POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea
in Matematica per l'Ingegneria

Tesi di Laurea

Misure: costruzione di Carathéodory, misura di Lebesgue, misura e dimensione di Hausdorff

Relatore
prof. Paolo Tilli

Candidato
Biagio Torsello

Anno Accademico 2021-2022

Indice

Elenco delle figure

E però che con quella misura che l'uomo misura se medesimo, misura le sue cose, che sono quasi parte di se medesimo, aviene che al magnanimo le sue cose sempre paiono migliori che non sono, e l'altrui men buone; lo pusillanimo sempre le sue cose crede valere poco, e l'altrui assai.

[Dante Alighieri, Convivio, Trattato I, Capitolo XI]

Capitolo 1

Misure: definizioni, proprietà, costruzione di Carathéodory, misura di Lebesgue

In questo primo capitolo considereremo un generico insieme astratto X, sul quale definiremo delle funzioni soddisfacenti determinate proprietà, dette **misure**. Individueremo dunque una particolare classe di sottoinsiemi di X, detti misurabili, analizzandone le proprietà, e descriveremo una generica procedura per la costruzione di una misura su un qualunque insieme. Infine, rivolgeremo la nostra attenzione al caso particolare della costruzione della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$.

Notazione:

- dato un insieme non vuoto X e $A \subset X$, il simbolo A^c denota il complementare di A, ovvero $X \setminus A$;
- dato un insieme A, il simbolo $\mathring{A}$ denota la sua parte interna.

1.1 Definizioni e proprietà

Definizione: sia X un insieme non vuoto e $\mathcal{A}$ una qualunque famiglia di sottoinsiemi di X. Una mappa: $f : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ si dice **funzione d'insieme**.

Una funzione d'insieme può essere interpretata, ad esempio, come un modo per "misurare" i sottoinsiemi di un insieme generico X, associando loro un valore numerico (nel nostro caso, un valore sulla semiretta positiva estesa dei reali: $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$). Essa può inoltre essere caratterizzata da alcune proprietà relative al suo comportamento rispetto a unioni od intersezioni, finite o meno, di sottoinsiemi di X (si parla ad esempio di additività o subadditività). Spesso considereremo degli insiemi X dotati di una particolare struttura, come nella seguente:

Definizione: dato un insieme X non vuoto, sia: d: $X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ un'applicazione, detta **metrica**, soddisfacente le seguenti proprietà:

- $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$ (*simmetria*);
- $\forall x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*disuguaglianza triangolare*).

La coppia (X, d) è detta **spazio metrico**. Inoltre, definiamo:

$$\text{dist}(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}, \quad \forall A, B \subseteq X$$

Infine definiamo:

$$\text{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) : y \in A\}, \quad x \in X, A \subseteq X$$

Definizione: sia X un insieme non vuoto e $\mathscr{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$ l'insieme delle parti di X. Una mappa $\mu : \mathscr{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ è una **misura** su X se:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. dato $A \subseteq X, B_k \subseteq X$, $k \geq 1$, se:
$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k,$$
allora:
$$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$$

Grazie alla condizione 2, la funzione μ è detta **subadditiva**. Proprio a partire dalla subadditività, si dimostra la seguente proprietà di:

Monotonia: dati $A, B \subseteq X$, tali che $A \subseteq B$, allora:

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

<u>Verifica</u>: sia A $\subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, con $B_j \subseteq X$, $j \geq 1$. Allora, per la subadditività:

$$\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j).$$

In particolare, se scegliamo $B_1 = B, B_j = \emptyset$ per ogni $j \geq 2$, per la condizione 1 abbiamo immediatamente verificato la proprietà di monotonia. Dunque, una misura è una funzione d'insieme definita sull'insieme delle parti di X ($\mathcal{A} = \mathscr{P}(X)$), che associa all'insieme vuoto il valore nullo, subadditiva e soddisfacente la proprietà di monotonia. Individuiamo ora una particolare classe di sottoinsiemi di X.

Definizione: $A \subseteq X$ è detto **misurabile** se:

$$\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(B \cap A), \quad \forall B \subseteq X \tag{1.1}$$

Informalmente, un insieme A è misurabile se "spezza" tutti i sottoinsiemi B di X, nel senso definito sopra.

