R}^2$; presi comunque due punti $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$

$$d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq d_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq 2d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) :$$

infatti, $|a| \leq |a| + |b|$ e $|b| \leq |a| + |b|$, quindi $\max\{|a|,|b|\} \leq |a| + |b|$, e l'altra disuguaglianza è anche più facile. Allora, se indichiamo con $B_r^{(1)}(\boldsymbol{x})$ la palla di centro $\boldsymbol{x}$ e raggio r nella metrica d_1, e con $B_r^{(\infty)}(\boldsymbol{x})$ quella nella metrica d_∞,

$$B_{r/2}^{(\infty)}(\boldsymbol{x}) \subset B_r^{(1)}(\boldsymbol{x}) \subset B_r^{(\infty)}(\boldsymbol{x}) .$$

Definizione : *due metriche* d, d' *su* E *si dicono equivalenti quando esistono due costanti positive* h, k *tali che per ogni coppia di punti* $x, y \in E$

$$hd(x,y) \leq d'(x,y) \leq kd(x,y) .$$

Le metriche d_1 e d_∞ su $\mathbb{R}^2$ sono allora equivalenti; per esercizio, potete dimostrare che anche d_2 è equivalente alle precedenti. Il prodotto di due spazi metrici (o più in generale di un numero finito di spazi metrici) può essere reso spazio metrico in modo canonico; se (E_1, d_1) ed (E_2, d_2) sono spazi metrici, la metrica prodotto su $E_1 \times E_2$ — che è una funzione su $(E_1 \times E_2) \times (E_1 \times E_2)$ — si ottiene in questo modo. Indichiamo, come nell'esempio di $\mathbb{R}^2$, con $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ i punti di $E_1 \times E_2$ e con $(x_1, x_2), (y_1, y_2), \ldots$ le loro coordinate, e poniamo

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\} :$$

questa è una distanza sul prodotto, che nel caso di $\mathbb{R}^2$ si riduce a d_∞. Osserviamo che in $E_1 \times E_2$ la palla di raggio r e centro $\boldsymbol{x}$ è il prodotto cartesiano della palla di raggio r e centro x_1 (che è un sottoinsieme di E_1) per la palla di raggio r e centro x_2. Osserviamo infine che avremmo potuto definire come distanza prodotto anche

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$$

oppure

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sqrt{\left(d_1(x_1,y_1)\right)^2 + \left(d_2(x_2,y_2)\right)^2} ,$$

ottenendo metriche diverse, ma sempre equivalenti (la proprietà che le palle nel prodotto sono prodotti di palle nei fattori si perde).

Introduciamo una importante classe di spazi metrici.

Definizione : *sia* E *uno spazio vettoriale sul corpo* $\mathbb{R}$; *si dice norma su* E *una funzione* $p : E \to \mathbb{R}$ *che verifica le seguenti proprietà:*

1) $p(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in E$, *e* $p(x) = 0 \iff x = 0$;
2) $p(tx) = |t| p(x)$ *per ogni* $x \in E$ *ed ogni* $t \in \mathbb{R}$;
3) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ *per ogni* $x, y \in E$.

Se p *è una norma su* E, *la metrica associata a* p *è data da*

$$d_p(x,y) = p(x-y) ,$$

ed (E, d_p) *si dice spazio normato.*

Si vede immediatamente che le proprietà della norma sono modellate su quelle della funzione valore assoluto in $\mathbb{R}$, e in particolare la proprietà 3) è l'analogo della disuguaglianza triangolare; inoltre, la verifica che d_p è una distanza è molto facile. Anziché con $p(x)$, la norma di un elemento $x \in E$ viene tradizionalmente indicata con il simbolo $\|x\|$, oppure $\|x\|_E$.

Esempio : $\mathbb{R}$ è uno spazio normato con la norma $\|x\| = |x|$; possiamo rendere $\mathbb{R}^2$ spazio normato con la norma euclidea $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Osservazione : ad ogni norma è associata una metrica; invece, non tutte le metriche su di uno spazio vettoriale X provengono da una norma: ad esempio, la metrica (A4.1) non è del tipo d_p per alcuna norma p. Verificate per esercizio quante fra le metriche su $\mathbb{R}$ introdotte in questa appendice provengono da una norma.

Appendice 4.4 - Le funzioni iperboliche

Le funzioni seno e coseno si dicono anche funzioni circolari, in quanto forniscono le equazioni parametriche della circonferenza goniometrica (cioè di raggio unitario e centrata nell'origine degli assi cartesiani): se il parametro t varia da 0 a 2π, il punto

$$P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

percorre la circonferenza unitaria, partendo da $A = (1,0)$ ed in senso antiorario. Inoltre, il numero t corrisponde alla lunghezza dell'arco AP, e anche al doppio dell'area del settore circolare AOP. Dall'arco AP deriva il simbolo "arc" usato per le funzioni circolari inverse.

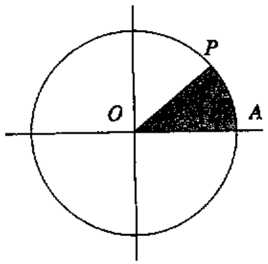


Fig. A4.7 : parametrizzazione circolare

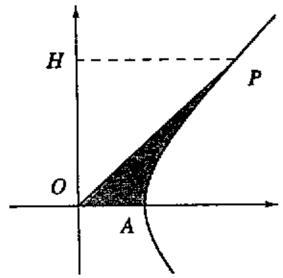


Fig. A4.8 : parametrizzazione iperbolica

Invece, se t varia da $-\infty$ a $+\infty$ il punto

$$P(t) = (\cosh t, \operatorname{senh} t)$$

percorre dal basso verso l'alto il ramo destro dell'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$: infatti le sue coordinate verificano la relazione

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1 .$$

Se $A = (1,0)$ e $H(t) = (0, \operatorname{senh} t)$, l'area del "settore iperbolico" AOP è data dalla differenza fra l'area di $OAPH$ e quella del triangolo OPH, cioè

$$\int_0^{\operatorname{senh} t} \sqrt{1+s^2}\, ds - \frac{\cosh t \operatorname{senh} t}{2} :$$

calcolando l'integrale, si ha che t è il doppio dell'area del "settore iperbolico" considerato, da cui il nome delle funzioni iperboliche inverse.

intorno di $+\infty$ → qualunque $]a, +\infty[$ con $a \in \mathbb{R}$
intorno di $-\infty$ → $]-\infty, a[$
I_{x_0} → insieme degli intorni
intorno di x_0 → qualunque intervallo aperto.

Capitolo 5

Successioni

5.1 - Cenni di topologia

In questo capitolo parleremo delle successioni di numeri reali e dei loro limiti; ci tornerà utile il concetto di intorno, che qui nel testo diamo in versione semplificata (➡ appendice 5.1).

Definizione : *se $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice intorno di x_0 qualunque intervallo $]a,b[\subset \mathbb{R}$ tale che $a < x_0 < b$; si dice intorno di $+\infty$ qualunque semiretta $]a,+\infty[$ con $a \in \mathbb{R}$, e analogamente si dice intorno di $-\infty$ qualunque semiretta $]-\infty, a[$ con $a \in \mathbb{R}$.*

L'insieme degli intorni di un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si indica con il simbolo $\mathscr{I}_{x_0}$.

Se $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice intervallo di centro x_0 e raggio $r > 0$ l'intervallo $]x_0-r, x_0+r[$. Tale intervallo si indica con il simbolo $I_r(x_0)$ oppure $I(x_0, r)$.

Il concetto di intorno di x_0 formalizza l'idea della zona "vicino" a x_0.

Esempio : l'intervallo $]-1,1[$ è un intorno di $x_0 = 1/3$, ed è l'intervallo di centro 0 e raggio 1; anche l'intervallo $]-\infty, \pi[$ è un intorno di $1/3$. L'intervallo $[-1,1[$ non è un intorno — in particolare, non è un intorno del suo estremo sinistro -1, che pure appartiene all'intervallo (✎ es. 5.1).

$|a+b| \leq |a| + |b|$
$||a|-|b|| \leq |a-b|$

Al termine della sezione, definiremo degli altri insiemi che tradizionalmente si chiamano anch'essi "intorni", anche se non si tratta di veri intorni. per definizione di intorno

Proposizione 5.1 : *se $x_0 \in \mathbb{R}$, allora x_0 appartiene ad ogni suo intorno. Inoltre, per ogni $U \in \mathscr{I}_{x_0}$ esiste $r > 0$ tale che $I_r(x_0) \subset U$.*

DIMOSTRAZIONE : la prima parte discende immediatamente dalla definizione, e non è vera (ovviamente) se $x_0 = \pm\infty$.

Per la seconda parte, se l'intorno è $]a, b[$ con $a, b \in \mathbb{R}$ abbiamo che la distanza di x_0 da a è $x_0 - a$, e la distanza da b è $b - x_0$: basta allora scegliere $r = \min\{x_0 - a, b - x_0\}$ e usare la disuguaglianza triangolare (☞ proposizione 4.14) per avere che $I_r(x_0) \subset]a, b[$. Il caso in cui l'intorno è illimitato è ancora più facile (✎ es. 5.3). ■

La prossima proposizione mostra che due punti distinti hanno due intorni disgiunti.

Proposizione 5.2 : *se $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ e $x \neq y$ esistono $U \in \mathscr{I}_x$ e $V \in \mathscr{I}_y$ tali che $U \cap V = \varnothing$.*

DIMOSTRAZIONE : trattiamo solo il caso $x, y \in \mathbb{R}$, lasciando il resto per esercizio (✎ es. 5.4). Possiamo supporre $x < y$ (altrimenti basta scambiare x ed y); posto $a = (x+y)/2$, è $x < a < y$, quindi $U =]-\infty, a[\in \mathscr{I}_x$ e $V =]a, +\infty[\in \mathscr{I}_y$, ma $U \cap V = \varnothing$, come dovevamo dimostrare. ■

Non è difficile estendere il risultato precedente al caso di un numero finito di punti distinti (✎ es. 5.5).

Osservazione : dalla proposizione 5.2, tenendo presente anche il prossimo risultato, che segue dalla definizione di intorno, si ottiene facilmente che dati due punti $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $y \in U$ per ogni $U \in \mathscr{I}_x$, allora $x = y$. $x, y \in \mathbb{R} : y \in U \ \forall U \in I_x \Rightarrow x = y$

Osservazione : è immediato verificare che se U è un intorno di x, allora U è intorno anche di ogni altro suo punto. Inoltre se $U, V \in \mathscr{I}_x$ anche $U \cap V \in \mathscr{I}_x$ e $U \cup V \in \mathscr{I}_x$.

Definizione : *se $A \subset \mathbb{R}$ ed $x \in \mathbb{R}$, si dice che x è interno ad A se*

$$\exists U \in \mathscr{I}_x : \quad U \subset A$$

(in particolare, $x \in A$). L'insieme dei punti interni ad A si dice interno (o parte interna) di A e si indica con il simbolo $\mathring{A}$.

Si dice che x è esterno ad A se

$$\exists U \in \mathscr{I}_x : \quad U \cap A = \varnothing$$

(in particolare, $x \notin A$).

Se x non è né interno né esterno ad A, si dice che x è un punto di bordo (o di frontiera) dell'insieme A. L'insieme di tali punti si dice bordo (o frontiera) di A e si indica con il simbolo ∂A.

$\exists U \in I_x : U \subset A$
• x è esterno ad A se $U \cap A = \varnothing$

Osserviamo che x è interno ad A se e solo se

$$\exists U \in \mathscr{I}_x : \quad U \cap A^c = \varnothing ,$$

e che x è esterno ad A se e solo se è interno al complementare di A. Allora, x è di frontiera per A se e solo se

$$\forall U \in \mathscr{I}_x, \quad [U \cap A \neq \varnothing \text{ e } U \cap A^c \neq \varnothing] ,$$

cioè se ogni intorno di x contiene sia punti di A che punti del complementare.

Notiamo pure che "esterno ad $\mathring{A}$" non è la stessa cosa di "appartenente al complementare di A": infatti, tutti i punti esterni sono nel complementare, ma in generale non è vero il viceversa. Allo stesso modo, $\mathring{A} \subset A$, ma in generale i due insiemi non coincidono.

Esempio : se $A = [0, 1[$ allora:
a) l'interno di A è $\mathring{A} =]0, 1[$
b) l'esterno di A è $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$
c) il bordo di A è $\partial A = \{0, 1\}$.

Infatti, se $x \in \mathring{A}$ allora $x \in A$, quindi $\mathring{A} \subset [0, 1[$, e d'altra parte se $x \in]0, 1[$ allora $U =]0, 1[\in \mathscr{I}_x$ è contenuto in A, quindi $x_0 \in \mathring{A}$ e pertanto $\mathring{A} \supset]0, 1[$. L'unico punto da controllare è $x = 0$, ma (☞ proposizione 5.1) ogni intorno U di 0 contiene un intervallo $]-r, r[$, e il punto $-r/2$ appartiene all'intervallo, quindi ad U, ma non all'insieme A, dunque $0 \notin \mathring{A}$.

Scelto un intorno U di 0, abbiamo già visto che $U \cap A^c \neq \varnothing$; ma $0 \in U$ per definizione di intorno, quindi anche $U \cap A \neq \varnothing$, e dunque $0 \in \partial A$.

La dimostrazione che $1 \in \partial A$ e la caratterizzazione dell'esterno di A sono lasciate per esercizio (✎ es. 5.6). Osserviamo però che 0 appartiene ad A, ma non è interno, e che 1 non appartiene ad A, ma non è esterno ad A.

Esempio : se $A = [0, 1[\cup]1, 2[\cup \{3\}$, il bordo di A è $\partial A = \{0, 1, 2, 3\}$.

Nell'esempio precedente, vediamo che mentre i punti $0, 1, 2$ hanno "vicino" molti punti di A, il punto 3 non ha vicini altri punti di A: questa osservazione motiva la prossima definizione.

Definizione : *se $A \subset \mathbb{R}$ ed $x \in \mathbb{R}$, si dice che x è un punto isolato di A se*

$$\exists U \in \mathscr{I}_x : \quad U \cap A = \{x\}$$

(in particolare, $x \in A$).

Se $x \in \overline{\mathbb{R}}$, si dice che x è un punto aderente ad A se

$$\forall U \in \mathscr{I}_x, \quad U \cap A \neq \varnothing .$$

L'insieme di tali punti si dice aderenza o (chiusura) di A e si indica con il simbolo $\overline{A}$.

Infine, si dice che $x \in \overline{\mathbb{R}}$ è un punto di accumulazione di A se

$$\forall U \in \mathscr{I}_x, \quad (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing .$$

• x è un punto d'accumulazione per A se in ogni suo intorno cadono punti di A diversi da x stesso

Dunque, un punto x è aderente ad A se ogni suo intorno comunque piccolo contiene almeno un punto di A, mentre è di accumulazione per A se in ogni suo intorno cadono punti di A diversi da x stesso. Notiamo che un punto di accumulazione può appartenere o non appartenere ad A.

È facile vedere (✎ es. 5.11) che i punti aderenti o sono di accumulazione o sono isolati.

Esempio : se $A = [0,1[\cup]1,2[\cup\{3\}$, l'insieme dei punti di accumulazione di A è $[0,2]$, quindi non tutti i punti di accumulazione sono in A (mancano 1 e 2) e non tutti i punti di A sono di accumulazione (manca 3). Il punto 3 è isolato. La chiusura di A è $\overline{A} = [0,2] \cup \{3\}$.

Se $A = \mathbb{N}$, l'unico punto di accumulazione è $+\infty$, e tutti i punti di A sono isolati.

Se $A = \mathbb{R}$, la sua chiusura (in $\overline{\mathbb{R}}$) è $\overline{\mathbb{R}}$ stesso (questo giustifica il simbolo usato).

Vedremo che il concetto di punto di accumulazione sarà fondamentale nel seguito, perché riproduce l'idea di un punto al quale ci si può avvicinare stando in A. Notiamo che nell'avvicinarsi è compreso un concetto di movimento: non diciamo che ci avviciniamo ad un punto se ci siamo già arrivati. In questo senso, dunque, non ci si può avvicinare ad un punto isolato di A (che pure appartiene ad A) stando in A, mentre lo possiamo fare per un punto di accumulazione: ogni suo intorno, infatti, contiene punti di A diversi da se stesso.

Proposizione 5.3 : *se $A \subset \mathbb{R}$ ed $x \in \overline{\mathbb{R}}$ è un punto di accumulazione di A, ogni intorno di x contiene infiniti punti di A.*

DIMOSTRAZIONE : supponiamo $x \in \mathbb{R}$, e sia $U \in \mathscr{I}_x$; per la proposizione 5.1, sia $r_0 > 0$ tale che $I_{r_0}(x) \subset U$. Posto $I_0 = I_{r_0}(x)$, per definizione di punto di accumulazione $\exists x_1 \in (I_0 \setminus \{x\}) \cap A$, poiché $I_0 \in \mathscr{I}_x$. Osserviamo che $x_1 \in U$ e che $x_1 \neq x$.

Proseguiamo per induzione, supponendo che $A \cap (U \setminus \{x\})$ contenga almeno n punti distinti $x_1, \ldots, x_n$: questo è già noto per $n = 1$. Posto $r_n = \min\{|x_i - x| : 1 \le i \le n\}$ abbiamo $r_n > 0$: infatti, se fosse $r_n = 0$ ci sarebbe un indice i tale che $|x_i - x| = 0$, cioè $x_i = x$, ma sappiamo che $x_i \in U \setminus \{x\}$ e pertanto $x_i \neq x$. Posto poi $I_n = I_{r_n}(x)$, di nuovo $\exists x_{n+1} \in (I_n \setminus \{x\}) \cap A$, ma $|x_{n+1} - x| < |x_i - x|$ per $1 \le i \le n$, dunque in particolare $x_{n+1} \neq x_i$ per $1 \le i \le n$, così che in $A \cap (U \setminus \{x\})$ ci sono almeno $n+1$ punti distinti. Per induzione, ve ne è almeno un'infinità numerabile.

Per finire la dimostrazione occorre ancora trattare il caso $x = \pm\infty$ (✎ es. 5.12). Un altro modo per dimostrare questa proposizione è per assurdo, utilizzando il risultato dell'esercizio 5.5. ■

Osservazione : dalla caratterizzazione (3.13) dell'estremo superiore e dalla definizione di punto di accumulazione segue facilmente che se $A \subset \mathbb{R}$ non ha massimo, allora $\sup A$ è un punto di accumulazione di A. Indipendentemente dall'esistenza del massimo, se $\sup A \in \mathbb{R}$ allora $\sup A$ è punto di accumulazione dell'insieme $\mathscr{M}_A$ dei maggioranti di A (➡ appendice 5.4).

Introduciamo ora gli "intorni sinistri" e gli "intorni destri" di un punto, che come abbiamo già detto non rientrano nella definizione di intorno; tuttavia, la notazione è molto comoda, ed è tradizionale.

Definizione : *se $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice intorno sinistro di x_0 qualunque intervallo $]a, x_0[\subset \mathbb{R}$ tale che $a < x_0$, e si dice intorno destro di x_0 qualunque intervallo $]x_0, b[\subset \mathbb{R}$ tale che $x_0 < b$.*

Esempio : l'intervallo $]-1,1[$ è un intorno sinistro del punto 1, è un intorno destro del punto -1, ed è un intorno di ogni punto x_0 con $-1 < x_0 < 1$.

Notiamo che, per definizione, il punto x_0 non appartiene ad alcun suo intorno destro o sinistro. Per esercizio, potete controllare quali delle proprietà degli intorni sono ancora vere per gli intorni destri o sinistri.

5.2 - Risultati preparatori

Riuniamo in questa sezione alcune proprietà di cui faremo uso in seguito.

Definizione : *se $\mathscr{P}(n)$ è un predicato sui numeri naturali, si dice che $\mathscr{P}$ è definitivamente vero se*

$$\exists \bar{n} : \forall n \ge \bar{n}, \quad \mathscr{P}(n).$$

Si dice che $\mathscr{P}$ è frequentemente vero se

$$\forall \bar{n}, \ \exists n \ge \bar{n} : \quad \mathscr{P}(n).$$

Esempio : è definitivamente vero che $1/n < 0.1$ (infatti è vero per $n \ge 11$); è frequentemente vero che $(-1)^n > 0$ (infatti è vero per ogni n pari, e fissato $\bar{n}$ basta scegliere $n = \bar{n}$ oppure $n = 1 + \bar{n}$).

L'esempio precedente mostra che un predicato può essere contemporaneamente frequentemente vero e frequentemente falso: infatti è frequentemente vero che $(-1)^n > 0$, ed è frequentemente vero che $(-1)^n \le 0$ (✎ es. 5.17).

Osserviamo che un predicato $\mathscr{P}$ sui numeri naturali è frequentemente vero se e solo se l'insieme $V = \{n : \mathscr{P}(n)\}$ non è limitato superiormente; per le proprietà dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$, V non è limitato superiormente se e solo se ha infiniti elementi.

Nel seguito useremo spesso la prossima proprietà.

Proposizione 5.4 : *se $k \in \mathbb{N}^+$ e ciascuno dei predicati $\mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_k$ è definitivamente vero, allora il predicato $\mathscr{P}_1$ e $\cdots$ e $\mathscr{P}_k$ è definitivamente vero.*

DIMOSTRAZIONE : per ipotesi,

$$\forall i \leq k,\ \exists \bar{n}_i : \forall n \geq \bar{n}_i, \quad \mathscr{P}_i(n) ;$$

posto $\bar{n} = \max\{\bar{n}_i : 1 \leq i \leq k\}$, per ogni i abbiamo

$$n \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad n \geq \bar{n}_i \quad \Rightarrow \quad \mathscr{P}_i(n) ,$$

pertanto

$$n \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{P}_1(n) \text{ e } \cdots \text{ e } \mathscr{P}_k(n) ,$$

che è la tesi. ■

Notiamo che questa proprietà è falsa se sostituiamo "definitivamente" con "frequentemente": infatti è frequentemente vero che $(-1)^n \geq 0$, come pure che $(-1)^n \leq 0$, ma questi due predicati non sono mai verificati contemporaneamente.

Per le funzioni reali definite su $\mathbb{N}$, non c'è bisogno di ridefinire appositamente la monotonia: ricordiamo ad esempio che una tale funzione f è crescente se e solo se

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad [n < m \Rightarrow f(n) < f(m)] ;$$

tuttavia, dato che il dominio è l'insieme bene ordinato $\mathbb{N}$, la proprietà di monotonia assume una forma particolare.

Proposizione 5.5 : *una funzione* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *è crescente* ⟦ *debolmente crescente* ⟧ *se e solo se*

$$\forall n, \quad f(n) < f(n+1) \quad [\![\leq]\!] .$$

Analogamente, è decrescente ⟦ *debolmente decrescente* ⟧ *se e solo se*

$$\forall n, \quad f(n) > f(n+1) \quad [\![\geq]\!] .$$

DIMOSTRAZIONE : chiaramente, se la funzione è crescente allora da $n < n+1$ segue $f(n) < f(n+1)$. Per dimostrare il viceversa, supponiamo che la funzione non sia crescente: allora

$$\exists \bar{n}, \bar{m} : \quad [\bar{n} < \bar{m} \text{ e } f(\bar{n}) \geq f(\bar{m})] .$$

Questo implica che l'insieme $A = \{k \in \mathbb{N} : k > \bar{n}, f(\bar{n}) \geq f(k)\}$ non è vuoto, dunque per la proprietà del minimo intero (☞ proposizione 3.4) esiste $\bar{k} = \min A$: abbiamo dunque $\bar{k} > \bar{n}$ e $f(\bar{n}) \geq f(\bar{k})$. Osserviamo che non può essere $\bar{k} = \bar{n} + 1$, perché per l'ipotesi è $f(\bar{n}) < f(\bar{n}+1)$; posto $h = \bar{k} - 1$, abbiamo allora $h > \bar{n}$; inoltre, $f(\bar{k}) = f(h+1) > f(h)$, quindi per la proprietà transitiva $f(\bar{n}) > f(h)$. Ma allora $h \in A$, che è assurdo perché $h = \bar{k} - 1 < \min A$.

Le dimostrazioni degli altri casi sono pressoché identiche (✎ es. 5.20). ■

Proposizione 5.6 : *se* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *è crescente allora* $\forall n,\ f(n) \geq n$.

La dimostrazione, per induzione, è molto facile (✎ es. 5.21).

Proposizione 5.7 : *se* $A \subset \mathbb{N}$ *è infinito, allora esiste un'applicazione crescente* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *la cui immagine è l'insieme* A.

DIMOSTRAZIONE : osserviamo che se A è infinito allora per ogni $i \in \mathbb{N}$ anche l'insieme

$$A_i = \{k \in A : k > i\} = A \setminus \{0, 1, \ldots, i\}$$

è infinito, quindi in particolare non è vuoto. Allora per il principio del minimo intero 3.4 l'insieme A_i ha minimo. Poniamo

$$f(0) = \min A , \qquad f(n+1) = \min A_{f(n)} :$$

questa è una definizione per induzione di un'applicazione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ (☞ proposizione 3.5); inoltre per ogni n abbiamo $f(n) \in A$, quindi $f(\mathbb{N}) \subset A$. Poi $f(n+1) > f(n)$, pertanto l'applicazione f è crescente (☞ proposizione 5.5); dobbiamo solo provare che $A \setminus f(\mathbb{N}) = \varnothing$. Supponiamo per assurdo che ciò non accada; poniamo $k = \min[A \setminus f(\mathbb{N})]$, che esiste per il principio del minimo intero (☞ proposizione 3.4), e consideriamo l'insieme $B = \{n \in A : n < k\}$: poiché $\min A = f(0) \in f(\mathbb{N})$, è $k \neq \min A$, pertanto $\min A < k$, cioè $\min A \in B$, e l'insieme B non è vuoto. Essendo anche limitato superiormente, ha massimo (☞ corollario 3.21): indicato con m tale massimo, abbiamo $m \in A$ e $m < k$, quindi $m \in f(\mathbb{N})$, cioè esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $m = f(\bar{n})$. Mostriamo che $f(\bar{n}+1) = k$: infatti,

$$B = \{n \in A : n < k\} = \{n \in A : n \leq \max B\} = \{n \in A : n \leq m\} ,$$

ma $m = f(\bar{n})$ e pertanto

$$\{n \in A : n \geq k\} = \{n \in A : n > f(\bar{n})\} .$$

In particolare si ha

$$k = \min\{n \in A : n \geq k\} = \min A_{f(\bar{n})} = f(\bar{n}+1) ,$$

come dovevamo dimostrare. ■

La proposizione precedente si generalizza in modo interessante.

Proposizione 5.8 : *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *sia* A_n *un sottoinsieme infinito di* $\mathbb{N}$; *allora esiste un'applicazione crescente* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tale che per ogni* n *è* $f(n) \in A_n$.

La dimostrazione è un esercizio formalmente un po' complicato (✎ es. 5.22), per il quale si usa la definizione per induzione

$$f(0) = \min A_0 , \qquad f(n+1) = \min\{k \in A_{n+1} : k > f(n)\} :$$

le altre modifiche non sono troppo difficili. Dalla proposizione 5.7 ricaviamo anche questa conseguenza, per dimostrare la quale basta considerare l'insieme $A = \{n : \mathscr{P}(n)\}$.

Corollario 5.9 : *se* $\mathscr{P}(n)$ *è un predicato sui numeri naturali che è frequentemente vero, allora esiste un'applicazione crescente* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tale che* $\mathscr{P}(f(n))$ *è sempre vero.*

per indicare l'intera successione $a \to \{a_n\}_n$

5.3 - Successioni e loro limiti

Il concetto di successione vuol tradurre l'idea di una sequenza di numeri (o altro), con un inizio ma senza una fine, come ad esempio la sequenza di tutti i numeri naturali $0, 1, 2, \dots$, oppure la sequenza dei numeri pari $0, 2, 4, \dots$, o la sequenza $1, 1/2, 1/3, \dots$. Nei primi due esempi, la sequenza è ottenuta leggendo uno dopo l'altro i valori assunti per $n = 0, 1, 2, \dots$ da una funzione definita su $\mathbb{N}$: nel primo caso si tratta della funzione $f(n) = n$, nel secondo della funzione $f(n) = 2n$; il terzo caso è un po' diverso, perché si può vedere come sequenza dei valori della funzione $f(n) = 1/n$, che però non è definita per $n = 0$, oppure come sequenza dei valori della funzione definita su tutto $\mathbb{N}$ da $f(n) = 1/(n+1)$. Per evitare queste inutili complicazioni, osserviamo che una semiretta di numeri naturali è un insieme del tipo $\{n \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n}\}$, cioè è formata da tutti i numeri naturali maggiori o uguali a qualche numero $\bar{n}$: possiamo allora dare la definizione di successione.

Definizione : *si dice successione una qualunque applicazione definita in una semiretta di $\mathbb{N}$. Se il codominio dell'applicazione è un insieme A, si parla di successione di elementi di A (o successione a valori in A).*

Nel seguito, parleremo quasi esclusivamente del caso $A = \mathbb{R}$, pertanto useremo il termine successione per indicare una successione di numeri reali. Abitualmente, per le successioni si usa una notazione differente da quella che adoperiamo per le funzioni generiche: per queste ultime, alla funzione assegniamo generalmente uno dei simboli $f, g, h, \dots$, alla variabile uno dei simboli $x, y, z, \dots$ e indichiamo il valore della funzione f nel punto x con la scrittura $f(x)$. Per le successioni, la variabile (che è un numero naturale) si indica generalmente con n, m, i, j, h, k, l'applicazione con $a, b, c, x, y, \dots$ e il valore della successione a nel punto n si scrive a_n anziché $a(n)$. Tuttavia, mentre nella frase "la funzione f" il simbolo della funzione è ben visibile, non si può dire altrettanto di "la successione c": allora, per indicare l'intera successione data, ad esempio, dalla legge c, useremo la scrittura $\{c_h\}_h$, con lo stesso significato di $h \mapsto c_h$; in particolare, la variabile è muta, ovvero $\{c_h\}_h = \{c_i\}_i = \cdots$. Queste sono solo variazioni tipografiche, ma sono standard e aiutano l'occhio a rendersi conto rapidamente di quali enti matematici abbiamo davanti.

Esempio : sono successioni $a_n = 2n$, $x_h = (-1)^h$, $b_k = 1/(k-3)$: le prime sono definite su tutto $\mathbb{N}$, la terza è definita per $k \geq 4$. In particolare, osserviamo che la successione $\{x_h\}_h$ assume il valore 1 per gli h pari, ed il valore -1 per gli h dispari, pertanto la funzione $c_h = 1/(1 + x_h)$ non è una successione, perché è definita solo per h pari e questo insieme non contiene semirette di $\mathbb{N}$ (✎ es. 5.23).

Definizione : *si dice sottosuccessione di una successione $\{a_n\}_n$ (o successione estratta da $\{a_n\}_n$) la composizione $a \circ k$ della successione data con una qualunque applicazione crescente $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

Notiamo che se k è un'applicazione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$, essa è una successione (di numeri naturali), quindi per la sottosuccessione data dalla composizione di a con k si usa la scrittura a_{k_n} anziché $a(k(n))$. Estrarre una sottosuccessione da $\{a_n\}_n$ corrisponde a eliminare alcuni termini (anche infiniti) dalla sequenza dei valori della successione, lasciandone però infiniti e (per l'ipotesi di crescenza di k) nello stesso ordine in cui comparivano nella successione di partenza.

Esempio : se $\{a_n\}_n$ è una successione, sono sue sottosuccessioni $b_n = a_{n^2}$, $c_n = a_{3n-20}$, $d_n = a_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$, ...

Osservazione : poiché la composizione di due applicazioni crescenti è crescente, una sottosuccessione di una sottosuccessione di $\{a_n\}_n$ è ancora una sottosuccessione di $\{a_n\}_n$.

I risultati sulle funzioni crescenti che abbiamo ottenuto nella sezione 5.2 possono essere riformulati in termini di sottosuccessioni: ad esempio, abbiamo il seguente risultato.

Corollario 5.10 : *se $\mathscr{P}(x)$ è un predicato su $\mathbb{R}$ ed $\{a_n\}_n$ è una successione tale che $\mathscr{P}(a_n)$ è frequentemente vero, allora esiste una sottosuccessione $\{a_{k_n}\}_n$ tale che $\mathscr{P}(a_{k_n})$ è sempre vero.*

La dimostrazione si ricava applicando il corollario 5.9 al predicato $\mathscr{Q}(n) = \mathscr{P}(a_n)$. Il prossimo risultato dice che una successione definitivamente limitata è limitata.

Proposizione 5.11 : *sia $\{a_n\}_n$ una successione; se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che definitivamente $a_n \leq M$ $[\geq M]$ allora la successione $\{a_n\}_n$ è limitata superiormente [inferiormente].*

DIMOSTRAZIONE : sia $a_n \leq M$ per $n \geq \bar{n}$; posto $A = \{a_0, \dots, a_{\bar{n}-1}, M\}$, l'insieme A è non vuoto ed ha un numero finito di elementi (sono $\bar{n}+1$), pertanto ha massimo per la proposizione 3.28. Se $M' = \max A$, abbiamo $M' \geq M$, perché $M \in A$, ed anche:

$$0 \leq n \leq \bar{n} - 1 \quad \Rightarrow \quad a_n \in A \quad \Rightarrow \quad a_n \leq M'$$
$$n \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad a_n \leq M \quad \Rightarrow \quad a_n \leq M',$$

quindi in ogni caso $a_n \leq M'$, cioè a_n è limitata superiormente; l'altro caso si ottiene da questo considerando la successione $\{-a_n\}_n$ e applicando la proposizione 3.16. ■

Il concetto di limite (➡ appendice 5.5) formalizza l'idea di una successione i cui termini "si avvicinano" ad un particolare valore.

Definizione : *diciamo che la successione $\{a_n\}_n$ ha limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, o più brevemente che $\{a_n\}_n$ tende ad ℓ, se*

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n}, \quad a_n \in U \tag{5.1}$$

In tal caso scriviamo

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$$

o anche $a_n \to \ell$.

Notiamo qui che la definizione può essere riscritta come

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists V \in \mathscr{I}_{+\infty} : \forall n \in V \cap \mathbb{N},\quad a_n \in U\,. \tag{5.2}$$

Mostreremo nei prossimi esempi che vi sono successioni che hanno limite, ed altre che non hanno limite.

Teorema 5.12 : *il limite di una successione, se esiste, è unico.*

Dimostrazione : se $a_n \to \ell_1$ ed $a_n \to \ell_2$ con $\ell_1 \neq \ell_2$, possiamo scegliere due intorni disgiunti $U_1 \in \mathscr{I}_{\ell_1}$ e $U_2 \in \mathscr{I}_{\ell_2}$ (proposizione 5.2); per definizione di limite, definitivamente $a_n \in U_1$ e definitivamente $a_n \in U_2$, quindi definitivamente $a_n \in U_1$ e $a_n \in U_2$ (proposizione 5.4), cioè $a_n \in U_1 \cap U_2$, che è assurdo perché $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. ■

è assurdo perché l'intersezione tra due U insiemi è = $\varnothing$

Proposizione 5.13 : *se $a_n \to \ell$ allora per ogni sua estratta si ha $a_{k_n} \to \ell$.*

Dimostrazione : supponiamo che $a_n \to \ell$, e sia $U \in \mathscr{I}_\ell$; per ipotesi,

$$\exists \bar n : \forall i \geq \bar n,\quad a_i \in U\,.$$

Se $\{a_{k_n}\}_n$ è una sua estratta, per la proposizione 5.6 abbiamo

$$n \geq \bar n \quad\Rightarrow\quad k_n \geq n \geq \bar n\,,$$

dunque

$$\forall n \geq \bar n,\quad a_{k_n} \in U\,,$$

come volevamo dimostrare. ■

Il viceversa della proposizione 5.13 è banale; dato che $\{a_n\}_n$ è un'estratta di se stessa, se tutte le sue estratte hanno limite ℓ è chiaro che anche $a_n \to \ell$.

Corollario 5.14 : *se una successione ha limite, tutte le sue estratte hanno lo stesso limite.*

Esempio : una successione costante ha limite, ed il limite è il valore della costante; infatti, se $a_n = c$ per ogni n, per ogni intorno U di c abbiamo che $a_n \in U$ per ogni valore di n (☛ proposizione 5.1).

Esempio : la successione $a_n = (-1)^n$ non ha limite: infatti, se fosse $(-1)^n \to \ell$, ogni estratta di $\{a_n\}_n$ dovrebbe avere limite ℓ, ma la sottosuccessione $\{a_{2n}\}_n$ dei termini pari vale costantemente 1, quindi ha limite 1, mentre la sottosuccessione $\{a_{2n+1}\}_n$ dei termini dispari vale costantemente -1, quindi ha limite $-1 \neq 1$.

La proposizione 5.13 ha una controparte (➡ appendice 5.6).

Proposizione 5.15 : *se possiamo dividere una successione $\{a_n\}_n$ tra due sottosuccessioni, in modo che tutti gli elementi della successione appartengano a qualcuna di esse, e se entrambe hanno lo stesso limite ℓ, allora è tutta $\{a_n\}_n$ che ha limite ℓ.*

Dimostrazione : siano $\{a_{h_n}\}_n$ ed $\{a_{k_n}\}_n$ le due estratte; le ipotesi sono (ricordiamo che h e k sono due funzioni crescenti da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$):

$$h(\mathbb{N}) \cup k(\mathbb{N}) = \mathbb{N}\,,\qquad a_{h_n} \to \ell\,,\qquad a_{k_n} \to \ell\,.$$

per ipotesi le due estratte hanno lo stesso limite

Fissiamo $U \in \mathscr{I}_\ell$; per ipotesi

$$\exists \bar n_1 : \forall n \geq \bar n_1,\quad a_{h_n} \in U\,,\qquad \exists \bar n_2 : \forall n \geq \bar n_2,\quad a_{k_n} \in U\,.$$

Poniamo $\bar n = \max\{h_{\bar n_1}, k_{\bar n_2}\}$, e mostriamo che per $n \geq \bar n$ abbiamo $a_n \in U$: infatti, il termine a_n appartiene ad almeno una delle due sottosuccessioni. Se appartiene alla prima (l'altro caso è analogo) allora esiste m tale che $n = h_m$; per la stretta monotonia di h, da $h_m = n \geq \bar n \geq h_{\bar n_1}$ segue $m \geq \bar n_1$. Allora per la scelta di n_1 è $a_n = a_{h_m} \in U$, come volevamo dimostrare. ■

Esempio : se $\{b_n\}_n$ e $\{c_n\}_n$ sono due successioni che hanno limite ℓ, la successione

$$a_n = \begin{cases} b_n & \text{se } n \text{ è pari} \\ c_n & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

ha anch'essa limite ℓ: infatti le due sottosuccessioni

$$\{a_{2n}\}_n \qquad \{a_{2n+1}\}_n$$

dei termini con indice pari e di quelli con indice dispari sono sottosuccessioni anche di $\{b_n\}_n$ e di $\{c_n\}_n$ rispettivamente, quindi hanno entrambe limite ℓ; inoltre l'unione dei numeri pari e di quelli dispari dà tutto $\mathbb{N}$, quindi possiamo applicare la proposizione precedente e anche $a_n \to \ell$.

Vediamo come si può riscrivere la definizione di limite senza usare la terminologia degli intorni; premettiamo una definizione.

Definizione : *si dice che una successione è convergente se ha limite finito, cioè appartenente ad $\mathbb{R}$; si dice che è divergente positivamente* [*negativamente*] *se ha limite $+\infty$* [$-\infty$]*; infine, si dice che è infinitesima se ha limite zero.*

Proposizione 5.16 : *una successione $\{a_n\}_n$ converge ad $\ell \in \mathbb{R}$ se e solo se*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar n : \forall n \geq \bar n,\quad |a_n - \ell| < \varepsilon\,; \tag{5.3}$$

una successione $\{a_n\}_n$ diverge positivamente [*negativamente*] *se e solo se*

$$\forall M,\ \exists \bar n : \forall n \geq \bar n,\quad a_n > M \quad [\,< M\,]\,. \tag{5.4}$$

Osserviamo che per la proprietà (4.8) possiamo riscrivere la formula (5.3) come

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar n : \forall n \geq \bar n,\quad \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon\,. \tag{5.5}$$

a_n è compresa tra $\ell - \varepsilon$ e $\ell + \varepsilon$

DIMOSTRAZIONE : iniziamo con il caso $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$; osserviamo che l'intervallo $I_\varepsilon(\ell)$ è un intorno di ℓ, quindi se $a_n \to \ell$ possiamo prendere in particolare $U = I_\varepsilon(\ell)$ nella definizione di limite, ed otteniamo (5.3)* Viceversa, proviamo che se vale (5.3) allora $a_n \to \ell$: scelto $U \in \mathscr{I}_\ell$, abbiamo $U \supset I_\varepsilon(\ell)$ per qualche $\varepsilon > 0$ (☞ proposizione 5.1); applicando (5.3) abbiamo che $\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n},\ a_n \in I_\varepsilon(\ell) \subset U$, quindi anche $a_n \in U$, e la dimostrazione è conclusa.

* $\forall U \in I_\ell$ $\exists \varepsilon > 0$: $I_\varepsilon(\ell) \in U$

L'equivalenza della definizione di limite con (5.4) nel caso di una successione divergente è anche più facile (✎ es. 5.24). ■

Notiamo inoltre che la formula (5.4) può essere espressa anche scrivendo $\forall M > 0$ 〚 < 0 〛 anziché $\forall M$ (✎ es. 5.25).

Esempio : la successione $a_n = n$ diverge positivamente; infatti, fissato $M \in \mathbb{R}$ esiste $\bar{n}$ tale che $\bar{n} > M$, in quanto $\sup \mathbb{N} = +\infty$, pertanto per ogni $n \geq \bar{n}$ abbiamo $n \geq M$, per la proprietà transitiva.

Proposizione 5.17 : *se* $K > 0$, *allora* (5.3) *equivale a* convergenza

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n},\quad |a_n - \ell| < K\varepsilon\,; \tag{5.6}$$

invece (5.4) *equivale a* divergenza

$$\forall M,\ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n},\quad a_n > KM \quad [\![< KM]\!] \tag{5.7}$$

o anche a

$$\forall M,\ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n},\quad a_n > M \pm K \quad [\![< M \pm K]\!]\,. \tag{5.8}$$

La dimostrazione di (5.6) si basa solo sul fatto ovvio che (5.3) equivale a

$$\forall \gamma > 0,\ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n},\quad |a_n - \ell| < \gamma\ :$$

basta applicare questa formula con $\gamma = K\varepsilon$ o $\gamma = \varepsilon/K$ per avere l'equivalenza cercata (✎ es. 5.26).

Dal fatto che $[|x| < \varepsilon \Rightarrow |x| \leq \varepsilon]$ e che $[|x| \leq \varepsilon \Rightarrow |x| < 2\varepsilon]$, e dall'equivalenza precedente, ricaviamo subito che un'altra versione equivalente a (5.3) è

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n},\quad |a_n - \ell| \leq \varepsilon\,, \tag{5.9}$$

oppure con $K\varepsilon$ al posto di ε ; formule analoghe si ottengono per una successione divergente.

Esempio : la successione $1/n$ ha limite zero; infatti, fissiamo $\varepsilon > 0$; per la proprietà di Archimede esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon$. Allora, se $n \geq \bar{n}$ abbiamo $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon$, quindi (tenuto conto che $1/n > 0$) per ogni $n \geq \bar{n}$

$$-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

È chiaro che la stessa proprietà vale per la successione $-1/n$ (✎ es. 5.27).

Per le successioni infinitesime, vale la seguente proprietà, la cui dimostrazione è ovvia dalla caratterizzazione (5.3).

Proposizione 5.18 : *una successione* $\{a_n\}_n$ *è infinitesima se e solo se la successione dei suoi valori assoluti* $\{|a_n|\}_n$ *è infinitesima.*

Se $a_n \to \ell$ e se $H < \ell < K \Rightarrow H < a_n < K$.
$\forall a_n$ convergente è limitata
$\forall a_n \to +\infty$ è limitata inferiormente
$\forall a_n \to -\infty$ è limitata superiormente

5.4 - Teoremi di confronto e teoremi algebrici

Questo risultato è la base di buona parte degli enunciati che seguono (➡ appendice 5.7).

Teorema di limitatezza 5.19 : *se* $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$, *e se* $H < \ell < K$, *allora definitivamente* $H < a_n < K$; *in particolare, ogni successione convergente è limitata. Invece, ogni successione divergente positivamente* 〚negativamente〛 *è limitata inferiormente* 〚*superiormente*〛.

DIMOSTRAZIONE : per la prima parte è sufficiente osservare che ogni intervallo $]H, K[$ è un intorno di ℓ, quindi per definizione di limite definitivamente $a_n \in]H, K[$; la limitatezza segue allora dalla proposizione 5.11 scegliendo $H < \ell < K$ con $H, K \in \mathbb{R}$ (ad esempio, $H = \ell - 1$ e $K = \ell + 1$). Se $\exists M : a_n \leq M \Rightarrow a_n$ è limitata

La seconda parte segue direttamente dalla definizione (5.4) di limite e dalla proposizione 5.11. ■

Corollario 5.20 : *se* $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ *allora per ogni* $H < \ell$ *definitivamente* $H < a_n$, *e per ogni* $K > \ell$ *definitivamente* $K > a_n$.

Se sostituiamo l'ipotesi $H < \ell$ con la più debole $H \leq \ell$, il corollario non è più vero, neppure se sostituiamo la tesi con la più debole $H \leq a_n$, come mostra il prossimo esempio.

Esempio : se $a_n = -1/n$, è $a_n \to \ell = 0$; se $H = 0$, è $H \leq \ell$, ma non è vero che definitivamente $H \leq a_n$ (anzi, non è vero mai).

Un ulteriore caso particolare è il prossimo risultato, per provare il quale basta applicare il corollario 5.20 con $H = 0$ o $K = 0$ a seconda del segno del limite.

Teorema di permanenza del segno 5.21 : *se* $\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0$ *allora definitivamente* a_n *ha lo stesso segno del limite.*

Il corollario 5.20 può essere letto, grazie alla equivalenza (2.1), come segue.

Corollario 5.22 : *se $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e frequentemente $a_n \leq H$ $[\geq K]$ allora $\ell \leq H$ $[\geq K]$*

Infatti, "frequentemente $a_n \leq H$" è la negazione di "definitivamente $a_n > H$". Anche qui, se pure rafforziamo l'ipotesi imponendo $a_n < H$ non possiamo ottenere la tesi più forte $\ell < H$, come mostra l'esempio precedente. Invece, se abbiamo che frequentemente $a_n \leq \bar{H} < H$ allora anche $\ell \leq \bar{H}$, quindi $\ell < H$.

Il primo dei prossimi due risultati è un teorema di confronto. In entrambi, la tesi è che una successione ha limite, e si dice anche qual è il limite: sono pertanto teoremi di esistenza del limite, nel senso che permettono di dimostrare che una successione ha limite avendo su di essa solo informazioni parziali.

Proposizione 5.23 : *siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni tali che definitivamente*

$$a_n \leq b_n ;$$

allora, se $a_n \to +\infty$ $[b_n \to -\infty]$ si ha anche $b_n \to +\infty$ $[a_n \to -\infty]$. nel caso in cui a_n diverge

DIMOSTRAZIONE : fissato $M \in \mathbb{R}$, per la caratterizzazione (5.4) definitivamente $a_n > M$, e per ipotesi definitivamente $b_n \geq a_n$, quindi (proposizione 5.4) definitivamente $b_n \geq a_n > M$. Abbiamo provato che per ogni M definitivamente $b_n > M$, cioè che $b_n \to +\infty$; l'altro caso è analogo. ■

Teorema dei due carabinieri 5.24 : *siano $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ e $\{c_n\}_n$ tre successioni tali che definitivamente*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \ell \in \mathbb{R}$$

e che

$$a_n \to \ell , \qquad c_n \to \ell ;$$

allora anche la successione $\{b_n\}_n$ ha limite, e

$$b_n \to \ell .$$

DIMOSTRAZIONE : osserviamo anzitutto che questo teorema ha interesse solo nel caso $\ell \in \mathbb{R}$, perché se $\ell = \pm\infty$ il risultato è già compreso (con meno ipotesi) nella proposizione precedente.

Fissato dunque un intorno $]H, K[$ di ℓ, abbiamo $H < \ell < K$, quindi per il teorema 5.19 definitivamente $H < a_n$ e definitivamente $c_n < K$. Allora (☞ proposizione 5.4) definitivamente $H < a_n \leq b_n \leq c_n < K$, cioè $b_n \in]H, K[$ e la dimostrazione è conclusa. ■

Il teorema dei carabinieri è di uso molto frequente; sostanzialmente, ci permette di partire da una successione "complicata" $\{b_n\}_n$ e approssimarla dall'alto e dal basso con due successioni più semplici; se queste sono state scelte in modo da avere lo stesso limite (e qui sta la difficoltà dell'applicazione) allora questo è anche il limite della successione di partenza.

Esempio : la successione $\frac{1+2(-1)^n}{3n}$ ha limite zero: infatti,

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1+2(-1)^n}{3n} \leq \frac{1}{n} ,$$

e sia la successione $-1/n$ che la successione $1/n$ sono infinitesime, pertanto tende a zero anche $\frac{1+2(-1)^n}{3n}$ per il teorema dei carabinieri (✎ es. 5.28).

I prossimi risultati danno alcune proprietà algebriche dei limiti, che ci permettono, in alcuni casi, di dedurre quale sia il limite di una successione avendo solo informazioni parziali su di essa.

Ricordiamo che abbiamo definito alcune operazioni in $\overline{\mathbb{R}}$, escludendo di dare un significato alle scritture $(+\infty) + (-\infty)$ e $0 \cdot (\pm\infty)$.

Teorema 5.25 : *siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni tali che*

$$a_n \to \ell_a , \qquad b_n \to \ell_b ;$$

Allora, se ha senso la scrittura $\ell_a + \ell_b$ abbiamo

$$(a_n + b_n) \to (\ell_a + \ell_b) ,$$

e se ha senso la scrittura $\ell_a \ell_b$ abbiamo

$$a_n b_n \to \ell_a \ell_b .$$

DIMOSTRAZIONE : iniziamo con il caso $\ell_a, \ell_b \in \mathbb{R}$: fissato $\varepsilon > 0$, abbiamo definitivamente

$$|a_n - \ell_a| < \varepsilon , \qquad |b_n - \ell_b| < \varepsilon .$$

Applicando la prima disuguaglianza triangolare (☞ proposizione 4.14) otteniamo

$$|(a_n + b_n) - (\ell_a + \ell_b)| = |(a_n - \ell_a) + (b_n - \ell_b)| \leq |a_n - \ell_a| + |b_n - \ell_b| ,$$

pertanto definitivamente

$$|(a_n + b_n) - (\ell_a + \ell_b)| < 2\varepsilon ,$$

che è la tesi per la caratterizzazione (5.6).

Supponiamo ora che $\ell_a = +\infty$, quindi $\ell_b > -\infty$ (altrimenti non ha senso la somma $\ell_a + \ell_b$); in particolare, la successione $\{b_n\}_n$ è convergente oppure divergente positivamente, e in ogni caso è limitata inferiormente grazie al teorema 5.19, vale a dire

$$\exists K \in \mathbb{R} : \forall n, \quad b_n \geq K ,$$

quindi

$$a_n + b_n \geq a_n + K .$$

Poiché $a_n \to +\infty$, per ogni M definitivamente $a_n > M$, quindi definitivamente

$$a_n + b_n > M + K\,,$$

dunque $(a_n + b_n) \to +\infty$ per la caratterizzazione (5.8). Gli altri casi relativi alla somma sono analoghi (o meglio, si ottengono da quest'ultimo scambiando a_n e b_n, oppure moltiplicando entrambe per la successione costante -1).

Passiamo ora al prodotto, iniziando dal caso $\ell_a, \ell_b \in \mathbb{R}$: osserviamo che

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \ell_a \ell_b| &= |a_n b_n - \ell_a b_n + \ell_a b_n - \ell_a \ell_b| \\ &\le |a_n - \ell_a| \cdot |b_n| + |\ell_a| \cdot |b_n - \ell_b|\,. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Dato che $\{b_n\}_n$ converge, essa è limitata, pertanto esiste $K > 0$ tale che per ogni n si ha $|b_n| \le K$ (☞ proposizione 4.13). Scelto $\varepsilon > 0$, per ipotesi definitivamente $|a_n - \ell_a| < \varepsilon$ e $|b_n - \ell_b| < \varepsilon$, quindi da (5.10) ricaviamo definitivamente

$$|a_n b_n - \ell_a \ell_b| \le (K + |\ell_a|)\varepsilon\,,$$

che dà la tesi.

Vediamo ora il caso in cui $\ell_a = +\infty$ e $\ell_b > 0$ (gli altri sono analoghi a questo, e il caso $+\infty \cdot 0$ non va trattato). Scelto un numero $K \in]0, \ell_b[$, ad esempio $K = \ell_b/2$ se $\ell_b \in \mathbb{R}$, o $K = 1$ se $\ell_b = +\infty$, definitivamente $b_n \ge K$ (☞ corollario 5.20); d'altra parte, fissato $M > 0$, definitivamente $a_n > M$, quindi definitivamente $a_n b_n > KM$, cioè $a_n b_n \to +\infty = \ell_a \ell_b$. ∎

Osserviamo che in realtà abbiamo provato due teoremi più forti di quelli enunciati, precisamente i seguenti.

Proposizione 5.26 : *se $a_n \to +\infty$ $[-\infty]$ e $\{b_n\}_n$ è limitata inferiormente [superiormente] allora $(a_n + b_n) \to +\infty$ $[-\infty]$.*
Se $\{a_n\}_n$ è divergente ed esiste $K > 0$ tale che definitivamente $b_n \ge K$ $[\le -K]$ allora $\{a_n b_n\}_n$ diverge dalla stessa parte [dalla parte opposta] di $\{a_n\}_n$.

Il teorema sul limite del prodotto si può generalizzare in un altro modo interessante.

Proposizione 5.27 : *il prodotto di una successione infinitesima per una limitata è una successione infinitesima.*

DIMOSTRAZIONE : se $a_n \to 0$ allora anche $|a_n| \to 0$ per la proposizione 5.18, mentre se $\{b_n\}_n$ è limitata esiste $K > 0$ tale che $|b_n| \le K$ per ogni n. Allora $0 \le |a_n b_n| = |a_n||b_n| \le K|a_n|$: poiché $K|a_n| \to 0$ per il teorema 5.25 sul limite del prodotto, anche $|a_n b_n| \to 0$ per il teorema dei carabinieri, quindi $a_n b_n \to 0$ di nuovo grazie alla proposizione 5.18. ∎

Vediamo alcuni esempi (fondamentali), dopo di che faremo qualche osservazione.

Esempio : per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ la successione $a_n = n^k$ diverge positivamente; infatti, già lo sappiamo per $k = 1$, quindi ad esempio $n^2 = n \cdot n$ è il prodotto di due successioni che divergono positivamente, dunque diverge positivamente. Più in generale, ragioniamo per induzione: se $n^k \to +\infty$, allora anche $n^{k+1} = n^k \cdot n$ diverge positivamente, pertanto abbiamo dimostrato quanto asserito.

Esempio : per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ la successione $1/n^k$ è infinitesima; il ragionamento, per induzione, è analogo al precedente, e parte dal fatto (già dimostrato) che $1/n \to 0$ (✎ es. 5.31).

Esempio : se $P(x) = 2x^3 + 4x - 5$, la successione $a_n = P(n)$ diverge positivamente, perché $n^3 \to +\infty$, quindi $2n^3 \to +\infty$ (prodotto di n^3 per la successione costante 2); analogamente $4n \to +\infty$, quindi $(4n - 5) \to +\infty$, quindi $P(n) \to +\infty$. Notiamo che se invece $P(x) = 2x^3 - 4x - 5$ abbiamo $2n^3 \to +\infty$, $(-4n - 5) \to -\infty$ e non possiamo applicare il teorema sul limite della somma.

Spesso, come nell'esempio precedente, occorre valutare la somma (o il prodotto) di tre o più successioni. Non è necessario applicare ripetutamente il teorema 5.25, come mostra il prossimo risultato.

Proposizione 5.28 : *il teorema 5.25 vale anche per la somma, e il prodotto, di un numero finito k di successioni, purché abbia senso la somma (o il prodotto) dei k limiti.*

La dimostrazione, per induzione, è lasciata per esercizio (✎ es. 5.32).

Abbiamo visto che il teorema 5.25 non dice nulla della somma di due successioni che divergono una positivamente e l'altra negativamente, come pure del prodotto di una successione divergente per una infinitesima. Vediamo che in tali casi non si può dire a *priori* quale sia il comportamento della successione somma (o prodotto), nel senso che questa può non avere limite, o se ce l'ha non possiamo dire quale sia basandoci unicamente sulla conoscenza del limite dei due addendi (o fattori). Invece, negli altri casi, questo è proprio quanto ci è permesso dal teorema 5.25.

Esempio : sia $a_n = n$ (sappiamo che $a_n \to +\infty$); nella tabella qui di seguito scegliamo opportunamente diverse successioni $b_n \to -\infty$ in modo che la successione somma esibisca tutti i possibili comportamenti (c è un qualsiasi numero reale).

b_n	$a_n + b_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n)$
$-n/2$	$n/2$	$+\infty$
$-n + c$	c	c
$-2n$	$-n$	$-\infty$
$-n + (-1)^n$	$(-1)^n$	non esiste.

Esempio : sia $a_n = 1/n^2$ (sappiamo che $a_n \to 0$); nella tabella qui di seguito scegliamo opportunamente diverse successioni $b_n \to \pm\infty$ in modo che la successione prodotto esibisca tutti i possibili comportamenti (c è un qualsiasi numero reale diverso da zero).

b_n	$a_n b_n$	$\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n)$
n	$1/n$	0
cn^2	c	c
$\pm n^3$	$\pm n$	$\pm\infty$
$[2+(-1)^n]n^2$	$2+(-1)^n$	non esiste.

Riassumiamo i due esempi precedenti dicendo che $\infty - \infty$ e $0 \cdot \infty$ sono *forme indeterminate,* nel senso che se delle successioni $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ sappiamo solo che $a_n \to +\infty$ e $b_n \to -\infty$ $[\![$ $a_n \to 0$ e $b_n \to \pm\infty$ $]\!]$ non possiamo dire nulla sull'eventuale limite della successione somma $[\![$prodotto$]\!]$. Questo non significa, naturalmente, che non potremo mai dirne alcunché: però, occorrerà sapere esattamente quali sono le successioni in questione, come abbiamo fatto negli esempi delle tabelle.

Utilizzando il teorema sul limite della somma, possiamo dimostrare la seguente proprietà, per enunciare la quale abbiamo posto $|-\infty| = +\infty$.

Proposizione 5.29 : *se $a_n \to \ell$ allora $|a_n| \to |\ell|$.*

DIMOSTRAZIONE : cominciamo con il caso $\ell \in \mathbb{R}$; per la seconda disuguaglianza triangolare (☞ proposizione 4.14) abbiamo

$$0 \le \big||a_n| - |\ell|\big| \le |a_n - \ell| .$$

D'altra parte da $a_n \to \ell$ segue $(a_n - \ell) \to 0$, quindi anche $|a_n - \ell| \to 0$ (☞ proposizione 5.18); allora per il teorema dei carabinieri e per la proposizione 5.18 anche $(|a_n| - |\ell|) \to 0$, da cui segue la tesi sommando a questa la successione costante $|\ell|$.

Nel caso $\ell = \pm\infty$ la dimostrazione non usa la disuguaglianza triangolare, e non è difficile (✎ es. 5.34). ■

Notiamo che non è vero il viceversa della proposizione precedente, cioè se $|a_n| \to |\ell|$ non è detto che $a_n \to \ell$, come mostra l'esempio della successione $(-1)^n$.

Utilizzando il teorema sul limite della somma, possiamo facilmente (✎ es. 5.35) generalizzare i teoremi di confronto visti all'inizio della sezione (corollario 5.20 e seguenti).

Proposizione 5.30 : *siano $a_n \to \ell_a$ e $b_n \to \ell_b$ due successioni;*
1) *se $\ell_a < \ell_b$ allora definitivamente $a_n < b_n$;*
2) *se frequentemente $a_n \le b_n$ allora $\ell_a \le \ell_b$.*

Anche per quanto riguarda questa proposizione valgono le osservazioni fatte dopo il corollario 5.20: da $\ell_a \le \ell_b$ non segue affatto che $a_n \le b_n$, e da $a_n < b_n$ non segue che $\ell_a < \ell_b$.

Osserviamo poi che nella proposizione precedente si richiede l'esistenza dei limiti: se $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ sono due successioni delle quali sappiamo che $a_n \le b_n$, non possiamo scrivere subito che $\lim_{n\to+\infty} a_n \le \lim_{n\to+\infty} b_n$, perché questi limiti potrebbero non esistere (così come sapendo che $A \subset B$ non possiamo scrivere $\max A \le \max B$, perché questi potrebbero non esistere).

I prossimi risultati riguardano il limite del quoziente; cominciamo con un esempio.

Esempio : la successione $a_n = (-1)^n/n$ ha limite zero, ma $b_n = 1/a_n$ non ha limite. Infatti $b_{2n} = 2n \to +\infty$, mentre $b_{2n+1} = -(2n+1) \to -\infty$: avendo due estratte con limiti diversi, $\{b_n\}_n$ non ha limite.

Il problema, nell'esempio precedente, è che $\{a_n\}_n$ continua a cambiare segno; per la verità, se abbiamo che $a_n \to \ell \neq 0$ allora per il teorema di permanenza del segno (teorema 5.21) definitivamente $a_n \neq 0$, quindi ha senso parlare della successione $\{1/a_n\}_n$. Invece, se sappiamo solo che $a_n \to 0$ non possiamo assicurare che $1/a_n$ esista: la successione $\{a_n\}_n$ potrebbe essere addirittura costantemente zero, o frequentemente zero, come $a_n = \big(1 + (-1)^n\big)/n$. La successione $\{1/a_n\}_n$ esiste se e solo se definitivamente $a_n \neq 0$; queste considerazioni motivano la prossima posizione.

Definizione : *se $\ell \in \mathbb{R}$, si dice che $a_n \to \ell^+$ $[\![\ell^-]\!]$ se $a_n \to \ell$ e definitivamente $a_n > \ell$ $[\![< \ell]\!]$.*

Dunque, $1/n \to 0^+$, ma $(-1)^n/n$, pur essendo infinitesima, non tende né a 0^+ né a 0^- . Notiamo che se $a_n \to 0^\pm$ la successione $\{1/a_n\}_n$ esiste.

Proposizione 5.31 : *se $a_n \to \ell$ allora*

$$\begin{aligned} \ell = +\infty \ [\![-\infty]\!] \quad &\Rightarrow \quad 1/a_n \to 0^+ \ [\![0^-]\!] \\ \ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad &\Rightarrow \quad 1/a_n \to 1/\ell \\ \ell = 0^+ \ [\![0^-]\!] \quad &\Rightarrow \quad 1/a_n \to +\infty \ [\![-\infty]\!] . \end{aligned}$$

Se $a_n \to 0$, ma non ha segno definitivamente costante, allora $\{1/a_n\}_n$ non ha limite.

DIMOSTRAZIONE : per il teorema sul limite del prodotto, basta considerare i casi $\ell = +\infty$, $\ell = 0^+$, $0 < \ell < +\infty$, dato che gli altri si ottengono applicando questo risultato alla successione $\{-a_n\}_n$. Osserviamo che in ciascuno di questi casi definitivamente $a_n > 0$, pertanto anche $1/a_n > 0$.

Iniziamo da $\ell = +\infty$: scelto $\varepsilon > 0$, definitivamente $a_n > 1/\varepsilon$, quindi definitivamente

$$-\varepsilon < 0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon ,$$

cioè $1/a_n \to 0^+$.

Lasciando per esercizio il caso $\ell = 0^+$ (✎ es. 5.36), passiamo al caso $0 < \ell < +\infty$: fissato un intorno $]H, K[$ di $1/\ell$, scegliamo $H' \ge H$ in modo che $0 < H' < 1/\ell$ (basta prendere $H' = H$ se $H > 0$, altrimenti $H' = 1/2\ell$). Allora abbiamo $0 < 1/K < \ell <$

$1/H'$, quindi per il teorema di limitatezza 5.19 definitivamente $0 < 1/K < a_n < 1/H'$, vale a dire definitivamente $H' < 1/a_n < K$, pertanto $H < 1/a_n < K$, che dimostra che $1/a_n \to 1/\ell$.

L'ultima affermazione si ottiene osservando che frequentemente $a_n > 0$ e frequentemente $a_n < 0$, quindi esistono due sottosuccessioni tali che $a_{h_n} \to 0^+$ e $a_{k_n} \to 0^-$ (corollario 5.10), dunque per quanto dimostrato prima $1/a_{h_n} \to +\infty$ e $1/a_{k_n} \to -\infty$. Allora $\{1/a_n\}_n$ non può aver limite, perché ha due sottosuccessioni con limiti diversi. ■

Esempio : se $P(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k$ è un polinomio di grado k (quindi $c_k \neq 0$), calcoliamo il limite per $n \to +\infty$ di $P(n)$. Questo è facile, per il teorema sul limite del prodotto, se tutti i coefficienti hanno lo stesso segno, altrimenti ci troviamo di fronte ad una forma indeterminata del tipo $\infty - \infty$. Tuttavia, per $n \to +\infty$, in un polinomio il termine dominante è quello di grado più elevato, cioè $P(n)$ ha lo stesso limite di c_kn^k : infatti

$$P(n) = \sum_{i=0}^{k} c_i n^i = c_k n^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i n^i = c_k n^k \Big(1 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{c_i}{c_k\, n^{k-i}}\Big) .$$

Dato che per $i \le k-1$ l'esponente $k-i$ è positivo, per $n \to +\infty$ abbiamo $(1/n^{k-i}) \to 0$, quindi per il teorema sul limite del prodotto tutti gli addendi della sommatoria sono infinitesimi. Allora la quantità tra parentesi tende ad 1 , e per il teorema sul limite del prodotto

$$\lim_{n\to+\infty} P(n) = \lim_{n\to+\infty} c_k n^k = \begin{cases} +\infty & \text{se } c_k > 0 \\ -\infty & \text{se } c_k < 0. \end{cases}$$

Osserviamo che il quoziente a_n/b_n può essere scritto come prodotto $a_n \cdot (1/b_n)$: allora, la proposizione precedente unita al teorema sul limite del prodotto ci fornisce un teorema sul limite del quoziente. Restano esclusi i casi in cui il prodotto dei limiti di $\{a_n\}_n$ e di $\{1/b_n\}_n$ è nella forma $0 \cdot \infty$, vale a dire i casi in cui le successioni $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ sono entrambe infinitesime, o entrambe divergenti.

Teorema 5.32 : *siano* $\{a_n\}_n$ *e* $\{b_n\}_n$ *due successioni tali che*

$$a_n \to \ell_a , \qquad b_n \to \ell_b ;$$

abbiamo allora i seguenti casi:

$$\begin{aligned} \ell_a \in \mathbb{R},\ \ell_b \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad &\Rightarrow \quad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{\ell_a}{\ell_b} \\ \ell_a \in \mathbb{R},\ \ell_b = \pm\infty \quad &\Rightarrow \quad \frac{a_n}{b_n} \to 0 \\ \ell_a \in \mathbb{R}^+ \quad [\mathbb{R}^-],\ \ell_b = 0^\pm \quad &\Rightarrow \quad \frac{a_n}{b_n} \to \pm\infty \quad [\mp\infty] \\ \ell_a = \pm\infty,\ \ell_b \in \mathbb{R}^+\cup\{0^+\} \quad [\mathbb{R}^-\cup\{0^-\}] \quad &\Rightarrow \quad \frac{a_n}{b_n} \to \pm\infty \quad [\mp\infty] . \end{aligned}$$

Se $\ell_a \neq 0$ *e* $b_n \to 0$ *, ma non ha segno definitivamente costante, allora* a_n/b_n *non ha limite.*

Torniamo alla tabella sul prodotto di due successioni, che mostra che $0 \cdot \infty$ è una forma indeterminata: osserviamo che ponendo $a'_n = 1/a_n$ e $b'_n = 1/b_n$ abbiamo in ogni caso $a'_n \to +\infty$ e $b'_n \to 0$, e il prodotto a_nb_n può essere riscritto b_n/a'_n oppure a_n/b'_n . Nel primo caso, numeratore e denominatore sono divergenti, nel secondo sono infinitesimi, pertanto anche nei casi $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$ non possiamo dire quale sia il limite del quoziente sapendo solo i limiti dei fattori. Dunque, oltre a $\infty - \infty$ e a $0 \cdot \infty$, anche $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$ sono *forme indeterminate.*

Esempio : una funzione razionale è il rapporto di due polinomi; se $P(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k$ e $Q(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_hx^h$ sono due polinomi di gradi rispettivamente k ed h (quindi $c_k \neq 0$ e $d_h \neq 0$), per quanto visto nell'esempio precedente il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} (P(n)/Q(n))$ è nella forma $\frac{\infty}{\infty}$. Mostriamo che questo limite è uguale al limite del rapporto dei soli termini dominanti, cioè

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{c_kn^k}{d_hn^h} = \lim_{n\to+\infty} \frac{c_k}{d_h} n^{k-h}$$

(quest'ultimo limite è facilmente calcolabile, a seconda del segno dell'esponente $k-h$ e del coefficiente c_k/d_h). Infatti

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{c_kn^k}{d_hn^h} \, \frac{1 + \sum\limits_{i=0}^{k-1} \dfrac{c_i}{c_k\, n^{k-i}}}{1 + \sum\limits_{i=0}^{h-1} \dfrac{d_i}{d_h\, n^{h-i}}} ,$$

e la seconda frazione tende ad 1 (✎ es. 5.37).

5.5 - Continuità

Osserviamo che, se indichiamo con f la funzione valore assoluto, abbiamo dimostrato (☞ proposizione 5.29) che per ogni $x_* \in \mathbb{R}$ vale la seguente proprietà: indicando con A il dominio di f ,

$$\forall\{x_n\}_n \subset A, \quad [x_n \to x_* \Rightarrow f(x_n) \to f(x_*)] . \tag{5.11}$$

Definizione : *una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ che per un certo $x_* \in A$ verifica* (5.11) *si dice* ***continua in x_**** *; se f è continua in ogni punto di A si dice semplicemente che f è* ***continua****.*

Dunque, possiamo dire che la funzione $x \mapsto |x|$ è continua (✎ es. 5.38).

Osservazione : in realtà quella che abbiamo dato è la definizione di funzione sequenzialmente continua; tuttavia (☞ corollario 6.18) per le funzioni reali definite su un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ le due nozioni coincidono, dunque non c'è ambiguità (➡ appendice 6.5).

Proposizione 5.33 : *le funzioni* $\operatorname{sen} x$ *e* $\cos x$ *sono continue.*

DIMOSTRAZIONE : iniziamo dal caso $x_* = 0$; dalle formule (4.22) e (4.23) ricaviamo

$$0 \le |\operatorname{sen} x_n| \le |x_n| , \qquad 1 - |x_n| \le \cos x_n \le 1 ,$$

e dal teorema dei carabinieri (usando anche la proposizione 5.18 e il teorema sul limite della somma) otteniamo

$$x_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad [\operatorname{sen} x_n \to 0 , \quad \cos x_n \to 1] . \tag{5.12}$$

Nel caso generale, se $x_n \to x_*$, poniamo $d_n = x_n - x_*$, così che $d_n \to 0$: dalla formula per il seno della somma otteniamo

$$\operatorname{sen} x_n = \operatorname{sen}(x_* + d_n) = \operatorname{sen} x_* \cos d_n + \cos x_* \operatorname{sen} d_n .$$

Applicando alla successione $\{d_n\}_n$ la proprietà (5.12), per il teorema sul limite della somma e del prodotto ricaviamo dall'uguaglianza precedente $\operatorname{sen} x_n \to \operatorname{sen} x_*$. La dimostrazione della parte relativa al coseno è analoga (✎ es. 5.39). ■

Il prossimo esempio mostra che sapere se una funzione è continua è di fondamentale importanza per lo studio di successioni in cui questa funzione compare.

Esempio : calcoliamo il limite della successione $a_n = \operatorname{sen}\left|2\left(\cos\frac{1}{n^2} - 1\right)\operatorname{sen} n - \pi\right|$; poiché $1/n^2 \to 0$, per la proposizione precedente $\cos\frac{1}{n^2} \to \cos 0 = 1$, quindi $\left(\cos\frac{1}{n^2} - 1\right) \to 0$. Dato che $|\operatorname{sen} n| \le 1$, e che il prodotto di una successione infinitesima per una limitata è una successione infinitesima (☞ proposizione 5.27), l'argomento del valore assoluto tende a $-\pi$, quindi per la proposizione 5.29 l'argomento del seno è una successione che tende a π . Per la proposizione appena dimostrata, la successione proposta tende a $\operatorname{sen}\pi = 0$.

Dunque, se f è continua e dobbiamo cercare $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$, possiamo tentare di calcolare al suo posto $\lim_{n\to+\infty} x_n$: se questo esiste ed è uguale ad un valore x_* per il quale f è continua, allora per (5.11) abbiamo trovato anche $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_*)$.

Osservazione : se $\{x_n\}_n$ non ha limite, non è detto che $\{f(x_n)\}_n$ non abbia limite, come mostra questo esempio: se $f(x) = |x|$ e $x_n = (-1)^n$, nonostante quest'ultima non abbia limite la successione $\{f(x_n)\}_n$ ha limite (è costante).

Esempio : la funzione x è continua (ovvio...), quindi anche la funzione x^2 lo è; infatti, se $x_n \to x_*$ anche $x_n^2 = x_n x_n \to x_*^2$, per il teorema sul limite del prodotto. Con un ragionamento analogo si ottiene che ogni polinomio è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$.

L'esempio precedente si presta ad una facile generalizzazione: per provare che x^2 è continua abbiamo usato solo il teorema sul limite del prodotto. Allora, non è difficile dimostrare il prossimo risultato.

Teorema 5.34 : *se* f *e* g *sono continue in* x_* *, anche* $f + g$ *e* fg *lo sono; lo stesso vale per* f/g *se* $g(x_*) \ne 0$.

DIMOSTRAZIONE : sia $x_n \to x_*$; allora $f(x_n) \to f(x_*)$ e $g(x_n) \to g(x_*)$. Da questo segue subito che

$$(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to f(x_*) + g(x_*) = (f+g)(x_*) ,$$

e lo stesso per le altre asserzioni. ■

Corollario 5.35 : *se* f *e* g *sono continue, lo sono anche* $f+g$ *,* fg *e* f/g *.*

Il corollario segue immediatamente dal teorema, tenendo presente che il dominio di f/g è contenuto nell'insieme dove $g \ne 0$. Un caso particolare è quello in cui il numeratore è 1 : allora, il reciproco di una funzione continua g è anch'esso una funzione continua.

Corollario 5.36 : *la funzione* $\tan x$ *è continua.*

Corollario 5.37 : *le funzioni* $x \mapsto x^+$ *e* $x \mapsto x^-$ *sono continue.*

Per questo, basta ricordare che $x^+ = (x + |x|)/2$, e $x^- = (|x| - x)/2$.

Corollario 5.38 : *per ogni* $k \in \mathbb{Z}$ *la funzione* x^k *è continua. Inoltre, per ogni* $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$$x_n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (x_n)^k \to +\infty & \text{se } k > 0 \\ (x_n)^k \to 0^+ & \text{se } k < 0 . \end{cases} \tag{5.13}$$

Il corollario è ovvio per $k = 0$ e per $k = 1$, e per induzione si ottengono i casi $k \in \mathbb{N}$ applicando il teorema sul prodotto di funzioni continue; gli altri casi si ottengono passando ai reciproci. La formula (5.13) ha un analogo per $x_n \to -\infty$, e il risultato dipende dalla parità di k (✎ es. 5.40).

Proposizione 5.39 : *per ogni* $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ *la funzione* $x^{1/k}$ *è continua. Inoltre*

$$x_n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_n^{1/k} \to +\infty & \text{se } k > 0 \\ x_n^{1/k} \to 0^+ & \text{se } k < 0 , \end{cases} \tag{5.14}$$

mentre

$$x_n \to 0^+ \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_n^{1/k} \to 0^+ & \text{se } k > 0 \\ x_n^{1/k} \to +\infty & \text{se } k < 0 . \end{cases} \tag{5.15}$$

DIMOSTRAZIONE : osserviamo che, per il teorema sul limite del quoziente, basta provare la tesi nel caso $k > 0$. Partiamo dall'uguaglianza valida per $k \in \mathbb{N}^+$

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + b^{k-1}) = (a-b)\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i}b^i ,$$

che si può verificare facilmente eseguendo il prodotto al secondo membro. In particolare, se $a, b \geq q > 0$

$$|a^k - b^k| = |a-b| \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i}b^i \geq |a-b| \sum_{i=0}^{k-1} q^{k-1-i}q^i = kq^{k-1}|a-b|$$

e quindi

$$|a-b| \leq \frac{|a^k - b^k|}{kq^{k-1}} . \tag{5.16}$$

Consideriamo ora una successione convergente $x_n \to x_*$ ed un numero $k \in \mathbb{N}^+$: vogliamo provare che $x_n^{1/k} \to x_*^{1/k}$; cominciamo dal caso $x_* > 0$. Posto $q = (x_*/2)^{1/k}$, è $x_* > q^k > 0$, quindi per il corollario 5.20 definitivamente $x_n \geq q^k$; per la stretta crescenza della funzione x^k su $[0, +\infty[$ abbiamo allora

$$x_*^{1/k} \geq q , \qquad \text{definitivamente } x_n^{1/k} \geq q .$$

Applicando la disuguaglianza (5.16) con $a = x_n^{1/k}$ e $b = x_*^{1/k}$ otteniamo

$$0 \leq |x_n^{1/k} - x_*^{1/k}| \leq \frac{|x_n - x_*|}{kq^{k-1}} ,$$

ma $|x_n - x_*| \to 0$, quindi per il teorema dei carabinieri anche $x_n^{1/k} \to x_*^{1/k}$.

Il caso $x_* < 0$ (solo se k è dispari) si ricava facilmente da questo, considerando la successione degli opposti, quindi rimane solo il caso $x_n \to 0$. Fissato $\varepsilon > 0$, anche $\varepsilon^k > 0$; osserviamo che da $x_n \to 0$ segue per la caratterizzazione (5.3) che definitivamente $|x_n| < \varepsilon^k$, quindi per la monotonia di x^k definitivamente $|x_n^{1/k}| = |x_n|^{1/k} < \varepsilon$, che è quanto dovevamo dimostrare. Le altre asserzioni sono per esercizio (✎ es. 5.41). ■

Esempio : per calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{\cos\left(\frac{1}{n} + \operatorname{sen}\frac{1}{n^{32}}\right)}$$

osserviamo che $(1/n) \to 0$, quindi anche $(1/n)^{32} \to 0$, e per la continuità del seno

$$x_n = \left(\frac{1}{n} + \operatorname{sen}\frac{1}{n^{32}}\right) \to (0 + \operatorname{sen} 0) = 0 ,$$

cioè l'argomento del coseno tende a 0 ; allora, per la continuità del coseno,

$$y_n = \cos x_n \to \cos 0 = 1 ,$$

cioè l'argomento della radice tende ad 1. Infine, per la continuità della radice

$$\sqrt[3]{y_n} = y_n^{1/3} \to 1^{1/3} = 1 ,$$

che è il limite cercato (✎ es. 5.45).

5.6 - Successioni monotone

Abbiamo visto che per le successioni la definizione di monotonia assume una forma particolarmente semplice (☞ proposizione 5.5). Notiamo che per dire che una successione è crescente non basta (come troppo spesso capita di vedere) provare che $a_0 < a_1$, e neppure che $a_0 < a_1 < \cdots < a_{100}$: questo dimostra che non è decrescente, neppure debolmente, ma non prova che è monotona; la crescenza si ha se la disuguaglianza $a_n < a_{n+1}$ è provata per tutti i valori di n.

Esempio : la successione $a_n = 2n + \operatorname{sen} n$ è crescente; infatti dalla disuguaglianza $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ segue

$$a_{n+1} = 2n + 2 + \operatorname{sen}(n+1) \geq 2n + 1 \geq 2n + \operatorname{sen} n = a_n ,$$

e una disuguaglianza è certamente stretta, perché se entrambe fossero delle uguaglianze avremmo contemporaneamente $\operatorname{sen} n = 1$ e $\operatorname{sen}(n+1) = -1$, che è impossibile perché n ed $n+1$ differiscono per meno di π.

L'utilità della caratterizzazione che abbiamo dato si vede particolarmente nello studio di cèrte successioni definite per induzione.

Esempio : la successione $a_n = n!$ è crescente per $n \geq 1$; ricordiamo che il fattoriale, per $n \geq 1$, è definito da

$$a_1 = 1 , \qquad a_{n+1} = (n+1)a_n .$$

Cominciamo osservando che da questa formula si ricava, per induzione, che $a_n > 0$ per ogni n ; allora, per ogni $n \geq 1$, è $n + 1 > 1$, quindi

$$a_{n+1} = (n+1)a_n > 1 \cdot a_n = a_n ,$$

e abbiamo provato la monotonia.

Il prossimo risultato giustifica l'aver dedicato una sezione a parte per le successioni monotone (➡ appendice 5.8).

Teorema 5.40 : *ogni successione monotona ha limite. In particolare, una successione debolmente crescente* [*debolmente decrescente*] *ha come limite il suo estremo superiore* [*inferiore*].

Osserviamo che una successione crescente è anche debolmente crescente, quindi questo teorema copre tutti i casi di monotonia.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 5.40 : possiamo limitarci al caso di una successione debolmente crescente, l'altro si ottiene considerando la successione degli opposti e ricordando che $\sup_n(-a_n) = -\inf_n a_n$.

Sia dunque $\ell = \sup_n a_n$ (in particolare, $\ell \geq a_0 > -\infty$), e proviamo che $a_n \to \ell$; osserviamo che per definizione di estremo superiore

$$\forall n, \quad a_n \leq \ell\,,$$

pertanto ci basta provare che per ogni $H < \ell$ definitivamente $a_n > H$. Sempre per definizione di estremo superiore, da $H < \ell$ segue che esiste $\bar{n}$ tale che $a_{\bar{n}} > H$, ma allora per la monotonia della successione

$$\forall n \geq \bar{n}, \quad a_n \geq a_{\bar{n}} > H\,,$$

che è quello che dovevamo dimostrare. ■

Osserviamo che una successione monotona debolmente crescente [decrescente] è sempre limitata inferiormente [superiormente] dal suo primo termine, pertanto per una successione monotona debolmente crescente [decrescente] dire che è limitata superiormente [inferiormente] è equivalente a dire che è limitata.

Corollario 5.41 : *una successione monotona e limitata è convergente; una successione monotona e non limitata è divergente, positivamente se la successione è debolmente crescente, negativamente se è debolmente decrescente.*

Il risultato precedente vale anche per successioni che siano solo definitivamente monotone; invece, nell'enunciato del teorema 5.40 occorre modificare la caratterizzazione del limite: ad esempio, se $\{a_n\}_n$ è debolmente crescente a partire da $n = \bar{n}$, il limite non sarà l'estremo superiore della successione, ma $\sup_{n \geq \bar{n}} a_n$ (✎ es. 5.46).

5.7 - Teoremi di Bolzano-Weierstrass e di Cauchy

In questa sezione dimostriamo due teoremi fondamentali che illustrano importanti proprietà delle successioni di numeri reali.

Abbiamo già visto che ogni successione convergente è limitata, e sappiamo (✎ es. 5.48) che l'implicazione opposta (limitata $\Rightarrow$ convergente) non è vera, come mostra l'esempio $a_n = (-1)^n$; tuttavia, il prossimo risultato ci dà una specie di viceversa.

Teorema di Bolzano-Weierstrass 5.42 : *ogni successione limitata di numeri reali ha almeno una sottosuccessione convergente.*

Per capire la dimostrazione, facciamo prima un'osservazione: se una sottosuccessione $\{a_{k_n}\}_n$ della successione $\{a_n\}_n$ converge ad $\ell \in \mathbb{R}$, allora scelto un qualsiasi intorno V di ℓ si ha definitivamente $a_{k_n} \in V$, pertanto $a_n \in V$ per infiniti indici n (tutti quelli della forma k_i con i abbastanza grande). Allora, il possibile limite di un'estratta andrà cercato tra i punti in ogni intorno dei quali la successione $\{a_n\}_n$ cade infinite volte, ammesso che tali punti esistano.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS : se la successione $\{a_n\}_n$ è limitata, esistono due numeri reali α_0, β_0 tali che

$$\forall m, \quad a_m \in [\alpha_0, \beta_0]\,,$$

cioè, posto $I_0 = [\alpha_0, \beta_0]$, l'insieme

an cade infinite volte nell'intervallo

$$A_0 = \{m : a_m \in I_0\}$$

è infinito, ovvero a_n cade infinite volte in $[\alpha_0, \beta_0]$.

Usando il cosiddetto metodo di bisezione, costruiremo due successioni $\{\alpha_n\}_n$ e $\{\beta_n\}_n$ tali che, posto $I_n = [\alpha_n, \beta_n]$ e $A_n = \{m : a_m \in I_n\}$, il predicato

$$\mathscr{P}(n) = \begin{cases} \alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_n\,, \qquad \beta_n \leq \cdots \leq \beta_0 \\ \beta_n = \alpha_n + \dfrac{\beta_0 - \alpha_0}{2^n} \\ A_n \text{ è infinito} \end{cases}$$

sia vero per ogni n, quindi in particolare a_n cade infinite volte in $[\alpha_i, \beta_i]$.

Abbiamo già determinato α_0 e β_0 che verificano $\mathscr{P}(0)$. Procedendo per induzione, supponiamo di aver determinato per ogni $h \leq n$ dei numeri α_h, β_h in modo che sia vero $\mathscr{P}(n)$. Indichiamo con $\mu_n = (\alpha_n + \beta_n)/2$ il punto medio dell'intervallo I_n e osserviamo che

$$A_n = \{m : a_m \in [\alpha_n, \mu_n]\} \cup \{m : a_m \in [\mu_n, \beta_n]\}\,.$$

Poiché A_n è infinito, almeno uno dei due insiemi al secondo membro deve essere infinito. Se il secondo di essi è infinito, poniamo

$$\alpha_{n+1} = \mu_n\,, \qquad \beta_{n+1} = \beta_n$$

(cioè scegliamo il semi-intervallo destro), altrimenti poniamo

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n\,, \qquad \beta_{n+1} = \mu_n\,.$$

In ogni caso, posto $I_{n+1} = [\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}]$ e $A_{n+1} = \{m : a_m \in I_{n+1}\}$, abbiamo che A_{n+1} è infinito, che $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ e $\beta_{n+1} \leq \beta_n$, e che

$$\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} = \frac{\beta_n - \alpha_n}{2} = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^{n+1}}\,,$$

quindi $\mathscr{P}(n+1)$ è verificato.

Osserviamo che (prima riga di $\mathscr{P}$) la successione $\{\alpha_n\}_n$ è debolmente crescente mentre $\{\beta_n\}_n$ è debolmente decrescente, quindi in particolare per ogni n è $\alpha_n < \beta_n \leq \beta_0$. Allora la successione debolmente crescente $\{\alpha_n\}_n$ è limitata superiormente (da β_0), quindi per il corollario 5.41 converge ad un limite $\ell \in \mathbb{R}$. Dato che per ogni n è $\alpha_0 \leq \alpha_n < \beta_0$, per il teorema di confronto 5.22 anche $\ell \in [\alpha_0, \beta_0]$. Osserviamo poi che per la disuguaglianza di Bernoulli (3.9) con $a = 1$ abbiamo

$$2^n = (1+1)^n \geq (1+n) \to +\infty ,$$

quindi $2^n \to +\infty$ per il teorema di confronto 5.23, e

$$\beta_n = \alpha_n + \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^n} \to \ell$$

per i teoremi sui limiti della somma e del quoziente. Applicando la proposizione 5.8 otteniamo che esiste una sottosuccessione $\{a_{k_n}\}_n$ tale che per ogni n è $a_{k_n} \in A_n$, cioè

$$\alpha_n \leq a_{k_n} \leq \beta_n ,$$

quindi per il teorema dei carabinieri anche $a_{k_n} \to \ell$ e la dimostrazione è conclusa. ■

Il teorema di Bolzano-Weierstrass dice sostanzialmente che una successione che sta in un intervallo limitato non può essere così sparpagliata da non riuscirne a estrarre neppure una sottosuccessione che si avvicina a qualche punto dell'intervallo.

Vediamo qualche interessante generalizzazione.

Proposizione 5.43 : *ogni successione di numeri reali ha almeno una sottosuccessione che ha limite.*

DIMOSTRAZIONE : se la successione è limitata, sappiamo già per il teorema di Bolzano-Weierstrass che ha un'estratta convergente, cioè tale che ha limite finito; allora, dobbiamo trattare solo il caso in cui la successione $\{a_n\}_n$ non è limitata.

Supponiamo che $\{a_n\}_n$ non sia limitata superiormente, e proviamo che essa ha un'estratta che diverge positivamente (poi, il caso di una successione non limitata inferiormente si ricava subito considerando la successione degli opposti). Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $A_n = \{m : a_m \geq n\}$: poiché la successione non è limitata superiormente da n , non lo è neppure definitivamente, quindi A_n non è limitato superiormente e pertanto è infinito.

Allora per la proposizione 5.8 esiste una sottosuccessione $\{a_{k_n}\}_n$ tale che per ogni n è $a_{k_n} \geq n$: per il teorema di confronto 5.23, $a_{k_n} \to +\infty$. ■

Definizione : *si dice che $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ è un punto limite di una successione se questa ha un'estratta che ha limite ℓ .*

Con questa definizione, possiamo riformulare la proposizione precedente dicendo che ogni successione ha almeno un punto limite.

Osservazione : è possibile mostrare che ℓ è punto limite di una successione se e solo se per ogni intorno $U \in \mathscr{I}_\ell$ la successione cade frequentemente in U (✎ es. 5.49).

Esempio : ogni successione che ha limite ha esattamente un punto limite, perché tutte le sue estratte hanno lo stesso limite della successione (☞ proposizione 5.13).

Esempio : la successione $a_n = (-1)^n$ ha due punti limite, che sono 1 e -1 .

L'esempio precedente mostra che di punti limite ve ne può essere più d'uno (✎ es. 5.50); il prossimo risultato chiarisce la situazione.

Teorema 5.44 : *una successione ha limite se e solo se ha un solo punto limite.*

DIMOSTRAZIONE : sappiamo, per la proposizione precedente, che ogni successione ha almeno un punto limite, e abbiamo già visto nel primo esempio che

$$\{a_n\}_n \text{ ha limite} \quad \Rightarrow \quad \text{ha un solo punto limite,}$$

pertanto ci basta mostrare che se $\{a_n\}_n$ non ha limite allora ha almeno due punti limite.

Sia dunque $\{a_n\}_n$ una successione che non ha limite: per la proposizione 5.43, essa ha almeno un punto limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Peraltro non è vero che $a_n \to \ell$, perché la successione non ha limite: negando la definizione di limite otteniamo allora che

$$\exists U \in \mathscr{I}_\ell : \quad \text{frequentemente } a_n \notin U .$$

Per il corollario 5.10, esiste una sottosuccessione $\{a_{k_n}\}_n$ tale che

$$\forall n, \quad a_{k_n} \notin U .$$

Però, applicando a questa sottosuccessione la proposizione 5.43 vediamo che questa ha un'ulteriore estratta $\{a_{k_{h_n}}\}_n$ che ha limite $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$. Dato che una sottosuccessione di una sottosuccessione di $\{a_n\}_n$ è una sottosuccessione di $\{a_n\}_n$, anche ℓ' è un punto limite di $\{a_n\}_n$: se proviamo che $\ell' \neq \ell$ avremo dimostrato la tesi.

Notiamo che non può essere $\ell' = \ell$, perché altrimenti avremmo $a_{k_{h_n}} \to \ell$, quindi definitivamente $a_{k_{h_n}} \in U$ (perché $U \in \mathscr{I}_\ell$), mentre sappiamo che ciò non accade per alcun valore di n perché questa è un'estratta di $\{a_{k_n}\}_n$ (➡ appendice 5.9). ■

È possibile dimostrare (➡ appendice 5.10) che per ogni successione $\{a_n\}_n$ esistono il più piccolo e il più grande punto limite, indicati rispettivamente con

$$\min\lim_{n\to+\infty} a_n , \qquad \max\lim_{n\to+\infty} a_n .$$

Inoltre, per ogni successione reale $\{a_n\}_n$ possiamo definire due successioni monotone a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ ponendo

$$a'_n = \inf\{a_k : k \geq n\} , \qquad a''_n = \sup\{a_k : k \geq n\} .$$

Allora, posto

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a'_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)$$
$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a''_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$$

non è difficile dimostrare (➡ appendice 5.11) che sia $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ sia $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ sono punti limite della successione $\{a_n\}_n$, e che sono rispettivamente il più piccolo e il più grande punto limite, cioè

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \min_{n\to+\infty}\lim a_n\,, \qquad \limsup_{n\to+\infty} a_n = \max_{n\to+\infty}\lim a_n\,.$$

Una conseguenza del teorema 5.44 è pertanto la seguente.

Corollario 5.45 : *una successione $\{a_n\}_n$ ha limite se e solo se*

$$\max_{n\to+\infty}\lim a_n = \min_{n\to+\infty}\lim a_n\,.$$

Esempio : $\max\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n = 1$, e $\min\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n = -1$.

Esempio : la successione $a_n = \operatorname{sen} n$ ha come punti limite tutti i numeri dell'intervallo $[-1,1]$. La dimostrazione, però, è piuttosto delicata, e fa uso di un risultato di densità che torna spesso utile; ne riportiamo qui solo l'enunciato, mentre la dimostrazione, che potete svolgere come esercizio difficile (✎ es. 5.51), è in appendice (➡ appendice 5.12).

Proposizione 5.46 : *siano $x, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; se il rapporto x/y è irrazionale, l'insieme delle combinazioni lineari a coefficienti interi di x ed y*

$$L = \{px + qy : p, q \in \mathbb{Z}\}$$

è denso in $\mathbb{R}$.

I teoremi di confronto assumono una forma particolarmente comoda utilizzando il massimo e il minimo limite, perché valgono per tutte le successioni senza dover dire che hanno limite; vediamone un esempio (paragonatelo alla proposizione 5.30).

Proposizione 5.47 : *se*

$$\max_{n\to+\infty}\lim a_n < \min_{n\to+\infty}\lim b_n$$

allora definitivamente $a_n < b_n$; invece, se frequentemente $a_n \leq b_n$ allora

$$\min_{n\to+\infty}\lim a_n \leq \min_{n\to+\infty}\lim b_n\,, \qquad \max_{n\to+\infty}\lim a_n \leq \max_{n\to+\infty}\lim b_n\,.$$

La dimostrazione è un buon esercizio (✎ es. 5.52).

Grazie al teorema di Bolzano-Weierstrass 5.42, possiamo dimostrare un'importante caratterizzazione della convergenza. Osserviamo che la frase "$\{a_n\}_n$ è convergente" significa

$$\exists \ell\in\mathbb{R} : a_n \to \ell\,,$$

quindi per dire che una successione è convergente occorre aver individuato anche il suo limite, operazione che spesso risulta impossibile. Il corollario 5.41 sulle successioni monotone è un'eccezione: possiamo dire che una successione monotona e limitata è convergente senza conoscerne esplicitamente il limite. Il prossimo risultato ci fornirà un'ulteriore alternativa per provare che una successione è convergente.

Definizione : *si dice che una successione $\{a_n\}_n$ è di Cauchy se*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\bar n : \forall m,n\geq\bar n,\ |a_m - a_n| < \varepsilon\,.$$

Per questa definizione valgono le avvertenze relative alla definizione di limite, vale a dire essa rimane inalterata se al posto di $<\varepsilon$ scriviamo $\leq\varepsilon$ oppure $<K\varepsilon$ con $K>0$. Il significato di questa definizione è che una successione di Cauchy "oscilla sempre meno": precisamente, se definiamo l'oscillazione di una funzione f su un insieme A come

$$\omega(f, A) = \sup_A f - \inf_A f \tag{5.17}$$

(✎ es. 5.53), dire che una successione è di Cauchy equivale (✎ es. 5.55) a dire che

$$\lim_{k\to+\infty}\omega(a_n, \{n\geq k\}) = 0$$ oscilla sempre meno

(➡ appendice 5.13).

Teorema 5.48 : *una successione di numeri reali converge se e solo se è di Cauchy.*

DIMOSTRAZIONE : supponiamo che $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$, e dimostriamo che è di Cauchy: fissato $\varepsilon > 0$, sia $\bar n$ dato dalla caratterizzazione (5.3); presi comunque $m, n \geq \bar n$ abbiamo

$$|a_m - \ell| < \varepsilon\,, \qquad |a_n - \ell| < \varepsilon\,,$$

quindi per la disuguaglianza triangolare (☞ proposizione 4.14)

$$|a_m - a_n| = |(a_m - \ell) - (a_n - \ell)| \leq |a_m - \ell| + |a_n - \ell| < 2\varepsilon\,,$$

cioè la successione è di Cauchy.

Viceversa, supponiamo che $\{a_n\}_n$ sia di Cauchy, e proviamo che converge. Anzitutto, scelto un qualsiasi numero $\varepsilon_0 > 0$, dalla definizione di successione di Cauchy abbiamo

$$\exists n_0 : \forall m,n \geq n_0, \quad a_m - \varepsilon_0 < a_n < a_m + \varepsilon_0\ :$$

in particolare, scelto $m = n_0$, abbiamo

$$\forall n \geq n_0, \quad a_{n_0} - \varepsilon_0 \leq a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon_0 \,, \rightsquigarrow \text{la successione è limitata}$$

cioè la successione è definitivamente limitata, e quindi è limitata (☞ proposizione 5.11).

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass 5.42, esiste una sottosuccessione $\{a_{k_n}\}_n$ convergente ad un numero reale ℓ, quindi

$$\exists \bar{n}' : \forall n \geq \bar{n}', \quad |a_{k_n} - \ell| < \varepsilon \,. \to \text{per definizione di convergenza}$$

Ora usiamo il fatto che la successione $\{a_n\}_n$ è di Cauchy: abbiamo

$$\exists \bar{n}'' : \forall n, m \geq \bar{n}'', \quad |a_n - a_m| < \varepsilon \,;$$

posto $\bar{n} = \max\{\bar{n}', \bar{n}''\}$, usando ancora la disuguaglianza triangolare abbiamo per ogni $n \geq \bar{n}$ (perciò $n \geq \bar{n}'$ e $k_n \geq n \geq \bar{n}''$ grazie alla proposizione 5.6)

$$|a_n - \ell| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - \ell| < 2\varepsilon \,,$$

cioè è tutta la successione $\{a_n\}_n$ che converge ad ℓ. ■

5.8 - Alcuni esempi fondamentali

Iniziamo con tre esempi relativi alle funzioni trigonometriche: proviamo che

$$x_n \to 0, \; x_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n} \to 1 \,. \tag{5.18}$$

Questo segue immediatamente dalla relazione (4.25): essa vale per $0 < |x| < \pi/2$, ma dato che $x_n \to 0$ e $x_n \neq 0$ definitivamente $0 < |x_n| < \pi/2$, pertanto definitivamente

$$\cos x_n < \frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n} < 1 \,;$$

dalla continuità del coseno ricaviamo (5.18) per il teorema dei carabinieri. La formula appena ottenuta ci dà altri due risultati: anzitutto

$$x_n \to 0, \; x_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - \cos x_n}{x_n^2} \to \frac{1}{2} \,. \tag{5.19}$$

Infatti

$$\frac{1 - \cos x_n}{x_n^2} = \frac{(1 - \cos x_n)(1 + \cos x_n)}{x_n^2\,(1 + \cos x_n)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x_n}{x_n^2\,(1 + \cos x_n)} = \left(\frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n}\right)^2 \frac{1}{1 + \cos x_n} \;:$$

da (5.18) e dalla continuità del coseno otteniamo (5.19). Poi, osserviamo che (5.18) si può riscrivere nella forma

$$x_n \to 0, \; x_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} x_n - x_n}{x_n} \to 0 \,,$$

e proviamo che

$$x_n \to 0, \; x_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} x_n - x_n}{x_n^2} \to 0 \,. \tag{5.20}$$

Infatti, per la disuguaglianza (4.24) abbiamo $\operatorname{sen} x < x < \tan x$ per $0 < x < \pi/2$, ed otteniamo che

$$0 > \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2} > \frac{\operatorname{sen} x - \tan x}{x^2} = \tan x \,\frac{\cos x - 1}{x^2}$$

se $0 < x < \pi/2$; ma le stesse disuguaglianze valgono (invertite) anche se $-\pi/2 < x < 0$, come si vede cambiando x in $-x$ e usando le proprietà di parità delle funzioni trigonometriche. Se $x_n \to 0$ e $x_n \neq 0$, definitivamente si ha $0 < |x_n| < \pi/2$, pertanto

$$0 < \left|\frac{\operatorname{sen} x_n - x_n}{x_n^2}\right| < |\tan x_n| \,\frac{1 - \cos x_n}{x_n^2} \;;$$

usando (5.19) e la continuità della tangente e del valore assoluto vediamo che l'ultimo membro va a zero, e per il teorema dei carabinieri, grazie anche alla proposiione 5.18, abbiamo la tesi.

Esempio : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(3/n) - 1/n^2}{\cos(2/n) - 1} = -4$: infatti

$$\operatorname{sen}^2(3/n) = \left(\frac{\operatorname{sen}(3/n)}{3/n}\right)^2 \cdot \frac{9}{n^2} \,,$$

quindi

$$\operatorname{sen}^2(3/n) - 1/n^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \left[9\left(\frac{\operatorname{sen}(3/n)}{3/n}\right)^2 - 1\right] .$$

Possiamo poi scrivere

$$\cos(2/n) - 1 = -\frac{1 - \cos(2/n)}{(2/n)^2} \cdot \frac{4}{n^2} \,,$$

così

$$\frac{\operatorname{sen}^2(3/n) - 1/n^2}{\cos(2/n) - 1} = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \left[9\left(\frac{\operatorname{sen}(3/n)}{3/n}\right)^2 - 1\right]}{-\frac{1 - \cos(2/n)}{(2/n)^2} \cdot \frac{4}{n^2}} = -\frac{9\left(\frac{\operatorname{sen}(3/n)}{3/n}\right)^2 - 1}{4\,\frac{1 - \cos(2/n)}{(2/n)^2}} \,.$$

Da (5.18) abbiamo che il numeratore tende ad 8, e da (5.19) che il denominatore tende a $4/2 = 2$, da cui otteniamo il risultato cercato (✎ es. 5.56).

Abbiamo già visto, studiando la continuità di $x \mapsto x^k$ e $x \mapsto x^{1/k}$, che se $k \in \mathbb{Z}$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} n^k = \begin{cases} +\infty & \text{se } k > 0 \\ 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k < 0\,, \end{cases}$$

e che

$$\lim_{n\to+\infty} n^{1/k} = \begin{cases} +\infty & \text{se } k > 0 \\ 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k < 0\,. \end{cases}$$

In questa sezione studiamo altre successioni importanti; la prima è la successione q^n delle potenze n-esime di un numero reale q (abbiamo già visto, nel corso della dimostrazione del teorema di Bolzano-Weierstrass, che $2^n \to +\infty$). Osserviamo che se $q > 1$ abbiamo per la disuguaglianza di Bernoulli (3.9)

$$q^n = \big(1 + (q-1)\big)^n \geq 1 + n(q-1)\,;$$

poiché $q - 1 > 0$, l'ultima successione tende a $+\infty$, quindi anche $q^n \to +\infty$ per il teorema di confronto 5.23. Vediamo allora subito che nel caso $q < -1$ la successione q^n non ha limite: infatti $|q| > 1$, quindi per quanto osservato ora $|q|^n \to +\infty$; in particolare, prendendo le sottosuccessioni dei pari e dei dispari, $|q|^{2n} \to +\infty$ e $|q|^{2n+1} \to +\infty$, ma allora se $q < -1$

$$q^{2n} = \big(-|q|\big)^{2n} = (-1)^{2n}|q|^{2n} = |q|^{2n} \to +\infty\,, \qquad q^{2n+1} = -|q|^{2n+1} \to -\infty\,.$$

Avendo due sottosuccessioni con limiti diversi, la successione q^n non può avere limite per la proposizione 5.13. I casi $q = 1$, $q = 0$ e $q = -1$ sono facili o già visti: nei primi due la successione q^n è costante, quindi converge, mentre nel terzo la successione è $(-1)^n$, che non ha limite. Resta da trattare solo il caso $q \in]-1,0[\cup]0,1[$; osserviamo che questo equivale a $0 < |q| < 1$, e proviamo che $q^n \to 0$: infatti, $1/|q| > 1$, quindi $(1/|q|)^n \to +\infty$, e

$$0 \leq |q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1/|q|)^n} \to 0\,,$$

quindi $q^n \to 0$ (per il teorema dei carabinieri e la proposizione 5.18). Riassumendo (✎ es. 5.59),

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ 0 & \text{se } |q| < 1, \end{cases}$$

mentre $\lim_{n\to+\infty} q^n$ non esiste se $q \leq -1$. Questo esempio ci suggerisce un'osservazione: nel caso $q > 1$ la successione $a_n = q^n$ diverge, e si ha $(a_{n+1}/a_n) = q > 1$, mentre nel caso $0 < q < 1$ la successione $a_n = q^n$ è infinitesima, e $(a_{n+1}/a_n) = q < 1$. Generalizziamo questa situazione.

Proposizione 5.49 : *se $a_n > 0$ per ogni n, e se esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ allora*

$$\begin{aligned} 0 \leq \ell < 1 \quad &\Rightarrow \quad a_n \to 0 \\ \ell > 1 \quad &\Rightarrow \quad a_n \to +\infty\,. \end{aligned}$$

Faremo discendere questo risultato (che si generalizza (✎ es. 5.61) a successioni di segno qualunque, purché mai nulle) da uno più forte.

Proposizione 5.50 : *sia $a_n > 0$ per ogni n; se esiste $q < 1$ tale che definitivamente $(a_{n+1}/a_n) \leq q$, allora $a_n \to 0$; invece, se esiste $q > 1$ tale che definitivamente $(a_{n+1}/a_n) \geq q$ allora $a_n \to +\infty$.*

Dimostrazione : nel primo caso, abbiamo $0 < q < 1$ e

$$\exists \bar n : \forall n \geq \bar n, \quad a_{n+1} \leq q\, a_n\,.$$

In particolare, $a_{\bar n+2} \leq q\, a_{\bar n+1} \leq q^2 a_{\bar n}$, e così via: non è difficile provare per induzione che

$$\forall n \geq \bar n, \quad 0 < a_n \leq q^{n-\bar n} a_{\bar n} = \frac{a_{\bar n}}{q^{\bar n}}\, q^n\,.$$

Poiché quest'ultima successione è infinitesima ($q^n \to 0$), per il teorema dei carabinieri anche $a_n \to 0$. L'altro caso è analogo (✎ es. 5.63). ■

Dimostrazione della proposizione 5.49 : se $\ell < 1$, posto $q = (\ell + 1)/2$ abbiamo $\ell < q < 1$, e per il corollario 5.20 si ha definitivamente $a_{n+1}/a_n < q$, dopo di che si applica la proposizione appena dimostrata. Il caso $\ell > 1$ è del tutto analogo. ■

Notiamo qui che l'enunciato della proposizione 5.50 si semplifica notevolmente con l'uso del massimo e del minimo limite: potete provare per esercizio (✎ es. 5.64) che se $a_n > 0$ allora

$$\max\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \Rightarrow \quad a_n \to 0\,, \qquad \min\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \Rightarrow \quad a_n \to +\infty\,. \tag{5.21}$$

Osserviamo che nelle proposizioni precedenti non si dice nulla per $\ell = 1$ o per $q = 1$; i prossimi esempi mostrano che in questo caso non possiamo concludere alcunché.

Esempio : se $a_n = n$, allora $(a_{n+1}/a_n) \to 1$, ed $a_n \to +\infty$; invece, se $a_n = 1/n$, ancora $(a_{n+1}/a_n) \to 1$, ma $a_n \to 0$. È abbastanza facile (✎ es. 5.65) costruire esempi in cui il limite del rapporto è uno, ma la successione $\{a_n\}_n$ non ha limite, o ha come limite un qualsiasi numero positivo (✎ es. 5.66).

Abbiamo già incontrato, anche in un esempio nella sezione 5.6 sulle successioni monotone, la successione $a_n = n!$. Osserviamo che $a_{n+1}/a_n = (n+1) \to +\infty$, quindi utilizzando la proposizione 5.49 vediamo che

$$n! \to +\infty\,.$$

Un'altra successione divergente è n^n: dato che $n^n \geq n$ per ogni $n \geq 1$, abbiamo per il teorema di confronto 5.23

$$n^n \to +\infty\,.$$

In questa sezione abbiamo trovato quattro successioni divergenti: n^k per $k \geq 1$, q^n per $q > 1$, $n!$ ed n^n. È interessante confrontare le velocità con cui queste successioni tendono a $+\infty$. Per cominciare, proviamo che per ogni k

$$q > 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{q^n}{n^k} = +\infty \; : \tag{5.22}$$

infatti, osserviamo che posto $a_n = q^n/n^k$ abbiamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{q}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k} \, .$$

Poiché k è fissato, osservando che $(1+1/n) \to 1$ e applicando il teorema sul limite del prodotto ricaviamo $(a_{n+1}/a_n) \to q$; allora (5.22) segue dalla proposizione 5.49.

Esempio : la successione $1.01^n/n^{100}$ tende a $+\infty$, anche se valutando i primi termini questa successione sembrerebbe infinitesima; il valore più basso viene raggiunto per $n = 10050$ e vale circa $1.6 \cdot 10^{-357}$, che è un numero davvero molto piccolo (ci vogliono 357 zeri prima di incontrare un'altra cifra). Inoltre, per $n = 50000$ il valore è ancora intorno a 10^{-254}, per $n = 110000$ è circa 10^{-29} ma per $n = 125000$ è già $3 \cdot 10^{30}$ ...: questo esempio mostra uno dei rischi di affidarsi ciecamente ad un calcolatore per predire dei risultati numerici (una curiosità: se al posto di 1.01 e 100 mettiamo 1.1 e 10, il minimo è raggiunto per $n = 105$; se mettiamo 1.001 e 1000, il minimo è raggiunto per $n = 1000500$ ...).

Da (5.22) segue che per ogni k

$$|q| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{q^n}{n^k} = 0 \, ,$$

perché (a parte il caso facile $q = 0$)

$$\left|\frac{q^n}{n^k}\right| = \left(\frac{(1/|q|)^n}{n^{-k}}\right)^{-1} ,$$

che tende a zero per (5.22) perché $1/|q| > 1$.

Confrontiamo l'esponenziale q^n e il fattoriale: utilizzando ancora la proposizione 5.49 è facile (✎ es. 5.67) provare che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{q^n}{n!} = 0 \, . \tag{5.23}$$

L'ultimo confronto che facciamo è quello fra $n!$ ed n^n. Qui, la proposizione 5.49 non dà un risultato ovvio, perché il rapporto tra due termini successivi della successione $n!/n^n$ è uguale a

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \, , \tag{5.24}$$

e non sappiamo come si comporti questa successione. È importante osservare che $(1 + 1/n) \to 1$, ma **non possiamo applicare** il teorema sul limite del prodotto: se si trattasse di $(1+1/n)^2$, o in generale, come sopra, di $n \mapsto (1+1/n)^k$ allora potremmo concludere che $(1+1/n)^k \to 1$, ma qui **non** abbiamo il prodotto di un numero finito di successioni! Il denominatore di (5.24) è infatti il prodotto di due fattori per $n = 2$, di tre fattori per $n = 3$, e così via. Vediamo come si può provare che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \; : \tag{5.25}$$

osserviamo che per $n \geq 2$ il numero $n!$ è il prodotto di n fattori, il primo dei quali è uguale ad 1, mentre tutti gli altri sono minori o uguali ad n; invece possiamo vedere n^n come prodotto di n per un prodotto di $n-1$ fattori tutti uguali ad n. Allora

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2 \cdots n}{n^{n-1}} \leq \frac{1}{n} \, ,$$

e per il teorema dei carabinieri abbiamo provato (5.25). Riassumendo, se $k > 0$ e $q > 1$ (gli altri casi sono più facili)

$$\frac{q^n}{n^k} \to +\infty \, , \qquad \frac{n!}{q^n} \to +\infty \, , \qquad \frac{n^n}{n!} \to +\infty \, .$$

Abbiamo provato che per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ la funzione $x^{1/k}$ è continua; è poi facile vedere che se $x_n \to +\infty$ allora anche $x_n^{1/k} \to +\infty$: infatti definitivamente $x_n > 0$, quindi $(1/x_n) \to 0^+$, dunque $(1/x_n^{1/k}) \to 0^+$ e prendendo il reciproco $x_n^{1/k} \to +\infty$. Vediamo cosa accade quando a variare è l'esponente: proviamo che

$$\forall q > 0 \, , \quad q^{1/n} \to 1 \, . \tag{5.26}$$

Iniziamo dal caso $q > 1$: per la stretta crescenza della funzione $x \mapsto x^n$ su $\mathbb{R}^+$ abbiamo anche $q^{1/n} > 1$; posto $a_n = q^{1/n} - 1 > 0$ abbiamo per la disuguaglianza di Bernoulli (3.9)

$$q = (1 + a_n)^n \geq 1 + n a_n \, ,$$

quindi

$$0 \leq a_n \leq \frac{q-1}{n} \, ,$$

pertanto per il teorema dei carabinieri $a_n \to 0$, cioè $q^{1/n} \to 1$. La tesi è poi ovvia se $q = 1$, mentre se $0 < q < 1$ basta osservare che $1/q > 1$, quindi $(1/q)^{1/n} \to 1$, e applicare il teorema sul limite del quoziente.

Da questa osservazione ricaviamo una proposizione sulle radici n-esime.

Proposizione 5.51 : *se* $a_n > 0$ *per ogni* n, *e se* $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ *allora anche*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \, .$$

DIMOSTRAZIONE : cominciamo con il caso $0 < \ell < +\infty$; fissato un intorno $]\bar{H}, \bar{K}[$ di ℓ , scegliamo $H, K > 0$ in modo che $\bar{H} < H < \ell < K < \bar{K}$. Per ipotesi,

$$\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, \quad H < \frac{a_{n+1}}{a_n} < K ,$$

perché $]H, K[\in \mathscr{I}_\ell$, quindi $Ha_n < a_{n+1} < Ka_n$. Come nella proposizione 5.50, da questo si deduce per induzione

$$\forall n \geq \bar{n}, \quad H^n \frac{a_{\bar{n}}}{H^{\bar{n}}} < a_n < K^n \frac{a_{\bar{n}}}{K^{\bar{n}}}$$

(se fosse $H \leq 0$ o $K = +\infty$ ciò non sarebbe vero: questo è il motivo della sostituzione di $\bar{H}$ e $\bar{K}$ con H e K), quindi per la monotonia della potenza n-esima sui numeri positivi

$$\forall n \geq \bar{n}, \quad H \sqrt[n]{\frac{a_{\bar{n}}}{H^{\bar{n}}}} < \sqrt[n]{a_n} < K \sqrt[n]{\frac{a_{\bar{n}}}{K^{\bar{n}}}} .$$

Ma per (5.26)

$$\lim_{n \to +\infty} H \sqrt[n]{\frac{a_{\bar{n}}}{H^{\bar{n}}}} = H > \bar{H}$$

e analogamente

$$\lim_{n \to +\infty} K \sqrt[n]{\frac{a_{\bar{n}}}{K^{\bar{n}}}} = K < \bar{K} ,$$

quindi per il corollario 5.20 definitivamente

$$\bar{H} < H \sqrt[n]{\frac{a_{\bar{n}}}{H^{\bar{n}}}} < \sqrt[n]{a_n} < K \sqrt[n]{\frac{a_{\bar{n}}}{K^{\bar{n}}}} < \bar{K} ,$$

cioè $\sqrt[n]{a_n} \in]\bar{H}, \bar{K}[$, e abbiamo provato che $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$. Nei casi $\ell = 0$ o $\ell = +\infty$, basta una sola delle due disuguaglianze che abbiamo trovato. ■

A questo punto, dopo aver visto che per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ è $n^{1/k} \to +\infty$, mentre $k^{1/n} \to 1$, studiamo la successione $n^{1/n}$, e proviamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1 .$$

Per fare questo, basta applicare la proposizione precedente: da $(n+1)/n \to 1$ segue subito $n^{1/n} \to 1$. Osserviamo che per i teoremi sul limite del prodotto e del quoziente

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \sqrt[n]{n^k} \to 1 .$$

In particolare, anche $(1/n)^{1/n} \to 1$ (✎ es. 5.69). Notiamo che $n^{1/n}$ è un caso di potenza $(a_n)^{b_n}$ in cui la base diverge, e l'esponente è infinitesimo; un altro esempio del genere è dato da $a_n = n^n$, $b_n = 1/n$. In questo caso, però, $(a_n)^{b_n} = n \to +\infty$. Questo ci dice che se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to 0$ non possiamo prevedere il comportamento di $(a_n)^{b_n}$ (nei nostri esempi, in un caso tende ad 1 e nell'altro a $+\infty$), pertanto possiamo dire che ∞^0 è una *forma indeterminata* (✎ es. 5.74). Prendendo negli esempi precedenti $a_n = 1/n$ oppure $a_n = 1/n^n$, vediamo che anche 0^0 è un'altra *forma indeterminata*. Osserviamo invece che $0^{+\infty}$ non è affatto una forma indeterminata, perché se $b_n \to +\infty$ definitivamente $b_n \geq 1$, e se $a_n \to 0$ definitivamente $|a_n| < 1$, pertanto definitivamente $|(a_n)^{b_n}| \leq |a_n| \to 0$.

Terminiamo questa sezione con un risultato sulle medie aritmetiche di una successione, dovuto a Cesàro, rimandando all'appendice per altri risultati del genere (➡ appendice 5.14). Ricordiamo che la media aritmetica di n numeri $a_1, \ldots, a_n$ è il numero $(a_1 + \cdots + a_n)/n$.

Proposizione 5.52 : *se $a_n \to \ell$ allora posto*

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

anche $\sigma_n \to \ell$.

DIMOSTRAZIONE : trattiamo solo il caso $\ell \in \mathbb{R}$ (i casi $\ell = \pm\infty$ sono simili, e più facili); fissato $\varepsilon > 0$,

$$\exists \bar{n} : \forall i > \bar{n}, \quad |a_i - \ell| < \varepsilon ;$$

d'altra parte

$$|\sigma_n - \ell| = \left| \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \right) - \frac{1}{n} n\ell \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (a_i - \ell) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |a_i - \ell|$$

per la disugaglianza triangolare, quindi per $n > \bar{n}$

$$|\sigma_n - \ell| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\bar{n}} |a_i - \ell| + \frac{1}{n} \sum_{i=\bar{n}+1}^{n} |a_i - \ell| \leq \frac{\sum_{i=1}^{\bar{n}} |a_i - \ell|}{n} + \frac{(n - \bar{n})\varepsilon}{n} .$$

Quando $n \to +\infty$, l'ultimo membro tende a ε , quindi sarà definitivamente minore di 2ε , ma allora definitivamente

$$|\sigma_n - \ell| < 2\varepsilon ,$$

che dà la tesi. ■

Esempio : studiamo la successione

$$\sigma_n = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{n} ;$$

posto $a_n = 1/\sqrt{n}$, vediamo che $\{\sigma_n\}_n$ è la successione delle medie aritmetiche della successione $\{a_n\}_n$. Dato che $a_n \to 0$, per il teorema precedente anche $\sigma_n \to 0$.

Esempio : se $a_n = (-1)^n$ per $n \geq 1$, la successione $\{a_n\}_n$ non ha limite, ma quella delle sue medie aritmetiche sì, perché

$$\sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\dfrac{1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

quindi $|\sigma_n| < 1/n$, e $\sigma_n \to 0$. Questo mostra che la proposizione precedente non si può invertire (✎ es. 5.75).

5.9 - Il numero di Nepero "e"

Ci siamo imbattuti poco fa nella successione (5.24), che non sapevamo trattare. Dedichiamoci allo studio della successione

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n :$$

per tutta questa sezione il simbolo $\{e_n\}_n$ indicherà esattamente questa successione, e non una generica.

Proposizione 5.53 : *la successione* $\{e_n\}_n$ *è strettamente crescente, e limitata superiormente; si ha in particolare* $2 \leq e_n < 3 - 1/12$ *per ogni* n.

DIMOSTRAZIONE : anzitutto, per la disuguaglianza di Bernoulli (3.9) si ha $e_n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$; poi, dalla formula di Newton (3.8) ricaviamo

$$\begin{aligned} e_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \, \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \, \frac{n!}{n^k\,(n-k)!} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \right). \end{aligned}$$

Se poniamo per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $2 \leq k \leq n$

$$P_{k,n} = \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)$$

possiamo allora scrivere che

$$e_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} P_{k,n} .$$

Osserviamo che

$$0 < P_{k,n} < 1 \tag{5.27}$$

(tutti i fattori di $P_{k,n}$ sono positivi e minori di uno) e che

$$P_{k,n} < P_{k,n+1} \tag{5.28}$$

(tutti i fattori, che sono positivi, crescono all'aumentare di n), cioè la successione $\{P_{k,n}\}_n$ è crescente, e anzi per il teorema sul limite del prodotto

$$\forall k \geq 2, \quad \lim_{n \to +\infty} P_{k,n} = 1 \tag{5.29}$$

($P_{k,n}$ ha $k-1$ fattori, che tendono tutti ad 1). Osserviamo allora che posto

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

abbiamo da (5.27)

$$e_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} P_{k,n} \leq \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = b_n ;$$

poi da (5.28) otteniamo

$$e_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} P_{k,n} < 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} P_{k,n+1} < 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} P_{k,n+1} = e_{n+1} ,$$

cioè $\{e_n\}_n$ è crescente. Essendo $e_n \leq b_n$, se proviamo che $b_n < 3 - 1/12$ la dimostrazione è conclusa. Ricordando il risultato (3.6):

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k! \geq 2^{k-1} ,$$

ed usando la formula (3.7) sulla somma dei termini di una progressione geometrica, abbiamo per $n \geq 4$

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k!} \leq \frac{8}{3} + \sum_{k=4}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{8}{3} + \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{n-4} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{8}{3} + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2^{n-3}}\right) < 3 - \frac{1}{12} , \end{aligned} \tag{5.30}$$

come dovevamo dimostrare. ■

Corollario 5.54 : *la successione* $\{e_n\}_n$ *converge; posto*

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

si ha $2 \leq \mathrm{e} < 3$.

Infatti $\{e_n\}_n$ è crescente e limitata tra 2 e $3 - 1/12$, quindi ha limite finito, e il suo limite verifica

$$2 \le \lim_{n\to+\infty} e_n \le 3 - \frac{1}{12} < 3$$

(il "dodicesimo" serve solo a dire che $\mathrm{e} \neq 3$).

Esempio : proviamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty .$$

Osserviamo che, con le notazioni precedenti, questa successione è uguale ad $(e_n)^n$, ma sappiamo che $e_n \ge e_1 = 2$, quindi per la monotonia della potenza n-esima $(e_n)^n \ge 2^n \to +\infty$, e il risultato segue dalla proposizione 5.23.

Esempio : proviamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n} = 1 .$$

Osserviamo che, con le notazioni precedenti, questa successione è uguale ad $(e_{n^2})^{1/n}$, ma sappiamo che $2 \le e_i < 3$ per ogni i, quindi $2^{1/n} \le (e_{n^2})^{1/n} < 3^{1/n}$; poiché le due successioni agli estremi tendono ad 1 per (5.26), il risultato segue dal teorema dei carabinieri.

Facciamo un'importante osservazione: dagli esempi precedenti deduciamo che le tre successioni

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}, \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \qquad \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$$

tendono a tre limiti differenti. Poiché queste sono tutte del tipo $(a_n)^{b_n}$ con $a_n \to 1$ e $b_n \to +\infty$, possiamo dire che 1^∞ è anch'essa una *forma indeterminata*; questo porta il totale delle forme indeterminate finora incontrate a sette:

$$\infty - \infty \qquad 0\cdot\infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0^0 \qquad \infty^0 \qquad 1^\infty$$

(non ve ne sono altre).

