Calculus 101 for Jackchans

B.A.M & J.D.A, 2023

Indice

1 Sproloquio Introduttivo

Queste note hanno lo scopo di essere una raccolta degli esercizi, dei fatti notevoli, dei fatti meno notevoli ma altrettando interessanti appresi, grazie a Jack, durante lo studio per l'esame di Analisi 1 presso l'università di Pisa.
Per la natura del materiale presente, queste note non saranno da sole (immagino) sufficienti a preparare l'esame in questione, a causa della possibile brevità di alcune sezioni e spiegazioni.

2 Definizioni e Richiami

La serie di Taylor di una funzione $f(x)$, centrata in x_0 è definita come:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

in funzione di questa, diamo alcune definizioni importanti:

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}x^n$$

$$\sin x = \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$\cos x = \sum_{n\geq} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

3 Limiti e Continuità

3.1 Limiti di Successioni

Saranno date per buone le definizioni di Spazio Metrico e Topologico.

Definizione 3.1. Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice:
inferiormente limitata se esiste m tale che $\forall n, a_n \geq m$
superiormente limitata se esiste m tale che $\forall n, a_n \leq m$
limitata se eistono due numeri m ed M tali che $\forall n, m \leq a_n \leq M$

Definizione 3.2. Una successione $\{a_n\}$ si dice convergente se $\exists l \in E$ tale che:

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ definitivamente } |a_n - l| < \varepsilon$$

l si chiama **limite della successione** a_n:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l.$$

Nota: l'operatore lim è **lineare**.
Definizione Una successione $\{a_n\}$ si dice *crescente* se

$$\forall n, a_{n+1} > a_n$$

e si dice *debolmente crescente* se vale la disuguaglianza $a_n \leq a_{n+1}$. È definito analogamente il concetto di decrescenza. Sia le successioni crescenti che quelle decrescenti sono dette monotone.

Teorema 3.3 (Monotonia)**.** Sia $\{a_n\}$ una successione monotona crescente e superiormente limitata. Allora a_n converge e il suo limite è $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Vale l'analogo con l'inf per le successioni decrescenti.

Dimostrazione. Senza perdità di generalità dimostriamo il caso delle successioni monotone crescenti e limitate.
Poiché $\{a_n\}$ è limitata esiste finito $\Gamma = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ e questo realizza $\Gamma \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Per proprietà del sup, in ogni intorno sinistro di Γ vi è almeno un elemento della successione, in particolare

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : \Gamma - \varepsilon < a_n \leq \Gamma.$$

Poiché la successione è crescente e limitata da Γ ne consegue

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \geq n, \Gamma - \varepsilon < a_m \leq \Gamma,$$

e questo dimostra che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \Gamma.$$

□

Teorema 3.4 (Permanenza del segno)**.** Se $a_n \to a$ e $a > 0$ allora $a_n > 0$ definitivamente. (vale anche col minore di 0)

Dimostrazione. Vale che

$$\forall\varepsilon > 0, \text{ definitivamente } |a_n - a| < \varepsilon$$

che è equivalente a:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

ma allora per ogni $\varepsilon < a$ si ha $a_n > 0$. □

Teorema 3.5 (Del confronto o *dei due carabinieri*)**.** se $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitamente e:

$$a_n \to l, c_n \to l \in \mathbb{R}$$

allora anche $b_n \to l$.

Dimostrazione. Per definizione di limite, si ha che, comunque fissato $\varepsilon > 0$, definitivamente sia $\{a_n\}$ che $\{c_n\}$ giacciono in un ε-intorno di l. Da $a_n \leq b_n \leq c_n$ segue che anche $\{b_n\}$ deve definitivamente appartenere ad un ε-intorno di l, e vista l'arbitrarietà di ε si ha $\lim_{n\to+\infty} b_n = l$. □

Definizione 3.6. Una *sottosuccessione* di $\{a_n\}$ è una qualunque successione della forma $\{a_{n_k}\}_{k\geq1}$
con $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$.

Teorema 3.7 (Bolzano-Weierstrass)**.** Ogni successione di numeri reali contenuta in un intervallo limitato $[a, b]$ possiede una sottosuccessione convergente in $[a, b]$.

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ la nostra successione, Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in due sotto intervalli di uguale ampiezza. Almeno uno di questi intervalli conterrà infiniti elementi di $\{x_n\}$, scegliamone uno, x_0. Chiamiamo questo intervallo $[a_1, b_1]$, peschiamo un elemento da $[a_1, b_1]$, x_1 e procediamo così ottenendo una successione di intervalli $[a_k, b_k]$ e una sottosuccessione x_{n_k} con le seguenti proprietà:

- $\{a_k\}$ è monotona crescente e superiormente limitata da b
- $\{b_k\}$ è monotona decrescente e inferiormente limitata da a
- $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$
- $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$

le prime due convergono per il teorema di monotonia e tendono allo stesso limite, c.
Per confronto anche $x_{n_k} \to c \in [a, b]$. □

Definizione 3.8 (Successione di Cauchy)**.** Si dice che la successione $\{a_n\}$ è *di Cauchy* se

$$\forall\varepsilon > 0 \,\exists\, n_0 : \forall n, m \geq n_0, |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Vista la somiglianza con la definizione di successione convergente, è semplice verificare che
(i) se una successione è convergente allora è di Cauchy
(ii) se una successione è di Cauchy allora è limitata.
Vale inoltre il seguente