Osservazioni: siano $A, B \subseteq X$:

- A è misurabile se e solo se lo è anche il suo complementare. Infatti:
$$\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(B \cap A) = \mu((X \setminus A) \cap B) + \mu(B \setminus (X \setminus A)).$$
- l'insieme vuoto $\emptyset$ e X sono misurabili;

- se $\mu(A) = 0$ (si dice che A è **trascurabile**), allora A è misurabile. Per verificare la (1.1), mostriamo la doppia disuguaglianza:

  $\leq$: $B \subseteq ((B \cap A) \cup (B \setminus A))$, dunque per la subadditività:

  $$\mu(B) \leq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$$

  $\geq$: poichè $B \cap A \subseteq A$, per monotonia si ha: $\mu(B \cap A) = 0$. Inoltre, sempre per monotonia, risulta: $\mu(B) \geq \mu(B \setminus A)$. Allora:

  $$\mu(B) \geq \mu(B \setminus A) = \mu(B \setminus A) + \mu(B \cap A).$$

  Siano ora $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq X$ misurabili:

- $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ e $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ sono misurabili; ovvero, la collezione degli insiemi misurabili è chiusa per unioni ed intersezioni numerabili;
- se $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ sono a due a due disgiunti, allora:

  $$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

1.2 σ-algebre

Definizione: sia X un insieme non vuoto. Definiamo **σ-algebra** una collezione C di sottoinsiemi di X tale che:

- $\emptyset$, $X \in C$;
- se $A \in C$, allora $A^c \in C$ (chiusura per complementazione);
- dati $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \in C$, allora $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in C$ (chiusura per unioni numerabili);
- dati $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \in C$, allora $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in C$ (chiusura per intersezioni numerabili).

La definizione di σ-algebra e le osservazioni fatte in precedenza ci consentono di concludere che:

Proposizione: dato un insieme X non vuoto ed una misura μ su X, la collezione dei sottoinsiemi misurabili di X è una σ-algebra.

Definizione: sia X un insieme non vuoto e $E \subseteq \mathscr{P}(X)$ una qualunque collezione non vuota di sottoinsiemi di X. Denotiamo con:

$$\sigma(E)$$

la σ-algebrata **generata** da E. Essa è l'intersezione di tutte le σ-algebre contenenti E, ovvero la più piccola σ-algebra contenente E.
Se $(X,\, d)$ è uno spazio metrico, e $E = \{A \subseteq X : A \text{ è aperto}\}$, allora $\mathcal{B} := \sigma(E)$ è detta **σ-algebra di Borel**: essa è la più piccola σ-algebra contenente gli aperti di X. $O \in \mathcal{B}$ è detto **boreliano** di X.

1.3 Misure di Borel

Definizione: data una misura μ su (X, d) spazio metrico e $\mathcal{B}$ la corrispondente σ-algebra di Borel, μ si dice **misura di Borel** se ogni $O \in \mathcal{B}$ è misurabile.

Dato uno spazio metrico ed una misura su di esso definita, è possibile verificare se è di Borel senza controllare che ogni elemento di $\mathcal{B}$ sia misurabile? Tale interrogativo giustifica il seguente:

Teorema(Criterio di Carathéodory): sia (X, d) spazio metrico e μ una misura su di esso. Se, dati $A, B \subseteq X$ tali che $\operatorname{dist}(A, B) > 0$, abbiamo che:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B),$$

allora μ è una misura di Borel.

Dimostrazione ([EG15, Teorema 1.9, p. 14]): siano $A, C \subseteq X$, con C chiuso. L'obiettivo della dimostrazione è quello di mostrare che C è misurabile: infatti, se ciò è verificato, abbiamo che $O := X \setminus C$ è anch'esso misurabile, ovvero ogni $O \in \mathcal{B}$ è misurabile, da cui la tesi. Per dimostrare la misurabilità di C, sfruttiamo la definizione. C è misurabile se:

$$\mu(A) = \mu(A \setminus C) + \mu(A \cap C), \quad \forall A \subseteq X$$

Tale uguaglianza è verificata se e solo se è verificata la doppia disuguaglianza. Un verso di quest'ultima ($\leq$) è immediato, e deriva dalla subadditività della misura μ. Mostriamo dunque che:

$$\mu(A) \geq \mu(A \setminus C) + \mu(A \cap C). \tag{1.2}$$

Se $\mu(A) = \infty$, allora la (1.2) segue immediatamente. Se $\mu(A) < \infty$, allora procediamo per passi.