Proposizione 5.55 : *posto*

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

si ha anche

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \mathrm{e} .$$

DIMOSTRAZIONE : osserviamo che la formula (5.30) mostra che $\{b_n\}_n$ è limitata superiormente; poiché

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} > b_n ,$$

anche $\{b_n\}_n$ è crescente e limitata, pertanto converge. Sappiamo che $e_n \le b_n$ e che $\{b_n\}_n$ converge, quindi per la proposizione 5.30

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty} e_n \le \lim_{n\to+\infty} b_n .$$

Proveremo pure che $\lim_{n\to+\infty} b_n \le \mathrm{e}$, concludendo così la dimostrazione: fissiamo $m \ge 2$; per ogni $n \ge m$

$$e_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} P_{k,n} \ge 2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} P_{k,n} .$$

Poiché quest'ultima è una somma di $m-1$ termini ed m è fissato, per $n \to \infty$ possiamo applicare il teorema sul limite della somma e ricaviamo da (5.29)

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty} e_n \ge \lim_{n\to+\infty}\left(2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} P_{k,n}\right) = 2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} = b_m .$$

Ma se $b_m \le \mathrm{e}$ per ogni m allora anche

$$\lim_{m\to+\infty} b_m \le \mathrm{e} ,$$

come dovevamo dimostrare. ■

Quest'ultima proposizione ci dà l'occasione di fare un'osservazione numerica: abbiamo trovato due diverse successioni che tendono ad e, pertanto potremmo pensare che per n "piuttosto grande" i loro valori diano delle "buone" approssimazioni del limite e. Tuttavia, le velocità con cui $\{e_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ convergono sono molto diverse: ad esempio, il primo valore di n per il quale $(\mathrm{e} - e_n) < 1/1000$ è $n = 1360$, vale a dire che fino ad e_{1359} otteniamo numeri che non danno ancora tre cifre decimali esatte di e. L'altra successione è molto più rapida: ad esempio, per avere tre decimali di e esatti basta b_6, mentre già b_{21} ci dà 21 cifre decimali esatte di e!

Il ragionamento precedente ci dice che se anche una successione converge, non possiamo assicurare immediatamente che la differenza tra la successione e il limite sia "piccola" per $n = 100$, o per $n = 1000$, o altro, senza avere più informazioni sulla successione. In generale, per avere una stima della distanza di una successione monotona dal suo limite, è utile trovare una seconda successione con lo stesso limite, monotona nel senso opposto: ad esempio, si può provare (➡ appendice 5.15) che la successione

$$c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

è decrescente; poiché anch'essa tende ad e (è il prodotto di e_n per $1+1/n$), abbiamo per ogni n

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \mathrm{e} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \tag{5.31}$$

pertanto prendendo ad esempio $n = 100$ possiamo dire che

$$2.7048\ldots = 1.01^{100} \leq \mathrm{e} \leq 1.01^{101} = 2.7318\ldots .$$

Il numero e — che è irrazionale (➡ appendice 7.11), e addirittura trascendente (➡ appendice 8.12) — vale dunque vale poco più di 2.7 . Partendo dalla disuguaglianza (5.31) si può anche provare per induzione (✎ es. 5.76) una versione facile della formula di Stirling (➡ appendice 9.10):

$$\forall n, \quad \frac{n^n}{\mathrm{e}^n} \leq n! \leq \frac{n^n}{\mathrm{e}^n}\, n\mathrm{e}\,. \tag{5.32}$$

Questa dà una stima piuttosto rozza, ma utile, del fattoriale; è poi possibile dimostrare (➡ appendice 5.16) le prossime fondamentali osservazioni.

Proposizione 5.56 : *posto per ogni* $x \in \mathbb{R}$

$$e_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \qquad b_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

le due successioni $\{e_n(x)\}_n$ *e* $\{b_n(x)\}_n$ *sono convergenti allo stesso limite,* $\ell(x)$.

Abbiamo dimostrato prima che $\ell(1) = \mathrm{e}$; inoltre notiamo che $\ell(0) = 1$.

Proposizione 5.57 : *la funzione* $\ell(x)$ *è positiva e strettamente crescente; inoltre se* $x_1 < x_2$

$$\ell(x_1)(x_2 - x_1) \leq \ell(x_2) - \ell(x_1) \leq \ell(x_2)(x_2 - x_1)\,; \tag{5.33}$$

in particolare, la funzione $\ell(x)$ *è continua.*

Proposizione 5.58 : *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$

$$\ell(x+y) = \ell(x)\cdot\ell(y)\,. \tag{5.34}$$

In particolare, se $x = m/n \in \mathbb{Q}$ *se ne deduce*

$$\ell(m/n) = \left(\ell(1)\right)^{m/n}. \tag{5.35}$$

Visto che $\ell(1) = \mathrm{e}$, da (5.35) si deduce che per $x \in \mathbb{Q}$ abbiamo $\ell(x) = \mathrm{e}^x$. Ma allora $\ell(x)$ è una funzione che verifica la proprietà (5.34) delle potenze e che sui razionali coincide con e^x . È quindi naturale definire per ogni $x \in \mathbb{R}$ la funzione esponenziale ponendo

$$\mathrm{e}^x = \ell(x)\,;$$

il simbolo e^x aveva già un senso se $x \in \mathbb{Q}$, e tale senso non è cambiato. Per le varie osservazioni fatte, l'esponenziale è una funzione positiva, crescente, continua che verifica

$$x_1 < x_2 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{e}^{x_1}(x_2 - x_1) \leq \mathrm{e}^{x_2} - \mathrm{e}^{x_1} \leq \mathrm{e}^{x_2}(x_2 - x_1)\,.$$

Da questa formula, prendendo $x_1 = 0$ o $x_2 = 0$, ricaviamo

$$\forall x, \quad x \leq \mathrm{e}^x - 1 \leq x\mathrm{e}^x\,,$$

da cui in particolare

$$\forall x, \quad \mathrm{e}^x \geq 1 + x\,, \tag{5.36}$$

e anche

$$\forall x \neq 0, \quad \min\{1, \mathrm{e}^x\} \leq \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \leq \max\{1, \mathrm{e}^x\}\,.$$

Da qui otteniamo subito, per la continuità dell'esponenziale, un fondamentale limite:

$$x_n \to 0,\ x_n \neq 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{e}^{x_n} - 1}{x_n} \to 1\,. \tag{5.37}$$

Da (5.36) ricaviamo pure

$$x_n \to +\infty \quad\Rightarrow\quad \mathrm{e}^{x_n} \to +\infty$$

per il teorema di confronto, ma allora

$$x_n \to -\infty \quad\Rightarrow\quad \mathrm{e}^{x_n} = \frac{1}{\mathrm{e}^{-x_n}} \to 0^+\,.$$

Esempio : $\lim_{n\to+\infty} \left[n^2\left(\mathrm{e}^{\operatorname{sen}^2(1/n)} - \cos(1/n)\right)\right] = \frac{3}{2}$; infatti

$$\mathrm{e}^{\operatorname{sen}^2(1/n)} - \cos(1/n) = \left[\mathrm{e}^{\operatorname{sen}^2(1/n)} - 1\right] + \left[1 - \cos(1/n)\right]$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{sen}^2(1/n)} - 1}{\operatorname{sen}^2(1/n)} \cdot \left(\frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1 - \cos(1/n)}{(1/n)^2} \cdot \frac{1}{n^2}\,.$$

Usando (5.18), (5.19) e (5.37) otteniamo la tesi (✎ es. 5.78).

Abbiamo visto che la funzione esponenziale è definita su $\mathbb{R}$, e la sua immagine è contenuta in $\mathbb{R}^+$; inoltre, abbiamo visto che è strettamente crescente, quindi iniettiva. Potremo provare solo in seguito (☞ corollario 6.31) che la funzione esponenziale ha come immagine tutto $\mathbb{R}^+$, dunque è biunivoca da $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R}^+$ e quindi ha inversa, ma è comodo usare già da ora alcune proprietà della sua inversa, la funzione logaritmo (che è biunivoca da $\mathbb{R}^+$ ad $\mathbb{R}$):

$$\forall x, \quad x = \log(e^x) , \qquad \forall x > 0, \quad x = e^{\log x} .$$

Da questo segue immediatamente che se $x, y > 0$ abbiamo $xy = \exp(\log(xy))$, ma anche $xy = x \cdot y = \exp(\log x) \cdot \exp(\log y)$; dalle proprietà delle potenze (5.34) otteniamo allora $\exp(\log(xy)) = \exp(\log x + \log y)$, e dall'iniettività della funzione esponenziale

$$\forall x, y > 0, \quad \log(xy) = \log x + \log y . \tag{5.38}$$

In particolare, essendo $\log 1 = 0$ perché $e^0 = 1$, per ogni $x > 0$ abbiamo $0 = \log(x \cdot \frac{1}{x}) = \log x + \log(1/x)$, da cui

$$\forall x > 0, \quad \log(1/x) = -\log x .$$

Inoltre dal grafico riportato nella sezione 1.6 si possono dedurre alcune affermazioni che è facile provare (✎ es. 5.83) usando le proprietà appena dimostrate sulla funzione esponenziale: il logaritmo è strettamente crescente, è positivo se l'argomento è maggiore di 1 e negativo se l'argomento è tra 0 e 1 ; inoltre

$$\forall x, \quad \log x \le x - 1 \tag{5.39}$$

$$\forall n \ge 1, \quad \frac{1}{n+1} < \log\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) < \frac{1}{n} \tag{5.40}$$

$\log x$ è continua

$$x_n > 0, \ x_n \to +\infty \quad [\![0^+]\!] \quad \Rightarrow \quad \log x_n \to +\infty \quad [\![-\infty]\!]$$

e anche un altro limite fondamentale:

$$x_n \to 0, \ x_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\log(1 + x_n)}{x_n} \to 1 . \tag{5.41}$$

Esempio : calcoliamo $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big(n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\Big)^n$; possiamo scrivere

$$\Big(n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\Big)^n = e^{n \log(n \operatorname{sen}(1/n))} . \tag{5.42}$$

Per il momento limitiamoci a studiare l'esponente:

$$n \log\big(n \operatorname{sen}(1/n)\big) = n \log\Big[1 + \Big(\frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n} - 1\Big)\Big]$$
$$= n \frac{\log\big[1 + \big(\frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n} - 1\big)\big]}{\frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n} - 1} \Big(\frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n} - 1\Big) .$$

Dato che $x_n = \Big(\frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n} - 1\Big) \to 0$, possiamo usare la proprietà (5.41) ed ottenere

$$\lim_{n\to+\infty} \big[n \log\big(n \operatorname{sen}(1/n)\big)\big] = \lim_{n\to+\infty} \Big[n\Big(\frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n} - 1\Big)\Big] = \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n) - (1/n)}{(1/n)^2} = 0$$

grazie a (5.20). Allora dalla continuità dell'esponenziale ricaviamo da (5.42) che il limite cercato è e^0 , cioè 1 (✎ es. 5.85).

Esempio : si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n!)}{n} = +\infty .$$

Infatti, $\log(n!) = \sum_{i=1}^n \log i$, dunque per il teorema di Cesaro sulle medie aritmetiche (☞ proposizione 5.52)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n!)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log i = \lim_{n\to+\infty} \log n = +\infty .$$

Per induzione ricaviamo subito da (5.38)

$$\forall a > 0, \ \forall m \in \mathbb{Z} \quad \log(a^m) = m \log a$$

e quindi $\log a = \log\big((a^{1/n})^n\big) = n \log(a^{1/n})$, da cui $\log(a^{1/n}) = (\log a)/n$ e anche $\log(a^{m/n}) = m \log(a^{1/n}) = (m/n) \log a$. Abbiamo dunque provato che

$$\forall a > 0, \ \forall x \in \mathbb{Q}, \quad \log(a^x) = x \log a ,$$

cioè $a^x = \exp(x \log a)$. Notiamo che per ogni $a > 0$ il simbolo a^x ha già un significato se $x \in \mathbb{Q}$, mentre non ha significato se x è irrazionale; d'altra parte la funzione $x \mapsto \exp(x \log a)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, e per $x \in \mathbb{Q}$ coincide con a^x . Come abbiamo fatto per e^x , decidiamo allora di definire per ogni $a > 0$ ed ogni $x \in \mathbb{R}$

$$a^x = e^{x \log a} .$$

Vediamo qualche proprietà della funzione $x \mapsto a^x$: per ogni $a > 0$ la funzione a^x è definita su $\mathbb{R}$ ed è positiva; poi, è continua: infatti, se $x_n \to x_* \in \mathbb{R}$ è anche $(x_n \log a) \to (x_* \log a)$, e per la continuità dell'esponenziale $a^{x_n} = \exp(x_n \log a) \to \exp(x_* \log a) = a^{x_*}$.

Per le altre proprietà, dato che per $a = 1$ è $\log a = 0$ e quindi $a^x \equiv 1$ (notiamo che non c'è altro modo per provare che ad esempio $1^\pi = 1$, perché 1^π è definito come $e^{\pi \log 1}$), ci limitiamo al caso $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Osserviamo che per $a > 1$ è $\log a > 0$, quindi la funzione $x \mapsto x \log a$ è strettamente crescente, dunque lo è anche la composizione con la funzione strettamente crescente e^x ; invece se $0 < a < 1$ è $\log a < 0$, pertanto

$$0 < a < 1 \quad \Rightarrow \quad x \mapsto a^x \text{ è decrescente}$$
$$a > 1 \quad \Rightarrow \quad x \mapsto a^x \text{ è crescente.}$$

Per ogni $a > 0$ con $a \neq 1$, allora, la funzione a^x è strettamente monotona, quindi iniettiva, e la sua immagine è contenuta in $\mathbb{R}^+$; inoltre (✎ es. 5.87)

$$\begin{aligned} x_n \to +\infty \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} a^{x_n} \to 0^+ & \text{se } 0 < a < 1 \\ a^{x_n} \to +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases} \\ x_n \to -\infty \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} a^{x_n} \to +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ a^{x_n} \to 0^+ & \text{se } a > 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{5.43}$$

Abbiamo poi

$$x_n \to 0,\ x_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} \to \log a\,. \tag{5.44}$$

Notiamo che per $\log a \neq 0$, cioè per $a \neq 1$, la funzione $x \mapsto x \log a$ ha come immagine tutto $\mathbb{R}$, quindi sua composizione con l'esponenziale $x \mapsto \exp(x \log a) = a^x$ ha come immagine l'immagine dell'esponenziale, cioè $\mathbb{R}^+$. Allora per $a \neq 1$ la funzione a^x è biunivoca da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^+$, ed ammette una funzione inversa, il logaritmo in base a :

$$\forall x, \quad x = \log_a(a^x)\,, \qquad \forall x > 0, \quad x = a^{\log_a x}\,.$$

Il logaritmo in base a ha proprietà simili a quello in base e (naturalmente, è una funzione crescente se $a > 1$ mentre è decrescente se $0 < a < 1$); se $a, b > 0$ con $a \neq 1$, da $b = a^{\log_a b}$ segue, prendendo il logaritmo (in base e) di ambo i membri, la formula di cambiamento di base dei logaritmi:

$$\log b = (\log_a b) \log a\,,$$

da cui

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}\ :$$

pertanto, conoscendo il logaritmo (in base e) di ogni numero possiamo facilmente ricavare il logaritmo in qualunque altra base (ecco perché prima dell'introduzione dei calcolatori elettronici era sufficiente possedere una sola tavola dei logaritmi, generalmente quella in base e o in base 10).

Osserviamo qualche conseguenza particolarmente interessante.

Esempio : per ogni successione divergente $\{x_n\}_n$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \Big(1 + \frac{1}{x_n}\Big)^{x_n} = \mathrm{e}\,; \tag{5.45}$$

infatti

$$\Big(1 + \frac{1}{x_n}\Big)^{x_n} = \exp\Big[x_n \log\Big(1 + \frac{1}{x_n}\Big)\Big] = \exp\Big[\frac{\log(1 + \frac{1}{x_n})}{\frac{1}{x_n}}\Big]\,,$$

e dato che $(1/x_n) \to 0$, l'argomento dell'esponenziale tende ad 1 per la proprietà (5.41) dei logaritmi, quindi il limite è e per la continuità dell'esponenziale.

Da questo esempio si deduce facilmente (✎ es. 5.88) un ulteriore limite notevole:

$$x_n \to 0,\ x_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (1 + x_n)^{1/x_n} \to \mathrm{e}\,. \tag{5.46}$$

Proposizione 5.59 : *se* $\{a_n\}_n$ *è una successione di numeri positivi e* $\{b_n\}_n$ *è una successione qualunque, da*

$$a_n \to \ell_a\,, \quad b_n \to \ell_b$$

si ricava

$$(a_n)^{b_n} \to (\ell_a)^{\ell_b}$$

tranne che nei casi in cui $(\ell_a)^{\ell_b}$ *è del tipo* 0^0, ∞^0 e 1^∞.

La dimostrazione (✎ es. 5.89) si ottiene facilmente scrivendo $(a_n)^{b_n} = \exp(b_n \log a_n)$ (✎ es. 5.90).

5.10 - Successioni definite per ricorrenza

Abbiamo già incontrato, ad esempio in (3.2), delle successioni definite per induzione; ne vediamo qualche altro caso in questa sezione, rimandando tuttavia una trattazione più completa a dopo l'introduzione delle derivate (☞ sezione 7.7), con le quali l'indagine risulterà facilitata.

Esempio : studiamo la successione

$$a_0 = \alpha\,, \qquad a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n}\,.$$

Poiché la funzione $\sqrt[3]{x}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, grazie alla proposizione 3.5 questa formula definisce davvero una successione.

Osserviamo che la funzione $\sqrt[3]{x}$ ha le seguenti particolarità, tutte già dimostrate o, come la c), facilmente dimostrabili con pochi calcoli:

a) è continua
b) è strettamente crescente
c1) $\sqrt[3]{x} = x \iff x \in \{0, 1, -1\}$
c2) $\sqrt[3]{x} < x \iff [-1 < x < 0]$ o $[x > 1]$, mentre $\sqrt[3]{x} > x \iff [x < -1]$ o $[0 < x < 1]$;

inoltre, da b) e c1) deduciamo subito

d) $x < -1 \Rightarrow \sqrt[3]{x} < -1$, $-1 < x < 0 \Rightarrow -1 < \sqrt[3]{x} < 0$, $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt[3]{x} < 1$ e $x > 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x} > 1$.

Da queste proprietà è possibile tracciare un grafico approssimativo della funzione $\sqrt[3]{x}$, insieme al quale (☞ figura 5.1) abbiamo riportato anche il grafico della funzione x.

Cominciamo ora a provare che

$$\alpha < -1 \quad \Rightarrow \quad \forall n,\ a_n < -1\ : \tag{5.47}$$

infatti, $a_0 < -1$, e se $a_n < -1$ da d) ricaviamo $a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n} < -1$, quindi per induzione abbiamo provato (5.47). Mostriamo che

$$\alpha < -1 \quad \Rightarrow \quad \forall n,\ a_n < a_{n+1}\ : \tag{5.48}$$

questo segue subito da (5.47) e da c2), in quanto se $\alpha < -1$ allora per ogni n ricaviamo $a_n < -1$ e quindi $a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n} > a_n$. Da (5.47) e (5.48) segue che se $\alpha < -1$ la successione $\{a_n\}_n$ è strettamente crescente, ed è limitata superiormente da -1 , pertanto (☞ teorema 5.40) essa converge e

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_n a_n = \ell\,, \quad \alpha < \ell \le -1\,.$$

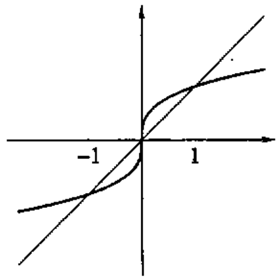


Fig. 5.1 : i grafici di x e $\sqrt[3]{x}$

Mostriamo che $\ell = -1$: dato che $\ell \in \mathbb{R}$, per a) abbiamo che

$$a_n \to \ell \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n} \to \sqrt[3]{\ell}\,,$$

ma $a_{n+1} \to \ell$, perché è un'estratta di $\{a_n\}_n$, quindi per il teorema di unicità del limite (☞ teorema 5.12) otteniamo $\sqrt[3]{\ell} = \ell$. Allora ricaviamo da c1) che il numero ℓ può solo essere $0\,,1$ o -1 ; d'altra parte abbiamo visto che $\ell \le -1$, quindi necessariamente $\ell = -1$. In modo simile, provate per esercizio che

e) se $\alpha = -1$, allora $\forall n,\ a_n = -1$;
f) se $-1 < \alpha < 0$, allora $\{a_n\}_n$ decresce a -1 ;
g) se $\alpha = 0$, allora $\forall n,\ a_n = 0$;
h) se $0 < \alpha < 1$, allora $\{a_n\}_n$ cresce a 1 ;
i) se $\alpha = 1$, allora $\forall n,\ a_n = 1$;
j) se $\alpha > 1$, allora $\{a_n\}_n$ decresce a 1 .

In conclusione, la successione converge per ogni α , e

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} -1 & \text{se } \alpha < 0 \\ 0 & \text{se } \alpha = 0 \\ 1 & \text{se } \alpha > 0. \end{cases}$$

Esempio : studiamo la successione definita dalla formula

$$a_0 = 0.5\,, \qquad a_{n+1} = 1/\sqrt{a_n}\,.$$

Iniziamo a notare che grazie alla proposizione 3.5

$$a_n \text{ esiste ed è positiva per ogni } n\ :$$

infatti, se indichiamo con $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ la funzione $1/\sqrt{x}$, abbiamo $a_{n+1} = f(a_n)$. È facile vedere che la funzione f ha le seguenti proprietà:

a) è continua
b) è strettamente decrescente
c1) $f(x) = x \iff x = 1$
c2) $f\big(f(x)\big) < x \iff x > 1$ e $f\big(f(x)\big) > x \iff 0 < x < 1$
d) $f(x) < 1 \iff x > 1$ e $f(x) > 1 \iff 0 < x < 1$,

per cui possiamo tracciarne un grafico (☞ figura 5.2). Ci si rende subito conto che il comportamento è diverso da quello della successione precedente: qui, se per un certo valore di n abbiamo $a_n < 1$, da d) deduciamo che $a_{n+1} = f(a_n) > 1$, e viceversa da $a_n > 1$ segue $a_{n+1} < 1$, dunque la successione "salta" intorno al numero 1 . Allora, osserviamo che usando due volte d) otteniamo

$$a_n < 1 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = f(a_n) > 1 \quad \Rightarrow \quad a_{n+2} = f(a_{n+1}) < 1\,, \tag{5.49}$$

e analogamente

$$a_n > 1 \quad \Rightarrow \quad a_{n+2} = f\big(f(a_n)\big) > 1\,.$$

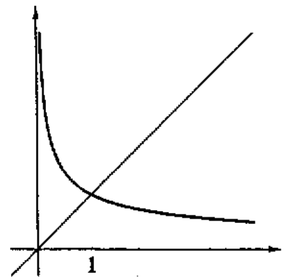


Fig. 5.2 : i grafici di x e $1/\sqrt{x}$

Studiamo la successione $p_n = a_{2n}$ dei termini con indice pari, e proviamo che

$$\forall n,\ p_n < 1\ :$$

infatti, $p_0 = a_0 = 0.5 < 1$, e se $p_n < 1$ allora per (5.49) abbiamo

$$p_{n+1} = a_{2(n+1)} = a_{2n+2} < 1\,,$$

dato che $a_{2n} < 1$; visto che la successione $\{p_n\}_n$ è tutta compresa tra 0 e 1 , otteniamo da c2) che per ogni n

$$p_{n+1} = f(f(p_n)) > p_n ,$$

vale a dire $\{p_n\}_n$ è crescente. Essendo anche limitata superiormente da 1 essa converge (☞ teorema 5.40) e

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \ell , \qquad 0.5 = \min\{p_n : n \in \mathbb{N}\} < \ell \le 1 .$$

Il ragionamento usato nell'esempio precedente mostra che $\ell = 1$. A questo punto possiamo vedere (per esercizio), ragionando in modo analogo a prima, che la successione $d_n = a_{2n+1}$ dei termini con indice dispari è maggiore di 1 , decresce, e il suo limite è anch'esso 1 . Grazie alla proposizione 5.15 tutta la successione $\{a_n\}_n$ tende ad 1 .

Esempio : consideriamo la successione di Fibonacci, ☞ formula (10.32),

$$a_0 = 1 , \qquad a_1 = 1 , \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} . \tag{5.50}$$

Questa formula definisce una successione per la proposizione 3.7; usando la seconda forma del principio di induzione, è facile dimostrare che

$$\forall n, \quad a_n \ge 1 .$$

Dalla formula $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, che vale per $n \ge 1$, ricaviamo allora che

$$\forall n \ge 1, \quad a_{n+1} \ge 1 + a_n ,$$

il che dice che $\{a_n\}_n$ è crescente per $n \ge 1$, e permette di dimostrare immediatamente, usando la prima forma del principio di induzione, che

$$\forall n \ge 1, \quad a_n \ge n .$$

Allora, per il teorema di confronto 5.23, $a_n \to +\infty$.

Osservazione : una classe di funzioni f per le quali la successione

$$a_0 = \alpha , \qquad a_{n+1} = f(a_n)$$

ha sempre limite è quella delle contrazioni, vale a dire funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$\exists L \in]0,1[: \forall x, y, \quad |f(x) - f(y)| \le L|x - y| ;$$

la dimostrazione di questa affermazione si può trovare in appendice (➡ appendice 5.17).

Rimandiamo all'appendice (➡ appendice 5.18) anche per qualche altro esempio che si può trattare senza l'uso delle derivate (✎ es. 5.91).

5.11 - Successioni complesse

Molto in breve, trattiamo l'argomento delle successioni a valori complessi (che rientrano tra quelle studiate nell'appendice 5.5); per esse, non si può parlare di divergenza, ma solo di convergenza.

Definizione : *si dice che una successione $\{z_n\}_n$ di numeri complessi converge ad un numero complesso ℓ se la successione di numeri reali $\{|z_n - \ell|\}_n$ è infinitesima.*

Definizione : *si dice che una successione $\{z_n\}_n$ di numeri complessi è limitata se lo è la successione $\{|z_n|\}_n$ dei suoi moduli.*

Per le successioni complesse valgono il teorema di unicità del limite, il teorema sul limite della somma e del prodotto e il teorema sul limite del rapporto (se il denominatore non tende a zero); inoltre, il prodotto di ua successione infinitesima per una limitata è infinitesimo, ed una successione convergente è limitata. Non vale alcun altro teorema di confronto, perché questi sono basati sulla struttura d'ordine di $\mathbb{R}$, mentre $\mathbb{C}$ non è ordinato. Valgono il teorema di Bolzano - Weierstrass e il teorema di Cauchy (dove nella definizione di successione di Cauchy bisogna sostituire il valore assoluto con il modulo). Inoltre abbiamo le seguenti proprietà, le cui dimostrazioni possono essere tutte svolte per esercizio (✎ es. 5.94):

a) $z_n \to \ell \Rightarrow |z_n| \to |\ell|$
b) $z_n \to \ell \Rightarrow \bar{z}_n \to \bar{\ell}$
c) $z_n \to \ell \Rightarrow \Re z_n \to \Re \ell$
d) $z_n \to \ell \Rightarrow \Im z_n \to \Im \ell$,

oltre all' interessante viceversa delle ultime due:

e) $[\Re z_n \to \Re \ell$ e $\Im z_n \to \Im \ell] \Rightarrow z_n \to \ell$.

Esercizi relativi al capitolo 5

Esercizio 5.1 : dite quali fra gli insiemi $A =]-\infty, 3[$, $B =]0,5[$, $C = A \cap B$, $D = [1,7[$, $E = A \cup D$, $F = (D \setminus A) \cup [0,1]$ sono intorni del punto 1.

Esercizio 5.2 : dite di quali punti è intorno $]2,\pi[$.

Esercizio 5.3 : terminate la dimostrazione della proposizione 5.1.

Esercizio 5.4 : terminate la dimostrazione della proposizione 5.2.

Esercizio 5.5 : provate che se $x_1, \dots, x_n$ sono punti distinti di $\overline{\mathbb{R}}$ questi possiedono degli intorni $U_1, \dots, U_n$ a due a due disgiunti (suggerimento: calcolate la minima distanza tra due dei punti x_i).

Esercizio 5.6 : provate che $1 \in \partial([0,1[)$.

Esercizio 5.7 : caratterizzate l'esterno di $[0,1[$.

Esercizio 5.8 : determinate l'interno, l'esterno e il bordo di ciascuno degli insiemi dell'esercizio 5.1.

Esercizio 5.9 : determinate l'interno, l'esterno e il bordo dell'insieme $\{1,2,3\}$.

Esercizio 5.10 : determinate l'interno, l'esterno e il bordo dell'insieme $\mathbb{Q} \cap [0,1[$.

Esercizio 5.11 : provate che i punti aderenti a un insieme A o sono di accumulazione per A o sono isolati.

Esercizio 5.12 : provate che se $+\infty$ è un punto di accumulazione di $A \subset \mathbb{R}$ allora ogni intorno di $+\infty$ contiene infiniti punti di A.

Esercizio 5.13 : provate che $+\infty$ è un punto di accumulazione di $A \subset \mathbb{R}$ se e solo se A non è limitato superiormente.

Esercizio 5.14 : determinate i punti aderenti e i punti di accumulazione di ciascuno degli insiemi dell'esercizio 5.1.

Esercizio 5.15 : determinate i punti aderenti e i punti di accumulazione dell'insieme $\{1,2,3\}$ e dell'insieme $\mathbb{Q} \cap [0,1[$.

Esercizio 5.16 : provate che se x_* è un punto di accumulazione di $A \cap B$ allora è punto di accumulazione sia di A che di B. È vero il viceversa?

Esercizio 5.17 : provate che $\mathscr{P}$ non è definitivamente vera se e solo se **non** $\mathscr{P}$ è frequentemente vera.

Esercizio 5.18 : dite quali fra i seguenti predicati sono frequentemente veri, e dite quali sono frequentemente falsi:

a) $n^2 + n$ è pari
b) $2n^3 + n$ è dispari
c) $n^2 + 3n - 7 > 0$
d) $\operatorname{sen} n \le 0$.

Esercizio 5.19 : fra i predicati dell'esercizio precedente, dite quali sono definitivamente veri, e quali definitivamente falsi.

Esercizio 5.20 : dite quali fra le seguenti applicazioni definite su $\mathbb{N}$ (o su $\mathbb{N}^+$) sono monotone, e di che tipo (non basta provare a calcolarne tre o quattro valori, occorrono delle dimostrazioni):

a) $n \mapsto n^2 + n$
b) $n \mapsto n^2 - n$
c) $n \mapsto \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$
d) $n \mapsto n + \dfrac{20}{n}$
e) $n \mapsto n + \dfrac{1}{n}$.

Esercizio 5.21 : dimostrate la proposizione 5.6.

Esercizio 5.22 : dimostrate la proposizione 5.8.

Esercizio 5.23 : dite quali fra le seguenti formule definiscono delle successioni: $a_n = n + 20/n$, $a_n = \sqrt{\operatorname{sen} n}$, $a_n = \tan(\pi \cos(n\pi/6))$, $a_n = 1/(n^2 - 20\cos n)$.

Esercizio 5.24 : provate che $a_n \to +\infty$ se e solo se vale (5.4).

Esercizio 5.25 : provate che (5.4) equivale alla stessa proposizione, ma con $\forall M > 0$ $[<0]$ anziché $\forall M$.

Esercizio 5.26 : provate che (5.4) equivale a (5.7).

Esercizio 5.27 : provate, usando la definizione e le caratterizzazioni del limite, che $\dfrac{2+n}{3-n} \to -1$.

Esercizio 5.28 : provate che $(n^2 - 7\operatorname{sen} n) \to +\infty$.

Esercizio 5.29 : provate che $\dfrac{n+2+\cos n}{3-n} \to -1$.

Esercizio 5.30 : provate che se $A \subset \mathbb{R}$ è un insieme non vuoto allora esiste una successione di punti di A che ha come limite $\sup A$.

Esercizio 5.31 : provate che per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ la successione $1/n^k$ è infinitesima.

Esercizio 5.32 : dimostrate la proposizione 5.28.

Esercizio 5.33 : calcolate i seguenti limiti:

a) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+2}{3-n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3(n+1)}\right)$

b) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3-2n^2}{n+3}$

c) $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{2n} k^{-2}$.

Esercizio 5.34 : provate che se $\{a_n\}_n$ diverge allora $|a_n| \to +\infty$. È vero il viceversa?

Esercizio 5.35 : dimostrate la proposizione 5.30.

Esercizio 5.36 : dimostrate che $a_n \to 0^+ \Rightarrow 1/a_n \to +\infty$.

Esercizio 5.37 : calcolate $\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)\frac{n^2-5n+\operatorname{sen} n}{n+1-1/n^2}\right]$.

Esercizio 5.38 : dimostrate che ogni funzione è continua nei punti isolati del suo dominio.

Esercizio 5.39 : dimostrate la proprietà (5.11) per la funzione coseno.

Esercizio 5.40 : enunciate e dimostrate l'analogo di (5.13) per $x_n \to -\infty$.

Esercizio 5.41 : provate le formule (5.14) e (5.15).

Esercizio 5.42 : enunciate e dimostrate, per k dispari, l'analogo dell'implicazione (5.14) per $x_n \to -\infty$ e della (5.15) per $x_n \to 0^-$.

Esercizio 5.43 : calcolate i seguenti limiti:

a) $\lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{n})^3-2(\sqrt{n})^5}{1+3(\sqrt[3]{n})^7}$

b) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{1+2n}}\right)$

c) $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$

d) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n+1}}-\frac{n}{\sqrt{n-1}}\right)$

e) $\lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n-2}}-\frac{1}{\sqrt{n+3}}\right)\right]$

f) $\lim_{n\to+\infty}[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})]$

g) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+n^2}+\sqrt[4]{2n}}{\sqrt[3]{n^4-n}+3\sqrt{n-1}}$

h) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n-2\operatorname{sen} n}}{n+\cos n^2}$

i) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2-n+3}}{n-1}$.

Esercizio 5.44 : calcolate $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{2n} k^{-1/2}$.

Esercizio 5.45 : calcolate $\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{n\pi-\operatorname{sen}(1/n)}{n+2}\tan\sqrt{\frac{(-1)^n+2}{n\cos(1/n)}}\right)$.

Esercizio 5.46 : dimostrate il teorema 5.40 e il corollario 5.41 per successioni che sono solo definitivamente monotone.

Esercizio 5.47 : provate che la successione $a_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$ è convergente, e mostrate che il suo limite è compreso fra $7/12$ e $5/6$.

Esercizio 5.48 : scrivete venti volte "non è vero che ogni successione limitata ha limite"; ripetete questo esercizio ogni volta che ci cascate.

Esercizio 5.49 : dimostrate che $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ è punto limite di $\{a_n\}_n$ se e solo se per ogni $U \in \mathscr{I}_\ell$ frequentemente $a_n \in U$.

Esercizio 5.50 : determinate i punti limite delle seguenti successioni:

a) $a_n = \frac{1+n(-1)^n}{1+n}$

b) $a_n = \frac{n^2+1}{n^2-2}\cos\frac{n\pi}{2}$.

Esercizio 5.51 : provate a dimostrare la proposizione 5.46; a mo' di suggerimento, potete leggere qualche pezzetto della dimostrazione nell'appendice 5.12.

Esercizio 5.52 : usando le caratterizzazioni del massimo e del minimo limite contenute all'inizio dell'appendice 5.11, dimostrate la proposizione 5.47.

Esercizio 5.53 : provate che $\omega(f,A) = \sup\{f(x)-f(y) : x,y \in A\} = \sup\{|f(x)-f(y)| : x,y \in A\}$.

Esercizio 5.54 : calcolate per ogni k l'oscillazione $\omega(a_n,\{n \geq k\})$ della successione $a_n = (-1)^n/n$.

Esercizio 5.55 : provate che una successione $\{a_n\}_n$ è di Cauchy se e solo se si ha $\lim_{k\to+\infty}\omega(a_n,\{n\geq k\}) = 0$.

Esercizio 5.56 : calcolate i seguenti limiti:

a) $\lim_{n\to+\infty}((n^2+\operatorname{sen} n)\operatorname{sen}(2/n))$

b) $\lim_{n\to+\infty}\left(n\cos\frac{\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\right)$

c) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}$

d) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}\,\mathrm{sen}\,\sqrt[5]{n^{-3}}}{n\cos\sqrt[7]{n^{-10}}}$.

Esercizio 5.57 : determinate l'area a_n di un poligono regolare con n lati inscritto nella circonferenza di raggio r (il lato è lungo $2r\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n}$), e calcolate $\lim_{n\to+\infty} a_n$; cosa vi aspettate che sia?

Esercizio 5.58 : calcolate $\lim_{n\to+\infty} (\cos(\pi/n))^n$, usando anche la disuguaglianza di Bernoulli (3.9).

Esercizio 5.59 : calcolate i seguenti limiti:

a) $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3^n} + \dfrac{(-1)^n}{7^n}\right)$

b) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^n + 4^n}{3^n}$

c) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(3+(-1)^n)^n}$.

Esercizio 5.60 : calcolate il limite $\lim_{n\to+\infty} (\cos(\pi t))^{2n}$ per ogni valore di $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5.61 : provate (eventualmente svolgendo prima il prossimo esercizio) la seguente proposizione, analoga a 5.49:
se $a_n \neq 0$ per ogni n , ed esiste $\lim_{n\to+\infty} (a_{n+1}/a_n) = \ell$, allora

a) $|\ell| < 1 \Rightarrow a_n \to 0$

b) $\ell > 1 \Rightarrow a_n$ diverge

c) $\ell < -1 \Rightarrow a_n$ non ha limite.

Esercizio 5.62 : enunciate e dimostrate l'analogo della proposizione 5.50 per la proposizione dell'esercizio precedente.

Esercizio 5.63 : terminate la dimostrazione della proposizione 5.50.

Esercizio 5.64 : dimostrate che per ogni successione $\{a_n\}_n$ di numeri positivi vale la formula (5.21).

Esercizio 5.65 : costruite esempi di successioni $\{a_n\}_n$ tali che $(a_{n+a}/a_n) \to 1$, ma la successione non ha limite, o ha limite un numero reale positivo qualsiasi.

Esercizio 5.66 : calcolate i seguenti limiti:

a) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{n}$

b) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(2n)!}{2\,n!}$

c) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

d) $\lim_{n\to+\infty} \dbinom{3n}{n}$.

Esercizio 5.67 : provate che $\lim_{n\to+\infty} (q^n/n!) = 0$ per ogni $q \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5.68 : calcolate $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}$.

Esercizio 5.69 : calcolate i seguenti limiti:

a) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+1}$

b) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+n}$

c) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$

d) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2-2\cos n}$

e) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{2^n} - \dfrac{n}{7^n}}$

f) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n!}{2^n+1}}$.

Esercizio 5.70 : ponete $\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$, e provate che $\delta_n \to 0$ (suggerimento: usate opportunamente il binomio di Newton).

Esercizio 5.71 : provate che $(\sqrt[n]{n} - 1)^n \to 0$.

Esercizio 5.72 : provate che $\sqrt{n}(\sqrt[n]{n} - 1) \to 0$.

Esercizio 5.73 : calcolate i seguenti limiti:

a) $\lim_{n\to+\infty} \left(n\,\dfrac{n! - (n+1)^3}{n^3 - 2(n+1)!}\right)$

b) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(3+\mathrm{sen}\,n)^n + n^4}{(n-3)! - 5^n}$

c) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{(2n)^{2n}}$.

Esercizio 5.74 : trovate esempi di successioni nella forma ∞^0 in cui il limite è un numero $q > 1$, e altri in cui il limite non esiste.

Esercizio 5.75 : calcolate i seguenti limiti:

a) $\lim_{n\to+\infty} \left[\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos\left(2\pi - \dfrac{1}{i}\right)\right]$

b) $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+5} \dfrac{\mathrm{sen}(1/i)}{2/i}\right)$.

Esercizio 5.76 : provate per induzione le disuguaglianze di tipo Stirling (5.32).

Esercizio 5.77 : deducete da (5.36) che $e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$ per ogni $x < 1$.

Esercizio 5.78 : provate che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e$.

Esercizio 5.79 : provate che $e^{n(\sqrt[n]{n}-1)} \geq n$, e calcolate $\lim_{n\to+\infty} (n(\sqrt[n]{n} - 1))$.

Esercizio 5.80 : usando la disuguaglianza di Bernoulli e l'esercizio precedente, cercate di calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n} - 1}}$.

Esercizio 5.81 : provate che la successione $a_n = \frac{1}{n}(\mathrm{e}\cdot\sqrt{\mathrm{e}}\cdot\sqrt[3]{\mathrm{e}}\cdots\sqrt[n]{\mathrm{e}})$ è decrescente ad un limite finito; dopo aver svolto l'esercizio 5.86, dite chi è il limite.

Esercizio 5.82 : calcolate i seguenti limiti:

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)^{n^2}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n\mathrm{e}^{\operatorname{sen}(1/n)}-n)$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{n\operatorname{sen}(1/n)}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(n\mathrm{e}^{\operatorname{sen}(1/n)}-n\cos\frac{1}{n}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{1+n^n 4^{n^2}}}$.

Esercizio 5.83 : dimostrate tutte le proprietà del logaritmo, partendo da quelle dell'esponenziale.

Esercizio 5.84 : usando (5.39), provate che $\dfrac{x}{1+x}\le\log(1+x)\le x$ per ogni $x\ge 0$.

Esercizio 5.85 : calcolate i seguenti limiti:

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{n^2(1-\cos\frac{1}{n})}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{n^2}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(n!\operatorname{sen}\frac{1}{n^n}\right)^{1/n}$.

Esercizio 5.86 : dimostrate che la successione $\gamma_n=\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)-\log n$ converge ad un limite reale positivo γ (confrontate con l'esercizio 5.81), che viene detto costante di Eulero-Mascheroni (➡ appendice 9.8).

Esercizio 5.87 : dimostrate le formule (5.43) e (5.44).

Esercizio 5.88 : dimostrate la formula (5.46).

Esercizio 5.89 : completate la dimostrazione della proposizione 5.59.

Esercizio 5.90 : calcolate i seguenti limiti:

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{\operatorname{sen}^2\frac{1}{n}}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}(1/n)}}$.

Esercizio 5.91 : studiate la successione definita per induzione dalla formula

$$a_0=0\,,\qquad a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\,.$$

Esercizio 5.92 : l'area α_n di un poligono regolare inscritto in un cerchio di raggio 1 ed avente 2^n lati si può ricavare senza troppe difficoltà per induzione (cercate di farlo, esprimendola in funzione del seno dell'angolo al centro), ed è data dalla formula

$$\alpha_2=2\,,\qquad \alpha_{n+1}=\frac{2^n}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{\alpha_n^2}{4^{n-1}}}}\,.$$

Provate che $\{\alpha_n\}_n$ converge, e stimate il suo limite come meglio potete (il limite, come ci è stato insegnato alle scuole medie, è l'area del cerchio, cioè π). Paragonate il calcolo a quello dell'esercizio 5.57; tuttavia, questa è una costruzione del'area del cerchio, e quindi del numero π , mentre l'esercizio 5.57 usa già π (e quindi l'area del cerchio).

Esercizio 5.93 : studiate al variare di $\alpha>0$ la successione definita per induzione dalla formula

$$a_1=\alpha\,,\qquad a_{n+1}=\sqrt[n]{1+a_n}-1\,.$$

Esercizio 5.94 : dimostrate tutte le affermazioni contenute nella sezione 5.11.

Appendice al capitolo 5

Appendice 5.1 - Topologia negli spazi metrici

Nel testo abbiamo adottato una definizione semplificata (intorno = intervallo aperto); vediamo una trattazione elementare della topologia negli spazi metrici, definiti nell'appendice 4.3. Nel seguito, con (E, d) indichiamo sempre uno spazio metrico.

Definizione : un *insieme* $A \subset E$ *si dice aperto se*

$$\forall x \in A,\ \exists r > 0 : \quad B_r(x) \subset A ;$$

l'insieme di tutti gli aperti si dice topologia indotta dalla metrica di (E, d) *e si indica con* τ_{d} .

Se non c'è pericolo di confusione, scriveremo semplicemente τ al posto di τ_{d} . Nel seguito, indichiamo con ϵ la topologia euclidea su $\mathbb{R}$, cioè quella indotta dalla metrica euclidea $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$.

Esempio : lo spazio E è un aperto, perché contiene qualsiasi palla; anche l'insieme vuoto è un aperto, perché la condizione è verificata per ogni punto che appartiene all'insieme vuoto (visto che non ve ne sono, non dobbiamo fare alcuna verifica).

Esempio : abbiamo già dimostrato nell'appendice 4.3 che per ogni $y \in B_r(x)$ esiste una palla centrata in y contenuta in $B_r(x)$; allora, le palle in uno spazio metrico sono insiemi aperti.

Esempio : in $\mathbb{R}$, con la distanza euclidea, gli aperti sono unioni di (al più) un'infinità numerabile di intervalli aperti disgiunti; la dimostrazione però non è ovvia, e usa la caratterizzazione dei connessi di $\mathbb{R}$ (☞ proposizione A6.12).

Esempio : nell'appendice 4.3 abbiamo visto la distanza (A4.3) in $\overline{\mathbb{R}}$, per la quale le palle centrate in $+\infty$ sono gli intervalli $]a, +\infty]$, mentre le palle centrate in un punto di $\mathbb{R}$ sono intervalli aperti $]a, b[$ (si può scrivere esplicitamente quale intervallo sia la palla di centro x e raggio r , ma non ci interessa particolarmente).

Definizione : *se* $x \in E$, *si dice intorno di* x *qualunque insieme* $U \subset E$ *tale che*

$$\exists r > 0 : \quad B_r(x) \subset U ;$$

l'insieme degli intorni di un punto x *si indica con* $\mathscr{I}_x$.

Gli intorni di un punto sono dunque tutti gli insiemi che contengono qualche palla centrata in quel punto.

Esempio : in $\mathbb{R}$ con la distanza euclidea, l'insieme $]1, 2[\cup[3, 6[\cup\{7\}$ è un intorno di 4 .

Osserviamo che per definire gli "intorni sinistri" e gli "intorni destri" è necessaria una relazione d'ordine, quindi in generale questi non hanno senso in uno spazio metrico, salvo ad esempio nello spazio metrico $(\mathbb{R}, \epsilon)$. Tuttavia, neppure con la nuova definizione data negli spazi metrici questi insiemi rientrano nella categoria degli intorni.

Proposizione A5.1 : *un sottoinsieme* A *di* E *è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto.*

La dimostrazione è immediata dalle definizioni di aperto e intorno.

Proposizione A5.2 : *gli intorni hanno le seguenti proprietà:*
1) *ogni punto ha almeno un intorno, ed appartiene a tutti i suoi intorni;*
2) *ogni insieme che contiene un intorno di* x *è un intorno di* x ;
3) *l'intersezione di un numero finito di intorni di* x *è un intorno di* x ;
4) *presi comunque due punti distinti questi possiedono due intorni disgiunti;*
5) *ogni intorno di* x *contiene un aperto al quale appartiene* x .

DIMOSTRAZIONE : le prime due proprietà sono ovvie, e per la terza basta considerare che ognuno di questi intorni contiene una palla centrata in x , quindi la loro intersezione contiene la palla che ha raggio più piccolo. Per la quarta proprietà osserviamo che se $x \neq y$ allora $\mathrm{d}(x, y) > 0$, quindi posto $r = \mathrm{d}(x, y)/2$ abbiamo $B_r(x) \cap B_r(y) = \varnothing$: se così non fosse, preso $z \in B_r(x) \cap B_r(y)$ avremmo

$$\mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y) < r + r = \mathrm{d}(x, y) ,$$

che è assurdo, pertanto $B_r(x) \cap B_r(y) = \varnothing$ e abbiamo trovato i due intorni disgiunti. Infine, l'ultima proprietà è vera perché basta considerare una palla centrata in x e contenuta in quell'intorno: abbiamo già visto che ogni palla è un aperto. Notiamo che con questa nuova definizione di intorno, se $U \in \mathcal{I}_x$ non è vero in generale che U è anche intorno di ogni suo punto: ciò è vero solo se U è un aperto. ■

Osservazione : se due metriche su E sono equivalenti, danno luogo agli stessi intorni di ogni punto, e danno la stessa topologia. Questo dice che la topologia è molto più stabile della distanza a cui è associata.

Proposizione A5.3 : *in uno spazio metrico* (E, d) *la topologia* τ *ha la seguenti proprietà:*

1) *il vuoto e tutto lo spazio sono aperti;*
2) *l'intersezione di un numero finito di aperti è un aperto;*
3) *l'unione di una famiglia qualsiasi di aperti è un aperto;*
4) *presi comunque due punti distinti di* E *questi sono contenuti in due aperti disgiunti.*

Le dimostrazioni sono molto facili (➡ appendice 5.2).

Definizione : *si dice che un insieme* $C \subset E$ *è chiuso se il suo complementare* $E \setminus C$ *è aperto.*

Da questa definizione e dalle proprietà degli aperti si ricavano facilmente le proprietà dei chiusi, grazie alle leggi di de Morgan: $\varnothing$ ed E sono chiusi, l'intersezione di una famiglia qualsiasi di chiusi è un chiuso, e l'unione di un numero finito di chiusi è un chiuso.

Osserviamo che possiamo definire sull'insieme $\mathscr{P}(E)$ un ordinamento (parziale) per inclusione, che lo rende un insieme diretto, ponendo $B_1 \le B_2 \iff B_1 \subset B_2$. Considerata una qualunque famiglia non vuota $\alpha \subset \tau$ di aperti, abbiamo facilmente

$$\sup \alpha = \bigcup_{A \in \alpha} A = \{x \in E : \exists A \in \alpha : x \in A\} .$$

Poiché $\sup \alpha$ è un'unione di aperti, è anch'esso un aperto. Analogamente, se consideriamo una famiglia non vuota γ di chiusi, l'insieme

$$\inf \gamma = \bigcap_{C \in \gamma} C$$

è un chiuso. Queste osservazioni giustificano la prossima definizione.

Definizione : *se* $B \subset E$, *l'interno* $\mathring{B}$ *di* B *è il più grande aperto contenuto in* B, *e la chiusura* $\overline{B}$ *di* B *è il più piccolo chiuso contenente* B, *cioè, posto*

$$\alpha = \{A \subset B : A \in \tau\} , \qquad \gamma = \{C \supset B : E \setminus C \in \tau\} ,$$

si ha

$$\mathring{B} = \bigcup_{A \in \alpha} A , \qquad \overline{B} = \bigcap_{C \in \gamma} C .$$

Infine, il bordo di B *è* $\partial B = \overline{B} \setminus \mathring{B}$.

Notiamo che le famiglie α e γ non sono mai vuote, perché certamente $\varnothing \in \alpha$ ed $E \in \gamma$. Nel testo (☞ sezione 5.1) le definizioni dell'interno e della chiusura sembrano diverse da queste, ed è un utile esercizio verificare che in realtà sono equivalenti.

Esempio : in $\mathbb{R}$ con la distanza euclidea, l'interno di $\mathbb{Q}$ è l'insieme vuoto, e la chiusura di $\mathbb{Q}$ è tutto $\mathbb{R}$.

Definizione : *un insieme* $D \subset E$ *si dice denso in* E *se* $\overline{D} = E$.

Non è difficile verificare che, se lo spazio metrico è $\mathbb{R}$ con la distanza euclidea, questa definizione coincide con quella data verso la fine della sezione 3.4.

Osserviamo che l'operazione di interno $B \mapsto \mathring{B}$, come pure la chiusura $B \mapsto \overline{B}$, sono funzioni da $\mathscr{P}(E)$ a $\mathscr{P}(E)$; le proprietà principali delle operazioni di chiusura ed interno sono riassunte nelle prossime proposizioni, e possono tutte essere dimostrate per esercizio.

Proposizione A5.4 : *la chiusura è involutoria, cioè per ogni* $B \subset E$ *si ha* $\overline{\overline{B}} = \overline{B}$; *inoltre per ogni* $A, B \subset E$ *si ha* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Proposizione A5.5 : *per ogni* $B \subset E$ *si ha* $\mathring{B} = \left(\overline{B^c}\right)^c$.

Questo mostra che volendo avremmo potuto fare a meno di uno dei due simboli di chiusura ed interno; grazie a questa relazione è molto facile dedurre la prossima proposizione dalle proprietà della chiusura.

Proposizione A5.6 : *l'operazione di interno è involutoria, e l'interno di* $A \cap B$ *è uguale ad* $\mathring{A} \cap \mathring{B}$.

Osservazione : non è vero che la chiusura di $A \cap B$ è $\overline{A} \cap \overline{B}$, e neppure che l'interno di $A \cup B$ è $\mathring{A} \cup \mathring{B}$: trovate per esercizio dei controesempi.

Gli intorni, come li abbiamo definiti qui, sono parecchi, e gli intorni di un punto x contengono una palla centrata in x, più eventualmente altri frammenti anche lontani da x. Tener conto di tutti questi pezzi crea a volte dei piccoli problemi (ma in alcuni casi è estremamente comodo, come vedremo nell'appendice 6.6), pertanto introduciamo il concetto di "base" degli intorni, una sorta di un sottoinsieme selezionato di intorni che non fa perdere nulla della struttura di tutti gli intorni.

Definizione : *un insieme* $\mathscr{B}_x \subset \mathscr{P}(E)$ *si dice base degli intorni di un punto* x *se valgono le seguenti proprietà:*

1) *ogni elemento di* $\mathscr{B}_x$ *è un intorno di* x;
2) *ogni intorno di* x *contiene qualche elemento di* $\mathscr{B}_x$.

Esempio : le palle centrate in x sono una base di intorni di x. Anche le sole palle di raggio razionale centrate in x (o solo quelle di raggio $1/n$ con $n \in \mathbb{N}^+$) sono una base di intorni; questa osservazione è importante perché ci dice che in uno spazio metrico ogni punto ha una base di intorni numerabile.

Esempio : gli aperti che contengono x sono una base di intorni di x.

Esempio : in $\mathbb{R}$ con la distanza euclidea, gli intervalli aperti che contengono x sono una base di intorni di x; allora, quelli che nel testo abbiamo chiamato intorni sono in realtà soltanto una base di intorni.

Esempio : in un prodotto di due spazi metrici, una base di intorni di un punto $x = (x_1, x_2)$ è data dai prodotti di un intorno di x_1 per un intorno di x_2, e questi prodotti non esauriscono tutti gli intorni di x (in $\mathbb{R}^2$ un cerchio è un intorno del suo centro, ma non è il prodotto di due intorni).

Tutto quello che abbiamo detto nella sezione 5.1, con la cautela che solo gli aperti sono intorni di ogni loro punto, rimane vero per un qualsiasi spazio metrico.

Appendice 5.2 - Spazi topologici

In Analisi capita di incontrare spazi la cui struttura non è quella di uno spazio metrico, oppure tali che ricondurre tutto ad una metrica risulterebbe complicato o fuorviante. Abbiamo visto nell'appendice 5.1 cosa sia la topologia di uno spazio metrico, e quali siano le proprietà degli aperti: questi determinano gli intorni dei punti, e quindi le proprietà locali (cioè quelle che valgono "vicino" a qualche punto). Più in generale, allora, potremmo procedere in questo modo: dapprima definire una collezione di insiemi che chiamiamo aperti, e che verificano le proprietà viste sopra (notiamo che nell'appendice 5.1 la metrica non è mai stata nominata altro che negli esempi e nelle definizioni degli aperti e degli intorni), poi definire gli intorni come soprainsiemi degli aperti.

Definizione : *sia T un insieme; si dice topologia su T una collezione τ di sottoinsiemi di T con le seguenti proprietà:*
1) $\varnothing, T \in \tau$;
2) $\forall A_1, A_2 \in \tau,\ A_1 \cap A_2 \in \tau$;
3) $\forall \alpha \subset \tau,\ \left(\bigcup_{A \in \alpha} A\right) \in \tau$.

Se τ è una topologia su T, i suoi elementi si dicono aperti, e si dice che (T,τ) è uno spazio topologico; lo si chiama poi spazio di Hausdorff se vale anche la seguente proprietà:
4) *presi comunque due punti distinti di T questi sono contenuti in due aperti disgiunti.*

Vi sono in matematica altre strutture, più deboli o più forti degli spazi di Hausdorff, ma queste esulano dagli scopi di questa trattazione rapida della topologia.

Come su un insieme possiamo trovare più metriche, così su un insieme possiamo trovare più topologie, come mostrano i prossimi esempi.

Esempio : ogni insieme T può essere reso spazio topologico mediante la topologia banale, in cui gli aperti sono solo $\varnothing$ e T; in tal caso, se T ha più di un punto, non abbiamo uno spazio di Hausdorff.

Esempio : ogni insieme T può essere reso spazio topologico mediante la topologia discreta, in cui gli aperti sono tutti i sottoinsiemi di T.

Esempio : $(\mathbb{R}, \epsilon)$ è uno spazio topologico di Hausdorff.

Esempio : altre due topologie importanti su $\mathbb{R}$, che incontreremo anche più avanti (☞ appendice 6.10), sono quella della semicontinuità inferiore e quella della semicontinuità superiore. La topologia sc^i della semicontinuità inferiore è quella i cui aperti sono tutti gli intervalli della forma $]a,+\infty[$ con $a \in \overline{\mathbb{R}}$; la topologia sc^s della semicontinuità superiore è quella i cui aperti sono tutti gli intervalli della forma $]-\infty, a[$ con $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Esempio : per esercizio, potete dimostrare che un'altra topologia su un insieme T è la topologia cofinita, o di Zariski, nella quale

$$A \in \tau \quad \Longleftrightarrow \quad [A = \varnothing] \text{ o } [A^c \text{ è un insieme finito}] .$$

Questa non è di Hausdorff salvo in un caso particolare: quale?

Esempio : ogni spazio metrico diventa uno spazio topologico di Hausdorff con la topologia indotta dalla metrica.

Definizione : *si dice che uno spazio topologico è metrizzabile se la sua topologia è indotta da una metrica.*

A che serve la parola "metrizzabile", che pare un sinonimo di "metrico"? Semplicemente, per dire che uno spazio è metrico dobbiamo indicare la sua distanza, mentre se diciamo che è metrizzabile asseriamo solo che una tale distanza c'è, senza doverla trovare.

Esempio : l'esempio della topologia cofinita mostra che non tutti gli spazi topologici sono metrizzabili.

Gli spazi non di Hausdorff hanno pessime proprietà per quanto riguarda l'Analisi matematica: ad esempio, in uno spazio non di Hausdorff il limite può non essere unico!

Definizione : *i chiusi di uno spazio topologico (T,τ) sono i sottoinsiemi di T il cui complementare è aperto; gli intorni $\mathscr{I}_x$ di un punto $x \in T$ sono tutti i sottoinsiemi di T che contengono qualche aperto al quale appartiene x.*

Quella che negli spazi metrici era una proposizione riguardante gli intorni è ora la loro definizione (➡ appendice 5.3). Tutte le altre affermazioni riguardanti gli intorni, gli aperti e i chiusi contenute nell'appendice 5.1, nonché le definizioni di interno, chiusura, densità e base di intorni, valgono per un generico spazio topologico di Hausdorff (T,τ).

Definizione : *se* (T,τ) *è uno spazio topologico e* $S \subset T$, *si dice topologia indotta da* τ *su* S *la topologia* $\tau|_S$ *in cui gli aperti sono le intersezioni con* S *di elementi di* τ :

$$A \in \tau|_S \iff \exists A' \in \tau : A = A' \cap S .$$

Esempio : se consideriamo l'intervallo $S = [0,2[$ come sottoinsieme dello spazio $(\mathbb{R},\epsilon)$, allora $[0,1[$ è un aperto di S, anche se non è un aperto di $\mathbb{R}$, perché ad esempio $[0,1[= S \cap]-\infty,1[$, e quest'ultimo è un aperto di $\mathbb{R}$. In particolare, gli intorni di 0 nella topologia indotta sono tutti i sottoinsiemi di S che contengono un intervallo del tipo $[0,\varepsilon[$ con $\varepsilon > 0$.

Esempio : consideriamo lo spazio $\overline{\mathbb{R}}$ con la metrica (A4.3); la topologia indotta su $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$ è la topologia euclidea.

Le topologie sullo stesso insieme sono parzialmente ordinate.

Definizione : *se* τ *e* σ *sono due topologie su* T, *si dice che* τ *è più fine di* σ *se* $\tau \supset \sigma$, *cioè se ogni* σ*-aperto è anche* τ*-aperto.*

Esempio : la topologia banale è meno fine di qualsiasi altra, mentre quella discreta è la più fine; su $\mathbb{R}$, la topologia euclidea è più fine della topologia sc^i, e le topologie sc^s e sc^i non sono confrontabili fra loro.

Definizione : *se* $\beta \subset \mathscr{P}(T)$, *si dice topologia generata da* β *la meno fine tra tutte quelle che contengono* β.

La definizione precedente ha senso: infatti, la topologia discreta contiene β, quindi l'insieme $T(\beta)$ delle topologie su T che contengono β non è vuoto. Posto

$$\tau_\beta = \bigcap_{\tau \in T(\beta)} \tau ,$$

questa è una topologia (la verifica è per esercizio), contiene β ed è contenuta in tutte le topologie che contengono β.

Definizione : *si dice base di una topologia* τ *un insieme* $\beta \subset \tau$ *di aperti tale che*

$$\forall A \in \tau,\ \forall x \in A,\ \exists B \in \beta : \quad [x \in B] \text{ e } [B \subset A] .$$

Potete provare per esercizio che se β è una base di una topologia allora ogni aperto è unione di elementi della base.

Esempio : una base della topologia di uno spazio metrico è data da tutte le palle, o anche solo da tutte le palle di raggio razionale.

Definizione : *si dice che uno spazio topologico* (T,τ) *è separabile se possiede un sottoinsieme numerabile che è denso in* T; *si dice che verifica il primo assioma di numerabilità se ogni punto di* T *ha una base di intorni numerabile; si dice che verifica il secondo assioma di numerabilità se* τ *ha una base numerabile.*

Esempio : $(\mathbb{R},\epsilon)$ verifica tutte queste proprietà; per l'ultima, verificate per esercizio che una base della topologia è data da tutte le palle con centro e raggio razionali.

Esempio : ogni spazio metrico verifica il primo assioma di numerabilità; potete provare per esercizio che se è separabile, allora verifica anche il secondo.

Definizione : *se* (T_1,τ_1) *e* (T_2,τ_2) *sono spazi topologici; si dice topologia prodotto su* $T_1 \times T_2$ *quella generata dai prodotti di un elemento di* τ_1 *per un elemento di* τ_2.

Vediamo quali dei risultati della sezione 5.1 valgono negli spazi topologici:

a) se lo spazio non è metrico, non vale più la seconda parte della proposizione 5.1;
b) se lo spazio non è di Hausdorff, non valgono la proposizione 5.2 né l'osservazione successiva (il che è naturalmente molto seccante, perché non ci permette più di distinguere i punti uno dall'altro);
c) se lo spazio non verifica il primo assioma di numerabilità, allora non vale più la proposizione 5.3.

È poi chiaro che i risultati che usano l'estremo superiore, e quindi l'ordinamento di $\mathbb{R}$, non possono valere in uno spazio topologico qualsiasi.

Appendice 5.3 - Topologia sugli insiemi diretti

Consideriamo un punto x_* di uno spazio topologico di Hausdorff (T,τ), e ordiniamo per inclusione gli intorni di x_* ponendo per ogni coppia $U,V \in \mathscr{I}_{x_*}$

$$U \le V \iff V \subseteq U .$$

In tal modo $\mathscr{I}_{x_*}$ diventa un insieme ordinato (in generale non totalmente ordinato), che è anche un insieme diretto (☛ appendice 2.9): infatti se per ogni $U,V \in \mathscr{I}_{x_*}$ poniamo $W = U \cap V$ abbiamo che $W \in \mathscr{I}_{x_*}$ ed anche $U \le W$, $V \le W$.

A loro volta, gli insiemi diretti possono tutti essere dotati di una topologia compatibile con la struttura d'ordine, in questo modo: se $D \neq \varnothing$ è un insieme diretto, poniamo $\bar{D} = D \cup \{\infty\}$ (qui, ∞ è solo un simbolo per indicare un punto aggiunto all'insieme

D), ed estendiamo l'ordine a $\bar{D}$ ponendo $u \leq \infty$ per ogni $u \in D$ (questo giustifica la scelta del simbolo). Definiamo su $\bar{D}$ una topologia: per ogni $u \in D$, decidiamo che è aperto l'insieme $\{v \in \bar{D} : v \geq u,\ v \neq u\}$, e consideriamo la topologia generata da questa collezione. In questa topologia, ∞ è un punto di accumulazione di D.

Appendice 5.4 - Teorema di Bolzano-Weierstrass per i numeri reali

Vale il prossimo risultato, che potremmo ottenere anche come conseguenza del teorema di Bolzano-Weierstrass per le successioni (si veda al termine della dimostrazione).

Proposizione A5.7 : *ogni insieme non vuoto e infinito A di numeri reali ha almeno un punto di accumulazione.*

DIMOSTRAZIONE : se A non è limitato superiormente allora $+\infty$ è un punto di accumulazione di A (☞ esercizio 5.13), e analogamente con $-\infty$ se A non è limitato inferiormente, quindi basta trattare il caso in cui A è limitato, $A \subset [a, b]$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ poniamo $A_t = \{x \in A : x \leq t\}$; osserviamo che A_a contiene al più un punto, quindi è finito, mentre per ogni $t \geq b$ abbiamo $A_t = A$, che per ipotesi è infinito. Poniamo

$$B = \{t \in \mathbb{R} : A_t \text{ è finito}\} :$$

l'insieme B non è vuoto perché contiene a, ed è limitato superiormente da b, dunque ha estremo superiore $c \in \mathbb{R}$. Fissiamo un intorno $]H, K[$ di c, e scegliamo K' con $c < K' < K$: dato che $K' > c$, è $K' \notin B$, quindi $A_{K'}$ è infinito, ma questo insieme è contenuto in $\{x \in A : x < K\}$, che quindi è anch'esso infinito. D'altra parte $H < c$, quindi esiste $H' \in B$ con $H < H' \leq c$: allora $A_H \subset A_{H'}$ che è finito, quindi anche A_H è finito.

Allora l'insieme $A \cap]H, K[= \{x \in A : x < K\} \setminus A_H$ è la differenza fra un insieme infinito ed uno finito, pertanto è infinito: quello che ci importa è che contiene almeno due punti, quindi almeno uno di essi è diverso da c, e per definizione questo significa che c è un punto di accumulazione per A. ■

Una dimostrazione rapida di questa proposizione si ottiene applicando il teorema A3.4, dunque A contiene un insieme numerabile, che è immagine di una successione iniettiva per la proposizione 5.7. Questa ha almeno un'estratta che ha limite per la proposizione 5.43, e quest'ultimo è un punto di accumulazione dell'insieme di partenza.

Appendice 5.5 - Successioni a valori in uno spazio metrico

In generale, possiamo definire senza sforzo il concetto di limite per una successione a valori in uno spazio metrico, o più in generale in uno spazio topologico di Hausdorff (T, τ), dicendo che $a_n \to \ell \in T$ se e solo se

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n},\quad a_n \in U \tag{A5.1}$$

(se lo spazio non fosse di Hausdorff, potrebbe accadere che $a_n \to \ell$ e $a_n \to \ell'$ con $\ell \neq \ell'$, il che renderebbe poco interessante il concetto di limite).

Proposizione A5.8 : *se $\mathscr{B}_\ell$ è una base degli intorni di ℓ, la definizione* (A5.1) *è equivalente a*

$$\forall U \in \mathscr{B}_\ell,\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n},\quad a_n \in U .$$

Da questa proposizione segue subito la dimostrazione delle formule (5.3)...(5.8) nonché della formula (5.9): infatti, gli intervalli chiusi $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ sono una base di intorni di x_0 in $(\mathbb{R}, \epsilon)$.

Esempio : per una successione a valori in uno spazio metrico, $a_n \to \ell$ equivale a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n},\quad \mathrm{d}(a_n, \ell) < \varepsilon ,$$

ma questo significa che la successione di numeri reali non negativi $\{\mathrm{d}(a_n, \ell)\}_n$ è infinitesima, pertanto $a_n \to \ell$ equivale semplicemente a

$$\mathrm{d}(a_n, \ell) \to 0 .$$

Tra le proprietà della sezione 5.3, continuano a valere per successioni a valori in un generico spazio metrico il teorema di unicità del limite, la proposizione 5.13 e il suo corollario, oltre alla formula appena scritta che è l'analogo di (5.3). Ad eccezione della formula, queste proprietà valgono anche in uno spazio topologico di Hausdorff.

Appendice 5.6 - Limite di sottosuccessioni

Più in generale la proposizione 5.15 vale per un numero finito m di successioni.

Proposizione A5.9 : *se $k^1, \ldots, k^m$ sono applicazioni crescenti da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ tali che*

$$\bigcup_{i=1}^{m} k^i(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$$

e se esiste ℓ tale che

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\},\quad a_{k^i_n} \to \ell ,$$

allora $a_n \to \ell$.

DIMOSTRAZIONE : sia $U \in \mathscr{I}_\ell$; per ipotesi
$$\forall i \in \{1,\dots,m\},\ \exists \bar{n}_i : \forall n \geq \bar{n}_i,\ \ a_{k^i_n} \in U .$$
Poniamo $\bar{n} = \max\{k^1_{\bar{n}_1},\dots,k^m_{\bar{n}_m}\}$, e mostriamo che per $n \geq \bar{n}$ abbiamo $a_n \in U$: infatti, se $n \in \mathbb{N}$, sappiamo che
$$n \in \bigcup_{i=1}^{m} k^i(\mathbb{N}) ,$$
cioè
$$\exists i^* \in \{1,\dots,m\} : \quad n \in k^{i^*}(\mathbb{N}) ,$$
cioè di nuovo
$$\exists i^* \in \{1,\dots,m\} : \exists n^* : \quad n = k^{i^*}_{n^*} .$$
Se $n \geq \bar{n}$, per la scelta di $\bar{n}$ abbiamo che
$$n \geq k^{i^*}_{\bar{n}_{i^*}} ,$$
e quindi $n^* \geq \bar{n}_{i^*}$. Ma allora per l' ipotesi
$$a_n = a_{k^{i^*}_{n^*}} \in U ,$$
come volevamo dimostrare. ■

Appendice 5.7 - Proprietà delle successioni a valori in uno spazio metrico

Vediamo cosa si salva della sezione 5.4 in spazi diversi da $\mathbb{R}$; osserviamo che gran parte dei risultati usa le operazioni di somma e prodotto, che non hanno senso in un generico spazio metrico o topologico, pertanto si perdono di certo tutte le proprietà dal teorema 5.25 in poi. Per successioni a valori in uno spazio topologico non valgono neppure i risultati che lo precedono, ma qualcosa rimane se la successione è a valori in uno spazio metrico.

Definizione : *un sottoinsieme di uno spazio metrico si dice limitato se è contenuto in una palla.*

Non è difficile verificare che una successione definitivamente limitata è limitata, e che una successione convergente è limitata.

Il teorema di permanenza del segno viene sostituito dal seguente risultato fondamentale, che caratterizza i chiusi in uno spazio metrico.

Teorema A5.10 : *sia (E,d) uno spazio metrico e C un suo sottoinsieme; se $\{a_n\}_n$ è una successione a valori in C ed $a_n \to \ell$ allora $\ell \in \overline{C}$. Viceversa, per ogni $\ell \in \overline{C}$ esiste una successione $\{a_n\}_n$ a valori in C tale che $a_n \to \ell$.*

DIMOSTRAZIONE : se $a_n \to \ell$, in ogni intorno di ℓ cadono elementi della successione. che sono punti di C , dunque ℓ è aderente a C .

Per dimostrare il viceversa, se $\ell \in C$ basta prendere una successione costante, mentre se $\ell \in \overline{C} \setminus C$ scegliamo per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ un punto $a_n \in C \cap B_{1/n}(\ell)$, che non è vuoto, così che $\mathrm{d}(a_n,\ell) \to 0$. ■

I prossimi risultati si ottengono facilmente dal teorema precedente, usando anche l'esercizio 5.30.

Corollario A5.11 : *un sottoinsieme C di uno spazio metrico (E,d) è chiuso se e solo se per ogni successione $\{a_n\}_n$ a valori in C che converge ad $\ell \in E$ si ha $\ell \in C$.*

Corollario A5.12 : *se A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente ⟦inferiormente⟧ allora $\sup A \in \overline{A}$ ⟦ $\inf A \in \overline{A}$ ⟧.*

Corollario A5.13 : *un sottoinsieme chiuso, non vuoto e limitato superiormente ⟦inferiormente⟧ di $\mathbb{R}$ ha massimo ⟦minimo⟧.*

Appendice 5.8 - Esistenza di una estratta monotona

Non tutte le successioni a valori reali sono monotone, naturalmente, però vale il prossimo risultato.

Proposizione A5.14 : *ogni successione di numeri reali ha un'estratta monotona.*

DIMOSTRAZIONE : potremmo dimostrare questa proprietà senza usare il teorema di Bolzano-Weierstrass, ed ottenerne così per il teorema 5.40 una dimostrazione alternativa, tuttavia la dimostrazione ricalcherebbe in buona parte quella del teorema di Bolzano-Weierstrass stesso o quella dell'appendice 5.10.

Usiamo dunque la proposizione 5.43: la successione di partenza ha un'estratta che ha limite. Poiché un'estratta di un'estratta è un'estratta della successione di partenza, se proviamo che questa estratta (che ha limite) ha un'estratta monotona abbiamo provato la tesi. Allora, possiamo direttamente supporre che la successione di partenza abbia limite, $a_n \to \ell$.

Se frequentemente $a_n = \ell$, per il corollario 5.10 esiste un'estratta costante, quindi monotona; altrimenti, o frequentemente $a_n < \ell$ o frequentemente $a_n > \ell$ (o entrambi). Trattiamo solo il caso in cui frequentemente $a_n < \ell$, dato che l'altro è simile, e troveremo un'estratta crescente. Infatti, scegliamo una successione ℓ_n che cresce ad ℓ (ad esempio, $\ell_n = n$ se $\ell = +\infty$, ed $\ell_n = \ell - 1/n$ se $\ell \in \mathbb{R}$), ed osserviamo che gli insiemi

$$A_n = \{k : \ell_n < a_k < \ell\}$$

sono tutti infiniti (la prima disuguaglianza è vera definitivamente in k, la seconda frequentemente). Scelto $k_1 = \min A_1$ poniamo

$$A'_2 = \{k \in A_2 : k \geq 1 + k_1, a_k > a_{k_1}\} ,$$

osserviamo che A'_2 è infinito e poniamo $k_2 = \min A'_2$. Il seguito va fatto per induzione, proseguendo allo stesso modo, ed è per esercizio: la sottosuccessione $\{a_{k_n}\}_n$ è crescente, ed inoltre ha limite ℓ. ∎

Appendice 5.9 - Un'altra caratterizzazione della convergenza

Vediamo un altro risultato importante (per la teoria) sulla caratterizzazione della convergenza.

Teorema A5.15 : *se $\{a_n\}_n$ è una successione a valori in uno spazio topologico di Hausdorff (T, τ), sono equivalenti le due affermazioni seguenti:*
1) $\exists \ell \in T : a_n \to \ell$
2) $\exists \ell \in T : \forall \{a_{k_n}\}_n, \exists \{a_{k_{h_n}}\}_n : a_{k_{h_n}} \to \ell$,

ovvero una successione converge ad ℓ se e solo ogni sua estratta ha un'ulteriore estratta che converge ad ℓ.

Dimostrazione : un'implicazione è ovvia, perché se $a_n \to \ell$ tutte le sue estratte convergono ad ℓ per la proposizione 5.13; vediamo dunque il viceversa, e supponiamo che sia vera la seconda affermazione, ma non sia vero che $a_n \to \ell$. Allora per (A5.1) esiste un intorno $U \in \mathcal{I}_\ell$ tale che frequentemente $a_n \notin U$; per il corollario 5.9 esiste un'estratta di $\{a_n\}_n$ tale che

$$\forall n, \quad a_{k_n} \notin U ,$$

e per ipotesi questa deve avere un'ulteriore estratta $\{a_{k_{h_n}}\}_n$ che tende ad ℓ, ma questo è impossibile perché dovrebbe essere definitivamente $a_{k_{h_n}} \in U$. ∎

Appendice 5.10 - Teorema di Bolzano-Weierstrass e compattezza sequenziale

Diamo una diversa dimostrazione del teorema di Bolzano-Weierstrass, basata sul concetto di maggiorante definitivo.

Definizione : *si dice che $m \in \overline{\mathbb{R}}$ è un maggiorante definitivo della successione $\{a_n\}_n$ se definitivamente $a_n \leq m$.*

Osserviamo che, come i maggioranti, anche i maggioranti definitivi sono una semiretta di $\overline{\mathbb{R}}$; inoltre l'insieme dei maggioranti definitivi è non vuoto dato che contiene almeno $+\infty$.

Il massimo punto limite di una successione non è per forza un maggiorante della successione, e neppure un maggiorante definitivo (basta pensare ad una successione decrescente), però vale la seguente caratterizzazione.

Proposizione A5.16 : *sia $\overline{m}$ l'estremo inferiore dei maggioranti definitivi di una successione $\{a_n\}_n$; allora $\overline{m}$ è il più grande punto limite della successione, cioè*

$$\overline{m} = \max\lim_{n\to+\infty} a_n .$$

Osserviamo che questa proposizione dimostra l'esistenza del massimo limite, quindi in particolare di un punto limite: allora da essa otteniamo subito come corollario il teorema di Bolzano-Weierstrass.

Dimostrazione : dobbiamo provare due cose, e precisamente che $\overline{m}$ è un punto limite, e che non ve ne sono di più grandi. Cominciamo con la seconda: supponiamo che ℓ sia un punto limite, e sia $a_{k_n} \to \ell$; scelto un numero $c < \ell$ definitivamente $a_{k_n} > c$, quindi per infiniti indici n avremmo $a_n > c$, dunque c non è un maggiorante definitivo. Allora tutti i numeri minori di ℓ non sono maggioranti definitivi, pertanto $\ell \leq \overline{m}$.

Troviamo ora una sottosuccessione che ha come limite $\overline{m}$: se $\overline{m} > -\infty$, scegliamo una successione crescente $b_n \to \overline{m}$: poiché b_n non è un maggiorante definitivo, l'insieme $\{k : a_k > b_n\}$ è infinito (ovviamente lo stesso vale, con $b_n = -\infty$, nel caso $\overline{m} = -\infty$). Analogamente, se $\overline{m} < +\infty$, scegliamo una successione decrescente $c_n \to \overline{m}$: ogni c_n è un maggiorante definitivo (se $\overline{m} = +\infty$ basta scegliere $c_n = +\infty$), quindi definitivamente in k abbiamo $a_k < c_n$. Allora per ogni n l'insieme

$$A_n = \{k : b_n < a_k < c_n\}$$

è infinito, quindi per la proposizione 5.8 esiste una sottosuccessione tale che

$$b_n < a_{k_n} < c_n :$$

questa tende a $\overline{m}$ per il teorema dei carabinieri. ∎

È chiaro che un risultato simile vale per il minimo limite; riportiamo esplicitamente la caratterizzazione del massimo limite che si ottiene dalla proposizione precedente:

$$\xi = \max\lim_{n\to+\infty} a_n \iff \begin{cases} \forall\lambda > \xi, \text{ definitivamente } a_n < \lambda \\ \forall\eta < \xi, \text{ frequentemente } a_n > \eta\,. \end{cases}$$

Usando la caratterizzazione dei chiusi nello spazio metrico $\overline{\mathbb{R}}$ ottenuta nell'appendice 5.7 possiamo provare il prossimo risultato.

Proposizione A5.17 : *l'insieme dei punti limite di una successione a valori reali è un chiuso di* $\overline{\mathbb{R}}$.

DIMOSTRAZIONE : dobbiamo provare che se $\{\ell_n\}_n$ è una successione di punti limite di una data successione $\{a_n\}_n$, e se $\ell_n \to \ell$, allora anche ℓ è un punto limite, cioè c'è una sottosuccessione di $\{a_n\}_n$ che tende ad ℓ. Per semplicità ci limitiamo al caso $\ell \in \mathbb{R}$, lasciando i casi $\ell = \pm\infty$ per esercizio. Consideriamo la successione di intervalli aperti $I_n =]\ell - 1/n, \ell + 1/n[$, così che per ogni n l'intervallo I_n è un intorno di ℓ, e fissiamo n: poiché $\ell_k \to \ell$ ed I_n è un intorno di ℓ, definitivamente $\ell_k \in I_n$, quindi in particolare

$$\exists \bar{k}: \quad \ell_{\bar{k}} \in I_n\,.$$

Allora I_n, che è aperto, è un intorno anche di $\ell_{\bar{k}}$, il quale è un punto limite di $\{a_i\}_i$: pertanto, frequentemente a_i appartiene a questo intorno, cioè l'insieme

$$A_n = \{i : a_i \in I_n\}$$

è infinito. Per la proposizione 5.8 esiste una sottosuccessione $\{a_{k_n}\}_n$ tale che $a_{k_n} \in A_n$ per ogni n, cioè

$$\ell - \frac{1}{n} < a_{k_n} < \ell + \frac{1}{n}\,,$$

e la dimostrazione è conclusa. ■

Notiamo che nel corso della dimostrazione abbiamo in pratica provato anche la prossima proprietà (☞ esercizio 5.49).

Proposizione A5.18 : $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ *è punto limite di* $\{a_n\}_n$ *se e solo se per ogni* $U \in \mathscr{I}_\ell$ *frequentemente* $a_n \in U$.

Nelle dimostrazioni precedenti, e nella dimostrazione del teorema di Bolzano-Weierstrass 5.42, abbiamo usato pesantemente le proprietà d'ordine dei numeri reali. Quasi nulla di quanto abbiamo detto si può estendere ad un generico spazio metrico, o più in generale ad uno spazio topologico: solo gli ultimi due risultati valgono in uno spazio di Hausdorff che verifica il primo assioma di numerabilità.

Definizione : *uno spazio topologico* (T,τ) *si dice sequenzialmente compatto se da ogni successione a valori in* T *si può estrarre una sottosuccessione che converge ad un punto di* T. *Un sottoinsieme* K *di uno spazio topologico* (T,τ) *si dice sequenzialmente compatto se lo è* $(K, \tau|_K)$.

Esempio : con questa definizione, possiamo riformulare il teorema di Bolzano-Weierstrass dicendo che in $(\mathbb{R}, \epsilon)$ ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ è sequenzialmente compatto.

Esempio : lo spazio $(\mathbb{R}, \epsilon)$ non è sequenzialmente compatto, perché dalla successione $a_n = n$ non si può estrarre alcuna sottosuccessione che converge ad un punto di $\mathbb{R}$.

Esempio : lo spazio $\overline{\mathbb{R}}$ con la topologia indotta dalla metrica (A4.3) è sequenzialmente compatto, per la proposizione 5.43.

Teorema A5.19 : *un sottoinsieme di* $(\mathbb{R}, \epsilon)$ *è sequenzialmente compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

DIMOSTRAZIONE : proviamo che se K è chiuso e limitato allora è sequenzialmente compatto. Dato che K è limitato, è contenuto in un intervallo $[a,b]$; se $\{a_n\}_n$ è a valori in K, è compresa tra a e b, quindi ha un'estratta convergente. Poiché K è chiuso, il limite di questa successione appartiene anch'esso a K, per la caratterizzazione data nell'appendice 5.7, dunque K è sequenzialmente compatto.

Proviamo il viceversa: se K è sequenzialmente compatto e $\{a_n\}_n$ è una successione di punti di K con $a_n \to \ell$, per la sequenziale compattezza un'estratta converge a un punto di K, ma questo limite non può essere che ℓ per la proposizione 5.13, quindi $\ell \in K$ e per la caratterizzazione dei chiusi K è chiuso. Infine, se K non è limitato è facile costruire (per esercizio) una successione di punti di K che diverge, quindi non converge ad alcun punto di K. ■

Teorema A5.20 : *il prodotto di due spazi sequenzialmente compatti, dotato della topologia prodotto, è sequenzialmente compatto.*

DIMOSTRAZIONE : se $\{x_n\}_n$ è una successione in $T_1 \times T_2$, con $x_n = (x_n^1, x_n^2)$, possiamo estrarre dalla successione $\{x_n^1\}_n$ una sottosuccessione $x_{k_n}^1 \to x^1$ in T_1, poi dalla successione $\{x_{k_n}^2\}_n$ possiamo estrarre un'ulteriore sottosuccessione $x_{k_{h_n}}^2 \to x^2$ in T_2. Allora la successione $\{x_{k_{h_n}}\}_n$ converge a $x = (x^1, x^2)$. ■

Poiché questo teorema si estende al prodotto di un numero finito di sequenzialmente compatti, un rettangolo chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$ (cioè il prodotto di n intervalli chiusi e limitati) è sequenzialmente compatto. Per esercizio, potete provare che un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è sequenzialmente compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Appendice 5.11 - Massimo e minimo limite di una successione

Abbiamo già mostrato nell'appendice 5.10 l'esistenza del massimo e del minimo limite. Poniamo

$$\ell'' = \limsup_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right) = \lim_{n\to+\infty} a''_n = \inf_n a''_n ,$$

e mostriamo che questo coincide con il massimo limite. Dato che la successione $\{a''_n\}_n$ è debolmente decrescente, abbiamo:

a) se $m > \ell''$, definitivamente $a''_n < m$, quindi per definizione di a''_n definitivamente $a_n < m$, cioè m è un maggiorante definitivo;

b) se $m < \ell''$, per ogni n è $a''_n > m$, quindi esiste $k \geq n$ tale che $a_k > m$, vale a dire frequentemente $a_n > m$, ed m non è un maggiorante definitivo.

Allora ℓ'' è l'estremo inferiore dei maggioranti definitivi, cioè coincide con il massimo limite. In modo analogo si vede che $\liminf = \min\lim$.

Vediamo qualche interessante proprietà del massimo e del minimo limite.

Proposizione A5.21 : *per ogni successione* $\{a_n\}_n$ *si ha*

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

e

$$\liminf_{n\to+\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to+\infty} a_n ; \tag{A5.2}$$

inoltre per ogni estratta si ha

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \liminf_{n\to+\infty} a_{k_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} a_{k_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n .$$

La prima proprietà è immediata, e la seconda è facile; per provare l'ultima relazione, basta osservare che (☞ proposizione 5.6)

$$\{a_{k_i} : i \geq n\} \subset \{a_i : i \geq n\}$$

ed applicare la proposizione 3.18 e il teorema di confronto.

Proposizione A5.22 : *se* $\{a_n\}_n$ *e* $\{b_n\}_n$ *sono due successioni,*

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n + \liminf_{n\to+\infty} b_n \leq \liminf_{n\to+\infty}(a_n + b_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} a_n + \limsup_{n\to+\infty} b_n$$

e

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n + \limsup_{n\to+\infty} b_n \leq \limsup_{n\to+\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n + \limsup_{n\to+\infty} b_n .$$

La seconda relazione si ricava dalla prima passando agli opposti e usando (A5.2), e la prima è un interessante esercizio sulle caratterizzazioni degli estremi inferiore e superiore. Infine, facciamo un'osservazione elementare.

Osservazione : se $a_n \geq 0$, allora $\{a_n\}_n$ è infinitesima se e solo se

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = 0 .$$

Appendice 5.12 - Densità dei numeri della forma $px + qy$

Dimostriamo la proposizione 5.46; proviamo che L è un gruppo rispetto alla somma, poi (e qui entra il rapporto irrazionale) che contiene numeri positivi arbitrariamente piccoli, infine che è denso.

Per mostrare che L è un sottogruppo di $\mathbb{R}$ basta mostrare che se $a_1, a_2 \in L$ allora $a_1 - a_2 \in L$; ma se $a_1, a_2 \in L$ allora

$$a_1 = p_1x + q_1y , \qquad a_2 = p_2x + q_2y$$

con $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, quindi

$$a_1 - a_2 = (p_1 - p_2)x + (q_1 - q_2)y$$

appartiene ad L perché $p_1 - p_2 \in \mathbb{Z}$ e $q_1 - q_2 \in \mathbb{Z}$.

La rappresentazione degli elementi di L come $px + qy$ è unica, cioè

$$[px + qy = p'x + q'y \ , \ \text{con } p, p', q, q' \in \mathbb{Z}] \quad\Rightarrow\quad [p = p' \ , \ q = q'] .$$

Infatti da $px + qy = p'x + q'y$ ricaviamo

$$(p - p')\frac{x}{y} = q' - q :$$

se $p = p'$ allora anche $q = q'$, mentre se $p \neq p'$ avremmo

$$\frac{x}{y} = \frac{q' - q}{p - p'} \in \mathbb{Q} ,$$

contro l'ipotesi che $(x/y) \notin \mathbb{Q}$.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$, vi sono $2k + 1$ numeri interi con valore assoluto non superiore a k, pertanto l'insieme

$$L_k = \{px + qy : |p| \leq k, \ |q| \leq k\}$$

contiene esattamente $(2k + 1)^2$ elementi, tanti quante sono le coppie di numeri interi entrambi con valore assoluto non superiore a k (questo è falso se x/y è razionale: provate con $x = y = k = 1$). D'altra parte il più grande e il più piccolo elemento di L_k

sono rispettivamente $k(|x|+|y|)$ e $-k(|x|+|y|)$, quindi la loro distanza è $2k(|x|+|y|)$. Posto

$$\delta_k = \frac{2k(|x|+|y|)}{(2k+1)^2-1} ,$$

in L_k vi devono essere due elementi che non distano più di δ_k : infatti, ordinando gli elementi di L_k come $a_1 = -k(|x|+|y|) < a_2 < \cdots < a_{(2k+1)^2} = k(|x|+|y|)$, per la disuguaglianza triangolare abbiamo

$$2k(|x|+|y|) = |a_1 - a_{(2k+1)^2}| \le |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_{(2k+1)^2-1} - a_{(2k+1)^2}| ,$$

e se tutti questi addendi (che sono $(2k+1)^2-1$) fossero minori di δ_k avremmo l'assurdo $2k(|x|+|y|) < 2k(|x|+|y|)$. Allora vi sono due elementi in L_k la cui differenza è positiva ma minore di δ_k ; poiché $L_k \subset L$, ed L è un sottogruppo di $\mathbb{R}$, la differenza fra questi elementi appartiene ad L , dunque per ogni k l'insieme L contiene qualche numero positivo minore di δ_k .

Osserviamo che $\lim_{k\to+\infty} \delta_k = 0$, pertanto possiamo dire che

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a_\varepsilon \in L: \quad 0 < a_\varepsilon < \varepsilon .$$

La densità di L si ottiene allora come abbiamo fatto per quella di $\mathbb{Q}$ (☞ proposizione 3.29).

Appendice 5.13 - Spazi metrici completi; completamento

Il concetto di successione di Cauchy non ha senso negli spazi topologici, ma si può riproporre negli spazi metrici.

Definizione : *si dice che una successione* $\{a_n\}_n$ *a valori nello spazio metrico* (E, d) *è di Cauchy se*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{n} : \forall m, n \ge \bar{n}, \quad \mathrm{d}(a_n, a_m) < \varepsilon .$$

Osservazione : con la caratterizzazione del massimo limite si dimostra facilmente che una successione è di Cauchy se e solo se

$$\limsup_{n\to+\infty} \limsup_{m\to+\infty} \mathrm{d}(a_n, a_m) = 0 .$$

È immediato verificare che in qualsiasi spazio metrico una successione convergente è di Cauchy; il viceversa non è sempre vero.

Esempio : nello spazio metrico $\mathbb{R}^+$ la successione $1/n$ è di Cauchy perché

$$n, m \ge \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \le \frac{1}{\bar{n}} ,$$

ma non è una successione convergente (in $\mathbb{R}$ converge a 0 , ma $0 \notin \mathbb{R}^+$).

Definizione : *si dice che uno spazio metrico* (E, d) *è completo se ogni successione di Cauchy a valori in* E *converge a qualche punto di* E .

Esempio : in virtù del teorema 5.48 lo spazio metrico $\mathbb{R}$ è completo.

Per la caratterizzazione dei chiusi in uno spazio metrico, abbiamo subito il seguente risultato.

Proposizione A5.23 : *un sottoinsieme chiuso di uno spazio metrico completo è completo.*

Abbiamo visto che $\mathbb{R}^+$ non è completo, tuttavia la sua chiusura in $\mathbb{R}$, che è $[0, +\infty[$, è un chiuso e quindi è completo. È chiaro che questo è il più piccolo spazio completo che contiene $\mathbb{R}^+$.

Anche $\mathbb{Q}$ non è completo: presa una qualsiasi successione di numeri razionali che converge (in $\mathbb{R}$) ad un numero irrazionale, questa è di Cauchy, ma non converge in $\mathbb{Q}$. Lo spazio $\mathbb{R}$ è completo, e contiene $\mathbb{Q}$; sarà il più piccolo spazio completo che lo contiene? In generale, dato uno spazio metrico, sarà possibile determinare il più piccolo spazio metrico completo che lo contiene, o almeno qualche spazio metrico completo che lo contiene? La domanda è delicata: tanto per cominciare, non è del tutto vero che $\mathbb{R}$ contiene $\mathbb{Q}$, ma contiene $\mathscr{I}_{\mathbb{Q}\to\mathbb{R}}(\mathbb{Q})$; poi, come avremmo fatto a rispondere se non avessimo avuto già a diposizione i numeri reali? La risposta a questo problema è molto interessante, anche se un po' tecnica.

Definizione : *un'isometria è un'applicazione biunivoca* f *tra due spazi metrici* (E_1, d_1) *ed* (E_2, d_2) *che preserva la distanza, tale cioè che*

$$\forall x, y \in E_1, \quad \mathrm{d}_2(f(x), f(y)) = \mathrm{d}_1(x, y) .$$

Se esiste una tale applicazione i due spazi si dicono isometrici.

Per due spazi metrici, dire che sono isometrici è un po' come dire che sono lo stesso spazio, con il nome cambiato; in particolare, dire che uno spazio metrico è isometrico a un sottoinsieme di un altro spazio metrico è molto prossimo a dire che il primo è contenuto nel secondo.

Esempio : le isometrie tra $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^2$ con la distanza euclidea sono tutte e sole le composizioni di una traslazione, una rotazione ed eventualmente un ribaltamento (non è ovvio).

Teorema A5.24 : *sia* (E, d) *uno spazio metrico; esistono uno spazio metrico* $(\overline{E}, \overline{\mathrm{d}})$ *ed un'applicazione* $f : E \to \overline{E}$ *con le seguenti proprietà:*
1) $(\overline{E}, \overline{\mathrm{d}})$ *è completo;*
2) f *è un'isometria fra* E *ed* $f(E)$;
3) *se esistono uno spazio metrico* (E', d') *ed un'applicazione* $f' : E \to E'$ *che verificano 1) e 2), allora* $\overline{E}$ *è isometrico ad un sottoinsieme di* E' .

Lo spazio $(\overline{E}, \overline{\mathrm{d}})$ *si dice completamento di* (E, d) .

La dimostrazione è piuttosto complicata; osserviamo che questo teorema ci fornisce un altro modo per costruire i numeri reali. Per capire la prima parte, fate uso della conoscenza che già avete dei numeri reali, immaginando $\mathbb{Q}$ al posto di E , e seguendo i consigli *[tra parentesi quadre]*.

DIMOSTRAZIONE : consideriamo l'insieme C delle successioni di Cauchy a valori in E *[nel caso* $E = \mathbb{Q}$, *ciascuna converge in* $\mathbb{R}$ *]*; prese due di queste successioni, osserviamo che esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}(a_n, b_n)$$

[sarà la distanza in $\mathbb{R}$ *tra i due limiti]*. Infatti, posto $\delta_n = \mathrm{d}(a_n, b_n)$ abbiamo per la disuguaglianza triangolare

$$\delta_n - \delta_m \le \big(\mathrm{d}(a_n, a_m) + \mathrm{d}(a_m, b_m) + \mathrm{d}(b_m, b_n)\big) - \mathrm{d}(a_m, b_m) = \mathrm{d}(a_n, a_m) + \mathrm{d}(b_m, b_n) ,$$

e anche

$$\delta_m - \delta_n \le \mathrm{d}(a_n, a_m) + \mathrm{d}(b_m, b_n) ,$$

quindi

$$|\delta_n - \delta_m| \le \mathrm{d}(a_n, a_m) + \mathrm{d}(b_m, b_n)$$

da cui

$$\limsup_{n\to+\infty} \limsup_{m\to+\infty} |\delta_n - \delta_m| \le 0 ;$$

allora la successione $\{\delta_n\}_n$ è una successione di Cauchy di numeri reali, e pertanto converge.

Sull'insieme C definiamo la seguente relazione:

$$\{a_n\}_n \simeq \{b_n\}_n \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}(a_n, b_n) = 0$$

[il limite è zero se e solo se le due hanno lo stesso limite in $\mathbb{R}$ *]*: questa è di equivalenza (dimostrazione per esercizio). Poniamo

$$\overline{E} = C/\simeq$$

[identifichiamo tutte le successioni che hanno lo stesso limite: quello che rimane sono i possibili limiti, cioè tutti i numeri reali], e definiamo una distanza in $\overline{E}$: se $a, b \in \overline{E}$, con $a = [\{a_n\}_n]$ e $b = [\{b_n\}_n]$, poniamo

$$\overline{\mathrm{d}}(a, b) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}(a_n, b_n) .$$

Occorre verificare (per esercizio) che questa è ben definita, cioè che se $[\{a_n\}_n] = [\{a'_n\}_n]$ e $[\{b_n\}_n] = [\{b'_n\}_n]$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}(a_n, b_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}(a'_n, b'_n) ,$$

quindi la funzione $\overline{\mathrm{d}}$ dipende solo dalle classi di equivalenza, e non dai particolari rappresentanti; poi, occorre verificare che è una distanza (fatelo per esercizio).

Osserviamo che E è isometrico ad un sottoinsieme di $\overline{E}$, quello delle classi di equivalenza delle successioni costanti di E (che sono certamente di Cauchy): l'applicazione f manda dunque $a \in E$ nella classe di equivalenza $f(a)$ della successione che vale costantemente a ; è immediato verificare che f è un'isometria.

Osserviamo (sarà fondamentale nel seguito) che se $a = [\{a_n\}_n]$ allora

$$a = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) :$$

infatti

$$\limsup_{n\to+\infty} \overline{\mathrm{d}}(a, f(a_n)) = \limsup_{n\to+\infty} \limsup_{m\to+\infty} \mathrm{d}(a_m, a_n) = 0$$

perché $\{a_n\}_n$ è di Cauchy, quindi per l'ultima osservazione dell'appendice 5.11 abbiamo $\overline{\mathrm{d}}(a, f(a_n)) \to 0$.

Mostriamo che $(\overline{E}, \overline{\mathrm{d}})$ è completo: presa una successione di Cauchy in $\overline{E}$, cioè una successione di Cauchy di classi di equivalenza di successioni di Cauchy in E , proviamo che converge (questo passo è il più complicato). Sia $\{a^n\}_n$ una successione di Cauchy in $\overline{E}$, e per ogni n sia $a^n = [\{a^n_k\}_k]$. Poiché $f(a^n_k) \to a^n$ per $k \to +\infty$, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esisterà un indice k_n tale che

$$\overline{\mathrm{d}}(a^n, f(a^n_{k_n})) < \frac{1}{n} .$$

Ora la successione $\{a^n_{k_n}\}_n$ è di Cauchy in E , perché

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(a^n_{k_n}, a^m_{k_m}) &= \overline{\mathrm{d}}(f(a^n_{k_n}), f(a^m_{k_m})) \\ &\le \overline{\mathrm{d}}(f(a^n_{k_n}), a^n) + \overline{\mathrm{d}}(a^n, a^m) + \overline{\mathrm{d}}(a^m, f(a^m_{k_m})) \\ &\le \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \overline{\mathrm{d}}(a^n, a^m) , \end{aligned}$$

quindi

$$\limsup_{n\to+\infty} \limsup_{m\to+\infty} \mathrm{d}(a^n_{k_n}, a^m_{k_m}) \le \limsup_{n\to+\infty} \limsup_{m\to+\infty} \overline{\mathrm{d}}(a^n, a^m) = 0 .$$

Visto che $\{a^n_{k_n}\}_n$ è di Cauchy in E , poniamo $a = [\{a^n_{k_n}\}_n]$, e mostriamo che $a^n \to a$: abbiamo infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{\mathrm{d}}(a^n, a) \le \lim_{n\to+\infty} \Big(\overline{\mathrm{d}}(a^n, f(a^n_{k_n})) + \overline{\mathrm{d}}(f(a^n_{k_n}), a)\Big) \le \lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{1}{n} + \overline{\mathrm{d}}(f(a^n_{k_n}), a)\Big) = 0 ,$$

perché $f(a^n_{k_n}) \to a$.

Dell'ultima parte diamo solo la traccia, e usiamo la parola "contiene" per nascondere varie isometrie che sarebbero necessarie: se (E', d') è un altro completamento di E , questo "contiene" E , quindi "contiene" le successioni di Cauchy di elementi di E , ed essendo completo "contiene" i loro limiti, che sono essenzialmente gli elementi di $\overline{E}$. ■

Osservazione : l'insieme dei numeri reali può essere introdotto anche come completamento di $\mathbb{Q}$ (metodo di Cauchy), e le operazioni sono definite come il limite dei risultati dell'operazione corrispondente su di una successione razionale approssimante.

Appendice 5.14 - Teoremi di Cesàro

Vediamo qualche altro dei teoremi di Cesàro, come quello sulle medie aritmetiche; usando il massimo e il minimo limite, si può enunciare la proposizione 5.52 senza richiedere l'esistenza del limite di $\{a_n\}_n$.

Proposizione A5.25 : *posto*

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

si ha

$$\min\lim_{n\to+\infty} a_n \le \min\lim_{n\to+\infty} \sigma_n\ , \qquad \max\lim_{n\to+\infty} \sigma_n \le \max\lim_{n\to+\infty} a_n\ .$$

In particolare, se $\{a_n\}_n$ *ha limite allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} a_n\ .$$

DIMOSTRAZIONE : la prima relazione si ottiene dalla seconda passando agli opposti. Se $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ la seconda relazione è ovvia; altrimenti, scelto un maggiorante definitivo $m \in \mathbb{R}$ di $\{a_n\}_n$, cioè un numero reale tale che

$$\forall i \ge \bar{n}, \quad a_i \le m\ ,$$

abbiamo per $n \ge \bar{n}$

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\bar{n}-1} a_i + \frac{1}{n}\sum_{i=\bar{n}}^{n} a_i \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\bar{n}-1} a_i + m\Big(1 - \frac{\bar{n}-1}{n}\Big)$$

e prendendo i massimi limiti per $n \to +\infty$ abbiamo

$$\max\lim_{n\to+\infty} \sigma_n \le m\ ,$$

da cui la tesi prendendo l'estremo inferiore al variare di m . ∎

Corollario A5.26 : *si ha*

$$\min\lim_{n\to+\infty}(a_n - a_{n-1}) \le \min\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}\ , \qquad \max\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} \le \max\lim_{n\to+\infty}(a_n - a_{n-1})\ .$$

In particolare, se $\{a_n - a_{n-1}\}_n$ *ha limite allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to+\infty}(a_n - a_{n-1})\ .$$

La dimostrazione si ottiene dalla proposizione precedente applicata alla successione $b_n = a_n - a_{n-1}$: infatti

$$\frac{a_n}{n} = \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} + \frac{a_0}{n}\ .$$

Proposizione A5.27 : *se la successione* $\{b_n\}_n$ *è strettamente monotona e divergente*

$$\min\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \le \min\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}\ , \qquad \max\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \le \max\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}\ .$$

In particolare, se esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}\ .$$

DIMOSTRAZIONE : trattiamo solo il caso in cui $\{b_n\}_n$ cresce a $+\infty$, dato che l'altro si ricava passando agli opposti. La prima relazione si ricava in modo analogo alla seconda (la dimostrazione va ripetuta, oppure bisogna trattare anche il caso in cui $\{b_n\}_n$ decresce a $-\infty$).

Per la monotonia, $b_n - b_{n-1} > 0$; scelto come prima un maggiorante definitivo $m \in \mathbb{R}$ della successione $(a_n - a_{n-1})/(b_n - b_{n-1})$, abbiamo

$$\forall i \ge \bar{n}, \quad a_i - a_{i-1} \le m(b_i - b_{i-1})\ ,$$

quindi sommando per $\bar{n} \le i \le n$

$$\forall n \ge \bar{n}, \quad a_n - a_{\bar{n}-1} \le m(b_n - b_{\bar{n}-1})$$

e dividendo per b_n (che possiamo supporre positiva, eventualmente aumentando $\bar{n}$)

$$\forall n \ge \bar{n}, \quad \frac{a_n}{b_n} \le \frac{a_{\bar{n}-1} - m b_{\bar{n}-1}}{b_n} + m\ ,$$

pertanto, visto che $b_n \to +\infty$, per $n \to +\infty$ otteniamo

$$\max\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \le m\ ,$$

e dunque la tesi. ∎

Osserviamo che la proposizione A5.25 è un caso particolare di questa, con $b_n = n$ e σ_n al posto di a_n. In modo non molto diverso dal precedente potete poi provare il prossimo enunciato.

Proposizione A5.28 : *se* $\{a_n\}_n$ *è infinitesima, e* $\{b_n\}_n$ *è infinitesima e strettamente monotona, allora valgono i risultati della proposizione precedente.*

Notiamo che l'ipotesi che $\{a_n\}_n$ sia infinitesima è indispensabile, come si vede considerando $a_n = 1$ e $b_n = 1/n$: abbiamo

$$\frac{a_n}{b_n} \to +\infty\,, \qquad \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \to 0\,.$$

Il prossimo risultato riguarda non le medie aritmetiche, bensì quelle geometriche.

Proposizione A5.29 : *se* $\{a_n\}_n$ *è una successione di numeri positivi allora*

$$\min\lim_{n\to+\infty} a_n \le \min\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\,, \qquad \max\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \le \max\lim_{n\to+\infty} a_n\,.$$

In particolare, se $\{a_n\}_n$ *ha limite allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} = \lim_{n\to+\infty} a_n\,.$$

DIMOSTRAZIONE : posto

$$\alpha_n = \log a_n$$

abbiamo

$$\log\Big(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\Big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,,$$

da cui si ottiene subito la tesi applicando la proposizione A5.25 grazie al fatto che

$$\max\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_n \sup_{k\ge n} a_k$$

e alla crescenza del logaritmo. ∎

Anche questo risultato, come il primo, ha il suo corollario, che potete dimostrare per esercizio usando la successione dei rapporti e dal quale segue la proposizione 5.51.

Corollario A5.30 : *se* $\{a_n\}_n$ *è una successione di numeri positivi allora*

$$\min\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} \le \min\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}\,, \qquad \max\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \max\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}\,.$$

In particolare, se esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}\,.$$

Terminiamo con alcuni esempi di applicazioni dei risultati precedenti.

Esempio : applicando la proposizione 5.52 abbiamo subito che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n} = \lim_{n\to+\infty} n^\alpha\,.$$

Esempio : se $\beta > 0$, usando la proposizione A5.27 possiamo ricondurre il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^\beta}$$

al limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta - (n-1)^\beta}\,.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} n^\beta - (n-1)^\beta &= e^{\beta\log n} - e^{\beta\log(n-1)} \\ &= (n-1)^\beta\big(e^{\beta(\log n - \log(n-1))} - 1\big) \\ &= (n-1)^\beta\, \frac{e^{\beta(\log n - \log(n-1))} - 1}{\beta(\log n - \log(n-1))}\, \beta(\log n - \log(n-1)) \\ &= \beta(n-1)^\beta\, \frac{e^{\beta(\log n - \log(n-1))} - 1}{\beta(\log n - \log(n-1))}\, \frac{\log\big(1+\frac{1}{n-1}\big)}{1/(n-1)}\, \frac{1}{n-1}\,. \end{aligned}$$

Per le proprietà (5.37) e (5.41) il limite di partenza è uguale a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{\beta(n-1)^\beta\,\frac{1}{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\beta}\, n^{\alpha-\beta+1}\,,$$

che si calcola immediatamente in funzione di α e β.

Esempio : proseguendo sulla strada di (5.18) e (5.20), dimostriamo che

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}\to-\frac{1}{6}$$

(questo si prova facilmente usando il teorema di de l'Hôpital 7.26, del quale in effetti la proposizione A5.28 è un analogo "discreto"). Per la proposizione A5.28 possiamo ridurci a calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}-\operatorname{sen}\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}}{\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(n-1)^3}}\,.$$

Dato che

$$\operatorname{sen}(a+b)-\operatorname{sen}(a-b)=2\cos a\operatorname{sen}b\,,$$

determinando a e b in modo che $a+b=1/n$ e $a-b=1/(n-1)$ abbiamo

$$\operatorname{sen}\frac{1}{n}-\operatorname{sen}\frac{1}{n-1}=-2\cos\frac{2n-1}{2(n^2-n)}\operatorname{sen}\frac{1}{2(n^2-n)}\,,$$

quindi il limite diviene

$$2\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{2(n^2-n)}-\cos\dfrac{2n-1}{2(n^2-n)}\operatorname{sen}\dfrac{1}{2(n^2-n)}}{\dfrac{-3n^2+3n-1}{(n^2-n)^3}}$$

$$=-\frac{2}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{2(n^2-n)}-\cos\dfrac{2n-1}{2(n^2-n)}\operatorname{sen}\dfrac{1}{2(n^2-n)}}{\dfrac{-3n^2+3n-1}{-3n^2}\cdot\dfrac{n^2}{(n^2-n)^3}}$$

$$=-\frac{2}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{2(n^2-n)}-\cos\dfrac{2n-1}{2(n^2-n)}\operatorname{sen}\dfrac{1}{2(n^2-n)}}{\dfrac{n^2}{(n^2-n)^3}}\,.$$

Aggiungiamo e sottraiamo al numeratore la quantità

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2(n^2-n)}\,,$$

così il limite diviene

$$-\frac{2}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2(n^2-n)}-\operatorname{sen}\frac{1}{2(n^2-n)}}{\frac{n^2}{(n^2-n)^3}}-\frac{2}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos\frac{2n-1}{2(n^2-n)}}{\frac{n^2}{(n^2-n)^3}}\operatorname{sen}\frac{1}{2(n^2-n)}\,;$$

il primo limite è uguale a

$$-\frac{2}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2(n^2-n)}-\operatorname{sen}\frac{1}{2(n^2-n)}}{\left(\frac{1}{2(n^2-n)}\right)^2\frac{4n^2}{n^2-n}}=-\frac{1}{6}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2(n^2-n)}-\operatorname{sen}\frac{1}{2(n^2-n)}}{\left(\frac{1}{2(n^2-n)}\right)^2}=0$$

perché si tratta di un'estratta della successione

$$\frac{\frac{1}{n}-\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}$$

che sappiamo essere infinitesima per (5.20). Invece possiamo scrivere il secondo limite

$$-\frac{2}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos\frac{2n-1}{2(n^2-n)}}{\frac{2n^2}{(n^2-n)^2}}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2(n^2-n)}}{\frac{1}{2(n^2-n)}}=-\frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos\frac{2n-1}{2(n^2-n)}}{\left(\frac{2n-1}{2(n^2-n)}\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{2n-1}{2(n^2-n)}\right)^2}{\frac{n^2}{(n^2-n)^2}}\,.$$

L'ultima frazione tende ad 1, mentre quella prima tende a $1/2$ per (5.19), e la dimostrazione è conclusa.

Appendice 5.15 - Decrescenza di $(1+1/n)^{n+1}$

Proviamo che la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è decrescente. La disuguaglianza

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

equivale a

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}>\frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+2}}\iff\frac{(n+1)^{2n+3}}{n^{n+1}(n+2)^{n+2}}>1$$

$$\iff\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}>1\,,$$

ma

$$\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=1+\frac{1}{n(n+2)}\,,$$

e per la disuguaglianza di Bernoulli

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}\geq1+\frac{n+1}{n(n+2)}=\frac{n^2+3n+1}{n^2+2n}\,,$$

quindi

$$\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}\geq\frac{n+1}{n+2}\,\frac{n^2+3n+1}{n^2+2n}=\frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n}>1\,,$$

e la dimostrazione è conclusa.

Appendice 5.16 - Proprietà della funzione esponenziale

Dimostriamo le affermazioni sulla funzione esponenziale enunciate nel testo. Un punto essenziale per stimare la somma $b_0+\cdots+b_n$ era l'osservazione, dimostrata per induzione, che $k! \geq 2^{k-1}$; notiamo che per ogni $M > 0$, da (5.23) segue

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k!}{M^k} = +\infty ,$$

perciò definitivamente

$$\frac{k!}{M^k} \geq 1 ,$$

e quindi

$$\forall M > 0,\ \exists \bar{k} : \forall k \geq \bar{k}, \quad k! \geq M^k .$$

Dimostrazione della proposizione 5.56 : lavoriamo per il momento solo per $x > 0$. Se allora scriviamo

$$e_n(x) = 1 + x + \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!} P_{k,n} ,$$

possiamo osservare come nella dimostrazione della proposizione 5.53 che $\{e_n(x)\}_n$ è crescente, perché i coefficienti $x^k/k!$ sono positivi, che

$$e_n(x) \leq b_n(x)$$

e che, per l'osservazione fatta prima con $M = 2x$, per ogni $n \geq \bar{k}$

$$b_n(x) \leq \sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=\bar{k}}^{n} \frac{x^k}{(2x)^k} \leq \sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 + \sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \frac{x^k}{k!} ,$$

cioè $\{b_n(x)\}$, e quindi $\{e_n(x)\}$, è limitata superiormente. Dato che $\{b_n(x)\}_n$ è chiaramente crescente, entrambe le successioni convergono per ogni $x > 0$, e

$$\ell(x) = \lim_{n\to+\infty} e_n(x) \leq \lim_{n\to+\infty} b_n(x) ;$$

ragionando esattamente come nella proposizione 5.55 si prova che i due limiti sono uguali. Notiamo poi che per la monotonia

$$\forall x > 0, \quad e_n(x) \geq e_1(x) = 1 + x > 1 . \tag{A5.3}$$

Passiamo ora al caso $x < 0$; tenendo presente che allora $-x > 0$ e quindi $e_n(-x) > 1$, possiamo scrivere

$$e_n(x) = \frac{e_n(x)e_n(-x)}{e_n(-x)} .$$

Dato che il denominatore tende a $\ell(-x)$, ci basta mostrare che il numeratore converge; proviamo che tende ad 1 : essendo $e_n(x)e_n(-x) = (1 - x^2/n^2)^n$, da un lato definitivamente (se $n > |x|$) abbiamo $0 < 1 - x^2/n^2 < 1$ e quindi $e_n(x)e_n(-x) < 1$, e dall'altro per la disuguaglianza di Bernoulli (ancora se $n > |x|$) abbiamo $e_n(x)e_n(-x) > 1 - x^2/n$. Da

$$1 - \frac{x^2}{n} < e_n(x)e_n(-x) < 1$$

ricaviamo allora per il teorema dei carabinieri $\big(e_n(x)e_n(-x)\big) \to 1$, e quindi per ogni $x < 0$

$$e_n(x) \to \ell(x) = \frac{1}{\ell(-x)} .$$

Osserviamo subito che questa uguaglianza, unita alla disuguaglianza (A5.3), dà

$$\forall x < 0, \quad 0 < \ell(x) < 1 ,$$

e in particolare $\ell(x) > 0$ per ogni x .

La dimostrazione del fatto che $\{b_n(x)\}_n$ converge anche per $x < 0$ e che ha lo stesso limite di $\{e_n(x)\}_n$ sarebbe a questo punto piuttosto tecnica, e non molto istruttiva, pertanto la omettiamo.

Una dimostrazione rapida si ottiene usando la teoria delle serie, e precisamente, ☞ formula (9.6), mostrando che $\{b_n(x)\}_n$ è una serie assolutamente convergente, e provando, con il prodotto di Cauchy di due serie, che detta $\beta(x)$ la sua somma si ha $\beta(x) = 1/\beta(-x)$; però sappiamo che $\beta(x) = \ell(x)$ per $x > 0$, pertanto le due funzioni coincidono anche sui negativi. ■

Dimostrazione della proposizione 5.57 : abbiamo già osservato che $\ell(x)$ è positiva; fissati $x_1 < x_2$, per $n > -x_1$ avremo $e_n(x_1) > 0$, quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} e_n(x_2) - e_n(x_1) &= e_n(x_1)\Big(\frac{e_n(x_2)}{e_n(x_1)} - 1\Big) \\ &= e_n(x_1)\Big[\Big(\frac{n+x_2}{n+x_1}\Big)^n - 1\Big] \\ &= e_n(x_1)\Big[\Big(1 + \frac{x_2 - x_1}{n+x_1}\Big)^n - 1\Big] . \end{aligned}$$

L'ultima frazione fra parentesi è positiva, quindi per la disuguaglianza di Bernoulli

$$e_n(x_2) - e_n(x_1) \geq e_n(x_1)\frac{n(x_2 - x_1)}{n + x_1} ,$$

da cui per $n \to +\infty$

$$\ell(x_2) - \ell(x_1) \geq \ell(x_1)(x_2 - x_1) .$$

Potete provare per esercizio l'altra disuguaglianza, che è simile.

Dalla positività e da (5.33) segue la stretta monotonia: se $x_2 > x_1$ allora $\ell(x_2) - \ell(x_1) \geq \ell(x_1)(x_2 - x_1) > 0$.

Osserviamo poi che da (5.33) segue che se $x_1, x_2 \le M$ allora
$$|\ell(x_2) - \ell(x_1)| \le \ell(M)|x_2 - x_1| :$$
infatti se $x_1 < x_2$
$$|\ell(x_2) - \ell(x_1)| = \ell(x_2) - \ell(x_1) \le \ell(x_2)(x_2 - x_1) = \ell(x_2)|x_2 - x_1| \le \ell(M)|x_2 - x_1|$$
per la crescenza della funzione $\ell(x)$, e lo stesso accade se $x_1 > x_2$. Questa disuguaglianza ci permette di provare la continuità: per il teorema 5.19, se $x_n \to x_* \in \mathbb{R}$ allora $\{x_n\}_n$ è limitata, cioè in particolare
$$\exists M : \forall n, \quad x_n \le M ,$$
ma allora per il corollario 5.22 anche $x_* \le M$, quindi
$$|\ell(x_n) - \ell(x_*)| \le \ell(M)|x_n - x_*|$$
che tende a zero. ■

Dimostrazione della proposizione 5.58 : fissiamo $m \in \mathbb{N}^+$, e sia $\bar{n}$ tale che $|xy/\bar{n}| < 1/m$ e $|x| + |y| + 1/m < \bar{n}$. Allora per $n \ge \bar{n}$ da
$$e_n(x)e_n(y) = \left(1 + \frac{x + y + \frac{xy}{n}}{n}\right)^n$$
segue, essendo la potenza n-esima di numeri positivi una funzione crescente,
$$e_n(x + y - 1/m) \le e_n(x)e_n(y) \le e_n(x + y + 1/m) ,$$
e quindi passando al limite per $n \to +\infty$
$$\ell(x + y - 1/m) \le \ell(x)\ell(y) \le \ell(x + y + 1/m) .$$
D'altra parte le successioni $\{x+y\pm 1/m\}_m$ tendono a $x+y$, e per la continuità di $\ell(x)$ otteniamo (5.34) passando al limite per $m \to +\infty$, grazie al teorema dei carabinieri.

Osserviamo che (5.34) si generalizza immediatamente a una somma finita:
$$\ell\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) = \prod_{i=1}^{n} \ell(x_i) ;$$
allora in particolare (prendendo $x_i = x$ per ogni i)
$$\ell(nx) = \big(\ell(x)\big)^n ,$$
da cui otteniamo per ogni $m, n \in \mathbb{N}^+$
$$\ell(1) = \ell\Big(n\,\frac{1}{n}\Big) = \Big[\ell\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big]^n ,$$
ovvero
$$\ell\Big(\frac{1}{n}\Big) = \big(\ell(1)\big)^{1/n} ,$$
e quindi
$$\ell\Big(\frac{m}{n}\Big) = \ell\Big(m\,\frac{1}{n}\Big) = \Big[\ell\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big]^m = \big(\ell(1)\big)^{m/n} .$$
Per i razionali negativi basta usare il fatto che $\ell(x)\ell(-x) = 1$, e la dimostrazione è conclusa. Osserviamo che in realtà abbiamo dimostrato che ogni funzione che verifica (5.34) verifica anche (5.35), perciò le sole funzioni che verificano (5.34), cioè che sono omomorfismi da $(\mathbb{R}, +)$ a $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, sono le funzioni $x \mapsto a^x$ con $a > 0$. ■

Appendice 5.17 - Contrazioni in uno spazio metrico

Il risultato (teorema delle contrazioni) da cui discende la proprietà delle contrazioni è più generale di quanto asserito nel testo, in quanto vale in uno spazio metrico completo (☞ appendice 5.13).

Definizione : *sia $f : A \to A$; si dice che $x^* \in A$ è un punto fisso (o punto unito) di f se $f(x^*) = x^*$.*

Definizione : *sia (E, d) uno spazio metrico; si dice che un'applicazione $f : E \to E$ è una contrazione se*
$$\exists L \in [0, 1[: \forall x, y \in E, \quad \mathrm{d}\big(f(x), f(y)\big) \le L\,\mathrm{d}(x, y) .$$

Proposizione A5.31 : *ogni contrazione è continua.*

Dimostrazione : sia $x_n \to \bar{x}$; questo significa (☞ appendice 5.5) che $\mathrm{d}(x_n, \bar{x}) \to 0$, ma allora da
$$0 \le \mathrm{d}\big(f(x_n), f(\bar{x})\big) \le L\,\mathrm{d}(x_n, \bar{x})$$
segue anche $\mathrm{d}\big(f(x_n), f(\bar{x})\big) \to 0$ per il teorema dei carabinieri, cioè $f(x_n) \to f(\bar{x})$. ■

Notiamo che non abbiamo usato il fatto che $L < 1$: lo useremo nel prossimo risultato.

Teorema delle contrazioni A5.32 : *sia (E, d) uno spazio metrico completo, e sia $f : E \to E$ una contrazione; allora f ha uno ed un solo punto fisso, x^*. Inoltre per ogni $\bar{x} \in E$ la successione definita per ricorrenza da*
$$x_0 = \bar{x} , \qquad x_{n+1} = f(x_n)$$
ha limite x^*.

Dimostrazione : il punto fisso, se esiste, è unico; infatti, se x^* ed x^{**} sono due punti fissi, cioè se
$$x^* = f(x^*) , \qquad x^{**} = f(x^{**}) ,$$
abbiamo
$$\mathrm{d}(x^*, x^{**}) = \mathrm{d}\big(f(x^*), f(x^{**})\big) \le L\,\mathrm{d}(x^*, x^{**}) ,$$
vale a dire
$$0 \le (L - 1)\,\mathrm{d}(x^*, x^{**}) .$$
Dato che $0 \le L < 1$ questo è possibile solo se $\mathrm{d}(x^*, x^{**}) = 0$, vale a dire $x^* = x^{**}$.

A questo punto, fissiamo un qualsiasi $\bar{x} \in E$, e posto
$$x_0 = \bar{x} , \qquad x_{n+1} = f(x_n)$$

mostriamo che la successione $\{x_n\}_n$ è di Cauchy: per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq L\, d(x_n, x_{n+1}) ,$$

cioè, se poniamo

$$d_n = d(x_n, x_{n+1}) ,$$

abbiamo per ogni n

$$d_{n+1} \leq L\, d_n .$$

Da questo si ricava subito (per induzione)

$$\forall n , \quad d_n \leq L^n d_0$$

(e in particolare $d_n \to 0$). Usando questa stima e la disuguaglianza triangolare, per ogni $k \in \mathbb{N}$ ed ogni n

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq \sum_{i=0}^{k-1} d(x_{n+i}, x_{n+i+1}) = \sum_{i=0}^{k-1} d_{n+i} \leq d_0 \sum_{i=0}^{k-1} L^{n+i} = L^n d_0 \sum_{i=0}^{k-1} L^i .$$

Usando la formula (3.7) per la somma dei termini di una progressione geometrica, e ricordando che $0 \leq L < 1$, otteniamo

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq L^n d_0 \frac{1 - L^k}{1 - L} \leq L^n \frac{d_0}{1 - L} .$$

Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\bar{n}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$

$$L^n \frac{d_0}{1 - L} < \varepsilon :$$

allora per ogni $n \geq \bar{n}$ ed ogni $k \in \mathbb{N}$ abbiamo $d(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon$, dunque la successione è di Cauchy.

Poiché E è completo, $\{x_n\}_n$ converge ad un limite che indichiamo con x^* : proviamo che questo è un punto fisso per f . Abbiamo

$$0 \leq d(x^*, f(x^*)) \leq d(x^*, x_n) + d(x_n, f(x_n)) + d(f(x_n), f(x^*)) .$$

Dato che $d(x^*, x_n)$ tende a zero, dalla continuità di f segue che $d(f(x_n), f(x^*))$ tende a zero; d'altra parte anche $d(x_n, f(x_n)) = d_n \to 0$, quindi passando al limite per $n \to +\infty$ nella disuguaglianza precedente otteniamo $d(x^*, f(x^*)) = 0$, vale a dire $f(x^*) = x^*$.