Teorema 3.9 (Completezza dei reali)**.** Se $\{a_n\}$ è una successione di Cauchy di reali, $a_n \to l \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Poiché $\{a_n\}$ è di Cauchy questa è limitata. Per Bolzano-Weierstrass ammette allora una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ convergente ad un certo limite l. Mostriamo che l'intera successione converge ad l. Infatti:

$$|a_n - l| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l|$$

e fissato $\varepsilon > 0, |a_{n_k} - l| < \varepsilon$ definitivamente e quindi in particolare vale $|a_n - a_{n_k}| < \varepsilon$ definitivamente, perciò:

$$|a_n - l| < 2\varepsilon$$

definitivamente. □

Nota: l'enunciato in $\mathbb{Q}$ è falso. Basta considerare la successione a valori in $\mathbb{Q}$ data da $\left\{\frac{F_{n+1}}{F_n}\right\}_{n\geq 0}$, dove il termine generale è il rapporto tra due numeri di Fibonacci consecutivi. Questa è una successione di Cauchy sia in $\mathbb{Q}$ che in $\mathbb{R}$, ma il suo limite (ossia il rapporto aureo) non appartiene a $\mathbb{Q}$.

3.2 Continuità

Definizione 3.10 (Continuità)**.** Se $f : I \to \mathbb{R}$, I un intervallo, e $c \in I$ si dice che f è *continua in* c se esiste $\lim_{x\to c} f(x)$ e questo coincide con $f(c)$. f si dice *continua* in I se è continua in ogni punto di I.

Teorema 3.11 (Degli zeri)**.** Sia f continua in $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.
Se f è strettamente monotona lo zero è unico per iniettività di f.

Dimostrazione. Costruiamo una successione che tende ad uno zero di f. Posto $c_1 = \frac{a+b}{2}$ se $f(c_1) = 0$ abbiamo vinto, altrimenti guardiamo il segno di $f(a) \cdot f(c_1)$. Ora se $f(a) \cdot f(c_1) < 0$ consideriamo $[a_1, b_1]$ con $a_1 = a$ e $b_1 = c_1$, altrimenti $a = c_1$ e $b_1 = b$. ponendo adesso $c_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ possiamo ripetere la procedura di sopra fino a che non troviamo lo zero cercato. Infatti le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono limitate e monotone, hanno quindi limiti finiti, che chiamiamo rispettivamente l_1 ed l_2. Osservando che $a_n - b_n \to 0$ abbiamo che $l_1 = l_2 = l$, dunque $f(l) = 0$. □

Teorema 3.12 (Weierstrass)**.** Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, allora f assume massimo e minimo in $[a, b]$.

Dimostrazione. È sufficiente provare che per qualche $c \in [a, b]$ si ha $f(c) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, per poi applicare il medesimo lemma a $-f(x)$. Proviamo preliminarmente che f è necessariamente superiormente limitata. Se così non fosse, esisterebbe una qualche successione $\{x_n\}_{n\geq 1}$ di elementi di $[a, b]$ tale per cui $f(x_n) \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.
Per Bolzano-Weierstrass esisterebbe una estratta $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ convergente a $\overline{x} \in [a, b]$, e dalla continuità di f si avrebbe

$$f(\overline{x}) = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = +\infty,$$

contro l'ipotesi che f abbia valori reali in tutti i punti di $[a, b]$. Provato che l'immagine di $[a, b]$ secondo f è superiormente limitata, poniamo $\Gamma = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Per definizione di sup, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ esiste un $x_n \in [a, b]$ tale per cui $f(x_n) \geq \Gamma - \frac{1}{n}$. Analogamente a prima, dalla successione $\{x_n\}_{n\geq 1}$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ convergente a $\overline{x} \in [a, b]$, e dalla continuità di f segue

$$f(\overline{x}) = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \Gamma.$$

□

Teorema 3.13 (Dei valori intermedi)**.** Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora f sul suo dominio assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.

Dimostrazione. Se $f(a) = f(b)$ non c'è alcunché da dimostrare. Possiamo allora assumere $f(a) \neq f(b)$ e per qualunque c compreso tra $f(a)$ ed $f(b)$ applicare il teorema degli zeri a $f(x) - c$. □

Teorema 3.14 (Invertibilità)**.** Una funzione continua f da un intervallo chiuso I in $\mathbb{R}$ è invertibile se e solo se è strettamente monotona, e in tal caso ha inversa continua e strettamente monotona.

Dimostrazione. Se $f : I \to \mathbb{R}$ continua e invertibile non fosse strettamente monotona, esisterebbero tre punti $x_1 < x_2 < x_3$ in I tali che $f(x_2) \leq \min(f(x_1), f(x_3))$ oppure $f(x_2) \geq \max(f(x_1), f(x_3))$. In entrambi i casi, dal Teorema dei valori intermedi seguirebbe $f(\alpha) = f(\beta)$ con $\alpha \in [x_1, x_2]$, $\beta \in [x_2, x_3]$ e $\alpha \neq \beta$, contro l'iniettività di f. Per quanto concerne la seconda parte, consideriamo una generica $f : I \to \mathbb{R}$ continua e strettamente monotona. Per Bolzano-Weierstrass questa manda i punti dell'intervallo I nei punti di un intervallo J, e a meno di "rovesciare" gli elementi del dominio possiamo supporre che f mandi con continuità I in J preservando l'ordine stretto. Questo ci dà immediatamente la stretta monotonia della funzione inversa $g : J \to I$, e resta da provare unicamente la continuità di g. Supponiamo che $\{y_n\}_{n\geq 1}$ sia una successione di elementi di J convergente a $\overline{y} \in J$, e poniamo $x_n = g(y_n)$, equivalente a $y_n = f(x_n)$. Per Bolzano-Weierstrass $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ammette una estratta $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ che è sia strettamente monotona che convergente a $\overline{x} \in I$. Per continuità di f la successione $\{y_{n_k}\}_{k\geq 1}$ converge a $f(\overline{x})$. Poiché $\{y_n\}_{n\geq 1}$ è convergente per ipotesi, qualunque sua estratta deve ammettere lo stesso limite, $\overline{y} = f(\overline{x})$. Segue che l'intera successione $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge a $\overline{x}$ e che g manda successioni convergenti in successioni convergenti, ossia è (sequenzialmente) continua. Se infatti $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ammettesse estratte convergenti a punti diversi, per continuità e stretta monotonia di f lo stesso varrebbe per $\{y_n\}_{n\geq 1}$, contro le ipotesi. □