1. Sia $C_n = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{n}\}$, $n = 1,2,3,\ldots$. Allora, poichè $A \cap C \subseteq C$:

   $$\operatorname{dist}(A \setminus C_n, A \cap C) \geq \frac{1}{n} > 0.$$

   Per ipotesi, abbiamo dunque che:

   $$\mu(A \setminus C_n) + \mu(A \cap C) = \mu((A \setminus C_n) \cup (A \cap C)) \leq \mu(A),$$

   dove l'ultima disuguaglianza discende dalla subadditività. Passando al limite per $n \longrightarrow +\infty$:

   $$\lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus C_n) + \mu(A \cap C) \leq \mu(A),$$

2. *Per provare la tesi, basta mostrare che:* $\lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus C_n) = \mu(A \setminus C)$.

   Definiamo gli insiemi $E_k = \{x \in A : \frac{1}{k+1} < \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{k}\}$, $k = 1,2,3,\ldots$ Poichè C è chiuso, abbiamo che per ogni $x \in X$, $\operatorname{dist}(x, C) = 0$ se e solo se $x \in C$. Dunque possiamo scrivere:

   $$A \setminus C = (A \setminus C_n) \cup \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \right),$$

   dove il termine $\displaystyle\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ va ad aggiungere tutti quegli elementi di A la cui distanza da C è strettamente maggiore di 0 (e dunque non appartengono a C) e che erano stati sottratti precedentemente da A nel termine $(A \setminus C_n)$. Di conseguenza (per monotonia e subadditività):

$$\mu(A \setminus C_n) \leq \mu(A \setminus C) \leq \mu(A \setminus C_n) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k).$$

3. *La serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$ *è convergente.*
   Notiamo che $\mathrm{dist}(E_i, E_j) > 0$, se $i \geq (j+2)$. Di conseguenza, per ipotesi: $\mu(E_i \cup E_j) = \mu(E_i) + \mu(E_j)$, se $i \geq (j+2)$. Si estende tale osservazione al caso di unioni finite di elementi E_k, tali che $\mathrm{dist}(E_i, E_j) > 0$, $i \neq j$, con una scelta opportuna degli indici. Dato m finito, grazie a quest'ultima osservazione e per monotonia, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^{m} \mu(E_{2k}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} E_{2k}\right) \leq \mu(A);$$

$$\sum_{k=0}^{m} \mu(E_{2k+1}) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{m} E_{2k+1}\right) \leq \mu(A);$$

   Passando al limite per $m \longrightarrow \infty$ e sommando le due disequazioni, otteniamo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) \leq 2\mu(A) < \infty$$

   Da ciò, abbiamo che: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) = 0$, in quanto $\sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k)$ resto di una serie convergente.

4. *Conclusione della dimostrazione.*
   Per quanto visto al passo 2:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus C_n) \leq \mu(A \setminus C) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus C_n) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k)$$

   e dal passo 3 otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus C_n) \leq \mu(A \setminus C) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus C_n),$$

   da cui $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus C_n) = \mu(A \setminus C)$. Ricordando che al passo 1 avevamo trovato:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus C_n) + \mu(A \cap C) \leq \mu(A),$$

   abbiamo:

$$\mu(A \setminus C) + \mu(A \cap C) \leq \mu(A),$$

   ovvero C è misurabile, e dunque lo è anche ogni $O \in \mathcal{B}$, da cui la tesi.

□

1.4 Costruzione di Carathéodory

Abbiamo definito:

- cos'è una misura su un insieme non vuoto;
- una particolare classe di sottoinsiemi di un insieme non vuoto, detti misurabili;
- una classificazione delle misure su spazi metrici in base al loro "comportamento" su una particolare classe di sottoinsiemi (boreliani).

Passiamo ora alla definizione di una procedura esplicita per la costruzione di una misura su un insieme non vuoto.

Definizione: sia X un insieme non vuoto. Una famiglia di insiemi $\mathcal{F}$ è detta **ricoprimento** di X se l'unione dei suoi elementi contiene X. Si definisce **ricoprimento disgiunto** un particolare tipo di ricoprimento $\mathcal{F}$ di X in cui gli elementi di $\mathcal{F}$ sono a due a due disgiunti.

Definizione: sia X un insieme non vuoto e S una qualunque collezione di sottoinsiemi di X. Sia inoltre $\nu : S \longrightarrow [0, \infty]$ una funzione d'insieme. Definiamo $\mu : \mathscr{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e:

$$\mu(A) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k) : A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, A_k \in S \right\}, \quad \forall A \subseteq X,\ A \neq \emptyset$$

dove l'estremo inferiore è preso tra tutti ricoprimenti numerabili di A costituiti da sottoinsiemi $A_k \in S$. μ è una misura, detta **misura indotta da** ν. Se $A \subseteq X$ non ammette alcun ricoprimento numerabile di sottoinsiemi di S, allora $\mu(A) = \infty$, ponendo per convenzione l'estremo inferiore dell'insieme vuoto pari a ∞.