Poiché il punto fisso (del quale ora abbiamo dimostrato l'esistenza) è unico, la dimostrazione è conclusa. ■

Dal teorema precedente ricaviamo subito un corollario nel caso reale: osserviamo che la definizione di contrazione, per funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, coincide con quella di funzione lipschitziana con costante minore di 1 , e ricordiamo (☛ appendice 5.13) che $(\mathbb{R}, \epsilon)$ è completo.

Corollario A5.33 : *ogni funzione L-lipschitziana* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *con costante* $L < 1$ *ha un unico punto fisso.*

Naturalmente, non solo le contrazioni hanno punti fissi (ad esempio, $100 \arctan x$ non è una contrazione ma ha almeno il punto fisso $x = 0$); ricordiamo che il metodo di impiego più frequente per provare che una funzione reale è lipschitziana è usare il corollario 7.24.

Appendice 5.18 - Successioni definite per ricorrenza

Vediamo qualche altro esempio; il primo della sezione 5.10 è del tipo

$$a_0 = \alpha , \qquad a_{n+1} = f(a_n) \tag{A5.4}$$

con f crescente e continua. Ragionando come nell'esempio, non è difficile provare quanto segue.

Proposizione A5.34 : *se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è continua e crescente, per ogni* $\alpha \in \mathbb{R}$ *la successione definita da* (A5.4) *ha limite. In particolare, se* $f(\alpha) = \alpha$ *la successione è costante; se invece* $f(\alpha) \neq \alpha$ *, posto*

$$\alpha_- = \sup\{x < \alpha : f(x) = x\} , \qquad \alpha_+ = \inf\{x > \alpha : f(x) = x\}$$

si ha:

$$f(\alpha) > \alpha \quad \Rightarrow \quad \{a_n\}_n \text{ cresce e } \lim_{n \to +\infty} a_n = \alpha_+$$
$$f(\alpha) < \alpha \quad \Rightarrow \quad \{a_n\}_n \text{ decresce e } \lim_{n \to +\infty} a_n = \alpha_- .$$

A proposito della definizione di $\alpha_\pm$, ricordiamo che $\sup \varnothing = -\infty$ e che $\inf \varnothing = +\infty$, per la convenzione fatta nell'appendice 3.9.

DIMOSTRAZIONE : il caso $f(\alpha) = \alpha$ è immediato (anche se va dimostrato per induzione); negli altri casi, da $\alpha_- < \alpha < \alpha_+$ segue che

$$\forall n, \quad \alpha_- < a_n < \alpha_+ . \tag{A5.5}$$

Infatti, se $\alpha_- = -\infty$ la disuguaglianza di sinistra è ovvia, e se $\alpha_- \in \mathbb{R}$ allora per la continuità di f otteniamo dal teorema di permanenza del segno 6.21 che $f(\alpha_-) = \alpha_-$, pertanto dalla crescenza di f se $a_n > \alpha_-$ allora $a_{n+1} = f(a_n) > f(\alpha_-) = \alpha_-$, quindi per induzione $\forall n$, $a_n > \alpha_-$. L'altra disuguaglianza è analoga.

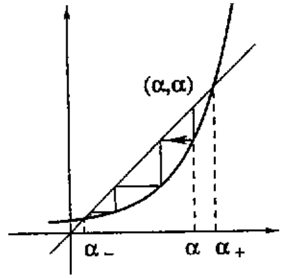


Fig. A5.1 : f crescente, $f(\alpha) < \alpha$

Da (A5.5) segue la monotonia: infatti per il teorema di esistenza degli zeri 6.27 la funzione $f(x) - x$ ha segno costante in $]\alpha_-, \alpha_+[$, quindi se ad esempio $f(\alpha) > \alpha$ abbiamo $f(x) > x$ per ogni $x \in]\alpha_-, \alpha_+[$, dunque per (A5.5)

$$\forall n, \quad a_{n+1} = f(a_n) > a_n ,$$

cioè la successione è crescente, ed ha limite ℓ con $\alpha_- < \alpha < \ell \leq \alpha_+$. Se fosse $\ell < \alpha_+$, in particolare avremmo $\ell \in \mathbb{R}$, dunque f è continua in ℓ, e da $a_n \to \ell$ otteniamo $a_{n+1} = f(a_n) \to f(\ell)$, ma $a_{n+1} \to \ell$, e per l'unicità del limite $f(\ell) = \ell$, contro la definizione di α_+. L'altro caso è analogo, o si ottiene da questo considerando (interessante esercizio) la successione

$$b_0 = -\alpha , \qquad b_{n+1} = -f(-b_n)$$

e provando che $b_n = -a_n$. ■

Osservazione : la spezzata nella figura A5.1 parte dal punto $(\alpha, \alpha) = (a_0, a_0)$ e passa successivamente per i punti (a_0, a_1) e (a_1, a_1), poi (a_1, a_2) e (a_2, a_2), ..., così che le sue intersezioni con la diagonale sono i punti (a_n, a_n), il cui comportamento corrisponde, sulla diagonale, a quello della successione $\{a_n\}_n$ sull'asse delle ascisse. Questo metodo (detto "metodo grafico") può dare delle indicazioni di massima sul comportamento di una successione, ma deve al più suggerire la via per l'insostituibile studio analitico.

La proposizione appena dimostrata si estende al caso di una funzione continua e crescente definita solo su un intervallo di $\mathbb{R}$, purché la formula (A5.4) definisca effettivamente una successione. Se f non è definita su un intervallo chiuso, e ad esempio il dominio di f è l'intervallo $]a, b[$ con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, estendiamo f a tutto $[a, b]$ ponendo

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x) , \qquad f(b) = \lim_{x \to b} f(x) \ :$$

ora f è definita su $[a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ ed ha valori in $\overline{\mathbb{R}}$. Se $\alpha \in]a, b[$, abbiamo la seguente situazione:

a) se $\{x : f(x) = x\} = \varnothing$ allora non abbiamo una successione;
b) se $\{x : f(x) = x\} \neq \varnothing$, posto

$$a' = \inf\{x \in [a, b] : f(x) = x\} , \qquad b' = \sup\{x \in [a, b] : f(x) = x\}$$

non si ha una successione se $\alpha < a'$ e $f(\alpha) < \alpha$, oppure se $\alpha > b'$ e $f(\alpha) > \alpha$; in tutti gli altri casi, si ha una successione, e

b1) se $f(\alpha) = \alpha$, la successione è costante;
b2) se $f(\alpha) > \alpha$ allora $\{a_n\}_n$ cresce, e il suo limite è $\alpha_+ = \inf\{x > \alpha : f(x) = x\}$ (ricordate che $\inf \varnothing = +\infty$);
b3) se $f(\alpha) < \alpha$ allora $\{a_n\}_n$ decresce, e ha limite $\alpha_- = \sup\{x < \alpha : f(x) = x\}$.

Potete svolgere la dimostrazione per esercizio.

Da quanto abbiamo appena visto, possiamo ottenere un risultato per le funzioni decrescenti, osservando che se $x \mapsto f(x)$ è decrescente allora $x \mapsto f(f(x))$ è crescente, per la proposizione 4.6, quindi posto $g = f \circ f$ le sottosuccessioni dei termini di indice pari e di indice dispari

$$p_n = a_{2n} , \qquad d_n = a_{2n+1}$$

verificano

$$\begin{cases} p_0 = a_0 \\ p_{n+1} = g(p_n) \end{cases} \qquad \begin{cases} d_0 = a_1 \\ d_{n+1} = g(d_n) , \end{cases}$$

quindi possiamo applicare ad esse le considerazioni della proposizione A5.34. Anche qualora f sia definita solo su un insieme A, basta prima vedere su quale insieme B è definita g, e ragionare di nuovo sulle successioni $\{p_n\}_n$ e $\{d_n\}_n$. In particolare, vediamo che si possono presentare qui due situazioni: o sia $\{p_n\}_n$ che $\{d_n\}_n$ hanno limite e i limiti sono uguali, nel qual caso anche $\{a_n\}_n$ ha lo stesso limite, o questo non accade, e allora $\{a_n\}_n$ non ha limite. Il caso in cui f non è monotona è più delicato, e sfugge ad una regola generale.

Ancora più delicate sono le successioni che non rientrano nello schema (A5.4): ad esempio, vediamo la media aritmetico-geometrica di due numeri.

Esempio : la media aritmetica di due numeri positivi a e b è $(a + b)/2$, mentre la loro media geometrica è $\sqrt{ab}$; se $0 < a \leq b$, definiamo per ricorrenza due successioni ponendo

$$a_0 = a , \quad b_0 = b , \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} , \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} .$$

Il fatto che questa formula definisca due successioni positive, cioè una successione a valori in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, è conseguenza della proposizione 3.5 con $A \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Cerchiamo di determinare il comportamento delle due successioni: mostriamo intanto che $a_n \leq b_n$ per ogni n; questo si prova facilmente osservando che a_{n+1} e b_{n+1} sono numeri positivi, quindi

$$a_{n+1} \leq b_{n+1} \iff a_{n+1}^2 \leq b_{n+1}^2 \iff a_n b_n \leq \frac{(a_n + b_n)^2}{4} \iff 0 \leq (a_n - b_n)^2$$

che è sempre vero. Proviamo ora che $\{a_n\}_n$ è debolmente crescente e $\{b_n\}_n$ è debolmente decrescente: infatti, per ogni n

$$a_{n+1} \geq a_n \iff \sqrt{a_n b_n} \geq a_n \iff a_n b_n \geq a_n^2 \iff b_n \geq a_n ,$$

che è vera; allo stesso modo

$$b_{n+1} \leq b_n \iff \frac{a_n + b_n}{2} \leq b_n \iff a_n \leq b_n .$$

Per la monotonia appena dimostrata, abbiamo per ogni n

$$a = a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0 = b , \tag{A5.6}$$

pertanto la successione debolmente crescente $\{a_n\}_n$ è limitata superiormente da b, quindi converge ad un limite reale $\ell_a = \sup_n a_n$, e analogamente $b_n \to \ell_b = \inf_n b_n$. Proviamo che $\ell_a = \ell_b$, così potremo chiamare questo comune limite media aritmetico-geometrica di a e b. Notiamo che dalla definizione della successione $\{b_n\}_n$, passando al limite per $n \to +\infty$, per il teorema sul limite della somma otteniamo

$$\ell_b = \lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\ell_a + \ell_b}{2} ,$$

da cui subito $\ell_a = \ell_b$.

Capitolo 6

Funzioni continue

In questo capitolo trattiamo l'importante nozione di continuità, già incontrata nella sezione 5.5; prima di questo, è necessario estendere alle funzioni reali la definizione di limite. Ci occuperemo poi di una classe di funzioni più regolari, le funzioni uniformemente continue, e delle operazioni con gli infinitesimi, utilissime per il calcolo dei limiti e per la comprensione dell'andamento generico di una funzione in un intorno di un punto.

6.1 - Limiti di funzioni

Abbiamo detto (☛ sezione 5.3) che una successione è una funzione definita su (una semiretta di) $\mathbb{N}$, e per aiutare visivamente la comprensione abbiamo adottato la convenzione che la legge di una successione si indichi generalmente con a_n anziché, ad esempio, con $f(x)$. In particolare, è sottinteso che la variabile n è un numero naturale, e appartiene al dominio della successione.

Riscriviamo la definizione di limite (5.1) senza usare questa convenzione: sarà opportuno sottolineare che la variabile x della successione f deve appartenere al dominio di f, perché questo dominio ora non può più essere indovinato dal simbolo usato per la variabile stessa: così la definizione (5.1) diviene

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \iff \forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists \bar{x} \in \mathbb{R} : \forall x \in (\operatorname{dom} f) \cap [\bar{x}, +\infty[,\quad f(x) \in U .$$

Questo può avere senso anche se $\operatorname{dom} f$ non è una semiretta di $\mathbb{N}$; tuttavia, se $\operatorname{dom} f$ è limitato superiormente, la "definizione" precedente darebbe che $\lim\limits_{x\to+\infty} f = \ell$ per ogni

$\ell \in \overline{\mathbb{R}}$: infatti basta prendere $\bar{x}$ tale che $(\mathrm{dom}\, f) \cap [\bar{x}, +\infty[= \varnothing$ per avere che per ogni x in questo insieme (non ve ne sono, quindi la verifica che segue non va compiuta mai) $f(x) \in U$. Dunque, per estendere la definizione a una funzione f definita su un sottoinsieme qualsiasi di $\mathbb{R}$ dovremo richiedere che $\mathrm{dom}\, f$ non sia limitato superiormente, ovvero (che è lo stesso, ☞ esercizio 5.13) che $+\infty$ sia un punto di accumulazione del dominio di f .

dom F non è limitato superiormente

Definizione : *sia f una funzione reale tale che $+\infty$ sia un punto di accumulazione di $\mathrm{dom}\, f$; diciamo che la funzione f tende ad $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ per x che tende a $+\infty$ se*

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists \bar{x} \in \mathbb{R} : \forall x \in (\mathrm{dom}\, f) \cap [\bar{x}, +\infty[,\quad f(x) \in U . \tag{6.1}$$

In tal caso scriviamo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell .$$

La definizione che abbiamo dato si estende facilmente ai limiti per $x \to -\infty$.

Definizione : *sia f una funzione reale tale che $-\infty$ sia un punto di accumulazione di $\mathrm{dom}\, f$; diciamo che la funzione f tende ad $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ per x che tende a $-\infty$ se*

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists \bar{x} \in \mathbb{R} : \forall x \in (\mathrm{dom}\, f) \cap]-\infty, \bar{x}],\quad f(x) \in U .$$

In tal caso scriviamo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell .$$

Per i limiti di funzioni valgono caratterizzazioni analoghe a (5.3),...,(5.9): ne scriviamo qui di seguito qualcuna.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists \bar{x} \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathrm{dom}\, f,\quad [x \geq \bar{x} \Rightarrow f(x) \in U]$$

$$\iff \forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists \bar{x} \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathrm{dom}\, f,\quad [x > \bar{x} \Rightarrow f(x) \in U]$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\ \ [-\infty] \iff \forall M \in \mathbb{R},\ \exists \bar{x} \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathrm{dom}\, f,\quad [x > \bar{x} \Rightarrow f(x) > M]\ \ [< M]$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{x} \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathrm{dom}\, f,\quad [x \geq \bar{x} \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon] \tag{6.2}$$

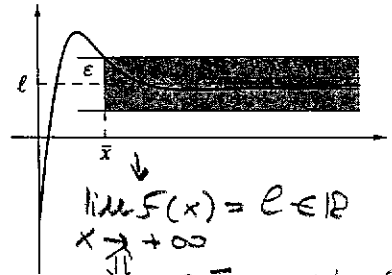
e così via, e analogamente per $x \to -\infty$ invertendo il verso della disuguaglianza tra x e $\bar{x}$ (✎ es. 6.1).

Esempio : la funzione x^2 tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$; infatti, il dominio della funzione è tutto $\mathbb{R}$, e scelto un intorno $U =]M, +\infty[$ di $+\infty$ abbiamo $x^2 \in U$ per ogni $x > \bar{x} = \sqrt{|M|}$.

Osserviamo poi che la definizione (6.1) può essere riscritta, analogamente a (5.2), come

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists V \in \mathscr{I}_{+\infty} : \forall x \in (\mathrm{dom}\, f) \cap V,\quad f(x) \in U , \tag{6.3}$$

e allo stesso modo per la definizione di limite a $-\infty$.



$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \ell \in \mathbb{R}$ ⇕ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{x} \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathrm{dom}\, F$ $x \geq \bar{x} \Rightarrow \ell - \varepsilon < f$

Fig. 6.1 : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

Come si vede in figura, la definizione (6.2) di funzione che tende a un limite reale ℓ per $x \to +\infty$ significa che, fissata una striscia di ampiezza qualunque (non nulla) intorno alla quota ℓ , da un certo punto $\bar{x}$ in poi il grafico della funzione rimane entro la striscia. La parola importante è "qualunque": se poi fissiamo una striscia più piccola, ugualmente il grafico deve presto o tardi (entrare e) rimanere in quest'altra striscia.

Anche la formula (6.3) ci offre la possibilità di una generalizzazione: dato che (6.3) traduce la frase (imprecisa) "la funzione f tende ad ℓ man mano che la variabile x , stando dentro al dominio di f , si avvicina a $+\infty$ ", possiamo provare a tradurre in formula la stessa frase, ma con x che si "avvicina" ad un numero reale x_* anziché a $+\infty$. Un primo tentativo potrebbe essere sostituire semplicemente $+\infty$ con x_* nella (6.3), scrivendo

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists V \in \mathscr{I}_{x_*} : \forall x \in (\mathrm{dom}\, f) \cap V,\quad f(x) \in U ;$$

tuttavia, se osserviamo le due funzioni seguenti:

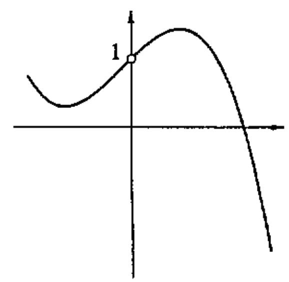


Fig. 6.2 : f non è definita in $x = 0$

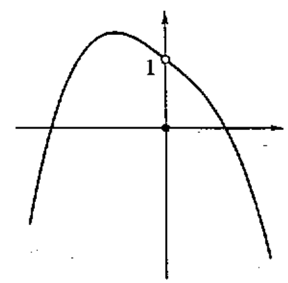


Fig. 6.3 : $f(0) = 0$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in [illegible] \setminus \{x_0\}$
$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

non c'è dubbio che entrambe, per x che si "avvicina" a zero, tendono ad 1, ma per quella di destra non è vero che

$$\forall U \in \mathscr{I}_1,\ \exists V \in \mathscr{I}_0 : \forall x \in (\operatorname{dom} f) \cap V, \quad f(x) \in U \ :$$

infatti, se $U =]0,2[$ non esiste alcun intorno V di $x_* = 0$ in cui $f(x) \in U$, perché certamente $0 \in V$ ma $f(0) = 0 \notin U$. Allora è necessario modificare leggermente il tentativo di definizione precedente: la prossima è la definizione di limite per funzioni (➡ appendice 6.1) e comprende tutti i casi, anche quelli già visti $x_* = \pm\infty$.

Definizione : *sia f una funzione reale, e sia $x_* \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di* $\operatorname{dom} f$ *; diciamo che la funzione f tende ad $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ per x che tende a x_* se*

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists V \in \mathscr{I}_{x_*} : \forall x \in (\operatorname{dom} f) \cap V \setminus \{x_*\}, \quad f(x) \in U \,. \tag{6.4}$$

In tal caso scriviamo $\lim_{x \to x_*} f(x) = \ell$ *o anche semplicemente, se il punto x_* è chiaro dal contesto, $f(x) \to \ell$. Diciamo poi che* $\lim_{x \to x_*} f(x) = \ell^+$ $[\![\ell^-]\!]$ *se* $\lim_{x \to x_*} f(x) = \ell$ *ed esiste un intorno $V_0 \in \mathscr{I}_{x_*}$ tale che $f(x) > \ell$ $[\![< \ell]\!]$ per ogni $x \in (\operatorname{dom} f) \cap V_0 \setminus \{x_*\}$.*

L'ultima posizione estende in modo naturale la definizione data per le successioni.

Osservazione : la definizione di limite si può riscrivere come

$$\lim_{x \to x_*} f(x) = \ell \quad \iff \quad \forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists V \in \mathscr{I}_{x_*} : \quad f((\operatorname{dom} f) \cap V \setminus \{x_*\}) \subset U \,, \tag{6.5}$$

con una scrittura più compatta di (6.4).

Vediamo una sola (✎ es. 6.3) delle numerose formule equivalenti a (6.4), quella corrispondente al caso $x_* \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to x_* \in \mathbb{R}} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \quad \iff \quad \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (\operatorname{dom} f) \setminus \{x_*\}, \\ [x_* - \delta < x < x_* + \delta \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon]. \end{array} \tag{6.6}$$

Dunque una funzione tende al limite reale ℓ per x che tende al numero reale x_* se e solo se, fissata comunque un'altezza (positiva) 2ε è possibile trovare una larghezza positiva 2δ in modo che il grafico di f non esca dalle basi inferiore e superiore del rettangolo centrato in (x_*, ℓ) di altezza 2ε e base 2δ, salvo al più per $x = x_*$ (☞ figura 6.6).

Tra le proprietà viste per i limiti di successioni, numerose valgono più in generale per i limiti di funzioni: ne elenchiamo qualcuna nel seguito della sezione (altre sono fra gli esercizi), ricordando tra parentesi i risultati analoghi relativi alle successioni; iniziamo con i teoremi di tipo limitatezza.

Teorema 6.1 : *se f e g sono due funzioni reali aventi lo stesso dominio, e x_* è un punto di accumulazione del loro dominio, valgono le seguenti proprietà:*

1) *il limite* $\lim_{x \to x_*} f(x)$, *se esiste, è unico (teorema 5.12);*
2) *se $f(x) \to \ell$ e $H < \ell$ $[\![\ell < K]\!]$, esiste un intorno $V \in \mathscr{I}_{x_*}$ tale che $f(x) > H$ $[\![f(x) < K]\!]$ in $(\operatorname{dom} f) \cap V \setminus \{x_*\}$; in particolare, se $\ell \in \mathbb{R}$ esiste un intorno $V \in \mathscr{I}_{x_*}$ tale che f è limitata in $(\operatorname{dom} f) \cap V$, mentre se $\ell = +\infty$ $[\![-\infty]\!]$ esiste un intorno $V \in \mathscr{I}_{x_*}$ tale che f è limitata inferiormente $[\![$superiormente$]\!]$ in $(\operatorname{dom} f) \cap V$ (teorema 5.19);*
3) *se $f(x) \to \ell \neq 0$ allora esiste un intorno $V \in \mathscr{I}_{x_*}$ tale che $f(x)$ ha lo stesso segno di ℓ in $(\operatorname{dom} f) \cap V \setminus \{x_*\}$ (teorema 5.21);*
4) *se* $\lim_{x \to x_*} f(x) < \lim_{x \to x_*} g(x)$, *esiste un intorno $V \in \mathscr{I}_{x_*}$ tale che $f(x) < g(x)$ in $(\operatorname{dom} f) \cap V \setminus \{x_*\}$ (proposizione 5.30).*

Le dimostrazioni si ottengono facilmente ripercorrendo quelle dei teoremi analoghi per le successioni, tenendo presente che "definitivamente" non è che un'abbreviazione per la scrittura

$$\ldots\ \exists V \in \mathscr{I}_{+\infty} : \forall n \in \mathbb{N} \cap V, \ \ldots\,.$$

Dimostrazioni alternative si possono anche costruire (generalmente per assurdo) ricorrendo al prossimo importante risultato (➡ appendice 6.2); consigliamo di svolgere tutte le dimostrazioni per esercizio in entrambi i modi (✎ es. 6.5).

Teorema 6.2 : *se f è una funzione reale, e x_* è un punto di accumulazione di* $\operatorname{dom} f$, *allora sono equivalenti le due proposizioni seguenti:*

1) $\lim f(x) = \ell$
2) *per ogni successione $\{x_n\}_n$ di punti appartenenti a $(\operatorname{dom} f) \setminus \{x_*\}$, se $x_n \to x_*$ allora $f(x_n) \to \ell$.*

Dimostrazione : iniziamo con $1) \Rightarrow 2)$; sia dunque $\{x_n\}_n$ una successione di punti del dominio di f, diversi da x_*, che tende ad x_*, e fissiamo un intorno $U \in \mathscr{I}_\ell$: dobbiamo provare che definitivamente $f(x_n) \in U$. Per l'ipotesi (6.4), esiste un intorno $V \in \mathscr{I}_{x_*}$ tale che se $x \in (\operatorname{dom} f) \cap V \setminus \{x_*\}$ allora $f(x) \in U$; ma $x_n \in (\operatorname{dom} f) \setminus \{x_*\}$ per ogni n, per ipotesi, e definitivamente $x_n \in V$ perché $x_n \to x_*$ e V è un intorno di x_*, dunque definitivamente $x_n \in (\operatorname{dom} f) \cap V \setminus \{x_*\}$, così definitivamente $f(x_n) \in U$ come dovevamo provare.

Dimostriamo per assurdo l'implicazione opposta $2) \Rightarrow 1)$: supponiamo cioè che non sia vero che $f(x) \to \ell$, e mostriamo che esiste una successione $\{x_n\}_n$ di punti del dominio di f, diversi da x_*, che tende ad x_*, e tale che $\{f(x_n)\}_n$ non tende ad ℓ. Negare (6.1) significa che

$$\exists U_0 \in \mathscr{I}_\ell : \forall V \in \mathscr{I}_{x_*},\ \exists x \in (\operatorname{dom} f) \cap V \setminus \{x_*\} : \quad f(x) \notin U_0 \,; \tag{6.7}$$

scegliamo una successione $\{V_n\}_n$ di intorni di x_* come segue:

$$\begin{array}{ll} \text{se } x_* = +\infty, & V_n =]n, +\infty[\\ \text{se } x_* \in \mathbb{R}, & V_n =]x_* - \frac{1}{n}, x_* + \frac{1}{n}[\\ \text{se } x_* = -\infty, & V_n =]-\infty, -n[\,. \end{array}$$

Osserviamo che per il teorema dei carabinieri se $\{x_n\}_n$ è una qualsiasi successione tale che $\forall n,\ x_n \in V_n$ allora $x_n \to x_*$. Dalla (6.7) segue che per ogni n esiste un punto, che chiamiamo x_n, tale che $x_n \in (\operatorname{dom} f) \cap V_n \setminus \{x_*\}$ e che $f(x_n) \notin U_0$: ma la successione $\{x_n\}_n$ tende a x_* per quanto appena osservato, ed essendo per ogni n, $f(x_n) \notin U_0$ non può essere $f(x_n) \to \ell$. ■

Esempio : grazie al teorema precedente possiamo dimostrare che la funzione $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ non ha limite per $x \to 0$ (anche se facile, questo esempio è di fondamentale importanza; dato che il grafico di $\operatorname{sen}(1/x)$ è molto compresso, lo riportiamo fuori scala).

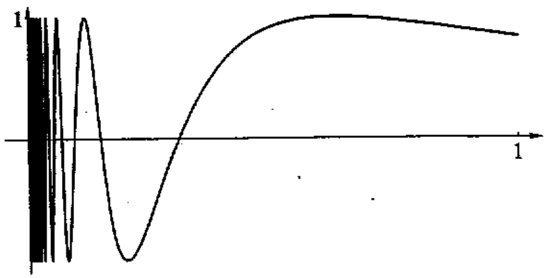


Fig. 6.4 : $y = \operatorname{sen}(1/x)$

Infatti, se $x'_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ e $y'_n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, le successioni $x_n = 1/x'_n$ e $y_n = 1/y'_n$ non sono mai nulle e tendono entrambe a zero: se f avesse limite ℓ per $x \to 0$, i due limiti di $\{f(x_n)\}_n$ e $\{f(y_n)\}_n$ dovrebbero essere anch'essi uguali ad ℓ, ma $f(x_n) \equiv 1$ e $f(y_n) \equiv -1$ (✎ es. 6.6).

Vediamo un'importante caratterizzazione delle funzioni continue.

Proposizione 6.3 : *se f è una funzione reale e $x_* \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione di $\operatorname{dom} f$ allora f è continua in x_* se e solo se $\lim_{x \to x_*} f(x) = f(x_*)$.*

DIMOSTRAZIONE : ricordiamo la definizione (5.11) di continuità in x_*:

$$\forall \{x_n\}_n \subset \operatorname{dom} f, \quad [x_n \to x_* \Rightarrow f(x_n) \to f(x_*)]\,;$$

invece, per il teorema 6.2, $f(x) \to f(x_*)$ equivale a

$$\forall \{x_n\}_n \subset (\operatorname{dom} f) \setminus \{x_*\}, \quad [x_n \to x_* \Rightarrow f(x_n) \to f(x_*)]\,. \tag{6.8}$$

È chiaro che la prima formula implica la seconda, perché $(\operatorname{dom} f) \setminus \{x_*\} \subset \operatorname{dom} f$, così dobbiamo solo dimostrare il viceversa: prendiamo una successione $\{x_n\}_n$ di punti di $\operatorname{dom} f$, convergente ad x_*, e proviamo che $f(x_n) \to f(x_*)$. Se definitivamente $x_n = x_*$ questo è ovvio; se definitivamente $x_n \neq x_*$ questo discende da (6.8) applicato alla parte finale della successione $\{x_n\}_n$; nel caso che rimane, dividiamo $\{x_n\}_n$ in due sottosuccessioni: quella dei termini per i quali $x_n = x_*$ (chiamiamola $\{x_{1_n}\}_n$) e quella dei termini per i quali $x_n \neq x_*$ (chiamiamola $\{x_{2_n}\}_n$). Entrambe convergono ad x_*, ma la prima è costantemente uguale ad x_* mentre la seconda è sempre diversa da x_*, dunque per le considerazioni precedenti

$$f(x_{1_n}) \to f(x_*)\,, \quad f(x_{2_n}) \to f(x_*)\,,$$

e da questo segue $f(x_n) \to f(x_*)$ applicando la proposizione 5.15. ■

Osservazione : non è esatto dire che f è continua in x_* se e solo se $f(x) \to f(x_*)$; questo è vero solo se x_* è un punto di accumulazione di $\operatorname{dom} f$. Se invece x_* appartiene a $\operatorname{dom} f$ ma non è di accumulazione, bensì è un punto isolato di $\operatorname{dom} f$ (☞ esercizio 5.11), allora f è sicuramente continua in x_* (☞ esercizio 5.38), ma non ha senso parlare del limite per $x \to x_*$.

Osservazione : se f è continua in un punto x_* di accumulazione del suo dominio, il calcolo del limite di f in x_* è dunque facilissimo, perché basta calcolare $f(x_*)$, vale a dire sostituire il valore di x_* al posto di x nell'espressione di f. Un errore molto comune è usare questo metodo anche se f non è continua: per il teorema 6.2, il risultato è certamente errato (✎ es. 6.7).

Proposizione 6.4 : *se f è una funzione reale che ha limite $\ell \in \mathbb{R}$ quando x tende ad un punto di accumulazione x_* di $\operatorname{dom} f$, la funzione*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_* \\ \ell & \text{se } x = x_* \end{cases}$$

è continua in x_*.

Lasciamo la dimostrazione per esercizio (✎ es. 6.8); se $x_* \notin \operatorname{dom} f$, la funzione $\tilde{f}$ si dice un'estensione continua di f in x_*.

Grazie al teorema 6.2 e alla proposizione 6.3, ricaviamo dai risultati del capitolo 5 una lista di limiti importanti: ad esempio, dalla continuità del valore assoluto (☞ proposizione 5.29) abbiamo che

$$\forall x_* \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to x_*} |x| = |x_*|\,,$$

e analogamente per le altre funzioni continue quali seno, coseno, esponenziale e (per $x_* > 0$) logaritmo. Poi (i prossimi sono limiti *fondamentali*)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\,, \tag{6.9}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\,, \tag{6.10}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,, \tag{6.11}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1\,, \tag{6.12}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}\,, \tag{6.13}$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \mathrm{e}\,, \tag{6.14}$$

e anche

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0^+\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty\,, \tag{6.15}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty\,. \tag{6.16}$$

Incontreremo altri limiti notevoli un poco più avanti in questa sezione, nelle formule (6.20),. . . ,(6.25).

Il teorema 6.2 facilita molto le dimostrazioni delle proprietà che seguono; il prossimo enunciato raggruppa i risultati di tipo confronto, quello successivo i risultati di tipo algebrico.

Teorema 6.5 : *se f, g, h sono tre funzioni reali aventi lo stesso dominio, e x_* è un punto di accumulazione del loro dominio, allora:*

1) *se in $\operatorname{dom} f$ si ha $f(x) \le g(x)$, e se $f(x) \to \ell_f$ e $g(x) \to \ell_g$ per $x \to x_*$, allora $\ell_f \le \ell_g$ (proposizione 5.30);*
2) *se in $\operatorname{dom} f$ si ha $f(x) \le g(x)$, e se $f \to +\infty$ $[g \to -\infty]$ per $x \to x_*$, allora anche $g \to +\infty$ $[f \to -\infty]$ (proposizione 5.23);*
3) *se in $\operatorname{dom} f$ si ha $f(x) \le g(x) \le h(x)$, e se $\lim_{x\to x_*} f(x) = \lim_{x\to x_*} h(x) = \ell$, allora esiste anche $\lim_{x\to x_*} g(x)$, ed è anch'esso uguale ad ℓ (teorema 5.24).*

Osservazione : le tre affermazioni precedenti restano vere anche se le disuguaglianze $f(x) \le g(x)\,[\le h(x)]$ sono verificate non in tutto il dominio, ma in un intorno di x_* : ad esempio la prima si generalizza in

1') se esiste un intorno $V_0 \in \mathscr{I}_{x_*}$ tale che in $(\operatorname{dom} f) \cap V_0 \setminus \{x_*\}$ si abbia $f(x) \le g(x)$, e se $f(x) \to \ell_f$ e $g(x) \to \ell_g$ per $x \to x_*$, allora $\ell_f \le \ell_g$,

e analogamente per le altre due.

Per quanto riguarda la prima affermazione del teorema 6.5, e l'ultima asserzione del teorema 6.1, vale la stessa osservazione già vista per le successioni: da $f < g$ in un intorno di x_* non segue necessariamente $\ell_f < \ell_g$, ma solo $\ell_f \le \ell_g$, come pure da $\ell_f \le \ell_g$ non segue necessariamente $f \le g$ in un intorno di x_*.

Esempio : le funzioni $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ e $g(x) \equiv 0$ hanno limite per $x \to +\infty$, ed $\ell_f \le \ell_g$ (sono entrambi zero), ma non è vero che $f \le g$ in un intorno di $+\infty$; analogamente, $f(x) \equiv 0$ e $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ verificano $f < g$, ma non è vero che i loro limiti a $+\infty$ verificano $\ell_f < \ell_g$.

Teorema 6.6 : *siano f e g due funzioni reali aventi lo stesso dominio e tali che $f(x) \to \ell_f$ e $g(x) \to \ell_g$ per $x \to x_*$, dove x_* è un punto di accumulazione del loro dominio; allora si ha:*

1) $\lim_{x\to x_*} (f(x)+g(x)) = \ell_f + \ell_g$, *tranne che nel caso $\infty - \infty$ (teorema 5.25);*
2) $\lim_{x\to x_*} (f(x)\cdot g(x)) = \ell_f \cdot \ell_g$, *tranne che nel caso $0 \cdot \infty$;*
3) $\lim_{x\to x_*} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_f}{\ell_g}$, *tranne che nei casi $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ e con le avvertenze del teorema 5.32 nei casi $\ell_f = \pm\infty$ oppure $\ell_g = 0$.*

Osservazione : il teorema vale anche per la somma o il prodotto non solo di due, ma di un qualunque numero finito (e fissato) di funzioni (✎ es. 6.9).

Nei teoremi 6.1, 6.5 e 6.6 abbiamo sempre specificato che le funzioni devono avere lo stesso dominio; tuttavia spesso abbiamo a che fare con funzioni aventi domini differenti fra loro. Possiamo eliminare l'ipotesi che f e g (e h) abbiano lo stesso dominio, pur di supporre che x_* sia un punto di accumulazione dell'intersezione dei domini (non basta che lo sia di tutti i domini, ☞ esercizio 5.16), e in tal caso nelle tesi il dominio di f andrà sostituito con l'intersezione dei domini. Questo può essere fatto grazie alla prossima proposizione (analoga alla proposizione 5.13).

Proposizione 6.7 : *se $f(x) \to \ell$ per $x \to x_*$, e se $B \subset \operatorname{dom} f$ ha ancora x_* come punto di accumulazione, allora*

$$\lim_{x\to x_*} f\,|_B\,(x) = \ell\,.$$

Dunque, prendendo una restrizione il limite (se ha ancora senso) non cambia; la dimostrazione è lasciata per esercizio (✎ es. 6.12). È chiaro che il viceversa non vale: se esiste il limite di una particolare restrizione $f|_B$ non è detto che esista il limite di f (trovate per esercizio un controesempio); se però sappiamo già per qualche motivo che quest'ultimo esiste, per la proposizione precedente basta calcolarlo su di una restrizione. Vale però anche un viceversa parziale: è sempre sufficiente trovare il limite sulla restrizione di f ad un intorno di x_* (non ad un insieme qualsiasi).

Proposizione 6.8 : *se esiste un intorno $V_0 \in \mathscr{I}_{x_*}$ per il quale esiste $\lim_{x\to x_*} f|_{V_0}(x) = \ell$, allora esiste anche $\lim_{x\to x_*} f(x)$, ed è anch'esso uguale ad ℓ.*

Dimostrazione : fissato $U \in \mathscr{I}_\ell$, per ipotesi esiste un intorno $V \in \mathscr{I}_{x_*}$ tale che $f(x) \in U$ per ogni $x \in (\operatorname{dom} f) \cap V_0 \cap V = (\operatorname{dom} f) \cap (V_0 \cap V)$, purché diverso da x_*. Dato che $V' = V_0 \cap V$ è anch'esso un intorno di x_*, questo implica che $f(x) \to \ell$. ■

Esempio : sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(x) = 2x+1$ per $x \ge 0$; se vogliamo calcolare il limite di f per $x \to 2$, basta calcolare il limite della sua restrizione ad esempio all'intervallo $]1,3[$, che è un intorno di 2, ma questa restrizione è la funzione $2x+1$ (ristretta a $]1,3[$), che ha limite 5.

Dal risultato precedente segue subito la proprietà di località del limite.

Corollario 6.9 : *se* x_* *è un punto di accumulazione sia di* $\operatorname{dom} f$ *che di* $\operatorname{dom} g$ *, se* $f(x) \to \ell$ *, ed esiste un intorno* $V_0 \in \mathscr{I}_{x_*}$ *tale che* $f(x) = g(x)$ *in* $(\operatorname{dom} g) \cap V_0 \setminus \{x_*\}$ *, allora anche* $g(x) \to \ell$ *.*

DIMOSTRAZIONE : basta osservare che ℓ è anche (☞ proposizione 6.7) il limite di $f|_{(\operatorname{dom} g) \cap V_0}$; per le ipotesi fatte questo è il limite di $g|_{V_0}$, e la tesi segue dalla proposizione 6.8. ■

Due casi di restrizioni che si incontrano molto di frequente sono i limiti destro e sinistro.

Definizione : *se* f *è una funzione reale, e* $x_* \in \mathbb{R}$ *è un punto di accumulazione di* $(\operatorname{dom} f) \cap \{x \in \mathbb{R} : x > x_*\}$ $[\![x < x_*]\!]$*, si dice che* f *ha limite da destra* $[\![$*da sinistra*$]\!]$ *uguale ad* ℓ *se*

$$\lim_{x \to x_*} f|_{]x_*,+\infty[}(x) = \ell \qquad [\![\lim_{x \to x_*} f|_{]-\infty,x_*[}(x) = \ell]\!] .$$

In tal caso si scrive

$$\lim_{x \to x_*^+} f(x) = \ell \qquad [\![\lim_{x \to x_*^-} f(x) = \ell]\!] .$$

Osservazione : visto che i limiti da destra e da sinistra sono limiti di restrizioni, i teoremi visti fino ad ora si applicano direttamente anche ad essi: ad esempio, come conseguenza del teorema 6.1 abbiamo che se $f(x) \to \ell \neq 0$ per $x \to x_*^+$ allora esiste un intorno $V \in \mathscr{I}_{x_*}$ tale che $f(x)$ ha lo stesso segno di ℓ in $(\operatorname{dom} f) \cap V \cap]x_*, +\infty[$.

Osservazione : possiamo ridefinire i limiti da destra e da sinistra così: se f è una funzione reale, e $x_* \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione di $(\operatorname{dom} f) \cap \{x \in \mathbb{R} : x > x_*\}$ $[\![x < x_*]\!]$, si dice che f ha limite da destra $[\![$da sinistra$]\!]$ uguale ad ℓ se per ogni intorno U di ℓ esiste un intorno destro $[\![$sinistro$]\!]$ V di x_* tale che $f(x) \in U$ per ogni $x \in (\operatorname{dom} f) \cap V$.

Proposizione 6.10 : *se hanno senso i limiti di* f *da destra e da sinistra per* $x \to x_*$ *, allora* f *ha limite* ℓ *per* $x \to x_*$ *se e solo se i due limiti, da destra e da sinistra, esistono e sono entrambi uguali ad* ℓ *.*

f ha limite ℓ ⟺ i limiti da destre e senistra ∃ e sono = ℓ

DIMOSTRAZIONE : se $f(x) \to \ell$ anche i limiti da destra e da sinistra sono uguali ad ℓ , per la proposizione 6.7. Per il viceversa, notiamo anzitutto che deve essere $x_* \in \mathbb{R}$, altrimenti uno dei due limiti, da destra o da sinistra, non ha senso; fissiamo un intorno $U \in \mathscr{I}_\ell$: per ipotesi, applicando la (6.4) e osservando che $\operatorname{dom}\left(f|_{]x_*,+\infty[}\right) = (\operatorname{dom} f) \cap]x_*, +\infty[$, esistono due intorni $V^+, V^- \in \mathscr{I}_{x_*}$ tali che

$$\begin{aligned} &\forall x \in (\operatorname{dom} f) \cap]x_*, +\infty[\cap V^+, \quad f(x) \in U \\ &\forall x \in (\operatorname{dom} f) \cap]-\infty, x_*[\cap V^-, \quad f(x) \in U . \end{aligned} \tag{6.17}$$

Ponendo $V = V^+ \cap V^-$, otteniamo un altro intorno di x_* , e

$$V \setminus \{x_*\} = (]-\infty, x_*[\cap V) \cup (]x_*, +\infty[\cap V) \subset (]-\infty, x_*[\cap V^-) \cup (]x_*, +\infty[\cap V^+) ,$$

quindi per (6.17)

$$\forall x \in (\operatorname{dom} f) \cap V \setminus \{x_*\}, \quad f(x) \in U ,$$

cioè $f(x) \to \ell$. ■

La proposizione precedente si usa molto spesso, tanto in positivo (per provare l'esistenza del limite) quanto in negativo (☞ proposizione 6.7): se mostriamo che i limiti da destra e da sinistra non sono uguali, il limite non può esistere (✎ es. 6.13).

Mentre in generale non si può eseguire la composizione di due successioni (salvo nel caso molto particolare in cui una abbia valori in $\mathbb{N}$), per le funzioni reali è interessante scoprire cosa possiamo dire sul limite di una composizione. Vediamo un errore nel quale rischiamo di incorrere se, anziché la definizione precisa di limite, usiamo le parole con troppa disinvoltura: supponiamo che f e g siano definite su tutto $\mathbb{R}$, per evitare problemi con i domini, e che $f(x) \to y_* \in \mathbb{R}$ per $x \to x_*$. Dunque, per x "vicino" ad x_* il valore di $f(x)$ è "vicino" ad y_* . Supponiamo ora che $g(x) \to \ell$ per $x \to y_*$: ancora, se l'argomento di g è "vicino" ad y_* il valore della funzione g in quel punto è "vicino" ad ℓ . Che accade se calcoliamo $g(f(x))$ con x "vicino" ad x_* ? Abbiamo che $f(x)$, che è l'argomento di g , è "vicino" ad y_* , quindi $g(f(x))$ è "vicino" ad ℓ , ma questo significa che il limite di $g \circ f$ per $x \to x_*$ è ℓ ? Non è così, come ci fa vedere il seguente controesempio.

Esempio : fissiamo $y_*, \ell \in \mathbb{R}$; se prendiamo

$$f(x) \equiv y_* , \qquad g(x) = \begin{cases} \ell & \text{se } x \neq y_* \\ \ell + 1 & \text{se } x = y_* \end{cases}$$

abbiamo (per qualunque x_*)

$$\lim_{x \to x_*} f(x) = y_* , \qquad \lim_{x \to y_*} g(x) = \ell$$

(perché $g(x) \equiv \ell$ in $\mathbb{R} \setminus \{y_*\}$), mentre invece è

$$\lim_{x \to x_*} g(f(x)) = \ell + 1$$

(perché $(g \circ f)(x) \equiv \ell + 1$ in tutto $\mathbb{R}$).

L'errore nella chiacchierata precedente è che $g(x)$ è "vicino" ad ℓ non quando x sta in un intorno di y_* , ma quando sta in un tale intorno privato del punto y_* stesso: da $\lim_{x \to y_*} g(x) = \ell$ non ricaviamo alcuna informazione sul valore di $g(x)$ per $x = y_*$ (ammesso che tale punto appartenga al dominio di g), pertanto se f assume in qualche punto il valore y_* non sappiamo nulla del valore di $g \circ f$ in quel punto. Nell'esempio, il valore $g(y_*)$ è diverso dal limite di g per $x \to y_*$. Allora, è chiaro che si può superare l'ostacolo in due modi: o vietando che f assuma il valore y_* , oppure dando informazioni sul valore di g nel punto y_* ; il prossimo risultato si chiama teorema di cambiamento di variabile nei limiti, oppure teorema del limite della composizione.

Teorema 6.11 : *siano f e g due funzioni reali, e sia*

$$\lim_{x\to x_*} f(x) = y_* , \qquad \lim_{x\to y_*} g(x) = \ell ,$$

dove x_* è un punto di accumulazione di $\mathrm{dom}(g\circ f)$ e y_* è un punto di accumulazione di $\mathrm{dom}\, g$. Se vale almeno una delle seguenti ipotesi:
1) *esiste $W_0 \in \mathscr{I}_{x_*}$ tale che $f(x) \neq y_*$ per ogni $x \in \mathrm{dom}(g\circ f)\cap W_0 \setminus \{x_*\}$,*
2) *$y_* \in \mathrm{dom}\, g$ e $g(y_*) = \ell$,*

allora $\displaystyle\lim_{x\to x_*} g\big(f(x)\big) = \ell$.

DIMOSTRAZIONE : anche questo teorema si può facilmente dimostrare usando la caratterizzazione sequenziale (☞ teorema 6.2), cosa che raccomandiamo di fare per esercizio; diamo invece la dimostrazione diretta, usando la definizione di limite. Fissiamo $U \in \mathscr{I}_\ell$: l'ipotesi su g dà

$$\exists V \in \mathscr{I}_{y_*} : \forall y \in (\mathrm{dom}\, g)\cap V\setminus\{y_*\}, \quad g(y)\in U .$$

Dato che V è un intorno di y_*, l'ipotesi su f dà

$$\exists W_1 \in \mathscr{I}_{x_*} : \forall x \in (\mathrm{dom}\, f)\cap W_1\setminus\{x_*\}, \quad f(x)\in V .$$

Poniamo per brevità

$$A = \mathrm{dom}(g\circ f) \subset \mathrm{dom}\, f , \qquad B = f(A) \subset \mathrm{dom}\, g :$$

dalle formule precedenti, osservando che $x\in A \Rightarrow f(x)\in B$, ricaviamo

$$\begin{aligned} x\in A\cap W_1\setminus\{x_*\} \quad &\Rightarrow \quad f(x)\in B\cap V \\ y\in B\cap V\setminus\{y_*\} \quad &\Rightarrow \quad g(y)\in U . \end{aligned} \tag{6.18}$$

Notiamo che se in entrambe le formule ci fosse scritto $B\cap V$, oppure in entrambe $B\cap V\setminus\{y_*\}$, potremmo sostituire y con $f(x)$ e ricavare subito la tesi $g\big(f(x)\big)\in U$. Se vale l'ipotesi 1), poniamo $W = W_0\cap W_1$: dalla prima formula (6.18) otteniamo

$$x\in A\cap W\setminus\{x_*\} \quad \Rightarrow \quad f(x)\in B\cap V\setminus\{y_*\} ,$$

che insieme alla seconda formula dà

$$x\in A\cap W\setminus\{x_*\} \quad \Rightarrow \quad g\big(f(x)\big)\in U , \tag{6.19}$$

che è la tesi. Se invece vale l'ipotesi 2), la seconda formula (6.18) diviene

$$y\in B\cap V \quad \Rightarrow \quad g(y)\in U ,$$

che unita alla prima dà ancora (6.19) con $W = W_1$. ∎

$\lim_{x\to x_0} F(x) = y_0$ $\lim_{x\to y_0} g(x) = \ell$ x_0 punto di acc di dom $g\circ F$; y_0 punto di acc di dom g

• $\exists W_0 \in I_{x_0} : F(x) \neq y_* \ \forall x \in \mathrm{dom}(g\circ F)\cap W_0\setminus\{x_0\}$.

$\rightarrow y_0 \in \mathrm{dom}\, g$ e $g(y_0) = \ell \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(F(x)) = \ell$

Come abbiamo già avuto modo di notare nel capitolo 5, il teorema 6.11 è di importanza fondamentale per il calcolo dei limiti, in quanto permette in molti casi di ridurre un limite composto a una sequenza di limiti più semplici.

Osservazione : grazie alla proposizione 6.3, l'ipotesi 2) può essere riscritta " g è continua nel punto y_* ".

Esempio : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\mathrm{sen}\, 3x} = \frac{2}{3}$; infatti, ricordando il limite notevole (6.11) e prendendo

$$f(x) = 2x , \quad g(x) = \frac{e^x - 1}{x} , \quad x_* = y_* = 0 , \quad \ell = 1$$

osserviamo che possiamo applicare il teorema appena dimostrato perché è verificata l'ipotesi 1), dunque

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x} = 1 .$$

Analogamente

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\, 3x}{3x} = 1 ,$$

dunque

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\mathrm{sen}\, 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\,\frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\frac{\mathrm{sen}\, 3x}{3x}} = \frac{2}{3} .$$

Esempio : $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{\mathrm{sen}(x^2+1-\cos x)+x+1} = e$; infatti $(x^2+1-\cos x)\to 0$, la funzione $\mathrm{sen}\, x$ è continua e pertanto $\mathrm{sen}(x^2+1-\cos x)\to 0$ per il teorema 6.11. Allora l'argomento dell'esponenziale tende ad 1, ma anche e^x è continua in $x=1$, quindi il limite è $e^1 = e$ (✎ es. 6.15).

Come applicazione del teorema 6.11, mostriamo alcuni altri limiti fondamentali, che generalizzano i limiti di q^n, di n^k e del loro rapporto (5.22) già visti nella sezione 5.8.

Proposizione 6.12 : *per ogni $q>0$*

$$\lim_{x\to+\infty} q^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } q>1 \\ 1 & \text{se } q=1 \\ 0^+ & \text{se } 0<q<1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty} q^x = \begin{cases} 0^+ & \text{se } q>1 \\ 1 & \text{se } q=1 \\ +\infty & \text{se } 0<q<1, \end{cases} \tag{6.20}$$

e per ogni $\beta\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} x^\beta = \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta>0 \\ 1 & \text{se } \beta=0 \\ 0^+ & \text{se } \beta<0. \end{cases} \tag{6.21}$$

Inoltre per ogni $q>0$ con $q\neq 1$ ed ogni $\beta\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{q^x}{x^\beta} = \begin{cases} +\infty & \text{se } q>1 \\ 0^+ & \text{se } 0<q<1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{q^x}{|x|^\beta} = \begin{cases} 0^+ & \text{se } q>1 \\ +\infty & \text{se } 0<q<1. \end{cases} \tag{6.22}$$

DIMOSTRAZIONE : per provare le (6.20) basta scrivere $q^x = e^{x \log q}$ e osservare che $x \log q$ tende a $+\infty$, a 0 o a $-\infty$ a seconda che sia $q > 1$, $q = 1$ oppure $0 < q < 1$. Allora le uguaglianze (6.20) seguono da (6.15) grazie al teorema 6.11 sul limite della composizione. Pressoché allo stesso modo, utilizzando anche (6.16), si prova (6.21).

Per quanto riguarda (6.22), limitiamoci al caso $q > 1$, $\beta > 0$ e $x \to +\infty$ (✎ es. 6.17), e cominciamo a dimostrare che la tesi è vera se $0 < \beta < 1$: questo si può fare osservando che grazie a (5.36) abbiamo

$$q^x = e^{x \log q} \geq 1 + x \log q > x \log q\,,$$

quindi

$$\frac{q^x}{x^\beta} > x^{1-\beta} \log q\,.$$

Poiché $1 - \beta > 0$, l'ultima quantità tende a $+\infty$ grazie a (6.21), quindi anche q^x/x^β diverge positivamente per il teorema di confronto 6.5. Il caso $\beta \geq 1$ segue ad esempio così: scelto $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > \beta$, poniamo $k = q^{1/n}$ e $\gamma = \beta/n$, e osserviamo che è ancora $k > 1$, mentre $0 < \gamma < 1$, e

$$\frac{q^x}{x^\beta} = \left(\frac{k^x}{x^\gamma}\right)^n;$$

allora k^x/x^γ diverge positivamente per quanto appena dimostrato, dunque diverge anche q^x/x^β per l'osservazione fatta subito dopo il teorema 6.6. ■

Osservazione : le formule (6.22), confrontate con le (6.20), dicono in sostanza che l'esponenziale q^x domina sulla potenza x^β.

Esempio : proviamo che

$$\lim_{x \to 0^+} (x \log x) = 0^-\,. \tag{6.23}$$

Osserviamo che si tratta di una forma indeterminata $0 \cdot \infty$; questa funzione può essere scritta come $g \circ f$, dove $g(x) = e^x x$ ed $f(x) = \log x$. Dato che $f(x) \to -\infty$ per $x \to 0^+$ e che per $x \to -\infty$ è $g(x) = -(e^x/|x|^{-1}) \to 0^-$ grazie a (6.22), il risultato segue dal teorema sul limite della composizione.

Esempio : da quanto appena visto segue subito che

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = 1\,; \tag{6.24}$$

infatti $x^x = \exp(\log x^x) = \exp(x \log x)$, e basta applicare ancora il teorema sul limite della composizione.

Con procedimenti analoghi si può dimostrare (✎ es. 6.18) che

$$\begin{aligned} &\forall \beta > 0, \quad \lim_{x \to 0^+} (x^\beta \log x) = 0 \\ &\forall \beta > 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^\beta} = 0 \end{aligned} \tag{6.25}$$

(anche queste formule si possono interpretare dicendo che le potenze di x dominano sul logaritmo di x).

Per le funzioni reali monotone (➡ appendice 6.3) vale un risultato di esistenza del limite che estende il teorema 5.40 relativo alle successioni.

Teorema 6.13 : *se f è debolmente crescente* [*decrescente*], *posto $a = \inf(\operatorname{dom} f)$ e $b = \sup(\operatorname{dom} f)$ esistono il limite da destra di f in a e quello da sinistra in b, e*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf\{f(x) : x > a\} \qquad [\sup]$$

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup\{f(x) : x < b\} \qquad [\inf]\,.$$

DIMOSTRAZIONE : possiamo restringerci al caso in cui f è debolmente crescente (altrimenti basta sostituire f con $-f$ e applicare la proposizione 3.16) e studiare solo il comportamento per $x \to b^-$ (altrimenti basta sostituire $f(x)$ con $-f(-x)$ e applicare la solita proposizione).

Poniamo $\ell = \sup\{f(x) : x < b\}$, e sia $H < \ell$ (notiamo che non può essere $\ell = -\infty$): per definizione di estremo superiore, esiste $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ con $\bar{x} < b$ tale che $f(\bar{x}) > H$, ma per la monotonia di f è $f(x) \geq f(\bar{x}) > H$ per ogni $x \in (\operatorname{dom} f) \cap]\bar{x}, b[$. Abbiamo dunque provato che

$$\forall H < \ell,\ \exists \bar{x} : \forall x \in (\operatorname{dom} f) \cap]\bar{x}, b[, \quad f(x) > H\,.$$

Se $\ell = +\infty$, questo significa che $f(x) \to \ell$ per la definizione (6.1). Se invece $\ell \in \mathbb{R}$, preso $K > \ell$ abbiamo $f(x) \leq \sup f < K$ per ogni x, quindi

$$\forall x \in (\operatorname{dom} f) \cap]\bar{x}, b[, \quad H < f(x) < K\,,$$

cioè ancora $f(x) \to \ell$. ■

Osservazione : in particolare, se $\operatorname{dom} f =]a, b[$ otteniamo

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf f \quad [\sup f]\,, \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = \sup f \quad [\inf f]\,.$$

I seguenti sono casi particolarmente frequenti di applicazione del teorema 6.13.

Corollario 6.14 : *se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è debolmente crescente* [*decrescente*] *esistono finiti sia il limite da destra di f in a che quello da sinistra in b, e*

$$f(a) \leq \lim_{x \to a^+} f(x) \leq \lim_{x \to b^-} f(x) \leq f(b)$$

$$[f(a) \geq \lim_{x \to a^+} f(x) \geq \lim_{x \to b^-} f(x) \geq f(b)]\,.$$

Corollario 6.15 : *se $a < x_* < b$ ed $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ è debolmente crescente [decrescente] esistono finiti i limiti da destra e da sinistra di f in x_*, e*

$$\lim_{x \to x_*^-} f(x) = \sup_{]a,x_*[} f \le f(x_*) \le \inf_{]x_*,b[} f = \lim_{x \to x_*^+} f(x)$$

$$[\![\lim_{x \to x_*^-} f(x) = \inf_{]a,x_*[} f \ge f(x_*) \ge \sup_{]x_*,b[} f = \lim_{x \to x_*^+} f(x)]\!] .$$

Esempio : consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ x+1 & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$$

(che è crescente), e il punto $x_* = 0$:

$$\sup_{\mathbb{R}^-} f = 0 < 1 = f(0) = f(\sup \mathbb{R}^-) .$$

Questo mostra che le disuguaglianze nei risultati precedenti possono talvolta essere disuguaglianze strette.

A conclusione della sezione mostriamo una caratterizzazione (➡ appendice 6.4) dell'esistenza del limite finito, che generalizza (✎ es. 6.21) la condizione di Cauchy già vista per le successioni (☞ teorema 5.48).

Teorema 6.16 : *se f è una funzione reale, e x_* è un punto di accumulazione di $\operatorname{dom} f$, allora sono equivalenti le due proposizioni seguenti:*
1) *esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \to x_*} f(x) = \ell$*
2) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno $V \in \mathscr{I}_{x_*}$ tale che per ogni $x, y \in (\operatorname{dom} f) \cap V \setminus \{x_*\}$ si ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

DIMOSTRAZIONE : iniziamo con $1) \Rightarrow 2)$; fissato $\varepsilon > 0$ dalla definizione di limite finito abbiamo che

$$\exists V \in \mathscr{I}_{x_*} : \forall x \in (\operatorname{dom} f) \cap V \setminus \{x_*\}, \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon .$$

Allora se $x, y \in (\operatorname{dom} f) \cap V \setminus \{x_*\}$ dalla disuguaglianza triangolare ricaviamo

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - \ell| + |f(y) - \ell| < 2\varepsilon ,$$

che equivale a 2).

Il viceversa è meno immediato. Intanto mostriamo che presa una qualsiasi successione $\{x_n\}_n$ di punti di $(\operatorname{dom} f) \setminus \{x_*\}$ che converge ad x_* la successione $\{f(x_n)\}_n$ è di Cauchy: infatti, fissato $\varepsilon > 0$, sia V l'intorno dato dall'ipotesi 2); dato che $x_n \to x_*$, esiste $\bar{n}$ tale che per $n \ge \bar{n}$ abbiamo $x_n \in V$, dunque $x_n \in (\operatorname{dom} f) \cap V \setminus \{x_*\}$. Ma allora se $n, m \ge \bar{n}$ da 2) otteniamo

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon ,$$

cioè $\{f(x_n)\}_n$ è di Cauchy.

Per il teorema di Cauchy 5.48, la successione $\{f(x_n)\}_n$ ha limite finito. Proviamo che tale limite non dipende dalla particolare successione $\{x_n\}_n$: fissiamo una successione $\{\bar{x}_n\}_n$ di punti di $(\operatorname{dom} f) \setminus \{x_*\}$ che converge ad x_*, e sia $\ell \in \mathbb{R}$ il limite di $\{f(\bar{x}_n)\}_n$; scelta un'altra successione $\{x_n\}_n$ come sopra, consideriamo la successione che si ottiene prendendo a turno un termine da $\{\bar{x}_n\}_n$ e uno da $\{x_n\}_n$:

$$y_{2n} = \bar{x}_n , \qquad y_{2n+1} = x_n .$$

Poiché sia la sottosuccessione dei termini pari che quella dei termini dispari di $\{y_n\}_n$ tendono ad x_*, per la proposizione 5.15 abbiamo $y_n \to x_*$; inoltre tutti i termini della successione appartengono a $(\operatorname{dom} f) \setminus \{x_*\}$, quindi per la prima parte della dimostrazione la successione $\{f(y_n)\}_n$ ha limite: in particolare tutte le sue sottosuccessioni devono avere lo stesso limite, per la proposizione 5.13. Ma la sottosuccessione dei termini pari $f(y_{2n}) = f(\bar{x}_n)$ tende ad ℓ, e quella dei termini dispari è $f(y_{2n+1}) = f(x_n)$, dunque anche $f(x_n) \to \ell$.

In conclusione abbiamo provato che

$$\forall \{x_n\}_n \subset \operatorname{dom} f \setminus \{x_*\}, \quad [x_n \to x_* \Rightarrow f(x_n) \to \ell] ,$$

che per il teorema 6.2 equivale a 1). ∎

Osservazione : nell'ultima parte della dimostrazione abbiamo in realtà provato che

$$[\forall x_n \to x_* \text{ con } x_n \ne x_*, \ \{f(x_n)\}_n \text{ ha limite}] \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{x \to x_*} f(x) ,$$

che generalizza il teorema 6.2.

$f : A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$, f è continua in x_0 se
$\forall U \in I_{f(x_0)}$ $\exists V \in I_{x_0}$ tale che $\forall x \in A \cap V$ $f(x) \in U$
. f è continua in $A \to f \in C^0(A)$

6.2 - Funzioni continue

Abbiamo già incontrato una definizione di continuità, nella sezione 5.5, e come preannunciato ora ne diamo un'altra: subito dopo dimostreremo che (nel caso di funzioni reali di variabile reale) le due definizioni sono equivalenti (➡ appendice 6.5).

Definizione : *se $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_* \in A$, si dice che f è continua in x_* se*

$$\forall U \in \mathscr{I}_{f(x_*)}, \ \exists V \in \mathscr{I}_{x_*} : \forall x \in A \cap V, \quad f(x) \in U . \tag{6.26}$$

Se f è continua in ogni punto di un sottoinsieme B di A si dice che f è continua su B ; se poi f è continua in ogni punto di A si dice semplicemente che f è continua, e si scrive $f \in C^0(A)$.

Notiamo che questa definizione ha molti punti in comune con la definizione di limite, ma anche alcune differenze.

Osservazione : mentre si può calcolare il limite di una funzione f anche in un punto x_* che non appartiene al dominio di f, non ha senso parlare di continuità al di fuori di esso; d'altra parte, mentre per calcolarvi il limite è necessario che x_* sia di accumulazione per il dominio di f, la definizione precedente ha senso anche se questa condizione non è verificata. Infine, mentre nella definizione di limite x_* e ℓ possono essere due qualunque elementi di $\overline{\mathbb{R}}$, nella definizione di continuità sia x_* che $f(x_*)$ devono essere numeri reali.

Esempio : la funzione $1/x$ è una funzione continua, in quanto lo è in tutti i punti del suo dominio; non ha senso l'obiezione "ma non è continua in zero", perché zero non appartiene al dominio della funzione! Mostriamo ad esempio, usando la definizione (6.26), che $1/x$ è continua in ogni punto x_* con $x_* > 0$ (per i punti $x_* < 0$ la dimostrazione è analoga, ed è lasciata per esercizio): scelto un intorno $U =]H, K[$ di $1/x_*$, poniamo

$$H' = \begin{cases} H & \text{se } H > 0 \\ 1/(2x_*) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$K' = \begin{cases} K & \text{se } K < +\infty \\ 2/x_* & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora $]H', K'[$ è ancora un intorno di $1/x_*$ perché $H' < 1/x_* < K'$, è contenuto in $]H, K[$, è costituito tutto da numeri positivi, e i suoi estremi sono numeri reali. È facile verificare che posto $a = 1/K'$ e $b = 1/H'$ l'intervallo $V =]a, b[$ è un intorno di x_* e per ogni $x \in]a, b[$ si ha $1/x \in]H', K'[\subset U$.

Vediamo qualche importante proprietà equivalente alla continuità (➡ appendice 6.6).

Proposizione 6.17 : *se $f : A \to \mathbb{R}$, la definizione* (6.26) *è equivalente ad ognuna delle seguenti:*

$$\forall U \in \mathscr{I}_{f(x_*)},\ \exists V \in \mathscr{I}_{x_*} : f(A \cap V) \subset U \tag{6.27}$$

$$\forall U \in \mathscr{I}_{f(x_*)},\ f^{-1}(U) \text{ contiene l'intersezione con } A \text{ di un intorno di } x_* \tag{6.28}$$

$$[x_* \text{ è un punto isolato di } A] \text{ o } [\lim_{x \to x_*} f(x) = f(x_*)] \tag{6.29}$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in A,\ \ |x - x_*| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_*)| < \varepsilon\,. \tag{6.30}$$

Dimostrazione : la (6.27) è una riscrittura della definizione (6.26), e la (6.28) è una riscrittura della (6.27); proviamo che (6.26) $\Rightarrow$ (6.29). Se f è continua in x_*, questo può essere un punto isolato di A (e allora (6.29) è vera), oppure un punto di accumulazione di A; in quest'ultimo caso, ha senso parlare di limite, ed essendo $A \cap V \setminus \{x_*\} \subset A \cap V$ la continuità di f implica che

$$\forall U \in \mathscr{I}_{f(x_*)},\ \exists V \in \mathscr{I}_{x_*} : \forall x \in A \cap V \setminus \{x_*\},\quad f(x) \in U\,,$$

cioè esattamente $\lim_{x \to x_*} f(x) = f(x_*)$.

Proviamo il viceversa: se x_* è isolato, per definizione esiste un intorno $V_0 \in \mathscr{I}_{x_*}$ tale che $A \cap V_0 = \{x_*\}$; allora, scelto un qualsiasi intorno U di $f(x_*)$, certamente $x \in A \cap V_0 \Rightarrow x = x_* \Rightarrow f(x) = f(x_*) \in U$ (☞ proposizione 5.1). Se invece x_* è di accumulazione e $\lim_{x \to x_*} f(x) = f(x_*)$, per definizione di limite fissato $U \in \mathscr{I}_{f(x_*)}$ esiste $V \in \mathscr{I}_{x_*}$ tale che

$$\forall x \in A \cap V \setminus \{x_*\},\quad f(x) \in U\,,$$

ma anche $f(x_*) \in U$, quindi per ogni $x \in A \cap V$ è $f(x) \in U$.

Infine, (6.30) è equivalente a (6.27) perché x_* e $f(x_*)$ sono numeri reali: ogni intorno di un numero reale a contiene un intervallo della forma $\{x : |x - a| < \varepsilon\}$, e viceversa ogni intervallo di questo tipo è un intorno di a (✎ es. 6.24). ■

Corollario 6.18 : *le due definizioni di continuità* (5.11) *e* (6.26) *sono equivalenti.*

Dimostrazione : abbiamo già visto (☞ proposizione 6.3) che se x_* è di accumulazione per il dominio la (sequenziale) continuità (5.11) equivale alla seconda parte di (6.29), e pure (☞ esercizio 5.38) che nei punti isolati ogni funzione è (sequenzialmente) continua, dunque (5.11) e (6.29) sono equivalenti (✎ es. 6.26). ■

Riprendendo le osservazioni fatte a proposito dei limiti, vediamo una fondamentale interpretazione della formula (6.30): l'applicazione della matematica consiste nel predire l'effetto conoscendo la causa, qualora il legame causa-effetto sia descritto da un modello matematico; ad esempio, sappiamo dalla Fisica che portando a mille gradi una barra cilindrica di un dato metallo, avente una lunghezza a freddo pari a x, la sua lunghezza finale sarà data da una legge $f(x)$. Conoscendo la legge f, e avendo a disposizione una barra di metallo, possiamo prevedere la lunghezza che essa avrà al termine dell'esperimento? La risposta (sorprendente) è: no. Infatti, per conoscere il valore di $f(x)$ è necessario, ovviamente, conoscere il valore di x, ed è proprio questo che non sappiamo: possiamo misurare la lunghezza della barra a meno di un millimetro, o magari di un millimicron, ma si tratterà sempre di una lunghezza approssimata; non conoscendo esattamente x, non possiamo predire $f(x)$.

Esempio : supponiamo che la legge f abbia il grafico riportato nella figura 6.5: questa funzione è discontinua in 1, perché i limiti da destra e da sinistra sono diversi, quindi non esiste il limite per $x \to 1$ (☞ proposizione 6.10). Se l'esito delle nostre misure ci dà un valore della variabile approssimativamente pari ad 1, come possiamo azzardare il valore "vero" della funzione? Questo sarà sensibilmente diverso a seconda che la "vera" x sia un poco inferiore, o un poco superiore ad 1, dunque la nostra predizione non può avere alcun valore, neanche approssimativo.

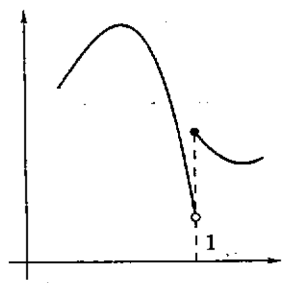


Fig. 6.5 : una funzione discontinua a salto

Esempio : supponiamo che nel caso della barra la legge sia $f(x) = 1.012\,x$ (questa è una funzione continua, ed è abbastanza realistica per barre di acciaio). Dato che le misure, come ogni misura nel mondo reale, sono approssimate, è irragionevole pretendere il valore "esatto" della lunghezza finale: supponiamo di accontentarci di conoscere il valore della lunghezza della barra riscaldata con una precisione di ± 0.1 ; questo significa che se diciamo che la lunghezza finale è $f(x)$, mentre invece quella "vera" sarebbe stata $f(x_*)$, abbiamo risolto in modo soddisfacente il problema purché i due numeri $f(x)$ e $f(x_*)$ distino non più di 0.1 . Dato che $|f(x) - f(x_*)| = 1.012\,|x - x_*|$, se riusciamo a determinare la misura approssimata x della "vera" lunghezza a freddo x_* (che non possiamo conoscere) con una precisione migliore di $0.0988\ldots = 0.1/1.012$ l'errore che commettiamo indicando $f(x)$ al posto dello (sconosciuto) valore $f(x_*)$ sarà inferiore a 0.1 , e quindi accettabile.

L'esempio precedente ci dà una misura dell'importanza di sapere se un processo è regolato da una funzione continua o no, e anche un'interpretazione della continuità: se indichiamo con ε l'errore che riteniamo accettabile nel valore di $f(x_*)$, il numero δ ci dice il massimo errore che possiamo commettere nella misurazione di x_* per ottenere risultati validi.

È importante, a questo punto, scrivere una formula che equivale a " f è continua in ogni punto di A ":

$$\forall x_* \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in A, \quad [|x - x_*| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_*)| < \varepsilon]\,. \tag{6.31}$$

Il numero δ dipende dunque da x_* ed ε . Questa osservazione ci suggerisce una fondamentale critica alle discussioni (e agli elogi della continuità) precedenti: se vogliamo sapere il valore di $f(x_*)$ con una precisione ε , come facciamo a stabilire la precisione $\delta = \delta(x_*, \varepsilon)$ con cui determinare il valore approssimato di x_* , se è proprio il valore di x_* quello che non conosciamo? Risponderemo a questa critica con l'introduzione delle funzioni uniformemente continue, nella sezione 6.5.

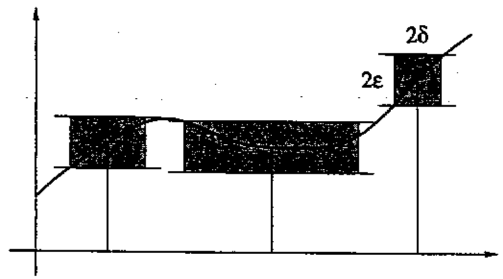


Fig. 6.6 : una funzione continua (δ dipende anche da x)

6.3 - Prime proprietà delle funzioni continue

Dai teoremi sui limiti della sezione 6.1 possiamo facilmente ricavare delle conseguenze relative alle funzioni continue; tuttavia, per queste ultime i risultati assumono in generale una forma più leggibile, ed hanno conseguenze molto più profonde. Iniziamo con la proprietà di località (☞ corollario 6.9).

Proposizione 6.19 : *se f è continua in x_* e se esiste un intorno $V_0 \in \mathscr{I}_{x_*}$ tale che*
1) $x_* \in \operatorname{dom} g$
2) $g(x) = f(x)$ in $(\operatorname{dom} g) \cap V_0$,

allora g è continua in x_* .

Esempio : la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{sen} x & \text{se } x \geq 0 \\ \cos x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è continua; infatti, se $x_* > 0$ la funzione g coincide nell'intorno $]0, 2x_*[$ di x_* con la funzione continua $1 + \operatorname{sen} x$, dunque g è continua in x_* . Lo stesso ragionamento si può ripetere se $x_* < 0$, con la funzione continua $\cos x$; infine, se $x_* = 0$, i limiti da destra e da sinistra di g sono uguali ad 1 , che è uguale a $g(0)$, dunque g è continua anche in zero (✎ es. 6.32).

Vediamo poi le conseguenze immediate del teorema 6.1.

Teorema di limitatezza locale 6.20 : *se f è continua in x_* , esiste un intorno $V_0 \in \mathscr{I}_{x_*}$ tale che $f|_{V_0}$ è limitata.*

Teorema di permanenza del segno 6.21 : *se f è continua in x_* ed $f(x_*) \neq 0$, esiste un intorno $V_0 \in \mathscr{I}_{x_*}$ tale che $f|_{V_0}$ ha segno costante.*

Osservazione : se f è continua in x_* ed $f(x_*) \neq 0$, la funzione $1/f$ è definita almeno in $(\mathrm{dom}\, f) \cap V_0$, dove V_0 è l'intorno dato dal teorema precedente.

Il prossimo risultato è la versione che otteniamo dal teorema 6.11 sul limite di una composizione (come si vede, per le funzioni continue la situazione si semplifica).

Teorema 6.22 : *se f è continua in x_* e g è continua in $f(x_*)$ allora $g \circ f$ è continua in x_*. In particolare, se f è continua e g è continua in tutti i punti dell'immagine di f allora $g \circ f$ è continua.*

Passiamo alle conseguenze del teorema 6.6.

Teorema 6.23 : *se f e g sono continue in x_*, lo sono anche le funzioni $f+g$, fg, $|f|$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$. Se poi $g(x_*) \neq 0$, sono continue in x_* anche $1/g$ e f/g.*

DIMOSTRAZIONE : la somma e il prodotto sono continue per il teorema 6.6; poi, dato che la funzione valore assoluto è continua in ogni punto, la sua composizione con f (che è $|f|$) è continua per il teorema precedente. Anche il massimo e il minimo tra f e g risultano continue, in quanto composizioni, somme, prodotti di funzioni che sono tutte continue, ☞ formule (4.13) e (4.14). L'ultima parte è immediata. ■

Esempio : se f è continua in un punto lo sono anche $f+k$ e kf per qualunque costante $k \in \mathbb{R}$ (✎ es. 6.34).

Applicando il teorema di permanenza del segno alla funzione $f-k$ anziché ad f otteniamo il prossimo risultato.

Corollario 6.24 : *se f è continua in x_* e $f(x_*) > k$ $[<k]$ esiste un intorno $V_0 \in \mathscr{I}_{x_*}$ tale che $f(x) > k$ $[<k]$ in $V_0 \cap (\mathrm{dom}\, f)$.*

Al termine di questa sezione, vediamo come si può precisare il teorema 6.13 nel caso delle funzioni continue.

Proposizione 6.25 : *sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato superiormente [inferiormente], e sia f una funzione continua tale che $A \cup \{\sup A\} \subset \mathrm{dom}\, f$ $[A \cup \{\inf A\} \subset \mathrm{dom}\, f]$. Se f è debolmente crescente si ha*

$$\sup_A f = f(\sup A) \qquad [\inf_A f = f(\inf A)]\,,$$

mentre se f è debolmente decrescente si ha $\inf_A f = f(\sup A)$ $[\sup_A f = f(\inf A)]$.

DIMOSTRAZIONE : mostriamo solo la prima uguaglianza, lasciando il resto come facile esercizio; per ogni $x \leq \sup A$ è $f(x) \leq f(\sup A)$, quindi $\sup_A f \leq f(\sup A)$, e ci basta provare la disuguaglianza opposta. Presa (☞ esercizio 5.30) una successione $\{a_n\}_n \subset A$ tale che $a_n \to \sup A$, abbiamo per ogni n

$$f(a_n) \leq \sup_A f\,,$$

ma $f(a_n) \to f(\sup A)$ per la continuità di f, così $f(\sup A) \leq \sup_A f$. ■

Il risultato precedente è d'aiuto nella determinazione degli estremi di insiemi abbastanza complicati (✎ es. 6.36).

Esempio : per calcolare l'estremo superiore dell'insieme $\{\arctan \frac{2n-1}{4n^2} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ osserviamo che per $n=1$ è $(2n-1)/4n^2 = 1/4$, e per ogni $n \geq 2$

$$\frac{2n-1}{4n^2} \leq \frac{2n}{4n^2} = \frac{1}{2n} \leq 1/4\,,$$

quindi l'insieme $A = \{\frac{2n-1}{4n^2} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ ha massimo e $\max A = \sup A = 1/4$. Dato che la funzione $\arctan x$ è continua e monotona crescente, e che l'estremo superiore da cercare è $\sup_A \arctan x$, per la proposizione precedente l'estremo superiore cercato, che è anche un massimo, è $\arctan(1/4)$.

6.4 - Funzioni continue su un intervallo

In questa sezione otteniamo i risultati più importanti relativi alle funzioni continue. Indicheremo per tutta la sezione con il simbolo I un generico intervallo, i cui estremi non sono necessariamente finiti e non appartengono necessariamente ad I. In alcuni risultati sarà necessario che l'intervallo sia chiuso e limitato, e in tal caso lo indicheremo generalmente con $[a,b]$, come in questa proposizione.

Proposizione 6.26 : *se $f \in C^0([a,b])$ e $f(a)$ ha segno diverso da $f(b)$ allora esiste un punto $\xi \in [a,b]$ tale che $f(\xi) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE : osserviamo che dall'ipotesi sul segno di $f(a)$ e $f(b)$ segue

$$f(a)f(b) \leq 0\,.$$

Come per il teorema di Bolzano-Weierstrass, sono possibili varie dimostrazioni, e ne presentiamo una simile a quella per bisezione già incontrata (➡ appendice 6.7) — attenzione:

questa appendice è facile ed importante, e dovrebbe essere letta anche da chi non ha mai osato avventurarsi nella parte di complementi (o non ha mai avuto voglia di farlo).

Poniamo $a_0 = a$, $b_0 = b$ e $m_0 = (a_0 + b_0)/2$; dato che $[f(m_0)]^2 \geq 0$, anche

mo è il punto medio

$$[f(a_0)f(m_0)][f(m_0)f(b_0)] \leq 0 .$$

Allora i due prodotti tra parentesi quadre non possono essere entrambi positivi: se il primo è minore o uguale a zero poniamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = m_0$, mentre se il primo è positivo poniamo $a_1 = m_0$ e $b_1 = b_0$. In ogni caso abbiamo

$$\begin{cases} a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0 \\ b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2^1} \\ f(a_0)f(b_0) \leq 0, \quad f(a_1)f(b_1) \leq 0 \, , \end{cases}$$

e poniamo $m_1 = (a_1 + b_1)/2$. Lasciando per esercizio il compito di completare il resto della dimostrazione per induzione, otteniamo come nel teorema 5.42 due successioni monotone, $\{a_n\}_n$ debolmente crescente e $\{b_n\}_n$ debolmente decrescente, che tendono allo stesso limite ξ , e tali che per ogni n

$$f(a_n)f(b_n) \leq 0 . \tag{6.32}$$

Dato che $a \leq a_n \leq b$, passando al limite abbiamo anche $\xi \in [a,b]$, dunque f è continua nel punto ξ . Poiché $a_n \to \xi$ e $b_n \to \xi$, passando al limite in (6.32) otteniamo per la continuità di f

$$[f(\xi)]^2 \leq 0 ,$$

cioè $f(\xi) = 0$. ■

Se una delle ipotesi della proposizione 6.26 è violata, la tesi non sussiste più in generale; lo mostriamo con alcuni esempi.

Esempio : la funzione $f(x) = 1/x$ è continua sull'insieme $[-1,0[\cup]0,1]$, e $f(-1)$ ha segno opposto a $f(1)$, però f non si annulla mai; peraltro, l'insieme $[-1,0[\cup]0,1]$ non è un intervallo.

Esempio : sull'intervallo $[-1,1]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \geq 0 \\ -3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

assume valori di segno opposto agli estremi, ma non si annulla mai; peraltro c'è un punto (lo zero) in cui f non è continua.

Esempio : sull'intervallo di numeri razionali $\mathbb{Q} \cap [1,2]$ la funzione continua $f(x) = x - \sqrt{2}$ assume valori di segno opposto agli estremi, ma non si annulla mai; questo mostra che il teorema di esistenza degli zeri si basa sulle proprietà di $\mathbb{R}$.

Osservazione : la proposizione 6.26 assicura l'esistenza di almeno un punto dove f si annulla (in breve: di uno zero di f), ma questo non è necessariamente uno solo; ad esempio la funzione $\cos x$ verifica sull'intervallo $[0, 3\pi]$ tutte le ipotesi della proposizione precedente, e si annulla tre volte (✎ es. 6.42).

Osservazione : la dimostrazione della proposizione 6.26 dà un metodo per approssimare le soluzioni di un'equazione; proviamo a determinare una soluzione dell'equazione $\operatorname{sen} x = 3x - 3$ con una precisione superiore a 0.5 . Questo significa trovare un numero che dista meno di 0.5 da una soluzione dell'equazione, ma le soluzioni dell'equazione sono gli zeri della funzione continua $f(x) = \operatorname{sen} x - 3x + 3$. Osserviamo che $f(1) = \operatorname{sen} 1 > 0$, e $f(2) = \operatorname{sen} 2 - 3 < 0$, dunque f si annulla in un punto $\xi \in]1,2[$: questo dista da $x = 3/2$ meno di $1/2$, quindi $x = 1.5$ è una soluzione approssimata dell'equazione con un errore inferiore a 0.5 (✎ es. 6.43).

Dalla proposizione 6.26 segue una proprietà fondamentale (➡ appendice 6.8).

Teorema di esistenza degli zeri 6.27 : *se $f \in C^0(I)$ assume valori di segno diverso, si annulla almeno una volta in I .*

DIMOSTRAZIONE : per ipotesi esistono due punti $a, b \in I$ in cui f assume valori di segno diverso; non è restrittivo supporre $a < b$. Dato che I è un intervallo ed $a, b \in I$, tutti i punti fra a e b appartengono ad I , cioè $[a,b] \subset I$. Allora la restrizione di f ad $[a,b]$ è continua in ogni punto di $[a,b]$, pertanto la funzione $f|_{[a,b]}$ soddisfa le ipotesi della proposizione precedente, dunque esiste un punto $\xi \in [a,b]$ tale che $f|_{[a,b]}(\xi) = 0$. Ma $f|_{[a,b]}(\xi) = f(\xi)$, e il teorema è dimostrato (✎ es. 6.37). ■

Le funzioni continue sono quindi le preferite dei sostenitori della massima *"natura non facit saltus"*: una funzione continua su un intervallo, che per un certo tratto è positiva, non può improvvisamente trovarsi ad essere negativa senza essere passata per il valore zero. Dunque i fenomeni modellati mediante funzioni continue non presentano "salti". Questo teorema è anche la giustificazione parziale dell'idea che le funzioni continue sono quelle che si possono tracciare senza staccare la penna dal foglio; è utile rifletterci sopra, e trovare qualche critica.

Proposizione 6.28 : *se $f \in C^0([a,b])$ e $f(a) \leq k \leq f(b)$, esiste un punto $\xi \in [a,b]$ tale che $f(\xi) = k$.*

La dimostrazione, lasciata per esercizio, si ottiene applicando la proposizione 6.26 alla funzione $f(x) - k$; il prossimo risultato ha conseguenze importanti.

Teorema dei valori intermedi 6.29 : *se $f \in C^0(I)$ la sua immagine $f(I)$ è un intervallo.*

DIMOSTRAZIONE : ricordiamo, ☞ formula (3.16), che provare che un insieme J è un intervallo significa dimostrare che presi comunque $\alpha, \beta \in J$, e k compreso fra α e β, allora anche $k \in J$. Siano dunque $\alpha, \beta \in f(I)$: questo significa che esistono due punti $a, b \in I$ tali che $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Scelto k fra α e β, dobbiamo provare che $k \in f(I)$, cioè che esiste $\xi \in I$ tale che $k = f(\xi)$. Non è restrittivo supporre $a \leq b$ e (a meno di sostituire f con $-f$) che $\alpha \leq k \leq \beta$. Allora il teorema segue (lasciamo i dettagli per esercizio) applicando la proposizione precedente alla restrizione di f all'intervallo $[a, b]$, che è tutto contenuto in I (☞ appendice 6.8). ■

Corollario 6.30 : *se* $f \in C^0(I)$ *la sua immagine* $f(I)$ *è un intervallo che ha per estremi* $\inf f$ *e* $\sup f$.

DIMOSTRAZIONE : è ovvio che $f(I) \subseteq [\inf f, \sup f]$, per definizione di estremo inferiore e superiore. D'altra parte, preso un qualsiasi $k \in]\inf f, \sup f[$, dalla disuguaglianza $\inf f < k$ segue che esiste $\alpha \in f(I)$ (dunque $\alpha = f(a)$ per qualche $a \in I$) tale che $\alpha < k$; analogamente da $k < \sup f$ segue che esiste $\beta > k$ con $\beta = f(b)$ per qualche $b \in I$. Dato che $f(a) < k < f(b)$, applicando il teorema dei valori intermedi all'intervallo $[a, b]$ (oppure $[b, a]$) otteniamo che $k \in f(I)$, quindi abbiamo provato che $]\inf f, \sup f[\subseteq f(I)$. ■

I due risultati precedenti (✎ es. 6.47) ci permettono di calcolare esplicitamente l'immagine di svariate funzioni (sono teoremi "di surgettività"): vediamo un esempio che abbiamo annunciato (ed usato per definire le funzioni $\log x$ ed a^x) nella sezione 5.9.

Corollario 6.31 : *l'immagine della funzione* e^x è $]0, +\infty[$.

Infatti, sappiamo che $\inf e^x = 0$, e che $e^x > 0$ per ogni x, quindi 0 non appartiene all'immagine; poi, $\sup e^x = +\infty$, e ovviamente $+\infty$ non appartiene all'immagine. Per il corollario precedente, l'immagine è l'intervallo $]\inf e^x, \sup e^x[=]0, +\infty[$. Da questo momento il logaritmo e le potenze con esponente reale sono completamente giustificate; per giustificare le radici n-esime e le funzioni trigonometriche inverse rimandiamo agli esercizi (✎ es. 6.48).

Un'ulteriore conseguenza del teorema di esistenza degli zeri è la caratterizzazione dell'iniettività di una funzione continua su un intervallo; vediamo prima alcuni esempi.

Esempio : la funzione $f(x) = 1/x$ è continua e iniettiva, ma non è monotona; essa ha come dominio un insieme che non è un intervallo.

Esempio : la funzione $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, sull'intervallo $] -1/2, 1/2]$, è iniettiva ma non è monotona; su questo intervallo, essa non è continua.

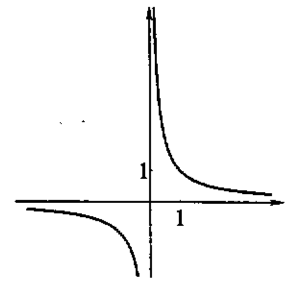


Fig. 6.7 : $y = 1/x$

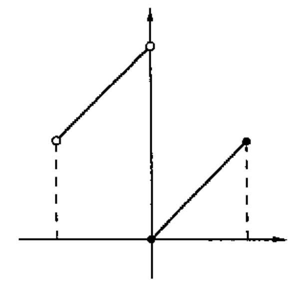


Fig. 6.8 : $y = x - \lfloor x \rfloor$ per $x \in]-1, 1]$

Per le funzioni continue definite su intervalli la situazione è differente, come mostra il prossimo risultato.

Teorema 6.32 : *se* $f \in C^0(I)$, *allora* f *è iniettiva se e solo se è strettamente monotona.*

DIMOSTRAZIONE : sappiamo già che se f è strettamente monotona allora è iniettiva, ☞ proposizione 4.7, e non importa se sia continua, né dove sia definita.

Dimostriamo per assurdo l'altra implicazione: negare che f è strettamente monotona significa (☞ esercizio 4.9) che non è strettamente crescente, e non è strettamente decrescente, cioè

$$\begin{cases} \exists x_0, y_0 \in I : [x_0 < y_0 \text{ e } f(x_0) \geq f(y_0)] \\ \exists x_1, y_1 \in I : [x_1 < y_1 \text{ e } f(x_1) \leq f(y_1)] . \end{cases}$$

Dunque la differenza fra il valore di f all'estremo destro e quello all'estremo sinistro dell'intervallo $[x_0, y_0]$ è minore o uguale a zero, quella relativa all'intervallo $[x_1, y_1]$ è maggiore o uguale a zero. Definiamo due funzioni sull'intervallo $[0, 1]$ ponendo

$$x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0) , \qquad y(t) = y_0 + t(y_1 - y_0) .$$

Queste sono chiaramente continue; l'immagine della prima è l'intervallo di estremi x_0 e x_1, quindi è tutta contenuta in I, e analogamente per la seconda, con estremi y_0 e y_1. Osserviamo poi che per ogni $t \in [0, 1]$ è $x(t) < y(t)$, in quanto

$$y(t) - x(t) = (1 - t)(y_0 - x_0) + t(y_1 - x_1) > 0 \qquad \forall t \in [0, 1]$$

(se $0 < t < 1$ i due addendi al secondo membro sono positivi, se $t \in \{0, 1\}$ uno è positivo e l'altro nullo). Dunque $x(t)$ e $y(t)$ sono l'estremo sinistro e l'estremo destro di un intervallo $[x(t), y(t)]$ sempre contenuto in I e mai ridotto a un punto.

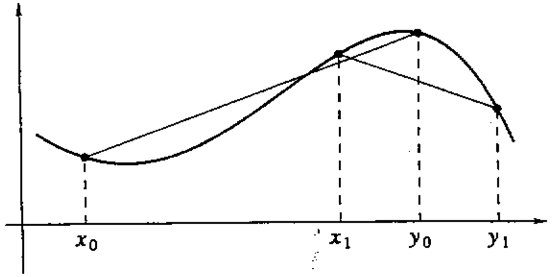


Fig. 6.9 : una funzione continua ma non strettamente monotona

Per quanto detto, la funzione

$$F(t) = f\big(y(t)\big) - f\big(x(t)\big)$$

è definita su $[0,1]$, ed è continua perché composizione di funzioni continue; inoltre per l'ipotesi fatta

$$F(0) = f\big(y_0\big) - f\big(x_0\big) \geq 0\,, \qquad F(1) = f\big(y_1\big) - f\big(x_1\big) \leq 0\,.$$

Possiamo applicare ad F il teorema di esistenza degli zeri, e otteniamo un punto $\bar{t}$ in cui F si annulla; ma

$$0 = F(\bar{t}) = f\big(y(\bar{t})\big) - f\big(x(\bar{t})\big) \Rightarrow f\big(y(\bar{t})\big) = f\big(x(\bar{t})\big)\,,$$

ed f non risulta iniettiva perché $x(\bar{t}) \neq y(\bar{t})$. ∎

Poniamoci il problema dell'inversione di una funzione: in generale, sappiamo che per invertire una funzione occorre che essa sia iniettiva (e surgettiva). Studiamo il caso in cui f è una funzione continua definita su un intervallo I: sappiamo che la sua immagine è un intervallo $J = f(I)$, e che se vogliamo che sia iniettiva essa deve essere strettamente monotona. In tal caso esiste la funzione inversa $f^{-1} : J \to I$, che è surgettiva ed è anch'essa monotona dello stesso tipo di f; ci chiediamo se questa inversa sia continua: la risposta discenderà dal prossimo risultato.

Proposizione 6.33 : *se g è una funzione reale monotona definita su un intervallo J, allora g è continua se e solo se la sua immagine $g(J)$ è un intervallo.*

Dimostrazione : se g è continua, la sua immagine è un intervallo per il teorema dei valori intermedi, quindi c'è da provare solo l'implicazione opposta, e lo facciamo per assurdo. A meno di sostituire g con $-g$ possiamo supporre che g sia debolmente crescente; scegliamo un punto $x_* \in J$ in cui g non è continua (trattiamo solo il caso in cui questo non è un estremo dell'intervallo J, lasciando per esercizio le facili modifiche nel caso rimasto). Per il corollario 6.15 esistono finiti i limiti

$$\ell^- = \lim_{x \to x_*^-} g(x) \leq g(x_*) \leq \lim_{x \to x_*^+} g(x) = \ell^+\,,$$

e le due disuguaglianze non possono essere entrambe delle uguaglianze, altrimenti g sarebbe continua in x_*, ☛ formula (6.29). Supponiamo (non è restrittivo: perché?) che la prima sia una disuguaglianza stretta (➡ appendice 6.9): allora, essendo

$$\ell^- = \sup_{x < x_*} g(x)\,,$$

abbiamo $g(x) \leq \ell^-$ per ogni $x < x_*$, cioè

$$\varnothing \neq g(\{x \in J : x < x_*\}) \subset]-\infty, \ell^-]\,.$$

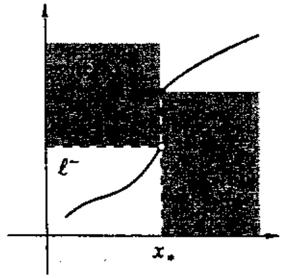


Fig. 6.10 : una funzione monotona e discontinua

D'altra parte per la monotonia di g è $g(x) \geq g(x_*)$ per ogni $x \geq x_*$, cioè

$$\varnothing \neq g(\{x \in J : x \geq x_*\}) \subset [g(x_*), +\infty[\,,$$

dunque l'immagine di g non può essere un intervallo, perché contiene punti minori o uguali ad ℓ^- e punti maggiori o uguali a $g(x_*)$, ma non contiene alcun punto dell'insieme non vuoto $]\ell^-, g(x_*)[$ (✎ es. 6.49). ∎

Teorema 6.34 : *se f è una funzione continua e invertibile definita sull'intervallo I, la sua inversa è continua.*

DIMOSTRAZIONE : segue subito dalle proposizioni precedenti: f è strettamente monotona e ha immagine l'intervallo $J = f(I)$; allora la sua inversa $f^{-1} : J \to I$ è strettamente monotona, definita su un intervallo, ed è surgettiva su I, cioè la sua immagine è un intervallo, pertanto è continua (✎ es. 6.51). ■

Come conseguenza immediata del teorema precedente abbiamo che le funzioni $\log x$, a^x, x^α, $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$, $\arctan x$ sono continue.

Terminiamo la sezione con un altro teorema fondamentale, che per le funzioni continue chiude (dal punto di vista teorico) il problema dell'esistenza del massimo (➡ appendice 6.10). Di nuovo, facciamo precedere il risultato da due esempi.

Esempio : la funzione $\tan x$, definita sul solo intervallo aperto $]-\pi/2, \pi/2[$, è continua, ma non ha né massimo né minimo (☞ figura 6.11), anzi non è neppure limitata.

Esempio : la funzione $(1-x)\operatorname{sen}(1/x)$, definita sull'intervallo $]0,1]$ (che non è chiuso), è continua e limitata, ma non ha né massimo né minimo (gli estremi superiore e inferiore sono ± 1); lo stesso vale per la funzione $(1-x/2)^2 \operatorname{sen}(6/x)$, il cui grafico è più leggibile.

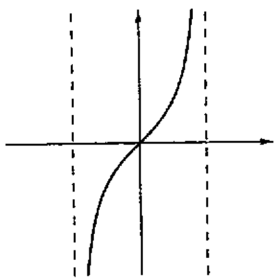


Fig. 6.11 : $y = \tan x$ su $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

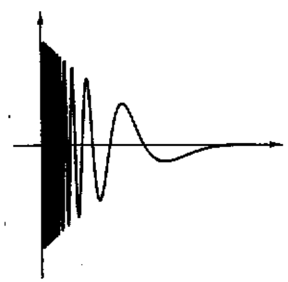


Fig. 6.12 : $y = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 \operatorname{sen}\frac{6}{x}$ su $]0,2]$

Teorema di Weierstrass 6.35 *se $f \in C^0([a,b])$ allora f ha massimo e minimo.*

DIMOSTRAZIONE : dimostriamo che f ha massimo, poi basterà applicare il teorema a $-f$ e ricordare la proposizione 3.16. Sia $M = \sup f$: è $M \in]-\infty, +\infty]$; se $M \in \mathbb{R}$, poniamo $y_n = M - \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, mentre se $M = +\infty$ poniamo $y_n = n$. In ogni caso, $\{y_n\}_n$ è una successione che cresce ad M; dato che $y_n < M = \sup f$, per definizione di estremo superiore esiste qualche valore di f (ovvero qualche punto dell'immagine di f) maggiore di y_n: indichiamo tale valore con $f(x_n)$. Abbiamo dunque per ogni n

$$y_n < f(x_n) \le M, \qquad a \le x_n \le b$$

per il teorema dei carabinieri, essendo $M = \lim_{n\to+\infty} y_n$, è (☞ esercizio 5.30)

$$f(x_n) \to M$$

Applicando alla successione limitata $\{x_n\}_n$ il teorema di Bolzano-Weierstrass 5.42, ne possiamo estrarre una sottosuccessione convergente, $x_{k_n} \to x_*$; dato che $a \le x_{k_n} \le b$ per ogni n, anche $x_* \in [a,b]$. Allora da $x_{k_n} \to x_*$ otteniamo per la continuità di f che $f(x_{k_n}) \to f(x_*)$, ma $\{f(x_{k_n})\}_n$ è una estratta di $\{f(x_n)\}_n$, quindi $f(x_{k_n}) \to M$, e per l'unicità del limite abbiamo trovato un punto x_* in cui

$$f(x_*) = M = \sup f,$$

cioè l'estremo superiore è un massimo. ■

I prossimi due risultati sono corollari immediati del teorema di Weierstrass.

Teorema di limitatezza 6.36 : *se $f \in C^0([a,b])$ allora f è limitata.*

Proposizione 6.37 : *se $f \in C^0([a,b])$ allora l'immagine di f è l'intervallo chiuso $[\min f, \max f]$.*

Il teorema di Weierstrass si generalizza in modo interessante (✎ es. 6.52).

Proposizione 6.38 : *se I è un intervallo, ed $f \in C^0(I)$ ha lo stesso limite ai due estremi dell'intervallo, allora f ha massimo oppure minimo.*

Rimandiamo all'appendice per la dimostrazione (➡ appendice 6.11).

6.5 - Funzioni uniformemente continue

Torniamo all'esempio della barra riscaldata che abbiamo incontrato nella sezione 6.2: nonostante le nostre critiche, nel caso particolare della funzione $f(x) = 1.012\,x$ siamo riusciti a determinare $\delta = \delta(x_*, \varepsilon)$ anche senza conoscere x_*. Questo è accaduto perché δ, nel caso particolare, dipendeva solo da ε, essendo pari a $\varepsilon \cdot 0.0988\ldots$ per ogni $\varepsilon > 0$: infatti, se $|x - x_*| < \varepsilon \cdot 0.0988\ldots$ abbiamo $|f(x) - f(x_*)| < \varepsilon$. Più in generale, introduciamo un'importante categoria di funzioni continue.

Definizione : *una funzione reale f si dice lipschitziana se esiste una costante $L \ge 0$ tale che*

$$\forall x, y \in \operatorname{dom} f, \quad |f(x) - f(y)| \le L\,|x - y|. \tag{6.33}$$

Se f è lipschitziana, la minima tra le costanti L che verificano (6.33) si chiama costante di Lipschitz di f, e f si dice L-lipschitziana.

Andrebbe verificato (✎ es. 6.61) che tale minima costante esiste (➡ appendice 6.12); notiamo che (come per la monotonia) la verifica che una funzione è lipschitziana appare molto difficile da portare avanti: bisogna controllare $f(x) - f(y)$ per tutte le coppie di punti x, y nel dominio della funzione. In realtà, vedremo un modo più agevole fra le conseguenze del teorema di Lagrange (☞ corollario 7.23).

Osservazione : la condizione di lipschitzianità ha un'interessante interpretazione grafica: possiamo riscrivere la formula (6.33) come

$$\forall x, y \in \operatorname{dom} f, \quad -L\,|x-y| \le f(x) - f(y) \le L\,|x-y|\,,$$

o anche

$$\forall x, x_* \in \operatorname{dom} f, \quad f(x_*) - L\,|x - x_*| \le f(x) \le f(x_*) + L\,|x - x_*|\,.$$

Dunque il grafico di f è compreso, per qualsiasi valore di x_*, tra i due grafici di $x \mapsto f(x_*) - L\,|x - x_*|$ e $x \mapsto f(x_*) + L\,|x - x_*|$, e cioè non può stare nelle regioni ombreggiate in figura, dove il vertice del doppio cono può essere un qualunque punto del grafico di f, e i coefficienti angolari delle due rette sono $\pm L$.

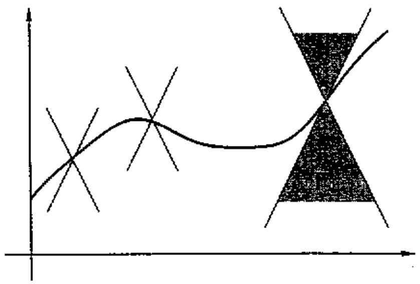


Fig. 6.13 : una funzione lipschitziana

Proposizione 6.39 : *ogni funzione lipschitziana è continua.*

DIMOSTRAZIONE : basta osservare che se f è L-lipschitziana e $|x - x_*| < \varepsilon/L$ si ha $|f(x) - f(x_*)| \le L\,|x - x_*| < L\varepsilon/L = \varepsilon$. ■

Esempio : la funzione valore assoluto è 1-lipschitziana; infatti per la seconda disuguaglianza triangolare (☞ proposizione 4.14)

$$\big||x| - |y|\big| \le |x-y|\,,$$

quindi è lipschitziana con costante $L \le 1$. D'altra parte se $0 < x < y$ è

$$\big||x| - |y|\big| = |x-y|\,,$$

quindi $L \ge 1$.

Esempio : la funzione x^+, parte positiva di x, è 1-lipschitziana; infatti, usando la prima disuguaglianza triangolare abbiamo

$$|x^+ - y^+| = \left|\frac{x + |x| - y - |y|}{2}\right| = \left|\frac{x-y}{2} + \frac{|x| - |y|}{2}\right| \le \frac{|x-y|}{2} + \frac{\big||x| - |y|\big|}{2}\,,$$

da cui usando la seconda disuguaglianza triangolare otteniamo

$$|x^+ - y^+| \le |x-y|\,, \tag{6.34}$$

e abbiamo provato che $L \le 1$; la disuguaglianza opposta è ovvia (basta prendere x e y entrambi positivi).

Esempio : la funzione $\operatorname{sen} x$ è 1-lipschitziana. Infatti, usando le formule di prostaferesi (ma se ne potrebbe fare a meno, ☞ corollario 7.23), si ottiene

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| = 2\left|\cos\frac{x+y}{2}\ \operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\right| \le 2\left|\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\right| \le |x-y|\,,$$

dove abbiamo usato (4.22) nell'ultima disuguaglianza. Questo prova che la funzione $\operatorname{sen} x$ è lipschitziana, e che la sua costante di Lipschitz L è minore o uguale ad 1. Prendendo poi $y = 0$ nella (6.33) abbiamo

$$\forall x \ne 0, \quad \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \le L\,,$$

da cui prendendo il limite per $x \to 0$ otteniamo $1 \le L$.

Osservazione : notando che per $x = y$ la disuguaglianza $|f(x) - f(y)| \le L|x-y|$ è banalmente verificata da qualsiasi funzione f e con qualsiasi L, la definizione di lipschitzianità può essere riscritta così:

$$\exists L > 0 : \forall x, y \in \operatorname{dom} f, \ \text{con } x \ne y, \quad \left|\frac{f(x) - f(y)}{x-y}\right| \le L\,. \tag{6.35}$$

Esempio : la funzione x^2 non è lipschitziana, perché scegliendo ad esempio $y = x + 1$ abbiamo

$$\left|\frac{x^2 - y^2}{x-y}\right| = \left|\frac{x^2 - (x+1)^2}{x - (x+1)}\right| = |2x+1|$$

che non è una funzione limitata, quindi non può essere verificata la condizione (6.35).

Esempio : la funzione $\sqrt{x}$, ristretta all'intervallo $[0,1]$, non è lipschitziana (quindi non lo è neppure su tutto $[0,+\infty[$). Infatti scelto $y = 0$ ed $x > 0$ abbiamo

$$\left|\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x-y}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}}\,,$$

che tende a $+\infty$ per $x \to 0$, quindi non è limitata e di nuovo non può essere verificata la proprietà (6.35).

Esempio : la funzione $\sqrt{x}$, ristretta all'intervallo $[1, +\infty[$, è lipschitziana, perché se $x, y \geq 1$ con $x \neq y$

$$\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}.$$

Osservazione : ogni funzione lipschitziana si può scrivere come differenza di due funzioni strettamente crescenti; se f è L-lipschitziana, e $M > L$, basta prendere $f_1(x) = f(x) + Mx$ e $f_2(x) = -Mx$ (verificate per esercizio che f_1 è crescente).

Per le funzioni lipschitziane la funzione che lega il numero δ della continuità ad x_* ed ε dipende dunque solo da ε, dato che possiamo scegliere in ogni punto $\delta = \varepsilon/L$ (o anche un numero positivo più piccolo, se per qualche motivo lo desideriamo). In questa situazione le critiche della sezione 6.2 non si applicano più: per determinare $f(x_*)$ con una precisione ε, conosciamo già la precisione δ con cui dobbiamo misurare x_*, e non abbiamo bisogno di aver già trovato x_*. Il discorso precedente si può generalizzare (➡ appendice 6.13).

Definizione : *si dice che una funzione* f *è uniformemente continua se*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \operatorname{dom} f, \quad [|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon]. \tag{6.36}$$

Proposizione 6.40 : *una funzione uniformemente continua è continua.*

La dimostrazione, sostituito y con x_*, è immediata dalle definizioni (6.31) e (6.36), ed è lasciata per esercizio; per di più il numero δ nella definizione (6.30) non dipende da x_*; è importante rendersi conto della differenza fra la formula (6.31), " f è continua in ogni punto", e la formula (6.36), " f è uniformemente continua".

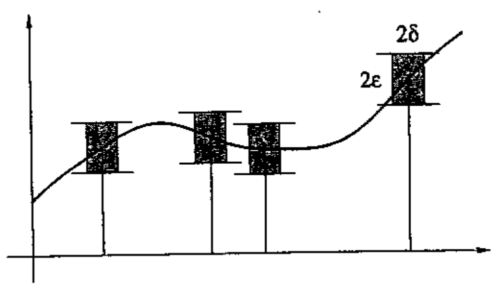


Fig. 6.14 : questo valore di δ è adatto in ogni punto

Per le funzioni uniformemente continue, la precisione con cui misurare la variabile indipendente x_* dipende solo dalla precisione richiesta nel valore di $f(x_*)$: fissata comunque un'altezza (positiva) 2ε è possibile trovare una larghezza positiva 2δ in modo che il grafico di f non esca dalle basi inferiore e superiore del rettangolo di altezza 2ε e base 2δ quando questo venga centrato in qualunque punto $(x_*, f(x_*))$ del grafico della funzione f.

Osservazione : mentre si può parlare di continuità in un punto, e per stabilirla basta conoscere la funzione solo in un intorno del punto (☞ proposizione 6.19), questo non è vero per l'uniforme continuità, che è dunque una proprietà *globale*.

Osservazione : se f è uniformemente continua ed $A \cap \operatorname{dom} f \neq \emptyset$ anche $f|_A$ è uniformemente continua. Notiamo che, se $f|_A$ è uniformemente continua, allora $f|_A$ è continua, ma in generale non è vero che f è continua in ogni punto di A : infatti, ad esempio, per qualsiasi funzione f e ogni $x_0 \in \operatorname{dom} f$ si ha che $f|_{\{x_0\}}$ è uniformemente continua.

Osservazione : la somma e la composizione di funzioni uniformemente continue sono funzioni uniformemente continue (la dimostrazione è per esercizio), mentre in generale non lo si può dire del prodotto; infatti (si vedano gli esempi qui di seguito) x è uniformemente continua, ma $x^2 = x \cdot x$ non lo è.

Esempio : ogni funzione lipschitziana è uniformemente continua; come abbiamo già visto, basta scegliere $\delta = \varepsilon/L$.

Esempio : la funzione $1/x$ ristretta all'intervallo $]0,1]$ non è uniformemente continua. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $x \in]0,1]$ poniamo $y = x/2$: allora $|x-y| = x/2$, e $|(1/x) - (1/y)| = 1/x$; per qualsiasi $\delta > 0$, se scegliamo $x < \min\{2\delta, 1/\varepsilon\}$ abbiamo $|x-y| < \delta$ ma $|(1/x) - (1/y)| > \varepsilon$.

Esempio : la funzione x^2, che è definita su tutto $\mathbb{R}$, non è uniformemente continua; basta osservare che se $x > 0$ e $y = x + \delta/2$ abbiamo $|x-y| < \delta$, ma $|x^2 - y^2| \geq x\delta$. Basta allora scegliere $x > \varepsilon/\delta$ per avere $|x^2 - y^2| > \varepsilon$.

Gli ultimi due esempi mostrano che non tutte le funzioni continue sono uniformemente continue, mentre il viceversa, come abbiamo appena visto, è sempre vero; tuttavia il prossimo risultato garantisce che le due nozioni coincidono se il dominio di f è un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ (condizione violata in entrambi gli esempi).

Teorema di Heine-Cantor 6.41 : *se* f *è continua sull'intervallo* $[a, b]$ *allora è uniformemente continua.*

DIMOSTRAZIONE : (➡ appendice 6.14) supponiamo per assurdo che f non sia uniformemente continua; negando (6.36) otteniamo

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0,\ \exists x, y \in [a, b] : \quad [|x-y| < \delta \text{ e } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon].$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, applichiamo questa formula con $\delta = 1/n$: otteniamo per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ due punti $x_n, y_n \in [a, b]$ tali che

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

compatto ⇒ essendo x_n a valori in $[a,b]$ $x_n \to x_* \in [a,b]$ per def. di compatto

Grazie al teorema di Bolzano-Weierstrass 5.42 possiamo estrarre da $\{x_n\}_n$ una sottosuccessione convergente, $x_{k_n} \to x_*$; dato che $a \le x_{k_n} \le b$ per ogni n, anche $x_* \in [a,b]$. Osserviamo poi che per la disuguaglianza triangolare (☞ proposizione 4.14)

$$|y_{k_n} - x_*| \le |y_{k_n} - x_{k_n}| + |x_{k_n} - x_*| \le \frac{1}{k_n} + |x_{k_n} - x_*| \,;$$

dato che queste quantità sono infinitesime (☞ proposizione 5.6), anche $y_{k_n} \to x_*$. Per la continuità di f è

$$f(x_{k_n}) \to f(x_*)\,, \qquad f(y_{k_n}) \to f(x_*)\,,$$

quindi

$$|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \to |f(x_*) - f(x_*)| = 0\,,$$

mentre per ogni n è $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \ge \varepsilon$, il che è assurdo. ■

Osservazione : le funzioni lipschitziane non esauriscono le funzioni uniformemente continue; infatti la funzione $\sqrt{x}$ ristretta all'intervallo $[0,1]$ non è lipschitziana (come abbiamo visto poco sopra), ma è uniformemente continua per il teorema di Heine-Cantor.

Osservazione : il teorema precedente assicura che per ogni ε esiste certamente qualche $\delta > 0$ che verifica (6.36), ma non dà alcuna informazione sul valore di tale δ; si tratta dunque solamente di uno strumento teorico.

Il prossimo risultato consente in un certo senso di localizzare l'indagine per vedere se una funzione è uniformemente continua (qui, a e b non sono necessariamente finiti).

Proposizione 6.42 : *se $a < c < b$ e $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che entrambe le restrizioni $f|_{(a,c]}$ ed $f|_{[c,b)}$ sono uniformemente continue, allora f è uniformemente continua.*

DIMOSTRAZIONE : fissiamo $\varepsilon > 0$; per definizione di uniforme continuità

$$\exists \delta_- > 0 : \forall x, y \le c, \quad [|x-y| < \delta_- \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon] \tag{6.37}$$

$$\exists \delta_+ > 0 : \forall x, y \ge c, \quad [|x-y| < \delta_+ \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon]\,. \tag{6.38}$$

Scegliamo $\delta = \min\{\delta_-, \delta_+\}$, e siano $x, y \in (a,b)$ con $|x-y| < \delta$; non è restrittivo supporre $x \le y$. Abbiamo tre possibilità: o $x \le y \le c$ (e allora $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ perché $\delta \le \delta_-$), o $c \le x \le y$ (e di nuovo $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ perché $\delta \le \delta_+$), o infine $x < c < y$; in quest'ultimo caso, abbiamo $|c - x| < |y - x| < \delta \le \delta_-$, e $x, c \in (a,c]$, dunque possiamo di nuovo applicare (6.37) e otteniamo $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Analogamente, essendo $|y - c| < |y - x| < \delta \le \delta_+$ e $c, y \in [c,b)$, applicando (6.38) abbiamo $|f(c) - f(y)| < \varepsilon$, dunque

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(c)| + |f(c) - f(y)| < 2\varepsilon\,.$$

Unendo i tre casi, abbiamo che se $|x-y| < \delta$ allora $|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$, dunque f è uniformemente continua. ■

Esempio : la funzione $\sqrt{x}$ è uniformemente continua su tutto il suo dominio $[0,+\infty[$; infatti, la sua restrizione a $[0,1]$ è uniformemente continua per il teorema di Heine-Cantor, e la sua restrizione a $[1,+\infty[$ è uniformemente continua perché lipschitziana, dunque possiamo applicare la proposizione precedente (✎ es. 6.64).

Grazie al teorema di Heine-Cantor, lo studio dell'uniforme continuità sugli intervalli chiusi e limitati si riduce alla verifica della semplice continuità. Rimangono aperti i casi degli intervalli limitati ma non chiusi, e degli intervalli non limitati: per il primo caso, possiamo dire qualcosa. Osserviamo intanto che se f è continua su $[a,b]$ allora è uniformemente continua; come abbiamo osservato in precedenza, anche la sua restrizione all'intervallo $]a,b[$ rimane uniformemente continua. Il prossimo risultato asserisce che vale anche il viceversa, cioè le funzioni uniformemente continue su un intervallo limitato $]a,b[$ sono tutte e sole le restrizioni ad $]a,b[$ di funzioni continue su $[a,b]$.

Teorema 6.43 : *se $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ è uniformemente continua, con $a, b \in \mathbb{R}$, allora esiste una funzione continua $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ che coincide con f in $]a,b[$.*

DIMOSTRAZIONE : grazie alla proposizione 6.4, basta dimostrare che esistono finiti i limiti di f per $x \to a^+$ e per $x \to b^-$, anzi (a meno di sostituire $f(x)$ con $f(-x)$) possiamo limitarci a quest'ultimo. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\delta > 0$ dato dall'uniforme continuità di f, e consideriamo l'intervallo $I =]b - \delta, b[$: questo è un intorno sinistro di b, e per ogni $x, y \in I$ abbiamo $|x - y| < \delta$, pertanto $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Questo significa che è verificata la condizione 2) del teorema 6.16, dunque f ha limite finito per $x \to b^-$. ■

Esempio : senza fare alcun calcolo, possiamo affermare che la funzione $1/x$ non può essere uniformemente continua sull'intervallo $]0,1]$, perché avendo limite $+\infty$ per $x \to 0^+$ non esiste una sua estensione continua in $x = 0$ (✎ es. 6.67).

Riportiamo in appendice qualche altra utile proprietà delle funzioni uniformemente continue definite su intervalli illimitati (➡ appendice 6.15).

6.6 - Infinitesimi

Il concetto di ordine di infinitesimo si rivelerà molto utile nel seguito, sia come notazione che per una migliore comprensione di quale sia la "parte importante" di una funzione. Come per le successioni, una qualunque funzione f tale che $\lim f(x) = 0$ si dice infinitesima per $x \to x_* \in \overline{\mathbb{R}}$: ad esempio, le funzioni x^α, $\alpha > 0$, sono tutte infinitesime per $x \to 0^+$; per queste funzioni, tutte "piccole" vicino a $x = 0$, è chiaro che alcune sono "molto più piccole" di altre. Per x molto piccolo, infatti, la funzione x^2 è uguale ad un multiplo piccolo della funzione x (è x volte x): se ci interessa solo il loro comportamento per $x \to 0$, dalla relazione $\lim_{x\to 0} (x^2/x) = 0$ possiamo dedurre che la funzione x^2 diviene "infinitamente più piccola" della funzione x. Una buona misura per stabilire se una funzione (infinitesima) è "molto più piccola" di un'altra, al punto di essere in qualche caso "trascurabile" di fronte all'altra, è quindi vedere se il quoziente delle due tende a zero.

Definizione : *siano f, g due funzioni infinitesime per $x \to x_*$, con $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_* (eventualmente privato del punto x_*); si dice che $f(x)$ è infinitesima di ordine superiore a $g(x)$ per $x \to x_*$ se*

$$\lim_{x\to x_*} \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

in tal caso si scrive $f(x) = o(g(x); x_*)$, che si legge "f è o piccolo di g".

Si definiscono in modo analogo gli infinitesimi per $x \to x_*^\pm$; a volte, quando sia chiaro il punto dove si confrontano gli infinitesimi, lo si può omettere, così che ad esempio sarà frequente trovare scritto $o(x^\alpha)$ anziché $o(x^\alpha; 0)$. Altre volte, al contrario, se è opportuno sottolineare anche il nome della variabile, potremo impiegare una notazione del tipo $o(x^2y; y \to y_*)$.

Esempio : $\operatorname{sen}^2 x = o(x; 0)$, dato che $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \operatorname{sen} x\right) = 0$.

Esempio : $e^{-x} = o(x^{-4}; +\infty)$, perché $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0$ (✎ es. 6.71).

Per gli infinitesimi, vale un importante principio di sostituzione.

Proposizione 6.44 : *siano $f_1 = o(g_1)$, $f_2 = o(g_2)$; allora le due funzioni*

$$\frac{f_1 + g_1}{f_2 + g_2} \qquad e \qquad \frac{g_1}{g_2}$$

hanno lo stesso comportamento per $x \to x_*$, cioè o hanno lo stesso limite, oppure nessuna delle due ha limite.

DIMOSTRAZIONE : basta osservare che

$$\frac{f_1 + g_1}{f_2 + g_2} = \left(\frac{\frac{f_1}{g_1} + 1}{\frac{f_2}{g_2} + 1}\right) \cdot \frac{g_1}{g_2},$$

e che la quantità tra parentesi tende ad 1 per $x \to x_*$. ■

Esempio : è facile verificare che $(1 - \cos x) = o(x; 0)$, quindi per la proposizione precedente

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \operatorname{sen}^2 x}{x + 1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Osservazione : è un grave (ma comunissimo ...) errore applicare questo "principio di sostituzione" in situazioni diverse da quella della proposizione 6.44. Ad esempio, se $f_1 = o(g_1)$ e $f_2 = o(g_2)$, non è affatto vero che le due frazioni

$$\frac{f_1 + g_1 + f_2 + g_2}{g} \qquad e \qquad \frac{g_1 + g_2}{g}$$

hanno lo stesso comportamento: basta prendere $g_1(x) = x$, $g_2(x) = -x$, $g(x) = f_1(x) = f_2(x) = x^2$ e osservare che x^2 è "o piccolo" sia di g_1 che di g_2. Le due frazioni scritte sopra diventano

$$\frac{x^2 + x + x^2 + (-x)}{x^2} \qquad e \qquad \frac{x + (-x)}{x^2}:$$

per $x \to 0$, la prima ha limite 2 mentre la seconda ha limite zero.

Osservazione : per evitare di incorrere in pericolosi errori, non si deve pensare che la scrittura $f(x) = o(g(x); x_*)$ indichi esattamente un'uguaglianza tra due funzioni, ma piuttosto l'appartenenza di f ad un insieme di funzioni (➡ appendice 6.16): ad esempio, scriviamo

$$x^2 = o(x; 0), \qquad x^3 = o(x; 0),$$

perché $\lim_{x\to 0} (x^2/x) = 0$ e $\lim_{x\to 0} (x^3/x) = 0$, ma non se ne deve certo dedurre che le due funzioni x^2 e x^3 sono uguali — come parrebbe, se si prendessero le due formule per uguaglianze e si applicasse la proprietà transitiva!

Nella pratica, spesso si compiono sugli "o piccoli" alcune manipolazioni algebriche, che li rendono molto utili: a titolo indicativo, ecco alcune "regole" di algebra degli infinitesimi; in quello che segue, supponiamo che f e g siano infinitesime per $x \to x_*$, non nulle vicino ad x_*. Anzitutto,

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad [\varphi = o(f) \Rightarrow k\varphi = o(f)] : \tag{6.39}$$

infatti, da $\lim_{x\to x_*} (\varphi(x)/f(x)) = 0$ segue $\lim_{x\to x_*} (k\varphi(x)/f(x)) = 0$. Un caso particolare di (6.39) è

$$-\varphi = o(f) \quad \Rightarrow \quad \varphi = o(f).$$

Ancora,

$$[\varphi = o(f), \ \psi = o(f)] \quad \Rightarrow \quad (\varphi + \psi) = o(f) : \tag{6.40}$$

in particolare (attenzione!) $o(f) - o(f) = o(f)$; la formula (6.40), la cui dimostrazione è lasciata per esercizio come quella delle prossime formule (✎ es. 6.72), dice che se ad una funzione infinitesima di ordine superiore rispetto a f aggiungiamo un'altra funzione con la stessa proprietà, non miglioriamo la nostra conoscenza della prima.

Osservazione : è falso che $\varphi = o(f) \Rightarrow (\varphi + f) = o(f)$; trovate un controesempio.

Altre proprietà, la cui semplice dimostrazione è lasciata per esercizio, sono:

$$[\varphi = o(f)\ ,\ f = o(g)] \Rightarrow \varphi = o(g) \tag{6.41}$$

$$[\varphi = o(f+g)\ ,\ f = o(g)] \Rightarrow \varphi = o(g) \tag{6.42}$$

$$[\varphi = f\psi\ ,\ \psi = o(g)] \Rightarrow \varphi = o(fg) \tag{6.43}$$

$$[\varphi = \eta\psi\ ,\ \eta = o(f)\ ,\ \psi = o(g)] \Rightarrow \varphi = o(fg) \tag{6.44}$$

$$[\varphi = \frac{\psi}{g}\ ,\ \psi = o(f)\ ,\ f = o(g)] \Rightarrow \varphi = o\Big(\frac{f}{g}\Big)\ . \tag{6.45}$$

In pratica le formule (6.39),...,(6.45) si usano scrivere come uguaglianze anziché come implicazioni, con un abuso di notazione molto comodo ma talvolta fonte di errori se non impiegato con la dovuta cautela:

$$k\,o(f) = o(f)$$

$$o(f) + o(f) = o(f)$$

$$o\big(o(f)\big) = o(f)$$

$$o\big(f + o(f)\big) = o(f)$$

$$f \cdot o(g) = o(fg)$$

$$o(f) \cdot o(g) = o(fg)$$

$$f = o(g) \quad \Rightarrow \quad \frac{o(f)}{g} = o\Big(\frac{f}{g}\Big)\ .$$

Nel caso particolare, molto frequente nella pratica, in cui le funzioni che compaiono nelle formule (6.40),...,(6.45) siano potenze positive di $(x - x_*)$, queste ultime sono molto più leggibili: limitandoci al caso $x_* = 0$, e sottintendendo che $\alpha, \beta > 0$, esse diventano

$$k\,o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$$

$$o(x^\alpha) + o(x^\alpha) = o(x^\alpha)\ , \qquad o(x^\alpha) + o(x^{\alpha+\beta}) = o(x^\alpha)$$

$$o\big(o(x^\alpha)\big) = o(x^\alpha)$$

$$o\big(x^\alpha + o(x^\alpha)\big) = o(x^\alpha)\ , \qquad o(x^\alpha + x^{\alpha+\beta}) = o(x^\alpha)$$

$$x^\alpha o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})\ , \qquad o(x^\alpha)o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$$

$$\frac{o(x^{\alpha+\beta})}{x^\beta} = o(x^\alpha)\ .$$

Vediamo qualche esempio di uso di queste regole.