Definizione 3.15 (Continuità Uniforme)**.** Si dice che $f : I \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua in I se

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in I \text{ vale che } |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Teorema 3.16 (Heine-Cantor)**.** Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora è uniformemente continua in $[a, b]$.

Dimostrazione. Comunque fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $x \in [a, b]$ esiste un $\delta_x > 0$ che assicura

$$|z - x| < \delta_x \Longrightarrow |f(z) - f(x)| < \varepsilon.$$

Gli intervalli della forma $(x - \delta_x, x + \delta_x)$ costituiscono un ricoprimento aperto di $[a, b]$. Per compattezza di $[a, b]$ esiste un sotto-ricoprimento finito costituito da $(x_1 - \delta_{x_1}, x_1 + \delta_{x_1}), \ldots, (x_n - \delta_{x_n}, x_n + \delta_{x_n})$. Posto $\delta = \max(\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n})$ si ha di conseguenza che sul dominio di f

$$|z - x| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(x)| < \varepsilon.$$

□

Definizione 3.17 (Modulo di Continuità)**.** Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione a valori in $\mathbb{R}$, e sia δ un numero reale positivo. Si definisce Modulo di Continuità locale di f in x_0 una funzione $\omega_0 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tale che:

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \omega_{x_0}(\delta), \forall x \in (a, b) : |x_0 - x| \leq \delta$$

è detto modulo di continuità globale invece:

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \omega_{x_0}(\delta), \forall x, x_0 \in (a, b) : |x_0 - x| \leq \delta$$

Il modulo di Continuità misura l'uniforme continuità di f, in particolare valgono le seguenti proprietà:

- f è continua in x_0 se e solo se essa ammette un modulo di continuità locale ω_{x_0} tale che $\lim_{\delta\to 0} \omega_{x_0}(\delta) = 0$
- una funzione è uniformemente continua se e solo se ammette un modulo di continuità globale ω_f tale che $\lim_{\delta\to 0} \omega_f(\delta) = 0$
- per funzioni derivabili su un intervallo e lipschitziane di costante L il modulo di continuità ha crescita sub-lineare, cioè $\omega_f(\delta) \leq C\delta$.

Teorema 3.18 (Integrabilità delle funzioni continue)**.** Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora è Riemann-integrabile su $[a, b]$.

Dimostrazione. Data una partizione di $[a, b]$ di calibro ε, l'uniforme continuità di f assicura che su ogni componente della partizione si abbia $\sup f - \inf f \leq \varepsilon$. In particolare la differenza tra l'inf delle somme di Riemann superiori e il sup delle somme di Riemann superiori è controllato da $\varepsilon(b - a)$. Dall'arbitrarietà di ε segue la Riemann-integrabilità di f. □

3.3 Spazi metrici e di Banach

Sia X un insieme e sia $d : X \times X \to [0, +\infty]$ una funzione che ad ogni coppia (x, y) di punti in X associa un numero reale $d(x, y) \geq 0$. Si dice che d è una distanza o metrica su X se sono verificate le seguenti:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$
- $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$

L'ultima condizione prende il nome di **Disuguaglianza Triangolare**.
La coppia (X, d) si dice **Spazio Metrico** se d è una distanza (o metrica).

Definizione 3.19 (Intorno circolare)**.** Per ogni $x_0 \in X$ e per ogni $r > 0$, si chiama Intorno Circolare (Intorno Sferico o Palla Aperta) di centro x_0 e di raggio r l'insieme

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

Definizione 3.20 (Aperti e Topologia)**.** Un insieme $A \subseteq X$ Si dice aperto se ogni suo punto è centro di una palla aperta contenuta in A, cioè se per ogni suo punto $x_0 \in A$ esiste $r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subseteq A$ (si assume il vuoto come un insieme aperto). Un insieme $C \subseteq X$ si dice chiuso se il suo complementare, $A = X \setminus C$ è aperto. L'insieme di tutti gli aperti di uno spazio metrico (X, d) si dice **Topologia Generata dalla metrica** d.

Proposizione. In uno spazio metrico, tutti le palle aperte, le unioni arbitrarie di aperti e le intersezioni finite di aperti sono aperte.
Proposizione. In uno spazio metrico intersezioni arbitrarie e unioni finite di chiusi danno luogo a insiemi chiusi.