Esempio : sappiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\ ,$$

quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x} = 0\ ,$$

cioè

$$\operatorname{sen} x - x = o(x; 0)\ ,$$

che si scrive abitualmente

$$\operatorname{sen} x = x + o(x)\ . \tag{6.46}$$

Esempio : da

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

si ricava

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\ , \tag{6.47}$$

e da

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

segue

$$e^x = 1 + x + o(x)\ . \tag{6.48}$$

Queste relazioni si possono anche comporre: ad esempio, grazie a (6.42) si può scrivere

$$\begin{aligned}\cos(\operatorname{sen} x) &= \cos\big(x + o(x)\big)\\ &= 1 - \frac{\big(x + o(x)\big)^2}{2} + o\big[\big(x + o(x)\big)^2\big]\\ &= 1 - \frac{x^2 + 2xo(x) + o(x)\,o(x)}{2} + o\big(x^2 + 2xo(x) + o(x)\,o(x)\big)\\ &= 1 - \frac{x^2 + o(x^2)}{2} + o\big(x^2 + o(x^2)\big)\\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\ ,\end{aligned}$$

dove le relazioni (6.39),...,(6.44) sono state usate varie volte (✎ es. 6.73).

Una relazione tra l'espressione di f in termine di infinitesimi e quella di f^{-1} è data dal prossimo risultato.

Proposizione 6.45 : *sia* $x_* \in \mathbb{R}$, *e sia* f *una funzione continua definita in un intorno di* x_*, *invertibile e tale che si abbia* $f(x) = f(x_*) + a(x - x_*) + o(x - x_*; x \to x_*)$, *con* $a \neq 0$ *: allora posto* $y_* = f(x_*)$ *si ha* $f^{-1}(y) = x_* + \frac{1}{a}(y - y_*) + o(y - y_*; y \to y_*)$.

DIMOSTRAZIONE : osserviamo anzitutto che f è continua in un intervallo che contiene x_*, quindi anche f^{-1} è continua in y_* (☞ teorema 6.34); se poniamo per $y \neq y_*$

$$G(y) = \frac{f^{-1}(y) - x_* - a^{-1}(y - y_*)}{y - y_*},$$

dobbiamo provare che $\lim_{y \to y_*} G(y) = 0$. Osserviamo che posto per $x \neq x_*$

$$F(x) = \frac{x - x_* - a^{-1}(f(x) - f(x_*))}{f(x) - f(x_*)}$$

abbiamo $G(y) = F(f^{-1}(y))$; possiamo applicare il teorema 6.11, dunque basta provare che $F(x) \to 0$ per $x \to x_*$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_*} F(x) &= \lim_{x \to x_*} \frac{x - x_* - a^{-1}\big(a(x - x_*) + o(x - x_*)\big)}{a(x - x_*) + o(x - x_*)} \\ &= \lim_{x \to x_*} \frac{-a^{-1} \cdot o(x - x_*)}{a(x - x_*) + o(x - x_*)} \\ &= \lim_{x \to x_*} \frac{o(x - x_*)}{a(x - x_*)} = 0,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la proposizione 6.44. ■

Esempio : grazie a questa proposizione, da (6.48) si deduce

$$\log(y) = (y - 1) + o(y - 1; 1),$$

da cui immediatamente

$$\log(1 + x) = x + o(x; 0) = x + o(x). \tag{6.49}$$

Come conseguenza di questa uguaglianza , ritroviamo il limite notevole (6.14):

$$(1 + x)^{1/x} = e^{\log(1+x)/x} = e^{1+o(x)/x}, \tag{6.50}$$

quindi

$$(1 + x)^{1/x} = e \cdot e^{o(x)/x} = e\left[1 + \frac{o(x)}{x} + o\Big(\frac{o(x)}{x}\Big)\right] = e + \frac{o(x)}{x},$$

da cui segue che $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$.

Osservazione : notiamo che in (6.50) non avremmo potuto usare (6.48), perché $1 + (o(x)/x)$ non è infinitesimo (✎ es. 6.74).

Un'altra espressione facilmente deducibile da $1 - x^2 = (1 + x)(1 - x)$ è

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + o(x). \tag{6.51}$$

Le espressioni tipo (6.46),…,(6.51) sono molto utili per il calcolo di limiti; vedremo che sono casi particolari di sviluppi validi per funzioni più generali (☞ teorema 7.29).

Oltre agli infinitesimi di ordine superiore, si definiscono gli infinitesimi dello stesso ordine.

Definizione : *due funzioni f, g, entrambe infinitesime per $x \to x_* \in \overline{\mathbb{R}}$ e non nulle in un intorno di x_* (eventualmente privato del punto x_*), si dicono infinitesime dello stesso ordine per $x \to x_*$ se*

$$\lim_{x \to x_*} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

in tal caso si scrive $f \sim g$.

Si verifica facilmente che quella appena definita è una relazione di equivalenza; rimandiamo all'appendice per un'estensione di questi concetti (➡ appendice 6.17).

Osservazione : è falso che se $f_1 \sim g_1$ e $f_2 \sim g_2$ allora $(f_1 + f_2) \sim (g_1 + g_2)$; infatti, ad esempio, $f \sim f$ e $-f \sim f$, ma non è vero che $(f - f) \sim 2f$. Invece si ha

$$f + o(f) \sim f, \tag{6.52}$$

e anzi si può vedere facilmente che se $\varphi \sim f$, cioè se $\lim_{x \to x_*} (\varphi/f) = \ell \neq 0$, si ha

$$\varphi(x) = \ell f(x) + o(f; x_*);$$

nel caso in cui $x_* \in \mathbb{R}$ e $f(x) = (x - x_*)^\alpha$, questo si scrive

$$\varphi(x) = \ell(x - x_*)^\alpha + o\big((x - x_*)^\alpha\big). \tag{6.53}$$

Per $x \to x_* \in \mathbb{R}$, è facile dire quale, tra due potenze di $(x - x_*)$, è infinitesima di ordine superiore rispetto all'altra: quella con l'esponente più grande; dunque le potenze positive di $(x - x_*)$, come infinitesimi, sono ordinate.

Definizione : *se vale (6.53) con $\ell \neq 0$, si dice che φ è un infinitesimo di ordine α per $x \to x_*$ rispetto all'infinitesimo $(x - x_*)$, e che ha parte principale $\ell(x - x_*)^\alpha$.*

Osservazione : se $\varphi(x) = \ell(x - x_*)^\alpha + o((x - x_*)^\alpha)$, allora (☞ proposizione 6.44) la frazione $\varphi(x)/g(x)$ si comporta, per $x \to x_*$, come la frazione $\ell(x - x_*)^\alpha/g(x)$, cioè o hanno lo stesso limite, oppure nessuna delle due ha limite (✎ es. 6.75).

Dunque, le potenze positive di $x - x_*$ sono una sorta di infinitesimi-campione per $x \to x_*$, e analogamente lo sono le potenze negative di $|x|$ per $x \to \pm\infty$: così, se $\varphi(x) = \ell/x^\alpha + o(x^{-\alpha}; +\infty)$, diremo che φ ha lo stesso ordine di $x^{-\alpha}$ per $x \to +\infty$, e che la sua parte principale è ℓ/x^α.

Osservazione : non bisogna pensare che gli infinitesimi del tipo x^α esauriscano la gamma degli infinitesimi: ad esempio, dalle formule (6.22) otteniamo subito che per $x \to 0^+$ la funzione $e^{-1/x}$ è infinitesima di ordine superiore a qualunque potenza positiva di x, e dalle (6.25) che la funzione $-1/\log x$ è infinitesima di ordine inferiore a qualunque potenza positiva di x. Infine, vi sono infinitesimi che non sono né di ordine superiore, né inferiore, ad alcuna potenza positiva di x: essi non sono confrontabili con i nostri infinitesimi-campione.

Esempio : avvicinandosi a $x = 0$, la funzione (positiva in $]0,1[$)

$$f(x) = \frac{1+\cos(1/x)}{2}e^{-1/x} + \frac{1-\cos(1/x)}{2}\frac{-1}{\log x}$$

oscilla continuamente tra $e^{-1/x}$ (nei punti in cui il coseno vale 1) e $-1/\log x$ (nei punti in cui il coseno vale -1). Posto $x_n = 1/(n\pi)$, per qualunque potenza α abbiamo (verificatelo per esercizio)

$$\min_{n\to+\infty}\lim \frac{f(x_n)}{x_n^\alpha} = 0\,, \qquad \max_{n\to+\infty}\lim \frac{f(x_n)}{x_n^\alpha} = +\infty\,,$$

dunque f non è né infinitesimo di ordine superiore rispetto ad x^α, né di ordine α, né di ordine inferiore.

Esercizi relativi al capitolo 6

Esercizio 6.1 : considerate la seguente proposizione: $\forall M > 0,\ \exists \bar{x} \in \mathbf{R} : \forall x \in \operatorname{dom} f,\ [x > \bar{x} \Rightarrow f(x) > M]$; è equivalente a dire che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$? E sostituendo $f(x) > M$ con $f(x) < M$, è equivalente a dire che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$?

Esercizio 6.2 : dimostrate che se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ allora $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$.

Esercizio 6.3 : traducete (6.4) in formule in cui non compaiano gli intorni, trattando tutti i casi (x_* e ℓ finiti o infiniti).

Esercizio 6.4 : usando la definizione, calcolate il limite per $x \to 0$ della funzione $f(x) = 1 - x + x^2$.

Esercizio 6.5 : una successione che ha limite finito è limitata (☞ teorema 5.19); è vero anche più in generale per le funzioni? Cercate un controesempio.

Esercizio 6.6 : dite se esiste $\lim_{x\to+\infty} e^{\operatorname{sen} x}$.

Esercizio 6.7 : provate che il limite della funzione $f(x) = \begin{cases} 1 - x + x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ k & \text{se } x = 0 \end{cases}$ per $x \to 0$ non dipende dal valore di k, dunque in generale non è uguale ad $f(0)$.

Esercizio 6.8 : dimostrate la proposizione 6.4.

Esercizio 6.9 : provate che se f e g hanno lo stesso dominio, se $f(x) \to +\infty$ per $x \to x_*$ e g è limitata inferiormente in un intorno di x_* allora $(f+g)(x) \to +\infty$ (è l'analogo per le funzioni della proposizione 5.26).

Esercizio 6.10 : enunciate e dimostrate l'analogo per le funzioni della proposizione 5.27 e della proposizione 5.31.

Esercizio 6.11 : calcolate, se esistono, i seguenti limiti:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2x}{2x^3 + x^4}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} e^x(\cos x - 2\,\mathrm{sen}\, x)$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} (1+e^x)\,\mathrm{sen}\, x$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\mathrm{sen}^2 x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\log(1+x)}$

h) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2 + \mathrm{sen}\, e^x}{2x}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sen}\, x}{x + \sqrt{3x}}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + 3\sqrt{x}}{2x - 5\sqrt{x}}$

k) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x + 3\sqrt{x}}{2x - 5\sqrt{x}}$.

Esercizio 6.12 : dimostrate la proposizione 6.7.

Esercizio 6.13 : dite se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x + x^2 & \text{se } x > 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ 1 + \cos x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ha limite per $x \to 0^+$, per $x \to 0^-$, per $x \to 0$. Dite poi in quali punti di $\mathbb{R}$ è continua.

Esercizio 6.14 : dite per quali valori del parametro reale a la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x + x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ a(1 + \cos x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

risulta continua per $x = 0$.

Esercizio 6.15 : calcolate, se esistono, i seguenti limiti:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2\,\mathrm{sen}(x-1)}{x^2-1} \cdot \dfrac{e^{x^2-1}-1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1-\cos(x+1)}{x+1} \cdot \dfrac{3(x-1)}{e^{x^2-1}-1}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log(1+\frac{a}{x})}{e^{a/x} - e^{b/x}}$, dove $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq b$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(2^x - 3^x)}{1 - \cos 3x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{7^x - 2^x}{\mathrm{sen}\,\mathrm{sen}^2\,\mathrm{sen}\sqrt{x}}$

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{7^x - 2^x}{\mathrm{sen}^4 \sqrt{x}}$

g) $\lim\limits_{x\to 1^+} \tan\left(\dfrac{\pi}{4}x\right) \dfrac{\mathrm{sen}(2^x - 2)}{x^2 - 1}$

h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{3}{\mathrm{sen}\, x} - \dfrac{1}{\mathrm{sen}\, 3x}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{x}{1-x^2}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\mathrm{sen}\, x - 1}{(x - \frac{\pi}{2})^2}$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{arcsen}\, x}{x}$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan 5x}{\mathrm{arcsen}\, 3x}$

m) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sqrt{1+\mathrm{sen}\, x} - \sqrt{1 - \mathrm{sen}\, x}}{\mathrm{sen}\, x}$.

Esercizio 6.16 : determinate, se esistono, i valori di $m, q \in \mathbb{R}$ per cui è vero che:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 5} - mx - q) = 0$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{5x^3}{x^2-1} - mx - q\right) = 0$.

Esercizio 6.17 : terminate la dimostrazione delle formule (6.22), esaminando i casi rimanenti (che non presentano problemi oppure si deducono da quello trattato).

Esercizio 6.18 : dimostrate le formule (6.25).

Esercizio 6.19 : calcolate, se esistono, i seguenti limiti:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\mathrm{sen}\, x)^x$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1 + e^{-x})^{e^x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \log\cos x$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\log\cos x)^x$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\log\cos x}$ (attenzione!)

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 - 2^x)$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x - \log^3 x^2 + 2\,\mathrm{sen}\, x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}$, e anche per $x \to +\infty$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x}\right)^{-1/\log x}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} (1-x)^{1/x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(ex + e) - \cos x}{\mathrm{sen}\, x}$.

Esercizio 6.20 : detta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \log x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ (x-1)^{-1} & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

calcolatene i limiti per x che tende a $-\infty$, 0^-, 0^+, 1^-, 1^+ e $+\infty$.

Esercizio 6.21 : deducete il teorema di Cauchy 5.48 per le successioni da quello 6.16 per le funzioni.

Esercizio 6.22 : sia f una funzione periodica; provate che se esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ allora f è costante.

Esercizio 6.23 : sia $f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(2x)=f(x)$ per ogni x; provate che se esiste il limite di f per $x\to 0^+$ allora f è costante.

Esercizio 6.24 : usando la definizione (6.26), dimostrate la continuità delle seguenti funzioni:
a) $f(x)=2x-3$ nel punto $x_*=2$
b) $f(x)=\dfrac{1}{3x+2}$ nel punto $x_*=-1$
c) $f(x)=x^2$ nel punto $x_*=0$.

Esercizio 6.25 : usando la caratterizzazione (6.30), calcolate esplicitamente il valore di δ per le seguenti funzioni:
a) $f(x)=2x-3$ nel punto $x_*=5$ con $\varepsilon=0.1$
b) $f(x)=x^2-3x$ nel punto $x_*=2$ con $\varepsilon=0.5$, e con $\varepsilon=100$
c) $f(x)=\operatorname{sen} x$ nel punto $x_*=\pi/2$ con $\varepsilon=0.5$, e con $\varepsilon=3$.

Esercizio 6.26 : dimostrate che la funzione di Dirichlet $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$, che vale 1 se $x\in\mathbb{Q}$ e zero altrimenti, non è continua in alcun punto.

Esercizio 6.27 : dimostrate che la funzione $x\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ è continua in $x_*=0$, e discontinua in tutti gli altri punti.

Esercizio 6.28 : considerate la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che $f(x)=0$ se $x\notin\mathbb{Q}$, mentre $f(x)=\frac{1}{n}$ se $x=\frac{m}{n}$ con m,n primi tra loro (cioè la frazione $\frac{m}{n}$ è ridotta ai minimi termini). Provate che f è discontinua in tutti i punti $x_*\in\mathbb{Q}$, e che è continua in tutti gli altri punti (per capire come dimostrare quest'ultima parte, contate ad esempio quanti sono i punti dell'intervallo $[0,1]$ in cui $f(x)\geq 1/10$).

Esercizio 6.29 : sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione che è sia S-periodica che T-periodica; provate che se il rapporto T/S è un numero razionale allora, scritto $T/S=p/q$ con $p,q\in\mathbb{N}^+$ primi tra loro, la funzione f è anche periodica di periodo T/p (qui la continuità non c'entra).

Esercizio 6.30 : sia $f\in C^0(\mathbb{R})$ una funzione che è sia S-periodica che T-periodica, con T/S irrazionale; provate che f è costante (occorrerà usare la proposizione 5.46).

Esercizio 6.31 : sia $A=\{x:\exists p,q\in\mathbb{Z}: x=p+q\pi\}$, e sia $f(x)=\mathbb{1}_A(x)$ la funzione caratteristica di A; provate che f è sia 1-periodica che π-periodica, e che non è costante. Come si accorda questo con i due esercizi precedenti?

Esercizio 6.32 : determinate, al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$, in quali punti le seguenti funzioni sono continue:
a) $\begin{cases} 1-x & \text{se } x\neq 0\\ \alpha & \text{se } x=0\end{cases}$

b) $\begin{cases} 1-\dfrac{x}{|x|} & \text{se } x\neq 0\\ \alpha & \text{se } x=0.\end{cases}$

Esercizio 6.33 : dite in quali punti è continua la funzione definita nell'esercizio 6.20.

Esercizio 6.34 : dite in quali punti le seguenti funzioni sono continue:
a) $\dfrac{e^{\operatorname{sen} x+2x\cos x}}{1+\cos^2 e^x}$
b) $\dfrac{e^x+x+1}{e^{\operatorname{sen} x}-\operatorname{sen} x-1}$.

Esercizio 6.35 : determinate, al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$, in quali punti le seguenti funzioni sono continue:
a) $\begin{cases} \operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x\neq 0\\ \alpha & \text{se } x=0\end{cases}$
b) $\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x\neq 0\\ \alpha & \text{se } x=0\end{cases}$
c) $\begin{cases} \dfrac{1-e^x}{\operatorname{sen} x} & \text{se } x\neq 0\\ \alpha & \text{se } x=0.\end{cases}$

Esercizio 6.36 : calcolate gli estremi superiori dei seguenti insiemi:
a) $\{\operatorname{sen}(1/n): n\in\mathbb{N}^+\}$
b) $\{\arctan(1-\frac{1}{n}): n\in\mathbb{N}^+\}$
c) $\{\log\arccos\sqrt{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}: n\in\mathbb{N}^+\}$.

Esercizio 6.37 : provate che se $f:[0,1]\to[0,1]$ è una funzione continua allora esiste almeno un punto in cui $f(x)=x$.

Esercizio 6.38 : provate che la tesi dell'esercizio 6.37 vale anche se è $f:[a,b]\to[a,b]$.

Esercizio 6.39 : vale ancora la tesi dell'esercizio 6.37 se è $f:]a,b[\to]a,b[$?

Esercizio 6.40 : dimostrate la seguente generalizzazione del teorema di esistenza degli zeri (a e b possono anche essere infiniti): se $f\in C^0(]a,b[)$ ha limiti di segno opposto per $x\to a^+$ e per $x\to b^-$ allora f si annulla almeno una volta in $]a,b[$.

Esercizio 6.41 : provate che ogni polinomio di grado dispari (a coefficienti reali) ha almeno una radice reale.

Esercizio 6.42 : trovate un esempio di funzione che verifica le ipotesi della proposizione 6.26, e che nell'intervallo $[a,b]$ ha infiniti zeri.

Esercizio 6.43 : provate che l'equazione $2x^3-3x+1/2=0$ ha tre soluzioni, e determinatele con un errore inferiore a 0.25.

Esercizio 6.44 : determinate quante soluzioni reali ha l'equazione $x^3-2x+5=0$.

Esercizio 6.45 : dimostrate che per ogni $k\in\mathbb{R}$ l'equazione $e^x=x^2-2x+k$ ha almeno una soluzione.

Esercizio 6.46 : sia $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ un polinomio di grado pari, con $a_0a_n < 0$; provate che P ha almeno due radici.

Esercizio 6.47 : determinate l'immagine della funzione definita nell'esercizio 6.20.

Esercizio 6.48 : determinate l'immagine di A tramite f nei casi seguenti:
a) $A = \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ con n dispari
b) $A = [0, +\infty[$, $f(x) = x^n$ con n pari
c) $A = [-\pi/2, \pi/2]$, $f(x) = \operatorname{sen} x$
d) $A = [0, \pi]$, $f(x) = \cos x$
e) $A =]-\pi/2, \pi/2[$, $f(x) = \tan x$.
Deducetene l'esistenza della radice n-esima, dell'arcoseno, dell'arcocoseno e dell'arcotangente.

Esercizio 6.49 : sia $f \in C^0(\mathbb{R})$ una funzione tale che esiste $K > 0$ per cui $|f(y) - f(x)| \geq K|y - x|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;
a) provate che f è iniettiva
b) provate f è strettamente monotona
c) provate che l'immagine di f è tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 6.50 : sia $f \in C^0([a,b])$; provate che la funzione $g(x) = \sup\{f(t) : t \leq x\}$ è continua (suggerimento: osservate l'andamento di g in qualche caso particolare). Per quali funzioni f si ha $f(x) = g(x)$ per ogni x ?

Esercizio 6.51 : provate che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x(1 - 1/|x|) & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

è continua, invertibile, e ha inversa discontinua. Questo contrasta con il teorema 6.34?

Esercizio 6.52 : trovate un esempio in cui f verifica le ipotesi della proposizione 6.38 su un intervallo aperto I e ha massimo ma non minimo, e uno in cui ha entrambi.

Esercizio 6.53 : provate che la funzione xe^{-x} ha massimo e minimo su $[0, +\infty[$.

Esercizio 6.54 : provate che la funzione $x^2 + x \operatorname{sen} x + \cos x$ ha minimo su $\mathbb{R}$.

Esercizio 6.55 : sia $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ un polinomio di grado pari, con $a_n > 0$; provate che P ha minimo su $\mathbb{R}$.

Esercizio 6.56 : provate che la funzione $\operatorname{sen} x + e^x$ non ha minimo su $\mathbb{R}$.

Esercizio 6.57 : provate che ogni funzione continua su $\mathbb{R}$ e periodica ha massimo e minimo.

Esercizio 6.58 : provate che la funzione $\pi \operatorname{sen} x + \sqrt{2} \cos 3x$ ha minimo su $\mathbb{R}$.

Esercizio 6.59 : provate che esiste una costante $c > 0$ tale che $e^{\operatorname{sen} x + 2\cos 3x} \geq c$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6.60 : sia $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(2x) = f(x)$ per ogni x ; provate che se f è continua allora è limitata.

Esercizio 6.61 : provate che se f è lipschitziana l'insieme $\{k \in \mathbb{R} : \forall x, y,\ |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|\}$ ha minimo (consideratene l'estremo inferiore e cercate di dimostrare che appartiene all'insieme, ☞ proposizione A6.17).

Esercizio 6.62 : provate che se f e g sono uniformemente continue lo è anche $\alpha f + \beta g$, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6.63 : provate che la composizione di due funzioni uniformemente continue lo è anch'essa.

Esercizio 6.64 : provate che $\sqrt[3]{x}$ è uniformemente continua.

Esercizio 6.65 : provate che ogni funzione continua su $\mathbb{R}$ e periodica è uniformemente continua.

Esercizio 6.66 : trovate un esempio di funzione $f \in C^0(\mathbb{R})$ che sia limitata ma non uniformemente continua.

Esercizio 6.67 : dite se la funzione $\operatorname{sen}(1/x)$ è uniformemente continua su $]0, 1]$.

Esercizio 6.68 : dite se la funzione $(\operatorname{sen} x)/x$ è uniformemente continua su $]0, 1]$.

Esercizio 6.69 : sia $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(2x) = f(x)$ per ogni x ; provate che se f è uniformemente continua allora è costante (☞ esercizi 6.23 e 6.60).

Esercizio 6.70 : provate che la funzione $\arctan x$ è uniformemente continua.

Esercizio 6.71 : dite se le seguenti relazioni sono vere o false:
a) $\cos x - 1 = o(x^2; 0)$
b) $\cos x = o(x; +\infty)$
c) $e^x - 1 = o(\sqrt{x}; 0)$
d) $1 - \cos \operatorname{sen} x = o(x; 0)$
e) $x^2 - 7x^3 + 5 = o(x - 1; 1)$
f) $x^{-2} + 7x^{-5} = o(x^{-1}; +\infty)$.

Esercizio 6.72 : dimostrate le formule (6.40),...,(6.45).

Esercizio 6.73 : verificate le seguenti formule:
a) $e^{\operatorname{sen} x} = 1 + x + o(x; 0)$
b) $\operatorname{sen}(\cos x - e^x) = x + o(x; 0)$
c) $\cos(\pi x) = -1 + \frac{\pi^2}{2}(x - 1)^2 + o\big((x - 1)^2; 1\big)$.

Esercizio 6.74 : calcolate i seguenti limiti, usando gli infinitesimi:
a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - 2\log(1 + x)}{x + \operatorname{sen} x}$
b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{2x + x^3}$
c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}$
d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/2 \operatorname{sen}^2 x}$
e) $\displaystyle\lim_{x \to 0+} \frac{x \operatorname{sen}^2 x - 25x^5}{\log\cos(x\sqrt{x})}$.

Esercizio 6.75 : determinate l'ordine di infinitesimo e la parte principale rispetto all' infinitesimo campione x , per $x \to 0$, delle seguenti funzioni:

a) $e^x - \cos x$

b) $e^{\operatorname{sen} x} - \cos(2\sqrt{x})$

c) $\log(\cos x) + \operatorname{sen}^2 x$

d) $\dfrac{1}{\cos x} - 1$.

Appendice al capitolo 6

Appendice 6.1 - Limite in spazi topologici

Le definizioni (6.4) e (6.5) valgono senza alcuna modifica per funzioni definite tra due spazi topologici di Hausdorff; analogamente alla proposizione A5.8, nella definizione di limite possiamo limitarci a considerare solo una base di intorni, sia nel dominio che nel codominio.

Proposizione A6.1 : *se* $\mathscr{B}_\ell$ *è una base degli intorni di* ℓ *e* $\mathscr{B}_{x_*}$ *è una base degli intorni di* x_* *, si ha* $\lim\limits_{x \to x_*} f(x) = \ell$ *se e solo se*

$$\forall U \in \mathscr{B}_\ell,\ \exists V \in \mathscr{B}_{x_*} : \forall x \in (\operatorname{dom} f) \cap V \setminus \{x_*\}, \quad f(x) \in U .$$

La facile dimostrazione è lasciata per esercizio.

Nel resto di questa appendice indichiamo con E ed F due spazi di Hausdorff, $A \subset E$, $x_* \in E$ è un punto di accumulazione di A e $f : A \to F$.

Osservazione : la definizione (6.5) può essere ulteriormente abbreviata osservando che $f(x) \to \ell$ per $x \to x_*$ se e solo se, considerando f definita sullo spazio topologico $A' = A \cup \{x_*\}$ (che magari coincide con A ; se $A' \neq A$ occorre definire $f(x_*)$ in un modo qualsiasi) con la topologia indotta da E si ha

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell, \quad \{x_*\} \cup f^{-1}(U) \in \mathscr{I}_{x_*} ,$$

dato che un insieme che contiene un intorno è anch'esso un intorno.

Dei varî teoremi citati o dimostrati nella sezione 6.1, alcuni si estendono ai limiti in spazi topologici di Hausdorff (☞ appendice 5.5): il teorema di unicità del limite, una debole versione del teorema di limitatezza (se $f(x) \to \ell$ per $x \to x_*$, ed $\ell' \neq \ell$, esiste un intorno $V \in \mathscr{I}_{x_*}$ tale che $f(x) \neq \ell'$ in $A \cap V \setminus \{x_*\}$), il teorema 6.11 sul limite della composizione e la proposizione 6.7 sul limite di una restrizione. Quest'ultima ha un'interessante estensione (☞ appendice 5.6), che si usa specialmente per calcolare limiti di funzioni di più variabili.

Proposizione A6.2 : *se* $A_1, \dots, A_m$ *sono sottoinsiemi di* A *tali che*
1) *esiste* $V_0 \in \mathscr{I}_{x_*}$ *tale che* $(A \cap V_0 \setminus \{x_*\}) \subset \bigcup_{i=1}^m A_i$
2) *esiste* $\ell \in F$ *tale che* $f|_{A_i}(x) \to \ell$ *per ogni* $i = 1, \dots, m$ *quando* $x \to x_*$,
allora $f(x) \to \ell$ *per* $x \to x_*$.

Dimostrazione : per ipotesi, fissato $U \in \mathscr{I}_\ell$, esistono m intorni $V_1, \dots, V_m$ di x_* tali che
$$\forall i = 1, \dots, m, \quad [x \in A_i \cap V_i \setminus \{x_*\} \Rightarrow f(x) \in U]\,;$$
posto
$$V = \bigcap_{i=0}^m V_i\,,$$
questo è un intorno di x_*, e
$$A \cap V \setminus \{x_*\} = A \cap V \cap V_0 \setminus \{x_*\} \subset \bigcup_{i=1}^m (A_i \cap V \setminus \{x_*\}) \subset \bigcup_{i=1}^m (A_i \cap V_i \setminus \{x_*\})\,.$$

La tesi segue subito, perché se $x \in A \cap V \setminus \{x_*\}$ allora esiste i tale che $x \in A_i \cap V_i \setminus \{x_*\}$, quindi $f(x) \in U$ per la scelta dei V_i. ∎

Questa proposizione dice dunque che se esistono un numero finito di domini che ricoprono un intorno di x_* in A, privato eventualmente del punto x_* stesso, e tali che le restrizioni di f a ciascuno di essi hanno tutte limite ℓ, allora $f(x) \to \ell$.

Esempio : se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$
cioè $f(x) = x\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$, allora il limite di $f(x)$ per $x \to 0$ è zero; infatti questo è ovvio per le due restrizioni di f a $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, e possiamo applicare la proposizione precedente.

Osservazione : il risultato precedente è falso se il numero dei sottinsiemi A_i può essere infinito; ad esempio, consideriamo la funzione definita su $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ da
$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}\,,$$

sia $I = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e per ogni $i \in I$ poniamo
$$A_i = \begin{cases} \{(x,y) : x = 0, y \neq 0\} & \text{se } i = \infty \\ \{(x,y) : x \neq 0, y = ix\} & \text{altrimenti:} \end{cases}$$
queste sono tutte le rette per l'origine di $\mathbb{R}^2$, private dell'origine stessa, ed è facile verificare che la loro unione è tutto A, e che $f|_{A_i} \to 0$ per ogni i, quando $(x,y) \to (0,0)$. Tuttavia, non è vero che $f \to 0$, dato che presa la successione (☞ appendice 6.2)
$$x_n = \frac{1}{n}\,, \qquad y_n = \frac{c}{n^2}$$
si ha $f(x_n, y_n) = c/(1+c^2)$ per ogni n.

Appendice 6.2 - Limiti e limiti sequenziali

Nel caso generale $f : A \subset E \to F$, con E ed F di Hausdorff, del teorema 6.2 sulla caratterizzazione sequenziale del limite si salva solo una parte.

Teorema A6.3 : *delle due proposizioni*
1) $\lim_{x \to x_*} f(x) = \ell$
2) *per ogni successione* $\{x_n\}_n$ *di punti di* $A \setminus \{x_*\}$, *se* $x_n \to x_*$ *allora* $f(x_n) \to \ell$,
è sempre vero che 1) ⇒ 2), *e se* x_* *ha una base di intorni numerabile è vero anche* 2) ⇒ 1).

Per la dimostrazione, basta guardare quella del teorema 6.2, che non fa uso di altre proprietà di $\overline{\mathbb{R}}$ se non del primo assioma di numerabilità.

Osservazione : in particolare, la caratterizzazione sequenziale del limite vale ogni volta che E è uno spazio metrizzabile.

Notiamo qui che i teoremi di confronto e algebrici valgono in generale se lo spazio F è uguale ad $\overline{\mathbb{R}}$.

Appendice 6.3 - Limite negli insiemi diretti; massimo e minimo limite

Abbiamo visto (☞ appendice 5.3) che su ogni insieme diretto D si può definire una particolare topologia compatibile con l'ordine e per la quale D ha un (unico) punto di accumulazione, ∞. Allora possiamo parlare di limite lungo un insieme diretto.

Definizione : *se $f : D \to F$ con D diretto, scriviamo che*

$$\lim_{x \in D} f(x) = \ell$$

se, indicando con ∞ il punto aggiuntivo, si ha $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$ nel senso abituale, vale a dire

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists \bar{x} \in D : \forall x > \bar{x}, \quad f(x) \in U . \tag{A6.1}$$

Osservazione : se D è un insieme diretto, il limite (se esiste) è unico (verificatelo per esercizio); invece, se D è solo ordinato, la (A6.1) può essere verificata con varî ℓ diversi. Ad esempio, se $D = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ con l'ordine dato da

$$m \leq n \quad \Longleftrightarrow \quad [mn > 0 \ \text{e} \ |m| \leq |n|]$$

(dunque $1 \leq 2 \leq 3 \leq \cdots$ e $-1 \leq -2 \leq -3 \leq \cdots$, ma i numeri positivi e negativi non sono confrontabili fra loro: è come se ci fossero due direzioni in cui "si va all' infinito", e D non è diretto perché non c'è alcun numero maggiore sia di 1 che di -1), la funzione $f(n) = n/|n|$ tenderebbe sia ad 1 che a -1, perché verifica (A6.1) con $\bar{x} = 1$ per $\ell = 1$ e $\bar{x} = -1$ per $\ell = -1$. Ecco perché la definizione precedente si dà solo negli insiemi diretti.

Il teorema 6.13 di esistenza del limite per funzioni monotone è un caso particolare di un risultato valido su insiemi diretti.

Teorema A6.4 : *se D è un insieme diretto e $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione monotona debolmente crescente, esiste*

$$\lim_{x \in D} f(x) = \sup_D f .$$

La dimostrazione si ottiene facilmente riadattando quella del teorema 6.13 e utilizzando (A6.1). Per le funzioni a valori in $\overline{\mathbb{R}}$, possiamo allora definire delle quantità analoghe al massimo e minimo limite per successioni. Supponiamo che E sia uno spazio topologico, $A \subset E$, $x_* \in E$ sia un punto di accumulazione di A e $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Abbiamo già notato (☞ appendice 5.3) che l'insieme degli intorni di un punto può essere facilmente reso un insieme diretto: poniamo

$$D = \{V' \subset E : V' = V \cap A \setminus \{x_*\} \text{ per qualche } V \in \mathscr{I}_{x_*}\} ,$$

e diciamo che se $U', V' \in D$ è $U' \leq V'$ se $V' \subseteq U'$ (osserviamo che $V' \in D \Rightarrow V' \neq \varnothing$, perché x_* è di accumulazione). Definiamo due funzioni su D a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ ponendo per ogni $V' \in D$

$$\underline{f}(V') = \inf_{V'} f , \qquad \overline{f}(V') = \sup_{V'} f .$$

È facile vedere che queste sono monotone ($\underline{f}$ è debolmente crescente e $\overline{f}$ è debolmente decrescente), quindi per il teorema A6.4 entrambe le funzioni hanno limite lungo D.

Definizione : *poniamo*

$$\limsup_{x \to x_*} f(x) = \lim_{V' \in D} \overline{f}(V') , \qquad \liminf_{x \to x_*} f(x) = \lim_{V' \in D} \underline{f}(V') .$$

Osserviamo che, a differenza del limite, il massimo e il minimo limite esistono sempre.

Proposizione A6.5 : *si ha*

$$\limsup_{x \to x_*} f(x) = \inf_{V \in \mathscr{I}_{x_*}} \Big(\sup_{x \in A \cap V \setminus \{x_*\}} f(x) \Big) , \qquad \liminf_{x \to x_*} f(x) = \sup_{V \in \mathscr{I}_{x_*}} \Big(\inf_{x \in A \cap V \setminus \{x_*\}} f(x) \Big) .$$

La dimostrazione di questa caratterizzazione del massimo e del minimo limite, che non fa intervenire gli insiemi diretti, è una semplice verifica. Per esercizio potete provare che le corrispondenti definizioni già date per le successioni nella sezione 5.7 sono un caso particolare di queste.

Possiamo riscrivere la definizione di massimo limite come

$$\begin{aligned} \ell = \limsup_{x \to x_*} f(x) \iff & \begin{cases} \forall V \in \mathscr{I}_{x_*}, \ \sup\limits_{x \in A \cap V \setminus \{x_*\}} f(x) \geq \ell \\ \forall \lambda > \ell,\ \exists V \in \mathscr{I}_{x_*} : \sup\limits_{x \in A \cap V \setminus \{x_*\}} f(x) \leq \lambda \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \forall V \in \mathscr{I}_{x_*},\ \forall \xi < \ell,\ \exists x \in A \cap V \setminus \{x_*\} : f(x) > \xi \\ \forall \lambda > \ell,\ \exists V \in \mathscr{I}_{x_*} : \forall x \in A \cap V \setminus \{x_*\},\ f(x) \leq \lambda \end{cases} \end{aligned} \tag{A6.2}$$

(e qualcosa di simile per il minimo limite: trovatelo per esercizio). Vale per il massimo e il minimo limite una caratterizzazione sequenziale analoga a quella data per il limite nel teorema 6.2.

Proposizione A6.6 : *se $\ell = \limsup\limits_{x \to x_*} f(x)$ allora*

$$\ell = \max\{\limsup_{n \to +\infty} f(x_n) : x_n \in A \setminus \{x_*\}, x_n \to x_*\} , \tag{A6.3}$$

mentre il viceversa è vero se x_* ha una base numerabile di intorni; la stessa relazione intercorre tra $\ell = \liminf\limits_{x \to x_*} f(x)$ e

$$\ell = \min\{\liminf_{n \to +\infty} f(x_n) : x_n \in A \setminus \{x_*\}, x_n \to x_*\} .$$

La caratterizzazione (A6.3) del massimo limite può essere riscritta

$$\begin{cases} \forall \{x_n\}_n \subset A \setminus \{x_*\},\ [x_n \to x_* \Rightarrow \limsup_{n\to+\infty} f(x_n) \le \ell] \\ \exists \{x_n\}_n \subset A \setminus \{x_*\} : [x_n \to x_* \text{ e } \limsup_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell] \end{cases}$$

o anche (dimostratelo per esercizio ricordando che $\limsup_{n\to+\infty} f(x_n)$ è il limite di un'opportuna successione estratta)

$$\begin{cases} \forall \{x_n\}_n \subset A \setminus \{x_*\},\ [x_n \to x_* \Rightarrow \limsup_{n\to+\infty} f(x_n) \le \ell] \\ \exists \{x_n\}_n \subset A \setminus \{x_*\} : [x_n \to x_* \text{ e } f(x_n) \to \ell] \ : \end{cases}$$

usando questa scrittura, e la traduzione (A6.2) della definizione di massimo limite, non è difficile (fate anche questo per esercizio) dimostrare la proposizione A6.6.

Per il massimo e il minimo limite valgono proprietà algebriche simili a quelle già viste nel capitolo 5, e in particolare queste disuguaglianze (☞ proposizione A5.22):

$$\begin{aligned} \limsup_{x\to x_*}(f+g)(x) &\le \limsup_{x\to x_*} f(x) + \limsup_{x\to x_*} g(x) \\ \liminf_{x\to x_*}(f+g)(x) &\ge \liminf_{x\to x_*} f(x) + \liminf_{x\to x_*} g(x)\,. \end{aligned} \tag{A6.4}$$

Notiamo che non vale l'analogo della proposizione 6.7, dato che (☞ proposizione A5.21) se x_* è un punto di accumulazione dell'insieme $B \subset A$ allora

$$\liminf_{x\to x_*} f(x) \le \liminf_{x\to x_*} f\,|_B\,(x) \le \limsup_{x\to x_*} f\,|_B\,(x) \le \limsup_{x\to x_*} f(x)\,.$$

Dato che il dominio della somma è l'intersezione dei domini, queste disuguaglianze ci permettono, per dimostrare (A6.4), di restringerci al caso in cui le due funzioni hanno lo stesso dominio. Rispetto alla proposizione A5.22 c'è una differenza, e cioè che non compaiono in (A6.4) le due disuguaglianze

$$\liminf_{x\to x_*}(f+g)(x) \le \limsup_{x\to x_*} f(x) + \liminf_{x\to x_*} g(x) \le \limsup_{x\to x_*}(f+g)(x) \ :$$

possiamo dire che queste sono vere in generale soltanto se f e g hanno lo stesso dominio (almeno in un intorno di x_*); per esercizio, potete trovare i facili controesempi se questa condizione non è verificata. Notiamo che la condizione è sempre soddisfatta per le successioni, che hanno come dominio una semiretta di $\mathbb{N}$.

Appendice 6.4 - Condizione di Cauchy per funzioni; oscillazione

Possiamo generalizzare alle funzioni alcune nozioni e proprietà già viste per le successioni; anzitutto non è difficile provare (fatelo per esercizio) l'analogo del corollario 5.45, e cioè che una funzione a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ ha limite se e solo se minimo e massimo limite coincidono. Poi, ricordando la definizione (5.17) di oscillazione e indicando con D l'insieme diretto dell'appendice 6.3, la parte 2) del teorema 6.16 equivale a

$$\lim_{V'\in D} \omega\big(f(x), x \in V'\big) = 0\,.$$

Appendice 6.5 - Continuità e continuità sequenziale

Nell'appendice continueremo a distinguere tra continuità e continuità sequenziale. Come abbiamo visto (☞ appendice 6.2), le due nozioni coincidono se il dominio verifica il primo assioma di numerabilità; osserviamo in particolare che, dato che uno spazio metrico lo verifica, per le funzioni definite su uno spazio metrico è inutile parlare di continuità sequenziale.

Appendice 6.6 - Caratterizzazioni della continuità

È possibile definire la nozione di continuità anche in spazi topologici di Hausdorff generali; infatti, una volta definiti i limiti delle funzioni (☞ appendice 6.1), basterà chiamare continue quelle funzioni f tali che per ogni punto di accumulazione x_0 che appartiene al dominio di f si abbia

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Una definizione del genere non avrebbe senso in spazi non di Hausdorff, perché non è unico il limite.

Osservazione : da quanto visto nell'appendice 6.2, in uno spazio metrico X una funzione f è continua se e solo se per ogni successione $x_n \to x$ si ha $f(x_n) \to f(x)$; invece in uno spazio topologico generale le due nozioni di continuità e di continuità sequenziale possono non coincidere (☞ appendice 6.10).

Tenendo conto della definizione di limite introdotta nell'appendice 6.1, si può dimostrare (provate a farlo per esercizio) la seguente importante caratterizzazione della continuità.

Teorema A6.7 : *se X e Y sono due spazi topologici, per una funzione $f : X \to Y$ le condizioni seguenti sono equivalenti:*
1) *f è continua*
2) *per ogni $x_0 \in X$ e ogni intorno U di $f(x_0)$ l'insieme $f^{-1}(U)$ è un intorno di x_0*
3) *per ogni insieme aperto A di Y l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto in X*
4) *per ogni insieme chiuso C di Y l'insieme $f^{-1}(C)$ è chiuso in X ;*

se poi $Y = (\mathbb{R}, \epsilon)$, queste sono anche equivalenti a

5) *per ogni intervallo aperto I di $\mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(I)$ è aperto in X .*

Osservazione : dato che un sottoinsieme aperto ⟦chiuso⟧ di $f(X)$ nella topologia indotta non è necessariamente un aperto ⟦chiuso⟧ di Y , torna talvolta utile sapere che le condizioni precedenti equivalgono anche a:

3') per ogni insieme $A \subset f(X)$ aperto nella topologia indotta, l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto in X

4') per ogni insieme $C \subset f(X)$ chiuso nella topologia indotta, l'insieme $f^{-1}(C)$ è chiuso in X .

Osserviamo che la definizione generale di intorno che abbiamo dato permette di scrivere l'equivalenza con la proprietà 2), che invece non si ha se ci limitiamo al caso "intorno = intervallo": ad esempio, la controimmagine tramite la funzione continua $\operatorname{sen} x$ di $]0, 2[$, che è un intorno di $1 = \operatorname{sen}(\pi/2)$, non è un intervallo contenente $\pi/2$. Osserviamo poi che la continuità di una funzione $f : X \to Y$ dipende dalle topologie che si hanno sugli spazi X e Y .

Esempio : la funzione definita su $\mathbb{R}$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non è continua se si considera $f : (\mathbb{R}, \epsilon) \to (\mathbb{R}, \epsilon)$, ma è continua (☞ appendice 5.2) se si considera $f : (\mathbb{R}, \epsilon) \to (\mathbb{R}, sc^i)$.

Appendice 6.7 - Teorema di esistenza degli zeri: dimostrazione alternativa

Si può dare un dimostrazione molto più rapida ed elegante della proposizione 6.26, anche se meno costruttiva di quella vista nel testo.

Proposizione A6.8 : *sia f una funzione continua in un intervallo $[a, b]$, e supponiamo che $f(a) \le \lambda \le f(b)$; allora l'insieme*

$$\{x \in [a, b] : f(x) \le \lambda\}$$

ha massimo in un punto c , e $f(c) = \lambda$.

Dimostrazione : per la continuità di f l'insieme $A = \{x \in [a, b] : f(x) \le \lambda\}$ è chiuso (dato che è controimmagine di un chiuso) e limitato, dunque (☞ corollario A5.13) ha massimo in un punto $c \in A$: in particolare, deve essere $f(c) \le \lambda$. Se fosse $c = b$ la dimostrazione sarebbe conclusa in quanto per ipotesi è $\lambda \le f(b)$, e dunque sarebbe $f(c) = \lambda$; se invece fosse $c < b$ e $f(c) < \lambda$ si avrebbe, per il teorema di permanenza del segno 6.21, $f(x) < \lambda$ in un intorno di c , ma questo intorno (dato che $c < b$) contiene punti a destra di c , per cui c non potrebbe essere il massimo dell'insieme A . ■

La proposizione 6.26 si ottiene ora come facile corollario, applicando la proposizione precedente con $\lambda = 0$.

Osservazione : in maniera analoga si sarebbe potuto dimostrare che l'insieme

$$\{x \in [a, b] : f(x) \ge \lambda\}$$

ha minimo in un punto c' , con $f(c') = \lambda$. Notiamo che non necessariamente $c = c'$: ad esempio, se $f(x) \equiv \lambda$ si ha $c = b$, $c' = a$.

Appendice 6.8 - Spazi connessi

Vedremo tra poco che un intervallo della retta reale ha la proprietà di non poter essere ottenuto come unione di due aperti non vuoti e disgiunti; questa proprietà viene chiamata connessione, e si può estendere ad un generico spazio topologico.

Definizione : *uno spazio topologico X si dice connesso se non può essere ottenuto come unione di due aperti non vuoti e disgiunti.*

Esempio : qualunque insieme X dotato della topologia discreta (☞ appendice 5.2) risulta sconnesso, a meno che consista di un solo punto.

Esempio : ogni sottoinsieme non vuoto X di $(\mathbb{R}, sc^i)$ con la topologia indotta (☞ appendice 5.2) risulta connesso.

Proposizione A6.9 : *ogni intervallo della retta reale $\mathbb{R}$, con la topologia indotta da $(\mathbb{R}, \epsilon)$, è connesso.*

Dimostrazione : supponiamo per assurdo che I sia un intervallo non connesso, siano A e B due aperti di I non vuoti e disgiunti tali che $I = A \cup B$, e siano x e y due punti in A e B rispettivamente (esistono in quanto A e B sono non vuoti); scambiando eventualmente A con B , possiamo supporre che sia $x < y$. Vogliamo provare che $\sup(A \cap [x,y]) \in A \cap B$. Siccome I è un intervallo dovrà essere necessariamente $[x,y] \subset I$; osserviamo che $[x,y]$ è un chiuso. Posto $S = A \cap [x,y]$, dalle inclusioni $S \subset [x,y] \subset I$ risulta che la chiusura $\overline{S}$ di S in $\mathbb{R}$ è contenuta in I e dunque è un chiuso di I ; inoltre A e B sono anche chiusi in I , in quanto i loro complementari sono gli aperti B e A rispettivamente, per cui si ha $\overline{S} \subset A$. Posto $\xi = \sup S$ si ha (☞ corollario A5.12) che $\xi \in \overline{S}$, e dunque $\xi \in A$; essendo anche $\xi \in [x,y]$, $y \in B$, $A \cap B = \emptyset$, se ne deduce che $\xi < y$. Dalla definizione di ξ si ottiene allora che $]\xi, y] \subset B$ e dunque $\xi \in \overline{B}$. Siccome $\xi \in I$ e B è chiuso in I , ne segue che $\xi \in B$, una contraddizione, visto che avevamo già dimostrato che $\xi \in A$. ■

Proposizione A6.10 : *un sottoinsieme di* $(\mathbb{R}, \epsilon)$ *è connesso se e solo se è un intervallo.*

Dimostrazione : una implicazione è già stata dimostrata nella proposizione precedente; è poi evidente che in $(\mathbb{R}, \epsilon)$ ogni sottoinsieme che non è un intervallo può essere ottenuto come unione di due aperti non vuoti e disgiunti. Infatti, se X non è un intervallo esistono due punti $x, y \in X$ e un punto $z \in]x, y[$ tale che $z \notin X$. Allora i due insiemi (entrambi aperti in X)

$$A = X \cap]-\infty, z[, \qquad B = X \cap]z, +\infty[$$

sono non vuoti in quanto $x \in A$ e $y \in B$, disgiunti in quanto $A \subset]-\infty, z[$ mentre $B \subset]z, +\infty[$, e $A \cup B = X \setminus \{z\} = X$ in quanto $z \notin X$. ■

Osserviamo che, in particolare, la retta reale $\mathbb{R}$ è un insieme connesso, l'unico che non è limitato né inferiormente né superiormente.

Abbiamo visto (☞ teorema dei valori intermedi 6.29) che se I è un intervallo ed $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua (sia nel dominio che nel codominio prendiamo la topologia euclidea), allora l'insieme immagine $f(I)$ è ancora un intervallo. Una proprietà analoga vale per gli spazi topologici connessi.

Teorema A6.11 : *siano* X *e* Y *due spazi topologici e sia* $f : X \to Y$ *una funzione continua; se* X *è connesso, anche l'immagine* $f(X)$ *, con la topologia indotta da* Y *, risulta connessa.*

Dimostrazione : se per assurdo $f(X)$ non fosse connesso, sarebbe unione di due insiemi non vuoti e disgiunti A e B , aperti in $f(X)$. Essendo f continua, gli insiemi $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ sono aperti (☞ teorema A6.7); inoltre essi sono non vuoti, disgiunti, e la loro unione è X , per le proprietà della funzione inversa (☞ esercizio 2.54): dunque anche X risulterebbe non connesso, in contraddizione con l'ipotesi. ■

Esempio : se $f : [0,1] \to X$ è una funzione continua, la sua immagine è un sottoinsieme connesso di X ; tali funzioni si chiamano "curve continue in X ".

Osservazione : non bisogna pensare che la proprietà di mandare intervalli in intervalli, cioè connessi di $(\mathbb{R}, \epsilon)$ in connessi di $(\mathbb{R}, \epsilon)$, caratterizzi le funzioni reali continue; ad esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

manda intervalli in intervalli, come si verifica facilmente, ma non è continua.

Possiamo definire su ogni spazio topologico X la relazione

$$x \sim y \iff \text{esiste } A \subset X \text{, connesso, tale che } x, y \in A \ ;$$

si nota immediatamente che la relazione $\sim$ è riflessiva e simmetrica. Poi, in virtù del fatto che (dimostratelo per esercizio) se $A, B \subset X$ sono connessi con intersezione non vuota allora anche $A \cup B$ è connesso, la relazione $\sim$ è anche transitiva, dunque è di equivalenza.

Definizione : *le classi di equivalenza di* X *rispetto alla relazione* $\sim$ *si dicono componenti connesse di* X .

È facile vedere che le componenti connesse sono sottoinsiemi connessi di X , a due a due disgiunti (come tutte le classi di equivalenza), e quindi sono tutti simultaneamente aperti e chiusi in X .

Proposizione A6.12 : *ogni sottoinsieme aperto di* $(\mathbb{R}, \epsilon)$ *è unione di una famiglia al più numerabile di intervalli aperti disgiunti.*

Dimostrazione : sia A un aperto in $\mathbb{R}$; le componenti connesse di A sono aperti in A , quindi aperti in $\mathbb{R}$, e inoltre sono connessi di $\mathbb{R}$, pertanto (☞ proposizione A6.10) sono intervalli aperti disgiunti. Rimane da provare che sono al più una infinità numerabile, ma possiamo facilmente costruire una applicazione iniettiva tra l'insieme delle componenti connesse e $\mathbb{Q}$, il che prova la tesi (☞ appendice 3.11): ad ogni componente connessa I , che è un intervallo aperto, associamo uno dei numeri razionali che appartengono ad I (stiamo usando l'assioma della scelta); dato che gli intervalli I sono disgiunti, l'applicazione è iniettiva. ■

Vediamo una proprietà più forte della connessione.

Definizione : *uno spazio topologico* X *si dice connesso per archi se per ogni coppia di punti* $x, y \in X$ *esiste una funzione continua* $f : [0,1] \to X$ *tale che* $f(0) = x$ *e* $f(1) = y$.

Osservazione : non è difficile verificare che se uno spazio topologico X risulta connesso per archi allora è anche connesso; infatti, se fosse $X = A \cup B$ con A e B aperti disgiunti non vuoti, presi $x \in A$ e $y \in B$ e una funzione f come nella definizione precedente, posto $Y = f([0,1])$ avremmo che $Y \cap A$ e $Y \cap B$ sono aperti in Y , non vuoti, disgiunti e la loro unione è Y, che quindi è sconnesso, ma d'altra parte Y è connesso (☞ teorema A6.11), due fatti che sono in contraddizione tra loro. Il viceversa in generale è falso: ad esempio (provate a completare i dettagli della dimostrazione), se $G \subset \mathbb{R}^2$ è il grafico della funzione $\mathrm{sen}(1/x)$, con $x \neq 0$, si ha che l'insieme $G \cup \{(0,0)\}$ è connesso ma non connesso per archi. D'altro canto si può dimostrare che negli spazi euclidei $\mathbb{R}^n$ ogni insieme aperto che sia connesso risulta anche connesso per archi (fatelo per esercizio; se x è connesso ad y tramite un arco, potete connettere a y con un ulteriore segmento anche tutti i punti di un intorno di x).

Appendice 6.9 - Punti di discontinuità di una funzione monotona

Le funzioni monotone non possono avere "troppi" punti di discontinuità, come specificato dalla proposizione seguente.

Proposizione A6.13 : *se I è un intervallo della retta reale $\mathbb{R}$ ed $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione monotona, allora l'insieme dei punti in cui f è discontinua è al più numerabile.*

DIMOSTRAZIONE : supponiamo ad esempio che f sia monotona debolmente crescente, indichiamo con Z l'insieme dei punti di discontinuità di f e osserviamo che, a causa della monotonia, per ogni $x \in Z$ esistono

$$a_x = \lim_{t \to x^-} f(t) , \qquad b_x = \lim_{t \to x^+} f(t) ,$$

con $a_x < b_x$. Dunque ogni $x \in Z$ individua un intervallo non vuoto $]a_x, b_x[$, e questi intervalli sono tutti disgiunti, ancora a causa della monotonia di f: infatti $x < y \Rightarrow b_x \le a_y$; basterà allora dimostrare che tali intervalli sono al più un'infinità numerabile. Osserviamo che in $]a_x, b_x[$ cadono infiniti numeri razionali, quindi usando l'assioma della scelta (☞ appendice 2.6) possiamo associare ad $]a_x, b_x[$ uno di tali numeri. Dato che questi intervalli sono disgiunti, la funzione che abbiamo costruito è iniettiva, dunque (☞ appendice 3.11) $\mathrm{card}(Z) \le \mathrm{card}(\mathbb{Q})$ e cioè Z è al più numerabile. ■

Osservazione : per una funzione qualsiasi, non è detto che l'insieme dei punti di discontinuità sia numerabile: ad esempio, la funzione di Dirichlet $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ è discontinua in ogni punto di $\mathbb{R}$. Tuttavia, è possibile mostrare che l'insieme dei punti di discontinuità di una funzione f è necessariamente unione di una famiglia al più numerabile di insiemi chiusi, e (ma questo fatto è di difficile dimostrazione) non tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono di questo tipo, cioè non ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è l'insieme dei punti di discontinuità di qualche funzione.

Appendice 6.10 - Spazi compatti; funzioni semicontinue

Nell'appendice 5.10 abbiamo definito la compattezza sequenziale di uno spazio topologico, e abbiamo riformulato il teorema di Bolzano-Weierstrass 5.10 dicendo che ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ è sequenzialmente compatto. Più precisamente (☞ teorema A5.19) abbiamo provato che i sottoinsiemi sequenzialmente compatti di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli i sottoinsiemi chiusi e limitati. Il ruolo degli insiemi sequenzialmente compatti in uno spazio topologico sarà chiara tra poco, quando vedremo una generalizzazione del teorema di Weierstrass 6.35; vogliamo sottolineare che esiste un'altra definizione di compattezza per sottoinsiemi di uno spazio topologico.

Definizione : *un sottoinsieme K di uno spazio topologico di Hausdorff X si dice compatto se da ogni famiglia $\{A_i\}_i$ di aperti la cui unione contiene K si può estrarre una sottofamiglia finita $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}\}$ la cui unione contiene ancora K.*

Osservazione : in un generico spazio topologico la compattezza così definita è una proprietà diversa dalla compattezza sequenziale introdotta nell'appendice 5.10; tuttavia, si può dimostrare che in uno spazio metrico le due definizioni coincidono, nel senso che un sottoinsieme di uno spazio metrico è compatto se e solo se esso è sequenzialmente compatto. Pertanto nel caso di sottoinsiemi della retta reale $\mathbb{R}$ possiamo riferirci indifferentemente all'una o all'altra definizione di compattezza.

Per ottenere un'estensione del teorema di Weierstrass 6.35 al caso di spazi topologici qualsiasi conviene introdurre la nozione di funzione sequenzialmente semicontinua.

Definizione : *se X è uno spazio topologico, una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice sequenzialmente semicontinua inferiormente se per ogni $x \in X$ e ogni successione $x_n \to x$ si ha*

$$f(x) \le \liminf_{n \to +\infty} f(x_n) .$$

Analogamente, f si dice sequenzialmente semicontinua superiormente se per ogni $x \in X$ e ogni successione $x_n \to x$ si ha

$$f(x) \ge \limsup_{n \to +\infty} f(x_n) .$$

Osservazione : dato che si ha sempre $\liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \le \limsup_{n \to +\infty} f(x_n)$, vediamo che f è sequenzialmente continua se e solo se f è allo stesso tempo sequenzialmente semicontinua inferiormente e sequenzialmente semicontinua superiormente.

Teorema di Weierstrass A6.14 : *sia X uno spazio topologico sequenzialmente compatto e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione sequenzialmente semicontinua inferiormente; allora esiste almeno un punto di minimo per la funzione f su X.*

Dimostrazione : posto

$$m = \inf\{f(x) : x \in X\} ,$$

per definizione di estremo inferiore esiste una successione $\{x_n\}_n$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = m .$$

Essendo X compatto, possiamo estrarre da $\{x_n\}_n$ una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}_n$ convergente ad un elemento $x \in X$: usando la semicontinuità inferiore di f avremo allora

$$f(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = m ,$$

e dunque il punto x è un punto di minimo per la funzione f su X . ■

Osservazione : in maniera analoga, una funzione sequenzialmente semicontinua superiormente su un insieme sequenzialmente compatto ha almeno un punto di massimo, e dunque una funzione sequenzialmente continua su un insieme sequenzialmente compatto ha massimo e minimo.

Accanto alle funzioni sequenzialmente semicontinue si possono introdurre le funzioni semicontinue su uno spazio topologico.

Definizione : *se X è uno spazio topologico, una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice semicontinua inferiormente se per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in X : f(x) > t\}$ è aperto in X . Analogamente, f si dice semicontinua superiormente se per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in X : f(x) < t\}$ è aperto in X .*

Osservazione : una funzione è semicontinua inferiormente se è continua vista come funzione $f : X \to (\mathbb{R}, sc^i)$, e analogamente per la semicontinuità superiore.

Osservazione : per la proprietà 5) del teorema A6.7, una funzione è continua se e solo se è allo stesso tempo semicontinua inferiormente e semicontinua superiormente.

Osservazione : in maniera analoga a quanto visto nell'appendice 6.5 si ha che in uno spazio metrico (o più in generale in ogni spazio topologico verificante il primo assioma di numerabilità) la semicontinuità sequenziale è equivalente alla semicontinuità.

Un risultato analogo al teorema A6.14 si ha per gli insiemi compatti e le funzioni semicontinue.

Teorema di Weierstrass A6.15 : *sia X uno spazio topologico compatto e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione semicontinua inferiormente. Allora esiste almeno un punto di minimo per la funzione f su X .*

Dimostrazione : poniamo

$$m = \inf\{f(x) : x \in X\} ;$$

se l'insieme $\{x \in X : f(x) \leq m\}$ fosse vuoto, gli insiemi $X_t = \{x \in X : f(x) > t\}$ con $t > m$ sarebbero aperti a causa della semicontinuità inferiore di f , non vuoti per le proprietà dell'estremo inferiore, e la loro unione sarebbe X . Essendo X compatto si potrebbe estrarre una sottofamiglia finita $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ la cui unione è ancora X , ma in tal caso l'estremo inferiore di f su X sarebbe il minimo dei numeri t_i e non m , una contraddizione. ■

Osservazione : in maniera analoga, una funzione reale semicontinua superiormente su un insieme compatto ha almeno un punto di massimo, e dunque una funzione continua su un insieme compatto ha massimo e minimo.

Il teorema di Weierstrass si può ottenere anche come conseguenza del prossimo risultato generale.

Teorema A6.16 : *siano X e Y due spazi di Hausdorff, con X compatto, e sia $f : X \to Y$ una funzione continua; allora l'immagine $f(X)$, dotata della topologia indotta da Y , è uno spazio compatto.*

Dimostrazione : sia $\{Y_i\}_i$ una famiglia di aperti di $f(X)$ che ricoprono $f(X)$, e poniamo $X_i = f^{-1}(Y_i)$; allora (☞ teorema A6.7) gli insiemi X_i sono aperti, e la loro unione è chiaramente X . Per la compattezza di X possiamo trovarne una famiglia finita $\{X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}\}$ che ricopre X , ma allora

$$f(X) = f\Big(\bigcup_{k=1}^{n} X_{i_k}\Big) = \bigcup_{k=1}^{n} f(X_{i_k}) = \bigcup_{k=1}^{n} Y_{i_k} ,$$

e abbiamo trovato un sottoricoprimento finito di $f(X)$. ■

Osservazione : in modo analogo si può provare che l'immagine di un sequenzialmente compatto tramite una funzione sequenzialmente continua è sequenzialmente compatta.

Appendice 6.11 - Una generalizzazione del teorema di Weierstrass

Dimostriamo la proposizione 6.38.

DIMOSTRAZIONE : siano $a < b$ i due estremi dell'intervallo (non necessariamente finiti), e sia ℓ il valore comune dei due limiti. Se f è costante (e allora è necessariamente uguale ad ℓ), ogni punto è di massimo e di minimo, e non c'è altro da dimostrare. Se f non è costante, c'è almeno un punto η interno all'intervallo I in cui f assume un valore diverso da ℓ; supponiamo che sia $f(\eta) = H > \ell$, e proviamo che f ha massimo (per l'altro caso basta lavorare con $-f$, e si ottiene che f ha minimo). Poiché $f(x) \to \ell$ per $x \to a^+$, esiste un intorno U_a del punto a tale che $f(x) < H$ per ogni $x \in I \cap U_a$ (anche per $x = a$, se $a \in I$, perché f è continua e in tal caso si ha $f(a) = \ell$). Scegliamo $x_1 \in I \cap U_a$ con $x_1 > a$: allora abbiamo

$$\forall x \leq x_1, \quad f(x) < H$$

(dunque, in particolare, $\eta > x_1$). Ragionando in modo analogo possiamo determinare un punto $x_2 < b$ tale che

$$\forall x \geq x_2, \quad f(x) < H,$$

e $x_1 < \eta < x_2$. Dato che $[x_1, x_2] \subset I$, la funzione f è continua in $[x_1, x_2]$, e applicando il teorema di Weierstrass alla restrizione di f a tale intervallo otteniamo che

$$\exists \xi \in [x_1, x_2] : \forall x \in [x_1, x_2], \quad f(x) \leq f(\xi).$$

Osserviamo che $f(\xi) \geq f(\eta) = H$ perché $\eta \in [x_1, x_2]$, pertanto abbiamo anche $f(\xi) \geq H > f(x)$ per ogni $x \leq x_1$ e per ogni $x \geq x_2$, cioè in definitiva ξ è punto di massimo per f sull'intervallo I. ∎

Appendice 6.12 - Funzioni lipschitziane e hölderiane

La proprietà di Lipschitz può essere definita anche per funzioni tra due spazi metrici.

Definizione : *se* (X, d_X) *ed* (Y, d_Y) *sono due spazi metrici, diremo che una funzione* $f : X \to Y$ *è lipschitziana se esiste una costante* $L \geq 0$ *tale che*

$$\mathrm{d}_Y\big(f(x), f(y)\big) \leq L\,\mathrm{d}_X(x,y) \qquad \forall x, y \in X. \tag{A6.5}$$

La minima di tali costanti verrà detta costante di Lipschitz della funzione f.

Proposizione A6.17 : *la minima costante della definizione precedente esiste.*

DIMOSTRAZIONE : si tratta di dimostrare che l'estremo inferiore

$$L = \inf\{k \geq 0 : \mathrm{d}_Y\big(f(x), f(y)\big) \leq k\,\mathrm{d}_X(x,y) \quad \forall x, y \in X\}$$

è in realtà un minimo. Sia $\{k_n\}_n$ una successione che tende ad L e tale che

$$\mathrm{d}_Y\big(f(x), f(y)\big) \leq k_n\,\mathrm{d}_X(x,y) \qquad \forall x, y \in X. \tag{A6.6}$$

Per ogni coppia di punti $x, y \in X$, passando al limite per $n \to +\infty$ nella (A6.6) si ha $\mathrm{d}_Y\big(f(x), f(y)\big) \leq L\,\mathrm{d}_X(x,y)$, ed essendo x e y arbitrari ciò conclude la dimostrazione. ∎

Esempio : se A è una matrice $n \times n$, la funzione definita da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ come $v \mapsto Av$ è lipschitziana; determinate per esercizio una costante L che verifica (A6.5), non necessariamente la migliore (con i metodi dell'Analisi matematica II si vede che la costante di Lipschitz è la radice quadrata del più grande autovalore della matrice ${}^T\!A\,A$).

Accanto alle funzioni lipschitziane conviene introdurre le funzioni hölderiane di esponente $\alpha > 0$.

Definizione : *sia* $A \subset \mathbb{R}$; *una funzione* $f : A \to \mathbb{R}$ *si dice hölderiana di esponente* $\alpha > 0$ *se esiste una costante* $C \geq 0$ *tale che*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \qquad \forall x, y \in A. \tag{A6.7}$$

In tal caso si scrive $f \in \mathrm{C}^{0,\alpha}(A)$.

Osservazione : analogamente a quanto fatto per le funzioni lipschitziane, si potrebbero definire le funzioni hölderiane tra spazi metrici; una dimostrazione analoga a quella fatta per le funzioni lipschitziane mostrerebbe che, fissato l'esponente α, per una funzione hölderiana di esponente α esiste la minima costante C che verifica la (A6.7).

Osservazione : dalla definizione precedente risulta chiaro che una funzione è hölderiana di esponente 1 se e solo se è lipschitziana; inoltre le funzioni hölderiane sono continue, e anzi uniformemente continue: infatti, se $\varepsilon > 0$, preso $\delta = (\varepsilon/C)^{1/\alpha}$ si ha

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Vedremo con la prossima proposizione che la definizione di hölderianità non è interessante qualora si prenda $\alpha > 1$.

Proposizione A6.18 : *se* I *è un intervallo di* $\mathbb{R}$ *e* $f : I \to \mathbb{R}$ *è una funzione hölderiana di esponente* $\alpha > 1$, *allora* f *è costante.*

DIMOSTRAZIONE : osserviamo che se $z, z+\delta \in I$ allora

$$f(z) - C\delta^\alpha \le f(z+\delta) \le f(z) + C\delta^\alpha .$$

Scegliamo $x < y$, e mostriamo che $f(x) = f(y)$: posto

$$\delta_n = \frac{y-x}{n}, \qquad x_{i,n} = x + i\delta_n \quad \text{per } i = 0, \ldots, n$$

si ha

$$f(x_{i,n}) - C\delta_n^\alpha \le f(x_{i+1,n}) \le f(x_{i,n}) + C\delta_n^\alpha ,$$

da cui segue facilmente che

$$f(x) - iC\delta_n^\alpha \le f(x_{i,n}) \le f(x) + iC\delta_n^\alpha ,$$

e in particolare per $i = n$

$$f(x) - Cn^{1-\alpha}(y-x)^\alpha \le fy) \le f(x) + Cn^{1-\alpha}(y-x)^\alpha .$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene la tesi. ■

Osservazione : una dimostrazione più rapida e semplice si può ottenere usando le derivate; infatti (verificatelo per esercizio) se f è hölderiana di esponente $\alpha > 1$ allora il suo rapporto incrementale tende a zero in ogni punto, cioè f' è costantemente nulla. Il fatto che f deve essere costante segue allora dalla proposizione 7.18.

Esempio : il prototipo della funzione hölderiana di esponente $\alpha \in]0,1]$ è dato da $f(x) = |x|^\alpha$; infatti dalla disuguaglianza triangolare e da (A7.3) si ottiene

$$|x|^\alpha \le (|x-y| + |y|)^\alpha \le |x-y|^\alpha + |y|^\alpha ,$$

e procedendo come per ottenere la seconda disuguaglianza triangolare (☞ proposizione 4.14) otteniamo

$$\big||x|^\alpha - |y|^\alpha\big| \le |x-y|^\alpha .$$

Osservazione : non bisogna pensare che tutte le funzioni uniformemente continue siano hölderiane; ad esempio la funzione $f(x) = 1/\log x$ (con $f(0) = 0$) è continua nell'intervallo $[0,1/2]$ e quindi uniformemente continua per il teorema di Heine-Cantor 6.41, ma se f fosse hölderiana per un qualche esponente $\alpha > 0$ si avrebbe, prendendo $y = 0$,

$$\left|\frac{1}{\log x}\right| \le C|x|^\alpha \qquad \forall x \in]0,1/2] ,$$

cioè

$$|x|^\alpha |\log x| \ge \frac{1}{C} \qquad \forall x \in]0,1/2] ,$$

il che è impossibile, in quanto per ogni $\alpha > 0$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0 .$$

Osservazione : se una funzione è hölderiana, si potrebbe pensare di definire il suo "esponente di Hölder" come il massimo esponente α per cui valga la (A6.7). In generale però tale massimo non esiste; ad esempio la funzione $f(x) = -x\log x$ definita nell'intervallo $[0,1/e]$ (con $f(0) = 0$) è hölderiana di esponente α per ogni $\alpha \in]0,1[$ ma non è una funzione lipschitziana. Per dimostrarlo, cominciamo con l'osservare che f è non negativa, e inoltre è monotona crescente; una facile dimostrazione di quest'ultimo fatto si ottiene calcolando la derivata prima $f'(x) = -1 - \log x$, che risulta non negativa nell'intervallo $]0,1/e]$. Dimostriamo poi che si ha

$$f(x+y) \le f(x) + f(y) \qquad \forall x,y \in [0,1/e] :$$

escludendo il caso banale in cui x o y siano nulli, questa equivale a

$$0 \le x\log\Big(1+\frac{y}{x}\Big) + y\log\Big(1+\frac{x}{y}\Big) ,$$

che è ovvia.
Come secondo fatto osserviamo che per ogni $\alpha \in]0,1[$ esiste una costante C_α tale che

$$f(s) \le C_\alpha s^\alpha \qquad \forall s \in [0,1/e] :$$

tale disuguaglianza segue facilmente dal fatto che la funzione

$$g(s) = \begin{cases} f(s)s^{-\alpha} & \text{se } s \in]0,1/e] \\ 0 & \text{se } s = 0 \end{cases}$$

è continua, quindi si può applicare il teorema di Weierstrass 6.35.

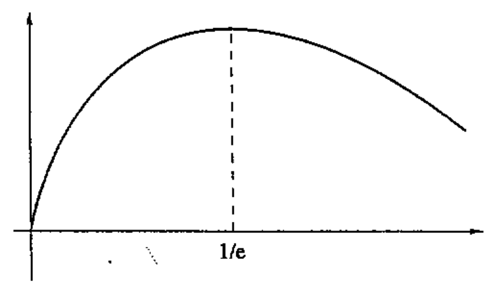


Fig. A6.1 : il grafico di $f(x) = -x\log x$

A questo punto, mettendo insieme i fatti precedenti, se $0 \le x \le y \le 1/e$ si ha

$$0 \le f(y) - f(x) \le f(y-x) \le C_\alpha |y-x|^\alpha ,$$

che è quanto si voleva dimostrare; che la funzione f non è lipschitziana in $[0,1/e]$ segue poi facilmente dal fatto che, prendendo $x = 0$, il rapporto $(f(y) - f(x))/(y-x)$ si riduce a $f(y)/y$, e la funzione $f(y)/y$ non è limitata per $y \to 0^+$.

Appendice 6.13 - Uniforme continuità in spazi metrici

Anche la nozione di uniforme continuità può essere estesa al caso di funzioni tra spazi metrici.

Definizione : *se* (X, d_X) *ed* (Y, d_Y) *sono due spazi metrici, diremo che una funzione* $f : X \to Y$ *è uniformemente continua se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che*

$$\mathrm{d}_X(x,y) < \delta \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}_Y\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon \qquad \forall x, y \in X .$$

Molte delle proprietà viste per le funzioni reali uniformemente continue valgono ancora in questo ambito più generale; ad esempio, con una dimostrazione analoga a quella vista nella sezione 6.5 (che vi invitiamo a riadattare per esercizio) il teorema di Heine-Cantor 6.41 assume la seguente forma.

Teorema di Heine-Cantor A6.19 : *se* X *è uno spazio metrico compatto ed* $f : X \to \mathbb{R}$ *è una funzione continua, allora* f *è uniformemente continua.*

Appendice 6.14 - Teorema di Heine-Cantor: dimostrazione alternativa

Diamo qui una dimostrazione alternativa del teorema di Heine-Cantor 6.41. Data una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiamo per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni $x_0 \in [a,b]$ la quantità

$$\delta(x_0, \varepsilon) = \sup\{r > 0 : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in B_r(x_0)\} .$$

Proposizione A6.20 : *se* f *è una funzione continua, allora per ogni* $\varepsilon > 0$ *la funzione* $x \mapsto \delta(x, \varepsilon)$ *è semicontinua inferiormente.*

DIMOSTRAZIONE : per quanto visto nell'appendice 6.10 dobbiamo mostrare che per ogni t l'insieme $S_t = \{x : \delta(x, \varepsilon) > t\}$ è aperto, cioè che se $x_0 \in S_t$ allora tutto un intorno di x_0 è contenuto in S_t. Fissiamo $x_0 \in S_t$, e siano r e t' tali che $\delta(x_0, \varepsilon) > r > t' > t$: questo implica che

$$x, y \in B_r(x_0) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon .$$

Ma, ☞ formula (A4.2), per ogni $x \in B_{r-t'}(x_0)$ abbiamo $B_{t'}(x) \subset B_r(x_0)$, quindi per ogni $x \in B_{r-t'}(x_0)$ vale $\delta(x, \varepsilon) \geq t' > t$, cioè $x \in S_t$. ■

La dimostrazione del teorema di Heine-Cantor segue ora facilmente.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 6.41 : per il teorema A6.15, fissato $\varepsilon > 0$ la funzione semicontinua $x \mapsto \delta(x, \varepsilon)$ ha minimo in $[a,b]$; indichiamo con x_0 il punto di minimo, e con δ il valore minimo. Dato che la funzione $x \mapsto \delta(x, \varepsilon)$ è positiva in ogni punto, abbiamo in particolare $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$; ma allora se $|x - y| < \delta$ si ha anche $|x - y| < \delta(x, \varepsilon)$, quindi in particolare $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. ■

Appendice 6.15 - Uniforme continuità su intervalli illimitati

Iniziamo col dimostrare che una funzione uniformemente continua può avere all'infinito una crescita al più lineare.

Proposizione A6.21 : *se* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *è uniformemente continua, esistono due costanti positive* c, c' *tali che*

$$\forall x \geq 0, \qquad |f(x)| \leq c + c'x .$$

DIMOSTRAZIONE : fissiamo un qualunque $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ dato dall'uniforme continuità di f e poniamo $d = \delta/2$. Osserviamo che per ogni $i \in \mathbb{N}$ è $|(i+1)d - id| = d < \delta$, quindi

$$|f\big((i+1)d\big) - f(id)| < \varepsilon .$$

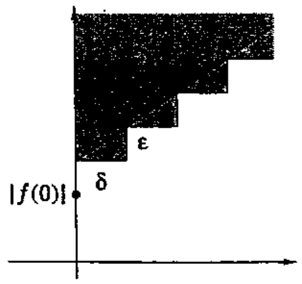


Fig. A6.2 : il grafico di f non può stare nella zona grigia

Per ogni $x > 0$, se $n = \lfloor x/d \rfloor$ allora $nd \le x < (n+1)d$, dunque $n \le (x/d)$ e $|x - nd| < \delta$, pertanto

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left|f(x) - f(nd) + \sum_{i=0}^{n-1}[f((i+1)d) - f(id)] + f(0)\right| \\ &\le |f(x) - f(nd)| + \sum_{i=0}^{n-1}|f((i+1)d) - f(id)| + |f(0)| \\ &\le \varepsilon + n\varepsilon + |f(0)| \le (\varepsilon + |f(0)|) + \frac{\varepsilon}{d}x,\end{aligned}$$

e l'asserto è dimostrato con $c = \varepsilon + |f(0)|$ e $c' = \varepsilon/d$. ■

Corollario A6.22 : *se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è uniformemente continua, esistono due costanti positive* c, c' *tali che*

$$\forall x, \qquad |f(x)| \le c + c'|x|. \tag{A6.8}$$

Esempio : di nuovo senza fare calcoli, la funzione x^2 non può essere uniformemente continua su tutto $\mathbb{R}$, perché se fosse $x^2 \le c + c'|x|$ avremmo per $x > 0$

$$x \le \frac{c}{x} + c',$$

che è assurdo perché per $x \to +\infty$ il primo membro tende a $+\infty$ e il secondo a c'.

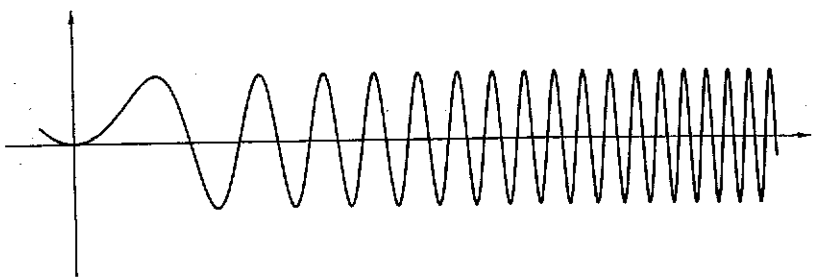


Fig. A6.3 : il grafico di $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

Osservazione : non tutte le funzioni che verificano (A6.8) sono uniformemente continue. Ad esempio, la funzione $\operatorname{sen} x^2$ è addirittura limitata ($c = 1$, $c' = 0$), ma non è uniformemente continua perché i punti $x_n = \sqrt{2n\pi + \pi/2}$ e $y_n = \sqrt{2n\pi - \pi/2}$ sono arbitrariamente vicini (verificate per esercizio che $|x_n - y_n| \to 0$), quindi definitivamente più vicini di qualunque $\delta > 0$, ma $f(x_n) - f(y_n) = 2$ per ogni n.

Il prossimo risultato permette di ricondurre la ricerca dell'uniforme continuità a quella di funzioni più semplici; alla luce della proposizione 6.42 ci limiteremo a studiare il caso di una funzione definita sulla semiretta $[0, +\infty[$.

Proposizione A6.23 : *se* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *è uniformemente continua, e* $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *è una funzione continua tale che*

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - g(x)) = 0,$$

allora g *è uniformemente continua.*

DIMOSTRAZIONE : scegliamo $\varepsilon > 0$; esiste allora $\bar{x}$ tale che per ogni $x \ge \bar{x}$ si ha $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$. Consideriamo l'intervallo $[0, \bar{x} + 1]$: su di esso la funzione continua g (o meglio la sua restrizione) è uniformemente continua, e sia $\delta_g > 0$ dato da (6.36); anche f è uniformemente continua su tutto $[0, +\infty[$, e sia δ_f dato da (6.36). Poniamo $\delta = \min\{\delta_g, \delta_f, 1\}$, e siano $x, y \ge 0$ con $|x - y| < \delta$; dato che $\delta \le 1$, e che l'ampiezza dell'intervallo $[\bar{x}, \bar{x} + 1]$ è 1, vi sono solo due possibilità: o $x, y \le \bar{x} + 1$ (e in tal caso da $|x - y| < \delta \le \delta_g$ ricaviamo $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$), oppure $x, y \ge \bar{x}$. Ma allora da $|x - y| < \delta \le \delta_f$ ricaviamo

$$|g(x) - g(y)| \le |g(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - g(y)| < 3\varepsilon,$$

quindi in ogni caso $|x - y| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < 3\varepsilon$, e g è uniformemente continua (✎ es. 6.70). ■

Esempio : la funzione $\sqrt{x} + \frac{\operatorname{sen} x^2}{1+x^2}$ è uniformemente continua, perché è continua ed è asintotica a $\sqrt{x}$.

Corollario A6.24 : *se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è continua e ha limiti finiti per* $x \to +\infty$ *e per* $x \to -\infty$ *allora è uniformemente continua.*

Appendice 6.16 - Somma di insiemi e classi di infinitesimo

Per rendere rigorose le operazioni sugli infinitesimi, introduciamo alcune operazioni fra insiemi.

Definizione : *sia* X *un insieme su cui è definita una somma; se* $A, B \subset X$, *poniamo*

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}.$$

Se su X *è definito anche un prodotto, poniamo*

$$A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A,\ b \in B\}.$$

Esempio : se $X = \mathbb{R}^2$ ed A e B sono rispettivamente l'asse delle ascisse e quello delle ordinate, si ha $A + B = X$. Se $X = \mathbb{R}$ e $A = [1,2]$, $B = [3,4]$ allora $A + B = [4,6]$ e $A \cdot B = [3,8]$.

Se anziché adottare la scrittura $f = o(g)$ avessimo usato la più precisa $f \in o(g)$, con queste notazioni sarebbe stata perfettamente giustificata la formula, analoga a (6.40),

$$o(f) + o(f) = o(f),$$

e similmente per le altre operazioni algebriche, anche se per scrivere $o(o(f))$ avremmo dovuto definire, per ogni insieme non vuoto F di funzioni infinitesime per $x \to x_*$,

$$o(F) = \{\varphi : \exists f \in F : \lim_{x \to x_*} \frac{\varphi}{f} = 0\},$$

ed in tal caso la scrittura $o(f)$ si sarebbe intesa come abbreviazione di $o(\{f\})$.

Appendice 6.17 - Relazioni tra infinitesimi

Accanto alla definizione di *"o piccolo"* introdotta nella sezione 6.6 conviene definire delle ulteriori relazioni tra infinitesimi. Ci limitiamo qui a considerare soltanto funzioni non negative.

Definizione : *siano f e g due funzioni ~~non negative ed infinitesime~~ per $x \to x_*$, con $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_* (eventualmente privato del punto x_*); si dice che $f(x)$ è "o grande" di g per $x \to x_*$, ~~e si scrive $f(x) = O(g(x); x_*)$~~, se*

$$\limsup_{x \to x_*} \frac{f(x)}{g(x)} < +\infty .$$

Osservazione : dalle ~~proprietà del lim sup segue~~ subito (fatene la dimostrazione nei dettagli) che $f(x) = O(g(x); x_*)$ se e solo se esistono una costante positiva K e un intorno U di x_* tali che

$$f(x) \leq K g(x) \qquad \forall x \in U \setminus \{x_*\}. \tag{A6.9}$$

Nel seguito, analogamente a quanto fatto nella sezione 6.6, ometteremo l'indicazione del punto x_* quando la determinazione di tale punto sia evidente dal contesto.

Osservazione : ricordando le definizioni viste nella sezione 6.6 si verifica subito che

$$f = o(g) \Rightarrow f = O(g), \qquad f \sim g \Rightarrow f = O(g).$$

Osservazione : è interessante notare che la relazione $f = O(g)$ determina una relazione di preordine sull'insieme delle funzioni infinitesime per $x \to x_*$. Infatti, si verifica subito che tale relazione è riflessiva e transitiva, dunque è un preordine; altrettanto facilmente si verifica che la relazione $f = O(g)$ non verifica né la proprietà simmetrica, dato che $x^2 = O(|x|; 0)$ ma non si ha $|x| = O(x^2; 0)$, né quella antisimmetrica, dato che $x^2 = O(2x^2)$ e $2x^2 = O(x^2)$ ma non si ha $x^2 = 2x^2$.

Tramite il procedimento visto nell'appendice 2.11, dal preordine $f = O(g; x_*)$ si può ricavare una relazione di equivalenza; si verifica che questa è determinata, per due funzioni f e g, dall'esistenza di due costanti positive K_1 e K_2 e un intorno U di x_* tali che

$$K_1 f(x) \leq g(x) \leq K_2 g(x) \qquad \forall x \in U \setminus \{x_*\}.$$

Di nuovo come visto nell'appendice 2.11, se ne può dedurre un ordine, ottenuto per passaggio all'insieme quoziente, e una relazione di ordine stretto definita da $f = O(g)$ e non$[g = O(f)]$. Tale ordine stretto non coincide però con la relazione $f = o(g)$, come mostrano ad esempio le funzioni $f(x) = |x \operatorname{sen}(1/x)|$ e $g(x) = |x|$, per le quali si ha $f = O(g)$ (per $x \to 0$) ma, pur non essendo $g = O(f)$, non si ha $f = o(g)$.

Per poter riottenere la relazione $f = o(g)$ come la relazione stretta associata ad un preordine conviene definire un'altra relazione tra funzioni infinitesime.

Definizione : *siano f, g due funzioni non negative ed infinitesime per $x \to x_*$, con $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_* (eventualmente privato del punto x_*); si dice che f è dominata da g per $x \to x_*$, e si scrive $f \preceq g$, se il limite $\lim_{x \to x_*} (f(x)/g(x))$ esiste finito.*

Anche in questo caso la relazione $f \preceq g$ determina una relazione di preordine sull'insieme delle funzioni infinitesime per $x \to x_*$; infatti, si verifica subito che tale relazione è riflessiva e transitiva. Ancora una volta, tale relazione non verifica nè l'ipotesi di simmetria nè quella di antisimmetria, e per poter ottenere una relazione d'ordine sull'insieme delle funzioni infinitesime applichiamo il procedimento dell'appendice 2.11. Definiamo dunque una relazione di equivalenza ponendo

$$f \sim g \iff f \preceq g \text{ e } g \preceq f;$$

in altri termini abbiamo definito $f \sim g$ se e solo se

$$\lim_{x \to x_*} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{A6.10}$$

che non è altro che la definizione di infinitesimi dello stesso ordine vista nella sezione 6.6.

A questo punto, sul quoziente dell'insieme $\mathscr{F}(x_*)$ di tutte le funzioni infinitesime per $x \to x_*$ modulo la relazione di equivalenza appena introdotta, il preordine $f \preceq g$ genera una relazione d'ordine:

$$[f] \leq [g] \iff f \preceq g. \tag{A6.11}$$

Definizione : *le classi di equivalenza dell'insieme quoziente $\mathscr{F}(x_*)/\sim$ sono dette ordini di infinitesimo.*

Osservazione : tra gli ordini di infinitesimo esistono quelli corrispondenti ai numeri reali positivi; infatti ad ogni numero reale positivo α possiamo far corrispondere l'ordine di infinitesimo (cioè la classe di equivalenza) individuato dalla funzione $|x - x_*|^\alpha$. Non bisogna però pensare che gli ordini di infinitesimo corrispondenti ai numeri reali positivi esauriscano tutti i possibili elementi dell'insieme quoziente $\mathscr{F}(x_*)/\sim$, cioè tutti gli ordini di infinitesimo possibili: ad esempio, la funzione $x|\log x|$ individua (tramite la sua classe di equivalenza) un ordine di infinitesimo (per $x \to 0$) che non corrisponde ad alcun numero reale, ☞ formula 6.25.

Una volta introdotta la relazione di equivalenza (A6.10), possiamo definire la relazione stretta $f \prec g$ ponendo

$$f \prec g \iff [f \preceq g \ \mathbf{e}\ \mathbf{non}(f \sim g)]$$

e la relazione di ordine stretto

$$[f] < [g] \iff f \prec g \, .$$

In altri termini, si ha $f \prec g$ se e solo se

$$\lim_{x \to x_*} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \, ,$$

cioè $f = o(g)$. Ad esempio si ha (per $x \to 0$) $x^2 \prec |x|$, e più in generale $|x|^\beta \prec |x|^\alpha$ se $\alpha < \beta$.

Osservazione : come abbiamo già visto nella sezione 6.6, per $x \to 0^+$ la funzione $e^{-1/x}$ è infinitesima di ordine superiore a qualunque potenza di x , e la funzione $-1/\log x$ è infinitesima di ordine inferiore a qualunque potenza di x . In altri termini, identificando ogni numero reale positivo α con l'ordine della funzione $|x|^\alpha$ si ha

$$[e^{-1/x}] < \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \, , \qquad [-1/\log x] > \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \, .$$

Osservazione : in base a quanto visto nell'osservazione precedente, gli ordini di infinitesimo sono un insieme molto più ricco di quello dei numeri reali; naturalmente, non è vero che non ci siano funzioni "strettamente dominate" da $e^{-1/x}$ o "strettamente dominanti" $-1/\log x$; ad esempio si ha $e^{-1/x^2} \prec e^{-1/x}$ e $-1/\log x \prec 1/\log|\log x|$. In generale, è facile verificare che per ogni ordine di infinitesimo ne esiste un altro strettamente superiore e un altro strettamente inferiore; addirittura si potrebbe dimostrare (provate a farlo per esercizio) che per ogni successione di ordini di infinitesimo esiste un infinitesimo di ordine superiore a tutti quelli della successione e un altro di ordine inferiore a tutti quelli della successione.

Osservazione : tutto quello che si è detto per gli infinitesimi potrebbe essere ripetuto per gli infiniti, cioè per quelle funzioni che tendono a $+\infty$ per $x \to x_*$; provate a riscrivere per esercizio le analoghe definizioni e relazioni corrispondenti.

Capitolo 7

Derivate

7.1 - Definizione di derivata e prime proprietà

Nei capitoli precedenti abbiamo cominciato a studiare, con le nozioni di limite e di continuità, il comportamento di una funzione nell'intorno di un punto x_0 assegnato. L'aver però stabilito che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ rende ancora possibile un'ampia varietà di comportamenti della funzione f nelle vicinanze del punto x_0 ; ad esempio, la condizione $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ non identifica il comportamento di f fra i tre seguenti:

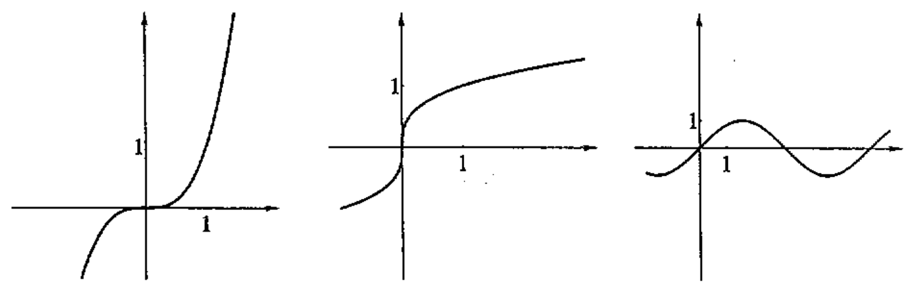


Fig. 7.1 : x^3 è "piatta" in zero Fig. 7.2 : $\sqrt[3]{x}$ è "ripida" Fig. 7.3 : $\operatorname{sen} x$ è intermedia

Per uno studio più dettagliato, o come si usa dire per un'analisi locale della funzione f intorno ad x_0, è necessario introdurre le nozioni di differenziale e di derivata.

Definizione : *se x_0 è un punto del dominio di una funzione f, ed è anche di accumulazione per il dominio stesso, si dice che f è differenziabile in x_0 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che*

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + o(x - x_0)$$

per $x \to x_0$, cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0 .$$

Il numero reale α viene chiamato differenziale di f nel punto x_0, e viene indicato abitualmente con il simbolo $df(x_0)$.

Osservazione : è immediato constatare che se f è differenziabile in un punto x_0 il suo differenziale in x_0 è unico. Infatti, se α_1 e α_2 fossero due differenziali di f in x_0, verificherebbero per definizione

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha_1(x - x_0)}{|x - x_0|} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha_2(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0 ,$$

e allora si avrebbe

$$0 = \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha_1(x - x_0)}{|x - x_0|} - \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha_2(x - x_0)}{|x - x_0|} \right| = |\alpha_2 - \alpha_1| .$$

Dunque, la definizione di differenziale di una funzione in un punto di accumulazione del suo dominio è ben posta.

Esempio : le funzioni costanti $f(x) \equiv c$ sono differenziabili in ogni punto, e il loro differenziale $df(x_0)$ è nullo per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ (✎ es. 7.1).

Esempio : i polinomi di primo grado (o funzioni affini) $f(x) = ax + b$ sono differenziabili in ogni punto, e il loro differenziale $df(x_0)$ coincide con il coefficiente a per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ (✎ es. 7.2).

Osservazione : la definizione di differenziabilità può essere interpretata dicendo che se f è differenziabile in un punto x_0 allora essa differisce dalla funzione affine $r(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0)$ per un infinitesimo di ordine superiore al primo, per $x \to x_0$.

Esempio : dalle formule (6.46), (6.47), (6.48), (6.49), (6.51) del capitolo precedente è immediato ricavare rispettivamente che

$$(d\,\mathrm{sen}\, x)(0) = 1$$
$$(d \cos x)(0) = 0$$
$$(de^x)(0) = 1$$
$$\Big(d \log(1 + x)\Big)(0) = 1$$
$$(d\frac{1}{1 - x})(0) = 1 .$$

Esempio : la funzione $f(x) = |x|$ non è differenziabile nel punto $x_0 = 0$; infatti, comunque si scelga $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0| - \alpha x}{|x - 0|} = 1 + \alpha, \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0| - \alpha x}{|x - 0|} = 1 - \alpha ,$$

e quindi non si può mai avere $1 + \alpha = 1 - \alpha = 0$. Se invece $x_0 \neq 0$, si verifica facilmente che $|x|$ è differenziabile in x_0 e ha differenziale uguale ad 1 se $x_0 > 0$ e a -1 se $x_0 < 0$, cioè

$$d|x| = \frac{x}{|x|} \qquad \forall x \neq 0 .$$

Il prossimo risultato inizia a delineare i rapporti fra differenziabilità e monotonia.

Proposizione 7.1 : *se f è una funzione differenziabile in un punto x_0 e se $df(x_0) > 0$ $[\![< 0]\!]$ allora $f(x) > f(x_0)$ $[\![< f(x_0)]\!]$ in un intorno destro di x_0, e $f(x) < f(x_0)$ $[\![> f(x_0)]\!]$ in un intorno sinistro.*

DIMOSTRAZIONE : basta osservare che

$$f(x) - f(x_0) = \Big(df(x_0) + \frac{o(x - x_0)}{x - x_0}\Big)(x - x_0)$$

e applicare il teorema 6.1 di permanenza del segno per i limiti. ■

Osserviamo esplicitamente che la proposizione precedente non dà alcuna informazione se $df(x_0) = 0$.

Definizione : *se x_0 è un punto del dominio di una funzione f, chiamiamo rapporto incrementale di f nel punto x_0 la funzione*

$$R_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{7.1}$$

definita in $\operatorname{dom} f \setminus \{x_0\}$.

Definizione : *se x_0 è un punto del dominio di una funzione f, ed è anche di accumulazione per il dominio stesso, chiameremo derivata di f nel punto x_0 il valore del limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se questo esiste, finito o infinito che sia. Tale limite si indica con uno dei simboli

$$f'(x_0) , \qquad \frac{df}{dx}(x_0) , \qquad Df(x_0) .$$

Diremo poi che f è derivabile in x_0 se la derivata $f'(x_0)$ esiste ed è finita, e diremo che f è derivabile nel sottoinsieme B di A se f è derivabile in ogni punto di B. Infine, diremo semplicemente che f è derivabile se lo è in ogni punto del suo dominio.

Notiamo che c'è un certo contrasto nel dire, nel caso $f'(x_0) = \pm\infty$, che una funzione ha derivata ma non è derivabile; tuttavia, poter parlare di derivata infinita è molto comodo in numerosi frangenti.

Definizione : *se esistono, i limiti*

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \qquad \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

vengono chiamati rispettivamente derivata sinistra e derivata destra di f *nel punto* x_0 *e vengono indicati rispettivamente con i simboli*

$$f'_-(x_0), \qquad f'_+(x_0).$$

Esempio : abbiamo già osservato che la funzione $f(x) = |x|$ non è derivabile nell'origine; si ha infatti (verificatelo) che $f'_-(0) = -1$ mentre $f'_+(0) = 1$.

Esempio : vedremo in seguito che per la funzione $f(x) = x^3$ (☛ figura 7.1) si ha $f'(0) = 0$, per la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (☛ figura 7.2) si ha $f'(0) = +\infty$ e per la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ (☛ figura 7.3) si ha $f'(0) = 1$: dunque la derivata permette di distinguere i tre comportamenti.

Osservazione : dalle definizioni precedenti si vede immediatamente che f è differenziabile in x_0 se e solo se f è derivabile in x_0, e risulta $df(x_0) = f'(x_0)$. Per le funzioni di più variabili (➡ appendice 7.1), che costituiranno uno degli argomenti principali del corso di Analisi matematica II, vedremo invece che le relative nozioni di derivabilità e differenziabilità non coincidono (➡ appendice 7.2).

Esempio : usando le formule (6.46) e (6.47) otteniamo

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x &= \operatorname{sen}(x_0 + (x - x_0))\\ &= \operatorname{sen} x_0 \cos(x - x_0) + \cos x_0 \operatorname{sen}(x - x_0)\\ &= \operatorname{sen} x_0 (1 + o(x - x_0)) + \cos x_0 (x - x_0 + o(x - x_0))\\ &= \operatorname{sen} x_0 + \cos x_0 (x - x_0) + o(x - x_0),\end{aligned}$$

dunque $D \operatorname{sen} x = \cos x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Analogamente si trova (✎ es. 7.4) che $D \cos x = -\operatorname{sen} x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e che $De^x = e^x$, dove abbiamo usato (6.48) scrivendo $e^x = e^{x_0} \cdot e^{x-x_0}$.

Applicando il procedimento appena introdotto alla funzione $f'(x)$ (definita nell'insieme dei punti su cui f risulta derivabile) si può definire la derivata seconda f'' di f, e per induzione la derivata n-esima $D^{(n)}f$ di f (che indicheremo talvolta anche con $f^{(n)}$), ponendo

$$\begin{cases} D^{(0)}f = f \\ D^{(n+1)}f = D(D^{(n)}f). \end{cases}$$

Esempio : la derivata prima di e^x è e^x, quindi è uguale ad e^x anche la derivata seconda (e tutte le altre).

Cominciamo ad elencare alcune proprietà elementari delle funzioni derivabili: dato che la derivata di una funzione è un limite, vale chiaramente il prossimo risultato di località (☛ corollario 6.9).

Proposizione 7.2 : *se* f *ha derivata in un punto* x_0, *e se* g *coincide con* f *in un intorno di* x_0, *allora anche* g *ha derivata in* x_0 *e* $g'(x_0) = f'(x_0)$.

Esempio : la funzione $g(x) = |x|$ ha derivata 1 in ogni punto $x_0 > 0$, dato che nell'intorno $]0, +\infty[$ di ogni tale punto x_0 la funzione g coincide con la funzione $f(x) = x$, che ha derivata 1.

Proposizione 7.3 : *se* f *è una funzione derivabile in* x_0, *allora* f *è continua in* x_0.

DIMOSTRAZIONE : si ha infatti, per la differenziabilità di f in x_0,

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

da cui si ottiene

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0} (f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) = 0$$

e la tesi segue quindi immediatamente. ∎

Osservazione : va notato che, se nella proposizione precedente si elimina l'ipotesi che la derivata in x_0 sia finita, la funzione f può non risultare continua in x_0. Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è discontinua nell'origine ed ha $f'_-(0) = 0$, $f'_+(0) = +\infty$. Se si vuole un esempio in cui $f'(0)$ esiste, basta considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ 2 & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

che è ancora discontinua nell'origine ed ha $f'(0) = +\infty$. D'altro canto, l'avere derivata infinita in un punto non implica automaticamente l'essere discontinua; infatti (☛ figura 7.2) la funzione $f(x) = x^{1/3}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ ma $f'(0) = +\infty$ (➡ appendice 7.3).

Una funzione può dunque essere derivabile una volta (e allora è necessariamente continua), questa derivata può essere a sua volta continua (oppure no), può essere a sua volta derivabile (e allora è necessariamente continua), lo stesso per la derivata seconda, eccetera.

Definizione : *si dice che una funzione* f *è di classe* C^k *in un insieme* A, *con* $k = 0, 1, \ldots$, *se le funzioni* $f, f', \ldots, f^{(k)}$ *sono funzioni continue nell'insieme* A *; in tal caso si scrive* $f \in C^k(A)$. *Se* f *ha derivate di ogni ordine (quindi sono tutte continue) si dice che* f *è di classe* C^∞.

Esempio : la funzione e^x è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

7.2 - Operazioni algebriche sulle derivate

In questa sezione studiamo le proprietà algebriche (somma, prodotto, composizione, ...) delle funzioni derivabili.

Teorema 7.4 : *siano* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *due funzioni derivabili in* x_0 *; allora si ha:*
1) *la funzione* $f + g$ *è derivabile in* x_0 *e si ha*
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) ;$$
2) *la funzione* $f \cdot g$ *è derivabile in* x_0 *e si ha*
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) ;$$
3) *se* $f(x_0) \neq 0$ *la funzione* $1/f$ *risulta derivabile in* x_0 *e si ha*
$$\Big(\frac{1}{f}\Big)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)} .$$

DIMOSTRAZIONE : la prima proprietà segue immediatamente dal teorema 6.6 sulla somma di limiti. Per dimostrare la seconda proprietà, osserviamo che si ha
$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \Big(\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \Big) \\ &= \lim_{x\to x_0} \Big(g(x)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \Big) \\ &= g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0) ,\end{aligned}$$
dove va notato che abbiamo utilizzato la proposizione 7.3 per ottenere l'uguaglianza
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) .$$
Per dimostrare infine l'ultima proprietà osserviamo anzitutto che, sempre usando la proposizione 7.3, dal fatto che $f(x_0) \neq 0$ segue che $f(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 (☞ teorema 6.21), quindi si ha
$$\lim_{x\to x_0} \frac{1/f(x) - 1/f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \Big(\frac{1}{f(x)f(x_0)} \, \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0} \Big) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)} ,$$
che conclude la dimostrazione. ■

Osservazione : unendo gli ultimi due risultati del teorema 7.4 si ottiene la formula di derivazione per un rapporto di funzioni f/g, con f e g derivabili in x_0 e $g(x_0) \neq 0$:
$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(x_0) = \Big(f \cdot \frac{1}{g}\Big)'(x_0) = \Big(f' \cdot \frac{1}{g} - f\frac{g'}{g^2}\Big)(x_0) = \Big(\frac{f'g - fg'}{g^2}\Big)(x_0) .$$

Come caso particolare dei risultati precedenti otteniamo il seguente corollario.

Corollario 7.5 : *se* f, g *sono due funzioni derivabili allora:*
1) *la funzione* $f + g$ *è derivabile e si ha*
$$(f+g)' = f' + g' ;$$
2) *la funzione* $f \cdot g$ *è derivabile e si ha*
$$(f \cdot g)' = f'g + fg' ;$$
3) *la funzione* f/g *risulta derivabile nell'insieme* $\{x : g(x) \neq 0\}$ *e si ha*
$$\Big(\frac{f}{g}\Big)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} .$$

In particolare, se k *è una costante, allora per ogni funzione derivabile* f *si ha*
$$D(f + k) = Df , \qquad D(kf) = kDf .$$

Esempio : grazie al corollario precedente, dalle definizioni delle funzioni iperboliche (☞ sezione 4.7) si ricava una importante proprietà che le lega:
$$D \operatorname{senh} x = \cosh x , \qquad D \cosh x = \operatorname{senh} x .$$

Osservazione : è evidente che se due funzioni non sono derivabili, la loro somma può anche essere derivabile (basta pensare a $f - f$); invece, se f è derivabile allora $f + g$ è derivabile se e solo se lo è anche g ; osservazioni analoghe valgono per le altre operazioni.

Osservazione : iterando la regola di derivazione di un prodotto si ottiene, se f, g e h sono tre funzioni reali derivabili, l'uguaglianza
$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$
e più in generale, per un prodotto finito di funzioni reali $f_1, \ldots, f_n$,
$$\Big(\prod_{i=1}^n f_i\Big)' = \sum_{i=1}^n \Big(f_i' \prod_{j \neq i} f_j\Big) .$$

Esempio : la derivata di $x^2 = x \cdot x$ è $1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$; allora la derivata di $x^3 = x^2 \cdot x$ è $2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$. Per induzione (✎ es. 7.6) si prova che

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D(x^n) = nx^{n-1} .$$

Esempio : se consideriamo la derivata n-esima del monomio x^m si ottiene facilmente per induzione (verificatelo) che

$$D^{(n)}x^m = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} & \text{se } n \le m \\ 0 & \text{se } m < n . \end{cases} \tag{7.2}$$

Dunque, se $P(x)$ è un polinomio di grado m dato da

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k ,$$

la sua derivata n-esima è data da

$$P^{(n)}(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=n}^{m} a_k \frac{k!}{(k-n)!}x^{k-n} & \text{se } n \le m \\ 0 & \text{se } n > m . \end{cases} \tag{7.3}$$

Proposizione (formula di Leibniz) 7.6 : *se f e g sono due funzioni derivabili n volte in un punto x_0 , allora lo è anche il prodotto fg e si ha*

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0) . \tag{7.4}$$

DIMOSTRAZIONE : la formula (7.4) risulta evidentemente vera per $n = 0$ (o per $n = 1$ dal teorema 7.4); supponendola vera per n , si ha per $n+1$

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= D(fg)^{(n)} \\
&= D\Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}) \\
&= \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} f^{(h)} g^{(n-h+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\
&= f^{(n+1)} g + \sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h-1} f^{(h)} g^{(n-h+1)} + f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\
&= f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \Big[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\Big] f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} ,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la proposizione 3.9 per sommare i coefficienti binomiali. ■

Esempio : abbiamo

$D^{(0)} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$, $\quad D^{(1)} \operatorname{sen} x = \cos x$, $\quad D^{(2)} \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x$, $\quad D^{(3)} \operatorname{sen} x = -\cos x$,

e poi $D^{(4)} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$ e così via; le derivate della funzione seno sono allora (✎ es. 7.9)

$$D^{(n)} \operatorname{sen} x = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } n = 4k \\ \cos x & \text{se } n = 4k+1 \\ -\operatorname{sen} x & \text{se } n = 4k+2 \\ -\cos x & \text{se } n = 4k+3 , \end{cases}$$

o in forma più compatta (verificatelo per induzione)

$$D^{(n)} \operatorname{sen} x = \begin{cases} (-1)^{n/2} \operatorname{sen} x & \text{se } n \text{ è pari} \\ (-1)^{(n-1)/2} \cos x & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Dalla formula di Leibniz (7.4) si ha per la derivata n-esima della funzione $x \operatorname{sen} x$

$$D^{(n)}(x \operatorname{sen} x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{(k)}x \, D^{(n-k)} \operatorname{sen} x = x D^{(n)} \operatorname{sen} x + n D^{(n-1)} \operatorname{sen} x ;$$

dunque, da quanto visto sopra per le derivate successive di $\operatorname{sen} x$, si ricava

$$D^{(n)}(x \operatorname{sen} x) = \begin{cases} (-1)^{n/2}(x \operatorname{sen} x - n \cos x) & \text{se } n \text{ è pari} \\ (-1)^{(n-1)/2}(x \cos x + n \operatorname{sen} x) & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Il prossimo risultato è il fondamentale teorema di derivazione di una composizione.

Teorema 7.7 : *sia f una funzione derivabile in x_0 , e sia g una funzione derivabile in $f(x_0)$ e tale che il punto x_0 sia di accumulazione per $\operatorname{dom}(g \circ f)$. Allora la funzione composta $g \circ f$ risulta derivabile in x_0 e si ha*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0) .$$

DIMOSTRAZIONE : per la derivabilità di f in x_0 si ha

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0; x \to x_0)$$

e, posto $y_0 = f(x_0)$, per la derivabilità di g in y_0

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0; y \to y_0) .$$

Allora

$$\begin{aligned}
g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big) &= g'\big(f(x_0)\big)\big(f(x) - f(x_0)\big) + o\big(f(x) - f(x_0); f(x) \to f(x_0)\big) \\
&= g'\big(f(x_0)\big) f'(x_0)(x - x_0) + g'\big(f(x_0)\big) o(x - x_0) \\
&\quad + o\big(f(x) - f(x_0); f(x) \to f(x_0)\big) ,
\end{aligned}$$

e tenuto conto che per la proprietà (6.42) degli infinitesimi si ha

$$o\big(f(x) - f(x_0); f(x) \to f(x_0)\big) = o\big(f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)\big) = o(x - x_0) ,$$

si ottiene

$$g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big) = g'\big(f(x_0)\big) f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) ,$$

cioè

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0)$$

come volevasi dimostrare. ■

Osservazione : la formula di derivazione per le funzioni composte si può dunque scrivere nella forma

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f' .$$

In maniera analoga (fatelo per esercizio), dal teorema precedente si ottiene la formula di derivazione per la composizione di tre funzioni $h \circ g \circ f$ scrivendola ad esempio come $h \circ (g \circ f)$:

$$(h \circ g \circ f)' = (h' \circ g \circ f) \cdot (g' \circ f) \cdot f' ,$$

e formule simili per composizioni di un numero finito qualsiasi di funzioni (✎ es. 7.10).

È dunque possibile senza difficoltà derivare la composizione di un numero qualunque di funzioni di ciascuna delle quali si sappia la derivata: è solo una questione di pazienza e ordine, ogni volta basta derivare la più esterna (e calcolare la sua derivata nell'argomento che segue), e poi passare a derivare l'argomento. Un errore estremamente frequente è ricordare il teorema precedente come "la derivata di una composizione è il prodotto delle derivate", che produce risultati sbagliati del tipo $(g \circ f)'(x) = g'(x) \cdot f'(x)$.

Esempio : mediante il teorema 7.7 si ottiene subito che

$$D\Big(\text{sen}\big(\cos(x^2)\big)\Big) = \cos\big(\cos(x^2)\big) \cdot \big(-\text{sen}(x^2)\big) \cdot 2x .$$

Osservazione : se inventassimo una funzione "Gsen x" che dà il seno dell'angolo la cui misura *in gradi* è x , cioè $\text{Gsen}\, x = \text{sen}(x\pi/180)$, di modo che ad esempio $\text{Gsen}\, 45 = \text{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, e analogamente per la funzione $\text{Gcos}\, x = \cos(x\pi/180)$, applicando la formula di derivazione per le funzioni composte avremmo

$$D\,\text{Gsen}\, x = \frac{\pi}{180}\,\text{Gcos}\, x , \qquad D\,\text{Gcos}\, x = -\frac{\pi}{180}\,\text{Gsen}\, x \tag{7.5}$$

anziché le usuali $D\,\text{sen}\, x = \cos x$, $D \cos x = -\text{sen}\, x$. Questo giustifica la scelta, comunemente adottata in Analisi matematica, di misurare gli angoli in radianti e non in gradi (inoltre, provate a tracciare un grafico in scala delle funzioni $\text{Gsen}\, x$ e $\text{Gcos}\, x$ ...).

Il seguente risultato riguarda la derivabilità delle funzioni inverse.

Teorema 7.8 : *sia* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *una funzione continua e strettamente monotona, e sia* $x_0 \in]a,b[$ *tale che* f *risulti derivabile in* x_0 , *con* $f'(x_0) \neq 0$. *Allora la funzione inversa* f^{-1} *risulta derivabile nel punto* $y_0 = f(x_0)$ *e si ha*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

DIMOSTRAZIONE : ponendo $y = f(x)$ e usando il teorema 6.11 di cambiamento di variabile nei limiti si ha

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} ,$$

come volevasi dimostrare. ■

Osservazione : la tesi del teorema può essere scritta

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} ;$$

in particolare, se f verifica le ipotesi del teorema e se la sua derivata è anch'essa continua allora anche la derivata di f^{-1} è continua, perché composizione di funzioni continue. Se poi f è derivabile due volte, anche f^{-1} lo è, perché

$$(f^{-1})''(x) = D\big((f^{-1})'\big)(x) = D\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = -\frac{1}{\big[f'(f^{-1}(x))\big]^2} f''(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) ,$$

dove abbiamo usato i teoremi 7.7 e 7.8 (➡ appendice 7.4).

Esempio : mostriamo come, usando i teoremi precedenti, si può calcolare la derivata della funzione $\log x$; per esercizio ricavate poi le derivate delle altre funzioni elementari elencate nella tabella riassuntiva che segue (✎ es. 7.13). Essendo la funzione $\log x$ l'inversa della funzione e^x , usando il teorema 7.8 si ha, posto $x = e^y$,

$$D \log x = \frac{1}{De^y} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} .$$

Esempio : non è possibile scrivere esplicitamente l'inversa della funzione $f(x) = x + e^x$ (anche se questa esiste, perché f è una funzione strettamente crescente); tuttavia possiamo determinare la derivata di questa inversa nel punto $y_0 = 1$, e in generale in tutti i punti y_0 per i quali sappiamo risolvere l'equazione $f(x) = y_0$: infatti $1 = f(0)$, quindi (✎ es. 7.14)

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2} .$$

Esempio : calcoliamo la derivata della funzione x^α , che è definita per ogni $x > 0$ dalla formula $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$; abbiamo subito

$$Dx^\alpha = D(e^{\alpha \log x}) = e^{\alpha \log x} D(\alpha \log x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \log x} .$$

Riscrivendo $e^{\alpha \log x}$ come x^α otteniamo

$$Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1} .$$

Allo stesso modo è possibile derivare tutte le funzioni della forma $[f(x)]^{g(x)}$: basta scrivere questa potenza in forma esponenziale (✎ es. 7.15).

Osservazione : supponiamo di non voler nominare il numero e , costruendo gli esponenziali e i logaritmi in qualche altra base, ad esempio in base 10 . Indichiamo con $\operatorname{Log} x$ la funzione logaritmo in base 10 , cioè l'inversa della funzione 10^x : sappiamo che

$$\operatorname{Log} x = \operatorname{Log} \mathrm{e} \log x ,$$

quindi per quanto visto sopra

$$D \operatorname{Log} x = \frac{\operatorname{Log} \mathrm{e}}{x} : \tag{7.6}$$

intanto, il numero e è comparso per forza (o peggio, è comparso un misterioso numero $0.43429 \cdots = \log_{10} \mathrm{e}$), e poi dovremmo ricordarci questa formula anziché la più comoda $D \log x = 1/x$. Di nuovo, ecco il motivo per cui in Analisi matematica si usa sempre e solo il logaritmo in base e .

Funzione	Derivata
costante	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^3}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{arcsen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Funzione	Derivata
$\lvert x\rvert$	$\frac{x}{\lvert x\rvert}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \log a$
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \log a}$
$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$
$\tanh x$	$1-\tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$
$\operatorname{sett\,senh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{sett\,cosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{sett\,tanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

A questo punto, per calcolare le derivate di tutte le funzioni elementari, basterà applicare ripetutamente i teoremi precedenti, conoscendo le derivate delle funzioni base k (costante), x , $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x . Nella tabella sono riportate le derivate delle funzioni

elementari più comunemente usate; osserviamo che le funzioni indicate sono derivabili in ogni punto del loro dominio naturale con queste eccezioni:

a) la funzione $\lvert x\rvert$ non è derivabile in 0 ;
b) la funzione $\operatorname{arcsen} x$ ha derivata $+\infty$ nei punti -1 e 1 ;
c) la funzione $\arccos x$ ha derivata $-\infty$ nei punti -1 e 1 ;
d) quando $0 < \alpha < 1$, la funzione x^α ha derivata $+\infty$ nel punto 0 ;
e) la funzione $\operatorname{sett\,cosh} x$ ha derivata $+\infty$ nel punto 1 .

Inoltre, abbiamo incluso nella tabella anche alcuni casi particolari, ma di frequente uso, di funzioni già presenti nella tabella (potenze di x) o facilmente riconducibili ad esse (a^x , $\log_a x$).

I teoremi dimostrati finora permettono di mostrare, in molti casi, che una funzione è derivabile; un po' più difficile è studiare la derivabilità dove non si applicano i teoremi precedenti (✎ es. 7.16). Vedremo più avanti (☞ corollario 7.28) un risultato che può venire in aiuto in questi casi.

7.3 - Derivate e proprietà locali delle funzioni

Dal punto di vista geometrico il concetto di derivata è molto importante, in quanto permette di determinare l'equazione della retta tangente ad un grafico cartesiano. Data infatti una funzione $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ e due punti distinti $x_0, x_1 \in]a,b[$, possiamo definire la *retta secante* al grafico di f nei punti di ascissa x_0 e x_1 come la retta che passa per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ del grafico di f , cioè la retta di equazione

$$\begin{aligned} y &= f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0) \\ &= f(x_0) + R_{x_0}(x_1)(x-x_0) . \end{aligned} \tag{7.7}$$

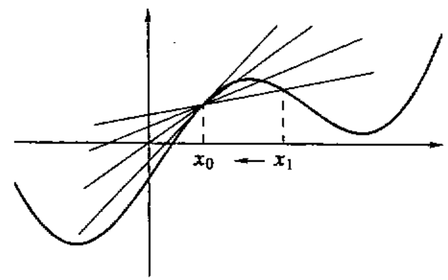


Fig. 7.4 : rette secanti e retta tangente

Se questa retta, per x_1 che si avvicina ad x_0, "tende" ad assumere una ben determinata inclinazione (☞ figura 7.4), ricordando che essa passa sempre per il punto $(x_0, f(x_0))$, abbiamo che la retta secante si avvicina, nel piano, ad una retta fissata: sarà ragionevole chiamare tale "retta limite", se esiste, *retta tangente* al grafico di f nel punto di ascissa x_0. Va osservato che la definizione appena data di retta tangente ad un grafico corrisponde esattamente al procedimento che si usa abitualmente per tracciare su un foglio, con riga e matita, le tangenti ad una curva: si punta la matita in $(x_0, f(x_0))$ e si sposta la riga per far in modo che l'altro punto in cui la riga stessa passa sul grafico si avvicini a quello tenuto fisso.

Osservazione : dalla (7.7) si vede subito che la retta tangente, definita come "limite" delle rette secanti nel senso specificato sopra, esiste se e solo se la funzione f ha derivata in x_0, e in tal caso la retta tangente ha equazione (✎ es. 7.20)

$$\begin{array}{ll} y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) & \text{se } f \text{ è derivabile in } x_0 \\ x = x_0 & \text{se } f'(x_0) = \pm\infty . \end{array}$$

Nei casi in cui la derivata $f'(x_0)$ esiste ma non è finita, la retta tangente al grafico di f in x_0 è dunque la retta verticale di equazione $x = x_0$. Questo succede ad esempio per la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ nel punto $x_0 = 0$ (☞ figura 7.2).

Esempio : la funzione $f(x) = |x|$ non è derivabile nel punto $x_0 = 0$, dunque in tale punto non esiste la retta tangente al grafico di f. Analogamente, per il grafico della funzione $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ (estesa per continuità ponendo $f(0) = 0$) non esiste la retta tangente nel punto $x_0 = 0$, in quanto non esiste la derivata di f nell'origine (☞ figura 7.5). Invece, la funzione $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ (estesa anch'essa per continuità ponendo $f(0) = 0$), è derivabile in $x_0 = 0$ e si ha $f'(0) = 0$; dunque la retta tangente in x_0 al suo grafico è orizzontale (☞ figura 7.6). Potete convincervi di questi fatti aiutandovi con le relative figure, ma poi dimostrate rigorosamente le asserzioni fatte (✎ es. 7.21).

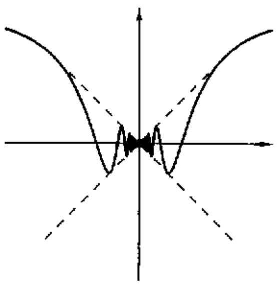


Fig. 7.5 : $y = x \operatorname{sen}(1/x)$

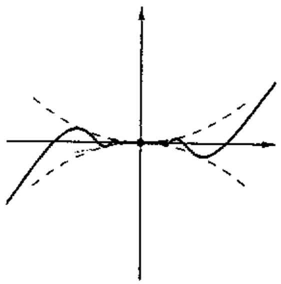


Fig. 7.6 : $y = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$

Osservazione : questo risultato ha una semplice interpretazione geometrica (☞ figura 7.7). Ricordando, ☞ formula (2.8), che il grafico $\mathscr{G}_{f^{-1}}$ della funzione inversa è il simmetrico del grafico $\mathscr{G}_f$ rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, anche la retta r tangente a $\mathscr{G}_f$ nel punto (x_0, y_0) sarà la simmetrica della retta r' tangente a $\mathscr{G}_{f^{-1}}$ nel punto simmetrico (y_0, x_0). Però il coefficiente angolare della retta r è $m = f'(x_0)$, e se questo coefficiente è diverso da zero è noto che il coefficiente angolare della retta simmetrica è $1/m$, che è la tesi del teorema.

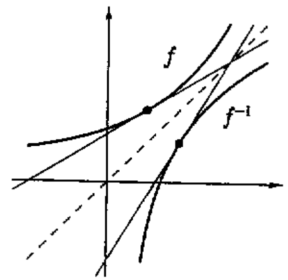


Fig. 7.7 : derivata dell'inversa: interpretazione geometrica

Ci occuperemo ora dello studio delle proprietà locali di monotonia di una funzione f assegnata, e dello studio degli eventuali punti di minimo o di massimo locale di f.

Proposizione 7.9 : *sia f una funzione monotona debolmente crescente [debolmente decrescente], e derivabile in un punto x_0; allora si ha $f'(x_0) \geq 0$ $[\leq 0]$.*

DIMOSTRAZIONE : per la monotonia di f si ha

$$x > x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(x_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 ;$$

inoltre, essendo f derivabile, la derivata $f'(x_0)$ coincide con la derivata destra $f'_+(x_0)$, a meno che x_0 sia l'estremo destro del dominio di f, nel qual caso bisogna lavorare con la derivata sinistra. Dunque

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 ,$$

come volevasi dimostrare. ■

Osservazione : vedremo tra poco che vale anche il viceversa (☞ proposizione 7.19), cioè per le funzioni derivabili il segno della derivata prima determina il tipo di monotonia.

Osservazione : si potrebbe pensare che per una funzione reale f strettamente crescente debba necessariamente essere $f'(x) > 0$ per ogni punto x di derivabilità; ciò non è vero, come mostra la funzione $f(x) = x^3$ che è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ ed è strettamente crescente, ma ha derivata $3x^2$ che è nulla nell'origine; la proposizione 7.20 generalizzerà questa situazione.

Definizione : *sia* $f : A \to \mathbb{R}$; *si dice che un punto* $x_0 \in A$ *è di minimo* ⟦*massimo*⟧ *locale (o relativo) per* f *se esiste un intorno* U *di* x_0 *tale che* x_0 *è un punto di minimo* ⟦*massimo*⟧ *per* $f_{|U}$, *cioè se*

$$\exists U \in \mathscr{I}_{x_0} : \forall x \in A \cap U, \qquad f(x_0) \leq f(x) \quad [\![f(x_0) \geq f(x)]\!] .$$

Si dice poi che x_0 *è un punto di minimo* ⟦*massimo*⟧ *locale interno se esso è di minimo* ⟦*massimo*⟧ *locale e inoltre è interno ad* A , *cioè esiste un intorno* U_0 *di* x_0 *contenuto in* A . *Si dice infine che* x_0 *è un punto di minimo* ⟦*massimo*⟧ *locale stretto per la funzione* f *se esiste un intorno* U *di* x_0 *tale che*

$$\forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\}, \qquad f(x_0) < f(x) \quad [\![f(x_0) > f(x)]\!] .$$

Osservazione : se x_0 è un punto di minimo ⟦massimo⟧ locale interno, sostituendo eventualmente U con $U \cap U_0$ possiamo supporre $U \subset A$. Vale inoltre la pena di osservare che ogni punto di minimo ⟦massimo⟧ assoluto è anche un punto di minimo ⟦massimo⟧ locale. Nella figura seguente viene mostrato il comportamento di una funzione che possiede diversi punti di minimo locale (➡ appendice 7.5).