Uno stesso insieme può avere metriche diverse a seconda della funzione d. Ad esempio:
Sia (X, d) una metrica dove X è un insieme e

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = y \\ 1 & \text{se} \quad x \neq y \end{cases}$$

è chiaro che d è una metrica, che prende il nome di metrica discreta. Segue anche che, secondo questa metrica, ogni sottoinsieme di X è aperto.
Invece $d(x, y) = |x - y|$ definisce una metrica che prende il nome di euclidea, la quale genera l'usuale topologia della retta reale. In questo caso un insieme è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto.
Si può definire la convergenza di successioni e di funzioni continue attraverso una metrica. Infatti sia a_n una successione in X, si dice che la successione converge, o tende, a $x_0 \in X$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $v \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $k > v$:

$$d(a_k, x_0) < \varepsilon.$$

Si prova in maniera analoga a come si fa in $\mathbb{R}$ che vale il **Teorema di unicità del limite**.

3.4 *AN2* Successioni e Serie di Funzioni

Definizione
Sia I un insieme di numeri reali e sia $f_k : I \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni reali. Si dice che f_k converge puntualmente in I verso la funzione $f : I \to \mathbb{R}$ se vale

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$$

per ogni $x \in I$, cioè se per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $x \in I$ esiste $v_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ tale che:

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

In generale, fissato ε, il numero $v_{\varepsilon,x}$ dipende solo da x, se risulta indipendente invece, si dice che la successione di funzioni converge uniformemente a $f(x)$.
La convergenza Uniforme implica quella Puntuale come mostrato nella disuguaglianza:

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \sup\{|f_k(x) - f(x) : x \in I|\}$$

Per ogni $x \in I$. In generale il viceversa è falso.

4 Binomiali & Friends

Come spero sia noto il binomiale $\binom{n}{k}$, letto n *su* k, rappresenta il numero di sottoinsiemi di cardinalità k in un insieme di n elementi. Questo è esplicitamente:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Proprietà dei binomiali sono:

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$
- $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
- $0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$

4.1 Teorema Binomiale di Newton e applicazioni utili

Il binomio di Newton è usato per calcolare le potenze n-esime dei binomi:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

4.2 Stars & Bars

Un importante tecnica di conteggio è appunto **Stars & Bars**:

$$\left|\{(x_1, \ldots, x_k) \in (\mathbb{N}^+)^k : x_1 + \ldots + x_k = n\}\right| = [x^n]\left(\frac{x}{1-x}\right)^k = \binom{n-1}{k-1},$$

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{k} x^n.$$

L'interpretazione grafica è data dal rispondere alla domanda: in quanti modi possiamo mettere $k-1$ barrette nelle intercapedini tra n oggetti adiacenti? Eccone anche un'applicazione ad un esercizio già visto, ossia la determinazione di $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{4^n}$. Abbiamo in primo luogo che n^2 è certamente una combinazione lineare di $\binom{n+2}{2}$, $\binom{n+1}{1}$ e $\binom{n}{0}=1$.
In particolare, per eliminazione gaussiana (o differenze in avanti) vale $n^2=2\binom{n+2}{2}-3\binom{n+1}{1}+\binom{n}{0}$.
Da stars&bars segue allora che

$$\sum_{n\geq 0} n^2x^n=\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{3}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}$$

e valutando ambo i membri in corrispondenza di $x=\frac{1}{4}$ si ha immediatamente

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{4^n}=2\left(\frac{4}{3}\right)^3-3\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{20}{27}.$$

4.3 Forma Binomiale

Ogni potenza n^k è combinazione lineare di coefficienti binomiali della forma $\binom{n}{j}$ con $j\leq k$. i coefficienti di queste combinazioni lineari sono ottenute per differenze in avanti ($**$ da completare$**$).

4.4 Binomiale Centrale

I coefficienti binomiali centrali sono i binomiali del tipo:

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!^2}=\frac{2^n(2n-1)!!}{n!}$$

così chiamati perché occupano le posizioni centrali del triangolo di Tartaglia.
Seguono disuguaglianze utili per la stima dei binomiali centrali:

- $\frac{4^n}{n+1}\leq\binom{2n}{n}\leq 4^n$
- $\frac{4^n}{2\sqrt{n}}\leq\binom{2n}{n}\leq\frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}$

e ancora più accuratamente $\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ con $\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\leq\frac{1}{\sqrt{\pi\left(n+\frac{1}{4}\right)}}$.
Queste possono essere ricavate dalla rappresentazione integrale

$$\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2n}\,d\theta$$

4.5 Hockey Stick Identity

Vale l'identità:

$$\binom{n+1}{r+1}=\sum_{j=r}^{n}\binom{j}{r}$$

Dimostrazione. Fissato r, è sufficiente procedere per induzione su n. □

5 Criteri e Metodi per Serie Numeriche

5.1 Serie Importanti

Seguono le più importanti Serie Numeriche convergenti, utili nella stima di altre serie e nella verifica della loro convergenza.

Serie Armonica Generalizzata

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$$

è una serie convergente se e solo se $\alpha \in \mathbb{R} > 1$
Serie Geometrica

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Ha il seguente comportamento:

$$\begin{cases} |x| \in (0,1) \to S = \frac{1}{1-x} \\ x \geq 1 \to S = \infty \\ x \leq -1 \to \nexists S \end{cases}$$

Serie Telescopica Ogni somma/serie in cui il termine generale si può esprimere come differenza di termini consecutivi (o quasi) si calcola, infatti vale

$$\sum_{n=0}^{N} (a_n - a_{n+1}) = a_0 - a_{N+1}$$

per massiccia cancellazione: il membro sinistro corrisponde alla differenza tra la prima quantità sommata e l'ultima quantità sottratta.