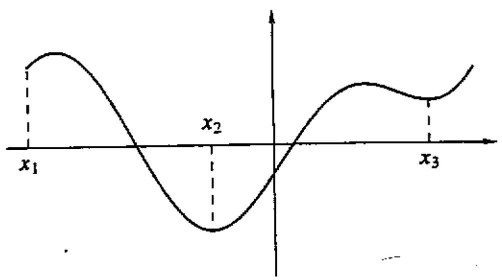


Fig. 7.8 : una funzione con vari minimi locali

Proposizione 7.10 : *sia* f *una funzione, e sia* x_0 *un punto di minimo o massimo locale interno per* f *in cui* f *risulti derivabile. Allora si ha* $f'(x_0) = 0$.

DIMOSTRAZIONE : sostituendo eventualmente f con $-f$, possiamo supporre ad esempio che x_0 sia di minimo locale; allora esiste un opportuno intorno U di x_0 tale che

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in U .$$

Quindi si ha

$$\begin{cases} x < x_0 \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \\ x > x_0 \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 , \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$f'_-(x_0) \leq 0 , \qquad f'_+(x_0) \geq 0 .$$

Dalla derivabilità di f in x_0 segue quindi che $f'(x_0) = 0$. ■

Osservazione : notiamo che nella proposizione precedente abbiamo supposto f derivabile in x_0 ; può tuttavia accadere che x_0 sia un punto di minimo (o di massimo) locale senza che f sia derivabile in x_0 ; basti pensare ad esempio alla funzione $f(x) = |x|$ definita su $\mathbb{R}$, con $x_0 = 0$. Un'altra ipotesi che va sottolineata nella proposizione precedente consiste nell'aver supposto x_0 interno al dominio di f ; infatti il risultato sarebbe falso senza questa posizione, come dimostra la funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x$, con $x_0 = 0$. Per questa funzione si ha evidentemente che x_0 è un punto di minimo locale (anzi addirittura globale) di f , ma $f'(x_0) = 1$. Questo è un fatto generale; infatti vale il seguente risultato (che invitiamo a dimostrare per esercizio imitando la dimostrazione della proposizione precedente).

Proposizione 7.11 : *sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione, e sia* $x_0 < b$ *un punto di minimo* ⟦*massimo*⟧ *locale per* f *in cui* f *risulti derivabile a destra. Allora si ha* $f'_+(x_0) \geq 0$ ⟦ ≤ 0 ⟧ . *Analogamente, se* $x_0 > a$ *è un punto di minimo* ⟦*massimo*⟧ *locale per* f *in cui* f *risulti derivabile a sinistra, si ha* $f'_-(x_0) \leq 0$ ⟦ ≥ 0 ⟧ .

Il risultato della proposizione precedente può essere rafforzato: dimostrate per esercizio questo corollario usando le definizioni di derivata e di minimo locale.

Corollario 7.12 : *se una funzione* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è derivabile in* a *allora*

$$f'(a) > 0 \Rightarrow \text{il punto } a \text{ è di minimo locale stretto}$$
$$f'(a) < 0 \Rightarrow \text{il punto } a \text{ è di massimo locale stretto.}$$

Analogamente, se f *è derivabile in* b *si ha*

$$f'(b) > 0 \Rightarrow \text{il punto } b \text{ è di massimo locale stretto}$$
$$f'(b) < 0 \Rightarrow \text{il punto } b \text{ è di minimo locale stretto.}$$

Dalla proposizione 7.11, e da questo corollario, applicato nei due intervalli $[x_0 - \varepsilon, x_0]$ e $[x_0, x_0 + \varepsilon]$, segue subito il prossimo.

Corollario 7.13 : *sia f è una funzione continua in un intervallo I, e sia x_0 interno ad I. Se esistono le derivate destra e sinistra in x_0, allora*

$$f'_-(x_0) < 0 < f'_+(x_0) \Rightarrow \text{il punto } x_0 \text{ è di minimo locale stretto}$$
$$f'_-(x_0) > 0 > f'_+(x_0) \Rightarrow \text{il punto } x_0 \text{ è di massimo locale stretto.}$$

Osservazione : è importante osservare che la condizione $f'(x_0) = 0$ non è sufficiente a garantire che il punto x_0 sia di massimo o di minimo relativo; infatti, la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ e quindi non ha alcun punto di massimo o di minimo relativo, ma $f'(0) = 0$. Analogamente, il viceversa del corollario precedente non è vero: ad esempio, se f è derivabile nel punto di minimo o massimo locale stretto x_0 non si ottengono disuguaglianze, ma $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0$.

Osservazione : alla luce delle proposizioni precedenti, data una funzione continua f definita su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ la ricerca dei suoi punti di massimo e di minimo (che esistono per il teorema di Weierstrass 6.35) va fatta considerando soltanto:

a) i punti di $]a,b[$ in cui f non è derivabile,
b) i punti di $]a,b[$ in cui f è derivabile e $f' = 0$,
c) i punti del bordo $x = a$ e $x = b$.

Esempio : consideriamo la funzione $f(x) = |x|/(1+x^2)$ definita sull'intervallo $[-2,4]$; essa è derivabile in ogni punto del suo dominio eccetto l'origine, con derivata

$$f'(x) = \frac{x(1-x^2)}{|x|(1+x^2)^2} \qquad \forall x \neq 0\,.$$

Dunque, per quanto detto precedentemente, la ricerca dei punti di massimo o di minimo locale si riduce ai punti $x = -2$ ed $x = 4$ in quanto estremi dell'intervallo di definizione, al punto $x = 0$ in quanto punto di non derivabilità, ai punti $x = -1$ ed $x = 1$ in quanto punti interni in cui la derivata prima si annulla. Essendo $f'(-2) > 0$ e $f'(4) < 0$, i punti $x = -2$ e $x = 4$ sono di minimo locale; inoltre il punto $x = 0$ è evidentemente di minimo assoluto (la funzione è non negativa e $f(0) = 0$). Quindi, dovendo esistere per il teorema di Weierstrass almeno un punto di massimo per f, i punti $x = -1$ e $x = 1$ (notiamo che la funzione f è pari) non possono che essere punti di massimo assoluto, e quindi anche relativo (✎ es. 7.23).

7.4 - Teoremi di Rolle, Lagrange, Cauchy

Dimostreremo ora alcuni teoremi fondamentali sulle derivate; come si vedrà, essi sono tra loro strettamente concatenati, nel senso che la dimostrazione di ognuno dipende fortemente dai teoremi che lo precedono.

Teorema di Rolle 7.14 : *sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che:*
1) *f è continua sull'intervallo chiuso $[a,b]$*
2) *f è derivabile almeno sull'intervallo aperto $]a,b[$*
3) *$f(a) = f(b)$.*

Allora esiste almeno un punto $z \in]a,b[$ tale che $f'(z) = 0$.

DIMOSTRAZIONE : essendo $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato ed f continua, per il teorema di Weierstrass 6.35 esistono in $[a,b]$ un punto di minimo x_0 e uno di massimo x_1 per la funzione f. Posto $m = f(x_0)$ e $M = f(x_1)$, se entrambi x_0 e x_1 si trovassero agli estremi dell'intervallo $[a,b]$, a causa dell'ipotesi 3) si avrebbe $m = M$ e quindi la funzione f sarebbe costante, per cui ogni punto $z \in]a,b[$ verificherebbe la condizione $f'(z) = 0$. Dunque almeno uno tra x_0 e x_1, supponiamo ad esempio x_0, è interno all'intervallo $]a,b[$.. In tal caso, per la proposizione 7.10 si ha $f'(x_0) = 0$ e quindi il teorema di Rolle risulta completamente dimostrato. ∎

Osservazione : nessuna delle ipotesi del teorema di Rolle può essere eliminata. Infatti, se si elimina l'ipotesi di continuità la funzione definita da $f(1) = 0$ e $f(x) = x$ per $x \neq 1$ risulta continua nell'intervallo $[0,1[$, derivabile nell'intervallo $]0,1[$ e verifica $f(0) = f(1)$, ma non esistono punti in cui $f' = 0$; se si elimina l'ipotesi di derivabilità in $]a,b[$ la funzione $f(x) = |x|$ è continua nell'intervallo $[-1,1]$ e verifica $f(-1) = f(1)$, ma non esistono punti in cui $f' = 0$; se si elimina infine l'ipotesi $f(a) = f(b)$ la funzione $f(x) = x$ è continua e derivabile sull'intervallo $[0,1]$ ma non esistono punti in cui la sua derivata si annulla (✎ es. 7.24).

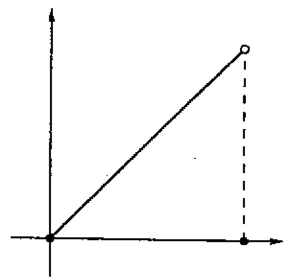


Fig. 7.9 : senza l'ipotesi 1)

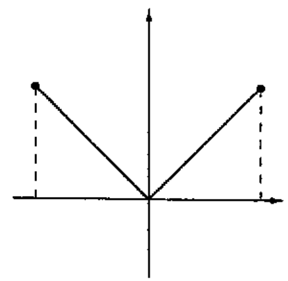


Fig. 7.10 : senza l'ipotesi 2)

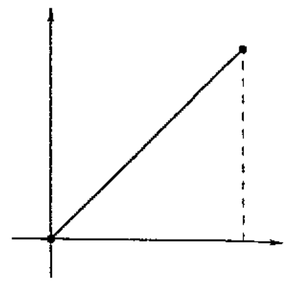


Fig. 7.11 : senza l'ipotesi 3)

Corollario 7.15 : *sia f una funzione continua definita su un intervallo I, e tale che f sia derivabile in ogni punto x interno ad I, con $f'(x) \neq 0$ in ogni punto. Allora la funzione f risulta iniettiva su I.*

DIMOSTRAZIONE : se per assurdo esistessero due punti $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$, il teorema di Rolle applicato nell'intervallo $[x_1, x_2]$ darebbe l'esistenza di un punto $z \in]x_1, x_2[$ tale che $f'(z) = 0$, il che sarebbe in contraddizione con l'ipotesi $f' \neq 0$ nella parte interna di I. ∎

Osservazione : il teorema di Rolle ha un'interessante interpretazione geometrica (☞ figura 7.12): dalla definizione di retta tangente ad un grafico di funzione si ottiene che per ogni funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, derivabile in $]a, b[$ e tale che $f(a) = f(b)$, esiste un punto $(z, f(z))$ del suo grafico, con $z \in]a, b[$, in cui la retta tangente è orizzontale. Come si vede nella figura 7.12, tale punto non è necessariamente unico.

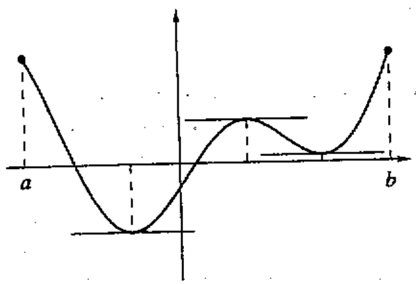


Fig. 7.12 : teorema di Rolle

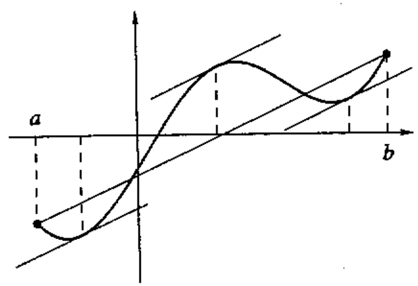


Fig. 7.13 : teorema di Lagrange

Il prossimo teorema rimuove l'ipotesi 3) del teorema di Rolle e permette di trovare un punto in cui la tangente al grafico della funzione è parallela alla retta che congiunge i punti estremi. Per la vastità delle sue conseguenze, si tratta forse del teorema più importante dell'Analisi matematica per funzioni reali di una variabile reale.

Teorema di Lagrange 7.16 : *sia f una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Allora esiste almeno un punto $z \in]a, b[$ tale che*

$$f'(z) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

DIMOSTRAZIONE : consideriamo la funzione

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) ;$$

questa (che è una funzione affine, quindi continua e derivabile in ogni punto) ha come grafico la retta congiungente i punti estremi $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ del grafico di f . La funzione $h(x) = r(x) - f(x)$ verifica allora tutte le ipotesi del teorema di Rolle, in particolare

$$h(a) = h(b) = 0 ;$$

dunque esiste $z \in]a, b[$ tale che

$$0 = h'(z) = r'(z) - f'(z) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(z) ,$$

come volevasi dimostrare. ■

Osservazione : in termini geometrici (☞ figura 7.13) il teorema di Lagrange afferma che data una funzione reale f , continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$, esiste una retta tangente al grafico di f che è parallela alla retta secante passante per i punti estremi $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Infatti, la funzione h considerata nella dimostrazione del teorema di Lagrange non rappresenta altro che la differenza (in ordinata) fra la retta secante passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e il grafico della funzione f .

Osservazione : la tesi del teorema di Lagrange viene spesso scritta

$$f(b) - f(a) = f'(z)(b - a) .$$

Osservazione : nella tesi del teorema di Lagrange è importante notare che il punto z risulta interno all'intervallo $[a, b]$, anche qualora f sia derivabile in tutto $[a, b]$ (➡ appendice 7.6).

Con una dimostrazione molto simile a quella del teorema di Lagrange si ottiene un risultato più generale, che ci sarà utile in seguito.

Teorema di Cauchy 7.17 : *siano f e g due funzioni continue in un intervallo $[a, b]$ e derivabili in $]a, b[$. Allora esiste almeno un punto $z \in]a, b[$ tale che*

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(z) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(z) .$$

Se poi si ha $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$, allora è $g(b) \neq g(a)$ e l'uguaglianza precedente si può scrivere

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} .$$

DIMOSTRAZIONE : consideriamo la funzione

$$h(x) = \big(f(b) - f(a)\big)g(x) - \big(g(b) - g(a)\big)f(x) ;$$

si verifica immediatamente che la funzione h verifica tutte le ipotesi del teorema di Rolle, e in particolare

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b) :$$

dunque esiste $z \in]a, b[$ tale che $h'(z) = 0$, cioè

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(z) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(z) .$$

Se poi si ha $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$, dal corollario 7.15 del teorema di Rolle si ricava $g(b) \neq g(a)$: si può dunque dividere, e scrivere

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

in quanto i due denominatori sono diversi da zero. ■

Osservazione : evidentemente il teorema di Lagrange è un caso particolare di quello di Cauchy, e avremmo potuto ricavare la dimostrazione semplicemente considerando la funzione $g(x) = x$; abbiamo voluto tuttavia dare per il teorema di Lagrange un enunciato separato, in quanto è proprio il teorema di Lagrange che viene usato in un gran numero di situazioni, come ad esempio quelle che sono illustrate qui di seguito.

Proposizione 7.18 : *sia f una funzione derivabile su un intervallo I e tale che risulti $f'(x) = 0$ per ogni x interno ad I. Allora f è una funzione costante.*

DIMOSTRAZIONE : considerati due punti qualsiasi $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, per il teorema di Lagrange 7.16 applicato nell'intervallo $[x_1, x_2]$ esiste $z \in]x_1, x_2[$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) = f'(z)(x_2 - x_1) ,$$

ma $f'(z) = 0$ per ipotesi, dunque $f(x_1) = f(x_2)$, che equivale a dire che la funzione f è costante. ■

Osservazione : la proposizione precedente è di importanza fondamentale, come si vedrà in varie occasioni in seguito; essa può essere considerata come il viceversa del fatto che le funzioni costanti hanno derivata nulla. Vale poi la pena di osservare che il risultato della proposizione precedente può essere falso se il dominio della funzione f non è un intervallo; infatti la funzione definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è evidentemente derivabile in ogni punto del suo dominio, e ha derivata ovunque nulla, ma non è una funzione costante.

Proposizione 7.19 : *sia f una funzione derivabile su un intervallo I tale che per ogni x interno ad I sia $f'(x) \geq 0$ [≤ 0]. Allora f è monotona debolmente crescente [decrescente].*

DIMOSTRAZIONE : considerati due punti qualsiasi $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, per il teorema di Lagrange 7.16 esiste $z \in]x_1, x_2[$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) = f'(z)(x_2 - x_1) \geq 0 . \tag{7.8}$$

Dunque $f(x_1) \leq f(x_2)$ e quindi la funzione f è monotona debolmente crescente. Per il caso $f' \leq 0$, basta applicare quanto appena dimostrato alla funzione $-f$. ■

Osservazione : analogamente a quanto osservato precedentemente per la relazione tra derivata nulla e funzione costante, anche nel caso di derivata avente segno costante il risultato precedente di monotonia può essere falso se il dominio della funzione f non è un intervallo. Ad esempio la funzione $f(x) = 1/x$ definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ha come derivata $-1/x^2$ che è sempre negativa, ma f non è decrescente (☞ figura 4.4).

Proposizione 7.20 : *sia f una funzione reale continua su un intervallo I, tale che $f'(x) > 0$ [< 0] per ogni x interno ad I ; allora f risulta strettamente crescente [decrescente] su I. Più in generale, se f è continua su I e $f'(x) > 0$ [< 0] all'interno di I eccetto al più in un numero finito di punti (in cui f' può anche non esistere), allora f risulta strettamente crescente [decrescente] su I.*

DIMOSTRAZIONE : cominciamo con il caso in cui $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$; se $x_1 < x_2$ sono due punti di I, la disuguaglianza $f(x_1) < f(x_2)$ segue come in (7.8), dato che l'ultima disuguaglianza diventa stretta. Nel caso in cui $f'(x) > 0$ in $I \setminus \{x_0\}$ con x_0 interno ad I, la dimostrazione appena fatta prova che f è strettamente crescente in $I \cap]-\infty, x_0]$ e in $I \cap [x_0, +\infty[$: la conclusione segue allora dalla proposizione 4.4. Per il caso generale, si procede per induzione sul numero di punti: se i punti sono $x_1 < \cdots < x_{n+1}$, per l'ipotesi di induzione f risulta strettamente crescente sull'intervallo $I \cap]-\infty, x_{n+1}]$ perché nell'interno di tale intervallo i punti in cui non vale $f' > 0$ sono solo gli n punti $x_1, \dots, x_n$; d'altra parte f è strettamente crescente su $I \cap [x_{n+1}, +\infty[$ perché all'interno di questo intervallo é $f' > 0$, quindi possiamo applicare la prima parte di questa proposizione. Allora, di nuovo per la proposizione 4.4 la funzione f è crescente sull'unione, che è tutto I. ■

Esempio : usando la proposizione 7.18 proviamo che

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x > 0 . \tag{7.9}$$

Posto infatti $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ per ogni $x > 0$, si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\,\frac{1}{1+(1/x^2)} = 0 ,$$

da cui segue che f è costante sull'intervallo $\mathbb{R}^+$: dunque è $f(x) = f(1)$ per ogni $x > 0$, cioè la (7.9). Analogamente si prova che

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \qquad \forall x < 0 .$$

Notiamo che la funzione $\arctan x + \arctan(1/x)$ non è costante sul suo dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, anche se la sua derivata è identicamente nulla.

Esempio : mostriamo che si ha

$$e^x > \operatorname{sen} x + \cos x \qquad \forall x \in]0, \pi/2] .$$

Posto $f(x) = e^x - \operatorname{sen} x - \cos x$ abbiamo

$$f'(x) = e^x - \cos x + \operatorname{sen} x , \qquad f''(x) = e^x + \operatorname{sen} x + \cos x .$$

Si vede facilmente che $f''(x) > 0$ per ogni $x \in]0, \pi/2]$, per cui f' risulta strettamente crescente; essendo $f'(0) = 0$ ne segue che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in]0, \pi/2]$. Dunque f è strettamente crescente, ed essendo $f(0) = 0$, si ha $f(x) > 0$ per ogni $x \in]0, \pi/2]$, che è quanto si voleva dimostrare (✎ es. 7.26) (➡ appendice 7.7).

Osservazione : la proposizione 7.20 ci dà il più importante criterio di iniettività disponibile. Anziché verificare laboriosamente che $f(x_1) \neq f(x_2)$ per ogni $x_1 \neq x_2$, oppure verificare altrettanto laboriosamente la stretta monotonia provando (per la crescenza) che $f(x_1) < f(x_2)$ per ogni $x_1 < x_2$, possiamo semplicemente verificare se la derivata è sempre positiva o sempre negativa, eventualmente salvo in un numero finito di punti (✎ es. 7.37). Questo vale purché la funzione sia continua e definita su un intervallo, e ciò è spesso fonte di errori del tipo seguente: scordandosi che il dominio della funzione $1/x$ non è un intervallo, molti studenti sostengono che "la funzione $1/x$ è decrescente perché ha derivata sempre negativa" (☞ figura 4.4).

Esempio : determiniamo al variare di k il numero di soluzioni dell'equazione $e^x - x = k$ (che non è risolubile esplicitamente); posto $f(x) = e^x - x$, abbiamo $f'(x) = e^x - 1$, dunque $f'(x) > 0$ se $x > 0$, e $f'(x) < 0$ se $x < 0$. La funzione continua f risulta allora strettamente crescente sull'intervallo $[0, +\infty[$, e strettamente decrescente sull'intervallo $]-\infty, 0]$. Dato che $f(0) = 1$ e che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$, per il teorema 6.13 e il corollario 6.30 del teorema dei valori intermedi sia l'immagine dell'intervallo $]-\infty, 0]$ che l'immagine dell'intervallo $[0, +\infty[$ sono l'intervallo $[1, +\infty[$. Allora se $k < 1$ l'equazione $f(x) = k$ non ha soluzione, mentre se $k \geq 1$ l'equazione $f(x) = k$ ha esattamente una soluzione maggiore o uguale a zero, ed esattamente una soluzione minore o uguale a zero. Queste soluzioni sono la stessa ($x = 0$) se $k = 1$, mentre sono distinte (una è positiva e l'altra negativa) se $k > 1$. In conclusione l'equazione ha:

due soluzioni	se $k > 1$
una soluzione	se $k = 1$
nessuna soluzione	se $k < 1$.

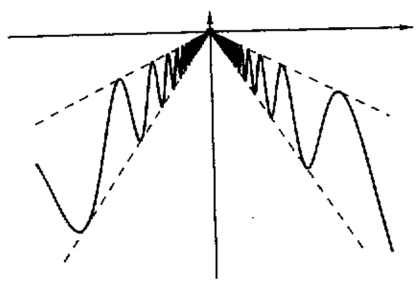


Fig. 7.14 : $y = -|x| + \frac{|x|}{2} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

Osservazione : se un punto x_0 è interno all'intervallo I ed f è una funzione che risulta debolmente crescente in un intervallo $]x_0 - \delta, x_0]$ e debolmente decrescente in un intervallo $[x_0, x_0 + \delta[$, allora evidentemente il punto x_0 è di massimo locale per f (una proprietà analoga con crescente e decrescente scambiati implica che x_0 è di minimo locale). Notiamo che però non è vero il viceversa: se x_0 è di massimo locale

(o di minimo locale) per f non è detto che f risulti monotona in alcun intorno destro o sinistro di x_0, come mostra la funzione il cui grafico è riportato nella figura 7.14 (le linee tratteggiate sono i grafici delle funzioni $-|x|/2$ e $-3|x|/2$).

L'osservazione precedente ci permette di ottenere un'importante conseguenza della proposizione 7.19, la cui dimostrazione viene lasciata per esercizio.

Corollario 7.21 : *se f è una funzione derivabile in un intervallo I, e x_0 è un punto interno ad I in cui f' si annulla, allora:*
1) *se $f' < 0$ in un intorno sinistro di x_0 ed $f' > 0$ in un intorno destro di x_0 allora x_0 è di minimo locale stretto per f ;*
2) *se $f' > 0$ in un intorno sinistro di x_0 ed $f' < 0$ in un intorno destro di x_0 allora x_0 è di massimo locale stretto per f ;*
3) *se f' non cambia segno in un intorno di x_0, allora f è monotona in un intorno di x_0 e quindi x_0 non è né di massimo né di minimo relativo stretto.*

Se f è derivabile due volte, il corollario precedente si può riformulare.

Corollario 7.22 : *se f è una funzione derivabile in un intervallo I, e x_0 è un punto interno ad I tale che $f'(x_0) = 0$ ed esiste $f''(x_0)$, allora:*
1) *se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è di minimo locale stretto per f ;*
2) *se $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è di massimo locale stretto per f .*

Infatti, per la proposizione 7.1 applicata alla funzione f', l'ipotesi $f''(x_0) > 0$ unita alla $f'(x_0) = 0$ implica che ci troviamo nella situazione 1) del corollario precedente, e analogamente per il secondo caso.

Osservazione : le 1) e 2) del corollario precedente implicano rispettivamente (nelle stesse ipotesi)
1') se x_0 è di massimo locale per f allora $f''(x_0) \leq 0$;
2') se x_0 è di minimo locale per f allora $f''(x_0) \geq 0$.

Osservazione : il corollario 7.22 è più debole del corollario 7.21, come mostra l'esempio della funzione x^4 alla quale (nel punto $x_0 = 0$) non possiamo applicare il corollario 7.22, ma possiamo applicare il corollario 7.21. Tuttavia, il secondo corollario può tornare utile in situazioni in cui lo studio del segno di f' sia molto complicato, e sappiamo invece calcolare la derivata seconda.

Infine, tra le conseguenze del teorema di Lagrange c'è un criterio utile per stabilire se una funzione è lipschitziana.

Corollario 7.23 : *se f è una funzione derivabile su un intervallo I, allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*
1) *f è lipschitziana con costante minore o uguale ad L*
2) *$|f'(x)| \leq L$ per ogni $x \in I$.*

DIMOSTRAZIONE : proviamo che da 1) segue 2); per la definizione (6.33) di funzione lipschitziana, dall'ipotesi 1) si ha che per ogni $x_0, x \in I$ con $x \neq x_0$ il rapporto incrementale verifica

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leq L\,,$$

e passando al limite per $x \to x_0$ abbiamo subito 2). Per il viceversa, osserviamo che presi due punti distinti $x_1, x_2 \in I$ abbiamo per il teorema di Lagrange

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(z)$$

per qualche z tra x_1 e x_2. Prendendo i valori assoluti di entrambi i membri, e usando l'ipotesi 2), otteniamo

$$\left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \leq L\,,$$

cioè

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|\,.$$

Poiché la disuguaglianza è ovvia se $x_1 = x_2$, la tesi è dimostrata. ■

Corollario 7.24 : *se f è una funzione derivabile su un intervallo I, e se f' è limitata su I, allora f è L-lipschitziana, dove $L = \sup|f'|$.*

La dimostrazione è lasciata per esercizio (✎ es. 7.39).

Esempio : la funzione $\operatorname{sen} x$ è 1-lipschitziana, perché la sua derivata è la funzione $\cos x$, e $\max_{\mathbb{R}} |\cos x| = 1$.

Osservazione : in particolare, se f è di classe C^1 su di un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ allora è lipschitziana, perché f' è limitata (☞ teorema 6.35). Più in generale, se $f \in C^1(I)$ con I intervallo, allora f è localmente lipschitziana in I, cioè per ogni J con $\overline{J} \subset I$ la funzione $f|_J$ risulta lipschitziana (con una costante di Lipschitz che può dipendere da J). Ad esempio, la funzione x^2 è localmente lipschitziana su $\mathbb{R}$, e su di un intervallo $[a,b]$ ha costante di Lipschitz pari a $2\max\{|a|,|b|\}$.

Osservazione : i risultati precedenti usano il teorema di Lagrange, che vale in un intervallo, e sono generalmente falsi se il dominio di f non è un intervallo. Ad esempio, per quanto riguarda il corollario 7.24, la funzione $f(x) = x/|x|$ è definita su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (che non è un intervallo), ha derivata ovunque nulla, ma non è lipschitziana perché non è neppure uniformemente continua (dato che $f(\delta/2) - f(-\delta/2) = 2$ per ogni $\delta > 0$).

Una questione molto importante, che verrà trattata in maniera più estesa nel capitolo riguardante l'integrazione (☞ sezione 8.2), è la seguente: data una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ determinare, quando è possibile, tutte le funzioni di cui f è la derivata.

Definizione : *se f è una funzione definita su un intervallo I, si dice che $F : I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f se F è derivabile su I e si ha $F' = f$ su I.*

Esempio : la funzione $x^2 + 3x$ è una primitiva della funzione $2x + 3$ su tutto $\mathbb{R}$. Per verificare se una funzione derivabile F è una primitiva di f basta controllare se la derivata di F coincide o no con f.

Dalla definizione precedente si ha subito il seguente risultato.

Proposizione 7.25 : *due primitive di una stessa funzione sullo stesso intervallo differiscono per una costante.*

DIMOSTRAZIONE : se F e G sono entrambe primitive della funzione f sull'intervallo I si ha

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad \forall x \in I$$

da cui $F - G$ è costante per la proposizione 7.18. ■

Osservazione : notiamo che da $F' = G'$ non segue necessariamente che $F - G$ è costante, se si elimina la condizione che I sia un intervallo. Ad esempio, le funzioni

$$F(x) = \begin{cases} \log x & \text{se } x > 0 \\ \log(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} 1 + \log x & \text{se } x > 0 \\ \log(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

hanno entrambe derivata $1/x$ su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, ma la loro differenza non è una costante.

Osservazione : esistono funzioni che non hanno primitive. Ad esempio la funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{7.10}$$

è una di queste. Infatti, se per assurdo F fosse una primitiva di f su tutto $\mathbb{R}$ si avrebbe

$$F'(x) = 0 \quad \forall x < 0\,, \qquad F'(x) = 0 \quad \forall x > 0\,,$$

per cui esisterebbero due costanti c_1 e c_2 tali che

$$F(x) = c_1 \quad \forall x < 0\,, \qquad F(x) = c_2 \quad \forall x > 0\,.$$

Ma, dovendo essere F derivabile (e quindi continua) su tutto $\mathbb{R}$, deve essere $c_1 = c_2 = F(0)$ e quindi

$$F(x) = c_1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

In particolare $F' \equiv 0$, ma ciò contraddice il fatto che per definizione di primitiva dovrebbe essere $F'(0) = f(0) = 1$ (➡ appendice 7.8).

Il problema del calcolo esplicito delle primitive verrà affrontato in seguito, nel capitolo sull'integrazione; per il momento osserviamo che la tabella precedente sulle derivate di alcune funzioni elementari può essere letta da destra verso sinistra ottenendo così un elenco di primitive. Ad esempio si ha che $\operatorname{sen} x$ è una primitiva di $\cos x$, $\cos x$ è una primitiva di $-\operatorname{sen} x$, $\tan x$ è una primitiva di $1 + \tan^2 x$.

7.5 - Forme indeterminate e sviluppi asintotici

Molti dei limiti che si incontrano sotto una forma indeterminata sono in una delle forme $0/0$ oppure ∞/∞, o si possono ricondurre a una di esse; i teoremi seguenti forniscono un metodo che in molti casi (usato con oculatezza) risulta utile per la determinazione del valore del limite. Il primo teorema di de l'Hôpital tratta le forme indeterminate del tipo $0/0$ mentre il secondo tratta quelle del tipo ∞/∞.

0/0

Teorema di de l'Hôpital (prima forma) 7.26 : *siano $f,g:]a,b[\to\mathbb{R}$ due funzioni continue, e sia $x_0\in]a,b[$ tale che $f(x_0)=g(x_0)=0$. Supponiamo che:*
1) *f e g sono derivabili in $]a,b[\setminus\{x_0\}$*
2) *$g'(x)\neq 0$ per ogni $x\in]a,b[\setminus\{x_0\}$*
3) *esiste il limite*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell\in\overline{\mathbb{R}}.$$

Allora si ha $g(x)\neq 0$ per ogni $x\in]a,b[\setminus\{x_0\}$, esiste il limite $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)/g(x)\big)$ e si ha

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell.$$

DIMOSTRAZIONE : il fatto che $g(x)\neq 0$ per ogni $x\in]a,b[\setminus\{x_0\}$ segue facilmente dall'ipotesi 2) grazie al corollario 7.15. Consideriamo ora una successione $x_n\to x_0$ con $x_n\neq x_0$; per il teorema di Cauchy 7.17, esiste z_n tra x_n e x_0 tale che

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f(x_n)-f(x_0)}{g(x_n)-g(x_0)}=\frac{f'(z_n)}{g'(z_n)}.$$

Dato che $0\le|z_n-x_0|\le|x_n-x_0|$, facendo tendere n all'infinito si ha $z_n\to x_0$ per il teorema dei carabinieri, quindi per l'ipotesi 3)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{f'(z_n)}{g'(z_n)}=\ell.$$

Dall'arbitrarietà della successione x_n si ha, per il teorema 6.2,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$$

come volevasi dimostrare. ∎

Osservazione : sono possibili vari enunciati del teorema precedente, per casi analoghi; ad esempio, il teorema resta valido anche se il punto x_0 coincide con l'estremo a o l'estremo b, oppure se si tratta solo di un limite da destra o da sinistra in x_0 (verificatelo per esercizio). Inoltre, l'ipotesi $f(x_0)=g(x_0)=0$ può essere sostituita dalla seguente: non è più necessario che x_0 appartenga al dominio di f e g, ma

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=0.$$

In tal caso basta considerare al posto di f la funzione

$$\tilde f(x)=\begin{cases} f(x) & \text{se } x\neq x_0\\ 0 & \text{se } x=x_0,\end{cases}$$

e al posto di g la funzione $\tilde g$ definita in maniera analoga, e applicare il teorema 7.26 (controllate che le ipotesi siano verificate) alle funzioni $\tilde f$ e $\tilde g$. Infine, i casi in cui $x_0=-\infty$ oppure $x_0=+\infty$ sono un po' più delicati, e bisogna applicare in $x_0=0$ il teorema 7.26 alle funzioni

$$\tilde f(x)=f(1/x),\qquad \tilde g(x)=g(1/x):$$

osserviamo infatti che

$$\frac{\tilde f'(x)}{\tilde g'(x)}=\frac{f'(1/x)}{g'(1/x)};$$

completate i dettagli per esercizio, verificando che tutte le ipotesi siano soddisfatte.

Il prossimo teorema tratta le forme indeterminate del tipo ∞/∞.

Teorema di de l'Hôpital (seconda forma) 7.27 : *siano $f,g:]a,b[\to\mathbb{R}$ due funzioni derivabili, e tali che $\lim_{x\to a}f(x)$ e $\lim_{x\to a}g(x)$ siano infiniti (non necessariamente dello stesso segno). Supponiamo che:*
1) *$g'(x)\neq 0$ per ogni $x\in]a,b[$*
2) *esiste il limite*

∞/∞

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell\in\overline{\mathbb{R}}.$$

Allora si ha anche

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell.$$

DIMOSTRAZIONE : consideriamo per semplicità soltanto il caso in cui ℓ è finito (i casi $\ell=-\infty$ e $\ell=+\infty$ si trattano analogamente). Fissato un intorno $]H,K[$ di ℓ, scegliamo H' e K' tali che

$$H<H'<\ell<K'<K,$$

di modo che anche $]H',K'[$ è un intorno di ℓ; per l'ipotesi 2) esiste $\delta>0$ tale che

$$H'<\frac{f'(z)}{g'(z)}<K'\qquad \forall z\in]a,a+\delta[. \tag{7.11}$$

Fissiamo $\eta=a+\delta/2$, e sia $x\in]a,\eta[$; per il teorema di Cauchy 7.17 esiste $z\in]x,\eta[$ tale che

$$\frac{f(x)-f(\eta)}{g(x)-g(\eta)}=\frac{f'(z)}{g'(z)};$$

essendo $z \in]a, a+\delta[$ si ha dalla (7.11)

$$H' < \frac{f(x) - f(\eta)}{g(x) - g(\eta)} < K' ,$$

da cui

$$H' < \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \dfrac{f(\eta)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(\eta)}{g(x)}} < K' .$$

Posto

$$\beta(x) = \frac{1 - \dfrac{f(\eta)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(\eta)}{g(x)}}$$

la disuguaglianza precedente si può scrivere

$$\frac{H'}{\beta(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{K'}{\beta(x)} ; \tag{7.12}$$

dato che (per l'ipotesi sui limiti infiniti)

$$\lim_{x \to a} \beta(x) = 1 ,$$

in un intorno destro di a sufficientemente piccolo, diciamo $]a, a+\sigma[$ con $\sigma < \delta$, si ha $(H'/\beta(x)) > H$ e $(K'/\beta(x)) < K$, quindi da (7.12)

$$H < \frac{f(x)}{g(x)} < K .$$

In definitiva abbiamo ottenuto che per ogni intorno $]H, K[$ di ℓ esiste $\sigma > 0$ tale che $H < (f(x)/g(x)) < K$ per ogni $x \in]a, a+\sigma[$, e dunque

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

come volevasi dimostrare. ■

Osservazione : per questo secondo teorema di de l'Hôpital abbiamo considerato per semplicità il caso in cui il punto x_0 coincide con l'estremo sinistro $a \in \mathbb{R}$. Valgono anche questa volta le considerazioni fatte precedentemente per il teorema di de l'Hôpital nella forma $0/0$ sulle estensioni possibili ai casi in cui x_0 si trovi all'interno dell'intervallo $]a, b[$, oppure che si tratti di limiti da destra o da sinistra, o infine che x_0 sia uguale all'estremo destro $b \in \mathbb{R}$ o sia $\pm\infty$.

Osservazione : il teorema di de l'Hôpital nella forma ∞/∞ non si può, come si potrebbe ingenuamente pensare, ridurre a quello nella forma $0/0$ scrivendo $(f/g) = (1/g)/(1/f)$; infatti, applicando a quest'ultima frazione il teorema 7.26 si ottiene il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^2(x)}{g^2(x)} \cdot \frac{g'(x)}{f'(x)} ,$$

e non il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ voluto.

Esempio : consideriamo il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} .$$

Applicando il teorema 7.26 ci si riduce a calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6} ,$$

dove abbiamo usato il limite notevole (6.10). In altri termini, abbiamo dimostrato che si ha per $x \to 0$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) ; \tag{7.13}$$

si pensi alla fatica fatta per ottenere senza questi strumenti il più debole risultato (5.20) nella sezione 5.8.

Esempio : il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$$

si riduce, mediante il teorema 7.27, al limite

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty .$$

Dunque, per $x \to +\infty$ si ha $x = o(e^x)$; in maniera analoga si prova (per induzione) che per ogni intero positivo k si ha $x^k = o(e^x)$, e dunque anche $x^\alpha = o(e^x)$ per ogni numero reale $\alpha > 0$ (✎ es. 7.42).

Esempio : il teorema di de l'Hôpital può essere usato anche per determinare ordine e parte principale di un infinitesimo: infatti provare (6.53) equivale a provare che

$$\lim_{x \to x_*} \frac{\varphi(x)}{(x - x_*)^\alpha} = \ell ,$$

e sia il numeratore che il denominatore sono infinitesimi. Ad esempio, mostriamo che $e^x - 1 - x$ è un infinitesimo di ordine 2 per $x \to 0$: abbiamo da calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} ;$$

applicando il teorema 7.26 ci riduciamo a calcolare il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} ,$$

quindi la parte principale di $e^x - 1 - x$ per $x \to 0$ è $\frac{1}{2}x^2$ (✎ es. 7.43).

Osservazione : i teoremi di de l'Hôpital possono essere applicati più volte, eventualmente inframmezzandoli con uso di limiti notevoli o altre semplificazioni: ad esempio, applicando due volte il teorema 7.26 potete mostrare che $e^x - 1 - x - x^2/2$ ha parte principale uguale a $x^3/6$.

Osservazione : è importante notare che può esistere il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

anche se non esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} ;$$

basta considerare ad esempio $x_0 = 0$ ed

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x) , \qquad g(x) = x .$$

Si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}(1/x) = 0 ,$$

mentre il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \Big(2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\Big)$$

non esiste. Dunque, nei teoremi precedenti, nulla si può concludere nel caso in cui non esista il limite del rapporto tra le derivate; in particolare, i teoremi di de l'Hôpital non asseriscono semplicisticamente che i due limiti sono uguali.

Osservazione : vogliamo insistere in maniera particolare sul fatto che, pur essendo i teoremi di de l'Hôpital degli strumenti che in molti casi permettono di calcolare velocemente diversi limiti di funzioni, essi vanno applicati oculatamente, e non, come purtroppo si vede spesso negli elaborati d'esame, meccanicamente, senza neppure considerare che il limite in questione si poteva risolvere immediatamente in altro modo. Ciò spesso conduce, a causa dei calcoli di derivate necessari se si applicano i teoremi di de l'Hôpital, a errori che nella maggior parte dei casi potevano essere evitati scegliendo una via più semplice e diretta.

Esempio : il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 + \operatorname{sen} x}{x}$$

si calcola immediatamente, ed è uguale a $+\infty$; se si usasse erroneamente il teorema 7.26 (notiamo che il limite non si presenta nella forma $0/0$) si troverebbe invece che il rapporto delle derivate tende a 1.

Esempio : utilizzando il limite notevole (6.9) e la continuità di varie funzioni si ottiene subito che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^7} \cos(x^2 - 2x) \operatorname{sen} x}{x \log(e + \sqrt{3x \operatorname{sen} x})} = 1 .$$

Provate ad immaginare la mole di calcoli necessari a scrivere le derivate del numeratore e del denominatore se invece si decidesse di usare il teorema di de l'Hôpital ...

Esempio : se per calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\operatorname{sen} x \tan x} ,$$

che si presenta nella forma indeterminata $0/0$, decidessimo di usare il teorema di de l'Hôpital, ci troveremmo, dopo derivazione di numeratore e denominatore, a dover calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2} + \operatorname{sen} x}{\cos x \tan x + \operatorname{sen} x(1 + \tan^2 x)} ,$$

che risulta essere ancora una forma indeterminata $0/0$. Continuando nello stesso modo ci troveremmo quindi a dover derivare nuovamente numeratore e denominatore, rischiando di incorrere in qualche errore di calcolo; scrivendo invece il limite iniziale nella forma equivalente

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x \tan x} \Big(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2}\Big) ,$$

e ricordandosi dei limiti notevoli (6.9), (6.10) e (6.11) si otterrebbe immediatamente che il limite in questione risulta essere uguale a $3/2$.

Un'altra incognita legata all'applicazione dei teoremi di de l'Hôpital è la forma in cui usarli: sappiamo che una forma ∞/∞ si può scrivere nella forma $0/0$ e viceversa, ma abbiamo osservato che i due teoremi di de l'Hôpital 7.26 e 7.27 non sono equivalenti; il rischio è illustrato dal prossimo esempio.

Esempio : calcoliamo $\lim_{x\to 0^+} (e^{-1/x}/x^2)$; questo si presenta nella forma $0/0$, e possiamo tentare di applicare il relativo teorema 7.26. Tuttavia, il limite del rapporto delle derivate che se ne ottiene è

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2} e^{-1/x}}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^3} ,$$

e si presenta decisamente peggio di quello di partenza. Invece, osservando che possiamo scrivere $(e^{-1/x}/x^2) = (x^{-2}/e^{1/x})$ e applicando due volte il teorema 7.27 abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-2}}{e^{1/x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^{-3}}{e^{1/x}(-x^{-2})} = 2 \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{e^{1/x}} = 2 \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^{-2}}{e^{1/x}(-x^{-2})} = 0 . \tag{7.14}$$

Più in generale, è possibile mostrare (meglio che in questo modo, con la sostituzione $1/x = y$) che per ogni k si ha (➡ appendice 7.9)

$$e^{-1/x} = o(x^k; 0) .$$

Il prossimo risultato, conseguenza del teorema di de l'Hôpital, è un importante strumento per mostrare la derivabilità o la non derivabilità quando non si applicano i teoremi generali.

Corollario 7.28 : *sia f una funzione continua definita in un intorno di un punto x_0, derivabile per $x \neq x_0$ e tale che*

$$\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = \alpha_- , \qquad \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \alpha_+ .$$

Allora

$$f'_-(x_0) = \alpha_- , \qquad f'_+(x_0) = \alpha_+ .$$

In particolare, f risulta derivabile anche nel punto x_0 se e solo se si ha $\alpha_- = \alpha_+$.

DIMOSTRAZIONE : segue immediatamente applicando il teorema 7.26 al limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

e ottenendo quindi che

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = \alpha_- ,$$

e analogamente da destra. L'ultima affermazione segue dal fatto che la derivata, se esiste, è il limite sia da sinistra che da destra del rapporto incrementale (✎ es. 7.46). ∎

Esempio : la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x - |x|$ non è derivabile in zero, perché per $x > 0$ la sua derivata è $\cos x - 1$, che tende a zero (dunque per il corollario precedente la derivata destra in zero vale 0), mentre per $x < 0$ la derivata è $\cos x + 1$, che tende a 2 (quindi la derivata sinistra è 2). Peraltro, in questo caso, avremmo potuto più semplicemente dire che se f fosse stata derivabile anche $\operatorname{sen} x - f(x)$, differenza di due derivabili, lo sarebbe stata, ma questa differenza è $|x|$ che non è derivabile.

Esempio : vediamo per quali valori (se ve ne sono) dei parametri reali a, b e c la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} (a-1)x + b - a & \text{se } x > 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \\ cx - x^2 - 3b & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{7.15}$$

risulta derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Anzitutto osserviamo che per essere derivabile, una funzione deve essere continua per la proposizione 7.3; dato che f è continua per ogni $x \neq 0$, deve essere

$$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) ,$$

cioè $3 = b - a = -3b$, da cui si ricava subito $b = -1$ e $a = -4$: la funzione deve essere dunque del tipo

$$f(x) = \begin{cases} -5x + 3 & \text{se } x > 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \\ cx - x^2 + 3 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Possiamo ora applicare il corollario 7.28: dato che per $x > 0$ è $f'(x) = -5$ e per $x < 0$ è $f'(x) = c - 2x$, otteniamo

$$f'_+(0) = -5 , \qquad f'_-(x) = c ;$$

allora la funzione è derivabile anche in zero se e solo se

$$a = -4 , \qquad b = -1 , \qquad c = -5 .$$

Osservazione : un errore grave, ma purtroppo frequente, a proposito di espressioni del tipo (7.15), è dire che "visto che per $x = 0$ è $f(x) = 3$, cioè una costante, e che la derivata di una costante è zero, allora $f'(0) = 0$". È chiaro che si tratta di una indebita "estensione" della proprietà di località 7.2: oltre tutto, cosa significa che una funzione è costante in un punto? Ci mancherebbe che in un punto assumesse più di un valore!

Siamo ora in grado di studiare il problema dell'approssimazione di una funzione in un intorno di un punto tramite un polinomio. Vedremo che potremo stimare l'ordine di infinitesimo (☞ sezione 6.6) della differenza tra la funzione in questione e il polinomio approssimante; sotto ipotesi di maggiore regolarità sulla funzione, potremo poi stimare tale differenza più precisamente, e in maniera quantitativa. Vedremo nei teoremi seguenti la cosiddetta formula di Taylor in cui la differenza tra la funzione e il polinomio approssimante è stimata semplicemente, come un infinitesimo di cui si fornisce l'ordine (resto di Peano), oppure più precisamente, mediante un monomio il cui coefficiente dipende da una derivata della funzione in questione (resto di Lagrange).

Dalla definizione di derivata, se f è derivabile una volta in x_0 abbiamo

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \\ &= f^{(0)}(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x-x_0)^1 + o\big((x-x_0)^1\big) \ : \end{aligned}$$

questo si generalizzerà nel teorema 7.29. Invece, per il teorema di Lagrange, se f è derivabile una volta in un intorno di x_0 (ma non serve che lo sia nel punto x_0) allora per un opportuno z tra x_0 ed x

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(z)(x-x_0) \\ &= f^{(0)}(x_0) + f^{(1)}(z)(x-x_0)^1 \ : \end{aligned}$$

questo verrà generalizzato nel teorema 7.31.

Teorema (formula di Taylor con resto di Peano) 7.29 : *sia $f :]a,b[\to \mathbb{R}$; e sia $x_0 \in]a,b[$; supponiamo che la funzione f sia derivabile n volte nel punto x_0 , ed $n-1$ volte nel resto dell'intervallo $]a,b[$. Posto*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$
$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n ,$$

si ha per ogni $x \in]a,b[$

$$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$$

DIMOSTRAZIONE : indichiamo con $P_{n-1}(x)$ il polinomio (di ordine $n-1$)

$$P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k .$$

Osserviamo che, grazie alla (7.3), si ha

$$P_{n-1}(x_0) = f(x_0) , \quad P'_{n-1}(x_0) = f'(x_0) , \quad \ldots , \quad P^{(n-1)}_{n-1}(x_0) = f^{(n-1)}(x_0) :$$

applicando ripetutamente il teorema di de l'Hôpital 7.26 nella forma $0/0$ si ottiene allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_{n-1}(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - P'_{n-1}(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}$$
$$= \cdots = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{n-1}(x) - P^{(n-1)}_{n-1}(x)}{n!(x-x_0)} . \tag{7.16}$$

Sempre dalla (7.3) abbiamo che il termine $P^{(n-1)}_{n-1}(x)$ non è altro che la funzione costante $f^{n-1}(x_0)$, per cui dalla (7.16) si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_{n-1}(x) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n/n!}{(x-x_0)^n}$$
$$= \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_{n-1}(x)}{(x-x_0)^n}\right) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$
$$= \frac{1}{n!}\left(\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}\right) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0 ,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla definizione di derivata n-esima di f nel punto x_0 . Dunque risulta dimostrato che per $x \to x_0$ la funzione $f(x) - P_n(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $(x-x_0)^n$. ■

Esempio : calcoliamo il polinomio $P_3(x)$ relativo alla funzione $f(x) = e^x$ e al punto $x_0 = 0$. Dato che tutte le derivate di e^x sono uguali ad e^x , il loro valore in x_0 è sempre 1 , pertanto

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{1!}(x-0) + \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}(x-0)^3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} .$$

Invece, il polinomio $P_5(x)$ relativo alla funzione $\tan x$ e al punto $x_0 = 0$ è dato da (svolgete per esercizio tutti i relativi calcoli)

$$P_5(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$$

(✎ es. 7.54).

Definizione : *chiameremo polinomio di Taylor di ordine n associato alla funzione f e centrato in un punto x_0 un polinomio P_n di ordine n* (☞ sezione 1.1) *tale che*

$$f(x) - P_n(x) = o((x-x_0)^n) .$$

L'esistenza di (almeno) un polinomio di Taylor P_n associato ad f e centrato in x_0 , supponendo che f sia derivabile $n-1$ volte nell'intervallo $]a,b[$ e n volte nel punto x_0 , è stabilita dal teorema 7.29. L'unicità di un tale polinomio è dimostrata nella prossima proposizione.

Proposizione 7.30 : *se esiste, il polinomio di Taylor di ordine n associato a f e centrato in x_0 è unico.*

DIMOSTRAZIONE : supponiamo che P_n e Q_n siano due polinomi di Taylor per la funzione f , cioè si abbia

$$f(x) - P_n(x) = o((x-x_0)^n)$$
$$f(x) - Q_n(x) = o((x-x_0)^n) .$$

Sottraendo membro a membro, e ricordando le proprietà degli infinitesimi, si ottiene quindi

$$Q_n(x) - P_n(x) = o((x-x_0)^n) ;$$

il primo membro è un polinomio di ordine n , dunque possiamo scrivere l'uguaglianza precedente nella forma

$$\sum_{i=0}^{n} c_i(x-x_0)^i = o((x-x_0)^n) ,$$

dove i c_i sono le differenze dei corrispondenti coefficienti di Q_n e di P_n . Prendendo il limite di ambo i membri per $x \to x_0$ si ricava $c_0 = 0$, quindi l'uguaglianza precedente si riduce a

$$o((x-x_0)^n) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x-x_0)^i = (x-x_0)\sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1}(x-x_0)^i .$$

Da qui, dividendo per $x - x_0$ e passando al limite per $x \to x_0$, si ricava anche $c_1 = 0$, e così via (lasciamo per esercizio il compito di svolgere la dimostrazione rigorosa, che va fatta per induzione) fino ad ottenere che tutti i coefficienti c_i sono nulli. Dunque i coefficienti di Q_n e di P_n sono uguali. ■

Osservazione : una funzione può avere più polinomi di Taylor diversi se questi ultimi sono centrati in punti diversi, o se sono centrati nello stesso punto ma sono di ordini diversi $m < n$. In quest'ultimo caso però, la proposizione precedente permette di affermare che i coefficienti di quello di ordine più basso, m, sono uguali ai coefficienti del polinomio di ordine più alto, n, fino al grado m. In questo senso, possiamo dire che una funzione ha essenzialmente un solo polinomio di Taylor centrato in un punto fissato x_0.

Osservazione : la proposizione precedente ha grande importanza nel calcolo dei polinomi di Taylor, perché asserisce che se siamo giunti, non importa in che modo, a scrivere

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)\ ,$$

il polinomio P_n è il polinomio di Taylor della funzione f.

Esempio : dalla formula (7.13) si ricava che il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ della funzione $\operatorname{sen} x$ è dato da

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}\ .$$

Pertanto, se si volesse calcolare il polinomio di Taylor di ordine 12 centrato in $x_0 = 0$ della funzione $\operatorname{sen}^2(x^3)$, dall'uguaglianza

$$\operatorname{sen}^2(x^3) = (\operatorname{sen} x^3)^2 = \left(x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^9)\right)^2 = x^6 - \frac{x^{12}}{3} + o(x^{12})$$

si troverebbe $P_{12}(x) = x^6 - \frac{x^{12}}{3}$ grazie alla proposizione 7.30, senza calcolare dodici derivate della funzione $\operatorname{sen}^2(x^3)$.

Esempio : calcoliamo un polinomio di Taylor di e^x centrato in $x_0 = 1$; dato che tutte le derivate di e^x sono uguali ad e^x, e calcolate in $x_0 = 1$ valgono e, abbiamo ad esempio

$$e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3)\ .$$

Osservazione : nel caso particolare $x_0 = 0$ la formula di Taylor viene spesso chiamata formula di Mac Laurin, e prende la forma

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)\ .$$

Osserviamo che la formula di Taylor con resto di Peano non permette di stimare quantitativamente l'errore che si commette approssimando, in un intorno di un punto x_0, una funzione f mediante il polinomio di Taylor $P_n(x)$ associato, in quanto si afferma soltanto che tale errore è un infinitesimo (per $x \to x_0$) di ordine superiore a $(x - x_0)^n$. Ad esempio (➡ appendice 7.9), se $x_0 = 0$, le funzioni $10^{-5}x^3$ e 10^5x^3 sono entrambe infinitesimi di ordine superiore a x^2, ma calcolate per $x = 0.1$ forniscono

rispettivamente i valori 10^{-8} e 10^2 che, se considerati come errori di approssimazione, sono parecchio diversi! La formula di Taylor con resto di Lagrange invece dà una stima quantitativa più precisa perché fornisce, oltre all'ordine di infinitesimo del resto, anche un'espressione del coefficiente aggiuntivo in termini di una derivata della funzione f. Sono possibili altre espressioni del resto, che di volta in volta sarà più o meno comodo usare per stimare l'errore, come ad esempio il resto integrale (➡ appendice 8.9).

Teorema (formula di Taylor con resto di Lagrange) 7.31 : *sia* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, *e sia* $x_0 \in]a,b[$ *; supponiamo che la funzione* f *sia derivabile* $n+1$ *~~volte nell'intervallo~~* $]a,b[$ *, e sia* $P_n(x)$ *il polinomio di Taylor di ordine* n *centrato in* x_0 *relativo ad* f. *Allora si ha per ogni* $x \in]a,b[$

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(z(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

dove $z(x)$ *è un opportuno punto tra* x_0 *e* x.

Dimostrazione : trattiamo qui solo il caso in cui $x > x_0$, poiché il caso in cui $x < x_0$ è analogo. Definiamo

$$g(t) = f(t) - P_n(t)\ , \qquad h_k(t) = (t - x_0)^k \quad \text{per } 0 \le k \le n+1\ .$$

Allora $g(x_0) = h_{n+1}(x_0) = 0$, per cui, applicando il teorema di Cauchy 7.17, esiste $z_1 \in]x_0, x[$ tale che

$$\frac{g(x)}{h_{n+1}(x)} = \frac{g(x) - g(x_0)}{h_{n+1}(x) - h_{n+1}(x_0)} = \frac{g'(z_1)}{h'_{n+1}(z_1)} = \frac{g'(z_1)}{(n+1)h_n(z_1)}\ .$$

Sempre grazie al teorema di Cauchy, essendo $g'(x_0) = f'(x_0) - P'_n(x_0) = 0$, esiste $z_2 \in]x_0, z_1[$ tale che

$$\frac{g(x)}{h_{n+1}(x)} = \frac{g'(z_1)}{(n+1)h_n(z_1)} = \frac{g''(z_2)}{(n+1)nh_{n-1}(z_2)}\ .$$

Così continuando (occorrerebbe l'induzione ...), si trova $z_{n+1} \in]x_0, x[$ tale che

$$\frac{g(x)}{h_{n+1}(x)} = \frac{g^{(n+1)}(z_{n+1})}{(n+1)!\, h_0(z_{n+1})}\ ,$$

ma $g^{n+1}(t) = f^{n+1}(t)$ e $h_0(t) \equiv 1$, quindi

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g(x)}{h_{n+1}(x)} = \frac{f^{(n+1)}(z_{n+1})}{(n+1)!}\ ,$$

come volevasi dimostrare. ■

Osservazione : in realtà, non serve che f sia derivabile $n+1$ volte anche nel punto x_0, dove bastano solo n derivate; tuttavia, le funzioni più comuni (alle quali in generale capita di applicare questi teoremi) sono derivabili infinite volte.

Esempio : per la funzione e^x, applicando il teorema 7.31 con $n=3$ e nel punto $x_0=0$, abbiamo

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{e^{z(x)}}{24}x^4 .$$

Osservazione : a differenza di quanto accade per gli sviluppi di Taylor con il resto di Peano, che spesso si riesono a calcolare componendo sviluppi noti, il resto di Lagrange pone un problema piuttosto scomodo; infatti, per calcolare il resto, dobbiamo conoscere l'espressione esplicita della derivata $(n+1)$-esima, il che è agevole solo in pochissimi casi (esponenziale, seno, coseno e qualche altra funzione).

Elenchiamo qui di seguito gli sviluppi di Taylor con $x_0 = 0$ delle funzioni più comunemente usate (✎ es. 7.55). Tutte le funzioni elencate sono derivabili infinite volte, quindi è possibile scrivere i polinomi di Taylor di ogni ordine (➡ appendice 8.10). A parte le funzioni tangente e tangente iperbolica, per le quali scriviamo gli sviluppi fino all'ordine 6 (non essendoci una facile formula esplicita per il termine generale dello sviluppo di ordine n), per le altre funzioni riportiamo il termine generale dello sviluppo, ricordando che il semifattoriale $n!!$ è stato introdotto con le formule (3.4) e (3.5).

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)\\
\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})\\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)\\
\operatorname{arcsen} x &= x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2})\\
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2})\\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2})\\
\operatorname{senh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})\\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)\\
\operatorname{sett\,senh} x &= x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2})\\
\operatorname{sett\,tanh} x &= \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2})\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)\\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) .
\end{aligned}$$

Esempio : lo sviluppo di $\sqrt{1+x}$ è un caso particolare di quello di $(1+x)^\alpha$ per $\alpha = 1/2$; si ha dunque, fino all'ordine 2 compreso,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) .$$

Analogamente, per $\alpha = -1/2$ abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) .$$

Esempio : lo sviluppo della funzione $\cos(\operatorname{sen} x) - \log(1+2x)$ fino all'ordine 2 si ottiene subito dalla tabella precedente; infatti si ha (➡ appendice 7.10)

$$\begin{aligned}
\cos(\operatorname{sen} x) - \log(1+2x) &= 1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \left(2x - \frac{4x^2}{2}\right) + o(x^2)\\
&= 1 - \left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 2x + 2x^2 + o(x^2)\\
&= 1 - 2x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) .
\end{aligned}$$

Osservazione : notiamo che lo sviluppo di Taylor della funzione $\operatorname{sen} x$ contiene soltanto termini con esponente dispari, mentre lo sviluppo di Taylor della funzione $\cos x$ contiene soltanto termini con esponente pari. Questo è un fatto generale: le funzioni dispari hanno sviluppi di Mac Laurin con solo termini aventi esponente dispari, e le funzioni pari hanno sviluppi con solo termini aventi esponente pari (✎ es. 7.56).

È interessante confrontare i grafici della funzione seno e della funzione esponenziale con quelli di alcuni loro polinomi di Taylor centrati in $x_0 = 0$: nelle figure che seguono, il numero accanto alla curva indica l'ordine del polinomio; osserviamo in particolare la velocità con cui, per $x > 0$, i grafici dei polinomi di Taylor dell'esponenziale si avvicinano al grafico di e^x (nel tratto considerato, che va fino a $x = 1.5$, a partire da $n = 4$ sono indistinguibili da e^x).

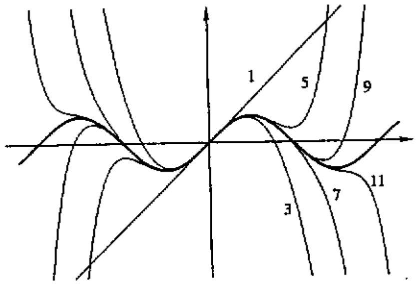


Fig. 7.15 : approssimanti di $\operatorname{sen} x$

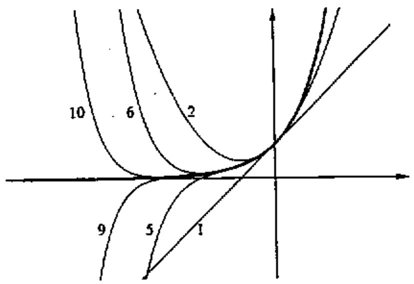


Fig. 7.16 : approssimanti di e^x

Esempio : mostriamo come si può usare il resto di Lagrange per provare la disuguaglianza

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \forall x \neq 0 ;$$

intanto basta mostrarla per $x > 0$, dato che entrambi i membri della disuguaglianza sono funzioni pari. Poi, la disuguaglianza è ovvia se $x > 2$, perché in tal caso il secondo membro è minore di -1 : rimane dunque solo il caso $0 < x \leq 2$. Osserviamo che per ogni $x > 0$ esiste un punto $z \in]0, x[$ tale che

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\operatorname{sen} z}{6} x^3 :$$

in particolare se $0 < x \leq \pi$ è $0 < z < \pi$, quindi $\operatorname{sen} z > 0$ e dunque

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\operatorname{sen} z}{6} x^3 > 1 - \frac{x^2}{2} ;$$

dato che $2 < \pi$, la disuguaglianza è provata.

Esempio : dallo sviluppo di Taylor di e^x centrato nell'origine si ricava, per $x = 1$, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $z_n \in]0, 1[$ tale che (➡ appendice 7.11)

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^{z_n}}{(n+1)!} ,$$

da cui

$$\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| \leq \frac{e}{(n+1)!} , \tag{7.17}$$

e quindi, come avevamo già (faticosamente) dimostrato, ☞ proposizione 5.55,

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e .$$

Inoltre, dalla (7.17) si ricava una stima dell'errore che si commette approssimando e con la somma $\sum_0^n 1/k!$; ad esempio, già con $n = 5$ si ottiene

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}\right) \right| \leq \frac{e}{720} < \frac{3}{720} < 4.2 \cdot 10^{-3} ,$$

mentre con $n = 6$ si ha

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}\right) \right| \leq \frac{e}{5040} < \frac{3}{5040} < 6 \cdot 10^{-4} ,$$

quindi il numero $\frac{1957}{720} \simeq 2.71806$ fornisce un'approssimazione del numero e con un errore certamente minore di $6 \cdot 10^{-4}$. Notiamo che queste stime non dicono che "l'errore è uguale a ...", ma semplicemente garantiscono che l'errore (che per quel che ne sappiamo potrebbe tranquillamente essere zero) è sicuramente inferiore a un certo valore.

Esempio : più in generale, scrivendo lo sviluppo di Taylor di e^x centrato nell'origine per un generico $x \neq 0$ si ricava come prima

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \frac{e^{z(x)} |x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{\max\{1, e^x\} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!} , \tag{7.18}$$

perché $e^{z(x)} \leq e^x$ se $x > 0$, ed $e^{z(x)} \leq e^0 = 1$ se $x < 0$. In particolare, grazie a (5.23) riotteniamo l'uguaglianza (☞ proposizione 5.56)

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad \forall x ;$$

inoltre la stima (7.18) può essere usata come nello scorso esempio per ottenere una stima di e^x, dato che, se ad esempio siamo nel caso $x > 0$, dalla positività del resto di Lagrange ricaviamo

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq e^x \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}$$

e quindi (considerando solo la disuguaglianza di destra, e lasciando la sinistra inalterata)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq e^x \leq \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}{1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}} .$$

Ad esempio, per $x = \pi/2$ ed $n = 9$ la stima precedente dà

$$4.810448 < e^{\pi/2} < 4.810570 .$$

Esempio : per approssimare il valore di π, potremmo pensare di usare lo sviluppo di Taylor dell'arcotangente, dato che $\arctan 1 = \pi/4$; tuttavia, per stimare l'errore è necessaria un'espressione esplicita del resto, e non basta la scrittura di Peano, ma le derivate dell'arcotangente in un punto generico non sono facili da ricavare. Riusciremo a superare questa difficoltà più avanti, ☞ formula (10.22), o, con un'altra strada, troveremo una formula abbastanza precisa, la formula di Wallis (➡ appendice 8.13).

Gli sviluppi di Taylor sono spesso molto utili per calcolare limiti oppure ordini di infinitesimo ai quali altri metodi (ad esempio i teoremi di de l'Hôpital) si applicherebbero male. Inoltre, conoscere i primi termini dello sviluppo di Taylor centrato in x_0 di una funzione complicata permette di abbozzarne un grafico approssimato nelle vicinanze del punto x_0.

Esempio : calcoliamo $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x\sqrt{x}} - \operatorname{sen}^3\sqrt{x} - \cos x^{5/4}}{x^2\sqrt{x}}$; dato che $e^t = 1+t+t^2/2+o(t^2)$, abbiamo

$$e^{x\sqrt{x}} = 1 + x\sqrt{x} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) .$$

Analogamente, da $\operatorname{sen} t = t - t^3/6 + o(t^4)$ ricaviamo $\operatorname{sen}\sqrt{x} = \sqrt{x} - x\sqrt{x}/6 + o(x^2)$ e quindi

$$\operatorname{sen}^3\sqrt{x} = \left(\sqrt{x} - x\sqrt{x}/6 + o(x^2)\right)^3 = x\sqrt{x} - \frac{x^2\sqrt{x}}{2} + o(x^3) .$$

Infine, da $\cos t = 1 - t^2/2 + o(t^3)$ otteniamo

$$\cos x^{5/4} = 1 - \frac{x^2\sqrt{x}}{2} + o(x^{3+(3/4)}) :$$

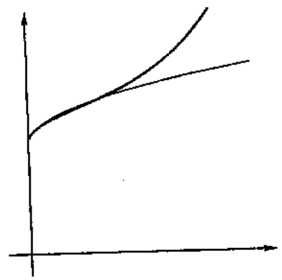


Fig. 7.17 : i grafici di $\dfrac{e^{x\sqrt{x}} - \operatorname{sen}^3\sqrt{x} - \cos x^{5/4}}{x^2\sqrt{x}}$ e (sottile) $1 + \dfrac{\sqrt{x}}{2}$

unendo i risultati otteniamo

$$e^{x\sqrt{x}} - \operatorname{sen}^3\sqrt{x} - \cos x^{5/4} = x^2\sqrt{x} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) ,$$

per cui la funzione della quale dobbiamo calcolare il limite è uguale a

$$\frac{e^{x\sqrt{x}} - \operatorname{sen}^3\sqrt{x} - \cos x^{5/4}}{x^2\sqrt{x}} = 1 + \frac{\sqrt{x}}{2} + o(\sqrt{x}) :$$

allora il limite è 1, e vicino a $x = 0$ la funzione ha un grafico simile a quello di $1 + \sqrt{x}/2$; quanto ci sarebbe voluto per avere questa informazione con uno studio di funzione tradizionale?

7.6 - Funzioni convesse

Introduciamo ora l'importante nozione di convessità, che ci permetterà di affrontare lo studio qualitativo delle funzioni in maniera più precisa e dettagliata.

Se f è una funzione definita su un intervallo I , scelti due punti $x_0 < x_1$ in I consideriamo la funzione

$$r_{x_0,x_1}(z) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(z - x_0) ,$$

il cui grafico è la retta secante il grafico di f nei punti di ascisse x_0, x_1 . Osserviamo che ogni punto $z \in [x_0, x_1]$ si può scrivere come

$$z = tx_0 + (1-t)x_1$$

per un opportuno $t \in [0,1]$, precisamente $t = (x_1 - z)/(x_1 - x_0)$, e che allora

$$r_{x_0,x_1}(z) = tf(x_0) + (1-t)f(x_1) .$$

D'altra parte, per ogni $t \in [0,1]$ il punto $tx_0 + (1-t)x_1$ appartiene all'intervallo di estremi x_0 e x_1 .

Definizione : *una funzione f definita su un intervallo I si dice convessa se per ogni $x_0, x_1 \in I$ con $x_0 < x_1$ si ha*

$$f(z) \le r_{x_0,x_1}(z) \qquad \forall z \in [x_0, x_1] , \tag{7.19}$$

cioè

$$f\big(tx_0 + (1-t)x_1\big) \le tf(x_0) + (1-t)f(x_1) \qquad \forall t \in [0,1] . \tag{7.20}$$

Notiamo che in (7.20) la disuguaglianza va verificata solo per $t \in]0,1[$, dato che i casi estremi sono banali, e che la condizione $x_0 < x_1$ è servita solo per poter parlare dell'intervallo $[x_0, x_1]$ in (7.19), anziché dell'intervallo di estremi x_0, x_1 (➡ appendice 7.12).

Esempio : la funzione $|x|$ è convessa, dato che per la disuguaglianza triangolare

$$|tx_0 + (1-t)x_1| \le |tx_0| + |(1-t)x_1| = t|x_0| + (1-t)|x_1| .$$

Più in generale si ha che la funzione $|x|^\alpha$ risulta convessa se e solo se $\alpha \ge 1$ (✎ es. 7.61).

Osservazione : la somma di due funzioni convesse è convessa. Infatti, se f e g sono convesse, sommando membro a membro le due versioni di (7.20), una con f e l'altra con g , otteniamo subito la formula (7.20) per la funzione $f+g$. Invece, non è vero in generale che il prodotto di due funzioni convesse è ancora una funzione convessa, come mostra il prossimo esempio.

Esempio : la funzione x^2 è convessa, come visto nello scorso esempio; d'altra parte le funzioni costanti sono tutte convesse (la verifica è immediata), quindi in particolare lo è la costante -1 ; per l'osservazione precedente la somma $x^2 - 1$ è convessa. Però, il prodotto di questa funzione convessa per se stessa non è più una funzione convessa: si tratta infatti della funzione $(x^2-1)^2$, che vale zero in $x_0 = -1$ e in $x_1 = 1$, ma vale 1 nel punto $z = 0$, il che viola la condizione (7.19).

Il prossimo teorema migliora la caratterizzazione geometrica delle funzioni convesse.

Teorema 7.32 : *se* f *è una funzione definita su un intervallo* I , *allora* f *è convessa se e solo se per ogni* $x_0 < x_1$ *in* I

$$\begin{cases} f(x) \le r_{x_0,x_1}(x) & \forall x \in [x_0, x_1] \\ f(x) \ge r_{x_0,x_1}(x) & \forall x \notin [x_0, x_1] \, . \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE : già solo la prima delle due disuguaglianze implica che f è convessa (è proprio la definizione), e viceversa se f è convessa vale la prima disuguaglianza; allora dobbiamo solo provare che la convessità di f implica la seconda disuguaglianza.

Consideriamo una funzione f convessa su un intervallo I , e siano $x_0 < x_1 < x_2$ punti di I (☛ figura 7.18). Dato che $f(x_1) \le r_{x_0,x_2}(x_1)$ per la (7.19) applicata sull'intervallo $[x_0, x_2]$, e che invece $r_{x_0,x_1}(x_1) = f(x_1)$, le due rette r_1 e r_2 , rispettivamente di equazioni $y = r_{x_0,x_1}(x)$ e $y = r_{x_0,x_2}(x)$, passano entrambe per il punto $(x_0, f(x_0))$, ma la prima passa al di sotto della seconda (o meglio, "non al di sopra") nel punto di ascissa x_1 , che è maggiore di x_0 .

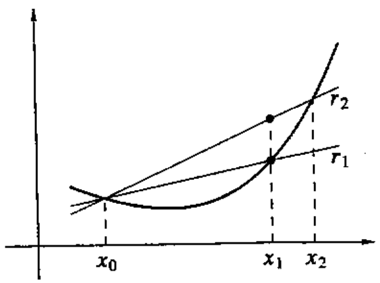


Fig. 7.18 : dimostrazione del teorema 7.32

Allora la prima retta sta al di sotto della seconda in tutti i punti con ascissa maggiore di x_0 , cioè

$$r_{x_0,x_1}(x) \le r_{x_0,x_2}(x) \qquad \forall x \ge x_0 \, . \tag{7.21}$$

In particolare, essendo $x_2 > x_0$,

$$r_{x_0,x_1}(x_2) \le r_{x_0,x_2}(x_2) = f(x_2) \, .$$

Per l'arbitrarietà di $x_2 > x_1$ abbiamo provato che $f(x) \ge r_{x_0,x_1}(x)$ per ogni $x \ge x_1$. Dato che un ragionamento analogo vale con $x_2 < x_0 < x_1$, il risultato è dimostrato. ■

Dunque, il grafico di una funzione convessa f che passa per $A = (x_0, f(x_0))$ e $B = (x_1, f(x_1))$ non può stare nelle zone grigie in figura.

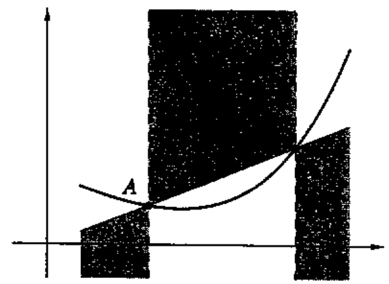


Fig. 7.19 : zone "proibite" per una funzione convessa f

Definizione : *una funzione* f *definita su un intervallo* I *si dice strettamente convessa se per ogni* $x_0, x_1 \in I$ *con* $x_0 < x_1$ *si ha*

$$f(z) < r_{x_0,x_1}(z) \qquad \forall z \in]x_0, x_1[\, ,$$

cioè

$$f\big(tx_0 + (1-t)x_1\big) < tf(x_0) + (1-t)f(x_1) \qquad \forall t \in]0,1[\, .$$

Una funzione strettamente convessa è dunque convessa, e la differenza rispetto a (7.19) e (7.20) è solo che le disuguaglianze (che agli estremi sono sempre delle uguaglianze) sono qui strette: dunque il grafico di f non tocca il grafico di $r_{x_0,x_1}(x)$ all'interno dell'intervallo $]x_0, x_1[$; la prossima osservazione chiarisce la situazione.

Osservazione : se f è convessa su I e il suo grafico interseca una data retta r in tre punti di ascisse $x_0 < x_1 < x_2$, allora il grafico di f coincide con tale retta in tutto l'intervallo $[x_0, x_2]$. Infatti, se $y = r(x)$ è l'equazione della retta, abbiamo

$$r(x) = r_{x_0,x_1}(x) = r_{x_0,x_2}(x) = r_{x_1,x_2}(x) \, ,$$

quindi se $x \in]x_0, x_1[$

$$\begin{cases} f(x) \le r_{x_0,x_1}(x) = r(x) & \text{perché } x \in [x_0, x_1] \quad (☛ \text{ figura } 7.20) \\ f(x) \ge r_{x_1,x_2}(x) = r(x) & \text{perché } x \notin [x_1, x_2], \quad (☛ \text{ figura } 7.21) \end{cases}$$

cioè $f(x) = r(x)$, e analogamente se $x \in]x_1, x_2[$.

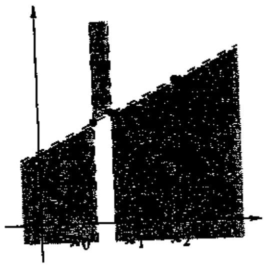


Fig. 7.20 : zone "proibite"

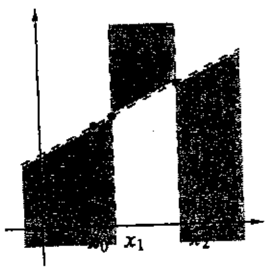


Fig. 7.21 : altre zone "proibite"

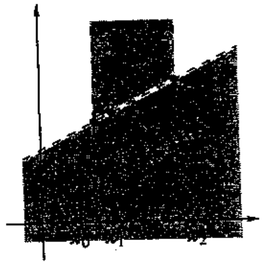


Fig. 7.22 : unione delle due

Dunque una funzione convessa può essere non strettamente convessa solo se il suo grafico ha un intero tratto rettilineo.

Corollario 7.33 : *se f è una funzione strettamente convessa, ed $r \subset \mathbb{R}^2$ è una retta, il grafico di f può intersecare r solo in* 0 , 1 *oppure* 2 *punti.*

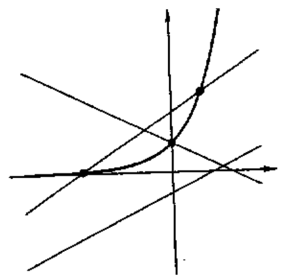


Fig. 7.23 : nessuna, una, due intersezioni

Osservazione : si verifica subito che la somma di una funzione convessa e una strettamente convessa è strettamente convessa.

Definizione : *si dice che una funzione f è concava* [*strettamente concava*] *se $-f$ è convessa* [*strettamente convessa*].

Tutte le proprietà delle funzioni convesse valgono per le funzioni concave (con le opportune ovvie modifiche).

Esempio : le uniche funzioni contemporaneamente convesse e concave sono le funzioni affini. Infatti, fissiamo $x_0 < x_1$; se $y = r_{x_0,x_1}(x)$ rappresenta la retta secante ad f , allora la secante a $-f$ è $y = -r_{x_0,x_1}(x)$, quindi dalla convessità di f abbiamo per il teorema 7.32

$$\begin{cases} f(x) \le r_{x_0,x_1}(x) & \forall x \in [x_0, x_1] \\ f(x) \ge r_{x_0,x_1}(x) & \forall x \notin [x_0, x_1] \, , \end{cases}$$

mentre dalla convessità di $-f$ abbiamo

$$\begin{cases} -f(x) \le -r_{x_0,x_1}(x) & \forall x \in [x_0, x_1] \\ -f(x) \ge -r_{x_0,x_1}(x) & \forall x \notin [x_0, x_1] \, , \end{cases}$$

cioè $f(x) = r_{x_0,x_1}(x)$ per ogni x .

Proposizione 7.34 : *una funzione f definita su un intervallo I è convessa* ⟦ *strettamente convessa* ⟧ *se e solo se per ogni $x_0 \in I$ la funzione rapporto incrementale (definita per $x \ne x_0$)*

$$R_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è debolmente crescente [*strettamente crescente*].

DIMOSTRAZIONE : siano $x_0 < x_1 < x_2$ punti di I , e mostriamo che $R_{x_0}(x_1) \le R_{x_0}(x_2)$. Osserviamo che $R_{x_0}(x_1)$ è il coefficiente angolare della retta r_1 di equazione $y = r_{x_0,x_1}(x)$, mentre $R_{x_0}(x_2)$ è il coefficiente angolare della retta r_2 di equazione $y = r_{x_0,x_2}(x)$; abbiamo già visto in (7.21) che a destra di x_0 la prima retta sta al di sotto della seconda (☞ figura 7.18), quindi il coefficiente angolare di r_1 è minore o uguale di quello di r_2 . Lo stesso vale se partiamo con $x_1 < x_2 < x_0$, mentre se $x_1 < x_0 < x_2$ abbiamo per la dimostrazione precedente

$$R_{x_0}(x_1) = R_{x_1}(x_0) \le R_{x_1}(x_2) = R_{x_2}(x_1) \le R_{x_2}(x_0) = R_{x_0}(x_2) \, .$$

Lasciamo per esercizio il viceversa, per il quale basta ripercorrere attentamente all'indietro la dimostrazione, e le facili modifiche per il caso della stretta convessità. ■

Corollario 7.35 : *sia f una funzione convessa su un intervallo I , e sia x_0 un punto interno ad I . Allora in x_0 esistono finite le derivate destra e sinistra $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$, e si ha*

$$f'_-(x_0) \le f'_+(x_0).$$

DIMOSTRAZIONE : segue immediatamente dalla proposizione 7.34 in quanto se x_0 è interno ad I per la funzione crescente R_{x_0} esistono sempre i limiti destro e sinistro (☞ teorema 6.13). Tali limiti risultano finiti in quanto scelti due punti x_1, x_2 in I con $x_1 < x_0 < x_2$ abbiamo

$$R_{x_0}(x_1) \le f'_-(x_0) \le f'_+(x_0) \le R_{x_0}(x_2) \, .$$

Con lo stesso ragionamento, se x_0 è l'estremo sinistro di I si avrà che esiste la derivata destra, e che $f'_+(x_0) \in [-\infty, +\infty[$, mentre se x_0 è l'estremo destro di I si avrà che esiste la derivata sinistra, e che $f'_-(x_0) \in]-\infty, +\infty]$. ■

La disuguaglianza algebrica (7.20) ha altre importanti conseguenze sulla regolarità delle funzioni convesse (➡ appendice 7.13).

Corollario 7.36 : *sia f una funzione convessa su un intervallo I, e sia x_0 un punto interno ad I; allora f è continua in x_0.*

DIMOSTRAZIONE : applicando il corollario 7.35 si ha

$$\lim_{x\to x_0^-}\big(f(x)-f(x_0)\big) = f'_-(x_0)\lim_{x\to x_0^-}(x-x_0)=0$$
$$\lim_{x\to x_0^+}\big(f(x)-f(x_0)\big) = f'_+(x_0)\lim_{x\to x_0^+}(x-x_0)=0$$

da cui segue immediatamente la tesi. ■

Esempio : le funzioni convesse possono essere discontinue agli estremi dell'intervallo di definizione; ad esempio, la funzione $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{se } |x|<1\\ 1 & \text{se } |x|=1\end{cases}$$

è convessa, come si può verificare facilmente, ma è discontinua nei punti -1 e 1 (☞ figura 7.24).

Esempio : esistono funzioni convesse che non sono derivabili; ad esempio, la funzione $f(x)=|x|$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$, ma non è derivabile nell'origine. Inoltre, se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è convessa, la derivata destra $f'_+(a)$ e la derivata sinistra $f'_-(b)$ possono non essere finite, come mostra la funzione dell'esempio precedente, in cui si ha $f'_+(-1)=-\infty$ e $f'_-(1)=+\infty$.

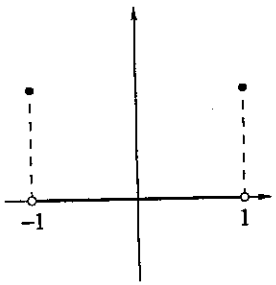


Fig. 7.24 : una funzione convessa discontinua agli estremi

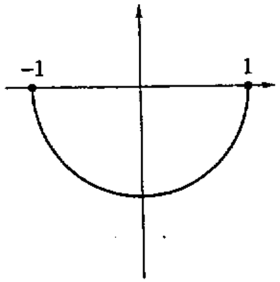


Fig. 7.25 : $y=-\sqrt{1-x^2}$

Un altro esempio, con una funzione f continua, si ha prendendo $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$ sull'intervallo $[-1,1]$.

Corollario 7.37 : *sia f una funzione derivabile in un intervallo I; allora f è convessa [strettamente convessa] se e solo se f' risulta debolmente crescente [strettamente crescente] in I.*

Lasciamo per esercizio la dimostrazione di questo risultato, come pure del prossimo.

Corollario 7.38 : *sia f una funzione derivabile due volte in un intervallo I; allora f è convessa se e solo se $f''\geq 0$ in I. Inoltre se $f''>0$ in I allora f è strettamente convessa.*

Esempio : la funzione e^x ha derivata seconda e^x sempre positiva, dunque è strettamente convessa; la funzione $\cos x$ ha derivata seconda $-\cos x$, dunque sull'intervallo $[-\pi/2,\pi/2]$ è strettamente concava.

Osservazione : per dimostrare la stretta convessità si può usare anche la proposizione 7.20; dunque, se f' è continua e $f''>0$ salvo al più in un numero finito di punti allora f è strettamente convessa. Vale la pena di insistere sul fatto che la condizione di convessità $f''\geq 0$ si può utilizzare soltanto nei casi in cui f è derivabile due volte; altrimenti si può usare il corollario 7.37, oppure la definizione generale di funzione convessa (✎ es. 7.62).

Il prossimo risultato dà un'altra proprietà geometrica delle funzioni convesse.

Proposizione 7.39 : *sia f una funzione convessa su un intervallo I, e $x_0\in I$; allora*

$$\begin{aligned}\forall x\geq x_0,\quad & f(x)\geq f(x_0)+f'_+(x_0)(x-x_0)\\ \forall x\leq x_0,\quad & f(x)\geq f(x_0)+f'_-(x_0)(x-x_0)\,;\end{aligned}\tag{7.22}$$

In particolare, se f è derivabile in x_0 allora

$$f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

per ogni $x\in I$.

DIMOSTRAZIONE : dalla proposizione 7.34 abbiamo che

$$x_0<y<x \quad\Longrightarrow\quad R_{x_0}(y)\leq R_{x_0}(x)\,,$$

dunque fissato $x>x_0$

$$f'_+(x_0)=\lim_{y\to x_0^+}R_{x_0}(y)\leq R_{x_0}(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,.$$

Tenendo conto che $x-x_0>0$, da questa disuguaglianza si ricava subito la prima delle (7.22) per $x>x_0$, ma per $x=x_0$ questa è ovvia. Il caso $x<x_0$ è analogo, e l'ultima affermazione segue dalle prime due. ■

La proposizione precedente afferma che il grafico di una funzione convessa sta sempre al di sopra delle sue rette tangenti (anzi, delle sue "semitangenti" destra e sinistra, nei punti dove non è derivabile). Osserviamo che vale anche il viceversa (➡ appendice 7.14), cioè che una funzione è convessa se e solo se per ogni x_0 valgono le (7.22).

Osservazione : se una funzione f è convessa sugli intervalli $[a,b]$ e $[b,c]$, non è detto che sia convessa sull'unione $[a,c]$; ad esempio, le funzioni $f(x)=-|x|$ e $f(x)=(|x|-1)^2$ sono convesse su $]-\infty,0]$ e su $[0,+\infty[$ ma non su tutto $\mathbb{R}$. Potete provare per esercizio che una funzione f convessa su $[a,b]$ e su $[b,c]$ risulta convessa su $[a,c]$ se e solo se essa è continua in b e verifica $f'_-(b)\le f'_+(b)$; in particolare, potete dedurne che se f è convessa su $[a,b+\delta]$ e su $[b-\delta,c]$ per qualche $\delta>0$ allora è certamente convessa su $[a,c]$.

7.7 - Studio qualitativo delle funzioni

Passiamo ora ad indicare quali sono i punti più importanti per affrontare uno studio qualitativo di una funzione (che indicheremo con f). Teniamo a sottolineare che lo schema proposto qui di seguito è solo orientativo; infatti talvolta non tutti i punti elencati si riescono a sviluppare agevolmente con calcoli espliciti; in tal caso si cercherà di determinare il comportamento qualitativo della funzione f attraverso i soli punti svolti (✎ es. 7.73).

a) Come prima cosa si deve determinare il dominio della funzione f, se non è già esplicitamente assegnato; in generale, per una funzione elementare, si considera come dominio il suo dominio naturale. Talvolta, l'espressione della funzione $f(x)$ fornisce informazioni utili sull'insieme dei valori assunti; ad esempio, se è $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, la funzione (definita su $[-1,1]$) assume soltanto valori non negativi. Spesso risulta utile esaminare se la funzione gode di particolari proprietà di periodicità, ☞ sezione 4.6, oppure di simmetria, ☞ sezione 4.3. In particolare, se f risulta T-periodica, detto $\operatorname{dom} f$ il suo dominio, ci si può limitare ad effettuare lo studio qualitativo su uno degli insiemi del tipo $(\operatorname{dom} f)\cap[x_0,x_0+T]$ con x_0 scelto a piacere, ad esempio su $(\operatorname{dom} f)\cap[0,T]$. Se invece f risulta essere una funzione pari (oppure dispari) ci si può limitare ad effettuare lo studio qualitativo su uno degli insiemi $(\operatorname{dom} f)\cap[0,+\infty[$ oppure $(\operatorname{dom} f)\cap]-\infty,0]$. Infine, se f risulta essere una funzione pari (oppure dispari) e T-periodica ci si può limitare ad effettuare lo studio qualitativo su $(\operatorname{dom} f)\cap[0,T/2]$.

b) È utile studiare il segno della funzione f, cioè determinare gli insiemi dove è $f<0$, dove è $f>0$, e dove è $f=0$. Spesso risulta anche utile determinare alcuni punti "notevoli" del grafico di f, come ad esempio gli eventuali punti in cui il grafico interseca gli assi coordinati, o i punti particolari che risultano dalle indagini successive.

c) Una volta individuato il dominio della funzione f, si determinano gli eventuali punti in cui f risulta discontinua. Se x_0 è un punto di discontinuità di f si calcolano (se esistono) i limiti sinistro e destro di f in x_0. Risulta utile inoltre calcolare (se esistono) i limiti di f nei punti di frontiera del suo dominio, compresi eventualmente i punti $-\infty$ e $+\infty$. Per evitare di dimenticare l'analisi di qualche punto di frontiera conviene, ad esempio procedendo da $-\infty$ a $+\infty$, determinare per ordine tali punti e calcolare i rispettivi limiti uno per uno, osservando che ad esempio se $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ occorre calcolare separatamente i limiti sinistro e destro in zero.

d) Si calcola la derivata f' e se ne determina il dominio, $\operatorname{dom} f'\subset\operatorname{dom} f$; è interessante determinare i punti di $\operatorname{dom} f$ in cui f non è dotata di derivata: se x_0 è uno di tali punti e se esistono le derivate sinistra e destra $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$, necessariamente diverse in quanto non esiste la derivata $f'(x_0)$, il punto $(x_0,f(x_0))$ viene detto *punto angoloso* del grafico di f. Potete verificare il significato geometrico della definizione di punto angoloso osservando ad esempio che l'origine è un punto angoloso del grafico della funzione $f(x)=|x|$.
Lo studio del segno della derivata f' permette poi, come abbiamo visto, di studiare le proprietà di monotonia della funzione f. Negli intervalli in cui $f'>0$ si avrà che f è crescente, in quelli in cui $f'<0$ si avrà che f è decrescente. Molto spesso tale studio permette anche di determinare gli eventuali punti di minimo e di massimo relativo (e assoluto) di f con i rispettivi valori.

e) Si studia la convessità o concavità di f, studiando il segno di f''. Sovente accade che l'espressione di f'' renda la risoluzione della disequazione $f''(x)\ge 0$ piuttosto complessa: si cercherà in tal caso di determinare il comportamento qualitativo della funzione f attraverso le informazioni ottenute nei punti precedenti. Ad esempio, spesso uno studio anche molto approssimativo dell'andamento della derivata prima f' può fornire indicazioni utili per determinare le regioni di convessità e concavità della funzione f.

f) Si può rendere più completo lo studio qualitativo della funzione f con la ricerca degli eventuali asintoti (➡ appendice 7.15). Ricordiamo brevemente che gli asintoti di una funzione f sono definiti nel modo seguente.
Asintoto verticale è una retta di equazione $x=x_0$ con $x_0\in\mathbb{R}$, e si ha quando esiste ed è uguale a $+\infty$ oppure a $-\infty$ uno dei limiti

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x)\,.$$

Asintoto orizzontale è una retta di equazione $y=y_0$ con $y_0\in\mathbb{R}$, e si ha quando

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=y_0 \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=y_0\,.$$

Asintoto obliquo (☞ esercizio 6.16) è una retta di equazione $y=ax+b$ con $a\neq0$ e si ha quando

$$\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-ax-b\big)=0 \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-ax-b\big)=0\,;$$

in tal caso i coefficienti a e b si ricavano calcolando

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - ax\big)$$

per un asintoto a $-\infty$, o calcolando gli stessi limiti per $x \to +\infty$, nel caso di un asintoto obliquo verso $+\infty$. Viceversa, è facile vedere che se esistono e sono finiti i limiti precedenti allora la retta di equazione $y = ax + b$ è un asintoto obliquo per $x \to -\infty$, o rispettivamente per $x \to +\infty$, della funzione f.

g) Si traccia infine un grafico qualitativo della funzione f che tenga conto delle informazioni ricavate nei punti precedenti.

Osservazione : il punto g) va iniziato insieme al punto a); ogni informazione parziale che si ricava in a)...f) va subito inserita nell'abbozzo di grafico, in modo da poter controllare se questa si accorda con le informazioni precedenti, o no (e in tal caso, qualche conto è necessariamente errato ...).

Esempio : studiamo la funzione

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{1 + \frac{|x|}{2}}. \tag{7.23}$$

Si nota subito che è definita su tutto $\mathbb{R}$, ed è continua perché composizione di funzioni continue (il denominatore della frazione non vale mai meno di 1); non sono presenti simmetrie evidenti. Lo studio del segno della funzione (ricordiamo che il denominatore è sempre positivo) si riduce alla disequazione

$$f(x) > 0 \iff x - 1 + \frac{2}{1+\frac{|x|}{2}} > 0$$
$$\iff x - \frac{|x|}{2} + 1 + \frac{x|x|}{2} > 0 :$$

questa è sempre vera per $x \geq 0$, e per $x < 0$ si riduce a

$$\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{2} + 1 > 0 \iff \frac{3-\sqrt{17}}{2} < x < 0.$$

Posto $x_0 = (3 - \sqrt{17})/2$, abbiamo dunque (☛ figura 7.26)

$$f(x) < 0 \text{ se } x < x_0, \qquad f(x) = 0 \text{ se } x = x_0, \qquad f(x) > 0 \text{ se } x > x_0.$$

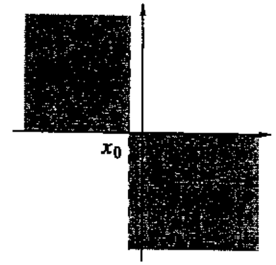


Fig. 7.26 : punto b), segno di f

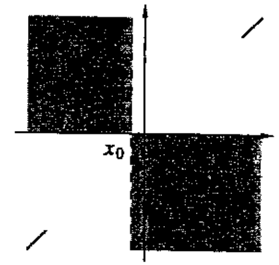


Fig. 7.27 : punto c), limiti di f

È molto facile calcolare i limiti di f agli estremi del suo dominio, cioè a $-\infty$ e a $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

e questi (☛ figura 7.27) non sono in disaccordo con le informazioni precedenti.

La funzione f è poi derivabile per $x \neq 0$, e la sua derivata (che si può calcolare anche studiando separatamente i casi $x < 0$ e $x > 0$) è data da

$$f'(x) = 1 - \frac{x/|x|}{\big(1 + (|x|/2)\big)^2} = \frac{\left(1 - \frac{x}{|x|}\right) + |x| + \frac{x^2}{4}}{\big(1 + (|x|/2)\big)^2}.$$

In questa frazione, il denominatore è sempre positivo, e il numeratore (ricordando che $x/|x|$ vale solo 1 o -1) è la somma di tre quantità non negative: dato che le ultime due sono sempre positive (nel dominio della derivata), abbiamo $f'(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$. Dato che f è continua nell'unico punto in cui non è derivabile, la proposizione 7.20 implica che f è strettamente crescente (anche questa informazione non è in contrasto con l'abbozzo di grafico). Osserviamo poi che

$$\lim_{x\to0^-} f'(x) = 2, \qquad \lim_{x\to0^+} f'(x) = 0,$$

quindi f non è derivabile in $x = 0$ per il corollario 7.28, e $x = 0$ risulta essere un punto angoloso; abbiamo poi $f(0) = 1$.

La derivata seconda, che esiste per ogni $x \neq 0$, è semplicemente

$$f''(x) = \frac{1}{\big(1 + (|x|/2)\big)^3} \qquad \forall x \neq 0.$$

Questa è sempre positiva (ma non è definita su un intervallo), quindi per il corollario 7.38 la funzione f è strettamente convessa sia su $]-\infty, 0]$ che su $[0, +\infty[$. Tuttavia f non è una funzione convessa, come si può vedere ad esempio dal fatto che la derivata sinistra in $x = 0$ è uguale a 2, ed è maggiore della derivata destra, che vale 0, in contrasto con il corollario 7.35.

Infine, f ha come asintoto obliquo sia a $-\infty$ che a $+\infty$ la retta di equazione $y = x - 1$, dato che

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (x-1)] = 0 .$$

Possiamo tracciare il grafico approssimativo di f.

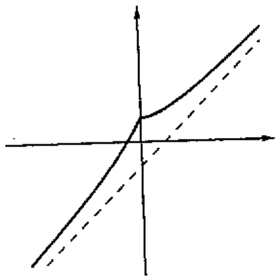


Fig. 7.28 : g) il grafico di f

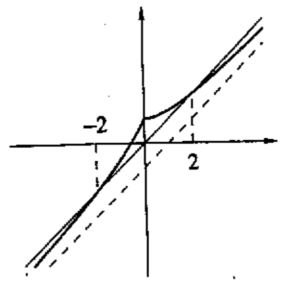


Fig. 7.29 : le intersezioni con $y = x$

Con gli strumenti introdotti in questo capitolo, è possibile studiare delle successioni definite per ricorrenza più complesse di quelle viste nella sezione 5.10: ad esempio, studiamo una successione connessa con la funzione dell'esempio precedente.

Esempio : studiamo, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la successione $\{a_n\}_n$ definita per ricorrenza dalle formule

$$a_0 = \alpha , \qquad a_{n+1} = f(a_n) ,$$

dove f è data dalla formula (7.23). Sappiamo già il comportamento di f, ma ci serve anche risolvere la disequazione $f(x) > x$; questa è molto facile, ed equivale a $|x| < 2$, pertanto (☞ figura 7.29)

$$\begin{cases} f(x) > x & \text{se } -2 < x < 2 \\ f(x) = x & \text{se } x = \pm 2 \\ f(x) < x & \text{se } x < -2 \text{ o } x > 2. \end{cases} \tag{7.24}$$

Ricordiamo inoltre che f è continua e strettamente crescente; allora abbiamo:

a) se $\alpha = 2$ allora $a_n = 2$ per ogni n
b) se $\alpha = -2$ allora $a_n = -2$ per ogni n

(entrambe le affermazioni vanno dimostrate per induzione, come pure le c),...,h) che seguono: fatelo per esercizio), e così pure, grazie alla monotonia di f,

c) se $\alpha < -2$ allora $a_n < -2$ per ogni n
d) se $-2 < \alpha < 2$ allora $-2 < a_n < 2$ per ogni n
e) se $\alpha > 2$ allora $a_n > 2$ per ogni n.

Da queste e dalla (7.24) otteniamo, sempre per induzione,

f) se $\alpha < -2$ allora $\{a_n\}_n$ è decrescente
g) se $-2 < \alpha < 2$ allora $\{a_n\}_n$ è crescente
h) se $\alpha > 2$ allora $\{a_n\}_n$ è decrescente.

Da c) ed f), per il teorema 5.40, otteniamo

i) se $\alpha < -2$ allora $a_n \to \ell$ con $\ell \le \alpha < -2$,

e così pure, da d) e g) e da e) ed h) rispettivamente,

j) se $-2 < \alpha < 2$ allora $a_n \to \ell$ con $-2 < \alpha \le \ell \le 2$
k) se $\alpha > 2$ allora $a_n \to \ell$ con $2 \le \ell \le \alpha$.

Iniziamo dall'ultimo caso: la successione $\{a_n\}_n$ ha limite finito, e la funzione f è continua in tutti i punti, pertanto da $a_{n+1} = f(a_n)$ segue, passando al limite per $n \to +\infty$ e grazie alla caratterizzazione sequenziale (5.11) della continuità, che $\ell = f(\ell)$. Poiché per (7.24) le uniche soluzioni di questa equazione sono $\ell = \pm 2$, ma $\ell = -2$ è impossibile dato che $2 \le \ell \le \alpha$, abbiamo provato che nel caso k) si ha $a_n \to 2$. Analogamente, provate per esercizio che nel caso j) si ha $a_n \to 2$, e che nel caso i) si ha $a_n \to -\infty$ (✎ es. 7.82).

Esercizi relativi al capitolo 7

Esercizio 7.1 : usando la definizione, verificate che la derivata di una funzione costante è nulla in ogni punto.

Esercizio 7.2 : usando la definizione, verificate che la derivata della funzione affine $f(x)=ax+b$ è in ogni punto uguale ad a.

Esercizio 7.3 : usando la definizione, verificate che la derivata della funzione ax^2+bx+c è data da $2ax+b$.

Esercizio 7.4 : calcolate la derivata della funzione $\cos x$.

Esercizio 7.5 : calcolate la derivata della funzione e^x.

Esercizio 7.6 : provate per induzione che per ogni $n\in\mathbb{N}^+$ la derivata di x^n è uguale a nx^{n-1}.

Esercizio 7.7 : dimostrate che se P è un polinomio di grado $n\geq 1$ allora P' è un polinomio di grado $n-1$.

Esercizio 7.8 : usando la definizione di derivata e le prime proprietà elencate nel teorema 7.4 e nel corollario 7.5 calcolate la derivata prima delle seguenti funzioni:

a) $f(x)=\operatorname{sen}^2 x+\cos x$
b) $f(x)=x^2\operatorname{sen}^3 x$
c) $f(x)=\operatorname{sen}^n x$
d) $f(x)=(x+\operatorname{sen} x)^5$
e) $f(x)=x^3e^x+\cos^3 x$.

Esercizio 7.9 : trovate e dimostrate una formula per le derivate successive della funzione $\cos x$.

Esercizio 7.10 : usando la definizione di derivata e il teorema 7.7 calcolate la derivata prima delle seguenti funzioni:

a) $f(x)=\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$
b) $f(x)=\operatorname{sen}(x^2\operatorname{sen} x)$

c) $f(x)=e^{x\cos x}$
d) $f(x)=e^{\operatorname{sen} x}+\cos(x+\operatorname{sen} x)$
e) $f(x)=e^{x^2}\cos(x^2)$.

Esercizio 7.11 : sia f una funzione derivabile; provate che se f è periodica allora f' è periodica (con lo stesso periodo). È vero (☞ esercizio 8.11) il viceversa?

Esercizio 7.12 : sia f una funzione derivabile; provate che se f è pari ⟦dispari⟧ allora f' è dispari ⟦pari⟧ (☞ esercizio 8.10).

Esercizio 7.13 : calcolate le derivate prime delle funzioni trigonometriche e iperboliche inverse $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{sett\,senh} x$, $\operatorname{sett\,cosh} x$ e $\operatorname{sett\,tanh} x$.

Esercizio 7.14 : calcolate $f'(e)$, dove f è l'inversa della funzione $e^x+\sqrt[3]{x}-1$.

Esercizio 7.15 : calcolate la derivata prima delle seguenti funzioni:

a) $f(x)=(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$
b) $f(x)=x(\log x)^{\log x}$
c) $f(x)=(\log x)^{\log x}$
d) $f(x)=x^{2x}$
e) $f(x)=(x^a)^{(x^b)}$ $\quad (a,b\in\mathbb{R})$.

Esercizio 7.16 : tra le seguenti funzioni, determinate quelle che sono derivabili su tutto $\mathbb{R}$:

a) $f(x)=x+|x|$
b) $f(x)=\operatorname{sen}(|x|^3)$
c) $f(x)=(x+|x|)^2$
d) $f(x)=\arctan|x|$
e) $f(x)=|x|+\operatorname{sen}|x|$
f) $f(x)=|x\operatorname{sen} x|$
g) $f(x)=x\operatorname{sen}|x|$
h) $f(x)=|x|+\operatorname{sen} x$
i) $f(x)=e^{|x|}$
j) $f(x)=xe^{|x|}$
k) $f(x)=x^2e^{|x|}$
l) $f(x)=x^2+e^{|x|}$.

Esercizio 7.17 : determinate i valori del parametro $a\geq 1$ per cui la funzione

$$f(x)=|\operatorname{sen} x|\sqrt{a-\cos^2 x}$$

risulta derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 7.18 : determinate, se esistono, i valori dei parametri $a,b\in\mathbb{R}$ che rendono la funzione

$$f(x)=\begin{cases}1+x & \text{se } x\leq 1\\ ax^2+b & \text{se } x>1\end{cases}$$

derivabile su tutto $\mathbb{R}$, e quelli che la rendono derivabile due volte su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 7.19 : determinate gli $a, b \in \mathbb{R}$ per cui la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \leq 1 \\ ax + b & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

risulta derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 7.20 : scrivete l'equazione della retta tangente nel punto $(0,1)$ alla curva di equazione $y = \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}$.

Esercizio 7.21 : determinate gli $a, b \in \mathbb{R}$ per cui la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^a \operatorname{sen}(x^b) & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

risulta derivabile su $[0, +\infty[$.

Esercizio 7.22 : considerate la funzione definita su $[0, +\infty[$ da

$$f(x) = \begin{cases} x^a \operatorname{sen}(1/x) & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0\,, \end{cases}$$

dove $a > 0$, e sia $n \in \mathbb{N}$; provate che:

a) se $n > 0$ e $a > 2n - 1$ allora f è derivabile n volte in tutto $[0, +\infty[$, e inoltre $f^{(n)}(0) = 0$
b) se $a > 2n$ allora $f \in C^n([0, +\infty[)$, cioè la sua derivata n-esima è una funzione continua.

Esercizio 7.23 : determinate il minimo e il massimo delle seguenti funzioni, sugli intervalli indicati:

a) $f(x) = \arctan |x|$ su $[-1, \sqrt{3}]$
b) $f(x) = \big|\cos |x + 1|\big|$ su $[-2, 2]$
c) $f(x) = |x|\mathrm{e}^x$ su $[-5, 1]$.

Esercizio 7.24 : sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, derivabile due volte in $]a, b[$, e tale che esiste un punto $c \in]a, b[$ con $f(a) = f(c) = f(b)$. Dimostrate che esiste un punto $z \in]a, b[$ tale che $f''(z) = 0$.

Esercizio 7.25 : usando il risultato dell'esercizio 7.7, dimostrate che se $n \geq 1$ allora un polinomio di grado n non può avere più di n radici reali distinte.

Esercizio 7.26 : indicate quali tra le seguenti funzioni risultano monotone crescenti su tutto $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$
b) $f(x) = |x|\mathrm{e}^x$
c) $f(x) = x + \mathrm{e}^x$
d) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + x^2}$.

Esercizio 7.27 : determinate i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha}{\operatorname{sen} x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

risulta monotona crescente sull'intervallo $]-\pi, \pi[$.

Esercizio 7.28 : determinate quali tra le seguenti funzioni risultano definitivamente monotone per $x \to +\infty$:

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$
b) $f(x) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x$
c) $f(x) = \operatorname{sen}(\mathrm{e}^{-x})$
d) $f(x) = \operatorname{sen} x$
e) $f(x) = \mathrm{e}^x$
f) $f(x) = \cos(\mathrm{e}^{-x})$
g) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2 - x}$.

Esercizio 7.29 : determinate i numeri reali $a > 0$ per cui la funzione $f(x) = ax^2 - x \operatorname{sen} x$ risulta monotona crescente da un certo punto in poi.

Esercizio 7.30 : determinate il più piccolo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che la successione $a_n = n^{2/n}$ risulti decrescente sull'insieme $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$.

Esercizio 7.31 : dimostrate le seguenti disuguaglianze:

a) $\dfrac{x - 1}{x} \leq \log x \leq x - 1 \qquad \forall x > 0$
b) $x \geq \dfrac{\tan x}{1 + \tan^2 x} \qquad \forall x \geq 0$
c) $x\mathrm{e}^{1/\sqrt{x}} > 1 \qquad \forall x > 1$.

Esercizio 7.32 : determinate i numeri reali α tali che si abbia $\alpha\mathrm{e}^x \geq 1 + x \log x$ per ogni $x > 0$.

Esercizio 7.33 : determinate tutti i numeri reali x per cui si ha $(1 - x)\mathrm{e}^{x/\sqrt{1-x}} \geq 1$.

Esercizio 7.34 : determinate i numeri reali a per cui la funzione $f(x) = \mathrm{e}^{ax} - x^a$ risulta definitivamente positiva per $x \to +\infty$.

Esercizio 7.35 : determinate i numeri $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\mathrm{e}^{ax} \geq x^b$ per ogni $x > 0$.

Esercizio 7.36 : sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che $f'(x) \geq 1$ per ogni x. Dimostrate che allora si ha $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Esercizio 7.37 : determinate i valori del parametro reale α per i quali la funzione $f_\alpha(x) = \alpha x^2 + (\mathrm{e}^{-x}/x)$ risulta iniettiva su $]0, +\infty[$.

Esercizio 7.38 : dite quali delle seguenti funzioni sono biunivoche da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^2 \arctan x$
b) $f(x) = x^2 + \arctan x$
c) $f(x) = x\mathrm{e}^x$
d) $f(x) = x + \mathrm{e}^x$.

Esercizio 7.39 : sia $f : [0,1] \to [0,+\infty[$ una funzione; dite quali implicazioni sussistono tra le seguenti proposizioni:

a) f è lipschitziana
b) $\sqrt{f}$ è lipschitziana
c) $\sqrt{f}$ è uniformemente continua.

Esercizio 7.40 : determinate quali tra le seguenti affermazioni risultano vere:

a) ogni funzione continua è derivabile
b) ogni funzione derivabile è continua
c) ogni funzione derivabile è uniformemente continua
d) ogni funzione uniformemente continua è derivabile
e) ogni funzione continua su un intervallo chiuso e limitato è derivabile
f) ogni funzione derivabile su un intervallo chiuso e limitato con derivata continua è lipschitziana
g) se $f(0) = 0$ e $f = o(x)$ per $x \to 0$ allora f è derivabile in 0
h) se f è derivabile in 0 allora $f = o(x)$ per $x \to 0$.

Esercizio 7.41 : dimostrate che la funzione $\arctan x + x^3$ è lipschitziana sull'intervallo $[0,4]$, e calcolatene la costante di Lipschitz.

Esercizio 7.42 : calcolate i seguenti limiti:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) - \arctan x}{x^5 \operatorname{arcsen}(\cos x)}$
b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 + \operatorname{sen} x - e^x}{|x|^{3/2}}$
c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x^x + 1 - \cos x)}{x \log x}$
d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{\operatorname{sen} x}$
e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x}\right)^x$
f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{-2/\sqrt{x}}$.

Esercizio 7.43 : determinate ordine e parte principale dei seguenti infinitesimi per $x \to 0$:

a) $e^{(e^x)} - e$
b) $2e^x(1 - \cos x) - x^2(1 + x)$
c) $\operatorname{sen}(x^\alpha) - (\operatorname{sen} x)^\alpha$, dove $\alpha > 0$ è un parametro
d) $2\operatorname{sen}^2\big(\log(1 + x)\big)\log(\cos x) + x^{4\alpha}$, con $\alpha > 0$.

Esercizio 7.44 : determinate per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ l'infinitesimo per $x \to 0$

$$1 - (a \operatorname{sen} x + e^x)^b (1 + x^2)$$

risulta dell'ordine massimo possibile; determinate poi tale ordine e la parte principale corrispondente.

Esercizio 7.45 : determinate i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per cui esiste finito il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} + e^x - 2}{x^2}.$$

Esercizio 7.46 : risolvete di nuovo l'esercizio 7.16 e i successivi, usando però il corollario 7.28.

Esercizio 7.47 : sia f una funzione derivabile in un intervallo I, e tale che esiste finita la derivata seconda $f''(x_0)$ in un punto x_0 interno all'intervallo I; provate che

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0).$$

Esercizio 7.48 : sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione pari, derivabile due volte per $x = 0$; provate che la funzione $f(\sqrt{x})$ è derivabile in $x = 0$.

Esercizio 7.49 : sia $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte e tale che per ogni x

$$|f(x)| \le C_0, \qquad |f''(x)| \le C_2;$$

provate che allora $|f'(x)| \le 2\sqrt{C_0 C_2}$.

Esercizio 7.50 : sia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte e tale che

$$f(-1) = f(1) = 0, \qquad |f''(x)| \le C \quad \forall x;$$

provate che allora $|f(x)| \le C/2$.

Esercizio 7.51 : sia $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione limitata, derivabile due volte e tale che $\lim_{x\to+\infty} f''(x) = 0$; provate che allora anche f' ha limite per $x \to +\infty$, e questo limite vale zero.

Esercizio 7.52 : sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che

$$f(a) = 0, \qquad |f'(x)| \le |f(x)| \quad \forall x;$$

provate che f vale costantemente zero.

Esercizio 7.53 : sia $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty[$ una funzione derivabile due volte, e $\alpha > 1/2$; provate che la funzione $\big(f(x)\big)^\alpha$ è derivabile. È ancora vero quanto asserito, nel caso $\alpha = 1/2$?

Esercizio 7.54 : svolgendo tutti i calcoli, determinate i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni, fino all'ordine indicato e nel punto x_0 indicato:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$, ordine 5, con $x_0 = \pi$
b) $f(x) = x - \cos(x^2)$, ordine 4, con $x_0 = \sqrt{\pi/2}$
c) $f(x) = e^{2x-1}$, ordine 3, con $x_0 = 1$.

Esercizio 7.55 : usando gli sviluppi noti, scrivete il polinomio di Taylor di punto iniziale l'origine delle seguenti funzioni, fino all'ordine indicato:

a) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, ordine 6
b) $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$, ordine 8
c) $f(x) = \log^2(1+x^2)$, ordine 8
d) $f(x) = e^x \operatorname{sen} x \cos x$, ordine 4
e) $f(x) = \operatorname{sen}^4 x$, ordine 8
f) $f(x) = (\cos x)^x$, ordine 5
g) $f(x) = (e^x + \cos x)^2$, ordine 3
h) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$, ordine 3
i) $f(x) = \cos(\operatorname{sen}^2 x)$, ordine 6
j) $f(x) = \sqrt{1+\operatorname{sen} x}$, ordine 3 .

Esercizio 7.56 : ricordando l'esercizio 7.12, dimostrate che per le funzioni pari i polinomi di Taylor (con punto iniziale $x_0 = 0$) contengono soltanto i termini con esponente pari, mentre per le funzioni dispari essi contengono soltanto i termini con esponente dispari.

Esercizio 7.57 : risolvete di nuovo gli esercizi relativi ai teoremi di de l'Hôpital (7.42 e successivi) usando ove possibile gli sviluppi di Taylor.

Esercizio 7.58 : determinate, per ogni gruppo di funzioni, quella che ha il maggiore ordine di infinitesimo per $x \to 0$:
a) $\operatorname{sen}^3 x$, $(x^2 \log x)$, $x^2 - \operatorname{sen}^2 x$, $2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(2x)$
b) $x - \operatorname{sen} x$, $x^2 - \operatorname{sen}^2 x$, $x^2 - \operatorname{sen}(x^2)$, $(x - \operatorname{sen} x)(x^2 + \operatorname{sen}^2 x)$
c) $e^x - \cos x$, $x + \operatorname{sen} x$, $x - \operatorname{sen} x$, $1 - \cos x$.

Esercizio 7.59 : determinate i valori di $a, b > 0$ per cui ha ordine massimo possibile l'infinitesimo per $x \to 0$

$$e^x - (1+x)^a + b \operatorname{sen} x .$$

Esercizio 7.60 : determinate i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per cui la funzione

$$f(x) = e^x + \alpha \operatorname{sen} x + \beta \cos x$$

risulta un infinitesimo per $x \to 0$ dell'ordine massimo possibile; determinate poi per tali α, β l'ordine e la parte principale di $f(x)$.

Esercizio 7.61 : dimostrate che la funzione $|x|^\alpha$ risulta convessa su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $\alpha \geq 1$.

Esercizio 7.62 : determinate quali tra le seguenti funzioni sono convesse su tutto $\mathbb{R}$:
a) $f(x) = 1 + x^2 + |x|$
b) $f(x) = e^{|x|}$
c) $f(x) = e^{(x^2)}$
d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Esercizio 7.63 : determinate il più grande intervallo contenente il punto $x_0 = 5$ su cui risulta convessa la funzione $f(x) = (x^2-3)^2$.

Esercizio 7.64 : siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa crescente; dimostrate che la funzione composta $\varphi \circ f$ è convessa.

Esercizio 7.65 : sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente convessa; dimostrate che l'equazione $f(x) = 0$ non può avere più di due soluzioni.

Esercizio 7.66 : dimostrate che la funzione $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2(x+2)^2 - \log(1+x)$ è strettamente convessa. Deducetene che l'equazione

$$x^2(x+2)^2 = \log(1+x)$$

ha una e una sola soluzione in $]0, +\infty[$.

Esercizio 7.67 : sia f una funzione convessa su $\mathbb{R}$; dimostrate che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$2f(x) \leq f(2x) + f(0) .$$

Esercizio 7.68 : sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione convessa, non negativa, con $f(0) = 0$; dimostrate che f è debolmente crescente nell'intervallo $[0, +\infty[$; se invece $f(x) > 0$ per $x > 0$ allora f è strettamente crescente.

Esercizio 7.69 : sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa; dimostrate che esistono sia il limite $\lim_{x \to +\infty} f'(x)$ che il limite $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Esercizio 7.70 : sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa; dimostrate che esiste il limite $\lim_{x \to +\infty} (f(x)/x)$.

Esercizio 7.71 : sia f una funzione convessa su $\mathbb{R}$; dimostrate che per ogni $s \geq 0$

$$f(s) \leq f(0) + s \lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t} .$$

Esercizio 7.72 : sia f una funzione continua su $\mathbb{R}$ e tale che

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad \forall x, y ;$$

provate che f è convessa (suggerimento: cominciate a provare la (7.20) per t potenza di $1/2$).

Esercizio 7.73 : studiate le seguenti funzioni, e tracciatene un grafico approssimativo:
a) $f(x) = x \arctan \dfrac{x-1}{x+1} - \log \sqrt{1+x^2}$
b) $f(x) = \arctan \dfrac{1}{x} + \log \sqrt{1+x^2}$
c) $f(x) = x e^{1/(1+\log x)}$
d) $f(x) = \dfrac{3 - \log x}{1 + \log^2 x} - 1$
e) $f(x) = e^{1/\log x}$
f) $f(x) = 1 - e^{-|x|/|1-x|}$

g) $f(x) = 6e^{-x} - x + 2\log(e^x - 1)$
h) $f(x) = \dfrac{1-\log x}{\log^2 x}$
i) $f(x) = x + \arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$
j) $f(x) = (xe^x)^{1/3}$
k) $f(x) = \dfrac{1-x}{1-\log(x-1)}$
l) $f(x) = \log\left(\dfrac{x}{x^2-2}\right)$
m) $f(x) = \dfrac{x}{\log^2 x}$
n) $f(x) = \dfrac{x^{-3/4}}{\sqrt{x}-1}$
o) $f(x) = \dfrac{x\log x}{(1-\log x)^2}$
p) $f(x) = \dfrac{e^x + \log x}{e^x - \log x}$
q) $f(x) = e^{1/x}$
r) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+|\operatorname{sen} x|}$
s) $f(x) = |\operatorname{sen}(e^x)|$
t) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{|\operatorname{sen} x|}$
u) $f(x) = |1+x|e^{1/x}$
v) $f(x) = e^x \log x$.

Esercizio 7.74 : determinate il numero di soluzioni in $\mathbb{R}$ delle seguenti equazioni, al variare dei parametri reali a e b:
a) $x^x + (x-(1/e))^2 = a$
b) $e^x = |ax|$
c) $3x^4 + 4ax^3 - 12a^2x^2 + 48 = 0$
d) $12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + a = 0$
e) $ae^x = x^2$
f) $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0$
g) $ax^4 + bx + 1 = 0$
h) $(2x^2 + 3x)e^x = a$.

Esercizio 7.75 : calcolate l'estremo inferiore della funzione $f(x) = x\operatorname{sen}^2 x + (1/x)$ sull' intervallo $]0,+\infty[$.

Esercizio 7.76 : calcolate l'estremo superiore della funzione $f(x) = \operatorname{sen} x \arctan x$.

Esercizio 7.77 : determinate gli estremi inferiore e superiore della funzione $f(x) = e^{-x} + \cos^2 x$ su $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, e dite se sono rispettivamente minimo e massimo.

Esercizio 7.78 : data l'equazione

$$\operatorname{sen} x = \alpha x$$

dimostrate che:
a) per ogni $\alpha \neq 0$ esiste al più un numero finito di soluzioni
b) esiste $\alpha_0 < 0$ tale che per ogni $\alpha \in [\alpha_0, 1[$ si ha almeno una soluzione $x > 0$.

Esercizio 7.79 : dimostrate che l'equazione $e^{\operatorname{sen} x} = x$ ha una e una sola soluzione.

Esercizio 7.80 : dimostrate che l'equazione $e^x = \operatorname{sen} x + \cos x$ ha infinite soluzioni su $\mathbb{R}^-$, mentre non ne ha alcuna in $\mathbb{R}^+$.

Esercizio 7.81 : dimostrate che

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2(1+x)^2} \qquad \forall x \geq 0$$

e deducetene che la successione $\{a_n\}_n$ definita per $n \geq 1$ da

$$a_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \log n$$

verifica le disuguaglianze

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq a_n \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} .$$

Esercizio 7.82 : siano $A \in]0,1[$ e $\alpha > 0$; studiate la successione definita per ricorrenza dalla formula

$$a_0 = \alpha , \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - A + a_n^2) .$$

Osservate che mediante questa successione è possibile dare una dimostrazione costruttiva dell'esistenza della radice quadrata dei numeri reali positivi.

Esercizio 7.83 : siano $A \geq 0$ e $\alpha > 0$; studiate la successione definita per ricorrenza dalla formula

$$a_0 = \alpha , \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right) .$$

Determinato il limite ℓ della successione, e posto $\varepsilon_n = a_n - \ell$, dimostrate la stima dell'errore

$$\frac{\varepsilon_{n+m}}{2\ell} \leq \left(\frac{\varepsilon_n}{2\ell}\right)^{2^m} \qquad \forall n \geq 1 .$$

Esercizio 7.84 : se k è un numero intero maggiore di 1 , adattate l'esercizio precedente al caso

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n^{k-1}}\right) ,$$

e deducetene l'esistenza della radice k-esima dei numeri reali positivi.

Esercizio 7.85 : siano $A > 1$ e $\alpha > \sqrt{A}$; studiate la successione definita per ricorrenza dalla formula

$$a_0 = \alpha\,, \qquad a_{n+1} = \frac{A + a_n}{1 + a_n}\,.$$

Esercizio 7.86 : se $\alpha \notin \{-2, -1, 0\}$, studiate la successione definita per ricorrenza dalla formula

$$a_0 = \alpha\,, \qquad a_{n+1} = -\frac{2}{2 + a_n}\,.$$

Appendice al capitolo 7

Appendice 7.1 - Differenziale e derivata in spazi normati

Analogamente a quanto fatto per le funzioni reali di variabile reale, si può definire la nozione di differenziabilità per le funzioni reali definite in uno spazio normato X (☞ appendice 4.3). Se f è una funzione reale definita su un sottoinsieme A di uno spazio normato X , e $x_0 \in A$ è un punto di accumulazione di A , si dice che f è differenziabile in x_0 se esiste un'applicazione lineare e continua $L : X \to \mathbb{R}$ (va notato che se $X = \mathbb{R}^n$ tutte le applicazioni lineari e continue $L : X \to \mathbb{R}$ sono date da $L(x) = \alpha \cdot x$ con $\alpha \in \mathbb{R}^n$) tale che l'infinitesimo $f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)$ sia di ordine superiore al primo, per $x \to x_0$, cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0\,.$$

L'applicazione lineare L viene chiamata differenziale di f nel punto x_0 , e viene indicata abitualmente con il simbolo $df(x_0)$.

Analogamente, chiameremo derivata di f nel punto x_0 lungo la direzione $v \in X$ il valore del limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

se questo esiste, finito o infinito che sia. Tale limite si indica con uno dei simboli

$$f'_v(x_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial v}(x_0), \qquad D_v f(x_0)\,.$$

Diremo poi che f è derivabile in x_0 lungo la direzione $v \in X$ se la derivata $f'_v(x_0)$ esiste finita.

In maniera analoga a quanto fatto nel caso $X = \mathbb{R}$ si può vedere che se f è differenziabile in x_0 allora f è continua in x_0, è derivabile in x_0 lungo ogni direzione v e $f'_v(x_0) = df(x_0)(v)$; viceversa, se $X \neq \mathbb{R}$, si possono trovare esempi di funzioni derivabili lungo ogni direzione ma non differenziabili, e anzi neppure continue!