5.2 Criteri

Seguiranno i principali criteri di convergenza per le Serie.

5.2.1 Serie a termini definitivamente non negativi

Criterio del Confronto
Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$$

Se vale che definitamente $0 \leq b_n \leq a_n$, allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty.$$

Eventualmente in combinazione con somme telescopiche, questo criterio prova la convergenza o divergenza di molte serie. Ad esempio da $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ segue

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 2$$

e un discorso analogo può essere applicato anche alla serie armonica generalizzata.

Criterio del Confronto Asintotico
È una forma più generale del precedente criterio. Se due successioni a termini non negativi $\{a_n\}_{n\geq 1}$ e $\{b_n\}_{n\geq 1}$ sono tali per cui $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ esiste finito, le serie

$$\sum_{n\geq 1} a_n, \qquad \sum_{n\geq 1} b_n$$

sono entrambe convergenti o entrambe positivamente divergenti.

Criterio del Rapporto
Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

una serie a termini mai nulli. Se si ha che:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = c < 1$$

allora la serie degli a_n converge assolutamente.
È una conseguenza abbastanza immediata della definizione di limite e del criterio del confronto.
O, volendo, del criterio successivo, in quanto per il Lemma di Hadamard $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to c$ comporta $\sqrt[n]{|a_n|} \to c$.

Criterio della Radice
Se $\{a_n\}_{n\geq 1}$ è una successione a valori non negativi tale per cui

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = c \in [0,1),$$

allora la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.
È una conseguenza immediata del confronto con una serie geometrica convergente.

5.2.2 Serie a termini di segno variabile

Criterio di Leibniz
Se $\{a_n\}_{n\geq 0}$ è una successione decrescente a zero, la serie

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$$

è convergente.

Dimostrazione. Posto come di consueto $A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$, dalle ipotesi segue che $\{A_{2N}\}_{N\geq 0}$ è una successione decrescente mentre $\{A_{2N+1}\}_{N\geq 0}$ è una successione crescente. Poiché $A_{2N} > A_{2N+1}$ le due successioni sono entrambe convergenti, in quanto quella crescente è limitata dall'alto mentre quella decrescente è limitata dal basso. Inoltre i limiti di queste due successioni debbono coincidere, in quanto $A_{2N+1} - A_{2N} = a_{2n+1}$ converge a zero per ipotesi. Segue che l'intera successione delle somme parziali è convergente, ossia che la serie è convergente. $\square$

Una importante generalizzazione è data dal **Criterio di (Abel-)Dirichlet**.
Se $\{a_n\}_{n\geq 0}$ è una successione con somme parziali limitate e $\{b_n\}_{n\geq 0}$ è una successione decrescente a zero, la serie $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ è convergente.
Sketch della dimostrazione. Segue dall'identità

$$\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = A_N b_N - \sum_{n=0}^{N-1} A_n (b_{n+1} - b_n)$$

che è un analogo discreto della formula di integrazione per parti, nota come **formula di sommazione per parti**.
La sua dimostrazione è banale per induzione su N. $\square$
Dalla formula di integrazione per parti segue l'omonimo criterio per gli integrali: se su $[0, +\infty)$ si ha che $f(x)$ ha primitiva limitata e $g(x)$ è decrescente a zero, $f(x)g(x)$ è impropriamente Riemann-integrabile su $\mathbb{R}^+$.

5.3 Serie di Potenze

Una serie di potenze (centrata nell'origine) è definita come:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

con $x \in \mathbb{C}$, e sia il **Raggio di Convergenza**

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

La serie di potenze converge puntualmente nella palla $B_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$ e uniformemente su ogni compatto contenuto in B_0.

5.4 Metodi creativi per il calcolo esplicito

Vediamo adesso come abusare della linearità delle Serie per calcolare esplicitamente una classe di queste.
Sia

$$S = \sum_{n\geq 0} \frac{f(n)}{k^n}$$

con $k \in \mathbb{N} \wedge k \geq 2$. Sarebbe molto comodo in questo caso ricondursi ad una serie geometrica. Ipotizzando che esista una applicazione lineare e continua T tale da mandare x^n in $f(n)$ otteniamo:

$$S = \sum_{n\geq 0} \frac{f(n)}{k^n} = \sum_{n\geq 0} \frac{T(x^n)}{k^n} = T\left(\sum_{n\geq 0} \left(\frac{x}{k}\right)^n\right) = T\left(\frac{1}{1-\frac{x}{k}}\right)$$

in base alla scelta/costruzione di T possiamo calcolare esplicitamente tute le serie di questo tipo. (Possibili applicazioni lineari che farebbero al caso nostro sono: Derivazione, Integrazione, Somma, Prodotto, Valutazione e tutte le loro composizioni)
Un esempio di utilizzo di questo metodo è calcolare esplicitamente la serie:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{4^n}$$

utilizzando come operatore T la somma delle prime due derivate valutata in 1 (esercizio per il lettore).
In generale questo metodo è utile ogni qual volta si sta trattando una Serie i cui termini, a meno di un fattore, coincidono con quelli di una serie che già sappiamo calcolare.
A onor del vero, per quanto potente è raro che tale metodo sia *l'unico* in grado di esplicitare un'assegnata serie. Tornando all'esempio precedente, è ovvio che la serie presentata sia convergente, in quanto definitivamente $\frac{n^2}{4^n} \in \left(0, \frac{1}{3^n}\right]$.
Sono allora lecite tutte le seguenti manipolazioni (basate unicamente su moltiplicazioni per 4 e *reindexing*):