Esempio : la funzione definita su $\mathbb{R}^2$ da

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è derivabile in $(0,0)$ lungo ogni direzione v, ma posto $P_n = (1/n, 1/n^2)$ si ha

$$P_n \to (0,0)\,, \qquad f(0,0) = 0\,, \qquad f(P_n) \equiv \frac{1}{2}\,,$$

dunque f non è continua nell'origine (☞ appendice 6.1).

Un esempio più drastico si ottiene con il quadrato della funzione precedente, che naturalmente è ancora discontinua, ma nell'origine ha derivata nulla in ogni direzione v.

Comunque, come abbiamo già detto nella sezione 7.1, non è nostra intenzione sviluppare qui il calcolo differenziale per funzioni di più variabili o definite in spazi normati; tali argomenti saranno trattati dettagliatamente nel corso di Analisi matematica II.

Appendice 7.2 - Derivate in senso complesso

Abbiamo visto (☞ appendice 6.1) che per una funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, o più in generale per una funzione $f : A \to \mathbb{C}$ con A aperto di $\mathbb{C}$, è possibile definire le nozioni di limite in un punto e di continuità. Dato che $\mathbb{C}$ è uno spazio normato, potremmo anche pensare di definire il differenziale e le derivate direzionali di f come visto nell'appendice 7.1; tuttavia, la struttura algebrica di $\mathbb{C}$ permette di introdurre un'altra nozione di derivata.

Definizione : *se A è un aperto di $\mathbb{C}$ ed $f : A \to \mathbb{C}$, diciamo che f è derivabile in senso complesso in un punto $z_0 \in A$ se esiste il limite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,;$$

in tal caso, il valore del limite si dice derivata (in senso complesso) di f in z_0 e si indica con il simbolo $f'(z_0)$. Se la funzione f è derivabile in ogni punto di A, si dice che è olomorfa in A.

Analogamente a quanto visto per le funzioni di variabile reale, una funzione derivabile in senso complesso è continua, e valgono le usuali proprietà di somma, prodotto e composizione. Va osservato tuttavia che la nozione di olomorfia è estremamente più restrittiva della derivabilità in senso reale o della differenziabilità: basti pensare che una funzione che è derivabile una volta in senso complesso su A è automaticamente derivabile infinite volte su A, anzi è analitica (☞ appendice 9.5). Inoltre, è sufficiente conoscere i valori di una funzione olomorfa f in un aperto (comunque piccolo) A' perché f sia univocamente individuata su tutto il dominio (connesso) A sul quale è olomorfa.

Appendice 7.3 - Sui punti di derivabilità di una funzione

Va notato che l'informazione che una funzione f è derivabile in un punto non dice nulla sulla regolarità di f vicino a quel punto: la funzione potrebbe tranquillamente non essere continua altro che in quel punto stesso.

Esempio : la funzione $f(x) = x^2 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ vale 0 sugli irrazionali e x^2 sui razionali, dunque è continua solo nell'origine; come si vede facilmente scrivendo il rapporto incrementale, f è anche derivabile nell'origine, con derivata zero.

D'altra parte, il sapere che una funzione è continua non fornisce alcuna informazione sulla sua derivabilità. Sebbene questo sembri ovvio, le funzioni continue più comuni risultano derivabili in pressoché tutti i punti del dominio, e viene da chiedersi se possa essere vero un risultato del tipo "se f è continua in un intervallo, allora è per forza derivabile salvo al più in un numero finito di punti". Per esercizio, potete trovare da soli un controesempio a questo enunciato, costruendo una funzione che non è derivabile (ha un punto angoloso) in una successione di punti distinti. Rimane aperta la possibilità di correggere l'enunciato precedente sostituendo "un numero finito" con "un'infinità numerabile", oppure, per andare alla richiesta minima, così: "se f è continua in un intervallo, allora è per forza derivabile almeno in un punto". Che anche questo sia falso è piuttosto sorprendente, e lo dimostreremo facendo uso della teoria delle serie (➡ appendice 9.9), definendo una funzione che è continua su tutto $\mathbb{R}$, ma non è derivabile in alcun punto.

Appendice 7.4 - Regolarità della funzione inversa

Il ragionamento fatto nel testo a proposito della regolarità delle derivate della funzione inversa si può estendere: osserviamo intanto che dalla formula di Leibniz (7.4) si ottiene immediatamente che il prodotto di due funzioni di classe C^n è ancora di classe C^n.

Proposizione A7.1 : *se due funzioni f e g sono di classe C^n lo è anche la loro composizione.*

DIMOSTRAZIONE : ragioniamo per induzione: il risultato è vero per $n = 0$, e se le due funzioni sono di classe C^{n+1} allora la derivata della composizione $f \circ g$ è

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g' .$$

Ma f' è di classe C^n e anche g lo è (dato che è C^{n+1}), quindi per l'ipotesi di induzione $f' \circ g$ è di classe C^n; dato che g' è anch'essa C^n, il prodotto di queste (che è poi la derivata di $f \circ g$) ha derivata n-esima continua, come volevamo dimostrare. ■

Allora, se f è di classe C^n ed è strettamente monotona, la sua inversa è anch'essa di classe C^n: infatti (a parte il caso banale $n = 0$) ha derivata

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} ,$$

e abbiamo già visto che questa derivata è almeno continua (perché f' è almeno di classe C^0). Se $f \in C^n$ con $n \geq 1$, sia k il più grande intero tale che $f^{-1} \in C^k$: se supponiamo per assurdo che sia $k < n$, abbiamo per la proposizione precedente che $(f' \circ f^{-1}) \in C^k$, ed essendo la funzione $1/x$ di classe C^∞ la composizione $1/(f' \circ f^{-1})$, che è $(f^{-1})'$, è di classe C^k. Ma allora $f^{-1} \in C^{k+1}$, che è assurdo.

Appendice 7.5 - Massimi locali di una funzione

Una funzione definita su un intervallo può avere più punti di massimo locale, ma vale il prossimo risultato.

Proposizione A7.2 : *sia f una funzione continua definita su un intervallo I, e tale che ogni punto di I è di massimo locale per f; allora f è costante.*

DIMOSTRAZIONE : supponiamo che f non sia costante; ciò significa, eventualmente considerando la funzione $f(-x)$ al posto di $f(x)$, che esistono due punti $a, b \in I$ tali che $a < b$ e che $f(a) < f(b)$. Grazie alla proposizione A6.8, l'insieme

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) \leq f(a)\}$$

ha massimo in un punto $a' < b$, e inoltre per definizione di massimo

$$f(x) > f(a) = f(a') \qquad \forall x \in]a', b] .$$

Ma allora il punto a' non è di massimo locale. ■

Osservazione : questo risultato è falso se non si assume che f sia continua: infatti per la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

ogni punto è di massimo locale.

Appendice 7.6 - Unicità e regolarità del punto di Lagrange

Come per il teorema di Rolle, anche il punto z del teorema di Lagrange non è necessariamente unico; se però per qualche motivo sappiamo che la funzione f' è iniettiva (ad esempio perché è strettamente monotona, ☞ sezione 7.6), allora il punto z è unico. Ad esempio, per la funzione e^x la cui derivata e^x è strettamente crescente, abbiamo che

$$\forall a < b, \ \exists! z \in]a, b[: \qquad \frac{e^b - e^a}{b - a} = e^z ,$$

e tale punto è dato da

$$z = \log\left(\frac{e^b - e^a}{b - a}\right) .$$

Questa situazione si può generalizzare, anche alla formula di Taylor con il resto di Lagrange (☞ teorema 7.31).

Proposizione A7.3 : *sia f una funzione derivabile n volte in un intorno di un punto x_0, e sia $P_{n-1}(x)$ il suo polinomio di Taylor di ordine $n - 1$ centrato in x_0. Se la funzione $f^{(n)}$ è continua e strettamente monotona a destra* [*sinistra*] *di x_0, allora per ogni x in un intorno destro* [*sinistro*] *di x_0 esiste un unico punto $z(x)$ tra x_0 e x tale che*

$$f(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(z(x))}{n!}(x - x_0)^n ;$$

inoltre la funzione $z(x)$ è continua.

DIMOSTRAZIONE : l'esistenza del punto $z(x)$ segue dal teorema 7.31, e le altre affermazioni si ottengono scrivendo

$$f^{(n)}(z(x)) = n!\,\frac{f(x)-P_{n-1}(x)}{(x-x_0)^n}\,;$$

per la stretta monotonia (e quindi l'iniettività) di $f^{(n)}$ il punto $z(x)$ è unico, e

$$z(x) = (f^{(n)})^{-1}\Big(n!\,\frac{f(x)-P_{n-1}(x)}{(x-x_0)^n}\Big)\,,$$

che è una funzione continua per il teorema 6.34. ■

Appendice 7.7 - Alcune disuguaglianze fra potenze

Fissato $\alpha > 0$, consideriamo per $t \geq 1$ la funzione

$$f_\alpha(t) = \frac{(1+t)^\alpha}{1+t^\alpha}\,:$$

si ha

$$f'_\alpha(t) = \alpha\frac{(1+t)^{\alpha-1}(1-t^{\alpha-1})}{(1+t^\alpha)^2}\,,$$

per cui dalla proposizione 7.19 si ottiene che:

a) se $\alpha \leq 1$ la funzione f_α è monotona debolmente crescente, per cui

$$2^{\alpha-1} = f_\alpha(1) \leq f_\alpha(t) \leq \lim_{t\to+\infty} f_\alpha(t) = 1\,; \tag{A7.1}$$

b) se $\alpha \geq 1$ la funzione f_α è monotona debolmente decrescente, per cui

$$2^{\alpha-1} = f_\alpha(1) \geq f_\alpha(t) \geq \lim_{t\to+\infty} f_\alpha(t) = 1\,. \tag{A7.2}$$

Le disuguaglianze precedenti ci permettono di dimostrare che per ogni $x, y > 0$ si ha

$$2^{\alpha-1}(x^\alpha + y^\alpha) \leq (x+y)^\alpha \leq x^\alpha + y^\alpha \qquad \text{se } \alpha \leq 1\,, \tag{A7.3}$$

mentre si ha

$$x^\alpha + y^\alpha \leq (x+y)^\alpha \leq 2^{\alpha-1}(x^\alpha + y^\alpha) \qquad \text{se } \alpha \geq 1\,. \tag{A7.4}$$

Infatti, preso ad esempio $y \geq x$, si ha dalla (A7.1) se $\alpha \leq 1$

$$2^{\alpha-1} \leq \frac{(1+y/x)^\alpha}{1+(y/x)^\alpha} \leq 1\,,$$

da cui segue immediatamente la (A7.3). Analogamente, se $\alpha \geq 1$, dalla (A7.2) si ha

$$1 \leq \frac{(1+y/x)^\alpha}{1+(y/x)^\alpha} \leq 2^{\alpha-1}\,,$$

da cui segue immediatamente la (A7.4). In particolare, prendendo $\alpha = 1/2$ e $\alpha = 2$ si ha per ogni $x, y > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \leq \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

$$x^2+y^2 \leq (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)\,.$$

Appendice 7.8 - La proprietà di Darboux delle funzioni derivate

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile, non è detto che la funzione derivata $f' : I \to \mathbb{R}$ risulti continua.

Esempio : la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,\mathrm{sen}(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

risulta derivabile in ogni punto (per la derivata in zero occorre calcolare il limite del rapporto incrementale), con derivata

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\,\mathrm{sen}(1/x) - \cos(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

che, come si vede subito, non è una funzione continua nell'origine: osserviamo che in questo caso i limiti destro e sinistro della derivata non esistono, quindi non possiamo applicare il corollario 7.28.

Tuttavia, le funzioni derivate $f' : I \to \mathbb{R}$ hanno in comune con le funzioni continue la proprietà dei valori intermedi (detta anche proprietà di Darboux), cioè il fatto seguente.

Proposizione A7.4 : *se* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *è una funzione derivabile e se* $f'(a) < k < f'(b)$, *allora esiste almeno un punto* $x \in]a,b[$ *tale che* $f'(x) = k$.

DIMOSTRAZIONE : consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - kx$; si ha che g è derivabile in $[a,b]$ e quindi in particolare essa è continua in $[a,b]$. Per il teorema di Weierstrass (☞ teorema 6.35) esiste almeno un punto x_0 di minimo per g in $[a,b]$. Siccome è $g'(a) = f'(a) - k < 0$, il punto a è di massimo locale stretto (☞ corollario 7.12), quindi non può essere $x_0 = a$, e siccome $g'(b) = f'(b) - k > 0$ non può essere nemmeno $x_0 = b$. Dunque x_0 è interno all'intervallo $[a,b]$ e necessariamente si ha (☞ proposizione 7.10) $g'(x_0) = 0$ cioè $f'(x_0) = k$. ■

Possiamo riformulare questa proposizione analogamente a quanto fatto nel caso del teorema dei valori intermedi.

Corollario A7.5 : *se f è una funzione derivabile su un intervallo I allora $f'(I)$ è un intervallo.*

Notiamo che l'esempio (7.10) del testo avrebbe potuto più facilmente essere trattato con il corollario precedente, che esclude subito che la funzione data dalla formula (7.10) possa essere una derivata.

Ci si potrebbe chiedere se la proprietà di Darboux sia caratteristica delle derivate, cioè se ogni funzione che manda intervalli in intervalli sia la derivata di qualche funzione; questo non è vero, come segue dal prossimo risultato.

Proposizione A7.6 : *l'insieme delle funzioni f definite su un certo intervallo I, che hanno la proprietà che per ogni intervallo $J \subseteq I$ l'immagine $f(J)$ è un intervallo, non è uno spazio vettoriale.*

DIMOSTRAZIONE : basta osservare che per ogni $a \in [-1,1]$ la funzione

$$f_a(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ a & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

verifica questa proprietà, ma la differenza $f_1 - f_0$ è la funzione

$$\begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

che non ha questa proprietà. ■

Appendice 7.9 - Una funzione con tutte le derivate nulle in un punto

Non è difficile mostrare, ☞ formula (7.14), che per ogni valore di $k \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$\lim_{x \to 0^+} (x^{-k} e^{-1/x}) = 0 \; : \tag{A7.5}$$

infatti, sostituendo $y = 1/x$, il limite precedente si trasforma in

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{y^k}{e^y} \, ,$$

e sappiamo che questo vale zero; in particolare, ne deduciamo che se P è un qualunque polinomio si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \left(P(x^{-1}) e^{-1/x} \right) = 0 \, . \tag{A7.6}$$

Consideriamo ora la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \text{:} \end{cases} \tag{A7.7}$$

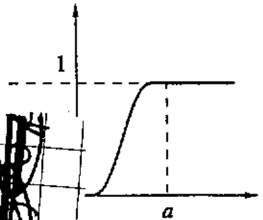
questa è continua, e per $x > 0$ ha derivata uguale a $x^{-2} e^{-1/x}$; dato che questa funzione ha limite zero per $x \to 0^+$ grazie alla (A7.5), possiamo applicare il corollario 7.28 e ottenere che f è derivabile anche in zero, con derivata nulla (☞ figura A7.1). Allora

$$f'(x) = \begin{cases} x^{-2} e^{-1/x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0; \end{cases}$$

ma la derivata seconda per $x > 0$ è $(-2x^{-3} + x^{-4}) e^{-1/x}$, e possiamo ripetere il ragionamento: per induzione, si dimostra immediatamente che ciascuna delle derivate di f ha l'espressione

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} P_k(x^{-1}) e^{-1/x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

dove P_k è un opportuno polinomio di grado $2k$. Dunque la funzione f è derivabile infinite volte, e in zero ha tutte le derivate nulle; ne segue in particolare che il suo polinomio di Taylor di qualsiasi ordine è il polinomio nullo, e dato che lo stesso si applica alla funzione $Mf(x)$ con M qualsiasi, vediamo come il polinomio di Taylor non sia necessariamente una "buona" approssimazione di una funzione, neanche se l'ordine del polinomio va all'infinito.



ınzione $\varphi_a(x)$ con $a = 0.8$

a costruzione di una "funzione
fissiamo un numero positivo a
ıesta è positiva, perché il primo
iva anche per $x \leq 0$ perché in
Allora si tratta di una funzione
ınque è di classe C^∞ anche la

,

dato che il denominatore non ... ione φ_a è nulla per $x \leq 0$, vale 1 per $x \geq a$ e assume valori tra zero e uno per $0 < x < a$, dunque raccorda in modo liscio (cioè C^∞) le due quote 0 e 1 (☞ figura A7.2); osserviamo che $\varphi'_a(a/2) = 2/a$.

Appendice 7.10 - Sviluppi di somme, prodotti e composizioni

Si verifica facilmente che se due funzioni f e g hanno sviluppi di Taylor (ad esempio con $x_0 = 0$) rispettivamente

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + o(x^n)\,,$$

allora la funzione $f + g$ ha lo sviluppo

$$(f+g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n + o(x^n)\,.$$

Per prodotti e composizioni valgono regole analoghe: più precisamente vedremo delle formule che ci permettono di scrivere gli sviluppi della funzione prodotto fg e della funzione composta $f \circ g$, una volta noti gli sviluppi di f e di g; le dimostrazioni, che vanno fatte per induzione, sono lasciate per esercizio.

Per la funzione prodotto fg si ottiene lo sviluppo

$$(fg)(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + o(x^n)\,,$$

dove i coefficienti c_k sono dati da

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\,.$$

In particolare,

$$c_0 = a_0b_0$$
$$c_1 = a_0b_1 + a_1b_0$$
$$c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$$
$$c_3 = a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0\,,$$

così che ad esempio si ha, fino all'ordine 3,

$$e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\,.$$

Per induzione su k si ottiene allora che lo sviluppo di f^k è

$$f^k(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots + d_nx^n + o(x^n)\,,$$

dove i coefficienti d_n sono dati da

$$d_n = \sum_{j_1+\cdots+j_k=n} a_{j_1} \cdots a_{j_k}\,.$$

In particolare,

$$d_0 = a_0^k$$
$$d_1 = ka_0^{k-1}a_1$$
$$d_2 = ka_0^{k-1}a_2 + \frac{k(k-1)}{2}a_0^{k-2}a_1^2$$
$$d_3 = ka_0^{k-1}a_3 + k(k-1)a_0^{k-2}a_1a_2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6}a_0^{k-3}a_1^3\,;$$

ad esempio si ha, fino all'ordine 7,

$$\operatorname{sen}^3 x = x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{13}{120}x^7 + o(x^7)\,.$$

Per quanto riguarda la funzione composta $f \circ g$, supponendo che $g(0) = 0$, cioè $b_0 = 0$, si ricava lo sviluppo

$$(f \circ g)(x) = e_0 + e_1 x + e_2 x^2 + \cdots + e_n x^n + o(x^n)\,,$$

dove $e_0 = a_0$ e i coefficienti e_n per $n \geq 1$ sono dati da

$$e_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_{i,n}$$

con

$$\alpha_{i,n} = \sum_{k_1+\cdots+k_i=n} b_{k_1} \cdots b_{k_i}\,.$$

In particolare,

$$\begin{aligned} e_1 &= a_1 b_1 \\ e_2 &= a_1 b_2 + a_2 b_1^2 \\ e_3 &= a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3\,; \end{aligned}$$

ad esempio si ha, fino all'ordine 3,

$$\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^n)\,.$$

Appendice 7.11 - Irrazionalità del numero di Nepero "e"

Mediante la formula di Taylor con resto di Lagrange si può dimostrare che il numero e è irrazionale, e vedremo più avanti (☞ appendice 8.12) che è trascendente. Infatti, se per assurdo fosse $e = p/q$ con $p, q \in \mathbb{N}$, dalla formula di Taylor per la funzione e^x si avrebbe, per $x = 1$

$$\frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^z}{(n+1)!}$$

con $z \in]0,1[$. Preso $n \geq q$ con $n > 2$, se si moltiplicano entrambi i membri dell'uguaglianza precedente per $n!$ si ottiene

$$\frac{p}{q}n! = \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)n! + \frac{e^z}{(n+1)}\,.$$

Nell'uguaglianza precedente si vede immediatamente che il primo membro è un numero intero, come pure il primo termine al secondo membro. Dunque, anche $e^z/(n+1)$ deve essere intero; ciò è però impossibile in quanto da $n > 2$ segue

$$0 < \frac{e^z}{(n+1)} \leq \frac{e}{(n+1)} < \frac{3}{(n+1)} < 1\,.$$

Osserviamo che nella stima (7.17) del resto di Lagrange abbiamo maggiorato e^z con $e^1 = e$, dato che non sapevamo dove fosse il punto $z \in]0,1[$; questo porta a una brutta maggiorazione dell'errore, specialmente se anziché per $x = 1$ stiamo valutando e^x con x molto grande: il punto z sta tra zero e x, e siamo costretti a maggiorare il termine e^z con il grosso numero e^x. Mostriamo invece che, quando $n \to +\infty$, il punto z, che dipende da n e verrà pertanto indicato con z_n, tende a zero (quindi il termine e^{z_n} è più vicino ad 1 che ad e^x). Abbiamo

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{z_n} x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{z_{n+1}} x^{n+1}}{(n+1)!}\,,$$

dunque

$$\frac{e^{z_n} x^n}{n!} = \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{z_{n+1}} x^{n+1}}{(n+1)!}\,,$$

da cui subito

$$e^{z_n} = 1 + \frac{e^{z_{n+1}} x}{n+1}\,.$$

Se $x > 0$ (l'altro caso è analogo) abbiamo $0 < z_k < x$, quindi

$$1 \leq e^{z_n} \leq 1 + \frac{x e^x}{n+1}\,;$$

prendendo il logaritmo (che è una funzione strettamente crescente), grazie a (5.39)

$$0 \leq z_n \leq \log\Bigl(1 + \frac{x e^x}{n+1}\Bigr) \leq \frac{x e^x}{n+1}\,,$$

dunque $z_n \to 0$ e abbiamo anche dato una stima di z_n.

Appendice 7.12 - Disuguaglianze di convessità

Dalla definizione di funzione convessa si ricava che se f è una funzione convessa su un intervallo I, allora dati n numeri $t_i \in [0,1]$ tali che $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ ed n punti $x_i \in I$ si ha la disuguaglianza

$$f\Bigl(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\Bigr) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)\,. \tag{A7.8}$$

La dimostrazione si ottiene facilmente per induzione: infatti la disuguaglianza precedente non è altro che la definizione di funzione convessa se $n = 2$. Supponendo vera la disuguaglianza per un certo intero n, la dimostriamo ora per $n + 1$; dati $t_i \in [0,1]$ e $x_i \in I$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ con $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1$, poniamo $t = \sum_{i=1}^{n} t_i$, di modo che si ha $t+t_{n+1}=1$. Possiamo evidentemente supporre $t\neq 0$ (altrimenti la disuguaglianza risulterebbe banale): la definizione di convessità fornisce quindi

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n+1}t_ix_i\Big)=f\Big(t_{n+1}x_{n+1}+t\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{t}x_i\Big)\le t_{n+1}f(x_{n+1})+tf\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{t}x_i\Big)$$
$$\le t_{n+1}f(x_{n+1})+t\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{t}f(x_i)\Big)=\sum_{i=1}^{n+1}t_if(x_i)\,,$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dall' ipotesi induttiva in quanto $\sum_{i=1}^n t_i/t=1$.

Vedremo più avanti (☞ appendice 8.6) che la (A7.8) è un caso speciale di una disuguaglianza più generale valida per le funzioni convesse.

Dalla disuguaglianza (A7.8) seguono le disuguaglianze tra media armonica, media geometrica e media aritmetica. Se $x_i>0$ per $i=1,\dots,n$ sono numeri reali positivi, posto

$$A(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad \text{(media aritmetica)}$$

$$G(x_1,\dots,x_n)=\Big(\prod_{i=1}^{n}x_i\Big)^{1/n} \qquad \text{(media geometrica)}$$

$$H(x_1,\dots,x_n)=\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\Big)^{-1} \qquad \text{(media armonica)}$$

si hanno le disuguaglianze

$$H(x_1,\dots,x_n)\le G(x_1,\dots,x_n)\le A(x_1,\dots,x_n)\,. \tag{A7.9}$$

Per dimostrare la (A7.9) poniamo $z_i=\log x_i$ e applichiamo la (A7.8) con $f(x)=e^x$, che è convessa su tutto $\mathbb{R}$: otteniamo allora

$$G(x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}e^{z_i/n}=\exp\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i}{n}\Big)\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp(z_i)=A(x_1,\dots,x_n)\,,$$

che prova la seconda disuguaglianza in (A7.9). In tal modo anche la prima disuguaglianza risulta provata, in quanto

$$H(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{A(1/x_1,\dots,1/x_n)}\le\frac{1}{G(1/x_1,\dots,1/x_n)}=G(x_1,\dots,x_n)\,.$$

Infine, mostriamo una importante disuguaglianza.

Proposizione (disuguaglianza di Young) A7.7 : *se $p,q>1$ sono due numeri tali che*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

allora per ogni $x,y\ge 0$

$$xy\le\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q\,. \tag{A7.10}$$

Dimostrazione : possiamo limitarci al caso $x,y>0$, dato che negli altri casi la disuguaglianza è ovvia; allora per la convessità dell'esponenziale possiamo scrivere

$$xy=e^{\log(xy)}=e^{\log x+\log y}=e^{\frac{1}{p}\log x^p+\frac{1}{q}\log y^q}\le\frac{1}{p}e^{\log x^p}+\frac{1}{q}e^{\log y^q}=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q\,,$$

come dovevamo dimostrare. ■

Osservazione : questa disuguaglianza si generalizza, usando per l'esponenziale la proprietà (A7.8), nella seguente:

$$\left.\begin{array}{l} p_i>1\quad\forall i\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}=1\\ x_i\ge 0\quad\forall i\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\prod_{i=1}^{n}x_i\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}x_i^{p_i}\,.$$

Appendice 7.13 - Ulteriori proprietà delle funzioni convesse

La nozione di funzione convessa può facilmente essere estesa a funzioni di più variabili.

Definizione : *sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$; un insieme $A\subset V$ si dice convesso se*

$$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A,\ \forall t\in[0,1],\qquad t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y}\in A\,.$$

Una funzione reale f definita su un sottoinsieme convesso A di V si dice convessa se

$$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A,\ \forall t\in[0,1],\qquad f\big(t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y}\big)\le tf(\boldsymbol{x})+(1-t)f(\boldsymbol{y})\,.$$

Notiamo in particolare che la definizione di intervallo, ☞ formula (3.16), coincide con quella di sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}$. È facile vedere che un insieme A è convesso se e solo se

$$[t_1,\dots,t_n\ge 0\,,\ \sum_{i=1}^{n}t_i=1\,,\ \boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n\in A]\ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^{n}t_i\boldsymbol{x}_i\in A\,,$$

e che una funzione f è convessa se e solo se

$$[t_1,\dots,t_n\ge 0\,,\ \sum_{i=1}^{n}t_i=1\,,\ \boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n\in A]\ \Rightarrow\ f\Big(\sum_{i=1}^{n}t_i\boldsymbol{x}_i\Big)\le\sum_{i=1}^{n}t_i\,f(\boldsymbol{x}_i)\,.$$

Molte delle proprietà delle funzioni convesse di una variabile si estendono, o hanno un analogo, in più variabili.

Vediamo ora una dimostrazione alternativa del corollario 7.36, più geometrica di quella presentata nel testo.

DIMOSTRAZIONE DEL COROLLARIO 7.36 : dato che x_0 è interno a I , possiamo prendere due punti $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_0 < x_2$; allora (☞ teorema 7.32)

$$f(x) \leq r_{x_1,x_0}(x) \qquad \forall x \in [x_1, x_0] \, ,$$

ma d'altra parte $[x_1, x_0[\cap [x_0, x_2] = \varnothing$, quindi

$$f(x) \geq r_{x_0,x_2}(x) \qquad \forall x \in [x_1, x_0[\, .$$

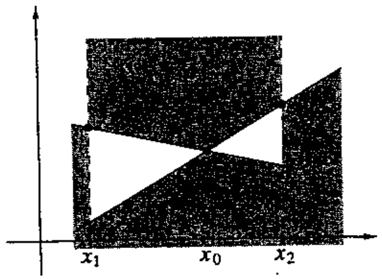


Fig. A7.3 : dimostrazione geometrica del corollario 7.36

Unendo le due disuguaglianze precedenti abbiamo in $[x_1, x_0[$

$$r_{x_0,x_2}(x) \leq f(x) \leq r_{x_1,x_0}(x) \ :$$

tenendo presente che le funzioni $r_{x_0,x_2}(x)$ e $r_{x_1,x_0}(x)$ sono continue, e che per $x = x_0$ entrambe valgono $f(x_0)$, otteniamo per il teorema dei carabinieri (☞ teorema 6.5)

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \, .$$

Un ragionamento analogo prova che anche il limite da destra di f vale $f(x_0)$. ■

Osservazione : notiamo esplicitamente che se x_0 non è interno a I , ma è un suo estremo, anche se f non risulta necessariamente continua abbiamo almeno una disuguaglianza; con le notazioni precedenti, se x_0 è l'estremo destro di I , avremmo solo

$$f(x) \leq r_{x_1,x_0}(x) \qquad \forall x \in [x_1, x_0] \, ,$$

e quindi in particolare

$$\limsup_{x \to x_0^-} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} r_{x_1,x_0}(x) = f(x_0) \, , \tag{A7.11}$$

e analogamente, se x_0 è l'estremo sinistro di I ,

$$\limsup_{x \to x_0^+} f(x) \leq f(x_0) \, , \tag{A7.12}$$

dunque (☞ appendice 6.10) una funzione convessa su un intervallo I è semicontinua superiormente su tutto I , e continua all'interno.

Osservazione : per le funzioni di più variabili vale ancora il teorema di continuità all'interno del dominio, e nella dimostrazione si usano dei coni anziché degli angoli fra rette.

Per quanto riguarda la funzione rapporto incrementale, possiamo precisare la proposizione 7.34.

Proposizione A7.8 : *sia f convessa sull'intervallo I , e siano $x_0, x_1, y_0, y_1 \in I$, con $x_0 < x_1$ e $y_0 < y_1$; allora*

$$[x_0 \leq y_0 \ \text{ e } \ x_1 \leq y_1] \quad \Rightarrow \quad R_{x_0}(x_1) \leq R_{y_0}(y_1) \, .$$

Questa proposizione asserisce che se spostiamo verso destra entrambi i punti x_0 e x_1 il rapporto incrementale cresce (meglio, non decresce).

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE A7.8 : per la proposizione 7.34 abbiamo

$$R_{x_0}(x_1) \leq R_{x_0}(y_1) \, , \tag{A7.13}$$

e anche $R_{y_1}(x_0) \leq R_{y_1}(y_0)$; dato però che $R_x(y) = R_y(x)$, quest'ultima si può scrivere

$$R_{x_0}(y_1) \leq R_{y_0}(y_1) \, ,$$

che unita alla (A7.13) dà la tesi. ■

La definizione di funzione localmente lipschitziana è lievemente più generale di quella data nel testo.

Definizione : *una funzione f definita su un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ si dice localmente lipschitziana se per ogni sottoinsieme compatto K di A la restrizione $f|_K$ è lipschitziana.*

Osserviamo che la costante di Lipschitz, per una funzione che è soltanto localmente lipschitziana, dipende dal compatto K . Abbiamo visto che le funzioni convesse non sono necessariamente derivabili in tutti i punti, e (come mostra la funzione convessa x^2) non sono necessariamente lipschitziane; vale però il prossimo risultato.

Proposizione A7.9 : *se f è convessa sull'intervallo aperto I allora è localmente lipschitziana.*

DIMOSTRAZIONE : sia $K \subset I$ un compatto, e sia $a = \min K$, $b = \max K$ (che esistono per il corollario A5.13); allora $K \subset [a, b]$. I punti a e b appartengono ad I , perché appartengono a K che è contenuto in I , ma I è aperto, quindi esistono in I due punti a' e b' con $a' < a$ e $b < b'$; poniamo

$$\alpha = R_{a'}(a) \, , \qquad \beta = R_b(b') \, .$$

Allora per ogni $x, y \in [a,b]$ abbiamo (☞ proposizione A7.8)

$$\alpha \le R_x(y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \beta\,,$$

e quindi

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \le \max\{|\alpha|,|\beta|\} = \gamma\,,$$

cioè f è lipschitziana in $[a,b]$ con costante non superiore a γ. ■

Osservazione : con una dimostrazione lievemente differente (trovatela per esercizio) avremmo potuto dimostrare che la costante di Lipschitz in $[a,b]$ è il massimo tra $|f'_+(a)|$ e $|f'_-(b)|$.

Le funzioni convesse su $\mathbb{R}$ hanno pochi comportamenti possibili, nel senso del prossimo risultato.

Proposizione A7.10 : *sia f una funzione convessa su $\mathbb{R}$; allora vale una (e una sola) delle due affermazioni seguenti:*
1) *f è monotona;*
2) *f ha minimo su $\mathbb{R}$ in un punto x_0, f è monotona debolmente decrescente per $x \le x_0$ e debolmente crescente per $x \ge x_0$, ed f tende a $+\infty$ sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$.*

Dimostrazione : che ne possa valere una sola è chiaro, perché la monotonia e avere lo stesso limite, uguale a $+\infty$, per $x \to \pm\infty$ sono condizioni incompatibili (se il limite non fosse stato $+\infty$ la f avrebbe potuto essere costante senza violare le due condizioni). Supponiamo che f non sia monotona: esistono allora due punti $x_1 < x_2$ tali che $R_{x_1}(x_2) < 0$ e due punti $y_1 < y_2$ tali che $R_{y_1}(y_2) > 0$. Scegliamo due punti a, b tali che

$$a < \min\{x_1, y_1\}\,, \qquad b > \max\{x_2, y_2\}\,,$$

e calcoliamo $R_a(b)$. Possiamo supporre che sia $R_a(b) \ge 0$, dato che per l'altro caso basta scambiare $f(x)$ con $f(-x)$; allora (☞ proposizione A7.8)

$$R_a(x_1) \le R_{x_1}(x_2) < 0\,. \tag{A7.14}$$

D'altra parte

$$0 \le R_a(b) = \frac{\big(f(b)-f(x_1)\big)+\big(f(x_1)-f(a)\big)}{b-a} = R_{x_1}(b)\,\frac{b-x_1}{b-a} + R_a(x_1)\,\frac{x_1-a}{b-a}\,;$$

quindi

$$R_{x_1}(b) \ge -R_a(x_1)\,\frac{x_1-a}{b-x_1} > 0$$

grazie alla (A7.14); allora

$$R_a(x_1) < 0 \Rightarrow f(a) > f(x_1)\,, \qquad R_{x_1}(b) > 0 \Rightarrow f(b) > f(x_1)\,. \tag{A7.15}$$

La funzione f, che è continua su tutto $\mathbb{R}$, ha minimo su $[a,b]$ (☞ teorema 6.35) in un punto x_0; per (A7.15) il punto x_0 non è a né b, quindi

$$a < x_0 < b\,, \qquad f(x_0) < f(a)\,, \qquad f(x_0) < f(b)\,. \tag{A7.16}$$

Cominciamo a provare che x_0 è il punto di minimo di f su tutto $\mathbb{R}$: per $x > b$ è

$$f(x) \ge r_{x_0,b}(x) = f(x_0) + R_{x_0}(b)(x-x_0)\,, \tag{A7.17}$$

ma da (A7.16) abbiamo $R_{x_0}(b) > 0$, quindi $f(x) \ge f(x_0)$ per $x \ge b$. Dato che questo vale anche per $x_0 \le x \le b$ grazie alla minimalità di x_0, abbiamo provato che

$$f(x) \ge f(x_0) \qquad \forall x \in [x_0, +\infty[\,;$$

ragionando a sinistra di x_0, si ottiene la stessa disuguaglianza anche in $]-\infty, x_0]$, e abbiamo provato che x_0 è di minimo su tutto $\mathbb{R}$. Osserviamo poi che da (A7.17) segue

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \ge \lim_{x\to+\infty} r_{x_0,b}(x) = +\infty\,,$$

e dato che lo stesso vale per $x \to -\infty$ abbiamo provato anche la parte riguardante i limiti. Manca solo la monotonia: scegliamo due punti x, y in $[x_0, +\infty[$ con $x < y$, e proviamo che $f(x) \le f(y)$ (la parte a sinistra di x_0 è analoga, ed è lasciata per esercizio); posto $d = y - x > 0$ abbiamo per la proposizione A7.8

$$f(y) - f(x) = d\,R_x(y) \ge d\,R_{x_0}(x_0+d) = f(x_0+d) - f(x_0) \ge 0\,,$$

perché x_0 è il punto di minimo di f. ■

Eliminando la condizione sul limite, con semplici modifiche della dimostrazione potete provare (fatelo per esercizio) il prossimo risultato, che estende il precedente.

Proposizione A7.11 : *sia f una funzione convessa su un intervallo aperto I; allora vale una (e una sola) delle due affermazioni seguenti:*
1) *f è monotona;*
2) *f ha minimo su I in un punto x_0, f è monotona debolmente decrescente per $x \le x_0$ e debolmente crescente per $x \ge x_0$.*

Possiamo ora precisare le formule (A7.11) e (A7.12).

Corollario A7.12 : *se f è convessa su $[a,b]$ allora esistono finiti i limiti*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \le f(a)\,, \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) \le f(b)\,.$$

DIMOSTRAZIONE : proviamo anzitutto che i limiti esistono; f è convessa anche sull'intervallo aperto $]a,b[$, quindi per la proposizione precedente è monotona in un intorno destro di a e in un intorno sinistro di b , e l'esistenza dei limiti segue dal teorema 6.13. Allora da (A7.11) e (A7.12) abbiamo subito le disuguaglianze cercate, e ci rimane da dimostrare solo che i limiti non sono uguali a $-\infty$ (che non sono $+\infty$ è ovvio per le disuguaglianze appena dimostrate). Presi due punti $a < x_1 < x_2 < b$, per il teorema 7.32 abbiamo per ogni $x \notin [x_1,x_2]$, e quindi in particolare sia in un intorno di a che in un intorno di b ,

$$f(x) \geq r_{x_1,x_2}(x) ,$$

quindi

$$\lim_{x\to a} f(x) \geq r_{x_1,x_2}(a) > -\infty ,$$

e analogamente per b . ∎

Vediamo un facile ma fondamentale risultato.

Proposizione A7.13 : *sia* $\{f_n\}_n$ *una successione di funzioni convesse sull'intervallo* I *; allora:*
1) *se per ogni* $x \in I$ *esiste* $\ell(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ *, la funzione* ℓ *è convessa;*
2) *posto* $s(x) = \sup_n f_n(x)$ *per ogni* x *, la funzione* s *è convessa.*

DIMOSTRAZIONE : otteniamo da (7.20)

$$f_n\big(tx_0 + (1-t)x_1\big) \leq tf_n(x_0) + (1-t)f_n(x_1) ; \tag{A7.18}$$

passando al limite per $n \to +\infty$ ricaviamo subito la proprietà 1). Invece (☞ proposizione 4.2) otteniamo da (A7.18)

$$\begin{aligned} s\big(tx_0 + (1-t)x_1\big) &= \sup_n\big[f_n\big(tx_0 + (1-t)x_1\big)\big] \leq \sup_n[tf_n(x_0) + (1-t)f_n(x_1)] \\ &\leq \sup_n[tf_n(x_0)] + \sup_n[(1-t)f_n(x_1)] \\ &= t\sup_n[f_n(x_0)] + (1-t)\sup_n[f_n(x_1)] = ts(x_0) + (1-t)s(x_1) , \end{aligned}$$

e quindi la proprietà 2); va notato che abbiamo usato anche il fatto che t e $1-t$ sono numeri non negativi. ∎

Osservazione : il punto 1) della proposizione precedente vale anche per funzioni concave; invece il punto 2) vale in questa forma: se $\{f_n\}_n$ sono concave, allora la funzione $i(x) = \inf_n f_n(x)$ è concava.

Osservazione : il punto 2) della proposizione precedente vale non solo per successioni, ma per famiglie qualsiasi, finite o infinite, di funzioni convesse. In particolare, è facile vedere che 2) non vale per l'estremo inferiore di una famiglia di funzioni convesse: le funzioni x e $-x$ sono convesse, ma il minimo fra le due è la funzione $-|x|$, che non è convessa.

Osservazione : nella proposizione precedente, non si può dire nulla sui rapporti tra la stretta convessità delle funzioni ℓ e s e quella delle f_n , nel senso che una successione di funzioni strettamente convesse può avere come limite e come estremo superiore una funzione non strettamente convessa (ad esempio, se $f_n(x) = (x^2-1)/n$ sull'intervallo $[-1,1]$, si ha $\ell(x) = s(x) \equiv 0$), e una successione di funzioni non strettamente convesse può avere come limite e come estremo superiore una funzione strettamente convessa (ad esempio, se $f_n(x) = (x^2 - 1/n)^+$ su tutto $\mathbb{R}$, si ha $\ell(x) = s(x) = x^2$).

Utilizzando la proposizione precedente è possibile dimostrare una interessante conseguenza.

Proposizione A7.14 : *sia* $f :]0,b] \to [0,M]$ *una funzione tale che* $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ *; allora esiste una funzione continua* $\varphi : [0,b] \to [0,M]$ *tale che*

$$f(x) \leq \varphi(x) \quad \forall x > 0 , \qquad \varphi(0) = 0 , \qquad \varphi(b) = M .$$

DIMOSTRAZIONE : possiamo estendere f con continuità ponendo $f(0) = 0$; consideriamo l'insieme

$$\mathscr{C}_f = \{g : [0,b] \to \mathbb{R} : g \text{ concava}, \ g \geq f, \ g(b) = M\} .$$

Osserviamo che la funzione costante M appartiene a $\mathscr{C}_f$, quindi $\mathscr{C}_f$ non è vuoto; osserviamo inoltre che per ogni $g \in \mathscr{C}_f$ si ha

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \leq M , \qquad g(b) = M :$$

possiamo allora considerare la funzione φ definita ponendo per ogni $x \in [0,b]$

$$\varphi(x) = \inf\{g(x) : g \in \mathscr{C}_f\} .$$

La funzione φ verifica per ogni $x \in [0,b]$

$$0 \leq f(x) \leq \varphi(x) \leq M , \qquad \varphi(b) = M ;$$

inoltre, per l'osservazione dopo la proposizione A7.13 la funzione φ è concava, e in particolare (☞ corollario 7.36) è continua in ogni punto di $]0,b[$. Per quanto riguarda la continuità in b , osserviamo che per il corollario A7.12, applicato alle funzioni concave, abbiamo

$$\lim_{x\to b} \varphi(x) \geq \varphi(b) = M ,$$

ma dato che $\varphi(x) \leq M$ per ogni x , questa è in realtà un'uguaglianza, dunque φ è continua anche in b . Proviamo che

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0 , \tag{A7.19}$$

dimostrando così anche la continuità: infatti, dalla condizione $\varphi(x) \geq 0$ e dal corollario A7.12, applicato alle funzioni concave, abbiamo già

$$0 \leq \varphi(0) \leq \lim_{x \to 0} \varphi(x) .$$

Per provare (A7.19), dato che $\varphi(x) \geq 0$, ci basta mostrare che $\limsup_{x \to 0} \varphi(x) = 0$, anzi che

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \limsup_{x \to 0} \varphi(x) \leq \varepsilon ; \tag{A7.20}$$

fissiamo $\varepsilon > 0$: per l'ipotesi su f,

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in]0, \delta[, \qquad f(x) < \varepsilon .$$

Possiamo supporre $\delta < b$; osserviamo che la funzione affine a tratti

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon + \dfrac{M - \varepsilon}{\delta} x & \text{se } 0 \leq x \leq \delta \\ M & \text{se } \delta < x \leq b, \end{cases}$$

che congiunge con tratti rettilinei i punti $(0, \varepsilon)$, (δ, M) e (b, M), è concava, maggiore o uguale ad f, e vale M per $x = b$, dunque appartiene a $\mathscr{C}_f$: allora, per definizione della funzione φ,

$$\varphi(x) \leq g_\varepsilon(x) \qquad \forall x ,$$

e in particolare

$$\limsup_{x \to 0} \varphi(x) \leq \lim_{x \to 0} g_\varepsilon(x) = g_\varepsilon(0) = \varepsilon ,$$

e la dimostrazione è conclusa. ■

Osservazione : notiamo che la funzione φ che abbiamo ottenuto è monotona (dimostratelo per esercizio).

Possiamo estendere il risultato precedente.

Proposizione A7.15 : *sia* $f :]0, a[\to \mathbb{R}$ *una funzione non negativa, limitata su ogni intervallo* $]0, b]$ *con* $b < a$ *e tale che* $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ *; allora esiste una funzione continua* $\varphi : [0, a[\to \mathbb{R}$ *tale che*

$$\varphi(x) \geq f(x) \quad \forall x , \qquad \varphi(0) = 0 .$$

Per la dimostrazione, i cui dettagli potete completare per esercizio, poniamo per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ con $n < a$

$$M_n = \sup_{]0,n]} f ,$$

e applichiamo la proposizione A7.14 su $]0, 1]$ con $M = M_2$, ricavando così una funzione φ su $[0, 1]$. Poi, prolunghiamola su $[1, 2]$ congiungendo con un tratto di retta i punti $(1, M_2)$ e $(2, M_3)$: verificate che la funzione così ottenuta è continua e maggiore o uguale ad f. Proseguendo in modo analogo (occorre una definizione per induzione) si estende φ a tutti gli intervalli $[n, n + 1]$, fino ad arrivare a $\lfloor a \rfloor$. Per giungere vicino ad a, occorre procedere a passi più piccoli, dimezzando ogni volta l'intervallo rimanente.

Osservazione : anche in questo caso la funzione φ risulta monotona.

Appendice 7.14 - Le tangenti a una funzione convessa

Mostriamo prima di tutto il viceversa della proposizione 7.39.

Proposizione A7.16 : *sia* f *una funzione reale definita su un intervallo* I, *che ha derivata destra e sinistra finite in ogni punto interno ad* I *; se per ogni* $x_0 \in I$ *valgono le* (7.22) *allora* f *è convessa.*

DIMOSTRAZIONE : notiamo anzitutto che se una funzione ha derivata destra finita allora è continua da destra, e che se ha entrambe le derivate finite allora è continua; per le ipotesi fatte, la funzione f risulta continua all'interno di I. Ragioniamo per assurdo, e supponiamo che valgano le (7.22) ma che f non sia convessa; allora la formula (7.19) è violata, cioè esistono tre punti $x_0 < z < x_1$ nell'intervallo I tali che $f(z) > r_{x_0,x_1}(z)$. Osserviamo che la funzione r_{x_0,x_1} è affine, quindi convessa, dunque la funzione differenza

$$g(x) = f(x) - r_{x_0,x_1}(x)$$

non può essere convessa su I, altrimenti lo sarebbe anche la somma $f = g + r_{x_0,x_1}$. D'altra parte per ogni punto $\bar{x} \in I$

$$g'_+(\bar{x}) = f'_+(\bar{x}) - r'_{x_0,x_1}(\bar{x}) = f'_+(\bar{x}) - R_{x_0}(x_1) ,$$

e per ogni coppia di punti $x, \bar{x} \in I$

$$r_{x_0,x_1}(x) = r_{x_0,x_1}(\bar{x}) + R_{x_0}(x_1)(x - \bar{x}) :$$

allora per ogni $x, \bar{x} \in I$ con $x \geq \bar{x}$ abbiamo dalla prima delle (7.22)

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - r_{x_0,x_1}(x) \\ &\geq f(\bar{x}) + f'_+(\bar{x})(x - \bar{x}) - \left[r_{x_0,x_1}(\bar{x}) + R_{x_0}(x_1)(x - \bar{x})\right] \\ &= g(\bar{x}) + g'_+(\bar{x})(x - \bar{x}) , \end{aligned}$$

cioè anche g verifica la prima delle (7.22). Poiché lo stesso discorso si può ripetere per la seconda, possiamo concludere che la funzione g verifica (7.22), e che

$$g(x_0) = g(x_1) = 0 , \qquad g(z) > 0 .$$

Consideriamo l'intervallo $]x_0, z]$: se in tale intervallo è $g(x) > 0$, poniamo $a = x_0$; se invece esiste un punto $a' \in]x_0, z]$ tale che $g(a') \leq 0$, osserviamo che la funzione

g è continua in $[a', z]$ (perché è contenuto nell'interno di I), dunque applicando alla funzione $g(x)$ la proposizione A6.8 otteniamo che posto

$$A = \{x \in [a', z] : g(x) \leq 0\}$$

questo insieme ha massimo in un punto a e che $g(a) = 0$, quindi $a < z$. Inoltre, per definizione di massimo,

$$\forall x \in]a, z], \qquad g(x) > 0 ;$$

in entrambi i casi trattati, abbiamo ottenuto che

$$a < z, \qquad g(a) = 0, \qquad g(x) > 0 \quad \text{per } a < x \leq z .$$

Considerazioni analoghe, nell'intervallo $[z, x_1]$, permettono di garantire l'esistenza di un punto b tale che

$$z < b, \qquad g(b) = 0, \qquad g(x) > 0 \quad \text{per } z \leq x < b . \tag{A7.21}$$

Dalla prima delle ipotesi (7.22) applicata in un qualsiasi punto y con $a < y < b$ otteniamo

$$0 = g(b) \geq g(y) + g'_+(y)(b - y),$$

da cui, tenuto conto che $b - y > 0$ e che $g(y) > 0$ per (A7.21), si ricava

$$g'_+(y) \leq -\frac{g(y)}{b - y} < 0 .$$

Allo stesso modo, applicando la seconda delle (7.22) tra y ed a, otteniamo

$$g'_-(y) \geq \frac{g(y)}{y - a} > 0 :$$

allora (☞ corollario 7.13) la funzione g ha un massimo locale stretto nel punto y, e ciò per ogni $y \in]a, b[$. Questo è impossibile perché l'intervallo $]a, b[$ non è vuoto (contiene z), la funzione g deve essere costante su tale intervallo (☞ proposizione A7.2), ma una funzione costante non ha massimi locali stretti. ■

A questo punto diamo due definizioni che generalizzano l'una il concetto di retta tangente, l'altra quello di differenziale.

Definizione : *se f è una funzione convessa sull'intervallo I e $x_0 \in I$, si dice retta radente al grafico di f nel punto di ascissa x_0 ogni retta di equazione $y = f(x_0) + m(x - x_0)$ tale che per ogni $x \in I$ si abbia $f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0)$.*

Le rette radenti sono allora quelle che toccano il grafico di f in almeno un punto, ma lo lasciano tutto al di sopra (al solito, più precisamente "non al di sotto").

Esempio : sono rette radenti al grafico di $|x|$ in 0 la retta $y = x/2$, la retta $y = -x$ e molte altre.

Esempio : per la proposizione 7.39, se in un punto x_0 la funzione convessa f è differenziabile allora la retta tangente in x_0 è anche radente.

Osservazione : non è difficile dimostrare (e lo lasciamo per esercizio) che una retta di equazione $y = f(x_0) + m(x - x_0)$ è radente se e solo se $f'_-(x_0) \leq m \leq f'_+(x_0)$; in particolare, nei punti di differenziabilità l'unica retta radente è la retta tangente, e inoltre (☞ corollario 7.35) in ogni punto interno all'intervallo I vi sono rette radenti.

Osservazione : in n variabili, oltre alle rette radenti esistono degli iperpiani radenti; questi sono grafici di funzioni affini, del tipo $f(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ con $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$.

Definizione : *se f è una funzione convessa sull'intervallo I e $x_0 \in I$, si dice sottodifferenziale di f in x_0, e si indica con il simbolo $\partial^- f(x_0)$, l'insieme dei numeri $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che*

$$f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0) \geq 0 \qquad \forall x \in I .$$

Per quanto detto prima, abbiamo il seguente risultato.

Proposizione A7.17 : *se f è convessa, $\partial^- f(x_0)$ è l'insieme dei coefficienti angolari delle rette radenti in x_0; in particolare, se x_0 è interno a I allora $\partial^- f(x_0)$ non è vuoto, e consiste di un solo punto se e solo se f è differenziabile in x_0.*

Osservazione : in n variabili, il sottodifferenziale di una funzione convessa f contiene tutti i vettori $\boldsymbol{\alpha}$ associati agli iperpiani radenti.

Osservazione : le ultime affermazioni della proposizione precedente possono essere false nei punti estremi di I; ad esempio, la funzione (convessa) che vale 0 per $a \leq x < b$ ed 1 per $x = b$ ha sottodifferenziale in a uguale a $]-\infty, 0]$, nonostante sia differenziabile in a, e ha sottodifferenziale vuoto in b.

Le funzioni convesse hanno un'altra interessante proprietà.

Proposizione A7.18 : *sia f una funzione convessa su di un intervallo I; allora per ogni x_0 interno ad I*

$$f(x_0) = \max\{g(x_0) : g(x) \leq f(x)\ \forall x \in I,\ g \text{ funzione affine}\} .$$

DIMOSTRAZIONE : poniamo

$$\mathscr{A}_f = \{g : g(x) \le f(x)\ \forall x \in I,\ g \text{ funzione affine}\},$$

e sia x_0 interno ad I; anzitutto, dato che in particolare $g(x_0) \le f(x_0)$ per ogni $g \in \mathscr{A}_f$, si ha chiaramente

$$\sup\{g(x_0) : g \in \mathscr{A}_f\} \le f(x_0). \tag{A7.22}$$

Poi, per la proposizione A7.17, esiste $m \in \partial^- f(x_0)$: ciò significa che la funzione

$$\bar{g}(x) = f(x_0) + m(x - x_0),$$

che è affine, ha come grafico una retta radente ad f, e in particolare è in ogni punto minore o uguale ad f. Allora $\bar{g} \in \mathscr{A}_f$, quindi

$$\sup\{g(x_0) : g \in \mathscr{A}_f\} \ge \bar{g}(x_0) = f(x_0),$$

che con (A7.22) prova l'asserto. ■

Osservazione : si potrebbe dire qualcosa anche sugli eventuali punti del bordo di I; precisamente, se f è una qualsiasi funzione limitata su $I = [a, b]$, la funzione definita per ogni $x_0 \in I$ da

$$f^{**}(x_0) = \sup\{g(x_0) : g(x) \le f(x)\ \forall x \in I,\ g \text{ funzione affine}\}$$

(non chiedetevi il perché del simbolo usato) è la massima funzione convessa continua su tutto I e non superiore ad f, cioè l'inviluppo convesso di f. Ad esempio, se $f(x)$ vale zero per $a < x < b$ e vale 1 per $x = a$ e $x = b$ (notiamo che f è convessa, ma non continua) potete convincervi facilmente con un disegno che f^{**} vale zero su tutto $[a, b]$.

Appendice 7.15 - Teorema dell'asintoto

Non bisogna credere che vi siano rapporti tra avere limite finito per $x \to +\infty$ e avere derivata che tende a zero, come mostrano i prossimi esempi.

Esempio : la funzione $f(x) = \log x$ ha derivata che tende a zero per $x \to +\infty$, ma $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Esempio : la funzione $f(x) = \text{sen}(\sqrt{x})$ ha derivata $\cos(\sqrt{x})/2\sqrt{x}$ che tende a zero per $x \to +\infty$, e inoltre f è limitata, ma $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ non esiste.

Esempio : la funzione $f(x) = (\text{sen}\, x^2)/x$ ha limite finito per $x \to +\infty$, ma la sua derivata $2\cos x^2 - (\text{sen}\, x^2)/x^2$ non tende a zero per $x \to +\infty$ (anzi, non ha limite).

Esempio : poniamo per ogni $n \in \mathbb{N}^+$

$$\delta_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)},$$

e consideriamo la funzione definita su ogni intervallo $[n, n+1]$ da

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{n} + (x - n) & \text{se } n \le x \le n + \delta_n \\ -\dfrac{1}{n+1} & \text{se } n + \delta_n < x \le n + 1. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che f è continua, è monotona, tende a zero per $x \to +\infty$, ma nei punti $n + \delta_n/2$ ha derivata uguale a 1; usando anziché una funzione lineare a tratti la funzione

$$f(x) = -\frac{1}{n} + \delta_n \varphi_{\delta_n}(x - n) \qquad \text{se } n \le x \le n + 1,$$

dove φ è la funzione definita nell'appendice 7.9, si ottiene una funzione f monotona, derivabile infinite volte, che tende a zero, e tale che $f'(n + \frac{1}{2}\delta_n) = 2$. Se poi avessimo scelto

$$f(x) = -\frac{1}{n} + \delta_n \varphi_{\delta_n^2}(x - n) \qquad \text{se } n \le x \le n + 1,$$

avremmo avuto addirittura $\limsup_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. Per esercizio, modificate questo esempio in modo da ottenere che f sia strettamente monotona.

L'unico risultato positivo al riguardo è il seguente.

Teorema dell'asintoto A7.19 : *se* f *è una funzione derivabile in* $[a, +\infty[$ *che verifica*
1) *esiste* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, *e* $\ell \in \mathbb{R}$
2) *esiste* $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = m$,
allora $m = 0$.

Bisogna osservare bene le ipotesi: il teorema non dice che se $f \to \ell \in \mathbb{R}$ allora $f' \to 0$, ma che se anche f' ha limite, questo deve essere zero.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DELL'ASINTOTO : supponiamo che sia $m > 0$ (il caso $m < 0$ è analogo); scelto un numero reale H tale che

$$m > H > 0$$

per definizione di limite abbiamo

$$\exists \bar{x} : \forall x \geq \bar{x}, \qquad f'(x) \geq H \,.$$

Ma allora per il teorema di Lagrange abbiamo per ogni $x > \bar{x}$

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}(x - \bar{x}) = f(\bar{x}) + f'(z)(x - \bar{x}) \geq f(\bar{x}) + H(x - \bar{x}) \,,$$

e per $x \to +\infty$ ne deduciamo $f(x) \to +\infty$, contro l'ipotesi 1). ■

Partizione di [a,b] un sottoinsieme finito di [a,b] che contiene a,b

$$P = \{a < x_0 < \dots < x_n = b\}$$

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

$S'(f) = A = \sup s(P)$ integrale inferiore
$S''(f) = B = \inf S(P)$ integrale superiore
secondo Riemann

una funzione è R-integrabile $\Leftrightarrow \sup s(P) = \inf S(P)$

Capitolo 8

Integrazione

In questo capitolo ci occuperemo della teoria dell'integrazione e del problema della ricerca di primitive di una funzione assegnata, due questioni molto importanti in Analisi matematica, che intervengono, la prima nei problemi di calcolo di aree di regioni piane, la seconda nella risoluzione di equazioni differenziali. Tratteremo qui la cosiddetta teoria dell'integrale "di Riemann" rinviando a corsi successivi per quella più completa detta "di Lebesgue".

8.1 - Definizione di integrale e prime proprietà

Consideriamo un intervallo limitato $[a, b]$ di $\mathbb{R}$ ed una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata.

Definizione : *chiameremo suddivisione di $[a, b]$ ogni insieme finito*

$$\mathscr{A} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

con $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Per ogni suddivisione $\mathscr{A}$ di $[a, b]$, le quantità

somma inferiore $$S'(f, \mathscr{A}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = s(P)$$

somma superiore $$S''(f, \mathscr{A}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = S(P)$$

*verranno rispettivamente chiamate **somma inferiore** e **somma superiore** di f rispetto alla suddivisione $\mathscr{A}$. Infine, le quantità*

$$S'(f) = \sup\{S'(f, \mathscr{A}) : \mathscr{A} \text{ suddivisione di } [a,b]\} \quad =: A$$
$$S''(f) = \inf\{S''(f, \mathscr{A}) : \mathscr{A} \text{ suddivisione di } [a,b]\} \quad =: B$$

*verranno rispettivamente chiamate **integrale inferiore** ed **integrale superiore** (secondo Riemann) di f su $[a,b]$.*

Se $\mathscr{A} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ è una suddivisione di $[a,b]$, useremo spesso le notazioni abbreviate

$$(\delta x)_i = x_i - x_{i-1}\,, \qquad \Delta S(f, \mathscr{A}) = S''(f, \mathscr{A}) - S'(f, \mathscr{A})\,.$$

$\Delta S(F) = B - A$

$\inf|S(P)|$ $\sup(\Delta(P))$

Osserviamo che con queste convenzioni

$$\Delta S(f, \mathscr{A}) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\delta x)_i}_{x_i - x_{i-1}} \Big(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \Big)\,.$$

Definizione : *una funzione limitata f si dice **integrabile** (secondo Riemann) su $[a,b]$ se si ha*

$$S'(f) = S''(f)\,,$$

*ed in tal caso il comune valore di $S'(f)$ ed $S''(f)$ viene detto **integrale** di f su $[a,b]$ e viene indicato con il simbolo*

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Osservazione : questa definizione ha un'importante interpretazione geometrica; consideriamo una funzione limitata $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ che sia anche non negativa, e definiamo il sottografico di f come l'insieme

$$\Gamma(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ 0 \le y \le f(x)\}\,,$$

cioè la parte del piano cartesiano compresa tra la retta verticale $x = a$, la retta verticale $x = b$, la retta orizzontale $y = 0$, ed il grafico della funzione f. Per ogni suddivisione $\mathscr{A}$ di $[a,b]$ possiamo costruire il "plurirettangolo inscritto" relativo a f e ad $\mathscr{A}$ (☞ figura 8.1)

$$P'(f, \mathscr{A}) = \bigcup_{i=1}^{n} \big([x_{i-1}, x_i] \times [0, \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f]\big)$$

ed il "plurirettangolo circoscritto" relativo a f e ad $\mathscr{A}$ (☞ figura 8.2)

$$P''(f, \mathscr{A}) = \bigcup_{i=1}^{n} \big([x_{i-1}, x_i] \times [0, \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f]\big)\,.$$

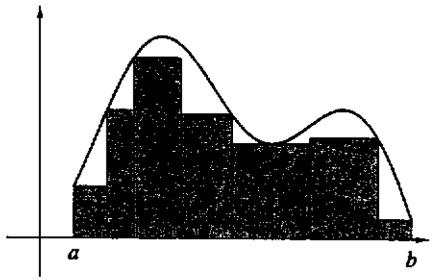


Fig. 8.1 : plurirettangolo inscritto ...

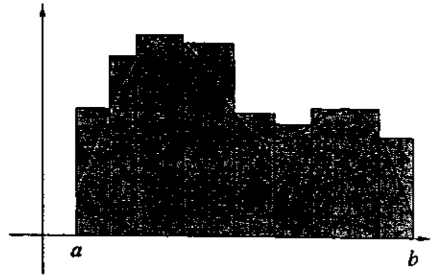


Fig. 8.2 : ... e plurirettangolo circoscritto

Si verifica facilmente che l'area del plurirettangolo inscritto $P'(f, \mathscr{A})$ è uguale ad $S'(f, \mathscr{A})$, la somma inferiore di f rispetto ad $\mathscr{A}$, mentre l'area del plurirettangolo circoscritto $P''(f, \mathscr{A})$ è uguale ad $S''(f, \mathscr{A})$. Abbiamo potuto parlare di area di P' e di P'' perché queste figure sono scomponibili in un numero finito di rettangoli, che a loro volta sono figure per le quali sappiamo cosa significhi la parola "area": base per altezza. Invece, non è chiaro cosa possa essere in generale l'area per una figura piana qualsiasi, ad esempio per il sottografico $\Gamma(f)$; certamente, se quest'area ha qualche significato, vorremmo che

$$E \subset F \quad \Rightarrow \quad \text{Area}\,(E) \le \text{Area}\,(F)\,,$$

e quindi in particolare dovrà essere

$$\text{Area}\,\big(P'(f, \mathscr{A})\big) \le \text{Area}\,\big(\Gamma(f)\big) \le \text{Area}\,\big(P''(f, \mathscr{A})\big)\,,$$

ovvero

$$S'(f, \mathscr{A}) \le \text{Area}\,\big(\Gamma(f)\big) \le S''(f, \mathscr{A})\,.$$

Poiché queste due disuguaglianze devono essere vere per ogni suddivisione, ne deduciamo che deve essere

$$S'(f) \le \text{Area}\,\big(\Gamma(f)\big) \le S''(f)$$

perché la funzione "Area" mantenga le proprietà geometriche abituali. Dunque, per le definizioni precedenti, se f è integrabile sarà naturale definire l'area del suo sottografico $\Gamma(f)$ come l'integrale di f su $[a,b]$:

$$\text{Area}\,\big(\Gamma(f)\big) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Se invece f non è integrabile, non sarà possibile definire l'area di $\Gamma(f)$, ma soltanto l'area inferiore e l'area superiore, che saranno date rispettivamente dall'integrale inferiore $S'(f)$ e dall'integrale superiore $S''(f)$ di f su $[a,b]$.

Osservazione : da quanto appena detto si ha che l'area di un dominio piano che è sottografico di una funzione integrabile non negativa può essere calcolata mediante l'integrale della funzione stessa. Analogamente, se un dominio può essere decomposto in una unione o differenza di un numero finito di sottografici, la sua area sarà la somma o differenza dei rispettivi integrali. Ad esempio, in tal modo si potrà ottenere che il cerchio $C = \{(x, y) : (x - 3/2)^2 + (y - 2)^2 \leq 1\}$, differenza dei due sottografici di $f_1(x) = 2 + \sqrt{3x - x^2 - 5/4}$ e di $f_2(x) = 2 - \sqrt{3x - x^2 - 5/4}$, ha area π.

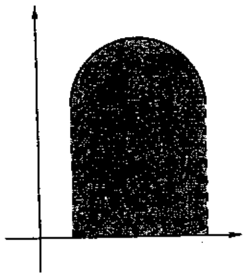


Fig. 8.3 : sottografico di f_1

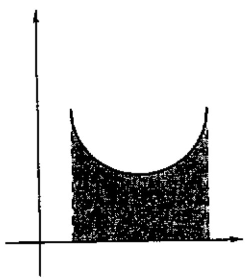


Fig. 8.4 : sottografico di f_2

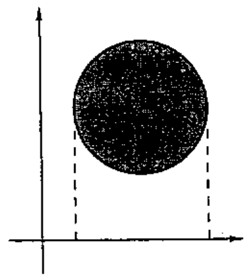


Fig. 8.5 : differenza dei due

Esempio : sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ la funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \, . \end{cases} \tag{8.1}$$

Dato che (☛ proposizione 3.29) sia $\mathbb{Q}$ che $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$, si ha che per ogni $\alpha, \beta \in [a, b]$ con $\alpha < \beta$ esistono in $[\alpha, \beta]$ sia numeri razionali che numeri irrazionali, quindi

$$\inf_{[\alpha,\beta]} f = \min f = 0 \, , \qquad \sup_{[\alpha,\beta]} f = \max f = 1 \, ,$$

dunque per ogni suddivisione $\mathscr{A}$ di $[a, b]$ si ha

$$S'(f, \mathscr{A}) = 0 \, , \qquad S''(f, \mathscr{A}) = b - a \, .$$

In definitiva

$$S'(f) = 0 \, , \qquad S''(f) = b - a \, ,$$

per cui f non è integrabile (secondo Riemann) su $[a, b]$. Allora, per quanto visto nell'osservazione precedente, non si può definire l'area del sottografico di f, ma solo l'area inferiore, che risulta uguale a 0, e l'area superiore, che risulta uguale a $b - a$ (➡ appendice 8.1).

Esempio : dalla definizione di integrale si ottiene subito che ogni funzione costante è integrabile su ogni intervallo $[a, b]$, e che

$$f(x) \equiv c \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\, dx = c(b - a) \, . \tag{8.2}$$

Proposizione 8.1 : *sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata, e siano* $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ *due suddivisioni di* $[a, b]$ *tali che* $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$. *Allora*

$$S'(f, \mathscr{A}) \leq S'(f, \mathscr{B}) \, , \qquad S''(f, \mathscr{B}) \leq S''(f, \mathscr{A}) \, , \tag{8.3}$$

e quindi

$$\Delta S(f, \mathscr{B}) \leq \Delta S(f, \mathscr{A}) \, . \tag{8.4}$$

DIMOSTRAZIONE : siano $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ due suddivisioni di $[a, b]$, con $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, e supponiamo che $\mathscr{B}$ abbia esattamente un punto in più di $\mathscr{A}$ (il caso generale si tratta poi per induzione, e lo lasciamo per esercizio). Detto t tale punto, esso si troverà tra due punti consecutivi $x < y$ della suddivisione $\mathscr{A}$; osservando che le due suddivisioni coincidono prima di x e dopo y, abbiamo

$$S''(f, \mathscr{A}) = S''(f, \mathscr{B}) - [(t - x) \sup_{[x,t]} f + (y - t) \sup_{[t,y]} f] + (y - x) \sup_{[x,y]} f \, .$$

Ma (☛ esercizio 3.58) si ha

$$(y - x) \sup_{[x,y]} f = (t - x) \sup_{[x,y]} f + (y - t) \sup_{[x,y]} f \geq (t - x) \sup_{[x,t]} f + (y - t) \sup_{[t,y]} f \, ,$$

dunque $S''(f, \mathscr{A}) \geq S''(f, \mathscr{B})$. L'altra disuguaglianza è analoga, e l'ultima segue per differenza. ■

Proposizione 8.2 : *per ogni* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *limitata si ha*

$$S'(f) \leq S''(f) \, .$$

sup s(P) ≤ inf S(P)

DIMOSTRAZIONE : siano $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ due qualunque suddivisioni di $[a, b]$; notiamo che l'insieme $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ è anch'esso una suddivisione di $[a, b]$ e si ha

$$\mathscr{A} \subset \mathscr{A} \cup \mathscr{B} \, , \qquad \mathscr{B} \subset \mathscr{A} \cup \mathscr{B} \, .$$

Dalla (8.3) si ricava allora

$$S'(f, \mathscr{A}) \leq S'(f, \mathscr{A} \cup \mathscr{B}) \leq S''(f, \mathscr{A} \cup \mathscr{B}) \leq S''(f, \mathscr{B}) \, ;$$

abbiamo così provato che

$$S'(f, \mathscr{A}) \leq S''(f, \mathscr{B}) \qquad \text{per ogni coppia di suddivisioni } \mathscr{A}, \mathscr{B} \, . \tag{8.5}$$

Per ogni fissata suddivisione $\mathscr{B}$, passando all'estremo superiore rispetto ad $\mathscr{A}$ in (8.5) si ottiene

$$S'(f) \leq S''(f, \mathscr{B}) \, ,$$

e di qui, prendendo l'estremo inferiore rispetto a $\mathscr{B}$, si ricava

$$S'(f) \leq S''(f) \, ,$$

che è quanto si voleva dimostrare. ■

Notiamo che la proposizione appena dimostrata asserisce che la differenza $S''(f) - S'(f)$ è sempre non negativa. Il prossimo risultato è una fondamentale caratterizzazione delle funzioni integrabili secondo Riemann (➡ appendice 8.2).

Teorema 8.3 : *sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata; allora le tre condizioni seguenti sono equivalenti:*

1) *f è integrabile secondo Riemann su $[a, b]$;*
2) *per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due suddivisioni $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ di $[a, b]$ tali che*

$$S''(f, \mathscr{B}) - S'(f, \mathscr{A}) < \varepsilon ;$$

3) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione $\mathscr{A}$ di $[a, b]$ tale che*

$$S''(f, \mathscr{A}) - S'(f, \mathscr{A}) < \varepsilon .$$

Dimostrazione : l'equivalenza 1) $\iff$ 2) segue direttamente dalla definizione di integrabilità e dalle definizioni di estremo inferiore e superiore, tenuto conto di (8.5). L'implicazione 3) $\Rightarrow$ 2) è ovvia, basta prendere $\mathscr{B} = \mathscr{A}$; infine, l'implicazione 2) $\Rightarrow$ 3) si ottiene considerando la suddivisione $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ per la quale si ha

$$S''(f, \mathscr{A} \cup \mathscr{B}) - S'(f, \mathscr{A} \cup \mathscr{B}) \le S''(f, \mathscr{B}) - S'(f, \mathscr{A}) < \varepsilon$$

grazie a (8.4). ■

Nel seguito, ometteremo sempre la dicitura "secondo Riemann", sottintendendola.

Osservazione : se f è integrabile ed $\mathscr{A}$ è una suddivisione che verifica l'ipotesi 3) del teorema precedente, dal fatto che

$f \in R$-integrabile e $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ una suddivisione A di $[a,b]$: $\inf S(P) - \sup s(P) < \varepsilon$

$$\boxed{\underbrace{S'(f, \mathscr{A})}_{\sup s(P)} \le \int_a^b f(x)\,dx \le \underbrace{S''(f, \mathscr{A})}_{\inf S(P)}} \quad \sup s(P) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \inf S(P)$$

segue

$$\Big|\underbrace{S'(f, \mathscr{A})}_{\sup s(P)} - \int_a^b f(x)\,dx\Big| < \varepsilon , \qquad \Big|\underbrace{S''(f, \mathscr{A})}_{\inf S(P)} - \int_a^b f(x)\,dx\Big| < \varepsilon . \tag{8.6}$$

Esempio : proviamo a calcolare, usando soltanto gli strumenti introdotti finora, la quantità $\int_a^b x\,dx$. Posto $f(x) = x$, dividiamo $[a, b]$ in n parti uguali: sia $\mathscr{A}_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ la suddivisione di $[a, b]$ in cui $x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$; allora per ogni $i = 1, \ldots, n$

$$\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f = x_{i-1} , \qquad \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f = x_i ,$$

per cui si ha, grazie alla formula (3.1) sulla somma degli interi,

$$S'(f, \mathscr{A}_n) = \sum_{i=1}^{n} (\delta x)_i\, x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big(a + (i-1)\,\frac{b-a}{n}\Big) = \frac{b-a}{n}\Big(na + \frac{n-1}{2}(b-a)\Big)$$

$$S''(f, \mathscr{A}_n) = \sum_{i=1}^{n} (\delta x)_i\, x_i = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big(a + i\,\frac{b-a}{n}\Big) = \frac{b-a}{n}\Big(na + \frac{n+1}{2}(b-a)\Big) .$$

Allora, per la proposizione 8.2, si ottiene

$$\frac{b^2 - a^2}{2} = \lim_{n \to +\infty} S'(f, \mathscr{A}_n) \le S'(f) \le S''(f) \le \lim_{n \to +\infty} S''(f, \mathscr{A}_n) = \frac{b^2 - a^2}{2} ,$$

il che dimostra che f è integrabile su $[a, b]$, e che il suo integrale è $(b^2 - a^2)/2$.

L'esempio precedente mostra fra l'altro come, usando solo le somme inferiori e superiori, il calcolo di un integrale risulti difficoltoso anche in casi molto semplici (➡ appendice 8.3). Identificheremo ora alcune classi interessanti di funzioni integrabili; una di queste è costituita dalle funzioni monotone.

Proposizione 8.4 : *ogni funzione monotona $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile.*

Dimostrazione : seguiamo (generalizzandolo) l'esempio appena visto; supponiamo che f sia monotona debolmente crescente (l'altro caso è analogo). Fissato $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathscr{A}_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ la suddivisione di $[a, b]$ in n intervalli di uguale ampiezza, cioè

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n} .$$

Allora, per l'ipotesi di monotonia della funzione f , si ha

$$\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_{i-1}) , \qquad \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_i) ,$$

e quindi

numero degli intervalli sono in numero costante ⇒ li posso portare fuori dalla sommatoria e sommare solo gli inf al variare di i

$$S'(f, \mathscr{A}_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{b-a}{n}\Big(f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Big)$$

$$S''(f, \mathscr{A}_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{b-a}{n}\Big(f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Big) .$$

Dunque $n \to \infty \Rightarrow \to 0$

$$\Delta S(f, \mathscr{A}_n) = \frac{b-a}{n}\big(f(b) - f(a)\big) ,$$

che tende a zero per $n \to +\infty$, e l'integrabilità di f segue dal teorema 8.3. ■

Un'altra classe importante di funzioni integrabili è costituita dalle funzioni continue, come risulta dal prossimo teorema.

Teorema 8.5 : *ogni funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile.*

dell' unif continuità

$\Rightarrow \Delta S(f_\delta, A) \leq \varepsilon$

DIMOSTRAZIONE : essendo $[a,b]$ chiuso e limitato, la funzione f risulta limitata (☞ teorema 6.35) ed uniformemente continua (☞ teorema 6.41), cioè

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in [a,b], \qquad [|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon]. \tag{8.7}$$

Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\delta > 0$ ottenuto dalla (8.7), e sia $\mathscr{A} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una suddivisione di $[a,b]$ tale che $|x_i - x_{i-1}| < \delta$ per ogni $i = 1, \dots, n$; ad esempio, basta dividere l'intervallo $[a,b]$ in n intervalli di uguale ampiezza, con $n > (b-a)/\delta$. Per il teorema 6.35, in ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ la funzione f ha minimo m_i e massimo M_i ; tali valori vengono assunti in due punti x_i' ed x_i'' rispettivamente, con $x_i', x_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$. Allora $|x_i' - x_i''| \leq x_i - x_{i-1} < \delta$; quindi dalla (8.7) si ottiene

$$\max_{[x_{i-1},x_i]} f - \min_{[x_{i-1},x_i]} f = f(x_i'') - f(x_i') < \varepsilon \qquad \text{per ogni } i = 1, \dots, n ;$$

da qui segue

$$\Delta S(f, \mathscr{A}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \Big(\max_{[x_{i-1},x_i]} f - \min_{[x_{i-1},x_i]} f \Big) \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon (b-a) ,$$

e l'integrabilità di f segue dal teorema 8.3. ■

Il prossimo risultato mostra che il comportamento di una funzione in un singolo punto è ininfluente dal punto di vista dell'integrabilità (➡ appendice 8.4).

Proposizione 8.6 : *sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata; se* f *è continua nell'intervallo* $]a,b]$, *allora* f *risulta integrabile, e il valore di* $\int_a^b f(x)\,dx$ *non dipende dal valore di* $f(a)$.

DIMOSTRAZIONE : dato che f è limitata, per una opportuna costante $M > 0$ si ha $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a,b]$. Fissiamo $\varepsilon > 0$: posto $\delta = \varepsilon / M$ (o meglio, $\delta = \min\{(b-a)/2, \varepsilon/M\}$), per la proposizione 8.5 la funzione f è integrabile su $[a+\delta, b]$, dato che è continua su tale intervallo. Dunque, per il teorema 8.3 esiste una suddivisione $\mathscr{A}$ di $[a+\delta, b]$ tale che

$$\Delta S(f\,|_{[a+\delta,b]}, \mathscr{A}) < \varepsilon .$$

Osserviamo che il primo punto di $\mathscr{A}$ è $a+\delta$; se indichiamo con $\mathscr{B}$ la suddivisione di $[a,b]$ data da $\{a\} \cup \mathscr{A}$ otteniamo allora

$$\Delta S(f, \mathscr{B}) = \delta \Big(\sup_{[a,a+\delta]} f - \inf_{[a,a+\delta]} f \Big) + \Delta S(f\,|_{[a+\delta,b]}, \mathscr{A}) < 2M\delta + \varepsilon \leq 3\varepsilon :$$

l'integrabilità di f segue dunque dal teorema 8.3. Siano ora f_1 e f_2 due funzioni tali che

$$\forall x \in [a,b],\ [|f_1(x)| \leq M \text{ e } |f_2(x)| \leq M] , \qquad \forall x > a,\ f_1(x) = f_2(x) = f(x) ;$$

con le notazioni precedenti abbiamo

$$S''(f_1, \mathscr{B}) = \delta \sup_{[a,a+\delta]} f_1 + S''(f, \mathscr{A}) , \qquad S''(f_2, \mathscr{B}) = \delta \sup_{[a,a+\delta]} f_2 + S''(f, \mathscr{A}) ,$$

quindi

$$|S''(f_1, \mathscr{B}) - S''(f_2, \mathscr{B})| \leq 2\delta M \leq 2\varepsilon ,$$

e anche

$$\Delta S(f_1, \mathscr{B}) < 3\varepsilon , \qquad \Delta S(f_2, \mathscr{B}) < 3\varepsilon .$$

Allora usando (8.6) e la disuguaglianza triangolare otteniamo

$$\begin{aligned} \Big| \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx \Big| &\leq \Big| \int_a^b f_1(x)\,dx - S''(f_1, \mathscr{B}) \Big| \\ &\quad + |S''(f_1, \mathscr{B}) - S''(f_2, \mathscr{B})| \\ &\quad + \Big| S''(f_2, \mathscr{B}) - \int_a^b f_2(x)\,dx \Big| \\ &\leq 3\varepsilon + 2\varepsilon + 3\varepsilon = 8\varepsilon , \end{aligned}$$

e per l'arbitrarietà di ε anche l'ultima affermazione è dimostrata. ■

Osservazione : nella dimostrazione non abbiamo usato molto la continuità di f ; in effetti, la proposizione rimane vera sostituendo l'ipotesi " f continua per $x > a$ " con la più debole " f è integrabile su $[a', b]$ per ogni $a' \in]a,b[$ ".

Osservazione : la proposizione precedente vale, chiaramente, anche se il punto di discontinuità non è a ma b , anzi vale anche se è un qualsiasi punto t di $]a,b[$. In tal caso, basta considerare i due intervalli $[a, t-\delta]$ e $[t+\delta, b]$ al posto di un intervallo solo (completate i dettagli per esercizio). Per induzione, potremmo allora mostrare che la proposizione continua a valere anche se vi è un qualsiasi numero finito di punti di discontinuità.

Osservazione : vista l'ultima affermazione della proposizione 8.6, se una funzione f è limitata e continua su un intervallo limitato $]a,b]$, possiamo dare un senso a $\int_a^b f(x)\,dx$ estendendo f nel punto a con un valore qualsiasi: l'integrale non dipende dal valore scelto.

Esempio : ogni somma finita $\sum_{i=1}^{n} a_i$ di numeri reali può essere vista come un integrale; infatti, se f è la funzione definita su $[0, n[$ da

$$f(x) = a_i \qquad \text{se } x \in [i-1, i[,$$

utilizzando le osservazioni precedenti si ha (☞ figura 8.6)

$$\int_0^n f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} a_i . \tag{8.8}$$

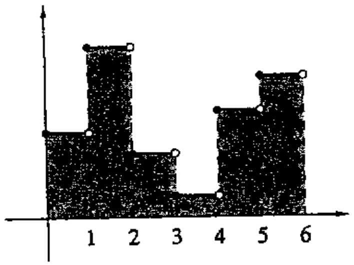


Fig. 8.6 : una somma finita come integrale

Esempio : le osservazioni precedenti mostrano che se f e g sono integrabili, ed $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$ salvo al più in un numero finito di punti, allora gli integrali di f e di g su $[a,b]$ sono uguali. In particolare, se $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$, salvo in un numero finito di punti, l'integrale di f su $[a,b]$ è uguale all'integrale della funzione costante zero, il quale vale zero per (8.2): allora, una funzione f può avere integrale zero su qualsiasi intervallo, senza essere la funzione costantemente nulla. Questo non accade se aggiungiamo qualche ipotesi su f, come mostra il prossimo risultato:

Proposizione 8.7 : *se f è una funzione continua e non negativa su un intervallo $[a,b]$ non ridotto a un punto, allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \quad\Rightarrow\quad f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]\,.$$

DIMOSTRAZIONE : supponiamo falsa la tesi, e sia $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) = k > 0$; per il corollario 6.24 del teorema di permanenza del segno, esiste un intervallo $[a',b'] \subset [a,b]$, anch'esso non ridotto a un punto, che contiene x_0 e tale che

$$f(x) \geq \frac{k}{2} \qquad \forall x \in [a',b']\,. \tag{8.9}$$

Consideriamo la suddivisione $\mathscr{A}$ di $[a,b]$ che contiene solo i punti a, a', b', b : dato che f è integrabile (☛ teorema 8.5), abbiamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = S'(f) \geq S'(f,\mathscr{A}) = (a'-a)\inf_{[a,a']} f + (b'-a')\inf_{[a',b']} f + (b-b')\inf_{[b',b]} f\,,$$

ma usando (8.9) e il fatto che f è non negativa ne deduciamo

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq (b'-a')\frac{k}{2} > 0\,,$$

contro l'ipotesi. ■

Vediamo alcune proprietà elementari delle funzioni integrabili.

Proposizione 8.8 : *siano $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ due funzioni integrabili; allora la funzione $f+g$ risulta integrabile e si ha*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

DIMOSTRAZIONE : se $\mathscr{A}$ è una qualsiasi suddivisione dell'intervallo $[a,b]$, dalle proprietà degli estremi inferiore e superiore (☛ proposizione 4.2) si ha

$\sup\Delta(P,F) + \sup\Delta(P,g) \leq \sup(F+g)$

$$\begin{cases} S'(f,\mathscr{A}) + S'(g,\mathscr{A}) \leq S'(f+g,\mathscr{A}) \\ S''(f,\mathscr{A}) + S''(g,\mathscr{A}) \geq S''(f+g,\mathscr{A})\,. \end{cases} \tag{8.10}$$

$\inf S(P,F) + \inf S(P,g) \leq \inf S(P,F+g)$

Allora, se $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ sono due qualsiasi suddivisioni di $[a,b]$ si ha, grazie alla proposizione 8.1 ed alla prima delle (8.10),

$\sup\Delta(P,F) + \sup\Delta(Q,g) \leq \sup\Delta(P\cup Q,F) + \sup\Delta(P\cup Q,g)$

$$\begin{aligned} S'(f,\mathscr{A}) + S'(g,\mathscr{B}) &\leq S'(f,\mathscr{A}\cup\mathscr{B}) + S'(g,\mathscr{A}\cup\mathscr{B}) \\ &\leq S'(f+g,\mathscr{A}\cup\mathscr{B}) \leq S'(f+g)\,, \end{aligned}$$

$\geq$ $\sup\Delta(P\cup Q, F+g)$

da cui, passando all'estremo superiore rispetto ad $\mathscr{A}$ ed a $\mathscr{B}$, si ottiene $\sup(F+g)$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = S'(f) + S'(g) \leq S'(f+g)\,. \tag{8.11}$$

In modo simile, dalla seconda delle (8.10) si ottiene

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = S''(f) + S''(g) \geq S''(f+g)\,. \tag{8.12}$$

In definitiva, da (8.11) e (8.12) si ricava

$$S''(f+g) \leq \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \leq S'(f+g)\,,$$

ma $S'(f+g) \leq S''(f+g)$ per la proposizione 8.2, e da qui seguono l'integrabilità di $f+g$, perché $S'(f+g) = S''(f+g)$, e l'uguaglianza

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,,$$

che era quanto si voleva dimostrare. ■

Proposizione 8.9 : *sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione integrabile e sia $\lambda \in \mathbf{R}$; allora la funzione λf risulta integrabile e si ha*

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

DIMOSTRAZIONE : consideriamo prima il caso $\lambda \geq 0$; se $\mathscr{A}$ è una suddivisione di $[a,b]$ si ha immediatamente dalle proprietà degli estremi inferiore e superiore (☞ esercizio 4.3)

$$S'(\lambda f, \mathscr{A}) = \lambda S'(f, \mathscr{A}) , \qquad S''(\lambda f, \mathscr{A}) = \lambda S''(f, \mathscr{A}) ,$$

da cui

$$S'(\lambda f) = \lambda S'(f) = \lambda \int_a^b f(x)\,dx , \qquad S''(\lambda f) = \lambda S''(f) = \lambda \int_a^b f(x)\,dx .$$

Ciò dimostra che λf è integrabile e che si ha

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx . \tag{8.13}$$

Se invece $\lambda < 0$ si ha (☞ esercizio 4.3)

$$S'(\lambda f, \mathscr{A}) = \lambda S''(f, \mathscr{A}) , \qquad S''(\lambda f, \mathscr{A}) = \lambda S'(f, \mathscr{A}) ,$$

da cui

$$S'(\lambda f) = \sup_{\mathscr{A}} S'(\lambda f, \mathscr{A}) = \sup_{\mathscr{A}} \lambda S''(f, \mathscr{A}) = \lambda \inf_{\mathscr{A}} S''(f, \mathscr{A}) = \lambda S''(f)$$

$$S''(\lambda f) = \inf_{\mathscr{A}} S''(\lambda f, \mathscr{A}) = \inf_{\mathscr{A}} \lambda S'(f, \mathscr{A}) = \lambda \sup_{\mathscr{A}} S'(f, \mathscr{A}) = \lambda S'(f)$$

e quindi ancora l'integrabilità di λf e l'uguaglianza (8.13). ■

Osserviamo che, a differenza di quanto accade per le derivate, abbiamo dato una formula per l'integrale della somma di due funzioni, una per l'integrale del prodotto di una funzione *per una costante*, ma non ne daremo (perché non ci sono) per il prodotto o la composizione di due funzioni: questo non significa che il prodotto di due funzioni integrabili non sia integrabile (lo è, ☞ appendice 8.5), ma solo che non esiste una formula che dia l'integrale del prodotto; è un grave errore, ad esempio, pensare che l'integrale del prodotto sia il prodotto degli integrali. Questa "mancanza" è quello che rende l'integrazione un'operazione difficile e macchinosa, a differenza della derivazione che risulta, almeno per le funzioni più elementari, di esecuzione meccanica.

Teorema del confronto 8.10 : *siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni limitate tali che*

$$f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in [a,b] .$$

Allora si ha

$$S'(f) \leq S'(g), \qquad S''(f) \leq S''(g) .$$

In particolare, se f e g sono integrabili, si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx .$$

DIMOSTRAZIONE : si ha immediatamente, per ogni suddivisione $\mathscr{A}$ di $[a,b]$,

$$S'(f, \mathscr{A}) \leq S'(g, \mathscr{A}) , \qquad S''(f, \mathscr{A}) \leq S''(g, \mathscr{A}) ,$$

da cui seguono le disuguaglianze cercate. ■

La prossima proposizione riguarda la parte positiva, la parte negativa e il valore assoluto di una funzione integrabile, ed estende all'integrale l'usuale disuguaglianza triangolare (4.10) valida per la funzione valore assoluto; rinviamo all'appendice per dei risultati più generali riguardanti le funzioni lipschitziane (➡ appendice 8.5) o le funzioni convesse (➡ appendice 8.6).

Proposizione 8.11 : *sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile; allora le funzioni f^+ , f^- e $|f|$ risultano integrabili, e si ha*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx . \tag{8.14}$$

DIMOSTRAZIONE : fissato $\varepsilon > 0$, grazie al teorema 8.3 esiste una suddivisione $\mathscr{A} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ di $[a,b]$ tale che

$$\Delta S(f, \mathscr{A}) < \varepsilon . \tag{8.15}$$

Considerando la funzione parte positiva f^+ si ha (☞ esercizio 4.81)

$$S''(f^+, \mathscr{A}) = \sum_{i=1}^n (\delta x)_i \sup_{[x_{i-1},x_i]} f^+ = \sum_{i=1}^n (\delta x)_i \Big(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f \Big)^+$$

$$S'(f^+, \mathscr{A}) = \sum_{i=1}^n (\delta x)_i \inf_{[x_{i-1},x_i]} f^+ = \sum_{i=1}^n (\delta x)_i \Big(\inf_{[x_{i-1},x_i]} f \Big)^+ .$$

Allora, grazie a (6.34) ed a (8.15), abbiamo

$$\begin{aligned} \Delta S(f^+, \mathscr{A}) &= \sum_{i=1}^n (\delta x)_i \Big[\Big(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f \Big)^+ - \Big(\inf_{[x_{i-1},x_i]} f \Big)^+ \Big] \\ &\leq \sum_{i=1}^n (\delta x)_i \Big[\Big(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f \Big) - \Big(\inf_{[x_{i-1},x_i]} f \Big) \Big] \\ &= \Delta S(f, \mathscr{A}) < \varepsilon , \end{aligned}$$

da cui segue l'integrabilità di f^+ per il teorema 8.3. Allora anche f^- è integrabile, perché è la parte positiva di $-f$ la quale è integrabile (☞ proposizione 8.9); infine (☞ proposizione 8.8) si ottiene l'integrabilità di $|f|$ perché $|f| = f^+ + f^-$. La disuguaglianza

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx ,$$

che equivale a

$$- \int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx ,$$

☞ formula (4.8), segue ora immediatamente dal teorema del confronto 8.10 in quanto $-|f| \leq f \leq |f|$. ■ Mario dimostra così: $f \in R(a,b) \Rightarrow |f| \in R(a,b)$,
poi $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$ e $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$ [illegible] sono integrabili

Osservazione : la prima parte della proposizione precedente, nell'ipotesi che f fosse continua, avrebbe avuto una dimostrazione praticamente immediata, in quanto se f è continua su $[a,b]$ anche f^+, f^- e $|f|$ risultano continue su $[a,b]$ (☞ corollario 5.37) e dunque integrabili (☞ teorema 8.5).

Osservazione : il viceversa della proposizione precedente non è vero, nel senso che se $|f|$ è integrabile non è detto che f sia integrabile. Ad esempio, sappiamo che su $[a,b]$ la funzione di Dirichlet $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}$ non è integrabile; allora non è integrabile neppure la funzione $f = \mathbb{1}_{\mathbf{Q}} - 1/2$, altrimenti la funzione di Dirichlet sarebbe integrabile (☞ proposizione 8.8), dato che le costanti sono integrabili. Tuttavia, il valore assoluto di f è la costante $1/2$, che è integrabile.

Osservazione : da quanto visto finora si ricava che, fissato l'intervallo $[a,b]$, l'applicazione

$$f \mapsto \mathscr{I}(f) = \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

che ad ogni funzione integrabile f associa il suo integrale, è un'applicazione lineare non decrescente, cioè verifica le proprietà

a) $\mathscr{I}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathscr{I}(f) + \beta\mathscr{I}(g)$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ed ogni f, g

b) $\mathscr{I}(f) \le \mathscr{I}(g)$ per ogni $f \le g$.

Definizione : *data una funzione integrabile* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, *chiameremo media di* f *su* $[a,b]$ *la quantità*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Osservazione : questa definizione corrisponde all'usuale media aritmetica se f è una funzione del tipo considerato nella formula (8.8); in tal caso infatti si ha

$$\frac{1}{n}\int_0^n f(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\,,$$

che non è altro che l'usuale media aritmetica per numeri reali.

Dal teorema del confronto si ottiene immediatamente il seguente risultato.

Teorema della media integrale 8.12 : *sia* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *una funzione integrabile. Allora si ha*

$$\inf_{[a,b]} f \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \sup_{[a,b]} f\,.$$

Nel caso in cui la funzione f *sia continua, esiste* $z \in [a,b]$ *tale che*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(z)\,.$$

DIMOSTRAZIONE : essendo per ogni $x \in [a,b]$

$$\inf_{[a,b]} f \le f(x) \le \sup_{[a,b]} f\,,$$

e grazie a (8.2), dal teorema del confronto (☞ teorema 8.10) si ottiene

$$(b-a)\inf_{[a,b]} f \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)\sup_{[a,b]} f\,,$$

da cui segue la tesi dividendo per $(b-a)$. Nel caso in cui la funzione f sia continua, per il corollario 6.30 ogni numero reale compreso tra $\min f$ e $\max f$ è un valore assunto da f, dunque lo è anche la media di f (➟ appendice 8.7). ■

Teorema di spezzamento 8.13 : *sia* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *una funzione integrabile e sia* $a < c < b$. *Allora* f *è integrabile su* $[a,c]$ *e su* $[b,c]$, *e si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,;$$

viceversa, se f *è una funzione integrabile su* $[a,c]$ *e su* $[c,b]$ *allora essa è integrabile anche su* $[a,b]$, *e quindi vale l'uguaglianza precedente.*

DIMOSTRAZIONE : sia $\varepsilon > 0$ e sia $\mathscr{A}$ una suddivisione di $[a,b]$ tale che $\Delta S(f,\mathscr{A}) < \varepsilon$; indichiamo con $\mathscr{B}$ la suddivisione $\mathscr{A} \cup \{c\}$ e poniamo $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B} \cap [a,c]$, $\mathscr{B}_2 = \mathscr{B} \cap [c,b]$. Allora $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$ sono suddivisioni di $[a,c]$ e $[c,b]$ rispettivamente, e si ha per la proposizione 8.1

$$\begin{aligned} S'(f,\mathscr{A}) \le S'(f,\mathscr{B}) &= [S'(f,\mathscr{B}_1) + S'(f,\mathscr{B}_2)] \\ &\le [S''(f,\mathscr{B}_1) + S''(f,\mathscr{B}_2)] \\ &= S''(f,\mathscr{B}) \le S''(f,\mathscr{A})\,, \end{aligned} \tag{8.16}$$

da cui

$$[S''(f,\mathscr{B}_1) + S''(f,\mathscr{B}_2)] - [S'(f,\mathscr{B}_1) + S'(f,\mathscr{B}_2)] \le S''(f,\mathscr{A}) - S'(f,\mathscr{A})\,.$$

Dunque

$$\Delta S(f,\mathscr{B}_1) + \Delta S(f,\mathscr{B}_2) \le \Delta S(f,\mathscr{A}) < \varepsilon\,,$$

ma ciascuno dei due addendi al primo membro è non negativo (☞ proposizione 8.2), pertanto utilizzando il teorema 8.3 si ottiene che f è integrabile su $[a,c]$ e su $[c,b]$. Allora la (8.16) dà

$$S'(f,\mathscr{A}) \le S'(f,\mathscr{B}_1) + S'(f,\mathscr{B}_2) \le \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,,$$

e prendendo l'estremo superiore rispetto ad $\mathscr{A}$

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

La disuguaglianza opposta segue dalla seconda metà di (8.16).

Per dimostrare la seconda parte dell'enunciato, fissiamo $\varepsilon > 0$; per il teorema 8.3 esistono una suddivisione $\mathscr{A}_1$ di $[a,c]$ ed una suddivisione $\mathscr{A}_2$ di $[c,b]$ tali che

$$\Delta S(f,\mathscr{A}_1) < \varepsilon\,, \quad \Delta S(f,\mathscr{A}_2) < \varepsilon.$$

Allora $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2$ è una suddivisione di $[a,b]$, e

$$S''(f,\mathscr{A}) = S''(f,\mathscr{A}_1) + S''(f,\mathscr{A}_2)$$
$$S'(f,\mathscr{A}) = S'(f,\mathscr{A}_1) + S'(f,\mathscr{A}_2)\,;$$

per differenza si ottiene infine

$$\Delta S(f,\mathscr{A}) < 2\varepsilon\,,$$

che dimostra l'integrabilità di f grazie al teorema 8.3. L'uguaglianza tra gli integrali segue ora applicando la prima parte del teorema (✎ es. 8.1). ■

8.2 - Primitive

In questa sezione ci occupiamo del problema della determinazione di tutte le eventuali primitive di una funzione $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ assegnata; abbiamo già introdotto la definizione di primitiva di una funzione nel capitolo sulla derivazione (☞ sezione 7.4) dove abbiamo studiato le prime proprietà di tale importante concetto.

Il problema del calcolo delle primitive di una funzione sembra a priori indipendente dalla teoria dell'integrazione e dal problema del calcolo degli integrali; invece i due problemi sono strettamente collegati, ed il legame tra questi due rami dell'Analisi matematica è costituito dal teorema fondamentale del calcolo integrale, che illustreremo fra poco. Avremo bisogno di estendere la definizione di integrale ad un intervallo orientato.

Definizione : *se* $a > b$ *ed* f *è una funzione integrabile sull'intervallo* $[b,a]$ *definiamo*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,; \tag{8.17}$$

poniamo poi $\int_a^a f(x)\,dx = 0$. *La quantità* $\int_a^b f(x)\,dx$ *viene detta integrale definito di* f *da* a *a* b.

Osservazione : è facile vedere (dimostratelo per esercizio) che ora la formula (8.17) vale per ogni a, b, e che i teoremi della media integrale 8.12 e di spezzamento 8.13 restano validi senza più richiedere che $a < b$ o $a < c < b$, nel senso che comunque si prendano due numeri distinti a, b

$$\inf f \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \sup f$$

e che comunque si prendano a, b, c si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{8.18}$$

purché f sia integrabile sul più grande degli intervalli di estremi a, b, c. Si conserva anche la proprietà di linearità dell'integrale

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx\,,$$

mentre si perde la proprietà di monotonia, nel senso che se $a > b$ non vale più il teorema del confronto 8.10, ma anzi il suo opposto: se $a > b$ e $f \le g$ si ha (verificatelo per esercizio)

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale 8.14 : *sia* f *una funzione continua su un intervallo* I, *e sia* $a \in I$. *Allora la funzione* $F : I \to \mathbf{R}$ *definita da*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

è una primitiva di f *su* I.

DIMOSTRAZIONE : fissiamo un punto $x_0 \in I$; allora per la proprietà di spezzamento (8.18) vista prima si ha per ogni $x \in I$

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_{x_0}^a f(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt\,.$$

Se $x \ne x_0$, applicando il teorema della media integrale (☞ teorema 8.12) nell'intervallo di estremi x_0 ed x si ha, per la continuità di f,

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt = f(z(x))$$

con $z(x)$ tra x_0 ed x. Passando al limite per $x \to x_0$ si ha $z(x) \to x_0$ per il teorema dei carabinieri 6.5, e quindi $f(z(x)) \to f(x_0)$, di nuovo per la continuità di f; dunque

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f(z(x)) = f(x_0)\,.$$

Essendo x_0 scelto arbitrariamente in I si ha che F è una primitiva di f su I (➡ appendice 8.8). ■

Una volta conosciuta una qualsiasi primitiva di una funzione continua f, si possono immediatamente calcolare tutti gli integrali $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$, grazie al seguente risultato.

Teorema di Torricelli 8.15 : *sia f una funzione continua su un intervallo I, sia $a \in I$, e sia G una qualsiasi primitiva di f su I. Allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che*

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c \qquad \forall x \in I\,;$$

inoltre per ogni $\alpha, \beta \in I$ si ha

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)\,.$$

DIMOSTRAZIONE : poniamo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,;$$

per il teorema fondamentale del calcolo integrale questa è una primitiva di f, quindi la prima asserzione segue dalla proposizione 7.25. Allora usando la formula di spezzamento (8.18) otteniamo

$$G(\beta) - G(\alpha) = \big(F(\beta) + c\big) - \big(F(\alpha) + c\big) = \int_a^\beta f(t)\,dt - \int_a^\alpha f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt\,,$$

come volevasi dimostrare. ■

Il teorema precedente permette di ricondurre il calcolo degli integrali al problema di determinare una primitiva della funzione assegnata, così come il teorema fondamentale del calcolo integrale riconduce la ricerca di primitive al calcolo di integrali. Nel seguito useremo la comoda notazione $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, di modo che, se F è una primitiva di f, scriveremo

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b\,.$$

Esempio : riproviamo a calcolare $\int_a^b x\,dx$; dato che una primitiva di x è ad esempio $x^2/2$, per il teorema di Torricelli

$$\int_a^b x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}\,,$$

come avevamo già (faticosamente) ricavato usando direttamente la definizione.

Osservazione : dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene che se f è una funzione continua sull'intervallo I allora

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)\,.$$

Se, invece di essere costanti, gli estremi di integrazione sono due funzioni $a(x)$ e $b(x)$ derivabili su I, usando il teorema fondamentale del calcolo integrale ed il teorema di derivazione delle funzioni composte (☞ teorema 7.7) abbiamo che, fissato un punto a,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt &= \frac{d}{dx}\Big(\int_a^{b(x)} f(t)\,dt - \int_a^{a(x)} f(t)\,dt\Big)\\ &= \frac{d}{dx}\Big(F\big(b(x)\big) - F\big(a(x)\big)\Big)\\ &= f\big(b(x)\big)b'(x) - f\big(a(x)\big)a'(x)\,.\end{aligned}$$

Esempio : la derivata di

$$\int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt$$

è data da $2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$ (✎ es. 8.2).

Come abbiamo visto, il teorema di Torricelli asserisce che tutte le primitive di una funzione continua f su un intervallo I sono date da

$$F_c(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c$$

al variare di c in $\mathbb{R}$, con $a \in I$ fissato.

Definizione : *si dice integrale indefinito di f, e si indica con il simbolo*

$$\int f(x)\,dx\,,$$

l'insieme di tutte le primitive di una funzione f rispetto alla variabile x, cioè tutte le funzioni $F(x)$ tali che $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$.

Esempio : si ha $\int \cos x\,dx = \{f : \exists c \in \mathbb{R} : \forall x,\ f(x) = \operatorname{sen} x + c\}$.

Con un piccolo ma comodo abuso di notazione, se $F(x)$ è una primitiva di una data funzione f, indicheremo con $F(x) + c$ l'insieme di tutte le primitive di f su un intervallo, cioè l'integrale indefinito $\int f(x)\,dx$. Ad esempio scriveremo

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$$

anziché la più precisa ma anche più pesante notazione

$$\int \cos x\,dx = \{F : \exists c \in \mathbb{R} : F(x) = \operatorname{sen} x + c\}\,.$$

Va sottolineato che il simbolo $\int f(x)\,dx$ indica un insieme di funzioni e non una funzione, analogamente a quanto abbiamo convenuto anche per il simbolo $o(f)$, per cui vanno evitate espressioni del tipo "la primitiva della funzione tale ..." e simili. Ci troveremo talvolta davanti a scritture della forma

$$f(x) + \int g(x)\,dx\,, \qquad \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\,,$$

che sono rispettivamente la "somma" tra una funzione e un insieme di funzioni, e la "somma" fra due insiemi di funzioni (☞ appendice 6.16).

Definizione : *se* f *è una funzione e* G, H *sono due insiemi di funzioni, la somma di* f *e* G *e la somma di* G *ed* H *sono due insiemi di funzioni dati da*

$$f + G = \{f + g : g \in G\}\,, \qquad G + H = \{g + h : g \in G, h \in H\}\,.$$

Esempio : si ha $\operatorname{sen} x + \int e^x\,dx = \operatorname{sen} x + e^x + c$.

Osservazione : bisogna non dimenticare che la lettera c che compare qui è una lettera muta, perché ha origine dentro a un insieme, preceduta da un quantificatore, così che ad esempio i due insiemi

$$\{F(x) = \operatorname{sen} x + c :\ c \in \mathbb{R}\}\,, \qquad \{F(x) = \operatorname{sen} x + q :\ q \in \mathbb{R}\}$$

sono uguali, anche se con la nostra notazione abbreviata scriveremmo il primo $\operatorname{sen} x + c$ e il secondo $\operatorname{sen} x + q$. In particolare, se scriviamo

$$\int f_1(x)\,dx = F_1(x) + c \qquad \int f_2(x)\,dx = F_2(x) + c$$

dobbiamo stare attenti a scrivere

$$\int f_1(x)\,dx - \int f_2(x)\,dx = F_1(x) - F_2(x) + c\,,$$

e non semplifcare la c, analogamente a quanto si fa con una differenza di "o piccoli".

Nella tabella diamo una primitiva di alcune funzioni che si incontrano frequentemente; la verifica si ottiene facilmente per derivazione. Non è indispensabile conoscerle tutte a memoria, ma è utile ricordarsene molte, specialmente le prime; di alcune, la primitiva è immediata e si trova dalla tabella di derivate vista nel capitolo 7, mentre altre (ad esempio quella di $\log x$) sono state ricavate con i metodi di integrazione che vedremo più oltre.

Funzione	Primitiva
k (costante)	kx
$x^\alpha,\quad \alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
x^{-1}	$\log\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
$\tan x$	$-\log\lvert\cos x\rvert$

Funzione	Primitiva
$\log x$	$x(\log x - 1)$
$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$
$\tanh x$	$\log(\cosh x)$
$\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$	$-\dfrac{1}{\tan x}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$

Funzione	Primitiva
$\arcsen x$	$x \arcsen x + \sqrt{1-x^2}$
$\arccos x$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$
$\arctan x$	$x \arctan x - \log\sqrt{1+x^2}$
$\dfrac{1}{x^2+k^2},\quad k \neq 0$	$\dfrac{1}{k}\arctan\dfrac{x}{k}$
$\dfrac{1}{x^2-k^2},\quad k \neq 0$	$\dfrac{1}{2k}\log\left\lvert\dfrac{x-k}{x+k}\right\rvert$
$\dfrac{x}{x^2+k}$	$\log\sqrt{x^2+k}$
$\sqrt{x^2+k}$	$\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+k} + k\log\left\lvert x+\sqrt{x^2+k}\right\rvert\right)$
$\sqrt{k-x^2},\quad k > 0$	$\dfrac{k}{2}\left(\arcsen\dfrac{x}{\sqrt{k}} + \dfrac{x}{k}\sqrt{k-x^2}\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+k}},\quad k \neq 0$	$\log\left\lvert x+\sqrt{x^2+k}\right\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{k-x^2}},\quad k > 0$	$\arcsen\dfrac{x}{\sqrt{k}}$

Osservazione : dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che ogni funzione continua su un intervallo ammette una primitiva (unica a meno di somma di costanti); ricordiamo che ciò non vale per una funzione f qualsiasi: ad esempio la funzione f

definita in (7.10) non ha primitive. Naturalmente, questo non vuol dire che tutte le funzioni continue hanno primitive *facilmente* o *esplicitamente* calcolabili. Nella sezione 8.5 vedremo che per le funzioni razionali esiste un algoritmo che permette di calcolare una primitiva in maniera (teoricamente) semplice; invece esistono funzioni continue le cui primitive (che esistono, per il teorema fondamentale del calcolo integrale) non sono neppure esprimibili mediante funzioni elementari, cioè non sono somme, prodotti, composizioni di polinomi, seno, coseno, esponenziale, e loro inverse. Una di esse è la funzione $f(x) = e^{-x^2}$ (➡ appendice 8.14), un'altra è $g(x) = (\operatorname{sen} x)/x$, ma la dimostrazione che le loro primitive non sono esprimibili mediante funzioni elementari esula da un normale corso di Analisi matematica I.

8.3 - Metodi di integrazione

Ci occuperemo ora di alcuni metodi utili per il calcolo esplicito di primitive.

Teorema di integrazione per parti 8.16 : *sia f una funzione continua su un intervallo I, e sia $g \in C^1(I)$. Allora si ha, indicando con F una primitiva di f,*

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx\,, \tag{8.19}$$

dove l'uguaglianza, trattandosi di integrali indefiniti, è un'uguaglianza tra insiemi.

DIMOSTRAZIONE : si tratta semplicemente di verificare che derivando ambo i membri di (8.19) si ottiene la stessa funzione; derivando il secondo membro si ha per il teorema fondamentale (☞ teorema 8.14)

$$(Fg)' - Fg' = F'g = fg\,,$$

che non è altro che la derivata del primo membro di (8.19). ■

Osservazione : nelle ipotesi del teorema precedente su f e g la formula di integrazione per parti (8.19) fornisce, per il calcolo di integrali definiti, l'uguaglianza

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)\,dx = \Big[F(x)g(x)\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta F(x)g'(x)\,dx\,.$$

Notiamo che, un po' come i teoremi di de l'Hôpital 7.26 e 7.27, la formula di integrazione per parti permette di riportare il calcolo di un integrale (che non sappiamo eseguire) al calcolo di un integrale del tutto differente.

Teorema di integrazione per sostituzione 8.17 : *siano I, J due intervalli, e siano $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\varphi : J \to I$ una funzione di classe C^1. Allora si ha, indicando con F una primitiva di f,*

$$\int (f \circ \varphi)(x)\varphi'(x)\,dx = (F \circ \varphi)(x) + c\,. \tag{8.20}$$

DIMOSTRAZIONE : anche in questo caso si tratta di verificare che le derivate di ambo i membri di (8.20) coincidono. Derivando il secondo membro si ha

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi'\,,$$

che non è altro che la derivata del primo membro di (8.20). ■

Osservazione : anche la formula di integrazione per sostituzione (8.20) fornisce, per il calcolo di integrali definiti, l'utile uguaglianza (➡ appendice 8.16)

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt\,. \tag{8.21}$$

Grazie al teorema precedente, per calcolare $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$ ci basta calcolare $\int f(t)\,dt = F(t) + c$, e poi sostituire la variabile t con $\varphi(x)$ nel risultato che otteniamo. Per questo motivo, il teorema precedente si dice anche teorema di cambiamento di variabile negli integrali. Tuttavia, bisogna prestare attenzione a come viene scritta l'uguaglianza (8.20): non ha senso scrivere $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$, dato che per le nostre convenzioni il primo membro è una funzione di x che derivata rispetto ad x dà $f(\varphi(x))\varphi'(x)$, mentre il secondo membro è una funzione della variabile t (e non x), che quindi derivata rispetto ad x dà zero. Nel caso di integrali indefiniti è molto comodo utilizzare la formula di integrazione per sostituzione (8.20) mediante una notazione che metta in evidenza il cambiamento di variabile effettuato; ad esempio, si potrà scrivere, se il cambiamento di variabile è $t = \varphi(x)$, l'uguaglianza (8.20) nella forma

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \Big(\int f(t)\,dt\Big)_{t=\varphi(x)}$$

oppure nella forma

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi(x)=t}}{=} \int f(t)\,dt\,.$$

In quest'ultimo caso, è da intendersi che il simbolo fra i due integrali non è un "vero" segno di uguaglianza.

Osservazione : con le notazioni appena introdotte, applicando due volte il teorema 8.17 otteniamo la formula

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi(x)=t}}{=} \int f(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ t=\psi(y)}}{=} \int f(\psi(y))\psi'(y)\,dy\,,$$

cioè in definitiva

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx \underset{\varphi(x)=\psi(y)}{\overset{\uparrow}{=}} \int f(\psi(y))\psi'(y)\,dy\,.$$

Osserviamo che **al cambiamento di variabile**

$$\varphi(x)=\psi(y)$$

è associata una "formula di cambiamento dei differenziali"

$$\varphi'(x)\,dx=\psi'(y)\,dy\,;$$

nei corsi di Analisi matematica II viene generalmente data una sistemazione teorica a questa scrittura (✎ es. 8.8).

Esempio : integrando per parti si può calcolare $\int \log x\,dx$. Infatti prendendo nella formula di integrazione per parti $f(x)=1$ e $g(x)=\log x$ si ottiene

$$\int \log x\,dx = x\log x-\int x\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x + c = x(\log x-1)+c\,.$$

Esempio : ancora integrando per parti si può calcolare $\int x^n \log x\,dx$ per ogni $n\in\mathbb{N}$. Infatti, prendendo $f(x)=x^n$ e $g(x)=\log x$ si ottiene

$$\begin{aligned}\int x^n\log x\,dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\log x-\int\frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{x}\,dx\\ &=\frac{x^{n+1}}{n+1}\log x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+c\\ &=\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\log x-\frac{1}{n+1}\right)+c\,.\end{aligned}$$

Esempio : poniamo per ogni $n\in\mathbb{N}$

$$F_n(x)=\int x^n e^x\,dx\,;$$

osserviamo che è $F_0(x)=e^x+c$. Ancora usando la formula di integrazione per parti si può calcolare F_n : infatti prendendo $f(x)=e^x$ e $g(x)=x^n$ si ottiene

$$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$$

da cui la formula induttiva

$$\begin{cases}F_0(x)=e^x+c\\ F_{n+1}(x)=x^{n+1}e^x-(n+1)F_n(x)\,.\end{cases}\tag{8.22}$$

Ad esempio (✎ es. 8.15)

$$\begin{aligned}F_1(x)&=(x-1)e^x+c\\ F_2(x)&=(x^2-2x+2)e^x+c\\ F_3(x)&=(x^3-3x^2+6x-6)e^x+c\,.\end{aligned}$$

Esempio : posto per ogni $n\in\mathbb{N}$

$$F_n(x)=\int \log^n x\,dx\,,$$

possiamo determinare F_n integrando per parti, prendendo $f(x)=1$ e $g(x)=\log^n x$. Si ha

$$\int\log^n x\,dx = x\log^n x-\int n\log^{n-1}x\,dx$$

da cui la formula induttiva

$$\begin{cases}F_0(x)=x\\ F_{n+1}(x)=x\log^{n+1}(x)-(n+1)F_n(x)\,.\end{cases}\tag{8.23}$$

Ad esempio (✎ es. 8.16)

$$\begin{aligned}F_1(x)&=x(\log x-1)+c\\ F_2(x)&=x(\log^2 x-2\log x+2)+c\\ F_3(x)&=x(\log^3 x-3\log^2 x+6\log x-6)+c\,.\end{aligned}$$

Osserviamo che con la sostituzione $x=e^t$ il calcolo poteva essere ricondotto a quello dell'esempio precedente.

Esempio : cerchiamo ora di calcolare per ogni $n\in\mathbb{N}$ l'integrale indefinito

$$F_n(x)=\int \operatorname{sen}^n x\,dx\,.$$

Integrando per parti con $f(x)=\operatorname{sen} x$ e $g(x)=\operatorname{sen}^{n-1}x$ si ottiene

$$\begin{aligned}\int\operatorname{sen}^n x\,dx &= -\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\operatorname{sen}^{n-2}x\cos^2 x\,dx\\ &=-\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\operatorname{sen}^{n-2}x\,dx-(n-1)\int\operatorname{sen}^n x\,dx\,,\end{aligned}$$

quindi

$$n\int\operatorname{sen}^n x\,dx=-\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\operatorname{sen}^{n-2}x\,dx\,,$$

da cui la formula induttiva

$$\begin{cases}F_0(x)=x\\ F_1(x)=-\cos x\\ F_n(x)=\dfrac{n-1}{n}F_{n-2}-\dfrac{\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x}{n}\,.\end{cases}\tag{8.24}$$

Ad esempio si trova

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cos x) + c \\ F_3(x) &= -\frac{\cos x}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 x) + c \\ F_4(x) &= \frac{1}{8}(3x - 3\operatorname{sen} x \cos x - 2\operatorname{sen}^3 x \cos x) + c\,. \end{aligned}$$

Il caso $n = 2$, che si incontra con particolare frequenza, dà dunque

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cos x) + c\,. \tag{8.25}$$

In modo analogo si possono calcolare gli integrali del tipo (✎ es. 8.17)

$$G_n(x) = \int \cos^n x\,dx$$

ottenendo ad esempio

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cos x) + c\,. \tag{8.26}$$

Esempio : calcoliamo $\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$; osserviamo che la funzione integranda è definita solo per $x \le 0$, e che l'eponenziale è una funzione biunivoca tra $]-\infty, 0]$ e $]0, 1]$. Anche la funzione $\operatorname{sen} x$ è biunivoca fra $]0, \pi/2]$ e $]0, 1]$, ed effettuiamo nell'integrale la sostituzione $e^x = \operatorname{sen} t$ (più correttamente, sarebbe $e^x|_{]-\infty,0]} = \operatorname{sen} t|_{]0,\pi/2]}$), alla quale è associato il cambiamento dei differenziali

$$e^x\,dx = \cos t\,dt\,;$$

notiamo che negli intervalli scelti è $t = \operatorname{arcsen} e^x$. Abbiamo

$$\int \sqrt{1-e^{2x}}\,e^x\,dx \underset{e^x=\operatorname{sen} t}{\overset{\uparrow}{=}} \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,\cos t\,dt = \int |\cos t| \cos t\,dt\,.$$

Per la scelta del dominio della funzione $\operatorname{sen} t$, il coseno è non negativo (questo è un particolare la cui giustificazione viene spesso trascurata), quindi l'integrale si riduce a

$$\int \cos^2 t\,dt = \frac{t + \operatorname{sen} t \cos t}{2} + c \underset{\operatorname{sen} t = e^x}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{\operatorname{arcsen} e^x + e^x\sqrt{1-e^{2x}}}{2} + c$$

grazie a (8.26).

Esempio : senza ricorrere alla tabella delle primitive, calcoliamo $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$; la funzione integranda è definita in $[-1, 1]$, e possiamo porre $x = \operatorname{sen} t$ con $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ (quindi $\cos t \ge 0$), ottenendo

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2}\,dx &\underset{x=\operatorname{sen} t}{\overset{\uparrow}{=}} \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,\cos t\,dt \\ &= \int \cos^2 t\,dt \\ &= \frac{t + \operatorname{sen} t \cos t}{2} + c \\ &\underset{t=\operatorname{arcsen} x}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}}{2} + c\,, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato (8.26). Osserviamo poi che da questo risultato discende, per $k > 0$,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{k-x^2}\,dx &\underset{x=y\sqrt{k}}{\overset{\uparrow}{=}} \int \sqrt{k-ky^2}\,\sqrt{k}\,dy \\ &= k\int \sqrt{1-y^2}\,dy \\ &\underset{y=x/\sqrt{k}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{k}{2}\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{\sqrt{k}} + \frac{x}{k}\sqrt{k-x^2}\right) + c\,. \end{aligned}$$

Altri facili esempi di applicazione della formula di integrazione per sostituzione (8.20) sono dati dagli integrali

$$\int e^x \cos(e^x)\,dx = \left(\int \cos t\,dt\right)_{t=e^x} = \operatorname{sen}(e^x) + c$$

$$\int \frac{\log^2 x}{x}\,dx = \left(\int t^2\,dt\right)_{t=\log x} = \frac{\log^3 x}{3} + c$$

$$\int x \operatorname{sen}(x^2)\,dx = \left(\frac{1}{2}\int \operatorname{sen} t\,dt\right)_{t=x^2} = -\frac{\cos(x^2)}{2} + c\,.$$

Inoltre, la sostituzione $t = x - x_0$ può essere utile per determinare gli integrali di funzioni traslate

$$\int f(x-x_0)\,dx = \left(\int f(t)\,dt\right)_{t=x-x_0}.$$

I prossimi esempi ci saranno utili nella sezione 8.5.

Esempio : per calcolare $\int \arctan x\,dx$ conviene integrare per parti prendendo $f(x) = 1$ e $g(x) = \arctan x$; si ottiene

$$\int \arctan x\,dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx\,.$$

L'integrale indefinito al secondo membro si calcola per sostituzione prendendo $f(t) = 1/t$ e $\varphi(x) = 1 + x^2$. Si ha

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\Big(\int \frac{1}{t}\,dt\Big)_{t=1+x^2} = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c\,;$$

in definitiva quindi

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c\,.$$

Esempio : calcoliamo per induzione per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'integrale indefinito

$$I_n(x) = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx\,,$$

che per $n = 0$ e $n = 1$ è immediato. Dall'uguaglianza

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

si ricava

$$I_n(x) = I_{n-1}(x) - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx\,; \tag{8.27}$$

integrando per parti nell'ultimo integrale, con $f(x) = x/(1+x^2)^n$ e $g(x) = x$, si trova

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx = x\int \frac{x}{(1+x^2)^n}\,dx - \int\Big(\int \frac{x}{(1+x^2)^n}\,dx\Big)\,dx\,.$$

Con la sostituzione $x^2 = y$ si ha (per $n > 1$)

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(1+x^2)^n}\,dx &\underset{\substack{\uparrow\\ x^2=y}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+y)^n}\,dy \\ &= -\frac{1}{2(n-1)(1+y)^{n-1}} + c \\ &\underset{\substack{\uparrow\\ y=x^2}}{=} -\frac{1}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + c\,, \end{aligned} \tag{8.28}$$

da cui

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx &= -\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \int \frac{1}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}\,dx \\ &= -\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}(x)\,. \end{aligned}$$

In definitiva, la (8.27) diventa

$$\begin{aligned} I_n(x) &= I_{n-1}(x) + \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}(x) \\ &= \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}(x) + \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}\,, \end{aligned} \tag{8.29}$$

che è la formula induttiva cercata. Ad esempio

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \arctan x + c \\ I_2(x) &= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + c \\ I_3(x) &= \frac{3}{8}\arctan x + \frac{3}{8}\frac{x}{(1+x^2)} + \frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2} + c\,. \end{aligned}$$

Vediamo qualche esempio di calcolo di integrale definito: il primo è il calcolo dell'area di una figura piana.

Esempio : l'area dell'ellisse di semiassi a e b è data da πab ; per provarlo, osserviamo che basta calcolare l'area di un'ellisse centrata nell'origine, con un semiasse parallelo all'asse x e di lunghezza a , e l'altro parallelo all'asse y e di lunghezza b . Per calcolarla, data la simmetria dell'ellisse, possiamo limitarci al quarto di ellisse contenuto nel primo quadrante, e poi moltiplicare il risultato per quattro; dato che l'equazione (del bordo) dell'ellisse in questione è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, la figura di cui calcolare l'area (☞ figura 8.7) è il sottografico $\Gamma(f)$ della funzione $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ per $0 \le x \le a$.

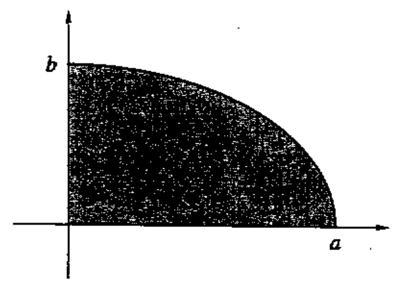


Fig. 8.7 : il sottografico di $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ per $0 \le x \le a$

Abbiamo (ripetiamo sostituzioni già viste, ma qui applichiamo la formula (8.21) per gli integrali definiti)

$$\text{Area}\,(\Gamma(f)) = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \underset{x=at}{\overset{\uparrow}{=}} b\int_0^1 \sqrt{a^2-a^2t^2}\,dt$$

$$= ab\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt \underset{t=\operatorname{sen} s}{\overset{\uparrow}{=}} ab\int_0^{\pi/2} \cos^2 s\,ds$$

$$= ab\Big[\frac{s+\operatorname{sen} s\cos s}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi ab}{4}\,,$$

e moltiplicando per 4 abbiamo l'area dell'ellisse.

Esempio : calcoliamo un altro integrale definito; notiamo che, come nell'esempio precedente, usiamo la formula (8.21) anziché prima trovare (dopo varie sostituzioni) una primitiva in un'altra variabile, poi ripercorrere al contrario i cambiamenti di variabile e infine calcolare l'integrale definito sostituendo gli estremi nella primitiva rispetto alla variabile originaria.

$$\int_{e^{\pi/4}}^{e^{\pi/2}} \frac{\operatorname{sen}^2(\log x)\,\cos(\log x)}{x}\,dx \underset{x=e^t}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t\cos t\,dt \underset{\operatorname{sen} t=s}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{\sqrt{2}/2}^{1} s^2\,ds$$

$$= \Big[\frac{s^3}{3}\Big]_{\sqrt{2}/2}^{1} = \frac{4-\sqrt{2}}{12}\,.$$

8.4 - Integrali generalizzati

Finora abbiamo definito l'integrale $\int_a^b f\,dx$ solo per le funzioni f *limitate* e definite su un intervallo $[a,b]$ *chiuso e limitato*; ci occuperemo ora del caso in cui una o entrambe di queste ipotesi vengano a mancare. Cominciamo con il caso di una funzione $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ non necessariamante limitata e dove b può eventualmente essere anche $+\infty$; supponiamo che f sia integrabile (dunque in particolare limitata) su ogni intervallo del tipo $[a,\beta]$ con $\beta < b$.

Definizione : *se esiste finito il limite*

$$\lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f(x)\,dx \tag{8.30}$$

diremo che f *è integrabile in senso generalizzato, o improprio, su* $[a,b[$ *ed il limite* (8.30) *verrà indicato con la scrittura*

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Se invece il limite (8.30) *esiste ed è uguale a* $+\infty$ $[-\infty]$ *diremo che l'integrale improprio è divergente positivamente* [*negativamente*], *e scriveremo*

$$\int_a^b f(x)\,dx = +\infty \qquad [-\infty]\,.$$

Infine, se il limite (8.30) *non esiste diremo che l'integrale* $\int_a^b f(x)\,dx$ *non ha senso (o non esiste).*

In modo analogo si definisce l'integrabilità generalizzata per le funzioni $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ che siano integrabili sugli intervalli del tipo $[\alpha,b]$ per ogni $\alpha > a$, ponendo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^b f(x)\,dx \tag{8.31}$$

se il limite esiste finito, eccetera.

Osservazione : se la funzione f è continua in $[a,b[$ l'ipotesi che f sia integrabile su ogni intervallo del tipo $[a,\beta]$ con $\beta < b$ è automaticamente verificata (☞ teorema 8.5).

Esempio : dalla definizione precedente si ottiene subito che:

$$\int_0^{+\infty} x\,dx = +\infty\,, \qquad \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \int_0^{+\infty}\operatorname{sen} x\,dx \quad \text{non esiste.}$$

Definizione : *se* f *è definita su* $]a,b[$ *ed è integrabile su* $[\alpha,\beta]$ *per ogni* $a<\alpha<\beta<b$, *scelto un punto* $c\in]a,b[$ *diremo che* f *è integrabile (in senso generalizzato) su* $]a,b[$ *se essa è integrabile su* $]a,c]$ *e su* $[c,b[$ *nel senso delle* (8.30) *e* (8.31), *ed in tal caso porremo*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Se uno solo degli integrali $\int_a^c f(x)\,dx$ *o* $\int_c^b f(x)\,dx$ *è divergente positivamente* [*negativamente*], *o se sono entrambi divergenti positivamente* [*entrambi divergenti negativamente*], *diremo che* $\int_a^b f(x)\,dx$ *diverge positivamente* [*negativamente*]. *In tutti gli altri casi, diremo che* $\int_a^b f(x)\,dx$ *non ha senso (o non esiste).*

Osservazione : la definizione precedente è ben posta, nel senso che se anziché il punto c scegliessimo un altro punto c' avremmo per ogni $\alpha,\beta\in]a,b[$

$$\int_\alpha^c f(x)\,dx + \int_c^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^{c'} f(x)\,dx + \int_{c'}^\beta f(x)\,dx$$

e dunque

$$\lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^c f(x)\,dx + \lim_{\beta\to b^-}\int_c^\beta f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^{c'} f(x)\,dx + \lim_{\beta\to b^-}\int_{c'}^\beta f(x)\,dx\,.$$

Osservazione : abbiamo spezzato l'intervallo $]a,b[$ nei due intervalli $]a,c]$ e $[c,b[$, in modo che in ognuno di essi fosse possibile applicare, in uno o nell'altro estremo, la definizione (8.30) o la (8.31). Nel seguito ci limiteremo, salvo che in qualche caso particolare, a trattare l'integrabilità di funzioni f definite su intervalli (o su unioni finite di intervalli) che siano illimitate solo intorno ad un numero finito di punti; in tal caso si divide il dominio di f in tanti sottointervalli in modo che in ciascuno di essi la funzione f risulti illimitata solo intorno ad uno degli estremi, e si richiede che f sia integrabile in senso generalizzato in ognuno di tali sottointervalli, secondo le definizioni precedenti. Se invece l'integrale di f su uno di tali intervalli, o su varî di essi, diverge, ma sempre positivamente o sempre negativamente, diremo che l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

Osservazione : per gli integrali generalizzati valgono le proprietà di somma, confronto, spezzamento analoghe a quelle viste nei teoremi 8.8, 8.10, 8.13; vi invitiamo a svolgere la dimostrazione per esercizio.

Osservazione : avremmo potuto pensare di definire l'integrale di una funzione definita su un intervallo limitato $]a,b[$ senza spezzare l'intervallo, semplicemente considerando il limite

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\,.$$

Tuttavia il risultato di questa operazione è diverso dall'integrale generalizzato, in quanto con questa scelta risulterebbero "integrabili" anche funzioni che non rientrano nella nostra definizione, e non varrebbe più la formula di spezzamento! Ad esempio, è facile verificare che

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan x\,dx$$

non ha senso, mentre

$$\int_{-\pi/2+\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon} \tan x\,dx = 0$$

per ogni ε, e lo spezzamento in

$$\int_{-\pi/2}^{0} \tan x\,dx + \int_{0}^{\pi/2} \tan x\,dx$$

è la scrittura $(-\infty)+(+\infty)$.

Il prossimo risultato è di facile dimostrazione, ma di grande importanza.

Proposizione 8.18 : *se una funzione f è non negativa sull'intervallo $[a,b[$, ed è integrabile su $[a,\beta]$ per ogni $\beta<b$, l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ esiste; inoltre tale integrale può solo essere o finito oppure positivamente divergente.*

DIMOSTRAZIONE : consideriamo la funzione

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt\,,$$

che è definita per $x<b$; dobbiamo provare che esiste, finito o infinito, il limite

$$\lim_{x\to b^-} F(x)\,. \tag{8.32}$$

Fissiamo $x<y<b$; dato che $f(x)\ge 0$ sull'intervallo $[x,y]$, per il teorema del confronto (☞ teorema 8.10) e per (8.2)

$$\int_x^y f(t)\,dt \ge 0\,,$$

quindi usando la formula di spezzamento (8.18)

$$F(y)=F(x)+\int_x^y f(t)\,dt \ge F(x)\,.$$

Abbiamo provato che F è monotona debolmente crescente, quindi l'esistenza del limite (8.32), e l'ultima asserzione del teorema, seguono dal teorema 6.13. ■

Osservazione : è chiaro che la proposizione precedente vale anche per funzioni non positive, oppure per intervalli $]a,b]$, e di conseguenza per intervalli $]a,b[$.

Esempio : consideriamo la funzione $1/x^\alpha$ definita in $]0,1]$; dato che è positiva, l'integrale $\int_0^1 (1/x^\alpha)\,dx$ ha sempre senso (☞ proposizione 8.18). Se $\alpha\le 0$ la funzione risulta integrabile nel senso di Riemann (non serve quello generalizzato); se invece $\alpha>0$ si ha per ogni $\varepsilon>0$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx=\begin{cases}-\log\varepsilon & \text{se } \alpha=1\\ \dfrac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{se } \alpha\ne1\end{cases}$$

per cui, passando al limite per $\varepsilon\to0^+$, si ottiene che

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx<+\infty \quad\iff\quad \alpha<1 \tag{8.33}$$

e che se $\alpha<1$ l'integrale (generalizzato se $\alpha>0$) vale $1/(1-\alpha)$.

Esempio : la funzione $f(x)=1/x^\alpha$, definita in $[1,+\infty[$, ha evidentemente integrale divergente positivamente se $\alpha\le0$ (infatti avremmo $f(x)\ge1$ per ogni x); se invece è $\alpha>0$ si ha per ogni $y>1$

$$\int_1^y \frac{1}{x^\alpha}\,dx=\begin{cases}\log y & \text{se } \alpha=1\\ \dfrac{y^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha\ne1\end{cases}$$

per cui, passando al limite per $y\to+\infty$, si ottiene che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx<+\infty \quad\iff\quad \alpha>1\,, \tag{8.34}$$

e che se $\alpha>1$ l'integrale generalizzato vale $1/(\alpha-1)$.

Osservazione : da quanto detto finora si deduce che per ogni numero reale α si ha $\int_0^{+\infty} x^\alpha\,dx = +\infty$; inoltre, operando la sostituzione $x - x_0 = t$ si ricava che la funzione $f(x) = |x - x_0|^\alpha$ è integrabile in un intorno di x_0 se e solo se $\alpha > -1$, mentre è integrabile in un intorno di $-\infty$ o di $+\infty$ se e solo se $\alpha < -1$.

Osservazione : va osservato che l'integrale $\int_{-1}^{1}(1/x)\,dx$ non esiste in quanto, come visto nell'esempio precedente, si ha

$$\int_{-1}^{0} x^{-1}\,dx = -\infty\,, \qquad \int_{0}^{1} x^{-1}\,dx = +\infty\,.$$

Bisogna stare attenti a non farsi indurre in errore dal fatto che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha (essendo la funzione x^{-1} dispari)

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} x^{-1}\,dx + \int_{\varepsilon}^{1} x^{-1}\,dx = 0\,,$$

oppure a non applicare con troppa disinvoltura il teorema fondamentale del calcolo integrale (riguardate le ipotesi!) concludendo che

$$\int_{-1}^{1} x^{-1}\,dx = \Big[\log|x|\Big]_{-1}^{1} = 0\,.$$

Il prossimo risultato permette di studiare la convergenza di un integrale generalizzato mediante il confronto con integrali generalizzati convergenti.

Teorema 8.19 : *siano* $f, \varphi : [a,b[\to \mathbb{R}$ *due funzioni tali che*
1) f *è integrabile su ogni intervallo* $[a,c]$ *con* $c < b$
2) $|f(x)| \le \varphi(x)$ *per ogni* $x \in [a,b[$
3) φ *è integrabile in senso generalizzato su* $[a,b[$.

Allora anche f *risulta integrabile in senso generalizzato su* $[a,b[$.

DIMOSTRAZIONE : consideriamo la funzione f^+ , la parte positiva di f ; dato che $f^+(x) \ge 0$, per la proposizione 8.18 l'integrale $\int_a^b f^+(x)\,dx$ esiste. Poi, per l'ipotesi 2) abbiamo $f^+ \le |f| \le \varphi$, quindi per il teorema del confronto 8.10 applicato agli integrali generalizzati otteniamo

$$\int_a^b f^+(x)\,dx \le \int_a^b \varphi(x)\,dx < +\infty$$

grazie a 3), dunque f^+ è integrabile. Dato che lo stesso ragionamento si applica alla parte negativa f^- , anche questa funzione (e anche la sua opposta) è integrabile, pertanto lo è anche la funzione $f = f^+ - f^-$. ■

Osservazione : basta che le ipotesi 2) e 3) del teorema precedente siano verificate in un intorno sinistro di b , anziché in tutto $[a,b[$; infatti, se queste valgono in $[\alpha,b[$ basta spezzare ogni integrale in uno su $[a,\alpha]$ e uno sul rimanente.

Osservazione : naturalmente, vale un risultato analogo anche per funzioni definite su intervalli del tipo $]a,b]$ o del tipo $]a,b[$.

Esempio : la funzione

$$f(x) = \frac{1+\operatorname{sen} x}{\sqrt{|x|}}$$

è integrabile su $[-1,1]$; infatti, basta applicare il teorema del confronto 8.19 con

$$\varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{|x|}}\,,$$

separatamente nei due intervalli $[-1,0[$ e $]0,1]$, e ricordare l'esempio (8.33).

Il criterio del confronto per integrali generalizzati si usa il più delle volte nella forma seguente.

Proposizione 8.20 : *siano* $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ *due funzioni continue, non negative in un intorno di* b *e tali che*

$$f \sim g \qquad \text{per } x \to b^-\,.$$

Allora f *è integrabile in senso generalizzato su* $[a,b[$ *se e solo se lo è* g .

La dimostrazione si deduce facilmente dal teorema 8.19 ed è lasciata per esercizio.

Esempio : se consideriamo la funzione $f(x) = 1/(x\log^\beta x)$, definita in $[\mathrm{e},+\infty[$ (con $\beta > 0$), si ha che f è positiva, e per ogni $y > \mathrm{e}$

$$\int_{\mathrm{e}}^{y} f(x)\,dx = \begin{cases} \log\log y & \text{se } \beta = 1 \\ \dfrac{(\log y)^{1-\beta} - 1}{1-\beta} & \text{se } \beta \ne 1, \end{cases}$$

per cui, passando al limite per $y \to +\infty$, si ottiene che

$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{x\log^\beta x}\,dx < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \beta > 1\,, \tag{8.35}$$

e che se $\beta > 1$ l'integrale generalizzato vale $1/(\beta-1)$.

Esempio : consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{(1+\mathrm{e}^{-x})\sqrt{x^3(x+1)}}{x^2(1+x\sqrt{x}) + 1 - \cos x}\,;$$

dato che $1 - \cos x \ge 0$ per ogni x , il denominatore è definito e positivo per ogni $x > 0$, mentre il numeratore è definito per $x \le -1$ e per $x \ge 0$, quindi il dominio di f è l'intervallo $]0,+\infty[$. Studiamone l'integrabilità: notiamo che f è continua, dunque è integrabile su $[\alpha,\beta]$ per ogni $0<\alpha<\beta$. Applicando i risultati precedenti, determiniamo se è o no integrabile in zero e a $+\infty$: scelto $a>0$, osserviamo che per $x\to 0^+$ è $(1+e^{-x})\sqrt{x+1}\to 2$, quindi

$$[(1+e^{-x})\sqrt{x^3(x+1)}]\sim 2\sqrt{x^3}=2x^{3/2} \qquad \text{per } x\to 0^+ ; \tag{8.36}$$

invece $1-\cos x=(x^2/2)+o(x^2)$, dunque

$$[x^2(1+x\sqrt{x})+1-\cos x]=\frac{3}{2}x^2+o(x^2)\sim\frac{3}{2}x^2 \qquad \text{per } x\to 0^+ .$$

Da questa e (8.36) segue che

$$f(x)\sim\frac{4}{3x^{1/2}} \qquad \text{per } x\to 0^+ ,$$

ed è dunque integrabile su $]0,a]$ per la (8.33) e per la proposizione 8.20. Analogamente si vede (controllatelo per esercizio) che

$$f(x)\sim\frac{x^2}{x^3\sqrt{x}}=\frac{1}{x^{3/2}} \qquad \text{per } x\to+\infty ,$$

e per la (8.34) la funzione f è integrabile anche su $[a,+\infty[$. Unendo i due risultati abbiamo l'integrabilità su $]0,+\infty[$.

Esempio : per ogni $t>0$, la funzione e^{-tx} è integrabile su $[a,+\infty[$, come mostra il calcolo diretto

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} e^{-tx}\,dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_a^b e^{-tx}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{e^{-tx}}{t}\right]_a^b \\ &= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{e^{-ta}-e^{-tb}}{t}\right)=\frac{e^{-ta}}{t} .\end{aligned} \tag{8.37}$$

Esempio : per ogni $n\in\mathbb{N}$ si ha

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx<+\infty ; \tag{8.38}$$

infatti per (6.22) abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{x/2}}=0 ,$$

quindi

$$x^n e^{-x}=\frac{x^n}{e^{x/2}}e^{-x/2}=o(e^{-x/2}) ;$$

in particolare in un intorno di $+\infty$ si ha $x^n e^{-x}\le e^{-x/2}$, e la tesi segue dal teorema 8.19 grazie a (8.37).

Esempio : anche se non possiamo scriverne esplicitamente le primitive, la funzione e^{-x^2} è integrabile su tutto $\mathbb{R}$; infatti, dato che è una funzione pari possiamo limitarci (☞ esercizio 8.10) a studiarne l'integrabilità su $[0,+\infty[$. Inoltre, dal fatto che $(x-1/2)^2\ge 0$ deduciamo $x^2\ge x-1/4$, quindi

$$e^{-x^2}\le e^{-x+1/4}=e^{1/4}e^{-x} ,$$

e grazie a (8.37) possiamo applicare il criterio del confronto (☞ teorema 8.19) ottenendo che e^{-x^2} è integrabile, con la stima

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\le 2e^{1/4}\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx=2e^{1/4} . \tag{8.39}$$

In modo analogo si può vedere che per ogni $n\in\mathbb{N}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^n e^{-x^2}\,dx<+\infty$$

(✎ es. 8.19).

Vediamo come talvolta, anche se non possiamo o non vogliamo determinare esplicitamente una primitiva, possiamo dire qualcosa sulla sua forma.

Esempio : studiamo la funzione

$$F(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt .$$

Di questa sappiamo il valore in zero, che è zero, e la derivata, in quanto per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$F'(x)=e^{-x^2} ;$$

osserviamo poi che con un cambio di variabile

$$F(-x)=\int_0^{-x} e^{-t^2}\,dt \underset{t=-s}{=} -\int_0^x e^{-s^2}\,ds=-F(x) ,$$

cioè F è dispari. Dato che la derivata è sempre positiva, F è crescente su tutto $\mathbb{R}$, e in particolare ha limite sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Dato che e^{-x^2} è integrabile su $[0,+\infty[$, tale limite è finito, ed è uguale a (➡ appendice 8.14)

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\lambda .$$

Osserviamo pure che

$$F''(x)=-2xe^{-x^2} ,$$

dunque F è convessa su $\mathbb{R}^-$ e concava su $\mathbb{R}^+$; considerando che $F'(0)=1$, possiamo tracciare un grafico approssimativo di F (✎ es. 8.39).

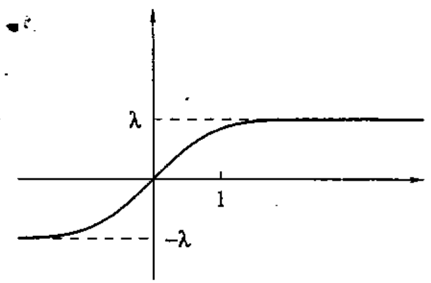


Fig. 8.8 : grafico di $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

A conclusione di questa sezione vogliamo ricordare che, quando si ha a che fare con un integrale generalizzato, nella maggior parte dei casi si è interessati a stabilire come prima cosa se esso è convergente, dopo di che si può tentare di calcolarlo esplicitamente o di darne un'approssimazione numerica. Per studiarne la convergenza si andranno a considerare i punti intorno ai quali la funzione integranda non è limitata (punti "singolari"), ed eventualmente i punti $-\infty$ e $+\infty$ (se l'intervallo di definizione non è limitato). In un intorno di tali punti lo studio della convergenza dell'integrale generalizzato si potrà effettuare usando il criterio del confronto (☞ teorema 8.19 e proposizione 8.20). Se i punti suddetti sono in numero finito, l'integrale risulterà convergente se e solo se lo sarà in un intorno di ognuno dei punti esaminati; se invece si ha una successione di punti "singolari", dovremo studiare la convergenza di una serie di integrali, ☞ esempio (9.9).

8.5 - Integrazione delle funzioni razionali

In questa sezione ci occuperemo del calcolo delle primitive delle funzioni razionali; vedremo che ciascuna è dotata di una primitiva esprimibile mediante somme, prodotti, composizione o funzioni inverse di polinomi, funzioni trigonometriche, esponenziale.

Siano

$$A(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m \qquad (a_0 \neq 0)$$
$$B(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n \qquad (b_0 \neq 0)$$

due polinomi a coefficienti reali, primi tra loro (cioè che non hanno radici comuni), e consideriamo la funzione razionale

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$$

definita su $\{x \in \mathbb{R} : B(x) \neq 0\}$; la determinazione di una primitiva di f sarà ottenuta in diversi passi. Ci interessa qui, più che dare una dimostrazione rigorosa del fatto che le primitive delle funzioni razionali possono essere calcolate elementarmente, fornire un algoritmo utile per il calcolo, per cui i varî passi verranno presentati come una sorta di "ricetta".

Passo 1 : se $n = 0$ la funzione f è un polinomio di grado m, ed una sua primitiva si ottiene immediatamente. Se invece $n \geq 1$, ci si riduce al caso $m < n$ eseguendo la divisione di A per B: si ottiene (☞ sezione 1.1)

$$\frac{A(x)}{B(x)} = A_1(x) + \frac{R(x)}{B(x)},$$

e dunque una primitiva di f si ricava sommando una primitiva del polinomio A_1 ad una primitiva della funzione razionale R/B, dove ora il grado del numeratore, che è il polinomio resto R, è minore del grado di B.

Passo 2 : si calcolano ora le radici complesse del polinomio B, che in totale, se contate ciascuna con la sua molteplicità, sono n (☞ teorema 3.38). Tenuto conto che B è un polinomio a coefficienti reali si ha (☞ proposizione 3.39) che se $z = \alpha + i\beta$ è una radice complessa di B, allora anche il coniugato $\bar{z} = \alpha - i\beta$ di z è una radice di B, con la stessa molteplicità; inoltre si ha

$$\big(x - (\alpha + i\beta)\big)\big(x - (\alpha - i\beta)\big) = (x - \alpha)^2 + \beta^2 .$$

Indichiamo con x_j ($j = 1, \ldots, r$) le radici reali di B e con k_j le rispettive molteplicità, e con $z_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\bar{z}_j = \alpha_j - i\beta_j$ ($j = 1, \ldots, s$) le coppie di radici complesse coniugate (non reali) di B, con rispettive molteplicità h_j.

Passo 3 : supponendo $b_0 = 1$, come si può sempre ottenere dividendo numeratore e denominatore per b_0, scriviamo il polinomio B nella forma

$$B(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_r)^{k_r} \big((x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2\big)^{h_1} \cdots \big((x - \alpha_s)^2 + \beta_s^2\big)^{h_s},$$

dove $k_1 + \cdots + k_r + 2h_1 + \cdots + 2h_s = n$. La funzione razionale f si può allora decomporre nella forma

$$\begin{aligned}
\frac{R(x)}{B(x)} = {} & \frac{a_{11}}{x - x_1} + \cdots + \frac{a_{1k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} \\
& \vdots \\
& + \frac{a_{r1}}{x - x_r} + \cdots + \frac{a_{rk_r}}{(x - x_r)^{k_r}} \\
& + \frac{p_{11}x + q_{11}}{(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \cdots + \frac{p_{1h_1}x + q_{1h_1}}{\big((x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2\big)^{h_1}} \qquad (8.40) \\
& \vdots \\
& + \frac{p_{s1}x + q_{s1}}{(x - \alpha_s)^2 + \beta_s^2} + \cdots + \frac{p_{sh_s}x + q_{sh_s}}{\big((x - \alpha_s)^2 + \beta_s^2\big)^{h_s}},
\end{aligned}$$

dove i coefficienti a_{ij}, p_{ij}, q_{ij} sono numeri reali da determinare. Per la determinazione dei coefficienti a_{ij}, p_{ij}, q_{ij}, che in totale sono n, si moltiplicano primo e secondo membro di (8.40) per $B(x)$, ottenendo così un'uguaglianza tra polinomi. Uguagliando tra loro i rispettivi coefficienti, otteniamo un sistema lineare che è sempre risolubile (➡ appendice 8.17), e fornisce come soluzioni gli n numeri cercati.

Passo 4 : a questo punto, per calcolare una primitiva di f, basta saper determinare per ogni intero $r \geq 1$ ed ogni $a, p, q, x_0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ le primitive

$$\int \frac{a}{(x-x_0)^r}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int \frac{px+q}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^r}\,dx\,.$$

Il primo integrale indefinito è elementare, e

$$\int \frac{a}{(x-x_0)^r}\,dx = \begin{cases} a\log|x-x_0| + c & \text{se } r=1 \\ a\dfrac{(x-x_0)^{1-r}}{1-r} + c & \text{se } r>1. \end{cases} \tag{8.41}$$

Per il calcolo del secondo integrale indefinito abbiamo

$$\begin{aligned} \int \frac{px+q}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^r}\,dx &\underset{x=\alpha+\beta t}{\overset{\uparrow}{=}} \int \frac{p(\alpha+\beta t)+q}{\beta^{2r}(1+t^2)^r}\beta\,dt \\ &= \frac{p}{\beta^{2r-2}}\int \frac{t}{(1+t^2)^r}\,dt + \frac{p\alpha+q}{\beta^{2r-1}}\int \frac{1}{(1+t^2)^r}\,dt\,. \end{aligned} \tag{8.42}$$

L'integrale indefinito $\int \left(t/(1+t^2)^r\right) dt$ si calcola facilmente e si ha, ☞ formula (8.28),

$$\int \frac{t}{(1+t^2)^r}\,dt = \begin{cases} \dfrac{\log(1+t^2)}{2} + c & \text{se } r=1 \\ \dfrac{(1+t^2)^{1-r}}{2(1-r)} + c & \text{se } r>1. \end{cases}$$

L'ultimo integrale indefinito in (8.42) si determina per induzione, ☞ formula (8.29):

$$\begin{cases} I_1(t) = \arctan t + c \\ I_r(t) = \dfrac{2r-3}{2r-2}I_{r-1}(t) + \dfrac{t}{2(r-1)(1+t^2)^{r-1}}\,. \end{cases}$$

Risostituendo la variabile x, e mettendo insieme le varie primitive ottenute, si ricava una primitiva della funzione razionale assegnata (✎ es. 8.40).

Osservazione : per determinare, nella fattorizzazione di B vista nel passo 3 precedente, i fattori quadratici del tipo $(x-\alpha_j)^2+\beta_j^2$ derivanti dalle radici complesse coniugate, talvolta non è necessario calcolare le radici $\alpha_j \pm i\beta_j$, perché può risultare più semplice ottenere ciascuno di tali fattori direttamente in forma di trinomio $x^2+A_jx+B_j$. Si ha ad esempio

$$\begin{aligned} &x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1) \\ &x^4+1 = [(x^2+1)^2-2x^2] = (x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1) \\ &x^4+6x^2+25 = (x^2+5)^2-4x^2 = (x^2-2x+5)(x^2+2x+5)\,. \end{aligned}$$

Esempio : usando i passi precedenti si può decomporre la funzione razionale $\dfrac{x^2+2x+3}{x(1+x^2)}$ nella somma

$$\frac{x^2+2x+3}{x(1+x^2)} = \frac{3}{x} + \frac{2-2x}{1+x^2}\,,$$

per cui si ottiene

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2x+3}{x(1+x^2)}\,dx &= 3\log|x| + 2\arctan x - \log(1+x^2) + c \\ &= 2\arctan x + \log\left(\frac{|x|^3}{1+x^2}\right) + c\,. \end{aligned}$$

Esempio : per calcolare una primitiva di $1/(x^2+x^4)$ calcoliamo le radici complesse del denominatore, che sono $x=0$ (con molteplicità 2) e $x=\pm i$ (con molteplicità 1); dato che $(x+i)(x-i) = 1+x^2$, si ha

$$\frac{1}{x^2+x^4} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{cx+d}{1+x^2}\,,$$

da cui si ricava facilmente

$$a=0\,,\qquad b=1\,,\qquad c=0\,,\qquad d=-1\,.$$

Dunque le primitive sono date da

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + c\,.$$

Esempio : la frazione

$$\frac{x^5+3x^3+x}{(1+x^2)^2}$$

si può riscrivere, dividendo il numeratore per il denominatore, come

$$x + \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\,.$$

Occupiamoci dell'ultima frazione: le radici complesse del denominatore sono $x = \pm i$ (con molteplicità 2), per cui

$$\frac{x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{ax+b}{1+x^2} + \frac{cx+d}{(1+x^2)^2}\,.$$

Si trovano i coefficienti incogniti

$$a=1\,,\qquad b=0\,,\qquad c=-1\,,\qquad d=0$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5+3x^3+x}{(1+x^2)^2}\,dx &= \int x\,dx + \int \frac{x}{1+x^2}\,dx - \int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(1+x^2) + \frac{1}{2(1+x^2)} + c\,. \end{aligned}$$

Osservazione : nel caso in cui il denominatore B abbia una sola radice reale x_0 di molteplicità r, conviene talvolta scrivere anche il numeratore A come polinomio rispetto ad $x - x_0$. Ad esempio

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^2+4(x-1)+6}{(x-1)^3} = \frac{1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{6}{(x-1)^3},$$

per cui

$$\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)^3}\,dx = \log|x-1| - \frac{4}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2} + c\,.$$

Vi sono poi molti casi in cui un integrale può essere riportato all'integrale di una funzione razionale tramite un cambiamento di variabile; ne mostriamo qui solo due esempi, rimandando all'appendice per altri casi interessanti (➡ appendice 8.18) e altri possibili metodi di integrazione (➡ appendice 8.19).

Esempio : calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{e^x-2}{e^x+2}\,dx\,;$$

con il cambiamento di variabile $e^x = t$, a cui è associato il cambiamento dei differenziali $e^x\,dx = dt$, abbiamo

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x-2}{e^x+2}\,dx &= \int \frac{e^x-2}{(e^x+2)e^x}e^x\,dx \underset{e^x=t}{\overset{\uparrow}{=}} \int \frac{t-2}{(t+2)t}\,dt \\ &= \int\Big(\frac{2}{t+2} - \frac{1}{t}\Big)\,dt = \log\frac{(t+2)^2}{|t|} + c \\ &\underset{t=e^x}{\overset{\uparrow}{=}} \log(e^x+2)^2 - x + c\,.\end{aligned}$$

Esempio : calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{1}{2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x\cos x}\,dx\,;$$

con il cambiamento di variabile $\cos x = t$, che dà anche $-\operatorname{sen} x\,dx = dt$, otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(2+\cos x)\operatorname{sen} x}\,dx &= \int \frac{1}{(2+\cos x)(-\operatorname{sen}^2 x)}(-\operatorname{sen} x)\,dx \\ &\underset{\cos x=t}{\overset{\uparrow}{=}} \int \frac{1}{(2+t)(t^2-1)}\,dt\,.\end{aligned} \tag{8.43}$$

A questo punto, un errore frequente è svolgere il prodotto al denominatore, senza pensare che poi di questo denominatore (di terzo grado) dovremo trovare le radici, che nella forma (8.43) sono invece già scritte! Le radici sono $-2, -1, 1$, tutte con molteplicità 1, e da

$$\frac{1}{(t+2)(t+1)(t-1)} = \frac{a}{t+2} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t-1}$$

si ricava facilmente

$$a = \frac{1}{3}\,, \qquad b = -\frac{1}{2}\,, \qquad c = \frac{1}{6}\,:$$

allora

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(2+\cos x)\operatorname{sen} x}\,dx &\underset{\cos x=t}{\overset{\uparrow}{=}} \int\Big(\frac{1/3}{t+2} - \frac{1/2}{t+1} + \frac{1/6}{t-1}\Big)\,dt \\ &= \frac{\log|t+2|}{3} - \frac{\log|t+1|}{2} + \frac{\log|t-1|}{6} + c \\ &\underset{t=\cos x}{\overset{\uparrow}{=}} \log\frac{\sqrt[3]{2+\cos x}\,\sqrt[6]{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}} + c\,.\end{aligned}$$

Esercizi relativi al capitolo 8

Esercizio 8.1 : dimostrate le seguenti generalizzazioni della proposizione 8.7:

a) se f è una funzione continua su $[a,b]$ tale che

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0 \qquad \forall[\alpha,\beta]\subset[a,b]$$

allora f è nulla;

b) se f è una funzione continua su $[a,b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \forall\varphi\in \mathrm{C}^0([a,b])$$

allora f è nulla;

c) se f è una funzione continua su $[a,b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \forall\varphi\in \mathrm{C}^0([a,b]) \quad \text{tale che } \varphi(a)=\varphi(b)=0$$

allora f è nulla;

d) se f è una funzione continua su $[a,b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \forall\varphi\in \mathrm{C}^0([a,b]) \quad \text{tale che } \int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$$

allora f è costante.

Esercizio 8.2 : indicata con f la funzione definita da

$$f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\,,$$

calcolate il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)-f(2x)}{x-f(x)}\,.$$

Esercizio 8.3 : calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni:

a) $\displaystyle\int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x}\sqrt{1-t^2}\,dt$

b) $\displaystyle\int_{2x}^{x^2}\frac{e^t}{t}\,dt$

c) $\displaystyle\int_x^{x^2}\sqrt{te^t}\,dt$

d) $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\,.$

Esercizio 8.4 : scrivete lo sviluppo di Taylor di punto iniziale l'origine delle seguenti funzioni:

a) $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ (fino all'ordine 2)

b) $\displaystyle\int_1^{1+x}\frac{\log t}{t}\,dt$ (fino all'ordine 2)

c) $\displaystyle\operatorname{sen}\Big(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\Big)$ (fino all'ordine 3).

Esercizio 8.5 : sia $f(x)$ la funzione definita da

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt\,;$$

dimostrate che l'equazione $f(x) = 1-x$ ha un'unica soluzione su $\mathbb{R}$ e determinate tale soluzione con un errore inferiore a $3/10$.

Esercizio 8.6 : calcolate $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\int_0^x(e^{-t^2}+\operatorname{sen}^2 t)\,dt}{x(x^2-\operatorname{sen}^2 x)}\,.$

Esercizio 8.7 : determinate ordine e parte principale dei seguenti infinitesimi per $x\to 0$:

a) $\displaystyle x-\int_0^x e^{-(t+x)^2}\,dt$

b) $\displaystyle\int_{x-\operatorname{sen} x}^{x^3}\frac{\log(1+t)}{1+t^2}\,dt\,.$

Esercizio 8.8 : determinate una primitiva delle seguenti funzioni:

a) $\dfrac{\tan x}{\cos^2 x}$

b) $\operatorname{sen}^5 x$

c) xe^{x^2}

d) $\dfrac{1}{\operatorname{senh} x}$

e) $\tanh^3 x$
f) $\tan^4 x$
g) $\dfrac{1}{1-\tanh x}$
h) $\dfrac{1}{\operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x}$
i) $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x$
j) $\operatorname{sen} \alpha x \operatorname{sen} \beta x$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
k) $e^{ax} \operatorname{sen} x$, con $a \in \mathbb{R}$
l) $e^{\sqrt{x}}$
m) $\operatorname{arcsen} x$
n) $\log(x + \sqrt{1+x^2})$
o) $\operatorname{sen}(\log x)$
p) $\dfrac{x^3+x+1}{x^2+1}$
q) $\operatorname{senh}^2 x$
r) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}$
s) $\sqrt{x} \operatorname{sen} x$
t) $\dfrac{\arctan(e^x)}{e^x + e^{-x}}$
u) $x^2 \arctan x$
v) $\arctan \sqrt{x}$
w) $\dfrac{\arctan x}{(1+x)^2}$
x) $2x^{1+2x^2}(1 + 2\log x)$
y) $\dfrac{1}{x \log(ax) \log(bx)}$, con $a, b > 0$.

Esercizio 8.9 : sia $a = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$; indicate quali delle affermazioni seguenti risultano vere:

$$0 < a < 1\,, \qquad a \geq 1\,, \qquad a < 1/2\,, \qquad a > 2/3\,.$$

Esercizio 8.10 : sia f una funzione integrabile su ogni intervallo limitato contenuto in un dato intervallo I , simmetrico rispetto all'origine, e sia

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,;$$

provate che
a) se f è dispari allora F è pari;
b) se f è pari allora F è dispari;
c) se f è dispari e continua allora ogni primitiva di f è pari;
d) se f è pari e continua allora l'unica primitiva dispari di f è F .

Esercizio 8.11 : sia $f \in C^1(\mathbb{R})$; provate che
a) se f è T-periodica allora f' è T-periodica e $\int_0^T f'(x)\,dx = 0$;

b) se f' è T-periodica e $\int_0^T f'(x)\,dx = 0$ allora f è T-periodica.

Esercizio 8.12 : trovate l'unica funzione derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(0) = 0$ e

$$f'(x) = -\frac{\operatorname{sen}(2x)}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\,.$$

Esercizio 8.13 : trovate per quali numeri reali a, b, c il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x\Big(ax + b\log x + c + \int_0^x \arctan t\,dt\Big)$$

risulta finito, e determinate il valore di tale limite.

Esercizio 8.14 : calcolate l'integrale definito

$$\int_4^{16} \frac{1}{x \log x}\,dx\,,$$

esprimendo il risultato nella forma più semplice possibile.

Esercizio 8.15 : sia $\{F_n\}_n$ la successione definita dalla (8.22); dimostrate per induzione che in generale si ha per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$F_n(x) = \Big(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k\Big) e^x + c\,.$$

Esercizio 8.16 : sia $\{F_n\}_n$ la successione definita dalla (8.23); dimostrate per induzione che in generale si ha per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$F_n(x) = x\Big(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} \log^k x\Big) + c\,.$$

Esercizio 8.17 : calcolate per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'integrale indefinito $\int \cos^n x\,dx$.

Esercizio 8.18 : calcolate il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \arctan\Big(\frac{nx}{n+x}\Big)\,dx\,.$$

Esercizio 8.19 : dite quali delle seguenti proposizioni risultano vere:
a) ogni funzione limitata su $\mathbb{R}$ ammette una primitiva
b) ogni funzione continua su $\mathbb{R}$ ammette una primitiva
c) le funzioni primitive sono tutte continue
d) esistono funzioni primitive discontinue
e) ogni funzione integrabile su $\mathbb{R}$ è limitata
f) ogni funzione limitata su $\mathbb{R}$ è integrabile

g) ogni funzione continua su $[0,1]$ è integrabile
h) ogni funzione integrabile su $\mathbb{R}$ tende a zero per $x \to +\infty$
i) ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e integrabile tende a zero per $|x| \to +\infty$
j) ogni funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitesima per $|x| \to +\infty$ è integrabile su $\mathbb{R}$
k) ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e integrabile tende a zero per $|x| \to +\infty$ con ordine superiore al primo
l) ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua ed infinitesima per $|x| \to +\infty$ di ordine $\alpha > 1$ è integrabile su $\mathbb{R}$.

Esercizio 8.20 : posto per ogni $a, b > 0$

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in [0,a] \\ be^{-x} & \text{per } x > a \end{cases}$$

determinate le condizioni su a, b per cui risulta

$$e^{-x^2} \le f_{a,b}(x) \qquad \forall x > 0\,.$$

Deducetene che

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \le \frac{5}{4}\,.$$

Esercizio 8.21 : tra le seguenti funzioni determinate quali sono integrabili su $\mathbb{R}$:
a) $\operatorname{sen} x$
b) $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}$
c) $\dfrac{1}{1+x^2}$
d) $e^{-|x|}$
e) e^{-x}
f) e^{x}
g) $e^{\operatorname{sen} x - |x|}$
h) $\operatorname{sen}^2 x$.

Esercizio 8.22 : determinate il dominio della funzione $f(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$.

Esercizio 8.23 : determinate i numeri reali α tali che la funzione

$$f(x) = x^{-3} |\tan x|^{\alpha}$$

risulti integrabile su $[0,1]$; dimostrate poi che non esiste alcun $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui f risulti integrabile su $[0,2]$.

Esercizio 8.24 : dite se risultano convergenti, divergenti, o non esistono i seguenti integrali impropri, al variare dell'eventuale parametro $a \in \mathbb{R}$:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x^x}\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{x}}\, dx$
c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+|x|^a}\, dx$
d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ax} - \cos x}{x^a}\, dx$
e) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^a}{(\log x)^{\log x}}\, dx$
f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^a |\operatorname{sen} x|}\, dx$
g) $\displaystyle\int_0^1 \left(1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^a dx$
h) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log^a x}{x^a + \log^a x}\, dx$
i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\log x}\, dx$
j) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{x^2}\, dx$
k) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{e^x - e}\, dx$
l) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) dx$
m) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{e^x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) dx$
n) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\, dx$
o) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (x^2 + e^{-x})\, dx$
p) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^2}\, dx$
q) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^{-x}}\, dx$.

Esercizio 8.25 : determinate l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \int_1^x \frac{\log(1+t)}{t} dt\,.$$

Esercizio 8.26 : dimostrate che la funzione $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \log x - \int_1^x \frac{\arctan t}{t}\, dt$$

è crescente e limitata.

Esercizio 8.27 : determinate i valori del parametro $c \in \mathbb{R}$ per cui risulta convergente l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+c}\, dx .$$

Esercizio 8.28 : determinate e rappresentate graficamente sul piano cartesiano le coppie $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ per cui risulta convergente l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\beta}{|\operatorname{sen} x|^\alpha}\, dx .$$

Esercizio 8.29 : calcolate $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_2^x \frac{1}{\log t}\, dt$.

Esercizio 8.30 : posto per ogni $x > 0$

$$f(x) = \int_x^{x+\frac{1}{x}} e^{-t^2}\, dt , \qquad g(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}\, dt$$

calcolate, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} .$$

Esercizio 8.31 : tra gli infinitesimi per $x \to +\infty$

$$f(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2}\, dt , \qquad g(x) = e^{-x^2} ,$$

determinate quello che ha ordine superiore.

Esercizio 8.32 : determinate ordine e parte principale dell'infinitesimo per $x \to +\infty$

$$f(x) = \int_0^1 e^{-xt^2}\, dt .$$

Esercizio 8.33 : dimostrate che la funzione

$$f(x) = \int_x^{x+\operatorname{sen}^2 x} e^{-t^2}\, dt$$

ammette massimo su $\mathbb{R}$.

Esercizio 8.34 : sia f una funzione continua, integrabile su $[a, +\infty[$; usando opportunamente la formula di spezzamento, calcolate la derivata della funzione

$$F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\, dt .$$

Esercizio 8.35 : dimostrate che non esiste alcuna soluzione $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione

$$x \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = 1 .$$

Esercizio 8.36 : mostrate che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt > 0 , \qquad \int_{(2n+1)\pi}^{[2(n+1)+1]\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt < 0 ,$$

e deducetene (eventualmente dopo aver letto la dimostrazione del teorema di Leibniz 9.11) che

a) la funzione $\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$ è positiva per ogni $x > 0$;
b) la funzione $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ è integrabile su $[0, +\infty[$.

Esercizio 8.37 : usando i risultati dell'esercizio precedente, determinate i numeri reali a per cui la funzione

$$f(x) = ax + \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

risulta positiva per ogni $x \geq 0$.

Esercizio 8.38 : usando i risultati dell'esercizio 8.36, determinate il numero $x > 0$ per cui risulta massimo il valore della funzione

$$f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} \operatorname{sen} t\, dt .$$

Esercizio 8.39 : studiate le seguenti funzioni, e disegnatene dei grafici approssimativi:

a) $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t e^t}}\, dt$
b) $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt$ per $x > 0$
c) $f(x) = (1 - x^2) \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$
d) $f(x) = \int_0^x \left(e^{-t^2} - e^{-|t|}\right) dt$.

Esercizio 8.40 : determinate una primitiva delle seguenti funzioni razionali o riconducibili ad esse:

a) $\dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$
b) $\dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 - 1}$
c) $\sqrt{1 + x^2}$ (ponete $x = \operatorname{senh} t$)
d) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ (ponete $x = \cosh t$)
e) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$

f) $x^{\alpha}\sqrt{x^{2\alpha+2}}$

g) $\dfrac{1}{a\,\mathrm{sen}^2 x + b\cos^2 x}$ (con $a, b > 0$)

h) $\dfrac{\cos(2x)}{(a + \mathrm{sen}\, x)\cos x}$.

Esercizio 8.41 : continuando l'esercizio 8.1, dimostrate la seguente generalizzazione della proposizione 8.7: se f è una funzione continua su $[a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0$$

per ogni funzione razionale φ definita su $[a, b]$, allora f è nulla.

Appendice al capitolo 8

Appendice 8.1 - Cenno all'integrale di Lebesgue

Abbiamo visto che nella definizione di integrale secondo Riemann si parte dalla definizione di area di figure piane elementari come i plurirettangoli inscritti e circoscritti, e di qui, passando agli estremi superiore ed inferiore, si definiscono l'area inferiore e superiore, e dunque l'integrale di una funzione assegnata.

Naturalmente, si potrebbe applicare un procedimento simile usando, invece che i plurirettangoli, figure qualsiasi di area nota, ad esempio poligoni, cerchi, eccetera: in particolare, si potrebbe pensare di "affettare" il sottografico di una data funzione f in "fette" orizzontali anziché verticali (☞ figura A8.1); in tal caso bisognerebbe però sape-

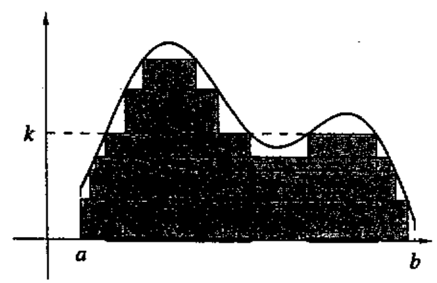


Fig. A8.1 : in neretto l'insieme dove $f(x) \geq k$

re calcolare per ogni livello k la "misura" (opportunamente definita) dell'insieme $\{x : f(x) \geq k\}$, che rappresenta la dimensione della base della "fetta" di livello k, e poi sommare opportunamente le aree delle "fette". Oppure si potrebbero usare successioni di rettangoli orientati verticalmente (e non solo un numero finito come per i plurirettangoli alla Riemann), e in tal caso le aree inferiori corrispondenti sarebbero date da serie numeriche e non più da somme finite.

I due procedimenti appena descritti condurrebbero, se opportunamente sviluppati, alla teoria dell'integrazione secondo Lebesgue, che è argomento di corsi successivi. Ci limiteremo qui soltanto a mostrare come, se si considerano famiglie numerabili di rettangoli invece che semplicemente un numero finito (e dunque considerando l'integrale di Lebesgue invece che quello di Riemann) la funzione di Dirichlet (8.1) risulta integrabile, e con integrale nullo.

Esempio : sia $X = \{x_n\}_n$ un sottoinsieme numerabile di $\mathbb{R}$ e sia $\mathbb{1}_X$ la funzione caratteristica di X, che è definita da

$$\mathbb{1}_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in X \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, consideriamo per ogni indice n l'intervallo $I_{n,\varepsilon}$ di centro x_n ed ampiezza $\varepsilon/2^n$, ed il rettangolo $R_{n,\varepsilon}$ di base $I_{n,\varepsilon}$ ed altezza 1. Indichiamo con

$$P_\varepsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_{n,\varepsilon}$$

l'unione di tali rettangoli: questo è un plurirettangolo, costituito da una famiglia numerabile di rettangoli, la cui altezza è 1 e la cui base è $B_\varepsilon = \cup_{n\in\mathbb{N}} I_{n,\varepsilon}$. Poiché tutti gli elementi di X appartengono a B_ε, abbiamo che P_ε è un plurirettangolo circoscritto per la funzione $\mathbb{1}_X$; dato che l'area di $R_{n,\varepsilon}$ è $\varepsilon/2^n$, per l'area di P_ε abbiamo

$$\text{Area}\,(P_\varepsilon) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2\varepsilon$$

(la disuguaglianza è dovuta al fatto che alcuni dei rettangoli $R_{k,\varepsilon}$ possono sovrapporsi), dove abbiamo usato la formula (9.2). Passando all'estremo inferiore su tutti i plurirettangoli (numerabili) circoscritti si ottiene dunque che l'integrale superiore della funzione f è nullo. Essendo l'integrale inferiore evidentemente non negativo, e minore o uguale all'integrale superiore (per ragioni analoghe a quelle della proposizione 8.2) si ottiene che f è integrabile e che il suo integrale è nullo.

L'esempio precedente si applica in particolare al caso della funzione di Dirichlet (prendendo $X = \mathbb{Q}$).

Definizione : *un insieme* $N \subset \mathbb{R}$ *si dice di misura nulla (secondo Lebesgue) se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una successione* $\{I_n\}_n$ *di intervalli tale che, detta* $\ell(I)$ *la lunghezza di un intervallo* I, *si abbia*

$$N \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon\,.$$

Quello che abbiamo dimostrato poco fa, allora, è in realtà che l'insieme $\mathbb{Q}$ ha misura nulla in $\mathbb{R}$.

Appendice 8.2 - Una proprietà equivalente all'integrabilità

Partiamo da una considerazione elementare: ogni somma superiore [inferiore] si può vedere (☞ figure 8.2 e 8.6) come integrale di una funzione costante a tratti, che assume su ogni intervallo $]x_{i-1}, x_i[$ il valore dell'estremo superiore [inferiore] di f in quell'intervallo; come visto nella proposizione 8.6, il valore di questa funzione costante a tratti negli estremi degli intervalli è ininfluente, e prenderemo il massimo [minimo] degli estremi superiori [inferiori] nei due intervalli adiacenti. Osserviamo che tale funzione è ovunque maggiore [minore] o uguale ad f; viceversa, ogni funzione ψ costante a tratti maggiore o uguale ad f è anche maggiore o uguale della funzione corrispondente alla somma superiore di f relativa alla partizione fatta con gli intervalli in cui ψ è costante. Allora il teorema 8.3 si può riscrivere così.

Proposizione A8.1 : *una funzione* f *limitata su* $[a,b]$ *è integrabile se e solo se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esistono due funzioni costanti a tratti,* φ *e* ψ, *tali che*

$$\varphi \leq f \leq \psi\,, \qquad \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\,dx < \varepsilon\,.$$

Facciamo ora un'altra considerazione elementare; consideriamo la funzione costante a tratti ψ che vale c_1 in $[a,b[$ e c_2 in $]b,c]$, e supponiamo per fissare le idee che sia $c_1 < c_2$. Scelto $\delta \leq b - a$, la funzione $\bar{\psi}$ definita da

$$\bar{\psi}(x) = \begin{cases} c_1 & \text{se } a < x \leq b - \delta \\ c_1 + \dfrac{c_2 - c_1}{\delta}\,(x - (b - \delta)) & \text{se } b - \delta \leq x \leq b \\ c_2 & \text{se } b \leq x \leq c \end{cases}$$

(aiutatevi con un disegno, collegando i valori c_1 e c_2 con un tratto di retta) è continua, maggiore o uguale a ψ e inoltre

$$\int_a^b (\bar{\psi}(x) - \psi(x))\,dx = \frac{\delta(c_2 - c_1)}{2}\,,$$

ed è quindi piccolo se δ è stato scelto piccolo. Dato che una funzione costante a tratti ψ ha solo un numero finito di punti di salto, possiamo concludere con il prossimo risultato.

Proposizione A8.2 : *dati una funzione ψ costante a tratti su un intervallo $[a,b]$ ed un numero $\varepsilon > 0$, esiste una funzione $\bar{\psi}$ continua su $[a,b]$ tale che*

$$\bar{\psi} \geq \psi\,, \qquad \int_a^b (\bar{\psi}(x) - \psi(x))\,dx < \varepsilon\,.$$

È chiaro che questo vale anche dal basso: esiste una funzione continua non superiore a ψ con integrale poco più piccolo di quello di ψ. Allora dai due risultati precedenti otteniamo una ulteriore caratterizzazione dell'integrabilità.

Teorema A8.3 : *una funzione f limitata su $[a,b]$ è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due funzioni φ e ψ, continue su $[a,b]$, tali che*

$$\varphi \leq f \leq \psi\,, \qquad \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\,dx < \varepsilon\,.$$

Appendice 8.3 - Somme di Cauchy

Calcolare una somma inferiore o una somma superiore è pressoché impossibile, se la funzione non è monotona: infatti se la suddivisione consta di $n+1$ punti occorrerà determinare l'estremo inferiore (o superiore) della funzione f su n intervalli; questo è banale se f è monotona, altrimenti è un compito veramente arduo, anche per un elaboratore (se n è grande), e anche supponendo f continua (caso in cui gli estremi inferiore e superiore sono minimo e massimo per il teorema di Weierstrass 6.35). È allora utile introdurre il concetto di somma di Cauchy.

Definizione : *sia f una funzione limitata su un intervallo $[a,b]$, sia $\mathscr{A} = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ una suddivisione di $[a,b]$ e sia $\mathscr{B} = \{z_1, \ldots, z_n\}$ un insieme tale che*

$$\forall i = 1, \ldots, n, \qquad z_i \in [x_{i-1}, x_i]\,.$$

La quantità

$$S_C(f, \mathscr{A}, \mathscr{B}) = \sum_{i=1}^{n} (\delta x)_i\, f(z_i)$$

si dice somma di Cauchy di f relativa alla suddivisione $\mathscr{A}$ e ai punti $\mathscr{B}$.

Osservazione : dato che $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$, si ha

$$\inf_{[x_{i-1},x_i]} f \leq f(z_i) \leq \sup_{[x_{i-1},x_i]} f\,,$$

quindi moltiplicando per $(\delta x)_i$ e sommando per i da 1 a n

$$S'(f, \mathscr{A}) \leq S_C(f, \mathscr{A}, \mathscr{B}) \leq S''(f, \mathscr{A})\,.$$

Notiamo che se f è integrabile si ha anche

$$S'(f, \mathscr{A}) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S''(f, \mathscr{A})\,,$$

dunque i numeri $S_C(f, \mathscr{A}, \mathscr{B})$ e $\int_a^b f(x)\,dx$ appartengono entrambi all'intervallo $[S'(f, \mathscr{A}), S''(f, \mathscr{A})]$, e pertanto la loro distanza non supera l'ampiezza dell'intervallo:

$$\left| S_C(f, \mathscr{A}, \mathscr{B}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \Delta S(f, \mathscr{A})\,. \tag{A8.1}$$

Se sappiamo che $\mathscr{A}$ è una suddivisione tale che

$$\Delta S(f, \mathscr{A}) < \varepsilon\,, \tag{A8.2}$$

per determinare un valore approssimato di $\int_a^b f(x)\,dx$ non è necessario calcolare la somma inferiore o la somma superiore: basta scegliere, a caso oppure più oculatamente, dei punti $\mathscr{B}$ inframmezzati ai punti di $\mathscr{A}$, e calcolare la somma di Cauchy $S_C(f, \mathscr{A}, \mathscr{B})$. Grazie a (A8.1), il numero ottenuto (si tratta solo di calcolare n valori di f) è un'approssimazione a meno di ε del valore di $\int_a^b f(x)\,dx$, cioè

$$\left| S_C(f, \mathscr{A}, \mathscr{B}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon\,.$$

In particolare, se $\{\mathscr{A}_k\}_k$ è una successione di suddivisioni di $[a,b]$ tali che

$$\mathscr{A}_k = \{x_0^k, \ldots, x_{n_k}^k\} \qquad \text{con } (x_i^k - x_{i-1}^k) < \frac{1}{k} \quad \forall i = 1, \ldots, n_k$$

e se $\mathscr{B}_k$ è per ogni k un insieme di punti inframmezzati a quelli di $\mathscr{A}_k$, allora per ogni funzione $f \in C^0([a,b])$

$$\lim_{k \to +\infty} S_C(f, \mathscr{A}_k, \mathscr{B}_k) = \int_a^b f(x)\,dx\,. \tag{A8.3}$$

Per le funzione continue su $[a,b]$, per determinare una suddivisione che verifica (A8.2) basta trovarne una fatta di intervalli di ampiezza minore di δ, dove δ è dato dalla formula (8.7) di uniforme continuità; in particolare abbiamo allora il seguente risultato.

Proposizione A8.4 : *sia f una funzione L-lipschitziana su un intervallo $[a,b]$, e sia $\varepsilon > 0$; posto*

$$n = 1 + \left\lfloor \frac{L(b-a)}{\varepsilon} \right\rfloor , \qquad x_i = a + i\,\frac{b-a}{n} \quad \text{per } i = 0, \dots, n$$

e posto $\mathscr{A} = \{x_0, \dots, x_n\}$, ogni somma di Cauchy per f relativa alla suddivisione $\mathscr{A}$ differisce da $\int_a^b f(x)\,dx$ per meno di ε.

Per la dimostrazione, basta ripercorrere la dimostrazione del teorema 8.5, tenendo presente che per le funzioni L-lipschitziane si ha $\delta = \varepsilon/L$ nella (8.7), fino ad ottenere che $\mathscr{A}$ verifica (A8.2), ed applicare quanto detto sopra.

Appendice 8.4 - Funzioni generalmente continue

Nella teoria dell'integrazione secondo Riemann, la classe delle funzioni limitate su un intervallo limitato $[a,b]$ che sono anche integrabili è in realtà più vasta della classe delle funzioni continue su $[a,b]$, come abbiamo già visto nelle proposizioni 8.4 e 8.6.

Non è difficile dimostrare (provate a farlo per esercizio, generalizzando il teorema 8.13) che se f è integrabile a tratti su $[a,b]$, cioè se l'intervallo $[a,b]$ risulta unione finita di intervalli su ognuno dei quali la funzione f è integrabile, allora f è integrabile su $[a,b]$. In particolare, dalle proposizioni 8.4 e 8.6 discende allora che ogni funzione limitata che sia monotona a tratti è integrabile, come pure ogni funzione limitata che è discontinua solo in un numero finito di punti.

Definizione : *si dice che una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è generalmente continua se essa è limitata e se esistono un numero finito di punti, $\{x_1, \dots, x_n\}$, tali che f è continua sull'insieme $[a,b] \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, il quale risulta unione finita di intervalli.*

Usando la proposizione 8.6, non è difficile dimostrare che ogni funzione generalmente continua su $[a,b]$ è integrabile. Va comunque osservato che la classe delle funzioni generalmente continue non esaurisce la classe delle funzioni integrabili secondo Riemann su un intervallo $[a,b]$; con un po' più di fatica si potrebbe ad esempio dimostrare che anche le funzioni limitate i cui punti di discontinuità hanno un numero finito di punti di accumulazione risultano integrabili secondo Riemann. Neppure questa, però, è una condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità: non è difficile, ad esempio, vedere che la funzione definita nell'esercizio 6.28, pur essendo discontinua in ogni punto razionale, è integrabile su $[0,1]$ ed ha integrale nullo (in quanti punti vale più di $1/k$?).

Con la conoscenza della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue, che dunque esula da quanto ci siamo proposti di trattare in questo volume, si può dimostrare che la condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione limitata $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sia integrabile

secondo Riemann è che l'insieme dei suoi punti di discontinuità abbia misura nulla secondo Lebesgue (☞ appendice 8.1).

Appendice 8.5 - Integrabilità di funzioni composte

Per comodità di scrittura, se $\mathscr{A} = \{x_0, \dots, x_n\}$ è una suddivisione di $[a,b]$, poniamo per ogni funzione f limitata su $[a,b]$ ed ogni $i = 1, \dots, n$

$$(\delta f)_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f ;$$

osserviamo che la notazione $(\delta x)_i$ è un caso particolare di questa, e che

$$\Delta S(f, \mathscr{A}) = \sum_{i=1}^{n} (\delta x)_i \, (\delta f)_i . \tag{A8.4}$$

La proposizione 8.11 vale più in generale nella forma seguente.

Proposizione A8.5 : *sia $[a,b]$ un intervallo limitato, sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, integrabile secondo Riemann, e sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana. Allora la funzione $\varphi \circ f$ risulta integrabile.*

DIMOSTRAZIONE : supponiamo che φ sia L-lipschitziana, fissiamo $\varepsilon > 0$ e (☞ teorema 8.3) sia $\mathscr{A} = \{x_0, \dots, x_n\}$ una suddivisione di $[a,b]$ tale che

$$\Delta S(f, \mathscr{A}) < \varepsilon .$$

Preso un qualsiasi intervallo $[x_{i-1}, x_i]$, usando due volte (4.7) abbiamo

$$\begin{aligned} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} (\varphi \circ f) - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} (\varphi \circ f) &= \sup_{x,y \in [x_{i-1}, x_i]} |\varphi(f(x)) - \varphi(f(y))| \\ &\le \sup_{x,y \in [x_{i-1}, x_i]} L|f(x) - f(y)| \\ &= L\Big(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \Big) , \end{aligned}$$

cioè

$$\big(\delta(\varphi \circ f)\big)_i \le L(\delta f)_i ,$$

quindi per (A8.4)

$$\Delta S(\varphi \circ f, \mathscr{A}) \le L \, \Delta S(f, \mathscr{A}) < L\varepsilon ,$$

e la tesi è provata grazie al teorema 8.3. ■

Osservazione : evidentemente, la proposizione precedente si estende subito al caso di funzioni φ che sono localmente lipschitziane, cioè lipschitziane su ogni intervallo limitato (questo è ad esempio il caso delle funzioni potenza $\varphi(t) = |t|^p$, con $p \geq 1$); infatti, dato che f è limitata è $|f(x)| \leq M$ per un'opportuna costante M , e $\varphi \circ f = \varphi|_{[-M,M]} \circ f$.

Osservazione : dalla proposizione precedente segue che se f e g sono due funzioni integrabili secondo Riemann, allora anche il loro prodotto fg lo è. Infatti, la funzione $f+g$ è integrabile (☞ proposizione 8.8); inoltre, essendo f e g limitate, ed essendo la funzione $\varphi(t) = t^2$ lipschitziana sui limitati, si ottiene dalla proposizione A8.5 e dall'osservazione precedente che $(f+g)^2$, f^2 , g^2 sono integrabili, per cui l'integrabilità di fg segue dall'uguaglianza

$$fg = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2} .$$

Con una dimostrazione diversa, è possibile togliere dalla proposizione A8.5 l'ipotesi di lipschitzianità.

Proposizione A8.6 : *sia* $[a,b]$ *un intervallo limitato, sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata, integrabile secondo Riemann, e sia* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora la funzione* $\varphi \circ f$ *risulta integrabile.*

Dimostrazione : sia $|f(x)| \leq M$ per ogni x , e fissiamo $\varepsilon > 0$; notiamo che φ è uniformemente continua su $[-M,M]$ grazie al teorema di Heine-Cantor 6.41, quindi esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall p,q \in [-M,M], \qquad \big[|p-q| < \delta \Rightarrow |\varphi(p) - \varphi(q)| < \varepsilon\big] .$$

In particolare

$$\forall x,y \in [a,b], \qquad \big[|f(x) - f(y)| < \delta \Rightarrow \big|\varphi(f(x)) - \varphi(f(y))\big| < \varepsilon\big] . \tag{A8.5}$$

Per l'integrabilità di f , sia $\mathscr{A}$ una suddivisione di $[a,b]$ tale che

$$\Delta S(f, \mathscr{A}) < \delta\varepsilon \ :$$

posto $A = \{1, \ldots, n\}$, possiamo riscrivere questa disuguaglianza come

$$\sum_{i \in A} (\delta x)_i \, (\delta f)_i < \delta\varepsilon .$$

Dividiamo gli intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ in due gruppi: poniamo

$$A_\delta = \{i \in A : (\delta f)_i < \delta\} , \qquad A' = A \setminus A_\delta ;$$

allora, usando (A8.5),

$$\begin{aligned} i \in A_\delta \quad &\Rightarrow \quad \forall x,y \in [x_{i-1}, x_i], \ |f(x) - f(y)| < \delta \\ &\Rightarrow \quad \forall x,y \in [x_{i-1}, x_i], \ \big|\varphi(f(x)) - \varphi(f(y))\big| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad \big(\delta(\varphi \circ f)\big)_i \leq \varepsilon . \end{aligned}$$

Ne deduciamo

$$\sum_{i \in A_\delta} (\delta x)_i \, \big(\delta(\varphi \circ f)\big)_i \leq \varepsilon \sum_{i \in A_\delta} (\delta x)_i \leq \varepsilon(b-a) . \tag{A8.6}$$

Invece,

$$\delta\varepsilon > \sum_{i \in A} (\delta x)_i \, (\delta f)_i \geq \sum_{i \in A'} (\delta x)_i \, (\delta f)_i \geq \delta \sum_{i \in A'} (\delta x)_i ,$$

quindi

$$\sum_{i \in A'} (\delta x)_i < \varepsilon .$$

Detto M' il massimo su $[-M,M]$ della funzione continua $|\varphi|$, per ogni i è

$$\big(\delta(\varphi \circ f)\big)_i \leq \sup_{[-M,M]} \varphi - \inf_{[-M,M]} \varphi \leq 2M' ,$$

quindi dalle ultime due disuguaglianze otteniamo

$$\sum_{i \in A'} (\delta x)_i \, \big(\delta(\varphi \circ f)\big)_i \leq 2M'\varepsilon .$$

Unendo questa e la (A8.6) ricaviamo infine

$$\Delta S(\varphi \circ f, \mathscr{A}) = \sum_{i \in A_\delta} (\delta x)_i \, \big(\delta(\varphi \circ f)\big)_i + \sum_{i \in A'} (\delta x)_i \, \big(\delta(\varphi \circ f)\big)_i \leq \big(2M' + (b-a)\big)\varepsilon ,$$

che prova la tesi per il teorema 8.3. ∎

Appendice 8.6 - Disuguaglianze di Jensen, di Hölder e di Minkowski

Abbiamo visto (☞ teorema 8.11) una disuguaglianza fra il valore assoluto di un integrale e l'integrale del valore assoluto; il risultato di integrabilità è stato esteso (☞ appendice 8.5) a funzioni più generali del valore assoluto, ed ora estendiamo la disuguaglianza. Premettiamo un risultato sulle funzioni affini.

Lemma A8.7 : *se* $r(x) = mx + q$ *è una funzione affine ed* f *è integrabile su* $[a,b]$ *allora*

$$r\Big(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx\Big) = \frac{1}{b-a} \int_a^b r\big(f(x)\big)\, dx .$$

DIMOSTRAZIONE : calcolando direttamente,
$$q = \frac{1}{b-a}\int_a^b q\,dx\,, \qquad \frac{m}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b mf(x)\,dx\,,$$
e la dimostrazione è conclusa. ∎

Teorema (disuguaglianza di Jensen) A8.8 : *sia* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione convessa e sia* f *una funzione limitata integrabile su* $[a,b]$ *. Allora* $\varphi \circ f$ *è integrabile, e*
$$\varphi\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\Big) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\big(f(x)\big)\,dx\,.$$

DIMOSTRAZIONE : osserviamo che, a causa della convessità, la funzione φ risulta continua su tutto $\mathbb{R}$ (☞ corollario 7.36), per cui l'integrabilità di $\varphi \circ f$ segue dalla proposizione A8.6. Poniamo
$$\theta = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\,,$$
e consideriamo (☞ proposizione A7.17) una retta radente il grafico di φ nel punto di ascissa θ : sia $y = r(x)$ la sua equazione, con
$$r(x) = \varphi(\theta) + m(x-\theta)\,.$$
Per la definizione di θ , possiamo applicare il lemma precedente, ottenendo così
$$\varphi(\theta) = r(\theta) = \frac{1}{b-a}\int_a^b r\big(f(x)\big)\,dx \le \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\big(f(x)\big)\,dx\,,$$
dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $r \le \varphi$. ∎

Osservazione : la disuguaglianza di Jensen vale anche se f è solo integrabile in senso generalizzato su $]a,b[$, e in tal caso anche l'integrale di $\varphi \circ f$ esisterà, finito o uguale a $+\infty$, in senso generalizzato (dimostratelo per esercizio). Anche l'ipotesi su φ può essere indebolita, dato che basta che φ sia convessa e continua su un intervallo che contiene l'immagine di f .

Osservazione : più in generale, se φ è convessa, e se $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ e $p :]a,b[\to [0,+\infty[$ sono due funzioni integrabili, con $\int_a^b p(x)\,dx = 1$, si ha
$$\varphi\Big(\int_a^b f(x)p(x)\,dx\Big) \le \int_a^b \varphi\big(f(x)\big)p(x)\,dx\,;$$
la disuguaglianza di Jensen corrisponde al caso in cui $p(x) \equiv 1/(b-a)$. In particolare, prendendo $\varphi(z) = |z|^\alpha$ con $\alpha \ge 1$, si ha
$$\Big|\int_a^b f(x)p(x)\,dx\Big|^\alpha \le \int_a^b |f(x)|^\alpha p(x)\,dx\,,$$
mentre, con $\varphi(z) = \mathrm{e}^z$ si ha
$$\exp\Big(\int_a^b f(x)p(x)\,dx\Big) \le \int_a^b \mathrm{e}^{f(x)}p(x)\,dx\,.$$
Il ruolo della funzione p è quello di un "peso" che assume valori diversi nei varî punti $x \in [a,b]$.

Abbiamo già visto (☞ appendice 8.5) che se f e g sono due funzioni integrabili, allora anche la funzione fg risulta integrabile. Vedremo ora due importanti maggiorazioni per l'integrale di fg ; conviene, per ogni numero $p \in]1,+\infty[$, indicare con p' il numero $p/(p-1)$, che viene detto *esponente coniugato* di p ; si ha evidentemente
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\,.$$

Proposizione (disuguaglianza di Young) A8.9 : *siano* f *e* g *due funzioni integrabili sull'intervallo* $[a,b]$ *, e sia* $p \in]1,+\infty[$ *. Allora*
$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \frac{1}{p}\int_a^b |f(x)|^p\,dx + \frac{1}{p'}\int_a^b |g(x)|^{p'}\,dx\,. \tag{A8.7}$$

DIMOSTRAZIONE : dalla disuguaglianza di Young puntuale (A7.10) si ha
$$|f(x)g(x)| \le \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{p'}|g(x)|^{p'}$$
per ogni x , e integrando si ottiene la tesi. ∎

Osservazione : date due funzioni f e g , osservando che per ogni $\alpha > 0$ si ha $fg = (\alpha f)\cdot(g/\alpha)$, scelto $\alpha = (p\varepsilon)^{1/p}$ ricaviamo dalla (A8.7)
$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \varepsilon\int_a^b |f(x)|^p\,dx + \frac{1}{p'(p\varepsilon)^{1/(p-1)}}\int_a^b |g(x)|^{p'}\,dx\,.$$
In altri termini, l'integrale del prodotto $|fg|$ si può maggiorare con una porzione comunque piccola dell'integrale di una potenza di $|f|$, a patto di aggiungere un multiplo abbastanza grande dell'integrale di una potenza di $|g|$.

Teorema (disuguaglianza di Hölder) A8.10 : *siano* f *e* g *due funzioni integrabili sull'intervallo* $[a,b]$ *, e sia* $p \in]1,+\infty[$ *. Allora*
$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \Big(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int_a^b |g(x)|^{p'}\,dx\Big)^{1/p'}\,. \tag{A8.8}$$

DIMOSTRAZIONE : poniamo per comodità
$$X = \Big(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}, \qquad Y = \Big(\int_a^b |g(x)|^{p'}\,dx\Big)^{1/p'}\,;$$
siccome f e g sono integrabili, per quanto visto precedentemente (☞ appendice 8.5) si ha che $X < +\infty$ ed $Y < +\infty$. Inoltre se $X = 0$ la disuguaglianza (A8.8) è banalmente verificata in quanto in tal caso si ha dalla disuguaglianza di Jensen (☞ teorema A8.8) $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$ e quindi, se M_g indica l'estremo superiore di g su $[a,b]$,
$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le M_g\int_a^b |f(x)|\,dx = 0 = XY\,;$$

analoga è la situazione se $Y = 0$: dunque possiamo anche supporre che X ed Y siano non nulli. Consideriamo allora le funzioni

$$F(x) = f(x)/X\,, \qquad G(x) = g(x)/Y\,;$$

per come sono definiti X ed Y si ha

$$\int_a^b |F(x)|^p\,dx = \int_a^b |G(x)|^{p'}\,dx = 1\,. \tag{A8.9}$$

Applicando a F e G la proposizione A8.9 si ricava

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx = XY\int_a^b |F(x)G(x)|\,dx \le XY\Big(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}\Big) = XY\,,$$

che non è altro che la disuguaglianza cercata. ■

Come conseguenza della disuguaglianza di Hölder otteniamo il seguente risultato.

Teorema (disuguaglianza di Minkowski) A8.11 : *siano f e g due funzioni integrabili sull'intervallo $[a,b]$, e sia $p \in [1,+\infty[$. Allora vale la disuguaglianza*

$$\Big(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} \le \Big(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} + \Big(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}. \tag{A8.10}$$

DIMOSTRAZIONE : la disuguaglianza (A8.10) è evidente nel caso $p = 1$, dunque possiamo limitarci a considerare il caso $p \in]1,+\infty[$. Inoltre possiamo supporre (altrimenti la tesi è ovvia) che $\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx > 0$; dalla disuguaglianza triangolare abbiamo

$$\begin{aligned}|f(x)+g(x)|^p &= |f(x)+g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}\\ &\le |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} + |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}\ :\end{aligned}$$

integrando ed applicando la disuguaglianza di Hölder, otteniamo

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx \le{}& \Big(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{(p-1)p'}\,dx\Big)^{1/p'}\\ &+\Big(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{(p-1)p'}\,dx\Big)^{1/p'}.\end{aligned}$$

Siccome $(p-1)p' = p$ la disuguaglianza precedente diventa

$$\begin{aligned}&\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\\ &\quad\le \Big(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\Big)^{1/p'}\Big[\Big(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} + \Big(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}\Big].\end{aligned}$$

Dividendo ambo i membri per

$$\Big(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\Big)^{1/p'}$$

si ottiene allora la disuguaglianza cercata. ■

Appendice 8.7 - Sul teorema della media integrale

È possibile vedere che il punto z del teorema della media integrale 8.12 può essere scelto interno all'intervallo $[a,b]$ (se quest'ultimo non era ridotto a un punto ...). Infatti, supponiamo che ciò non sia vero: allora possiamo supporre che sia $z = a$ (il caso $z = b$ è analogo) e che $f(x) \ne f(a)$ per ogni $x \in]a,b[$. A meno di sostituire f con $f(x) - f(a)$, possiamo poi supporre che sia $f(a) = 0$, di modo che le ipotesi diventano

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(a) = 0\,, \qquad f(x) \ne 0 \quad \forall x \in]a,b[\,. \tag{A8.11}$$

Per il teorema di esistenza degli zeri (☞ teorema 6.27), la funzione continua f non può cambiar segno in $]a,b[$, e pertanto ha segno costante: non è restrittivo supporre che sia sempre positiva in $]a,b[$, quindi in particolare sempre non negativa in $[a,b]$. Ma dal fatto che $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ dovrebbe seguire (☞ proposizione 8.7) che $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$, che contraddice (A8.11).

Un'altra dimostrazione può essere facilmente ottenuta dal teorema di Lagrange (☞ teorema 7.16) e dal teorema fondamentale del calcolo integrale (☞ teorema 8.14); lasciamo per esercizio il compito di svilupparla.

Appendice 8.8 - Teorema fondamentale del calcolo integrale: una versione più fine

In realtà il teorema fondamentale del calcolo integrale vale in una forma leggermente più forte di quella enunciata nel teorema 8.14.

Teorema fondamentale del calcolo integrale A8.12 : *sia f una funzione definita su un intervallo I e integrabile su ogni intervallo $[\alpha,\beta] \subset I$; sia poi $a \in I$. Allora la funzione $F : I \to \mathbb{R}$ definita da*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

è continua; se poi f è continua in un punto $x_0 \in I$ allora F è derivabile in x_0 e si ha $F'(x_0) = f(x_0)$.

DIMOSTRAZIONE : proviamo che F è continua in un punto $x_0 \in I$; scegliamo un intervallo $[\alpha,\beta] \subset I$ tale che $]\alpha,\beta[$ sia un intorno di x_0 (se x_0 è un estremo di I, basterà un intorno destro o sinistro): dato che f è integrabile su $[\alpha,\beta]$, in particolare è limitata, $|f(x)| \leq M$. Per la proprietà di spezzamento (8.18) si ha per ogni $x \in]\alpha,\beta[$

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt\,; \tag{A8.12}$$

usando (8.14) e la limitatezza di f ne deduciamo

$$|F(x) - F(x_0)| \leq M|x - x_0| \qquad \forall x \in]\alpha,\beta[\,,$$

che prova la continuità di F in x_0.

Sia ora f continua in x_0, e sia U_x l'intervallo di estremi x_0 e x; applicando il teorema della media integrale (☞ teorema 8.12), deduciamo da (A8.12)

$$\inf_{U_x} f \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt \leq \sup_{U_x} f\,. \tag{A8.13}$$

Essendo f continua in x_0 si ha

$$\lim_{x\to x_0} \inf_{U_x} f = \liminf_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,,$$

e analogamente per il sup, quindi da (A8.13) otteniamo per il teorema dei carabinieri

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)\,,$$

che è la tesi. ■

Appendice 8.9 - La formula di Taylor con resto integrale

Dimostreremo il seguente risultato, che fornisce per gli sviluppi di Taylor un'espressione in forma integrale per il resto.

Teorema (formula di Taylor con resto integrale) A8.13 : *sia f una funzione di classe C^{n+1} sull'intervallo I, e sia $x_0 \in I$. Allora si ha per ogni $x \in I$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\,. \tag{A8.14}$$

DIMOSTRAZIONE : per $n = 0$ la tesi da dimostrare si riduce all'uguaglianza

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t)\,dt\,,$$

che è una diretta conseguenza del teorema fondamentale del calcolo integrale (☞ teorema 8.14). Ragioniamo ora per induzione, supponendo vera la (A8.14) per un certo n, e sia f di classe $C^{n+2}(I)$: allora possiamo integrare per parti l'ultimo termine della (A8.14), ottenendo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \\
&\qquad = \left[-\frac{(x-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}\right]_{x_0}^x + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,dt \\
&\qquad = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,dt
\end{aligned}$$

e sostituendo nella (A8.14) si ricava

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,dt\,,$$

che è quanto si voleva dimostrare. ■

In alcuni casi la formula di Taylor con resto integrale può fornire nelle approssimazioni una stima dell'errore più precisa di quella che si ottiene applicando la formula di Taylor con resto di Lagrange.

Esempio : per il calcolo di e abbiamo visto, ☞ formula (7.17), che si ha con il resto di Lagrange

$$\mathrm{e} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}\,.$$

Con il resto in forma integrale, ricordando che $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$, si ha invece

$$\begin{aligned}
\mathrm{e} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} &= \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t\,dt \underset{1-t=x}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{\mathrm{e}}{n!}\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,dx \\
&\leq \frac{\mathrm{e}}{n!}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \underset{x+1=y}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{\mathrm{e}}{n!}\int_1^2 \frac{(y-1)^n}{y}\,dy \\
&= \frac{\mathrm{e}}{n!}\int_1^2 \left(\frac{(-1)^n}{y} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^{n-k}y^{k-1}\right)dy \\
&= \frac{\mathrm{e}}{n!}\left[(-1)^n \log 2 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^{n-k}\frac{2^k - 1}{k}\right].
\end{aligned}$$

Ad esempio, per $n = 3$, l'approssimazione con resto di Lagrange garantisce un errore inferiore a

$$\frac{e}{24} \simeq 11.33 \cdot 10^{-2},$$

mentre l'approssimazione con resto integrale garantisce un errore inferiore a

$$\frac{e}{6}\left(\frac{5}{6} - \log 2\right) \simeq 6.35 \cdot 10^{-2}.$$

Appendice 8.10 - Sviluppi di Taylor ed integrali

Se avete provato a calcolare lo sviluppo di Taylor della funzione $\operatorname{arcsen} x$ (☞ sezione 7.5), avrete notato che non è per nulla ovvio trovare un'espressione esplicita della derivata n-esima, così vi sarete chiesti come sia possibile determinare il termine generale dello sviluppo. In questo caso, come in altri, è d'aiuto la teoria dell'integrazione. Iniziamo con un risultato preliminare.

Proposizione A8.14 : *sia* $f : [0,a] \to \mathbf{R}$ *una funzione integrabile, e supponiamo che per qualche* $\alpha > 0$ *sia* $f(x) = o(x^\alpha; 0)$. *Posto allora per ogni* $x \in [0,a]$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

si ha $F(x) = o(x^{\alpha+1}; 0)$.

DIMOSTRAZIONE : fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $\delta > 0$ tale che

$$\frac{|f(x)|}{x^\alpha} < \varepsilon \qquad \forall x \in]0,\delta[\,.$$

Dunque, per $x \in]0,\delta[$ si ha $-\varepsilon x^\alpha < f(x) < \varepsilon x^\alpha$ e quindi

$$\int_0^x (-\varepsilon t^\alpha)\,dt < \int_0^x f(t)\,dt < \int_0^x (\varepsilon t^\alpha)\,dt,$$

cioè

$$\frac{|F(x)|}{x^{\alpha+1}} < \frac{\varepsilon}{\alpha+1} \qquad \forall x \in]0,\delta[\,,$$

e la tesi segue perché ε è arbitrario. ∎

Osservazione : se la funzione f della proposizione precedente è continua, la tesi può essere ottenuta anche in altra maniera: la funzione F risulta derivabile per il teorema fondamentale del calcolo integrale 8.14, ed applicando il teorema di de l'Hôpital 7.26 nella forma $0/0$ si ricava

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^{\alpha+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{(\alpha+1)x^\alpha} = 0.$$

Mostriamo ora come il risultato precedente può essere applicato per determinare alcuni sviluppi di Taylor.

Proposizione A8.15 : *sia* $f : [0,a] \to \mathbf{R}$ *una funzione integrabile e supponiamo che per qualche intero* n *sia* $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$, *con* P_n *polinomio. Fissato* $c_0 \in \mathbb{R}$ *e posto per ogni* $x \in [0,a]$

$$F(x) = c_0 + \int_0^x f(t)\,dt, \qquad Q_{n+1}(x) = c_0 + \int_0^x P_n(t)\,dt,$$

si ha $F(x) = Q_{n+1}(x) + o(x^{n+1})$.

DIMOSTRAZIONE : osservando che

$$F(x) - Q_{n+1}(x) = \int_0^x [f(t) - P_n(t)]\,dt,$$

basta applicare la proposizione precedente alla funzione $f - P_n = o(x^n)$. ∎

Osservazione : i risultati illustrati nelle proposizioni precedenti valgono evidentemente (mediante traslazioni) anche se l'origine viene sostituita da un qualsiasi punto x_0. Inoltre, la proposizione A8.15 vale anche se P_n è una qualsiasi funzione (anche non polinomiale) ed n un qualsiasi numero reale positivo (anche non intero).

Applicando la proposizione A8.15 possiamo determinare, una volta conosciuto il polinomio di Taylor di f', anche quello di f, integrando termine a termine ed aggiungendo il primo termine $c_0 = f(x_0)$.

Esempio : sappiamo (☞ sezione 7.5) che

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n).$$

Ma $-1/(1-x)$ è la derivata della funzione $f(x) = \log(1-x)$, quindi

$$f(x) = f(0) - \int_0^x \left(\sum_{k=0}^n t^k\right) dt + o(x^{n+1}),$$

vale a dire

$$\log(1-x) = -\sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}) = -\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + o(x^{n+1}).$$

Esempio : la derivata della funzione $\operatorname{arcsen} x$ è $(1-x^2)^{-1/2}$ e le derivate successive sono un po' complesse; naturalmente, anche le derivate di $(1-x^2)^{-1/2}$ sono ugualmente complicate, ma notiamo che le derivate prima, seconda, terza della funzione $f(x) = (1-x)^{-1/2}$ sono rispettivamente date da

$$\frac{1}{2}(1-x)^{-3/2}, \qquad \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}(1-x)^{-5/2}, \qquad \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2}(1-x)^{-7/2},$$

e si fa presto a indovinare (la formula va poi dimostrata per induzione, ma questo risulta molto facile) l'espressione generale delle derivate di f : ricordando la definizione (3.4) di semifattoriale e la posizione $(-1)!! = 1$ si ottiene

$$f^{(k)}(x) = \frac{(2k-1)!!}{2^k}(1-x)^{-(2k+1)/2}.$$

In particolare, $f^{(k)}(0) = (2k-1)!!/2^k$ e dunque il polinomio di Taylor di f è

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k.$$

Allora abbiamo $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$, quindi anche $f(x^2) = P_n(x^2) + o(x^{2n})$, vale a dire

$$(1-x^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k} + o(x^{2n}).$$

Applicando la proposizione A8.15 otteniamo

$$\operatorname{arcsen} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}).$$

Purtroppo, questo metodo non fornisce informazioni sul resto di Lagrange; in seguito, ☞ formula (9.3), avremo bisogno di una stima del resto dello sviluppo di Taylor di $\operatorname{arcsen} x$: vediamo come possiamo ottenerla. Posto

$$Q_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

si ha per ogni $x \in [0, \sqrt{2}/2]$

$$Q_{2n+1}(x) \le \operatorname{arcsen} x \le Q_{2n+1}(x) + \frac{1}{2n+3}. \tag{A8.15}$$

Infatti, con le notazioni dell'esempio precedente, sappiamo dalla formula di Taylor con resto di Lagrange di f che per $x > 0$

$$\begin{aligned} f(x) = (1-x)^{-1/2} &= P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(z(x))}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= P_n(x) + \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\,\frac{x^{n+1}}{\big(1-z(x)\big)^{n+3/2}}, \end{aligned}$$

con $0 < z(x) < x$, pertanto

$$(1-x^2)^{-1/2} = P_n(x^2) + \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\,\frac{x^{2n+2}}{\big(1-z(x^2)\big)^{n+3/2}}$$

con $0 < z(x^2) < x^2$. In particolare

$$(1-x^2)^{-1/2} \ge P_n(x^2) \qquad \forall x \in [0,1[\,.$$

Da questa disuguaglianza, grazie al teorema del confronto 8.10, segue che per $x > 0$ è

$$\operatorname{arcsen} x = \int_0^x (1-t^2)^{-1/2}\,dt \ge \int_0^x P_n(t^2)\,dt = Q_{2n+1}(x).$$

Poi, fissato $x \in]0,1[$, per ogni $y \in]0,x[$ è $z(y^2) \le y^2 \le x^2$ e dunque $\dfrac{1}{1-z(y^2)} \le \dfrac{1}{1-x^2}$. Allora da

$$(1-y^2)^{-1/2} \le P_n(y^2) + \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\,\frac{y^{2n+2}}{(1-x^2)^{n+3/2}}$$

otteniamo (☞ teorema del confronto 8.10) per ogni $y \in [0,x]$

$$\operatorname{arcsen} y \le Q_{2n+1}(y) + \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\,\frac{1}{(1-x^2)^{n+3/2}}\,\frac{y^{2n+3}}{2n+3},$$

ed in particolare, per $y = x$,

$$\operatorname{arcsen} x \le Q_{2n+1}(x) + \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\,\frac{1}{2n+3}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^{2n+3}.$$

Se $0 < x \le \sqrt{2}/2$ si ha $0 < x/\sqrt{1-x^2} \le 1$, e quindi abbiamo ottenuto la stima cercata.

Appendice 8.11 - Irrazionalità di π

Proviamo che π è irrazionale, seguendo una elegante dimostrazione di Niven (☞ Bull. Amer. Math. Soc., 1947); in realtà π è addirittura un numero trascendente, ma la dimostrazione di ciò esula da un corso di Analisi matematica I.

Supponiamo per assurdo che $\pi = p/q$ con p e q interi positivi, e definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ i polinomi

$$f_n(x) = \frac{x^n(p-qx)^n}{n!}, \qquad F_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_n^{(2k)}(x).$$

Si ha

$$\begin{aligned}\left(F_n'(x)\operatorname{sen}x - F_n(x)\cos x\right)' &= \operatorname{sen}x\left(F_n''(x)+F_n(x)\right)\\ &= \operatorname{sen}x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(f_n^{(2k+2)}(x)+f_n^{(2k)}(x)\right)\\ &= \operatorname{sen}x\left(f_n(x)+(-1)^n f_n^{(2n+2)}(x)\right);\end{aligned}$$

essendo f_n un polinomio di grado $2n$, è $f_n^{(2n+2)}(x)\equiv 0$, per cui

$$\left(F_n'(x)\operatorname{sen}x - F_n(x)\cos x\right)' = f_n(x)\operatorname{sen}x\,,$$

e quindi

$$\int_0^\pi f_n(x)\operatorname{sen}x\,dx = \Big[F_n'(x)\operatorname{sen}x - F_n(x)\cos x\Big]_0^\pi = F_n(\pi)+F_n(0)\,. \tag{A8.16}$$

Dall'espressione di $f_n(x)$, usando la formula di Leibniz (☞ proposizione 7.6) e ricordando, ☞ formula (7.2), che

$$\left(D^{(k)}x^n\right)\big|_{x=0} = \begin{cases} n! & \text{se } k=n\\ 0 & \text{altrimenti,}\end{cases} \tag{A8.17}$$

e quindi che

$$\left(D^{(k)}(p-qx)^n\right)\big|_{x=\pi} = \begin{cases} (-q)^n n! & \text{se } k=n\\ 0 & \text{altrimenti,}\end{cases}$$

si ricava che per ogni $k,n\in\mathbb{N}$ i valori $f_n^{(k)}(0)$ ed $f_n^{(k)}(\pi)=f_n^{(k)}(p/q)$ sono interi, per cui risulta intero anche il valore $F_n(\pi)+F_n(0)$ in (A8.16). Ma si ha per $x\in]0,\pi[$

$$0 < f_n(x)\operatorname{sen}x < \frac{\pi^n p^n}{n!}\,,$$

per cui l'integrale in (A8.16) verifica le disuguaglianze

$$0 < \int_0^\pi f_n(x)\operatorname{sen}x\,dx < \frac{\pi^{n+1}p^n}{n!}\,.$$

Per n sufficientemente grande si ha $\pi^{n+1}p^n/n! < 1$, che contraddice il fatto che $F_n(\pi)+F_n(0)$ sia intero: dunque π è irrazionale.

Appendice 8.12 - Trascendenza del numero di Nepero "e"

Mostreremo ora che il numero e è *trascendente*, cioè che non può essere radice di alcun polinomio a coefficienti interi (al contrario, si dicono *algebrici* quei numeri reali che sono radici di polinomi a coefficienti interi). La trascendenza è una proprietà ben più forte dell'irrazionalità (l'irrazionalità di e è stata provata nell'appendice 7.11); infatti è evidente che ogni numero razionale è algebrico in quanto, se $\alpha = p/q$ con p e q interi, allora α risulta radice del polinomio $qx-p$. Vale la pena di osservare che anche molti numeri irrazionali sono algebrici; ad esempio, $\sqrt{2}$ è irrazionale (☞ esercizio 3.49), ma è algebrico perché radice del polinomio x^2-2, e più in generale se $\alpha=\sqrt{p/q}$ con p e q interi positivi, allora α è algebrico in quanto radice del polinomio qx^2-p.

Supponiamo per assurdo che il numero e sia algebrico, cioè che esista un polinomio a coefficienti interi

$$P(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$$

che abbia e come radice, cioè tale che

$$P(\mathrm{e}) = 0\,. \tag{A8.18}$$

È evidente che possiamo supporre $c_0\neq 0$ in quanto altrimenti potremmo considerare il polinomio $P(x)/x$ che avrebbe ancora e come radice. Sia $p>n$ un numero primo che sceglieremo in seguito, e sia $Q(x)$ il polinomio

$$Q(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\cdots(x-n)^p\,.$$

Osserviamo che per (A8.17) si ha

$$Q(0)=Q'(0)=\cdots=Q^{(p-2)}(0)=0\,,\qquad Q^{(p-1)}(0)=(-1)^{np}(n!)^p\,,$$

e che per le derivate successive $Q^{(p)}(0)$, $Q^{(p+1)}(0)$, ... si ottengono sempre dei valori interi multipli di p. Detto $m=p-1+np$ il grado di Q e posto

$$F(x) = \sum_{k=0}^{m} Q^{(k)}(x)$$

si ha quindi, per un opportuno intero K,

$$F(0) = (-1)^{np}(n!)^p + Kp\,;$$

un ragionamento analogo mostra che i numeri $F(1),F(2),\dots,F(n)$ sono tutti multipli di p. Per ogni intero j, integrando ripetutamente per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^j \mathrm{e}^{-x}Q(x)\,dx &= [-\mathrm{e}^{-x}Q(x)]_0^j + \int_0^j \mathrm{e}^{-x}Q'(x)\,dx\\ &= [-\mathrm{e}^{-x}Q(x) - \mathrm{e}^{-x}Q'(x)]_0^j + \int_0^j \mathrm{e}^{-x}Q''(x)\,dx\\ &\ \ \vdots\\ &= [-\mathrm{e}^{-x}F(x)]_0^j\,,\end{aligned}$$

in quanto $Q^{(m+1)}(x) \equiv 0$. Dunque si ha, usando (A8.18),

$$\begin{aligned} -\sum_{j=0}^{n} c_j e^j \int_0^j e^{-x} Q(x)\,dx &= \Big(\sum_{j=0}^{n} c_j F(j)\Big) - F(0)P(e) \\ &= c_0 F(0) + \sum_{j=1}^{n} c_j F(j) \qquad \text{(A8.19)} \\ &= c_0(-1)^{np}(n!)^p + Np\,, \end{aligned}$$

dove N è un opportuno intero. Se si sceglie $p > c_0$, il numero $c_0(-1)^{np}(n!)^p$ non è multiplo di p, mentre Np è multiplo di p; ne segue che il secondo membro è un intero non nullo, quindi deve necessariamente essere

$$|c_0(-1)^{np}(n!)^p + Np| \geq 1\,. \qquad \text{(A8.20)}$$

D'altro canto, essendo

$$|Q(x)| \leq \frac{n^{p-1+np}}{(p-1)!} \qquad \text{per } x \in [0,n]\,,$$

si ha per ogni $j \leq n$

$$\Big|e^j \int_0^j e^{-x} Q(x)\,dx\Big| \leq \frac{n^{p-1+np}}{(p-1)!} e^j \int_0^j e^{-x}\,dx = \frac{n^{p-1+np}}{(p-1)!}(e^j - 1)\,.$$

Dunque, da (A8.19) e (A8.20) si ottiene

$$1 \leq \Big|\sum_{j=0}^{n} c_j e^j \int_0^j e^{-x} Q(x)\,dx\Big| \leq \sum_{j=0}^{n} |c_j|(e^j - 1)\frac{n^{p-1+np}}{(p-1)!} \leq C e^n \frac{n^{p-1+np}}{(p-1)!}\,,$$

dove abbiamo posto $C = \sum_{j=0}^{n} |c_j|$. Facendo tendere p verso $+\infty$ si giunge allora ad una contraddizione, in quanto, ☞ formula (5.23),

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{n^{p-1+np}}{(p-1)!} = 0\,.$$

Appendice 8.13 - La formula di Wallis

È possibile trovare, studiando una successione definita per ricorrenza, una approssimazione (formula di Wallis) di π; dalla formula (8.24), integrando tra 0 e $\pi/2$, si ottiene, posto

$$x_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n t\,dt\,, \qquad \text{(A8.21)}$$

la formula per ricorrenza

$$\begin{cases} x_0 = \pi/2 \\ x_1 = 1 \\ x_n = \dfrac{n-1}{n} x_{n-2}\,. \end{cases} \qquad \text{(A8.22)}$$

Introdotte la successione degli elementi di indice pari $p_n = x_{2n}$ e quella degli elementi di indice dispari $d_n = x_{2n+1}$, da (A8.22) si ricava

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= x_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} x_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} p_n \\ d_{n+1} &= x_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} x_{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} d_n\,, \end{aligned}$$

e quindi le successioni $\{p_n\}_n$ e $\{d_n\}_n$ verificano le formule per ricorrenza

$$\begin{cases} p_0 = \pi/2 \\ p_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} p_n \end{cases} \qquad \begin{cases} d_0 = 1 \\ d_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+3} d_n\,. \end{cases}$$

Da queste si ricava facilmente per induzione

$$x_{2n} = p_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\frac{\pi}{2}\,, \qquad x_{2n+1} = d_n = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\,.$$

Ricordando la definizione (3.4) del semifattoriale, le uguaglianze precedenti si scrivono nella forma

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & \text{se } n \text{ è pari, con } x_0 = \pi/2 \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases} \qquad \text{(A8.23)}$$

Essendo poi $0 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$, dalla formula (A8.21) si ottiene che la successione $\{x_n\}_n$ è decrescente, quindi per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ si ha

$$1 \geq \frac{x_{2n+1}}{x_{2n}} \geq \frac{x_{2n+1}}{x_{2n-1}} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!} = \frac{2n}{2n+1}\,,$$

cioè

$$1 \geq \frac{x_{2n+1}}{x_{2n}} \geq \frac{1}{1+\frac{1}{2n}} = 1 - \frac{1}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\,. \qquad \text{(A8.24)}$$

In altri termini,

$$\frac{x_{2n+1}}{x_{2n}} = 1 + O(1/n)\,,$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\big(1+O(1/n)\big) &= \frac{\pi}{2}\frac{x_{2n+1}}{x_{2n}}\\ &= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\\ &= \Big(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)^2\frac{1}{2n+1}\,.\end{aligned}$$

In definitiva, abbiamo ottenuto la *formula di Wallis*

$$\pi = \frac{2}{2n+1}\Big(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)^2 + O(1/n)\,. \tag{A8.25}$$

Utilizzando (A8.24) con più cura si ottiene la stima

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\Big(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)^2 \le \pi \le \frac{1}{n}\Big(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)^2\Big(\frac{2n+1}{2n}\Big)\,.$$

L'approssimazione ottenuta, però, non è molto buona per valori di n non troppo alti: ad esempio, (ricordiamo che le prime 6 cifre significative di π sono 3.14159) con $n = 100$ si ottiene

$$3.13963 \le \pi \le 3.14356$$

e con $n = 1000$ si ha

$$3.14081 \le \pi \le 3.14238\,.$$

Appendice 8.14 - Calcolo dell'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$

Ricordiamo che le primitive della funzione e^{-t^2} non sono esprimibili in termini di funzioni elementari; tuttavia, esporremo ora un metodo che ci permetterà di calcolare esplicitamente il valore dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

(non di ogni integrale $\int_\alpha^\beta e^{-t^2}\,dt$, altrimenti sapremmo scrivere la primitiva $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$); va detto che con i metodi dell'Analisi matematica II sarebbe possibile ottenere lo stesso risultato in maniera molto più rapida. Ricordiamo che abbiamo già dimostrato che

l'integrale in questione è finito, ☞ formula (8.39). Dalla disuguaglianza (5.36) segue facilmente (☞ esercizio 5.77) che

$$1 + x \le e^x \le \frac{1}{1-x} \qquad \forall x < 1\,,$$

da cui si ricava, ponendo $x = -t^2$,

$$1 - t^2 \le e^{-t^2} \le \frac{1}{1+t^2} \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

o equivalentemente, essendo $e^{-t^2} \ge 0$,

$$(1-t^2)^+ \le e^{-t^2} \le \frac{1}{1+t^2} \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Elevando alla potenza n si ha

$$\big((1-t^2)^+\big)^n \le e^{-nt^2} \le \frac{1}{(1+t^2)^n} \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

ed integrando tra $-\infty$ e $+\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\big((1-t^2)^+\big)^n\,dt \le \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2}\,dt \le \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt\,. \tag{A8.26}$$

Con la sostituzione $t = \cos\theta$ si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\big((1-t^2)^+\big)^n\,dt &= \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt\\ &= \int_0^\pi \mathrm{sen}^{2n+1}\theta\,d\theta\\ &= 2\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^{2n+1}\theta\,d\theta\\ &= 2\,\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\,,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la (A8.23), mentre dalla (A8.25) si ricava

$$\begin{aligned}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} &= \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{2n+1}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\Big(\frac{\pi+O(1/n)}{2}\Big)^{1/2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,\big(1+O(1/n)\big)\,,\end{aligned} \tag{A8.27}$$

dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left((1-t^2)^+\right)^n dt = \sqrt{\frac{\pi}{n}}\left(1+O(1/n)\right) .$$

Con la sostituzione $t = 1/\tan\theta$ si ottiene invece

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{2n-2}\theta \, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-2}\theta\, d\theta ,$$

e ragionando in maniera analoga a quanto fatto sopra si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt &= 2\,\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2} \\ &= \pi\Big(\frac{2}{(2n-1)(\pi+O(1/n))}\Big)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{n}}\,\left(1+O(1/n)\right) . \end{aligned} \tag{A8.28}$$

In definitiva, sostituendo (A8.27) e (A8.28) in (A8.26) abbiamo ricavato che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{n}}\left(1+O(1/n)\right) ,$$

cioè

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nt^2}\, dt = \sqrt{\pi} + O(1/n) .$$

Operando nell' integrale precedente la sostituzione $t\sqrt{n} = x$ otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi} + O(1/n)$$

da cui, passando al limite per $n \to +\infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi} .$$

Appendice 8.15 - La funzione Γ di Eulero

Tramite gli integrali, è possibile definire una "estensione" del fattoriale ai numeri reali positivi, considerando la funzione definita per $t > 0$ da

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}\, e^{-x}\, dx$$

(che viene detta *funzione gamma di Eulero*). Osserviamo che la convergenza dell' integrale all' infinito è assicurata da (8.38), e per $0 < t < 1$ la convergenza in zero è assicurata dal confronto con x^{t-1} . Integrando per parti abbiamo

$$\Gamma(t) = \lim_{a\to 0^+}\lim_{b\to+\infty}\Big\{\Big[\frac{x^t e^{-x}}{t}\Big]_a^b + \frac{1}{t}\int_a^b x^t e^{-x}\, dx\Big\} = \frac{1}{t}\Gamma(t+1) ,$$

dunque Γ verifica la relazione

$$\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t) . \tag{A8.29}$$

Dato che

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1 ,$$

dalla (A8.29) si ricava per induzione che

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \Gamma(n+1) = n! \,;$$

con la sostituzione $x = s^2$ si ottiene

$$\Gamma(t) = 2\int_0^{+\infty} s^{2t-1} e^{-s^2}\, ds ,$$

da cui (☞ appendice 8.14) si ricava $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, e per induzione si ottiene poi (fatelo per esercizio)

$$\Gamma\Big(n+\frac{1}{2}\Big) = (2n-1)!!\, 2^{-n}\sqrt{\pi} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+ .$$

Appendice 8.16 - Cambiamento di variabile negli integrali

Diamo una diversa dimostrazione, in ipotesi più forti, della formula (8.21), ottenendo un'uguaglianza che può essere generalizzata a più dimensioni. Anzitutto introduciamo una differente notazione per gli integrali definiti: solo nel caso $a < b$, poniamo

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \; :$$

allora vale il seguente risultato.

Proposizione A8.16 : *se* $\varphi \in C^1([a,b])$ *è iniettiva, e se* f *è continua sull'intervallo immagine di* φ *, allora*

$$\int_{\varphi([a,b])} f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,dt\,.$$

DIMOSTRAZIONE : poniamo $\varphi(a) = p$, $\varphi(b) = q$; osserviamo che la funzione φ è strettamente monotona (☞ teorema 6.32), e la sua immagine è un intervallo (☞ corollario 6.30) che ha per estremi p e q. Supponiamo dapprima che φ sia monotona crescente, di modo che in particolare $\varphi' \geq 0$ e $p < q$; la formula da dimostrare è allora

$$\int_p^q f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,. \tag{A8.30}$$

Sia ora

$$M_1 = \max_{[p,q]} |f|\,, \qquad M_2 = \max_{[a,b]} |\varphi'|\,,$$

e poniamo

$$M = \max\{M_1, M_2, M_1M_2, 1\}\,;$$

per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, scegliamo una suddivisione $\mathscr{A}_k = \{t_0, \ldots, t_n\}$ di $[a,b]$ tale che

$$\forall i = 1, \ldots, n, \quad (t_i - t_{i-1}) < \frac{1}{Mk} \leq \frac{1}{k}\,.$$

Poniamo per $i = 0, \ldots, n$

$$x_i = \varphi(t_i)\,,$$

di modo che $\{x_0, \ldots, x_n\}$ è una suddivisione di $[p,q]$, e osserviamo che per il teorema di Lagrange per ogni i esiste un punto $\tau_i \in]t_{i-1}, t_i[$ tale che

$$x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) \leq M(t_i - t_{i-1}) < \frac{1}{k}\,. \tag{A8.31}$$

Posto $z_i = \varphi(\tau_i)$, per la monotonia di φ da $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$ segue $x_{i-1} \leq z_i \leq x_i$, quindi

$$S_k = \sum_{i=1}^n f(z_i)(x_i - x_{i-1})$$

è una somma di Cauchy relativa ad f sull'intervallo $[p,q]$, per la quale gli intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ hanno tutti ampiezza minore di $1/k$. Grazie a (A8.3) abbiamo

$$\lim_{k\to+\infty} S_k = \int_p^q f(x)\,dx\,;$$

però da (A8.31) e dalla scelta di z_i segue

$$S_k = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)(t_i - t_{i-1})\,,$$

quindi S_k è una somma di Cauchy relativa a $(f \circ \varphi)\varphi'$ sull'intervallo $[a,b]$, per la quale gli intervalli $[t_{i-1}, t_i]$ hanno tutti ampiezza minore di $1/k$, dunque per (A8.3)

$$\lim_{k\to+\infty} S_k = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,,$$

e per l'unicità del limite abbiamo dimostrato (A8.30). Il caso $\varphi' \leq 0$ è analogo. ■

Un aspetto interessante della dimostrazione precedente è che mostra l'origine del termine $|\varphi'(t)|$: questo è il limite del rapporto tra $|x_i - x_{i-1}|$ e $|t_i - t_{i-1}|$, cioè

$$|\varphi'(t)| = \lim_{h\to0^+} \frac{\text{lunghezza}\,(\varphi([t,t+h]))}{\text{lunghezza}\,([t,t+h])}\,.$$

Appendice 8.17 - Decomponibilità di una funzione razionale

Mostriamo qui che se $R(x)$ è un polinomio di grado m e $B(x)$ un polinomio di grado $n > m$, allora la funzione razionale $R(x)/B(x)$ si decompone nella somma vista nella formula (8.40). Supponiamo che x_0 sia una radice di B con molteplicità k; per semplicità ci limiteremo al caso in cui x_0 sia reale, in maniera analoga si tratta il caso in cui x_0 è una radice complessa: possiamo evidentemente ridurci con una traslazione al caso in cui $x_0 = 0$. Siccome 0 è radice di B con molteplicità k avremo che $B(x) = x^kQ(x)$ dove Q è un polinomio di grado $n-k$ con il coefficiente di grado zero non nullo; si tratta dunque di provare che vale l'uguaglianza

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_k}{x^k} + \frac{P(x)}{Q(x)}\,,$$

dove i coefficienti $a_1, \ldots, a_k$ ed il polinomio P di grado inferiore a $n-k$ sono da determinare. Moltiplicando per $B(x)$, l'uguaglianza precedente risulta equivalente a

$$R(x) = \left(a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \ldots + a_k\right)Q(x) + P(x)x^k\,. \tag{A8.32}$$

Detti r_i e q_i i coefficienti dei monomi di grado i di $R(x)$ e $Q(x)$ rispettivamente, dall'uguaglianza dei termini di grado $0, 1, \ldots, k-1$ nella (A8.32) si ottiene

$$\begin{aligned} r_0 &= a_kq_0 \\ r_1 &= a_kq_1 + a_{k-1}q_0 \\ r_2 &= a_kq_2 + a_{k-1}q_1 + a_{k-2}q_0 \\ &\;\vdots \\ r_{k-1} &= a_kq_{k-1} + a_{k-1}q_{k-2} + \ldots + a_1q_0\,. \end{aligned} \tag{A8.33}$$

Essendo noti i coefficienti r_i e q_i, e tenendo conto che $q_0 \neq 0$, dalla prima dalle uguaglianze precedenti si ricava a_k, così poi dalla seconda si può ricavare a_{k-1}, e via via si ricavano tutti i coefficienti $a_1, \ldots, a_k$. Il polinomio P si ricava poi per differenza:

$$P(x) = \frac{R(x) - \left(a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \ldots + a_k\right)Q(x)}{x^k}\,,$$

notando che, per le uguaglianze (A8.33), il polinomio al numeratore è divisibile per x^k.

Appendice 8.18 - Sostituzioni razionalizzanti

Vediamo alcuni casi notevoli nei quali un cambiamento di variabile riduce il calcolo di primitive di funzioni non razionali al calcolo di primitive di funzioni razionali.

Esempio : studiamo il caso di integrali del tipo

$$\int f\Big(x, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{m_1/n_1}, \dots, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{m_r/n_r}\Big)\, dx ,$$

dove $f(x, y_1, \dots, y_r)$ è una funzione razionale, $ad - bc \neq 0$, $m_1, \dots, m_r$ sono interi, $n_1, \dots, n_r$ sono interi positivi. Indicato con n il minimo comune multiplo di $n_1, \dots, n_r$, mediante il cambiamento di variabile

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$$

ci si riconduce al calcolo di una primitiva di una funzione razionale.

Esempio : nel caso di integrali nella forma

$$\int x^q (ax^r + b)^s \, dx ,$$

dove $q, r, s \in \mathbb{Q}$ ed $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, r \neq 0$, con il cambiamento di variabile $x^r = t$ si ottiene

$$\int x^q (ax^r + b)^s \, dx \underset{x^r = t}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{r} \int t^{(q-r+1)/r} (at + b)^s \, dt$$

e si ricade nel calcolo di primitive di funzioni razionali (☞ esempio precedente) se e solo se è intero uno dei tre numeri seguenti:

$$s , \qquad \frac{q+1}{r} , \qquad s + \frac{q+1}{r} .$$

Tuttavia, nei tre casi indicati, risulta in genere più conveniente utilizzare le sostituzioni seguenti:

a) se s è intero e μ è il minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni q ed r, porre $x = t^\mu$;
b) se $(q+1)/r$ è intero ed $s = m/n$ con $n > 0$, porre $ax^r + b = t^n$;
c) se $s + (q+1)/r$ è intero ed $s = m/n$ con $n > 0$, porre $a + bx^{-r} = t^n$.

Esempio : se $f(u, v)$ è una funzione razionale, l'integrale

$$\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx ,$$

con la sostituzione $t = \tan(x/2)$, si trasforma in un integrale di funzione razionale di t. Infatti il cambiamento dei differenziali dà $dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$, e

$$\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx \underset{\tan(x/2)=t}{\overset{\uparrow}{=}} \int f\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big) \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

e la funzione integranda al secondo membro è una funzione razionale. Tuttavia, se uno dei cambiamenti di variabile

$$\cos x = t , \qquad \operatorname{sen} x = t , \qquad \tan x = t$$

risulta "razionalizzante", esso è da preferirsi perché i calcoli da effettuare risultano, in genere, più semplici.

Esempio : in un integrale del tipo

$$\int f(e^x)\, dx ,$$

dove f è una funzione razionale, posto $t = e^x$ si ottiene

$$\int f(e^x)\, dx \underset{e^x = t}{\overset{\uparrow}{=}} \int \frac{f(t)}{t}\, dt .$$

In questo caso rientrano anche gli integrali del tipo

$$\int f(\operatorname{senh} x, \cosh x)\, dx$$

con f funzione razionale.

Esempio : sia $a \neq 0$, e sia $f(x, y)$ una funzione razionale; l'integrale

$$\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$$

si può razionalizzare; se $a > 0$ si pone $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\, x + t$, ossia

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a} t} .$$

Se $a < 0$ deve essere $b^2 - 4ac > 0$ e quindi l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha due radici reali e distinte x_1, x_2 : si razionalizza allora ponendo $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_2)$, ossia, tenuto conto che $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,

$$x = \frac{ax_1 - t^2 x_2}{a - t^2} .$$

Osserviamo che nel caso in cui sia $b = 0$ e $c \neq 0$, casi a cui è sempre possibile ricondursi con la sostituzione $x = t - b/(2a)$, le primitive da determinare si presentano in una delle forme

$$\int f(x, \sqrt{k^2 - x^2})\, dx , \qquad \int f(x, \sqrt{x^2 - k^2})\, dx , \qquad \int f(x, \sqrt{x^2 + k^2})\, dx ,$$

e conviene allora usare rispettivamente i cambiamenti di variabile

$$x = k \operatorname{sen} t , \qquad x = k \cosh t , \qquad x = k \operatorname{senh} t .$$

Appendice 8.19 - Funzioni razionali: decomposizione di Hermite

In alcuni casi di integrazione di funzioni razionali, può risultare conveniente utilizzare una decomposizione, detta *di Hermite*, diversa dalla (8.40). Questa consiste, con le notazioni della sezione 8.5, nel cercare una decomposizione del tipo

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} \frac{c_i}{x - x_i} + \sum_{i=1}^{s} \frac{d_i x + e_i}{(x-\alpha_i)^2 + \beta_i^2} + \frac{d}{dx}\frac{G(x)}{H(x)}\,, \tag{A8.34}$$

dove è

$$H(x) = (x - x_1)^{k_1 - 1} \cdots (x - x_r)^{k_r - 1} \cdot \left((x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2\right)^{h_1 - 1} \cdots \left((x-\alpha_s)^2 + \beta_s^2\right)^{h_s - 1}$$

e $G(x)$ è un polinomio di grado inferiore al grado di $H(x)$. Al secondo membro di (A8.34) figurano come incognite, oltre a c_i, d_i ed e_i, anche i coefficienti di $G(x)$. Si ottiene allora, senza complicate formule induttive,

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{r} \int \frac{c_i}{x - x_i}\,dx + \sum_{i=1}^{s} \int \frac{d_i x + e_i}{(x-\alpha_i)^2 + \beta_i^2}\,dx + \frac{G(x)}{H(x)} \\ &= \sum_{i=1}^{r} c_i \log|x - x_i| + \sum_{i=1}^{s} \frac{d_i}{2} \log\left((x-\alpha_i)^2 + \beta_i^2\right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{s} \frac{e_i + \alpha_i d_i}{\beta_i} \arctan\frac{x - \alpha_i}{\beta_i} + \frac{G(x)}{H(x)} + c\,.\end{aligned}$$

Per determinare i coefficienti, occorre eseguire la derivata (tra numeratore e denominatore si semplificano molte potenze) e procedere come nella sezione 8.5.

Esempio : se è $A(x) = a_0 x^4 + \cdots + a_4$ e $B(x) = x^3(x-1)^2$, abbiamo la decomposizione

$$\begin{aligned}\frac{A(x)}{B(x)} &= \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x-1} + \frac{d}{dx}\frac{ax^2 + bx + c}{x^2(x-1)} \\ &= \frac{c_1 x^2 (x-1)^2 + c_2 x^3 (x-1)}{x^3(x-1)^2} + \frac{(2ax + b)(x^2 - x) - (ax^2 + bx + c)(3x - 2)}{x^3(x-1)^2}\end{aligned}$$

e quindi il sistema

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_2 \\ a_1 = -a - 2c_1 - c_2 \\ a_2 = -2b + c_1 \\ a_3 = b - 3c \\ a_4 = 2c\,. \end{cases}$$

Ad esempio, se $A(x) = x^4 - x^3 + 2$ abbiamo

$$\frac{x^4 - x^3 + 2}{x^3(x-1)^2} = \frac{6}{x} - \frac{5}{x-1} + \frac{d}{dx}\frac{-6x^2 + 3x + 1}{x^2(x-1)}\,,$$

da cui si ottiene

$$\int \frac{x^4 - x^3 + 2}{x^3(x-1)^2}\,dx = 6\log|x| - 5\log|x-1| - \frac{6x^2 - 3x - 1}{x^2(x-1)} + c\,.$$

serie → somma di infiniti termini

• data una successione $\{a_n\}_n \in \mathbb{R}$, si dice serie associata ad $\{a_n\}_n$, o serie generale a_n, la successione delle somme parziali $\{S_n\}_n$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

gli elementi di a_n → termini della serie

se $\exists \lim_{n \to +\infty} S_n$ = somma della serie

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

Capitolo 9

Serie

9.1 - Definizione di serie e prime proprietà

La nozione di serie associata ad una successione traduce in maniera precisa il concetto intuitivo di "somma di infiniti termini", che ricorre in svariati problemi. Ad esempio, se vogliamo sommare $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \frac{1}{2^n} + \cdots$, osservando che

$$1 = 2 - 1\,, \qquad 1 + \tfrac{1}{2} = 2 - \tfrac{1}{2}\,, \qquad 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 2 - \tfrac{1}{4}\,, \qquad \ldots,$$

l'intuizione ci spinge a dire che la somma di "tutte" le potenze di $1/2$ vale 2; formalizziamo questo tentativo nella prossima definizione.

Definizione : *data una successione $\{a_n\}_n$ di numeri reali, si dice serie associata ad $\{a_n\}_n$, o serie di termine generale a_n, la successione $\{S_n\}_n$ delle somme parziali*

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i\,.$$

Gli elementi a_n si chiamano termini della serie; se esiste il limite $\lim_{n\to+\infty} S_n$, il valore di tale limite è detto somma della serie ed è indicato con

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i\,.$$

Diremo che la serie converge se la sua somma è finita, mentre diremo che la serie diverge positivamente [negativamente] se la sua somma è $+\infty$ [$-\infty$]; diremo infine che la serie è indeterminata se il limite della successione $\{S_n\}_n$ non esiste.

Le serie sono dunque limiti di somme finite, e come tali godono di alcune delle proprietà dell'addizione (➡ appendice 9.7); la stessa problematica potrebbe poi essere sviluppata per i prodotti infiniti, anziché per le serie (➡ appendice 9.1). Conformemente a quanto abbiamo convenuto per le successioni, se $\{a_n\}_n$ è definita solo per $n \geq n_0$ anche le somme parziali saranno definite solo per $n \geq n_0$ come

$$S_n = \sum_{i=n_0}^{n} a_i$$

e la somma della serie sarà

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{i=n_0}^{\infty} a_i \,.$$

Nel seguito useremo spesso la notazione $\sum_n a_n$ per indicare la successione delle somme parziali associata alla successione $\{a_n\}_n$; inoltre diremo che due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso carattere se esse sono entrambe convergenti, entrambe divergenti, o entrambe indeterminate.

Le serie sono solo un diverso linguaggio per trattare le successioni, che torna più comodo in qualche caso: infatti, per ogni succesione $\{a_n\}_n$ possiamo considerare la sua serie, e viceversa data una qualunque successione $\{S_n\}_n$ questa può sempre essere vista come la serie associata ad una successione $\{a_n\}_n$, poiché basta porre (verificatelo per esercizio)

$$a_0 = S_0\,, \qquad a_n = S_n - S_{n-1} \quad \text{per } n \geq 1$$

per avere $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$.

Esempio : sia $\alpha \in \mathbb{R}$, e sia $a_n = \alpha^n$; la serie associata si chiama *serie geometrica di ragione* α. Da quanto visto nel capitolo 3, ☞ formula (3.7), si ha

$$S_n = \begin{cases} n+1 & \text{se } \alpha = 1 \\ \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & \text{se } \alpha \neq 1, \end{cases} \tag{9.1}$$

serie geometrica
nel caso in cui i numeri non siano tutti 1.

e quindi

$$\alpha \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \text{la serie diverge a } +\infty$$
$$|\alpha| < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{la serie converge a } \frac{1}{1-\alpha}$$
$$\alpha \leq -1 \quad \Rightarrow \quad \text{la serie è indeterminata.}$$

Ad esempio, per $\alpha = 1/2$ si ha

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 2\,,$$

per $\alpha = -1/2$ si ha

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Big(-\frac{1}{2}\Big)^i = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{2}{3}\,, \tag{9.2}$$

mentre per $\alpha = -1$ la serie

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

è indeterminata.

Esempio : consideriamo la serie (detta di Mengoli) $\rightsquigarrow \sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots$$

associata alla successione

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \qquad (n \geq 0)\,;$$

dato che $a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$, si trova facilmente per induzione che

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i = 1 - \frac{1}{n+2}\,,$$

da cui segue che la serie è convergente ed ha per somma 1.

Esempio : consideriamo la successione $a_n = 1/n!$ e la serie associata

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\,;$$

con le notazioni della sezione 5.9 abbiamo $S_n = b_n \to \mathrm{e}$, quindi la somma della serie è il numero e. Ne abbiamo visto anche un'altra dimostrazione che usa la formula di Taylor, ☞ formula (7.17).

Esempio : dallo sviluppo di Taylor con resto di Lagrange della funzione $\operatorname{arcsen} x$ (☞ sezione 7.5) si ottiene

$$\operatorname{arcsen} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + R_n(x)$$

dove per $0 < x \leq \sqrt{2}/2$ si ha (☞ appendice 8.10)

$$|R_n(x)| \leq \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\,\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\,. \tag{9.3}$$

Osserviamo che $|R_n(x)| \le \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$; ponendo $x = 1/2$ si ha quindi che $R_n(1/2) \to 0$ per $n \to +\infty$, e che

$$\frac{\pi}{6} = \operatorname{arcsen}(1/2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{2^{-2k-1}}{2k+1} + R_n(1/2) .$$

In altre parole, la serie di termine generale

$$a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{2^{-2n-1}}{2n+1}$$

è convergente ed ha per somma $\pi/6$. Anche in questo caso possiamo usare la convergenza della serie per calcolare il numero π ; infatti, già con $n = 3$ si ha

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5} + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 2^7} \simeq 0.5235258$$

con un errore

$$|\frac{\pi}{6} - S_3| \le \frac{7!!}{8!!\cdot 9\cdot 2^9} < 6\cdot 10^{-5} ,$$

e quindi $6\ S_3 \simeq 3.1411548$ è un valore approssimato di π con un errore inferiore a $3.6\cdot 10^{-4}$.

Il fatto di poter calcolare esplicitamente la somma di una serie assegnata è un evento piuttosto raro; nella maggior parte dei casi che tratteremo ci accontenteremo di stabilire se la serie in questione risulta convergente, divergente, oppure indeterminata.

Per poter fornire alcuni esempi interessanti, useremo i seguenti fatti, la cui dimostrazione risulterà molto facile più avanti, ☛ formule (9.7) e (9.11):

- la serie $\sum_n 1/n^\alpha$, detta serie armonica generalizzata (serie armonica, se $\alpha = 1$), converge se $\alpha > 1$ e diverge a $+\infty$ se $\alpha \le 1$;
- la serie $\sum_n (-1)^n/n^\alpha$ converge per ogni $\alpha > 0$.

Un primo strumento per studiare la convergenza delle serie è rappresentato dal prossimo teorema, che fornisce una condizione necessaria affinché una serie risulti convergente.

Teorema 9.1 : *se $\sum_n a_n$ è una serie convergente, allora il termine generale a_n risulta infinitesimo.*

DIMOSTRAZIONE : indicando con S_n le somme parziali della serie, e con S la sua somma, si ha $S_n \to S$ per $n \to +\infty$, dunque, passando al limite nell'uguaglianza

$$a_n = S_n - S_{n-1} ,$$

si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

per il teorema 5.25 sulla somma dei limiti (che può essere applicato in quanto $S \in \mathbb{R}$). ■

Osservazione : in generale, avere il termine generale infinitesimo non è una condizione sufficiente a garantire la convergenza di una serie; ad esempio, la serie armonica $\sum_n \frac{1}{n}$ risulta divergente, pur avendo il termine generale infinitesimo.

Dal teorema 5.48 si ottiene immediatamente un criterio di convergenza per le serie.

Teorema (criterio di convergenza di Cauchy) 9.2 : *una serie $\sum_n a_n$ risulta convergente se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \ge \bar{n}$*

$$|S_{n+k} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbb{N}^+ . \tag{9.4}$$

DIMOSTRAZIONE : infatti $\sum_n a_n$ risulta convergente se e solo se la successione $\{S_n\}_n$ delle sue somme parziali è di Cauchy, che non è altro che la condizione (9.4). ■

Dal teorema precedente si può ottenere il seguente criterio, detto di convergenza assoluta, che fornisce una condizione sufficiente per la convergenza di una serie (➡ appendice 9.2).

Definizione : *si dice che una serie $\sum_n a_n$ converge assolutamente se la serie $\sum_n |a_n|$ risulta convergente.* la serie converge se converge la serie dei valori assoluti

Teorema (criterio di convergenza assoluta) 9.3 : *sia $\sum_n a_n$ una serie assolutamente convergente; allora anche la serie $\sum_n a_n$ risulta convergente, e si ha*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| .$$

DIMOSTRAZIONE : per il criterio di convergenza di Cauchy 9.2, per ogni ε esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \ge \bar{n}$

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbb{N}^+$$

Applicando la disuguaglianza triangolare, ☛ formula (4.10), si ha

$$\left|\sum_{i=1}^{k} a_{n+i}\right| \le \sum_{i=1}^{k} |a_{n+i}| < \varepsilon ,$$

il che, di nuovo per il criterio di Cauchy, mostra la convergenza della serie $\sum_n a_n$. ■

Osservazione : va notata l'analogia del teorema 9.3 con il teorema 8.19 sulla convergenza degli integrali generalizzati.