$$S = \sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{4^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{4^n}, \qquad 4S = \sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{4^{n-1}} = \sum_{m\geq 0} \frac{(m+1)^2}{4^m},$$

$$3S = 4S - S = \sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)^2 - n^2}{4^n} = \sum_{n\geq 0} \frac{2n+1}{4^n} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{4^n},$$

$$12S = 4(3S) = 4 + \sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{4^{n-1}} = 4 + \sum_{m\geq 0} \frac{2m+3}{4^m},$$

$$9S = 12S - 3S = 4 + \sum_{n\geq 0} \frac{(2n+3)-(2n+1)}{4^n} = 4 + 2\sum_{n\geq 0} \frac{1}{4^n} = 4 + \frac{2}{1-\frac{1}{4}} = 4 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3}$$

dalle quali segue $S = \frac{20}{27}$.

5.4.1 Criterio Cannonata

Per il **Criterio di Convergenza Dominata** tutte Le serie che convergono *abbastanza* velocemente commutano con l'integrale. All'atto pratico ciò comporta che, nelle ipotesi corrette, è lecito scrivere:

$$\sum_{n\geq 0} \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{n\geq 0} f(x)dx.$$

Questo torna utile in quanto è moderatamente comune sostituire ad una funzione una sua **Rappresentazione integrale**. (Non esattamente collegato, ma per farsi un'idea dell'utilità di questo fatto vedere l'esercizio **J17**)

5.5 Creative Telescoping

Un metodo importante è quello di trasformare Serie apparentemente complesse in Serie Telescopiche o combinazioni lineari di serie telescopiche. Tipicamente per questo tipo di lavoro bisogna farci l'occhio e sapere un po' dove mettere le mani, ma diventa abbastanza intuitivo velocemente.
(serve appunto un po' di creatività)

6 Integrali Tricky e Metodi Interessanti

Saranno date per note le principali tecniche di integrazione (per sostituzione e per parti), infatti, questo paragrafo si concentrerà nell'illustrare degli integrali più complessi e meritevoli di particolare attenzione, oltre che a tecniche di integrazione un po' più oscure. (Sono a conoscenza che questa sezione è meno utile delle precedenti, visto che è difficile che uno qualunque di questi esempi appaia esplicitamente in una prova. Ma sono comunque ad avviso mio e di Jack abbastanza importanti da avere a portata di mano in caso di necessità). alcune tecniche che verranno illustrate sono l'utilizzo della convergenza dominata (vedere paragrafo sui criteri delle serie), Integrali complessi, abuso di rappresentazioni integrali etc.

6.0.1 Un primo Caso interessante

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2n} d\theta = \frac{\pi}{2 \cdot 4^n}\binom{2n}{n}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2n+1} d\theta = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

inaspettatamente questi due integrali sono strettamente legati ai Binomiali Centrali e sono appunto una loro rappresentazione integrale.

6.1 Metodo di Ostrogradsky

(Da Revisionare) Questo metodo aiuta nell'integrazione di funzioni razionalili, si basa sulla decomposizione in fratti semplici ma grazie alla sua natura algoritmica risulta utile nei casi un po' più ostici (tipicamente quando il denominatore ha radici multiple)immaginiamo di voler integrare:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)dx}$$

con $P(x)$ e $Q(x)$ Polinomi e $deg(P) < deg(Q)$

definiamo:

$$Q_1(x) = MCD(Q(x), Q'(x))$$

e poi:

$$Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q'(x)}$$

allora possiamo scrivere che:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)dx} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q''(x)}$$

Dove P_1 e P_2 sono polinomi ignoti di grado $deg(P_1) = deg(Q_1) - 1$ e $deg(P_2) = deg(Q_2) - 1$ Adesso per ottenere i polinomi mancanti basta derivare l'espressione ottenuta sopra ad ambo i membri e utilizzare i fratti semplici per

ottenere poi i coefficienti.
se ad esempio volessimo integrare:

$$\int \frac{x+2}{(x+3)^3}dx$$

iniziamo calcolando Q_1 e Q_2

$$Q_1 = MCD((x+3)^3, 3(x+3)^2) = (x+3)^2$$

$$Q_2 = \frac{Q}{Q_1} = \frac{(x+3)^3}{(x+3)^2} = x+3$$

abbiamo quindi che l'integrale di partenza si scompone come:

$$\int \frac{x+2}{(x+3)^3}dx = \frac{Ax+B}{(x+3)^2} + \int \frac{C}{x+3}$$

Derivando si ottiene:

$$\frac{x+2}{(x+3)^3} = \frac{A(x+3)^2 - 3(Ax+B)(x+3)}{(x+3)^4}$$

$$\frac{-2Ax^2 + 6Ax + 6A - 3Bx - 9B - x^2 - 5x - 6}{(x+3)^4} = 0$$

Da cui non resta che ricavare A,B e C.

7 Equazioni Differenziali

Per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale (T.F.C.I.) possiamo risalire alla funzione $u(t)$ se se ne conosce la derivata, infatti l'equazione

$$u'(t) = f(t)$$

ha soluzione

$$u(t) = \int_a^t f(s)ds$$

In generale, data una funzione di due variabili $f(t,u)$ possiamo porci il problema di trovare una funzione $u(t)$ che verifichi l'equazione differenziale:

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

l'equazione di sopra si dice del primo ordine perché coinvolge solo la derivata prima della funzione $u(t)$.