Osservazione : date due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ possiamo considerare la loro somma $\sum_n(a_n+b_n)$; dai teoremi sui limiti delle somme (☞ teorema 5.25) otteniamo subito che se $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ sono convergenti, allora anche $\sum_n(a_n+b_n)$ è convergente, e si ha

$$\sum_n(a_n+b_n) = \sum_n a_n + \sum_n b_n\,,$$

mentre se una è convergente e l'altra è divergente, o se sono entrambe divergenti dalla stessa parte, la somma diverge; rimane escluso il caso della somma di una serie divergente positivamente con una divergente negativamente.

Per il prodotto invece va notato che la serie $\sum_n a_n b_n$ non ha nulla a che fare con le serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$, come mostrano ad esempio le serie $\sum_n\big((-1)^n+1\big)$ e $\sum_n\big((-1)^{n+1}+1\big)$: entrambe sono divergenti positivamente, mentre la serie $\sum_n\big((-1)^n+1\big)\big((-1)^{n+1}+1\big)$ è la serie identicamente nulla. Discuteremo in appendice qualche dettaglio ulteriore sulle serie prodotto (➡ appendice 9.6).

9.2 - Criteri di convergenza per serie a termini non negativi

Restringendo ora la nostra attenzione alle serie con termini non negativi, ne studieremo diversi criteri di convergenza; dal teorema 9.3 potremo ottenere in molti casi una risposta sulla convergenza della serie in questione. Riprenderemo poi lo studio delle serie con termini di segno alternato alla fine del capitolo.

Osservazione : nelle serie con termini non negativi le somme parziali sono una successione monotona debolmente crescente; infatti se $a_n \geq 0$ per ogni n si ha

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n\,.$$ ricordo $a_n = S_n - S_{n-1}$

Da ciò (☞ teorema 5.40) si ottiene che una serie con termini non negativi può soltanto essere convergente oppure divergente a $+\infty$; dunque per le serie con termini non negativi, anziché $\sum_n a_n$ converge **[** diverge positivamente **]** scriveremo $\sum_n a_n < +\infty$ **[** $= +\infty$ **]** . Naturalmente, quanto verrà detto per le serie con termini non negativi vale anche, con le opportune ovvie modifiche, per le serie con termini non positivi, e più in generale per le serie i cui termini sono definitivamente non negativi oppure definitivamente non positivi.

Teorema (criterio del confronto) 9.4 : *siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni di numeri reali non negativi tali che:*
1) *definitivamente $a_n \leq b_n$;*
2) *la serie $\sum_n b_n$ è convergente.*
Allora anche la serie $\sum_n a_n$ risulta convergente.

DIMOSTRAZIONE : indichiamo con A_n e B_n le somme parziali relative alle successioni $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ rispettivamente. Per l'ipotesi 1) esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \leq b_n$ per ogni $n \geq n_0$, e dunque per ogni $n \geq n_0$ si ha

$$A_n = A_{n_0-1}+\sum_{i=n_0}^{n} a_i \leq A_{n_0-1}+\sum_{i=n_0}^{n} b_i = A_{n_0-1}+(B_n-B_{n_0-1}) \leq A_{n_0-1}-B_{n_0-1}+\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,;$$

→ [illegible]

pertanto, la successione non decrescente $\{A_n\}_n$ è limitata superiormente: allora (☞ teorema 5.40) la serie $\sum_n a_n$ è convergente, e

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n + \sum_{n=0}^{n_0-1}(a_n-b_n)\,,$$

come volevasi dimostrare. ■

Molto spesso il criterio del confronto viene applicato in una forma leggermente diversa, tramite il seguente corollario.

Corollario (criterio del confronto asintotico) 9.5 : *siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni di numeri reali positivi, tali che*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \ell \in]0,+\infty[\,;$$

allora le due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso carattere, nel senso che sono entrambe convergenti o entrambe divergenti.

DIMOSTRAZIONE : per il teorema di limitatezza 5.19, definitivamente

$$\frac{\ell}{2}b_n \leq a_n \leq 2\ell b_n\,,$$

dove abbiamo usato anche la positività di b_n ; la tesi segue quindi dal criterio del confronto 9.4. ■

Esempio : consideriamo la serie $\sum_n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^\alpha$; il termine generale

$$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^\alpha = (\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^{-\alpha} \to 0$$

è un infinitesimo dello stesso ordine di $n^{-\alpha/2}$, dunque per il corollario 9.5 la serie in questione converge se e solo se $\alpha > 2$.

Osservazione : è interessante notare che il teorema 9.4 vale soltanto se le due successioni $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ sono entrambe non negative; infatti considerando le successioni

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

si ha che la serie $\sum_n a_n$ è convergente, che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1\,,$$

ma la serie $\sum_n b_n$ diverge a $+\infty$ in quanto somma della serie $\sum_n(-1)^n/\sqrt{n}$, che è convergente, e della serie divergente positivamente $\sum_n 1/n$.

Esempio : la serie armonica
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
è divergente. Infatti, essendo a termini positivi esiste $\lim_{n\to+\infty} S_n$, finito o no; ma dalla relazione
$$S_{2n} = S_n + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} \geq S_n + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = S_n + \frac{1}{2}\,, \tag{9.5}$$
posto $x_n = S_{2^n}$, si ottiene la formula
$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} \geq x_n + \frac{1}{2} \end{cases} :$$
ad esempio
$$x_1 = S_2 \geq S_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,, \qquad x_2 = S_4 \geq S_2 + \frac{1}{2} \geq \frac{4}{2}\,, \qquad x_3 = S_8 \geq S_4 + \frac{1}{2} \geq \frac{5}{2}\,,$$
e si ricava facilmente per induzione
$$x_n \geq 1 + \frac{n}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$
Dunque $x_n = S_{2^n} \to +\infty$, per cui la serie in questione diverge.

Proposizione (criterio della radice n-esima) 9.6 : *sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali non negativi; supponiamo che*

$\sqrt[n]{a_n} \to 1$

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n)^{1/n} = L$$
con $0 \leq L \leq +\infty$. *Allora si ha*
$$L < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_n a_n < +\infty$$
$$L > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_n a_n = +\infty\,.$$

Dimostrazione : supponiamo che si abbia $L < 1$; osservando che $L < (1+L)/2 < 1$, da un certo intero n_0 in poi si avrà (☞ corollario 5.20)
$$(a_n)^{1/n} \leq \frac{1+L}{2}\,,$$
e cioè
$$a_n \leq \left(\frac{1+L}{2}\right)^n.$$
È sufficiente allora applicare il criterio del confronto osservando che $\sum_n (\frac{1+L}{2})^n < +\infty$. Supponiamo ora che sia $L > 1$: da un certo intero n_0 in poi si avrà quindi $(a_n)^{1/n} \geq 1$; allora $a_n \geq 1$, e la conclusione segue dal teorema 9.1. ∎

Osservazione : a priori, nulla si può dire sulla convergenza della serie $\sum_n a_n$ quando
$$\lim_{n\to+\infty} (a_n)^{1/n} = 1\,.$$
Infatti si ha $\sum_n 1/n = +\infty$ mentre $\sum_n 1/n^2 < +\infty$, anche se per entrambe le serie si ha $(a_n)^{1/n} \to 1$.

Analogamente a quanto fatto per la proposizione 5.49, avremmo potuto dedurre la proposizione 9.6 dal più generale caso seguente.

Proposizione 9.7 : *sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali non negativi;*
1) *se esiste $q < 1$ tale che definitivamente si abbia $0 \leq (a_n)^{1/n} \leq q$, allora la serie $\sum_n a_n$ converge;*
2) *se definitivamente $a_n \geq 1$ allora la serie $\sum_n a_n$ diverge.*

Proposizione (criterio del rapporto) 9.8 : *sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali positivi; supponiamo che*
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L\,.$$
Allora si ha
$$L < 1 \Rightarrow \sum_n a_n < +\infty$$
$$L > 1 \Rightarrow \sum_n a_n = +\infty\,.$$

$\sqrt[n]{a_n} \neq e$

Dimostrazione : applicando la proposizione 5.51 si ottiene
$$\lim_{n\to+\infty} (a_n)^{1/n} = L\,,$$
e quindi entrambe le affermazioni seguono dal criterio della radice n-esima (☞ proposizione 9.6). ∎

Osservazione : gli stessi esempi visti per il criterio della radice n-esima mostrano che nulla si può dire a priori sulla convergenza della serie $\sum_n a_n$ quando $\lim_{n\to+\infty} (a_{n+1}/a_n) = 1$.

Anche in questo caso possiamo dedurre la proposizione 9.8 dal più generale caso seguente.

Proposizione 9.9 : ~~*sia $\{a_n\}_n$ una successione*~~ *di numeri reali positivi;*
1) *se esiste $q < 1$ tale che definitivamente si abbia $0 \leq (a_{n+1}/a_n) \leq q$, allora la serie* ~~*$\sum_n a_n$ converge*~~*;*
2) *se* ~~*definitivamente*~~ *$(a_{n+1}/a_n) \geq 1$ allora la serie $\sum_n a_n$ diverge.*

Esempio : per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ ed ogni $a > 1$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\alpha}{a^n}$$

è convergente; infatti applicando il criterio della radice n-esima si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^\alpha}{a^n}\right)^{1/n} = \frac{1}{a} < 1 .$$

Esempio : la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

è convergente; infatti applicando il criterio del rapporto si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1 .$$

Esempio : per ogni $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{9.6}$$

è assolutamente convergente; infatti, se $x = 0$ la cosa è ovvia, mentre se $x \neq 0$ applicando il criterio del rapporto si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|x|^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 .$$

Dalla formula (7.18) abbiamo inoltre che la somma della serie è e^x (➡ appendice 9.5).

Esempio : la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-\log n}$$

è convergente; infatti si ha

$$(\log n)^{-\log n} = e^{-\log n \log\log n} = n^{-\log\log n} ,$$

ed essendo

$$\log\log n \geq 2 \qquad \forall n \geq e^{(e^2)}$$

abbiamo definitivamente $(\log n)^{-\log n} \leq 1/n^2$, e la conclusione segue dal criterio del confronto (☞ teorema 9.4) grazie al fatto che la serie $\sum_n 1/n^2$ è convergente.

In alcuni casi si può ricondurre lo studio della convergenza di una serie alla convergenza di un integrale generalizzato; più precisamente vale il seguente risultato.

Proposizione (criterio dell'integrale) 9.10 : *sia* $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ *una funzione non negativa e debolmente decrescente; allora la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

risulta convergente se e solo se la funzione f *è integrabile in un intorno di* $+\infty$ *. Inoltre*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(n) .$$

DIMOSTRAZIONE : dalla decrescenza di f si ha per ogni intero i (☞ figura 9.1)

$$f(i+1) \leq f(x) \leq f(i) \qquad \forall x \in [i, i+1] ,$$

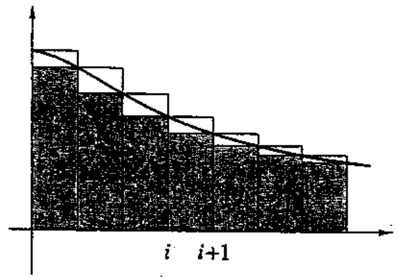


Fig. 9.1 : rapporti tra serie e integrale

da cui integrando tra i ed $i+1$ si ottiene

$$f(i+1) \leq \int_i^{i+1} f(x)\,dx \leq f(i) .$$

Sommando sugli interi i tra 0 ed n si ricava

$$\sum_{i=1}^{n+1} f(i) \leq \int_0^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{i=0}^{n} f(i) ,$$

e la tesi segue immediatamente passando al limite per $n \to +\infty$. ■

Osservazione : più in generale, se $f : [k, +\infty[\to [0, +\infty[$ è una funzione non negativa e debolmente decrescente si ha

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} f(n) \leq \int_k^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=k}^{\infty} f(n) ,$$

e quindi la serie $\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$ risulta convergente se e solo se la funzione f è integrabile in un intorno di $+\infty$.

Esempio : fissato un numero reale positivo α, la funzione $f(x)=x^{-\alpha}$ è decrescente su $]0,+\infty[$; inoltre, ☞ formula (8.34), essa è integrabile in un intorno di $+\infty$ se e solo se $\alpha>1$. Questo permette di provare che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}<+\infty \iff \alpha>1\,, \tag{9.7}$$

e che inoltre si ha

$$\frac{1}{\alpha-1}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\le\frac{\alpha}{\alpha-1}\,.$$

Esempio : per ogni $\beta>0$ la funzione

$$f(x)=\frac{1}{x\log^{\beta}x}$$

è decrescente su $]1,+\infty[$; inoltre, ☞ formula (8.35), essa è integrabile in un intorno di $+\infty$ se e solo se $\beta>1$, dunque

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^{\beta}n}<+\infty \iff \beta>1\,. \tag{9.8}$$

Inoltre si ha

$$\frac{1}{(\beta-1)\log^{\beta-1}2}\le\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^{\beta}n}\le\frac{1}{(\beta-1)\log^{\beta-1}2}+\frac{1}{2\log^{\beta}2}\,.$$

Esempio : la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log(n!)}$$

è divergente; infatti dalla disuguaglianza $n!\le n^n$ si ottiene

$$\frac{1}{\log(n!)}\ge\frac{1}{\log(n^n)}=\frac{1}{n\log n}\,,$$

e quindi la conclusione segue dal teorema del confronto 9.4 ricordando la proprietà (9.8).

Esempio : studiamo l'integrabilità (in senso generalizzato) su $]0,+\infty[$ della funzione

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{\sqrt{|\operatorname{sen}x|}}\,. \tag{9.9}$$

Per ogni $n\in\mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned}\int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi}\frac{e^{-x}}{\sqrt{|\operatorname{sen}x|}}\,dx&\le e^{-2n\pi}\int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi}\frac{1}{\sqrt{|\operatorname{sen}x|}}\,dx\\&=4e^{-2n\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}x}}\,dx\,.\end{aligned} \tag{9.10}$$

L'ultimo integrale è convergente (☞ formula (8.33) e proposizione 8.20) in quanto la funzione integranda è continua in $]0,\pi/2]$ e $\sqrt{\operatorname{sen}x}\sim\sqrt{x}$ per $x\to0^+$. Posto $K=\int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen}x)^{-1/2}\,dx$, utilizzando la (9.10) si ottiene

$$\int_0^{+\infty}f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi}f(x)\,dx\le4K\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2n\pi}=\frac{4K}{1-e^{-2\pi}}\,,$$

pertanto la funzione in esame risulta integrabile (in senso generalizzato) su $]0,+\infty[$.

Un altro criterio di convergenza per serie a termini non negativi si trova in appendice (➡ appendice 9.3) (✎ es. 9.1).

9.3 - Serie a termini di segno alternato

Consideriamo ora il caso piuttosto particolare di serie con termini aventi il segno alternativamente $+1$ e -1.

Teorema (criterio di Leibniz) 9.11 : *sia* $\{a_n\}_n$ *una successione di numeri reali non negativi, debolmente decrescente, infinitesima; allora la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$$

risulta convergente.

DIMOSTRAZIONE : osserviamo che, dette S_n le somme parziali, si ha per ogni $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}S_{n+2}&=S_n+(-1)^{n+1}a_{n+1}+(-1)^{n+2}a_{n+2}\\&=S_n+(-1)^{n+1}(a_{n+1}-a_{n+2})\,,\end{aligned}$$

e per ipotesi $a_{n+1}-a_{n+2}\ge0$, quindi

$$\begin{aligned}S_{2n+2}&=S_{2n}-(a_{2n+1}-a_{2n+2})\le S_{2n}\\S_{2n+1}&=S_{2n-1}+(a_{2n}-a_{2n+1})\ge S_{2n-1}\,.\end{aligned}$$

In altri termini si ha che la successione $\{S_{2n}\}_n$ è decrescente e tende quindi ad un limite S_p, mentre la successione $\{S_{2n+1}\}_n$ è crescente e tende quindi ad un limite S_d. Essendo poi

$$S_1\le S_{2n+1}=S_{2n}-a_{2n+1}\le S_{2n}\le S_0$$

le successioni $\{S_{2n}\}_n$ ed $\{S_{2n+1}\}_n$ risultano limitate, per cui S_p ed S_d sono finiti; infine

$$S_p-S_d=\lim_{n\to+\infty}(S_{2n}-S_{2n+1})=\lim_{n\to+\infty}a_{2n+1}=0\,,$$

cioè $S_p=S_d$ e quindi (☞ proposizione 5.15) tutta la successione $\{S_n\}_n$ tende a questo numero, cioè la serie $\sum_n(-1)^n a_n$ è convergente. ■

Osservazione : dalla dimostrazione precedente si ricava che, detta S la somma della serie $\sum_n(-1)^n a_n$, si ha

$$S_{2n+1} \le S \le S_{2n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

e l'errore che si commette approssimando S con S_{2n} o con S_{2n+1} si può stimare con

$$|S_{2n} - S_{2n+1}| = a_{2n+1}\,.$$

Esempio : se $\alpha > 0$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \tag{9.11}$$

non è sempre una serie assolutamente convergente, ma per il criterio di Leibniz è convergente. Ricordando (☛ sezione 7.5) lo sviluppo di Taylor della funzione $\log(1+x)$ e ragionando come per la formula (7.18) si ottiene poi che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2\,. \tag{9.12}$$

Esempio : la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + \operatorname{sen} n}$$

non è assolutamente convergente (in quanto il modulo del termine generale è dello stesso ordine di $1/n$), ma per il criterio di Leibniz è convergente. Infatti la funzione

$$f(x) = \frac{1}{2x + \operatorname{sen} x}$$

è infinitesima per $x \to +\infty$ e decrescente, in quanto (✎ es. 9.11)

$$f'(x) = -\frac{2 + \cos x}{(2x + \operatorname{sen} x)^2} \le 0\,.$$

Esempio : se nel teorema 9.11 si elimina la condizione che la successione $\{a_n\}_n$ sia infinitesima, per il teorema 9.1 la serie non può convergere; più interessante è osservare che anche se si elimina l'ipotesi che $\{a_n\}_n$ sia decrescente, la serie $\sum_n(-1)^n a_n$ può non risultare più convergente. Consideriamo ad esempio la successione

$$a_n = \begin{cases} 2/n & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari;} \end{cases}$$

essa è non negativa ed infinitesima, ma si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty\,.$$

Un altro criterio di convergenza per serie a termini di segno qualunque si trova in appendice (➡ appendice 9.4) (✎ es. 9.8).

Esercizi relativi al capitolo 9

Esercizio 9.1 : dite se è convergente, divergente, indeterminata la serie $\sum_n a_n$, dove

$$a_n = \begin{cases} 1/(n + \cos^2 n) & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1/(n^2+1) & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Esercizio 9.2 : determinate i valori dei parametri reali α, β, γ per cui risulta convergente la serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta (\log\log n)^\gamma}\,.$$

Esercizio 9.3 : calcolate la somma delle seguenti serie:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^{1/(2n-1)} - 3^{1/(2n+1)}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\,.$

Esercizio 9.4 : dite se sono convergenti, divergenti, indeterminate le seguenti serie, al variare dell'eventuale parametro reale α :

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{(n^2)}}{n^{2n}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n + (-1)^n n^2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{1 - \operatorname{sen} n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\operatorname{sen}^2 n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+e^n}{n!}$

h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen} n$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^2 n}{n\sqrt{n}}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\Big)$

k) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{1}{n\log n} - \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}\Big)$

l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+5^n}{n!}$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^n}{n!}$

n) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-n}{n^\alpha}$

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\log(1+\alpha)}$

q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n n!}{n^n} \qquad (\alpha > 0)\,.$

Esercizio 9.5 : considerate per ogni $x, y > 0$ la successione definita per induzione dalla formula

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = y a_n^x\,. \end{cases}$$

Trovate un'espressione esplicita di a_n e determinate i valori di x, y per cui la serie $\sum a_n$ risulta convergente.

Esercizio 9.6 : studiate la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

dove $f_n(x)$ è la funzione definita per induzione da

$$\begin{cases} f_0(x) = 1 \\ f_{n+1}(x) = x^n f_n(x) + \dfrac{\operatorname{sen} x}{f_n(x)}\,. \end{cases}$$

Esercizio 9.7 : dite se sono convergenti, divergenti, indeterminate le seguenti serie, al variare dell'eventuale parametro reale α:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n^2}^{n^3} \operatorname{sen}^2(1/x)\,dx$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \Big(1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\Big)\,dx$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_{1+1/(n+1)}^{1+1/n} (x^\alpha - 1)^{-1/2}\,dx \qquad (\alpha > 0)\,.$

Esercizio 9.8 : tra le affermazioni seguenti, dite quali sono vere:

a) ogni serie convergente è assolutamente convergente
b) ogni serie assolutamente convergente è convergente
c) una serie a termini positivi non può essere indeterminata
d) ogni serie convergente ha il termine generale infinitesimo
e) ogni serie avente il termine generale infinitesimo è convergente
f) ogni serie a segni alterni è convergente.

Esercizio 9.9 : dite se sono convergenti, divergenti, indeterminate le seguenti serie, al variare dell'eventuale parametro reale α:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(1+e^{-n})$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - n\operatorname{sen}^2 n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\cos(n\pi)}{1+n^2}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha \operatorname{sen}(1/n)}\,.$

Esercizio 9.10 : calcolate il limite della successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = -e^{-1/(n+1)} a_n \end{cases}$$

e studiate la convergenza della serie $\sum_n a_n$.

Esercizio 9.11 : trovate per quali valori di $\alpha > 0$ la successione

$$a_n = \frac{1}{n + \alpha \operatorname{sen}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

risulta debolmente decrescente; indipendentemente da questo risultato, trovate poi per quali valori di $\alpha > 0$ la serie $\sum_n (-1)^n a_n$ risulta convergente (questo esercizio mostra che il criterio di Leibniz dà solo una condizione sufficiente per la convergenza, ma non necessaria).

Esercizio 9.12 : determinate il comportamento (per $n \to +\infty$) della successione

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} .$$

Esercizio 9.13 : studiate, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della successione

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^\alpha}\right)^k .$$

Esercizio 9.14 : calcolate il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) .$$

Appendice al capitolo 9

Appendice 9.1 - Prodotti infiniti

In un modo analogo a quello usato per definire la serie associata ad una successione $\{a_n\}_n$ si può definire il prodotto infinito

$$\prod_{n=0}^{\infty} a_n$$

degli elementi di una successione assegnata $\{a_n\}_n$. Si definiscono cioè i prodotti parziali

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} a_k$$

e si dice che il prodotto infinito è convergente, divergente, indeterminato, se è convergente, divergente, indeterminata la successione $\{P_n\}_n$. È evidente che se uno dei termini della successione $\{a_n\}_n$ è nullo, allora definitivamente $P_n = 0$, quindi $\prod_n a_n = 0$.
Nel caso in cui i termini della successione $\{a_n\}_n$ sono positivi si può ricondurre lo studio del prodotto infinito $\prod_n a_n$ a quello di una serie; infatti, ponendo $b_n = \log a_n$ si ha l'uguaglianza

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = \log\left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right)$$

e quindi si ha

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} a_n = P \iff \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n = \log P$$

(✎ es. 9.12).

Appendice 9.2 - Un'altra dimostrazione del criterio di convergenza assoluta

Diamo qui un'altra dimostrazione del teorema 9.3.

DIMOSTRAZIONE : dette a_n^+ ed a_n^- rispettivamente le parti positiva e negativa di a_n (☞ sezione 4.5) si ha

$$a_n^+ \leq |a_n|, \qquad a_n^- \leq |a_n|,$$

dunque, per il criterio del confronto, risultano convergenti le serie (a termini non negativi)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^- .$$

Indicate con S_n^+ ed S_n^- rispettivamente le loro somme parziali, e con S^+ ed S^- le loro somme, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{n=0}^{n} a_i = \lim_{n\to+\infty} (S_n^+ - S_n^-) = S^+ - S^- ,$$

da cui si deduce che $\sum_n a_n$ è convergente. Inoltre si ha

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| = |S^+ - S^-| \leq S^+ + S^- = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| ,$$

come volevasi dimostrare. ■

Appendice 9.3 - Criterio di condensazione di Cauchy

Con un ragionamento simile a quello fatto per la serie armonica (9.5) si dimostra il seguente risultato, detto criterio di condensazione di Cauchy.

Teorema A9.1 : *sia* $\{a_n\}_n$ *una successione non negativa e debolmente decrescente; allora la serie* $\sum_n a_n$ *risulta convergente se e solo se la serie* $\sum_n 2^n a_{2^n}$ *è convergente.*

DIMOSTRAZIONE : indicando con S_n e C_n le somme parziali delle serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n 2^n a_{2^n}$ rispettivamente, ed usando il fatto che $\{a_n\}_n$ è decrescente, si ottiene per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$2^k a_{2^{k+1}} \leq \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_i \leq 2^k a_{2^k+1} ; \tag{A9.1}$$

osservando che

$$S_{2^{n+1}} = a_0 + a_1 + \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_i \Big)$$

deduciamo da (A9.1)

$$\begin{aligned} S_{2^{n+1}} &\leq a_0 + a_1 + \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k+1} \\ &\leq a_0 + a_1 + \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k} = a_0 + a_1 + C_n \end{aligned} \tag{A9.2}$$

$$\begin{aligned} S_{2^{n+1}} &\geq a_0 + a_1 + \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^{k+1}} \\ &= a_0 + a_1 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1} 2^j a_{2^j} = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}C_{n+1} . \end{aligned} \tag{A9.3}$$

Da (A9.2) e (A9.3) segue immediatamente che la serie $\sum_n a_n$ converge se e solo se la serie $\sum_n 2^n a_{2^n}$ converge, e dette S e C le rispettive somme, si ha

$$a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}C \leq S \leq a_0 + a_1 + C ,$$

come volevasi dimostrare. ■

Esempio : consideriamo la serie armonica di esponente $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} ;$$

per il criterio di Cauchy tale serie converge se e solo se risulta convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{\alpha n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n .$$

Ma questa è una serie geometrica di ragione $2^{1-\alpha}$, quindi grazie alla formula (9.1) si ha convergenza se e solo se $2^{1-\alpha} < 1$, cioè $\alpha > 1$. Inoltre si ha

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-2^{1-\alpha}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{1-2^{1-\alpha}} .$$

Esempio : fissato $\beta > 0$ consideriamo la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\beta} n} .$$

Applicando il criterio di Cauchy si ottiene che la convergenza di tale serie risulta equivalente alla convergenza della serie di termine generale

$$\frac{2^n}{2^n \log^{\beta}(2^n)} = \frac{1}{n^{\beta} \log^{\beta} 2}$$

che, per quanto visto nell'esempio precedente, è convergente se e solo se $\beta > 1$, ☞ anche proprietà (9.8).

Appendice 9.4 - Criterio di convergenza di Dirichlet

Mostriamo un criterio che può risultare utile nello studio della convergenza di serie con termini di segno qualsiasi.

Teorema (criterio di Dirichlet) A9.2 : *siano* $\{a_n\}_n$ *e* $\{b_n\}_n$ *due successioni tali che*
1) *la successione* $\{B_n\}_n$ *delle somme parziali della serie* $\sum_n b_n$ *è limitata;*
2) *la successione* $\{a_n\}_n$ *è decrescente ed infinitesima.*
Allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$$

risulta convergente.

DIMOSTRAZIONE : per l'ipotesi 1) esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$|B_n| \le C \qquad \forall n \in \mathbb{N} . \tag{A9.4}$$

Consideriamo la serie $\sum_n B_n(a_n - a_{n+1})$; essa risulta assolutamente convergente in quanto per le ipotesi 1) e 2) si ha per ogni k

$$\sum_{n=0}^{k} |B_n(a_n - a_{n+1})| \le C \sum_{n=0}^{k} (a_n - a_{n+1}) = C(a_0 - a_{k+1}) \le C a_0 .$$

Ora, essendo

$$b_i = B_i - B_{i-1} \qquad \forall i \ge 1 ,$$

si ha

$$\sum_{i=0}^{n} a_i b_i = a_0 B_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i (B_i - B_{i-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} B_i (a_i - a_{i+1}) + a_n B_n$$

e quindi, poiché il termine $a_n B_n$ è infinitesimo grazie a (A9.4), la convergenza della serie $\sum_n b_n a_n$ segue da quella della serie $\sum_n B_n(a_n - a_{n+1})$. ■

Osservazione : il criterio di Leibniz (☞ teorema 9.11) non è che un caso particolare del teorema A9.2: infatti corrisponde al caso $b_n = (-1)^n$, in cui effettivamente le somme parziali

$$B_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

sono limitate.

Esempio : se $\{a_n\}_n$ è una successione decrescente ed infinitesima, ed $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(\alpha n)$$

è convergente; basta infatti applicare il criterio di Dirichlet con $b_n = \operatorname{sen}(\alpha n)$ osservando che se α non è multiplo di 2π si ha

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sen}(\alpha k) = \sum_{k=0}^{n} \Im(e^{ik\alpha}) = \Im\Big(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\alpha}\Big) = \Im\Big(\frac{1 - e^{i\alpha(n+1)}}{1 - e^{i\alpha}}\Big) ,$$

e dunque

$$|B_n| \le \left| \frac{1 - e^{i\alpha(n+1)}}{1 - e^{i\alpha}} \right| \le \frac{2}{|1 - e^{i\alpha}|} .$$

Se invece α è multiplo di 2π la serie ha tutti i termini nulli; in maniera analoga si dimostra che se $\{a_n\}_n$ è una successione decrescente ed infinitesima, ed α non è multiplo di 2π , la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\alpha n)$$

è convergente.

Appendice 9.5 - Funzioni analitiche

Consideriamo una successione reale $\{a_n\}_n$ e scriviamo, per ogni $x \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n . \tag{A9.5}$$

Naturalmente, non è detto che la serie (A9.5) converga per ogni valore di x; ad esempio, se $a_n = 1$ per ogni n, si ha convergenza se e solo se $|x| < 1$. Le serie del tipo (A9.5) si chiamano *serie di potenze* e verranno studiate in maniera più approfondita in corsi successivi.

Teorema di Cauchy-Hadamard A9.3 : *posto*

$$A = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}, \qquad R = \begin{cases} +\infty & \text{se } A = 0 \\ \dfrac{1}{A} & \text{se } 0 < A < +\infty \\ 0 & \text{se } A = +\infty, \end{cases}$$

la serie (A9.5) *converge assolutamente se* $|x| < R$, *mentre non converge se* $|x| > R$.

Osservazione : il numero R introdotto sopra si chiama *raggio di convergenza* della serie di potenze; se $R = 0$, la serie converge solo (ovvio) per $x = 0$, e in generale non si può dire nulla per $|x| = R$.

Dimostrazione del teorema A9.3 : se $|x| > R$ si ha $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} > 1/|x|$ e quindi, dalle proprietà del lim sup (☞ appendice 5.10), esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}_k$ tale che $(a_{n_k})^{1/n_k} > 1/|x|$ per ogni k abbastanza grande. Dunque $a_{n_k} x^{n_k} > 1$, quindi il termine generale della serie $\sum_n a_n x^n$ non è infinitesimo, per cui (☞ teorema 9.1) non si può avere convergenza.
Sia ora $|x| < R$; se $x = 0$ la convergenza della serie è ovvia, altrimenti, ancora per le proprietà del lim sup, si ha che esiste $q < 1/|x|$ tale che definitivamente

$$|a_n|^{1/n} \le q ,$$

e quindi $|a_n x^n| \le (q|x|)^n$. La convergenza assoluta della serie di potenze segue allora dal criterio del confronto (☞ teorema 9.4) e dal fatto che $q|x| < 1$. ■

Esempio : la serie $\sum_n x^n/n!$ ha raggio di convergenza $R = +\infty$. Infatti si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n!)^{1/n}} = 0 . \tag{A9.6}$$

Sappiamo che la somma della serie nel punto x è data dal valore della funzione e^x; analogamente (dimostratelo) hanno raggio di convergenza $+\infty$ le serie di Taylor delle funzioni $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

Notiamo che quanto visto in questa appendice si applica inalterato alle serie di potenze complesse, $\sum_n a_n z^n$.

Esempio : abbiamo "convenuto" di scrivere e^{it} al posto di $\cos t + i \operatorname{sen} t$; osserviamo che la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}$$

ha raggio di convergenza $+\infty$, e ha somma e^{it}, ☞ formula (7.17). Prendendone la parte reale abbiamo

$$\Re\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Re[(it)^n]}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} .$$

Quest'ultima serie di potenze ha per somma la funzione $\cos t$; dato che (verificatelo per esercizio)

$$\Im\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \operatorname{sen} t ,$$

abbiamo *dimostrato* che

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t \qquad \forall t \in \mathbb{R} . \tag{A9.7}$$

In modo analogo si ottiene per ogni $z = x + iy$

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) . \tag{A9.8}$$

Esempio : la serie di potenze $\sum_n n! x^n$ ha raggio di convergenza $R = 0$, a causa della (A9.6); dunque la funzione $f(x)$ definita dalla serie di potenze $\sum_n n! x^n$ ha il dominio ridotto alla sola origine.

Definizione : *se A è un intervallo di $\mathbb{R}$, una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice analitica se per ogni punto $x_0 \in A$ esistono un intorno U di x_0 ed una serie di potenze $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ convergente assolutamente in ogni punto di U tali che*

$$f(x) = \sum_n a_n (x - x_0)^n \qquad \forall x \in U .$$

Osservazione : è possibile dimostrare (ed è argomento del corso di Analisi matematica II) che una funzione analitica è di classe C^∞, ed è quindi evidente che la serie di potenze della definizione precedente non può che essere la serie di Taylor di f centrata in x_0. Tuttavia va notato che non tutte le funzioni derivabili infinite volte sono analitiche; ad esempio abbiamo visto (☞ appendice 7.9) che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ e^{-1/x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è derivabile infinite volte in ogni punto, ma le sue derivate nell'origine sono tutte nulle, per cui la sua serie di Taylor centrata nell'origine è la serie nulla che quindi non può coincidere con $f(x)$ in alcun intorno dell'origine.

Appendice 9.6 - Serie prodotto

Abbiamo visto nella sezione 9.1 che due serie convergenti possono essere sommate termine a termine, e la serie così ottenuta converge alla somma delle due serie; la situazione è più complicata nel caso di prodotto di due serie.

Definizione : *date due serie* $\sum_n a_n$ *e* $\sum_n b_n$ *, posto*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

chiameremo la serie $\sum_n c_n$ *serie prodotto (secondo Cauchy) delle serie* $\sum_n a_n$ *e* $\sum_n b_n$ *.*

Osservazione : la definizione precedente è motivata dal fatto che, prese due serie di potenze (☞ appendice 9.5) $\sum_n a_n x^n$ e $\sum_n b_n x^n$, moltiplicando termine a termine e raccogliendo i termini con le stesse potenze di x si ha

$$\begin{aligned}
&(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) \\
&\quad = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots \\
&\quad = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots ,
\end{aligned}$$

da cui prendendo $x = 1$ si arriva alla definizione di serie prodotto.

Osservazione : può succedere che le serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ siano entrambe convergenti, ma la loro serie prodotto non lo sia. Ad esempio la serie $\sum_n (-1)^n (n+1)^{-1/2}$ converge per il criterio di Leibniz (☞ teorema 9.11), ma considerando la serie prodotto con se stessa si trova

$$\begin{aligned}
c_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1)^{-1/2} (-1)^{n-k} (n-k+1)^{-1/2} \\
&= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \big((k+1)(n-k+1)\big)^{-1/2} ;
\end{aligned}$$

ma $(k+1)(n+1-k) \le (n+1)^2$, da cui

$$|c_n| \ge \sum_{k=0}^{n} (n+1)^{-1} = 1 ,$$

dunque per il teorema 9.1 la serie $\sum_n c_n$ non è convergente.

Notiamo che nell'esempio precedente abbiamo considerato la serie prodotto di due serie che non sono assolutamente convergenti, e abbiamo visto che (almeno in questo esempio) la serie prodotto non risulta convergente; il risultato seguente mostra che invece questo fenomeno non si presenta se almeno una tra $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ converge assolutamente.

Teorema A9.4 : *siano* $\sum_n a_n$ *una serie assolutamente convergente e* $\sum_n b_n$ *una serie convergente. Allora la serie prodotto* $\sum_n c_n$ *risulta convergente, e si ha*

$$\sum_n c_n = \Big(\sum_n a_n\Big)\Big(\sum_n b_n\Big) .$$

DIMOSTRAZIONE : indichiamo rispettivamente con A_n , B_n , C_n le somme parziali di $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$, $\sum_n c_n$, e con A , B , α le somme di $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$, $\sum_n |a_n|$. Si tratta di dimostrare che $C_n \to AB$. Si ha

$$\begin{aligned}
C_n &= \sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\Big) = \sum_{j=0}^{n}\Big(\sum_{k=j}^{n} a_j b_{k-j}\Big) = \sum_{j=0}^{n}\Big(\sum_{h=0}^{n-j} a_j b_h\Big) \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j B_{n-j} = A_n B + \sum_{j=0}^{n} a_j (B_{n-j} - B) = A_n B + \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(B_i - B) ,
\end{aligned}$$

dunque basterà dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(B_i - B) = 0 . \tag{A9.9}$$

Siccome $B_n \to B$, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n}$ tale che

$$|B_n - B| < \varepsilon \qquad \forall n > \bar{n} ;$$

poniamo allora $M = \max\{|B_0 - B|, \ldots, |B_{\bar{n}} - B|\}$. Abbiamo per $n > \bar{n}$

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(B_i - B)\Big| &\le \Big|\sum_{i=0}^{\bar{n}} a_{n-i}(B_i - B)\Big| + \varepsilon \sum_{i=\bar{n}+1}^{n} |a_{n-i}| \\
&\le M \sum_{i=0}^{\bar{n}} |a_{n-i}| + \varepsilon\alpha .
\end{aligned}$$

Dato che $\sum_n a_n$ converge, è $a_i \to 0$ per $i \to +\infty$, e passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene

$$\limsup_{n\to+\infty} \Big|\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(B_i - B)\Big| \le \varepsilon\alpha$$

e quindi, per l'arbitrarietà di ε , si ottiene la (A9.9). ■

Osservazione : si potrebbe dimostrare (ad esempio, ☞ W. Rudin, "Principles of Mathematical Analysis", Theorem 3.51) che, senza assumere alcuna ipotesi di convergenza assoluta, se $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ sono due serie convergenti e se la serie prodotto $\sum_n c_n$ converge, allora deve essere necessariamente

$$\sum_n c_n = \Big(\sum_n a_n\Big)\Big(\sum_n b_n\Big) .$$

Esempio : dalle uguaglianze $e^x = \sum_n x^n/n!$ ed $e^y = \sum_n y^n/n!$ si ha (☞ teorema A9.4) che la serie prodotto $\sum_n c_n$ converge a $e^x \cdot e^y$. Scrivendo esplicitamente il termine c_n si ricava, utilizzando il binomio di Newton (☞ proposizione 3.10)

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!} ,$$

da cui si ottiene

$$e^x \cdot e^y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y} .$$

Appendice 9.7 - Riordinamento di serie

È interessante porsi la questione di vedere se e sotto quali ipotesi valga per le serie una proprietà simile a quella commutativa, propria delle somme finite, che si enuncia spesso dicendo: *"cambiando l'ordine degli addendi la somma non cambia"*. Nel caso di somme infinite va innanzitutto specificato cosa si debba intendere per ordine degli addendi (che sono infiniti), e si pone quindi la seguente definizione di riordinamento di una serie.

Definizione : *si dice che una serie* $\sum_n b_n$ *è un riordinamento di una serie* $\sum_n a_n$ *se esiste un'applicazione biunivoca* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tale che*

$$b_n = a_{\sigma(n)} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} .$$

Vale la pena di osservare subito che si possono costruire facili esempi di serie il cui comportamento dipende dal riordinamento considerato. Ad esempio, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = +1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

è indeterminata, mentre riordinando i suoi termini nella forma

$$a_0 + a_2 + a_1 + a_4 + a_6 + a_3 + \cdots = +1 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + \cdots$$

otteniamo una serie divergente a $+\infty$, e riordinando ancora i termini nella forma

$$a_1 + a_3 + a_0 + a_5 + a_7 + a_2 + \cdots = -1 - 1 + 1 - 1 - 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + \cdots$$

otteniamo una serie divergente a $-\infty$.

Esempi simili possono essere ottenuti anche con serie convergenti; infatti la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \cdots$$

è convergente ed ha per somma $-\log 2$, ☞ formula (9.12). Possiamo riordinare i suoi termini in modo da ottenere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{6} + \cdots ;$$

per calcolare la somma della serie $\sum_n b_n$ osserviamo che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 0 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{8} + \cdots$$

ha la stessa somma di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} = -\frac{1}{2} \log 2 .$$

Sommando ora termine a termine otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + c_n \right) = -1 + 0 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + 0 - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} + \cdots$$

che ha la stessa somma della serie $\sum_n b_n$. Dunque $\sum_n b_n$ è un riordinamento di $\sum_n (-1)^n/n$ ma ha per somma

$$-\log 2 - \frac{1}{2} \log 2 = -\frac{3}{2} \log 2 .$$

Vedremo ora che il fenomeno della dipendenza del comportamento di una serie dal riordinamento, messo in evidenza dagli esempi precedenti, non si verifica per le serie assolutamente convergenti. In altri termini, per queste ultime vale la proprietà commutativa con infiniti addendi; più precisamente, vale il seguente risultato.

Teorema A9.5 : *sia* $\sum_n a_n$ *una serie assolutamente convergente, e sia* $\sum_n b_n$ *un suo riordinamento. Allora anche* $\sum_n b_n$ *è assolutamente convergente, e si ha*

$$\sum_n a_n = \sum_n b_n .$$

DIMOSTRAZIONE : se $\sum_n |a_n|$ è convergente, per il criterio del confronto (☛ teorema 9.4 e appendice 9.2) lo sono anche la serie delle parti positive $\sum_n a_n^+$ e quella delle parti negative $\sum_n a_n^-$. Dato che un riordinamento di $\sum_n a_n$ riordina anche $\sum_n a_n^+$ e $\sum_n a_n^-$, possiamo limitarci a prendere in considerazione solo il caso in cui $a_n, b_n \geq 0$ (controllate bene questa affermazione). Dette rispettivamente $\{A_n\}_n$ e $\{B_n\}_n$ le successioni delle somme parziali relative alle serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ ed indicate con A e B le rispettive somme (che esistono in quanto si è supposto che i termini a_n e b_n sono non negativi), si ha

$$B_n = \sum_{j=0}^{n} b_j = \sum_{j=0}^{n} a_{\sigma(j)} \leq A$$

dove abbiamo indicato con $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'applicazione biunivoca che fornisce il riordinamento: dunque, per $n \to +\infty$, si ottiene

$$B \leq A .$$

La disuguaglianza opposta si ottiene applicando quest'ultimo risultato con $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ scambiate, dato che, se $\sum_n b_n$ è un riordinamento di $\sum_n a_n$, allora anche $\sum_n a_n$ è un riordinamento (ottenuto tramite l'applicazione σ^{-1}) di $\sum_n b_n$. ■

Per le serie convergenti ma non assolutamente convergenti, come ad esempio la serie $\sum_n (-1)^n/n$, abbiamo visto sopra che un riordinamento può cambiare il valore della somma. In realtà vale una proprietà ben più forte, come mostra il teorema seguente.

Teorema di Riemann A9.6 : *sia $\sum_n a_n$ una serie convergente ma non assolutamente convergente. Allora per ogni $S \in [-\infty, +\infty]$ esiste un riordinamento $\sum_n b_n$ tale che*

$$\sum_n b_n = S .$$

DIMOSTRAZIONE : per semplicità ci limitiamo a considerare soltanto il caso $S \in \mathbb{R}$ lasciando per esercizio il compito di riadattare la dimostrazione ai casi $S = +\infty$ ed $S = -\infty$. Inoltre, con un procedimento analogo si potrebbe anche costruire un riordinamento $\sum_n b_n$ che risulti indeterminato.
Siccome $\sum_n a_n$ è una serie convergente ma non assolutamente convergente, posto $H_n = \sum_{i=0}^n a_i^+$ e $K_n = \sum_{i=0}^n a_i^-$ avremo

$$\sum_{i=0}^{n} |a_i| = H_n + K_n \to +\infty, \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i = H_n - K_n \to \ell \in \mathbb{R} ;$$

essendo $\{H_n\}_n$ e $\{K_n\}_n$ successioni non negative che hanno limite, deve quindi necessariamente essere $H_n \to +\infty$ e $K_n \to +\infty$. Indicando con x_n i termini non negativi della serie, e con y_n i termini negativi, avremo dunque

$$\sum_n x_n = +\infty, \qquad \sum_n y_n = -\infty . \tag{A9.10}$$

Inoltre, siccome $\sum_n a_n$ è una serie convergente si avrà anche (☛ teorema 9.1)

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 . \tag{A9.11}$$

Costruiamo ora per induzione la successione $\{b_n\}_n$: poniamo $b_0 = a_0$; poi, supponiamo di aver definito $b_0, \ldots, b_{n-1}$ e che tali termini coincidano con h termini $x_0, \ldots, x_{h-1}$ e con k termini $y_0, \ldots, y_{k-1}$, con $h + k = n$, presi in un qualche ordine. Se la somma parziale

$$B_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j$$

risulta maggiore del numero S si porrà $b_n = y_k$, altrimenti si porrà $b_n = x_h$: in tal modo b_n è definito per ogni $n \in \mathbb{N}$, e la serie $\sum_n b_n$ risulta essere un riordinamento della serie $\sum_n a_n$. Infatti, a causa della (A9.10) e per come è stata costruita la successione $\{b_n\}_n$, è facile verificare che tutti i termini x_n e tutti i termini y_n fanno parte della successione $\{b_n\}_n$.
Infine, per dimostrare che $\sum_n b_n = S$, è sufficiente individuare, per ogni somma parziale B_n, l'ultimo termine positivo x_h e l'ultimo termine negativo y_k presi in considerazione, e verificare che si ha per costruzione

$$S + y_k \leq B_n \leq S + x_h .$$

Il fatto che $B_n \to S$ segue allora dalla (A9.11). ■

Appendice 9.8 - La costante di Eulero-Mascheroni

Abbiamo già visto che la serie armonica $\sum_n 1/n$ diverge, cioè la successione $\{S_n\}_n$ delle sue somme parziali S_n tende a $+\infty$; vedremo ora che la successione $\{S_n\}_n$ tende a $+\infty$ con lo stesso ordine di $\log n$. Più precisamente dimostreremo (☛ esercizio 5.86) che esiste una costante positiva γ (la costante di Eulero-Mascheroni) tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \log n \Big) = \gamma .$$

Dalla disuguaglianza (5.40)

$$\frac{1}{1+n} \leq \log\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \leq \frac{1}{n} \qquad \forall n \geq 1$$

abbiamo che la successione

$$a_n = S_n - \log n$$

è decrescente; infatti

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (S_{n+1} - \log(n+1)) - (S_n - \log n) \\ &= (S_{n+1} - S_n) - \log\frac{n+1}{n} \\ &= \frac{1}{n+1} - \log\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \le 0 . \end{aligned}$$

Analogamente, la successione

$$b_n = S_{n-1} - \log n$$

è crescente; infatti

$$b_{n+1} - b_n = S_n - \log(n+1) - S_{n-1} + \log n = \frac{1}{n} - \log\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \ge 0 .$$

Osserviamo poi che $a_1 = 1$ e $b_2 = 1 - \log 2 = \log(e/2) > 0$, per cui $a_n \le 1$ e $b_n \ge \log(e/2)$ per ogni n; inoltre

$$a_n = b_n + \frac{1}{n} ,$$

per cui esiste $\gamma > 0$ tale che

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n .$$

Dalla relazione

$$b_n \le \gamma \le a_n \qquad \forall n \ge 2$$

segue che il punto medio $(a_n + b_n)/2$ dell'intervallo $[b_n, a_n]$ è un valore approssimato di γ con un errore inferiore ad $(a_n - b_n)/2 = 1/(2n)$. In particolare, ponendo $n = 5$ si ottiene che un valore approssimato di γ, con un errore inferiore a 10^{-1}, è $131/60 - \log 5 \simeq 0.57$.

Appendice 9.9 - La funzione di Weierstrass

Definiremo la funzione di Weierstrass, a cui si è accennato nell'appendice 7.3; premettiamo una osservazione, la cui facile dimostrazione è lasciata per esercizio (☛ figura A9.1).

Osservazione : per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\max\{|\operatorname{sen}(x + \tfrac{\pi}{2}) - \operatorname{sen} x|,\ |\operatorname{sen}(x - \tfrac{\pi}{2}) - \operatorname{sen} x|\} \ge 1 , \tag{A9.12}$$

cioè o il seno di $x + \pi/2$ o quello di $x - \pi/2$ dista almeno 1 da $\operatorname{sen} x$.

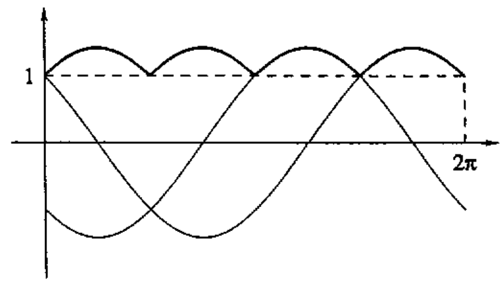


Fig. A9.1 : le funzioni $y = \operatorname{sen}(x \pm \frac{\pi}{2}) - \operatorname{sen} x$ (sottili) e il massimo dei valori assoluti

Poniamo per ogni $k \in \mathbb{N}^+$

$$f_k(x) = \operatorname{sen}(4^k \pi x) ,$$

e osserviamo (basta scrivere la derivata e applicare il corollario 7.24) che la funzione f_k è $4^k\pi$-lipschitziana, dunque

$$\forall k,\ \forall x, y, \qquad |f_k(x) - f_k(y)| \le 4^k \pi |x - y| ; \tag{A9.13}$$

d'altra parte, $|f_k(x)| \le 1$, quindi anche

$$\forall k,\ \forall x, y, \qquad |f_k(x) - f_k(y)| \le 2 . \tag{A9.14}$$

La *funzione di Weierstrass* è definita ponendo per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$W(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(x)}{(3/2)^k} . \tag{A9.15}$$

Osserviamo che la serie converge assolutamente per ogni x, dato che $|f_k(x)| \le 1$, quindi la (A9.15) definisce effettivamente una funzione su tutto $\mathbb{R}$.

Proposizione A9.7 : *la funzione di Weierstrass* (A9.15) *è uniformemente continua.*

DIMOSTRAZIONE : osserviamo che per ogni $n \ge 2$ ed ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} |W(x) - W(y)| &= \Big|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(x) - f_k(y)}{(3/2)^k}\Big| \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k(x) - f_k(y)|}{(3/2)^k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|f_k(x) - f_k(y)|}{(3/2)^k} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|f_k(x) - f_k(y)|}{(3/2)^k} \\ &\le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4^k \pi |x - y|}{(3/2)^k} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2}{(3/2)^k} , \end{aligned}$$

dove abbiamo usato (A9.13) e (A9.14); calcolando le somme otteniamo per ogni $n \geq 2$ ed ogni $x, y \in \mathbb{R}$

$$|W(x) - W(y)| \leq \pi\Big[\frac{3}{5}\Big(\frac{8}{3}\Big)^n - \frac{8}{5}\Big]|x - y| + 6\,\Big(\frac{2}{3}\Big)^n . \tag{A9.16}$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, e sia $\bar{n} \geq 2$ tale che

$$6\,\Big(\frac{2}{3}\Big)^{\bar{n}} < \frac{\varepsilon}{2}\,;$$

scegliamo allora $\delta > 0$ in modo che

$$\pi\Big[\frac{3}{5}\Big(\frac{8}{3}\Big)^{\bar{n}} - \frac{8}{5}\Big]\delta < \frac{\varepsilon}{2} \ :$$

se $|x - y| < \delta$, applicando (A9.16) con $n = \bar{n}$ otteniamo $|W(x) - W(y)| < \varepsilon$. ■

Ora proviamo la proprietà fondamentale della funzione di Weierstrass.

Proposizione A9.8 : *la funzione di Weierstrass W non è derivabile in alcun punto.*

DIMOSTRAZIONE : fissato un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, costruiamo una successione $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ponendo

$$x_n = x_0 \pm \frac{1}{2 \cdot 4^n}\,,$$

dove il segno è scelto in modo che

$$|f_n(x_n) - f_n(x_0)| \geq 1\,;$$

questo è possibile grazie a (A9.12), dato che

$$f_n(x_0 \pm \tfrac{1}{2\cdot 4^n}) - f_n(x_0) = \mathrm{sen}(4^n \pi x_0 \pm \tfrac{\pi}{2}) - \mathrm{sen}(4^n \pi x_0)\,.$$

Osserviamo poi che se $k \geq n + 1$

$$f_k(x_0 \pm \tfrac{1}{2\cdot 4^n}) - f_k(x_0) = \mathrm{sen}(4^k \pi x_0 \pm \tfrac{4^k}{2\cdot 4^n}\pi) - \mathrm{sen}(4^k \pi x_0) = 0\,,$$

perché $4^k/(2 \cdot 4^n)$ è un intero pari. Unendo le due formule precedenti, e ricordando (A9.13), otteniamo

$$\left|\frac{f_k(x_n) - f_k(x_0)}{x_n - x_0}\right| \quad \begin{cases} \leq 4^k \pi & \text{se } k \leq n - 1 \\ \geq 2 \cdot 4^n & \text{se } k = n \\ = 0 & \text{se } k \geq n + 1. \end{cases} \tag{A9.17}$$

Dall'ultima riga di (A9.17) abbiamo

$$W(x_n) - W(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(x_n) - f_k(x_0)}{(3/2)^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(x_n) - f_k(x_0)}{(3/2)^k}\,,$$

e ricordando la disuguaglianza triangolare (4.9) otteniamo dalle prime due righe di (A9.17)

$$\begin{aligned} \left|\frac{W(x_n) - W(x_0)}{x_n - x_0}\right| &= \left|\frac{1}{(3/2)^n}\,\frac{f_n(x_n) - f_n(x_0)}{x_n - x_0} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(3/2)^k}\,\frac{f_k(x_n) - f_k(x_0)}{x_n - x_0}\right| \\ &\geq \left|\frac{1}{(3/2)^n}\,\frac{f_n(x_n) - f_n(x_0)}{x_n - x_0}\right| - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(3/2)^k}\left|\frac{f_k(x_n) - f_k(x_0)}{x_n - x_0}\right| \\ &\geq \frac{2 \cdot 4^n}{(3/2)^n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4^k \pi}{(3/2)^k}\,, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato anche la disuguaglianza triangolare (4.10). Calcolando la facile somma, ☞ formula (3.7), otteniamo infine

$$\left|\frac{W(x_n) - W(x_0)}{x_n - x_0}\right| \geq 2\Big(\frac{8}{3}\Big)^n - \pi\frac{(8/3)^n - (8/3)}{5/3} = \Big(2 - \frac{3\pi}{5}\Big)\Big(\frac{8}{3}\Big)^n + \frac{8\pi}{5}\,.$$

Dato che $2 > 3\pi/5$, ne consegue

$$\lim_{n \to +\infty}\left|\frac{W(x_n) - W(x_0)}{x_n - x_0}\right| = +\infty\,,$$

quindi W non può essere derivabile in x_0. ■

Mostriamo qui di seguito due ingrandimenti della funzione di Weierstrass, entrambi in scala, in un intorno di ampiezza $2a$ del punto 1.36; per il secondo grafico, il centro degli assi è traslato in $(1.36, 0.55)$.

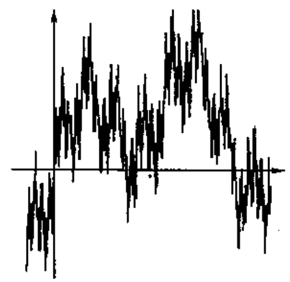


Fig. A9.2 : $a = 1.7$

Fig. A9.3 : $a = 0.02$

Appendice 9.10 - La formula di Stirling

Determineremo ora un'approssimazione di $n!$ mediante funzioni elementari; ricordiamo che una prima stima di $n!$ è già stata trovata con la formula (5.32). Cominciamo con l'osservare che la funzione $-\log(1-x)$ è convessa, e quindi per ogni $\alpha \in]0,1[$ la sua retta secante sull'intervallo $[0,\alpha]$, che ha equazione $y = -\frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}x$, maggiora la funzione stessa, cioè

$$-\log(1-x) \le -\frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}x \qquad \forall x \in [0,\alpha] ;$$

in particolare useremo il fatto che per $\alpha = 1/4$ questa formula diviene

$$-\log(1-x) \le 4x\log(4/3) \qquad \forall x \in [0,1/4] . \tag{A9.18}$$

Per ogni intero $k \ge 1$ si ha, con facili sostituzioni,

$$\begin{aligned}\int_{k-1/2}^{k+1/2} \log x\, dx &= \int_{k-1/2}^{k} \log x\, dx + \int_{k}^{k+1/2} \log x\, dx = \int_0^{1/2} [\log(k-t) + \log(k+t)]\, dt \\ &= \int_0^{1/2} \log\Big[k^2\Big(1-\frac{t^2}{k^2}\Big)\Big]\, dt = \log k + \int_0^{1/2} \log\Big(1-\frac{t^2}{k^2}\Big)\, dt .\end{aligned}$$

Da questa disuguaglianza, posto

$$I_k = -\int_0^{1/2} \log\Big(1-\frac{t^2}{k^2}\Big)\, dt ,$$

si ha

$$\log k = \int_{k-1/2}^{k+1/2} \log x\, dx + I_k ,$$

mentre dalla (A9.18), osservando che $t^2/k^2 \le 1/4$ se $0 \le t \le 1/2$ e $k \ge 1$, segue che

$$0 \le I_k \le 4\log(4/3)\int_0^{1/2} \frac{t^2}{k^2}\, dt = \frac{\log(4/3)}{6}\,\frac{1}{k^2} . \tag{A9.19}$$

Allora

$$\begin{aligned}\log n! &= \sum_{k=1}^{n} \log k = \sum_{k=1}^{n}\Big[\int_{k-1/2}^{k+1/2} \log x\, dx + I_k\Big] = \int_{1/2}^{n+1/2} \log x\, dx + \sum_{k=1}^{n} I_k \\ &= \Big[\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\log\Big(n+\frac{1}{2}\Big) - n + \frac{\log 2}{2}\Big] + \Big[\sum_{k=1}^{\infty} I_k - \sum_{k\ge n+1} I_k\Big] .\end{aligned} \tag{A9.20}$$

Per la (A9.19) la serie $\sum_{k=1}^{\infty} I_k$ è convergente (☞ criterio del confronto, teorema 9.4); indicheremo con I la sua somma. Sempre dalla (A9.19) si ricava

$$\sum_{k\ge n+1} I_k \le \frac{\log(4/3)}{6} \sum_{k\ge n+1} \frac{1}{k^2}$$

e, tenuto conto che (☞ proposizione 9.10)

$$\sum_{k\ge n+1} \frac{1}{k^2} \le \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{1}{n} ,$$

si ottiene

$$\sum_{k\ge n+1} I_k = O(1/n) ; \tag{A9.21}$$

inoltre si ha

$$\begin{aligned}\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\log\Big(n+\frac{1}{2}\Big) &= \Big(n+\frac{1}{2}\Big)\log\Big[n\Big(1+\frac{1}{2n}\Big)\Big] \\ &= \Big(n+\frac{1}{2}\Big)\log n + \Big(n+\frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{1}{2n} + O(1/n^2)\Big) \\ &= \Big(n+\frac{1}{2}\Big)\log n + \frac{1}{2} + O(1/n) .\end{aligned}$$

In definitiva, usando (A9.21) la (A9.20) si scrive nella forma

$$\begin{aligned}\log n! &= \Big(n+\frac{1}{2}\Big)\log\Big(n+\frac{1}{2}\Big) - n + \frac{\log 2}{2} + I + O(1/n) \\ &= \Big(n+\frac{1}{2}\Big)\log n - n + C + O(1/n) ,\end{aligned} \tag{A9.22}$$

dove abbiamo posto

$$C = \frac{1}{2} + \frac{\log 2}{2} + I .$$

Prendendo nella (A9.22) l'esponenziale di ambo i membri si ottiene

$$n! = n^{n+1/2}e^{-n}e^{C}e^{O(1/n)} = \frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}\, e^{C}\big(1+O(1/n)\big) . \tag{A9.23}$$

Rimane dunque da determinare la costante C; osservando che

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{(2n)!!} , \qquad (2n)!! = 2^n n! ,$$

si ha

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$$

e quindi, utilizzando la formula di Wallis (A8.25),

$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \Big[\frac{2n+1}{2}\big(\pi + O(1/n)\big)\Big]^{1/2} = \sqrt{n\pi}\big(1+O(1/n)\big) .$$

Usando la (A9.23) si ottiene quindi

$$\begin{aligned}\sqrt{n\pi}(1+O(1/n)) &= \frac{2^{2n}\left[n^n e^{-n}\sqrt{n}\, e^C(1+O(1/n))\right]^2}{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}\, e^C(1+O(1/n))} \\ &= \sqrt{\frac{n}{2}}\, e^C(1+O(1/n))\end{aligned}$$

da cui si ricava

$$e^C = \sqrt{2\pi}\,.$$

In definitiva, abbiamo ottenuto dalla (A9.23) la *formula di Stirling*

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,\left(1+O(1/n)\right)\,.$$

Con un diverso approccio, sarebbe stato possibile ricavare una formula analoga per la funzione Γ di Eulero (☞ appendice 8.15), anziché per il fattoriale, ottenendo

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}\left(1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

per $x \to +\infty$.

Capitolo 10

Alcuni argomenti complementari

Ci è sembrato doveroso inserire tra gli argomenti che dovrebbero far parte di un corso di Analisi matematica I qualche cenno sui metodi più elementari per la risoluzione approssimata di equazioni e il calcolo approssimato di integrali definiti, accanto ad una breve introduzione alle equazioni differenziali e alle equazioni alle differenze. Tali argomenti verranno sviluppati ampiamente in altri corsi successivi, ma riteniamo che lo studente dovrebbe avere fin dal primo anno una conoscenza, anche se non completa nei dettagli, di questi rami importanti della Matematica.

10.1 - Il metodo di Newton

Consideriamo un'equazione in una variabile, cioè un'espressione del tipo $f(x) = 0$ con f funzione assegnata; supponiamo di aver ridotto il dominio di f ad un intervallo $[a,b]$ contenente una e una sola soluzione ξ dell'equazione, e supponiamo di avere ad esempio $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Il metodo di Newton consente di determinare una successione $\{x_n\}_n$ che converge a ξ molto rapidamente, e di stimare l'errore $|x_n - \xi|$ con buona accuratezza.

Teorema 10.1 : *sia f una funzione derivabile due volte in $[a,b]$ e tale che*

1) $f'(x) \geq c > 0$ *per ogni* $x \in [a,b]$
2) $0 \leq f''(x) \leq M$ *per ogni* $x \in [a,b]$
3) $f(a) < 0\,,\ f(b) > 0\,.$

Per ogni $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) > 0$, la successione definita per induzione da

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \forall n \geq 0 \tag{10.1}$$

decresce a un punto ξ, che è l'unica soluzione in $[a,b]$ dell'equazione $f(x)=0$. Inoltre

$$x_n - \xi \leq \frac{2c}{M}\Big(\frac{M}{2c}(x_0-\xi)\Big)^{2^n} \tag{10.2}$$

DIMOSTRAZIONE : osserviamo che ~~per l'ipotesi~~ 1) la funzione f risulta strettamente crescente, quindi iniettiva; per il teorema di esistenza degli zeri si annulla in almeno un punto, e per l'iniettività questo punto è unico: indichiamolo con ξ. Abbiamo allora

$$x < \xi \quad \Rightarrow \quad f(x) < 0\,, \qquad x > \xi \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0\,;$$

notiamo poi che ~~per 2)~~ la funzione f risulta convessa; dunque, se $\bar{x} \in [a,b]$, la retta tangente in $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ al grafico di f, che ha equazione

$$y = r_{\bar{x}}(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x})\,,$$

sta al di sotto del grafico di f (☞ proposizione 7.39) in ogni punto di $[a,b]$, cioè (☞ figura 10.1)

$$r_{\bar{x}}(x) \leq f(x) \qquad \forall x\,.$$

In particolare, $r_{\bar{x}}(\xi) \leq f(\xi) = 0$; se $\bar{x}$ è un punto in cui f è positiva (cioè se $\bar{x} > \xi$), la funzione $r_{\bar{x}}$, che ha coefficiente angolare maggiore di zero grazie all'ipotesi 2) ed è quindi iniettiva, si annulla allora in uno e un solo punto, che appartiene all'intervallo $[\xi, \bar{x}[$. Osserviamo che il punto in cui $r_{\bar{x}}$ si annulla è dato da

$$f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \ :$$

posto allora

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\,, \tag{10.3}$$

abbiamo provato che $x > \xi \Rightarrow x > \varphi(x) \geq \xi$. Si verifica immediatamente dalla (10.3) che se $x = \xi$ allora $\varphi(x) = \xi$, pertanto possiamo scrivere

$$x \geq \xi \quad \Rightarrow \quad x \geq \varphi(x) \geq \xi\,, \qquad x \neq \xi \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) \neq x\,. \tag{10.4}$$

Dato che la successione da esaminare è definita come $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, si deduce immediatamente da (10.4) che $\{x_n\}_n$ è debolmente decrescente a un limite ℓ maggiore o uguale a ξ; dato che φ è continua, deve essere $\ell = \varphi(\ell)$, e sempre per (10.4) questo implica che $\ell = \xi$.

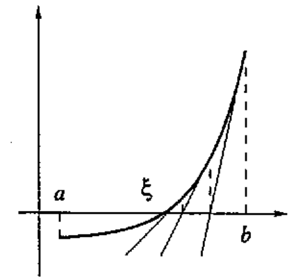


Fig. 10.1 : il metodo di Newton

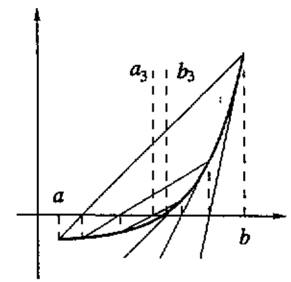


Fig. 10.2 : il metodo delle secanti e tangenti

Cerchiamo ora una stima dell'errore $x_n - \xi$: dalla formula di Taylor con resto di Lagrange si ha l'uguaglianza

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x-x_n) + \frac{f''(z)}{2}(x-x_n)^2$$

per un opportuno z tra x e x_n; ponendo $x = \xi$ si ottiene

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{f''(z_n)}{2}(\xi - x_n)^2 \tag{10.5}$$

con $z_n \in]\xi, x_n[$. Dalla (10.1) si ottiene

$$f(x_n) = f'(x_n)(x_n - x_{n+1})\,,$$

che sostituita nella (10.5) fornisce

$$0 = f'(x_n)(x_n - x_{n+1}) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{f''(z_n)}{2}(\xi - x_n)^2 \ :$$

da questa si ricava

$$x_{n+1} - \xi = \frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}(\xi - x_n)^2\,.$$

Detto allora ε_n l'errore $x_n - \xi$, si ha

$$0 \leq \varepsilon_{n+1} = \frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}\varepsilon_n^2 \leq \frac{M}{2c}\varepsilon_n^2\,.$$

Questa formula dà, per induzione, la stima dell'errore

$$\varepsilon_n \leq \frac{2c}{M}\Big(\frac{M}{2c}(x_0-\xi)\Big)^{2^n} \ : \tag{10.6}$$

infatti, la (10.6) è ovvia per $n = 0$, e poi, assunta come ipotesi induttiva, fornisce

$$\varepsilon_{n+1} \leq \frac{M}{2c}\varepsilon_n^2 \leq \frac{M}{2c}\Big(\frac{2c}{M}\Big)^2\Big(\frac{M}{2c}(x_0-\xi)\Big)^{2^{n+1}} = \frac{2c}{M}\Big(\frac{M}{2c}(x_0-\xi)\Big)^{2^{n+1}}\,,$$

che è la stima cercata. ■

Osservazione : il metodo di Newton è efficace partendo da qualunque $x_0 \geq \xi$, tuttavia la stima dell'errore (10.6) è utile solo se si riesce a partire da un punto x_0 tale che

$$\frac{M}{2c}(x_0 - \xi) < 1 ;$$

infatti, solo così l'esponente 2^n fa tendere a zero la maggiorazione (10.6) dell'errore ε_n .

Esempio : consideriamo l'equazione $x = \cos x$; è evidente che non ci possono essere soluzioni al di fuori dell'intervallo $[-1, 1]$, e inoltre sull'intervallo $[-1, 0]$ si ha $x \leq 0$ e $\cos x > 0$, per cui basterà limitare la ricerca di soluzioni all'intervallo $[0, 1]$. La funzione $f(x) = x - \cos x$ è strettamente crescente su $[0, 1]$ e verifica $f(0) < 0$, $f(1) > 0$, per cui esiste una e una sola soluzione ξ dell'equazione in $[0, 1]$ e quindi su tutto $\mathbb{R}$. Essendo $f(\pi/6) = \pi/6 - \sqrt{3}/2 < 0$ e $f(\pi/4) = \pi/4 - \sqrt{2}/2 > 0$ si avrà $\xi \in]\pi/6, \pi/4[$; è facile vedere inoltre che la funzione f verifica le ipotesi del teorema 10.1 sull'intervallo $[\pi/6, \pi/4]$, con $M = \sqrt{3}/2$ e $c = 3/2$. Dunque, prendendo come punto iniziale $x_0 = \pi/4$ si trova una successione $\{x_n\}_n$ che approssima la soluzione ξ con un errore

$$\varepsilon_n \leq 2\sqrt{3}\Big(\frac{\sqrt{3}}{6}(x_0 - \xi)\Big)^{2^n} \leq 2\sqrt{3}\Big(\frac{\sqrt{3}\pi}{72}\Big)^{2^n} .$$

Già con $n = 1$ si trova che $x_1 \simeq 0.74$ è un valore approssimato di ξ con un errore certamente inferiore a $\varepsilon_1 \simeq 2 \cdot 10^{-2}$, mentre con $n = 2$ si trova $x_2 \simeq 0.73909$ con un errore certamente inferiore a $\varepsilon_2 \simeq 1.1 \cdot 10^{-5}$.

Osservazione : abbiamo visto come sia importante ridurre l'ampiezza dell'intervallo di incertezza; un aiuto in questa direzione è dato dal cosiddetto "metodo delle secanti", che consiste nel definire, nelle stesse ipotesi del teorema 10.1, una successione per ricorrenza partendo da un qualsiasi punto $x_0 < \xi$, ad esempio $x_0 = a$, e ponendo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n) .$$

Il punto x_{n+1} è l'ascissa del punto in cui la retta secante $y = r_{x_n,b}(x)$ interseca l'asse delle ascisse; per la convessità di f , ☞ formula (7.19), si ha $f(x_{n+1}) \leq r_{x_n,b}(x_{n+1}) = 0$, e potete dimostrare per esercizio che la successione $\{x_n\}_n$ è debolmente crescente a ξ . Tuttavia, la stima dell'errore non è molto buona, per cui il metodo di Newton è decisamente superiore; per avere sia una stima di ξ dall'alto che una dal basso, si può usare una mescolanza dei due metodi, detta "metodo delle secanti e tangenti" (☞ figura 10.2): posto

$$\psi_t(x) = x - \frac{t - x}{f(t) - f(x)} f(x) , \tag{10.7}$$

definiamo

$$a_0 = a , \qquad b_0 = b , \qquad a_{n+1} = \psi_{b_n}(a_n) , \qquad b_{n+1} = \varphi(b_n) ,$$

dove φ è data da (10.3). Geometricamente, il punto b_{n+1} si ricava intersecando l'asse x con la tangente in b_n , e il punto a_{n+1} si ricava intersecando l'asse x con la secante tra a_n e b_n . È facile vedere che anche la successione $\{a_n\}_n$ tende crescendo a ξ .

Esempio : calcolare la radice n-esima di un numero positivo α significa risolvere l'equazione $x^n - \alpha = 0$; posto $f(x) = x^n - \alpha$, si verifica rapidamente che f è crescente e strettamente convessa in $]0, +\infty[$, quindi possiamo applicare il metodo di Newton appena individuiamo un intervallo nel quale sono verificate le ipotesi 1), 2) e 3): in tal caso, ☞ formula (10.3), la successione $\{x_n\}_n$ è generata dalla funzione

$$\varphi(x) = x - \frac{x^n - \alpha}{nx^{n-1}} = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)x + \frac{\alpha}{nx^{n-1}} .$$

Più in generale, questo metodo permette di calcolare un'approssimazione del numero $\alpha^{1/p}$ per ogni $\alpha > 0$ e $p > 1$.

Calcoliamo ad esempio la radice quadrata di 4 (che sappiamo valere 2): la formula precedente diviene

$$\varphi(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} ,$$

e le ipotesi del teorema 10.1 sono verificate nell'intervallo $[1, 3]$; tuttavia, l'ampiezza di questo intervallo è 2 , e non permette di far convergere la stima dell'errore (10.2) dato che $M/2c = 1$: applichiamo dunque il metodo delle secanti e tangenti. Abbiamo

$$a_1 = \psi_3(1) = 1 - \frac{3 - 1}{3^2 - 1^2}(1^2 - 4) = 1.75 , \qquad b_1 = \varphi(3) = 2 + \frac{1}{6} \simeq 2.1666\ldots ,$$

e da qui possiamo applicare direttamente il metodo di Newton e stimare l'errore: nel nuovo intervallo $[a, b] = [7/4, 13/6]$ abbiamo infatti $c = 7/2$ e $M = 2$, quindi otteniamo la stima

$$x_n - \xi \leq \frac{7}{2}\Big[\frac{2}{7}\Big(\frac{13}{6} - \xi\Big)\Big]^{2^n} \leq \frac{7}{2}\Big[\frac{2}{7}\Big(\frac{13}{6} - \frac{7}{4}\Big)\Big]^{2^n} = \frac{7}{2}\Big(\frac{5}{42}\Big)^{2^n} .$$

In particolare otteniamo (✎ es. 10.1)

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 + \frac{1}{6} \\ x_1 &= 2 + \frac{1}{156} \\ x_2 &= 2 + \frac{1}{97656} \\ x_3 &= 2 + \frac{1}{38146972656} \\ x_4 &\simeq 2 + 1.7 \cdot 10^{-22} . \end{aligned}$$

10.2 - Cenni sull'approssimazione numerica degli integrali

Non sempre è possibile "risolvere" un integrale, cioè esprimere il suo valore mediante opportune funzioni elementari (polinomi, seno, coseno, esponenziale, e loro inverse, nonché somme, prodotti e composizioni tra esse); in tali situazioni ci si dovrà accontentare di un valore approssimato e della relativa stima dell'errore.

Cominciamo con il metodo più semplice, detto "metodo dei rettangoli", in cui si approssima l'integrale di una funzione f tra a e b con una somma del tipo

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(x_{k-1}) , \tag{10.8}$$

dove $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ è un'opportuna suddivisione di $[a,b]$. Consideriamo il caso in cui la suddivisione di $[a,b]$ è in intervalli di uguale ampiezza, cioè

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n} : \tag{10.9}$$

la somma (10.8) diviene allora

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) . \tag{10.10}$$

Già sappiamo (☞ appendice 8.3) che se f è una funzione continua in $[a,b]$, allora si ha $S_n \to S$, dove abbiamo posto

$$S = \int_a^b f(x)\,dx , \tag{10.11}$$

ma con la sola ipotesi di continuità non abbiamo alcuna stima dell'errore che si commette approssimando l'integrale S con la somma S_n . Vedremo nel prossimo teorema che una tale stima è possibile se si suppone che f abbia derivata limitata.

Teorema (metodo dei rettangoli) 10.2 : *sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile, e sia*

$$|f'(x)| \le C_1 \qquad \forall x \in [a,b] .$$

Posto allora x_k , S_n , S *come in* (10.9), (10.10), (10.11), *si ha*

$$|S - S_n| \le \frac{C_1}{2}\frac{(b-a)^2}{n} .$$

Dimostrazione : si vede facilmente che è

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_{k-1})\,dx ,$$

per cui

$$|S - S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x) - f(x_{k-1})]\,dx\right| \le \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x) - f(x_{k-1})|\,dx .$$

Dal teorema di Lagrange si ottiene

$$f(x) - f(x_{k-1}) = (x - x_{k-1})f'(\xi)$$

per un opportuno $\xi \in]x_{k-1}, x[$, e quindi

$$|f(x) - f(x_{k-1})| \le C_1|x - x_{k-1}| = C_1(x - x_{k-1}) \qquad \forall x \in [x_{k-1}, x_k] .$$

In definitiva,

$$|S - S_n| \le \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} C_1(x - x_{k-1})\,dx = \frac{C_1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = \frac{C_1}{2}\frac{(b-a)^2}{n} ,$$

come volevasi dimostrare. ∎

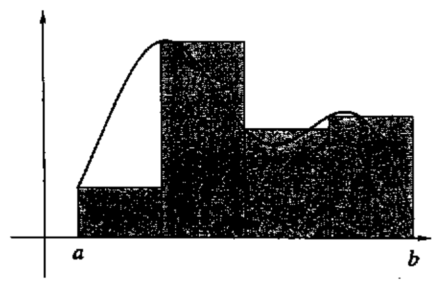


Fig. 10.3 : metodo dei rettangoli, $n = 4$

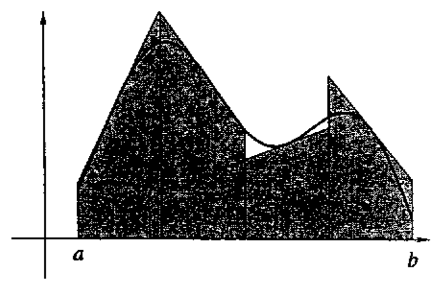


Fig. 10.4 : metodo delle tangenti, $n = 4$

Il metodo dei rettangoli è molto semplice, ma fornisce un'approssimazione piuttosto rozza del risultato; ad esempio, per ottenere un errore dell'ordine di 10^{-3} è necessario sommare in (10.8) un numero di addendi dell'ordine di 1000. Una stima migliore si ottiene con il metodo seguente, detto "metodo delle tangenti", in cui si prende ancora

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n} \qquad (k = 0, 1, \dots, n)$$

ed

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\delta x)_k f(z_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\,, \tag{10.12}$$

dove questa volta si è scelto come z_k il punto medio dell'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$

$$z_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2} = a + \Big(k - \frac{1}{2}\Big)\frac{b-a}{n}\,. \tag{10.13}$$

Osserviamo che $(\delta x)_k f(z_k)$ è l'area del rettangolo di base $(\delta x)_k$ e altezza $f(z_k)$, ma anche l'area di qualunque trapezio rettangolo di altezza $(\delta x)_k$ e semisomma delle basi uguale a $f(z_k)$. Dato che z_k è il punto medio dell'altezza di un tale trapezio, la condizione sulla semisomma corrisponde a dire che il lato obliquo passa per il punto $\big(z_k, f(z_k)\big)$. In particolare, possiamo scegliere come lato obliquo il segmento di tangente al grafico di f condotto per $\big(z_k, f(z_k)\big)$, da cui il nome del metodo.

Teorema (metodo delle tangenti) 10.3 : *sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile due volte, e sia*

$$|f''(x)| \le C_2 \qquad \forall x \in [a,b]\,.$$

Posto S_n, z_k *come in* (10.12) *e* (10.13), *si ha*

$$|S - S_n| \le \frac{C_2}{24}\frac{(b-a)^3}{n^2}\,.$$

DIMOSTRAZIONE : dalla formula di Taylor con resto di Lagrange, relativa al punto z_k, si ottiene

$$f(x) = f(z_k) + f'(z_k)(x - z_k) + f''(\xi)\frac{(x-z_k)^2}{2}$$

per un opportuno ξ tra z_k e x, dunque

$$-\frac{C_2}{2}(x-z_k)^2 \le f(x) - f(z_k) - f'(z_k)(x-z_k) \le \frac{C_2}{2}(x-z_k)^2\,.$$

Osserviamo inoltre che, con la sostituzione $t = x - z_k$, si ha

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - z_k)\,dx = \int_{-(b-a)/2n}^{(b-a)/2n} t\,dt = 0\,,$$

da cui si ottiene

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(z_k)(x-z_k)\,dx = 0$$

e quindi

$$-\frac{C_2}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x-z_k)^2\,dx \le \int_{x_{k-1}}^{x_k} \big[f(x) - f(z_k)\big]\,dx \le \frac{C_2}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x-z_k)^2\,dx\,.$$

D'altra parte, sempre con la sostituzione $t = x - z_k$ si ha

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x-z_k)^2\,dx = \int_{-(b-a)/2n}^{(b-a)/2n} t^2\,dt = \frac{(b-a)^3}{12n^3}\,,$$

e in definitiva

$$\begin{aligned} |S - S_n| &= \Big|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} \big[f(x) - f(z_k)\big]\,dx\Big| \\ &\le \sum_{k=1}^{n}\frac{C_2}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-z_k)^2\,dx = \frac{C_2}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(b-a)^3}{12n^3} = \frac{C_2}{24}\frac{(b-a)^3}{n^2}\,, \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. ■

Un metodo che fornisce un'accuratezza di ordine simile al metodo delle tangenti è il cosiddetto "metodo dei trapezi", che consiste nell'approssimare il grafico della funzione f nell'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ con la retta passante per i punti $\big(x_{k-1}, f(x_{k-1})\big)$ e $\big(x_k, f(x_k)\big)$. Tale retta ha equazione

$$y = r_k(x) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k) + f(x_k)$$

e si ha

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} r_k(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\big(f(x_{k-1}) + f(x_k)\big)\,. \tag{10.14}$$

Posto allora

$$S_n = \frac{b-a}{2n}\sum_{k=1}^{n}\big(f(x_{k-1}) + f(x_k)\big) \tag{10.15}$$

abbiamo il seguente risultato.

Teorema (metodo dei trapezi) 10.4 : *sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione avente derivata seconda continua, e sia*

$$|f''(x)| \le C_2 \qquad \forall x \in [a,b].$$

Posto S_n *come in* (10.15) *si ha*

$$|S - S_n| \le \frac{C_2}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}\,.$$

DIMOSTRAZIONE : da (10.14) si ha

$$|S - S_n| = \Big|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x) - r_k(x)]\,dx\Big| \le \sum_{k=1}^{n}\Big|\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x) - r_k(x)]\,dx\Big|\,, \tag{10.16}$$

per cui basterà stimare ciascuno degli integrali

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x) - r_k(x)]\,dx\,.$$

Posto $z_k = (x_{k-1} + x_k)/2$ e

$$g(t) = f(z_k + t) - r_k(z_k + t)\,, \qquad h(t) = g(t) + g(-t)\,, \qquad \sigma = \frac{b-a}{2n}\,,$$

si ha

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x) - r_k(x)]\,dx = \int_{-\sigma}^{\sigma} g(t)\,dt = \int_0^{\sigma} h(t)\,dt\,.$$

Inoltre è

$$h(\sigma) = f(x_k) - r_k(x_k) + f(x_{k-1}) - r_k(x_{k-1}) = 0\,,$$

e in conseguenza del fatto che h è una funzione pari, e quindi h' è dispari, si ha $h'(0) = 0$. Integrando per parti si ottiene allora

$$\begin{aligned}\int_0^{\sigma} h(t)\,dt &= \Big[h(t)t\Big]_0^{\sigma} - \int_0^{\sigma} h'(t)t\,dt = -\int_0^{\sigma} h'(t)t\,dt \\ &= -\Big[h'(t)\frac{t^2-\sigma^2}{2}\Big]_0^{\sigma} + \int_0^{\sigma} h''(t)\frac{t^2-\sigma^2}{2}\,dt = \int_0^{\sigma} h''(t)\frac{t^2-\sigma^2}{2}\,dt\,,\end{aligned}$$

per cui

$$\Big|\int_0^{\sigma} h(t)\,dt\Big| \le C_2\int_0^{\sigma}(\sigma^2 - t^2)\,dt = \frac{2C_2}{3}\sigma^3\,.$$

In definitiva, da (10.16) si ha

$$|S - S_n| \le \frac{2C_2}{3}\sum_{k=1}^{n}\sigma^3 = \frac{C_2}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}\,,$$

come volevasi dimostrare. ■

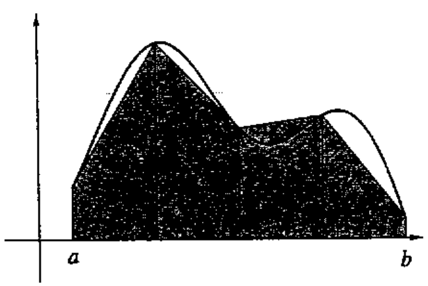


Fig. 10.5 : metodo dei trapezi, $n = 4$

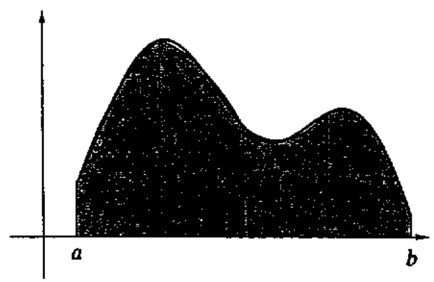


Fig. 10.6 : metodo di Cavalieri-Simpson, $n = 4$

Esporremo ora un metodo, detto "metodo di Cavalieri-Simpson", che fornisce una stima ancora migliore di quella ottenuta con i metodi illustrati nei teoremi 10.3 e 10.4. Tale metodo consiste nell'approssimare la funzione f nell'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ con un polinomio di secondo grado $p_k(x)$ in modo che si abbia, indicando sempre con z_k il punto di mezzo $z_k = (x_{k-1} + x_k)/2$,

$$p_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1})\,, \qquad p_k(x_k) = f(x_k)\,, \qquad p_k(z_k) = f(z_k)\,. \tag{10.17}$$

Scriviamo $p_k(x)$ in funzione di $x - z_k$: posto $p_k(x) = q_k(x - z_k) = A_k(x - z_k)^2 + B_k(x - z_k) + C_k$, scrivendo $\sigma = (b-a)/2n$ da (10.17) si ricava il sistema

$$\begin{cases} A_k\sigma^2 - B_k\sigma + C_k = f(x_{k-1}) \\ A_k\sigma^2 + B_k\sigma + C_k = f(x_k) \\ C_k = f(z_k) \end{cases}$$

che, risolto, fornisce

$$A_k = \frac{2n^2}{(b-a)^2}\big[f(x_{k-1}) - 2f(z_k) + f(x_k)\big]\,, \qquad B_k = \frac{n}{b-a}\big[f(x_k) - f(x_{k-1})\big]\,.$$

Con facili calcoli si ottiene

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} p_k(x)\,dx = \int_{-\sigma}^{\sigma} q_k(t)\,dt = \frac{b-a}{6n}\big[f(x_{k-1}) + 4f(z_k) + f(x_k)\big]\,. \tag{10.18}$$

Se definiamo

$$S_n = \frac{b-a}{6n}\sum_{k=1}^{n}\big[f(x_{k-1}) + 4f(z_k) + f(x_k)\big] \tag{10.19}$$

si ha il seguente risultato.

Teorema (metodo di Cavalieri-Simpson) 10.5 : *sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione avente derivata quarta continua, e sia*

$$|f^{(4)}(x)| \le C_4 \qquad \forall x \in [a,b]\,.$$

Posto S_n *come in* (10.19), *si ha*

$$|S - S_n| \le \frac{C_4}{2880}\frac{(b-a)^5}{n^4}\,.$$

DIMOSTRAZIONE : da (10.18) e (10.19) si ha

$$|S - S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - p_k(x)]\, dx\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - p_k(x)]\, dx\right| , \qquad (10.20)$$

per cui basterà stimare ciascuno degli integrali

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - p_k(x)]\, dx .$$

Posto

$$g(t) = f(z_k + t) - p_k(z_k + t) , \qquad h(t) = g(t) + g(-t) , \qquad \sigma = \frac{b-a}{2n} ,$$

si ha

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - p_k(x)]\, dx = \int_{-\sigma}^{\sigma} g(t)\, dt = \int_0^{\sigma} h(t)\, dt ;$$

inoltre è

$$\begin{cases} h(0) = h(\sigma) = 0 & \text{grazie alla (10.8)} \\ h'(0) = h'''(0) = 0 & \text{perché } h \text{ è pari.} \end{cases} \qquad (10.21)$$

Indichiamo con α , β , γ e δ quattro costanti che determineremo in seguito; integrando per parti quattro volte e tenendo conto di (10.21) si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sigma} h(t)\, dt &= \Big[h(t)(t+\alpha)\Big]_0^{\sigma} - \int_0^{\sigma} h'(t)(t+\alpha)\, dt \\
&= \Big[-h'(t)\Big(\frac{t^2}{2} + \alpha t + \beta\Big)\Big]_0^{\sigma} + \int_0^{\sigma} h''(t)\Big(\frac{t^2}{2} + \alpha t + \beta\Big)\, dt \\
&= -h'(\sigma)\Big(\frac{\sigma^2}{2} + \alpha\sigma + \beta\Big) + \Big[h''(t)\Big(\frac{t^3}{6} + \alpha\frac{t^2}{2} + \beta t + \gamma\Big)\Big]_0^{\sigma} \\
&\qquad - \int_0^{\sigma} h'''(t)\Big(\frac{t^3}{6} + \alpha\frac{t^2}{2} + \beta t + \gamma\Big)\, dt \\
&= -h'(\sigma)\Big(\frac{\sigma^2}{2} + \alpha\sigma + \beta\Big) + h''(\sigma)\Big(\frac{\sigma^3}{6} + \alpha\frac{\sigma^2}{2} + \beta\sigma + \gamma\Big) \\
&\qquad - \gamma h''(0) - \Big[h'''(t)\Big(\frac{t^4}{24} + \alpha\frac{t^3}{6} + \beta\frac{t^2}{2} + \gamma t + \delta\Big)\Big]_0^{\sigma} \\
&\qquad + \int_0^{\sigma} h^{(4)}(t)\Big(\frac{t^4}{24} + \alpha\frac{t^3}{6} + \beta\frac{t^2}{2} + \gamma t + \delta\Big)\, dt .
\end{aligned}$$

Scegliendo

$$\alpha = -\frac{2}{3}\sigma , \qquad \beta = \frac{1}{6}\sigma^2 , \qquad \gamma = 0 , \qquad \delta = -\frac{1}{72}\sigma^4 ,$$

i coefficienti di $h'(\sigma)$, $h''(\sigma)$, $h'''(\sigma)$ e $h''(0)$ si annullano, e si ricava

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sigma} h(t)\, dt &= \int_0^{\sigma} h^{(4)}(t)\Big(\frac{t^4}{24} - \sigma\frac{t^3}{9} + \sigma^2\frac{t^2}{12} - \frac{\sigma^4}{72}\Big)\, dt \\
&= -\frac{1}{72}\int_0^{\sigma} h^{(4)}(t)(\sigma - t)^3(3t + \sigma)\, dt
\end{aligned}$$

da cui, notando che è $(\sigma - t)^3(3t + \sigma) \geq 0$ in $[0, \sigma]$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{\sigma} h(t)\, dt\right| &\leq \frac{1}{72}\int_0^{\sigma} |h^{(4)}(t)|(\sigma - t)^3(3t + \sigma)\, dt \\
&\leq \frac{C_4}{36}\int_0^{\sigma} (\sigma - t)^3(3t + \sigma)\, dt = C_4\frac{\sigma^5}{90} .
\end{aligned}$$

In definitiva, da (10.20) si ottiene

$$|S - S_n| \leq \frac{C_4}{90}\sum_{k=1}^{n}\sigma^5 = \frac{C_4}{2880}\frac{(b-a)^5}{n^4} ,$$

come volevasi dimostrare. ■

Esempio : dall'uguaglianza

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx \qquad (10.22)$$

si può ottenere un'approssimazione di π . Con il metodo dei trapezi, ponendo

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} ,$$

si ha

$$|f''(x)| \leq 2 \qquad \forall x \in [0,1] ,$$

per cui, prendendo $n = 4$, un valore approssimato di $\pi/4$ è

$$\frac{1}{8}[f(0) + 2f(1/4) + 2f(1/2) + 2f(3/4) + f(1)] = \frac{5323}{6800}$$

con un errore inferiore a

$$\frac{2}{24}\frac{1}{4^2} = \frac{1}{192} .$$

Quindi

$$\pi \simeq \frac{5323}{1700} \simeq 3.1312$$

con un errore inferiore a

$$\frac{1}{48} < 2.09 \cdot 10^{-2} .$$

Utilizzando invece il metodo di Cavalieri-Simpson, si ha

$$|f^{(4)}(x)| \leq 24 \qquad \forall x \in [0,1] ,$$

per cui già con $n = 2$ si trova come valore approssimato di $\pi/4$

$$\frac{1}{12}[f(0) + 4f(1/4) + 2f(1/2) + 4f(3/4) + f(1)] = \frac{8011}{10200}$$

con un errore inferiore a

$$\frac{24}{2880}\frac{1}{2^4} = \frac{1}{1920} .$$

Quindi

$$\pi \simeq \frac{8011}{2550} \simeq 3.14157$$

con un errore inferiore a

$$\frac{1}{480} < 2.09 \cdot 10^{-3} .$$

Nell'esempio precedente, si nota subito che il "vero"errore è parecchio inferiore a $1/480$; ricordiamo ancora una volta che le stime dell'errore non dicono quanto è esattamente l'errore, ma garantiscono una limitazione superiore per l'errore medesimo.

Esempio : per calcolare un valore approssimato dell'integrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \,,$$

usiamo il metodo dei trapezi con $n = 3$. Posto

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \,,$$

utilizzando il teorema di Lagrange si ha, per opportuni $\alpha(x), \beta(x) \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2-x^2)\operatorname{sen} x - 2x\cos x}{x^3} \\ &= \frac{1}{x^3}\Big[(2-x^2)\Big(x - \frac{x^3}{6} + \alpha(x)\frac{x^5}{120}\Big) - 2x\Big(1 - \frac{x^2}{2} + \beta(x)\frac{x^4}{24}\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{120}\big[(\alpha(x)x^2 - 20)(2-x^2) - 10\beta(x)x^2\big] \,. \end{aligned}$$

Osserviamo che $0 \le \alpha(x)x^2 \le \pi^2/4 < 20$, quindi per ogni $x \in [0, \pi/2]$

$$|f''(x)| \le \frac{20|2-x^2| + 10x^2}{120} \le \sup\Big\{\frac{20|2-t| + 10t}{120} : 0 \le t \le \frac{\pi^2}{4}\Big\} = \frac{1}{3} \,.$$

Allora un valore approssimato dell'integrale in questione è

$$\frac{\pi}{12}\big[f(0) + 2f(\pi/6) + 2f(\pi/3) + f(\pi/2)\big] = \frac{1}{12}\big[\pi + 8 + 3\sqrt{3}\big] \simeq 1.3615 \,,$$

con un errore inferiore a (✎ es. 10.4)

$$\frac{\pi^3}{5184} < 5.99 \cdot 10^{-3} \,.$$

10.3 - Cenni sulle equazioni differenziali

Si chiama *equazione differenziale ordinaria di ordine* n in un intervallo I ogni espressione del tipo

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad \forall x \in I \,,$$

dove F è una funzione dipendente da $n+1$ variabili, e $y^{(k)}$ sono le derivate della funzione incognita $y(x)$. Si avrà invece un *sistema di equazioni differenziali* se y è un vettore di dimensione $d > 1$ ed $F : \mathbb{R}^{nd+1} \to \mathbb{R}^m$ con $m > 1$. L'equazione (o il sistema) si dirà in *forma normale* se la funzione F si può scrivere nella forma

$$F(x, z_0, z_1, z_2, \dots, z_n) = z_n - f(x, z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$$

per una funzione f opportuna, così che l'equazione differenziale diventa del tipo

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \,. \tag{10.23}$$

Esempio : la più semplice equazione differenziale è data dall'espressione $y' = f(x)$ dove f è una assegnata funzione continua definita in un intervallo I . Sappiamo che le soluzioni sono tutte e sole le primitive della funzione f , che per il teorema fondamentale del calcolo integrale (☞ teorema 8.14) sono date da

$$y(x) = \int_a^x f(t)\, dt + c$$

con $a \in I$ e $c \in \mathbb{R}$.

Esempio : un altro esempio molto semplice di equazione differenziale è dato dall'espressione $y' = ay$, con a costante reale. In un intervallo in cui è $y(x) > 0$, dividendo per y , l'equazione equivale a $(\log y)' = a$ da cui si ricava $\log y = ax + k$ con $k \in \mathbb{R}$ costante arbitraria, e quindi $y = ce^{ax}$ con $c > 0$ costante arbitraria. Analogamente, in un intervallo in cui è $y(x) < 0$ si trova $y = ce^{ax}$ con $c < 0$ costante arbitraria. In definitiva, siccome le soluzioni y cercate sono derivabili (e quindi continue), si trova che tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = ay$ sono le funzioni $y = ce^{ax}$ con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria.

Lo studio delle equazioni differenziali sarà svolto in dettaglio nel corso di Analisi matematica II, ma conviene dare almeno qualche cenno su alcuni tipi di equazioni del primo e del secondo ordine, facilmente risolubili con metodi elementari. Ci occuperemo del cosiddetto *problema di Cauchy*, cioè della ricerca di soluzioni di (10.23) con opportune condizioni iniziali, che nel caso delle equazioni del primo ordine sono date da

$$y(x_0) = y_0 \,,$$

dove x_0 si dice *punto iniziale* e y_0 *valore iniziale*, mentre nel caso delle equazioni del secondo ordine sono date da

$$y(x_0) = y_0 \,, \qquad y'(x_0) = y_1 \,.$$

Equazioni lineari del primo ordine. Sono equazioni del tipo

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{10.24}$$

dove a e b sono due funzioni continue assegnate. Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$; allora si ha

$$(y\mathrm{e}^{-A})' = y'\mathrm{e}^{-A} - y\mathrm{e}^{-A}a = (y' - ay)\mathrm{e}^{-A}$$

e dunque, se vogliamo che y risolva l'equazione (10.24), deve essere

$$(y\mathrm{e}^{-A})' = b\mathrm{e}^{-A} .$$

In altri termini, $y\mathrm{e}^{-A}$ è una primitiva di $b\mathrm{e}^{-A}$, quindi

$$\int b\mathrm{e}^{-A}\,dx = y(x)\mathrm{e}^{-A(x)} + c ,$$

da cui si ricava che le soluzioni sono tutte e sole le funzioni $y(x)$ della forma

$$y(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\Big(\int_{x_0}^{x} b\mathrm{e}^{-A}\,dt + c\Big) .$$

Nel caso di un problema di Cauchy la costante arbitraria c si determina imponendo la condizione iniziale: ad esempio, se $y(x_0) = y_0$ è la condizione iniziale, prendendo

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt , \qquad y(x)\mathrm{e}^{-A(x)} = \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}\,dt + c$$

e imponendo che $y(x_0) = y_0$ si ricava $c = y_0$, e quindi l'unica soluzione del problema di Cauchy è la funzione

$$y(x) = \exp\Big(\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt\Big)\Big[y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)\exp\Big(-\int_{x_0}^{t} a(s)\,ds\Big)\,dt\Big] .$$

Esempio : consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \operatorname{sen} x \\ y(0) = 2 ; \end{cases}$$

le soluzioni sono della forma

$$y(x) = -\cos x + c .$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava $c = 3$, quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = 3 - \cos x .$$

Esempio : consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + \operatorname{sen} x \\ y(0) = 0 . \end{cases}$$

È un'equazione lineare del primo ordine, con $A(x) = x$ e $b(x) = \operatorname{sen} x$: le soluzioni sono quindi della forma

$$y(x) = \mathrm{e}^{x}\Big[c + \int \mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen} x\,dx\Big] = \mathrm{e}^{x}\Big[c - \mathrm{e}^{-x}\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}\Big] .$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava $c = 1/2$, quindi la soluzione è (✎ es. 10.6)

$$y(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - \operatorname{sen} x - \cos x}{2} .$$

Equazioni a variabili separabili. Sono equazioni del tipo

$$y' = a(x)f(y)$$

dove a ed f sono due funzioni continue assegnate, con $f(y) \neq 0$ per ogni y (o almeno in un intorno del valore iniziale y_0). Supponiamo ad esempio $f > 0$; se G è una primitiva di $1/f$ ed A è una primitiva di a, l'equazione si può scrivere nella forma

$$\big(G(y)\big)' = G'(y)y' = \frac{1}{f(y)}y' = A'(x) ,$$

da cui

$$G(y) = A(x) + c .$$

Essendo $G' = 1/f > 0$ si ha che G è strettamente crescente, quindi invertibile, per cui tutte le soluzioni cercate sono della forma

$$y(x) = G^{-1}\big(A(x) + c\big) .$$

Nel caso in cui la funzione a sia costante, ad esempio $a \equiv 1$, si dice che l'equazione è *autonoma*, e le soluzioni sono del tipo

$$y(x) = G^{-1}(x + c) .$$

Esempio : consideriamo l'equazione autonoma

$$y' = \mathrm{e}^{-y} .$$

Si trova $G(y) = \mathrm{e}^{y}$, per cui le soluzioni sono date da $\mathrm{e}^{y} = x + c$, cioè

$$y(x) = \log(x + c) .$$

Notiamo che in tal caso le soluzioni non sono definite su tutto $\mathbb{R}$: ad esempio, se la condizione iniziale è $y(0) = \alpha$, si ricava $c = \mathrm{e}^{\alpha}$, quindi l'unica soluzione sarà data da

$$y(x) = \log(x + \mathrm{e}^{\alpha})$$

e risulta definita nell'intervallo $]-\mathrm{e}^{\alpha}, +\infty[$ (✎ es. 10.7).

Esempio : come applicazione di quanto visto precedentemente, studiamo la caduta di un corpo in un campo di gravità costante e sottoposto alla resistenza dell'aria. Indichiamo con $y(t)$ la posizione del corpo (lungo la verticale), con m la sua massa, e con g la gravità. Supponiamo che all'istante iniziale $t = 0$ il corpo abbia velocità nulla e che la resistenza dell'aria dipenda dalla velocità $y'(t)$ secondo la legge

$$R = k\phi(y')\,,$$

dove k è una costante che dipende dalla forma del corpo (coefficiente aerodinamico), mentre ϕ è una funzione che si determina sperimentalmente. Dalle equazioni della meccanica si trova

$$my'' = mg - k\phi(y')\,,$$

da cui si ricava l'equazione differenziale

$$y'' = g - \frac{k}{m}\phi(y')\,.$$

Posto $y' = v$ si ottiene l'equazione autonoma del primo ordine

$$v' = g - \frac{k}{m}\phi(v)$$

che, in base a quanto visto sopra, si integra nella forma

$$\int_0^v \frac{ds}{g - (k/m)\phi(s)} = t\,. \tag{10.25}$$

A seconda dell'espressione della funzione ϕ si ottengono diverse espressioni della velocità del corpo: ad esempio, se $\phi(v) = v$, si ottiene dalla (10.25)

$$\Big[-\frac{m}{k}\log\Big(g - \frac{k}{m}s\Big)\Big]_0^v = t\,,$$

da cui si ricava

$$v(t) = \frac{mg}{k}\big(1 - \mathrm{e}^{-tk/m}\big)\,.$$

È interessante notare che in tal caso la velocità limite di caduta è finita ed è data da

$$v_\infty = \lim_{t\to+\infty} v(t) = \frac{mg}{k}\,.$$

Se invece è $\phi(v) = v^2$, sempre dalla (10.25) si ottiene

$$\Big[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{kg}}\log\Big(\frac{\sqrt{mg/k}+s}{\sqrt{mg/k}-s}\Big)\Big]_0^v = t\,,$$

da cui si ricava

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\,\frac{\mathrm{e}^{2t\sqrt{kg/m}} - 1}{\mathrm{e}^{2t\sqrt{kg/m}} + 1}\,.$$

In tal caso, la velocità limite di caduta è data da

$$v_\infty = \lim_{t\to+\infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\,.$$

Provate a dimostrare, per una ϕ continua, crescente, e nulla in 0, che la velocità limite v_∞ è data da:

a) la più piccola soluzione dell'equazione $\phi(s) = mg/k$ se tale equazione ha soluzione;
b) $+\infty$ se $\phi(s) < mg/k$ per ogni $s > 0$.

Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Consideriamo qui un caso molto particolare di equazioni differenziali del secondo ordine: il caso di equazioni lineari a coefficienti costanti, cioè del tipo

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{10.26}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ ed f funzione continua; tali equazioni si dicono *omogenee* se il termine noto $f(x)$ è la funzione nulla. Ci limiteremo a dare un algoritmo di risoluzione in varî passi, rinviando per ogni giustificazione dettagliata, e per una teoria più completa, al corso successivo di Analisi matematica II.

Passo 1 : la prima cosa da fare per trovare le soluzioni dell'equazione (10.26) è scrivere l'*equazione caratteristica*

$$z^2 + az + b = 0$$

e determinarne le radici in campo complesso; siccome a e b sono numeri reali, le radici z_1 e z_2 saranno una sola, reale, oppure entrambe reali, oppure complesse coniugate (☞ proposizione 3.39).

Passo 2 : in corrispondenza alle radici z_1 e z_2 si determinano due funzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$, dette *soluzioni fondamentali*, che risolvono la (10.26) con $f(x) \equiv 0$:

a) nel caso in cui z_1 e z_2 sono reali e distinte poniamo

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{z_1 x}\,, \qquad y_2(x) = \mathrm{e}^{z_2 x}\,;$$

b) nel caso in cui z_1 è l'unica radice (reale) poniamo

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{z_1 x}\,, \qquad y_2(x) = x\mathrm{e}^{z_1 x}\,;$$

c) nel caso in cui z_1 e z_2 sono complesse coniugate, cioè del tipo $\alpha \pm i\beta$, poniamo

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x\,, \qquad y_2(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,.$$

Passo 3 : una volta determinate le funzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$, otteniamo l'espressione della *soluzione generale* di (10.26) nel caso omogeneo: questa è data da

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

con c_1 e c_2 costanti reali arbitrarie.

Passo 4 : se la funzione f non è identicamente nulla, si cerca una *soluzione particolare* dell'equazione (10.26) nella forma

$$\bar{y}(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

con $c_1(x)$ e $c_2(x)$ funzioni da determinare, su cui imporremo via via delle condizioni che dovranno essere verificate (questo è il cosiddetto *metodo della variazione delle costanti*). La derivata $\bar{y}'$ è data da

$$\bar{y}' = c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_1y_1' + c_2y_2'\,;$$

imponendo che si abbia
$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$$
rimane $\bar{y}' = c_1y_1' + c_2y_2'$ da cui, richiedendo che $\bar{y}$ risolva l'equazione (10.26), otteniamo
$$c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2'' + a(c_1y_1' + c_2y_2') + b(c_1y_1 + c_2y_2) = f \,.$$

Tenuto conto che y_1 e y_2 sono soluzioni dell'equazione omogenea, si ricava la seconda condizione
$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = f \,,$$
e dunque le funzioni $c_1(x)$ e $c_2(x)$ devono verificare il sistema
$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = f \,. \end{cases} \tag{10.27}$$

Si può dimostrare che questo sistema lineare (nelle incognite c_1' e c_2') è sempre risolubile, cioè che la matrice (detta *matrice wronskiana*)
$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$$
ha sempre determinante non nullo, per cui da (10.27) si ricavano le espressioni di c_1' e c_2' in funzione delle quantità note y_1, y_2, y_1', y_2', f. Determinate c_1' e c_2', si ricavano poi c_1 e c_2 per integrazione, e di qui l'espressione di $\bar{y}(x)$.

Passo 5 : si ricavano tutte le soluzioni di (10.26), che sono date da
$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \bar{y}(x)$$
al variare delle costanti c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$.

Osservazione : in qualche caso speciale, una soluzione particolare di (10.26) può essere trovata senza ricorrere al passo 4; ad esempio, se $f(x)$ è un polinomio di grado n si può cercare una soluzione particolare sotto forma di polinomio di grado n.

Esempio : consideriamo l'equazione differenziale del secondo ordine
$$y'' + 2ay' + y = \operatorname{sen} t$$
con $a > 0$; questa equazione interviene nello studio delle piccole oscillazioni di un pendolo sottoposto alla resistenza dell'aria e in presenza di un termine forzante sinusoidale. L'equazione caratteristica $z^2 + 2az + 1 = 0$ ha:

a) le due radici reali e distinte $z_1 = -a - \sqrt{a^2-1}$ e $z_2 = -a + \sqrt{a^2-1}$ se $a > 1$,
b) la sola radice $z_1 = -1$ se $a = 1$,
c) le due radici complesse $z_1 = -a - \mathrm{i}\sqrt{1-a^2}$ e $z_2 = -a + \mathrm{i}\sqrt{1-a^2}$ se $a < 1$,

per cui avremo le soluzioni fondamentali
$$\begin{array}{ll} \mathrm{e}^{(-a-\sqrt{a^2-1})t}\,, \quad \mathrm{e}^{(-a+\sqrt{a^2-1})t} & \text{se } a > 1\,, \\ \mathrm{e}^{-t}\,, \quad t\mathrm{e}^{-t} & \text{se } a = 1\,, \\ \mathrm{e}^{-at}\operatorname{sen}\big(t\sqrt{1-a^2}\big)\,, \quad \mathrm{e}^{-at}\cos\big(t\sqrt{1-a^2}\big) & \text{se } a < 1\,. \end{array}$$

Si vede poi (facilmente, oppure con il metodo della variazione delle costanti) che una soluzione particolare dell'equazione è data dalla funzione $\bar{y}(t) = -(1/a)\cos t$, quindi la soluzione generale dell'equazione cercata è:
$$\begin{array}{ll} c_1\mathrm{e}^{(-a-\sqrt{a^2-1})t} + c_2\mathrm{e}^{(-a+\sqrt{a^2-1})t} - \dfrac{1}{a}\cos t & \text{se } a > 1\,, \\ c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2t\mathrm{e}^{-t} - \dfrac{1}{a}\cos t & \text{se } a = 1\,, \\ c_1\mathrm{e}^{-at}\operatorname{sen}\big(t\sqrt{1-a^2}\big) + c_2\mathrm{e}^{-at}\cos\big(t\sqrt{1-a^2}\big) - \dfrac{1}{a}\cos t & \text{se } a < 1\,. \end{array}$$

È interessante notare che, siccome tutte le soluzioni fondamentali sono infinitesime per $t \to +\infty$, ogni soluzione della (10.26) risulta asintotica, per $t \to +\infty$, alla funzione $-(1/a)\cos t$, indipendentemente dalle condizioni iniziali.

Esempio : risolviamo l'equazione
$$y'' - y = \mathrm{e}^x\,;$$
le soluzioni dell'equazione caratteristica $z^2 - 1 = 0$ sono 1 e -1, per cui le soluzioni fondamentali sono
$$y_1(x) = \mathrm{e}^x\,, \qquad y_2(x) = \mathrm{e}^{-x}\,.$$
Per trovare una soluzione particolare scriviamo il sistema wronskiano
$$\begin{cases} c_1'(x)\mathrm{e}^x + c_2'(x)\mathrm{e}^{-x} = 0 \\ c_1'(x)\mathrm{e}^x - c_2'(x)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^x\,, \end{cases}$$
che ha per soluzioni
$$c_1'(x) = \frac{1}{2}\,, \qquad c_2'(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\,:$$
da qui otteniamo la soluzione particolare
$$\bar{y}(x) = \frac{1}{2}x\mathrm{e}^x + \Big(-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\Big)\mathrm{e}^{-x} = \Big(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\Big)\mathrm{e}^x$$
e la soluzione generale (✎ es. 10.8)
$$y(x) = \frac{1}{2}x\mathrm{e}^x + c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x}\,.$$

10.4 - Equazioni alle differenze

Si chiama *equazione alle differenze di ordine* k ogni espressione del tipo

$$a_{n+k} = f(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}) . \tag{10.28}$$

Dunque l'equazione (10.28) individua una successione definita per induzione (☞ proposizione 3.7), una volta fissate le condizioni iniziali

$$a_1 = \alpha_1 , \ldots , a_k = \alpha_k .$$

Ad esempio, le equazioni alle differenze del primo ordine sono della forma

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(n, a_n) \\ a_0 = \alpha , \end{cases}$$

mentre quelle del secondo ordine sono della forma

$$\begin{cases} a_{n+2} = f(n, a_n, a_{n+1}) \\ a_0 = \alpha , \quad a_1 = \beta . \end{cases}$$

Alcuni esempi di equazioni alle differenze sono già stati trattati in precedenza (☞ sezioni 5.10 e 7.7, e appendice 5.18).

La teoria delle equazioni alle differenze è molto simile a quella delle equazioni differenziali ordinarie, che verranno trattate nei dettagli nel corso di Analisi matematica II (☞ sezione 10.3 per alcuni cenni), ma conviene qui accennare a questo tipo di equazioni, che richiedono soltanto la conoscenza delle successioni e del principio di induzione. Inoltre, mediante le equazioni alle differenze si possono approssimare le equazioni differenziali; infatti, se $y(x)$ è una funzione derivabile su $\mathbb{R}$ un numero sufficiente di volte, e $h > 0$ è un parametro "abbastanza piccolo", posto $x_n = nh$ e $a_n = y(x_n)$, si ha per $h \to 0$

$$\begin{aligned} &hy'(x_n) \approx a_{n+1} - a_n \\ &h^2y''(x_n) \approx h\big(y'(x_{n+1}) - y'(x_n)\big) \approx a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n \\ &h^3y'''(x_n) \approx h^2\big(y''(x_{n+1}) - y''(x_n)\big) \approx a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n \end{aligned}$$

e così via. Ad esempio, nel caso dell'equazione differenziale

$$y'' + y' + y = \operatorname{sen} x$$

l'*equazione discretizzata* associata risulta essere

$$\frac{a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n}{h^2} + \frac{a_{n+1} - a_n}{h} + a_n = \operatorname{sen}(nh) ,$$

cioè

$$a_{n+2} = (2 - h)a_{n+1} + (-1 + h - h^2)a_n + h^2 \operatorname{sen}(nh) ,$$

dove h è il *passo di discretizzazione*, e le condizioni iniziali $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ diventano, nel problema discretizzato,

$$a_0 = y_0 , \qquad a_1 = y_0 + hy_1 .$$

In alcuni casi si riesce a scrivere esplicitamente la soluzione $\{a_n\}_n$ di (10.28) come funzione elementare di n ; ci occuperemo qui solo del caso particolare in cui

$$f(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i a_{n+i} ;$$

l'equazione (10.28) diventa allora

$$a_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} c_i a_{n+i} , \tag{10.29}$$

e viene detta *equazione alle differenze, lineare, a coefficienti costanti, di ordine* k , *omogenea*. Risolvere l'equazione (10.29) significa determinare tutte le successioni $\{a_n\}_n$ che la verificano; imponendo poi le condizioni iniziali si ottiene l'unica soluzione cercata.

Teorema 10.6 : *l'insieme* V *di tutte le soluzioni di* (10.29) *è uno spazio vettoriale di dimensione* k .

DIMOSTRAZIONE : per dimostrare che V è uno spazio vettoriale basta osservare che, a causa della linearità dell'equazione (10.29), V è stabile rispetto alla somma e alla moltiplicazione per uno scalare. Consideriamo ora le successioni $\{a_n^i\}_n$, con $i = 1, \ldots, k$, soluzioni di (10.29) e verificanti rispettivamente le condizioni iniziali

$$\begin{cases} a_1^1 = 1 \\ a_2^1 = 0 \\ \vdots \\ a_k^1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1^2 = 0 \\ a_2^2 = 1 \\ \vdots \\ a_k^2 = 0 \end{cases} \qquad \cdots \qquad \begin{cases} a_1^k = 0 \\ a_2^k = 0 \\ \vdots \\ a_k^k = 1 . \end{cases}$$

Le successioni $\{a_n^i\}_n$ sono elementi di V linearmente indipendenti: infatti, se fosse

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_n^i = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} ,$$

per $n = 1$ si avrebbe $\lambda_1 = 0$, per $n = 2$ si avrebbe $\lambda_2 = 0$, e così via si avrebbero tutti i λ_i nulli. Per concludere la dimostrazione, non resta che provare che le successioni $\{a_n^i\}_n$ costituiscono una base dello spazio vettoriale V . Sia dunque $\{a_n\}_n$ un qualsiasi elemento di V ; dimostreremo che, posto $\lambda_i = a_i$ per $i = 1, \ldots, k$, si ha

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_n^i . \tag{10.30}$$

La successione

$$b_n = a_n - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_n^i$$

verifica ancora l'equazione (10.29) ed è tale che $b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0$. Siccome anche la successione nulla verifica (10.29) con queste stesse condizioni iniziali, e la soluzione deve essere unica, si ha che $\{b_n\}_n$ è la successione nulla, e dunque si ha la (10.30). ■

Dal teorema 10.6 segue che, per determinare la soluzione dell'equazione (10.29) con assegnate condizioni iniziali $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, si può procedere nel modo seguente:

a) determinare k soluzioni linearmente indipendenti $\{b_n^1\}_n, \ldots, \{b_n^k\}_n$ dell'equazione (10.29);

b) considerare una generica combinazione lineare delle $\{b_n^i\}_n$ (che viene detta *soluzione generale*)

$$b_n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_n^i ;$$

c) imporre le condizioni iniziali e ricavare i coefficienti λ_i .

Rimane il problema di determinare le soluzioni linearmente indipendenti $\{b_n^1\}_n, \ldots, \{b_n^k\}_n$; a tale scopo si considera l'*equazione caratteristica*

$$z^k - \sum_{i=0}^{k-1} c_i z^i \ : \tag{10.31}$$

per il teorema fondamentale dell'algebra (☛ teorema 3.38) la (10.31) ha, in campo complesso, k soluzioni $z_1, \ldots, z_k$, di cui alcune potranno essere coincidenti. Inoltre, essendo i coefficienti in (10.31) reali, se un numero complesso z è radice di (10.31) lo sarà anche il coniugato $\bar{z}$ (☛ proposizione 3.39). Illustriamo qui di seguito una procedura che permette, note le radici $z_1, \ldots, z_k$, di determinare k soluzioni linearmente indipendenti. Lasciamo per esercizio la verifica che le successioni trovate sono effettivamente soluzioni della (10.29) e che sono tra loro linearmente indipendenti.

a) Se z è una radice reale semplice dell'equazione (10.31), si considera la successione

$$x_n = z^n .$$

Se invece z è una radice reale con molteplicità p si considerano le successioni

$$x_n^j = n^{j-1} z^n \qquad (j = 1, \ldots p) .$$

b) Supponiamo ora che $z = \rho e^{i\theta}$ sia una radice complessa semplice dell'equazione (10.31); per quanto detto sopra, anche $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$ è radice della (10.31), dunque z determina due successioni. Esse sono:

$$x_n = \rho^n \cos(n\theta) , \qquad y_n = \rho^n \operatorname{sen}(n\theta) .$$

Se invece z è una radice complessa con molteplicità p , essa determina $2p$ successioni, che sono:

$$x_n^j = n^{j-1} \rho^n \cos(n\theta) , \qquad y_n^j = n^{j-1} \rho^n \operatorname{sen}(n\theta) \qquad (j = 1, \ldots p) .$$

Esempio : consideriamo la successione di Fibonacci, ☛ formula (5.50), definita per induzione da

$$a_0 = 0 , \qquad a_1 = 1 , \qquad a_{n+2} = a_n + a_{n+1} . \tag{10.32}$$

Si tratta di un'equazione alle differenze, lineare, omogenea, di ordine 2 ; l'equazione caratteristica associata

$$z^2 - z - 1 = 0$$

ha le due soluzioni reali

$$z_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} , \qquad z_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} ,$$

dunque la soluzione generale è data da

$$A\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n + B\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n .$$

Imponendo le condizioni iniziali si trova il sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Az_1 + Bz_2 = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $A = -1/\sqrt{5}$, $B = 1/\sqrt{5}$. Allora la successione di Fibonacci può essere scritta esplicitamente nella forma

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n .$$

Esempio : consideriamo la successione definita per induzione da

$$a_0 = \alpha , \qquad a_1 = \beta , \qquad a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n .$$

Si tratta ancora di un'equazione alle differenze, lineare, omogenea, di ordine 2 , e l'equazione caratteristica

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

ha le due soluzioni complesse coniugate

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}, \qquad z_2 = 1 - i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4} .$$

La soluzione generale è quindi

$$2^{n/2}\big[A\cos(n\pi/4) + B\operatorname{sen}(n\pi/4)\big] ,$$

e imponendo le condizioni iniziali si trova il sistema

$$\begin{cases} A = \alpha \\ A + B = \beta \end{cases}$$

che ha come soluzioni $A = \alpha$, $B = \beta - \alpha$. Dunque la soluzione cercata è

$$a_n = 2^{n/2}\big[\alpha\cos(n\pi/4) + (\beta - \alpha)\operatorname{sen}(n\pi/4)\big] .$$

Provate per esercizio che la successione $\{a_n\}_n$ non ha limite per alcun valore dei parametri α, β ad eccezione del caso in cui siano entrambi nulli.

Esempio : consideriamo la successione definita per induzione da

$$a_0 = \alpha\,, \qquad a_1 = \beta\,, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n\,.$$

L'equazione caratteristica

$$z^2 - z + \frac{1}{4} = 0$$

ha l'unica soluzione $z = 1/2$, con molteplicità 2, e la soluzione generale è quindi

$$2^{-n}(A + nB)\,.$$

Imponendo le condizioni iniziali si trova il sistema

$$\begin{cases} A = \alpha \\ A + B = 2\beta \end{cases}$$

che ha come soluzioni $A = \alpha$, $B = 2\beta - \alpha$, dunque la soluzione cercata è

$$a_n = 2^{-n}\left[\alpha + (2\beta - \alpha)n\right]$$

e si ha per ogni scelta di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (✎ es. 10.9)

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0\,.$$

Esercizi relativi al capitolo 10

Esercizio 10.1 : determinate con un'approssimazione migliore di $1/10000$ il valore di π, risolvendo l'equazione $\tan x = 1$ in $[0, \pi/2[$; dopo aver determinato come procedere, potete aiutarvi con un calcolatore solo per eseguire le quattro operazioni.

Esercizio 10.2 : adattate il metodo di Newton al caso di funzioni decrescenti, o al caso di funzioni concave. Controllate il vostro enunciato determinando il valore di π con un'approssimazione migliore di $1/10000$., risolvendo l'equazione $\cos x = 1/2$ nell'intervallo $[0, \pi/2]$.

Esercizio 10.3 : dopo aver dimostrato che il polinomio $x^3 - 3x + 1$ ha tre radici, calcolatele con un'approssimazione migliore di $1/1000$.

Esercizio 10.4 : per ciascuno dei quattro metodi di integrazione approssimata proposti, determinate in quanti sottointervalli va diviso l'intervallo $[0,1]$ per calcolare il valore di $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ con un'approssimazione migliore di $1/1000$.

Esercizio 10.5 : calcolate

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

con un'approssimazione migliore di $1/10$, oppure migliore di $1/100$. Questo esercizio illustra i vantaggi e svantaggi dei metodi più grossolani (rettangoli) rispetto a quelli più raffinati (Cavalieri-Simpson).

Esercizio 10.6 : risolvete i seguenti problemi di Cauchy:
a) $y' = e^x$, $y(0) = 3$
b) $y' = 2y - e^x$, $y(0) = 0$
c) $y' = xy + 2x$, $y(0) = 0$.

Esercizio 10.7 : risolvete i seguenti problemi di Cauchy:
a) $y' = \sqrt[3]{y^2}$, $y(0) = 1$
b) $y' = \tan x \cdot \cos^2 y$, $y(0) = \pi$.

Esercizio 10.8 : determinate la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali:

a) $2y'' + y' - 3y = 3x + 2$
b) $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$
c) $y'' - 2y' + 2y = 1.$

Esercizio 10.9 : determinate la soluzione generale dell'equazione alle differenze

$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n .$$

Lista dei simboli

Raccogliamo in questa lista i simboli matematici usati in questo volume, con l'eccezione di quelli che, oltre a essere di uso poco frequente, compaiono nel libro solo in un contesto molto localizzato. Il numero (o i numeri, se sulla stessa riga compaiono varî simboli) indica la pagina in cui il simbolo è definito, o compare per la prima volta; per i simboli che possono assumere più significati differenti, abbiamo indicato più numeri di pagine.

Funzioni reali e complesse

Logica e insiemistica

Funzioni generiche, relazioni

Numeri

Topologia

Limiti

Derivate e integrali

Indice analitico

Abbiamo cercato di rendere questo indice il più facile possibile da utilizzare, includendo moltissime voci e citando quelle composte sotto tutte le componenti (ad esempio, "forma algebrica" compare sia sotto la voce "forma" che sotto la voce "algebrica"). Quando, nella lettura del testo, incontrate una struttura matematica di cui non ricordate esattamente definizione e proprietà, vi consigliamo di cercarla immediatamente, aiutandovi sia con l'indice analitico che con l'indice del libro.