7.1 ED a Variabili Separabili

si chiamano così le equazioni del tipo:

$$u'(t) = a(t)f(u(t))$$

per risolvere queste equazioni basta dividere entrambi i membri per $f(u)$ ed integrare:

$$\int \frac{u'(t)}{f(u(t))}dt = \int a(t)dt$$

7.2 ED Lineari del Primo ordine

sono le equazioni del tipo:

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t)$$

con $a(t)$ e $b(t)$ funzioni date.
Indichiamo con $A(t) = \int a(t)dt$ si ha che, se $b(t) = 0$

$$log(u(t)) = A(t) + p$$

con p costante arbitraria.
quindi

$$u(t) = ce^{A(t)}$$

con $c = e^p$ costante arbitraria

7.3 Esempi

7.3.1 Decadimento Radioattivo

è il processo secondo il quale un sostanza radioattiva decade, trasformandosi in un'altra sostanza più leggera a causa della perdita di neutroni.
Il carattere fondamentale di questa reazione è che non si può predire quando avverà, ma si può dare una probabilità a questo evento. Questa probabilità è pdt proporzionale all'intervallo di tempo dt, indicando con $n(t)$ il numero di neutroni presenti al tempo t tra t e $t * dt$ se ne disintegreranno $n(t)pdt$. Il numero complessivo di neutroni diminuirà, ottendo quindi:

$$\frac{n(p+dt) - n(t)}{dt} = -pn(t)$$

facendo tendere dt a 0 otteniamo:

$$n'(t) = n_0 e^{-pt}$$

il numero di neutroni decresce quindi esponenzialmente e si denota con $\tau = \frac{log2}{p}$ il tempo di dimezzamento

7.3.2 L'Oscillatore Armonico

Con questo termine si indica un sistema costituito da un punto materiale di massa m che si muove su una rett, soggette ad una forza di richiamo, proporzionale alla distanza dal punto 0.
indicando con $u(t)$ la posizione del corpo al tempo t, la forza totale che agisce sul corpo sarà: $f = -ku - hu'$ e l'equazione del moto $f = ma$ si scrive:

$$mu''(t) + hu'(t) + ku(t) = 0$$

ponendo $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ e $a = \frac{h}{2m}$.

$$u''(t) + 2au'(t) + \omega_0^2 u = 0$$

se cerchiamo soluzioni della forma $e^{\lambda t}$ otteniamo l'equazione $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ che ha radici complesse $i\omega_0 t$ e $-i\omega_0 t$ che corrispondono alle soluzioni : $e^{i\omega_0 t}$ e $e^{-i\omega_0 t}$
dove $e^{i\omega_0 t}$ e $e^{-i\omega_0 t}$ stanno per $cos\omega_0 t + isen\omega_0 t$ e $cos\omega_0 t - isen\omega_0 t$
La soluzione generale della differenziale è quindi:

$$u(t) = c_1 sen\omega_0 t + c_2 cos\omega_0 t$$

7.4 Metodi di Risoluzione Eq. non omogenee

In generale consideriamo $x_{\tilde{OM}}$ la soluzione dell'omogenea. Allora la soluzione generale sarà del tipo:

$$\tilde{x} = x_{\tilde{OM}} + \tilde{x_1}$$

dove $\tilde{x_1}$ è la soluzione generale dell'equazione differenziale.

Per trovarla è utile il **Metodo di Somiglianza** che consiste nel cercare le soluzioni generali a partire dal termine noto dell'equazione.
Se per esempio stiamo cercando di risolvere l'equazione:

$$u'(t) + 2u(t) = t^2$$

Cerchiamo prima la base delle soluzione dell'omogenea:

$$u'(t) + 2u(t) = 0 \Rightarrow \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow x_{\tilde{OM}} = e^{-2t}$$

Per trovare la soluzione generale dell'equazione ora guardiamo il termine noto t^2, la speranza è quella di trovare come soluzioni una funzione della stessa forma di t^2 in questo caso, cerchiamola tra i polinomi.
Supponiamo quindi che $\tilde{x_1} = at^3 + bt^2 + ct + d$ sia una soluzione, allora derivando otteniamo: $\tilde{x_1}' = 3at^2 + 2bt + c$, utilizzando la relazione data dalla differenziale sappiamo che:

$$3at^2 + 2bt + c + 2at^3 + 2bt^2 + 2ct + 2d = t^2 \Leftrightarrow 3a + 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

La soluzione totale è quindi $\tilde{x} = c_1 e^{-2t} + c_2 \frac{1}{5} t^3$
Un altro metodo per risolvere alcune differenziali (più difficili delle precedenti) è quello di studiare il comportamento di $u'(t)$ con la sua inversa $v'(t)$, se esiste, o analogamente, se è ben definito, col suo reciproco.

8 Esercizi (Difficili)

Gli esercizi proposti sono, appunto, difficili come quelli di compito (in più quelli con 3 stelle sarebbero in grado di indurre in stato comatoso il candidato se incontrati durante una prova ufficiale, si raccomanda cautela).
J1 $\star$ Si dimostri che

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{5^n}\binom{2n}{n}$$

è una serie convergente.
J2$\star$. Si determini il valore del seguente integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt$$

J3$\star$. Si dimostri che per qualunque $k \in \mathbb{N}$ la serie

$$a_k = \sum_{n\geq 1} \frac{n^k}{2^n}$$

converge ad un numero naturale.
$(\star\star\star)$ Si provi che

$$a_k \sim \frac{k!}{\ln(2)^{k+1}}$$

quando $k \to +\infty$.
J4$(\star)$. Si dimostri che il seguente limite esiste ed è finito:

$$\lim_{N\to+\infty}\left(-2\sqrt{N} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

J5$(\star)$. Si approssimi il valore della seguente serie convergente con un errore non superiore al millesimo:

$$\sum_{n\geq 1}\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$$

J6($\star$). Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ il polinomio $P_n(x)$ è definito come segue:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left(x(x-1)\right)^n.$$

Si dimostri che $P_n(x)$ ha n radici reali distinte nell'intervallo $(0,1)$ e si determini, al variare di n, la somma dei quadrati di tali radici.

J7($\star\star$). Si dimostri che per qualunque numero reale c esiste una funzione biunivoca $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ tale che

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(f(n))}{\sqrt{f(n)}} = c.$$

J8($\star\star$). La successione $\{a_n\}_{n\geq 0}$ è definita tramite $a_n = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^n \, d\theta$. Si dimostri che è decrescente a zero e che soddisfa $a_{n+1}^2 < a_n a_{n+2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

J9($\star\star$). Si dimostri che

$$f(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{t\,dt}{\arctan t}$$

definisce una funzione positiva, crescente e convessa su $\mathbb{R}^+$.

J10($\star\star$). Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ \frac{x^2}{\arctan x} & \text{se} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

si provi che essa è biunivoca e di classe C^∞ (ossia derivabile con continuità infinite volte) e che lo stesso vale per la sua funzione inversa $f^{-1}(x)$. Si determini infine la derivata terza nell'origine di $f^{-1}(x)$ e il valore dell'integrale

$$\int_0^{4/\pi} f^{-1}(x) \arctan^2(f^{-1}(x))\, dx.$$

J11($\star$). [Integrale di Frullani] Si dimostri che per ogni $a \in \mathbb{R}^+$ si ha, in senso di Riemann improprio,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{x}\, dx = \log a.$$

J12($\star\star$). Si dimostri che la successione $\{a_n\}_{n\geq 0}$ definita da

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

è definitivamente nulla.

J13($\star\star$). Si determini il comportamento asintotico (per $n \to +\infty$) della successione $\{a_n\}_{n\geq 0}$ definita attraverso

$$a_n = \int_0^{\pi/4} (1 + \tan\theta)^n \, d\theta.$$

J14($\star\star\star$). Si provi che il seguente limite esiste finito e se ne determini il valore:

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\sqrt{1-x} \sum_{n\geq 0} x^{n^2} \right).$$

J15($\star$). Si determini la derivata decima nell'origine della funzione $f(x) = \log^2(1-x)$.

J16($\star\star$). Si determini lo sviluppo di Taylor della funzione $f(x) = \arctan x$ centrato nel punto 1 e si dimostri che, più in generale, lo sviluppo di Taylor centrato in $x_0 \in \mathbb{R}$ ha raggio di convergenza

$$\rho_{x_0} = \sqrt{1 + x_0^2}.$$

J17($\star$) [Disuguaglianza di Huygens] Si dimostri che per ogni $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ vale

$$2\sin\theta + \tan\theta > 3\theta.$$

J18($\star\star$) $\{a_n\}_{n\geq 0}$ è una successione per ricorrenza definita attraverso $a_0 = 2$ e $a_{n+1} = \sqrt{a_n^4 - 2}$. Si dimostri che la successione diverge positivamente ma la distanza tra a_n e l'intero più vicino tende a zero.
J19($\star$). Si dimostri che tra tutti i triangoli di perimetro assegnato, quelli equilateri hanno area massima.
J20($\star\star$). $ABCD$ è un quadrilatero convesso nel piano e i suoi lati misurano nell'ordine $4, 5, 6, 7$.¡br¿ Si determini quanto può valere al massimo l'area di $ABCD$ e si dimostri che le configurazioni che massimizzano l'area sono tutte e sole quelle in cui $ABCD$ è ciclico, ossia ha vertici che giacciono su una circonferenza.
J21($\star\star\star$) (Bernstein). Si determini il valore del seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

J22($\star\star$). Si determini se esiste o meno una funzione $f \in C^0((0,1))$ tale per cui

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, \quad \int_0^1 x^n f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

J24($\star\star$). $\{a_n\}_{n\geq 0}$ è una successione per ricorrenza definita attraverso

$$a_0 = \alpha, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + n^2\right).$$

Si determinino gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali per cui a_{69} è strettamente più piccolo di qualunque altro elemento della successione.
J24($\star\star\star$). Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo d_n come la derivata di ordine $4n+1$ nell'origine della funzione $f(x) = \tan x$. Si dimostri che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ si ha $d_n \in 10\mathbb{N} + 6$.
J25($\star\star$). Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ poniamo $p_n(x) = 1 - x - x^n$. Si dimostri che $p_n(x)$ ha un'unica radice reale $\xi_n \in (0,1)$ e si determini il comportamento asintotico di ξ_n per $n \to +\infty$.
J26($\star$) Si determini l'insieme dei $\kappa \in \mathbb{R}$ tali per cui il polinomio $4x^3 - \kappa x + 1$ ha tre radici reali distinte.
J27($\star\star$) Si provi che il seguente limite esiste finito e se ne determini esplicitamente il valore:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(\frac{4}{27}\right)^n \binom{3n}{n}.$$

Qui c'è da finire di inserire gli esercizi, i link alle soluzioni ed eventualmente spendere due parole riguardo i concetti e le tecniche "extra" presenti nelle soluzioni.