Dimostrazione ([RF10, Teorema 9, p. 350]): μ è una misura.
Sia $A \subseteq X$, e $\{\tilde{A}_k\}$, $k = 1,2,\dots$, un generico ricoprimento di A in X. Vogliamo provare la subadditività di μ, ovvero:

$$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\tilde{A}_k)$$

- Se $\mu(\tilde{A}_k) = \infty$ per qualche k, allora:

  $$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\tilde{A}_k) = \infty,$$

  e concludiamo.

- Se $\mu(\tilde{A}_k) < \infty$, per ogni $k \geq 1$, consideriamo che per ogni $\tilde{A}_k$ esiste un ricoprimento numerabile di sottoinsiemi di $S, \{A_{ik}\}$, $i = 1,2,\dots$, tale che:

  $$\sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_{ik}) < \mu(\tilde{A}_k) + \frac{\epsilon}{2^k}, \quad \forall \epsilon > 0$$

  per definizione di μ. Allora, $\{A_{ik}\}, 1 \leq i, k < \infty$, è un ricoprimento di $\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k$, dunque anche di A. Abbiamo che:

  $$\mu(A) \leq \sum_{k,i=1}^{\infty} \nu(A_{ik}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_{ik}) \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu(\tilde{A}_k) + \frac{\epsilon}{2^k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\tilde{A}_k) + \epsilon,$$

dove la prima disuguaglianza deriva dalla definizione di μ. Per $\epsilon \longrightarrow 0$, la tesi è dimostrata.

□

1.5 Costruzione della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$

L'approccio seguito nella costruzione di Carathéodory prevede dunque di approssimare dallo "esterno" ogni sottoinsieme di X mediante opportuni ricoprimenti numerabili costituiti da sottoinsiemi "elementari" (S), "valutati" da una funzione d'insieme (ν), prendendone infine l'estremo inferiore.
Nel caso particolare in cui $X = \mathbb{R}^n$, vorremmo associare la definizione formale di misura come funzione $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, \infty]$ all'idea intuitiva di lunghezze, aree o volumi, a seconda delle dimensioni dello spazio. Per farlo, consideriamo ricoprimenti numerabili costituiti da rettangoli (i nostri sottoinsiemi elementari), la cui funzione d'insieme associata ne calcola il volume: l'idea è quella di "inscatolare" dall'esterno ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ con rettangoli, calcolarne il volume e prendere infine il "valore minimo" possibile. I sottoinsiemi elementari (rettangoli) coincidono con la collezione di sottoinsiemi S che compare nella costruzione di una misura, mentre la funzione ν coincide in questo caso con il calcolo dei volumi. μ sarà la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$, denotata con $\mathscr{L}^n$. Infine, una volta definita $\mathscr{L}^n$, vedremo esplicitamente che il volume di un rettangolo coincide con la sua misura di Lebesgue e noteremo come questa, seppur intuitiva, sia una proprietà legata alla definizione stessa di misura, in particolare alla scelta di ricoprimenti numerabili. Formalizziamo questi concetti nelle seguenti definizioni.

Definizione: si dice **rettangolo** chiuso, n-dimensionale, con i lati paralleli agli assi coordinati, o semplicemente rettangolo, un sottoinsieme $R \subset \mathbb{R}^n$ della forma:

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n],$$

dove $-\infty < a_i \leq b_i < \infty$, $i = 1, \ldots, n$. Se $a_i = 0$, $b_i = 1$, per ogni $i = 1, \ldots, n$, R viene detto rettangolo unitario. L'insieme dei rettangoli di $\mathbb{R}^n$ è denotato con $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$.

Osservazione: R è compatto in quanto prodotto di compatti.

Definizione: sia $R \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ tale che:

$$R = \bigcup_k R_k, \quad k = 1,2, \ldots$$

R è detto **unione quasi disgiunta** dei rettangoli R_k se: $\mathring{R}_i \cap \mathring{R}_j = \emptyset$, $i \neq j$. L'insieme dei rettangoli $\{R_k\}, k = 1,2, \ldots$, costituisce una **partizione** del rettangolo R.

Definizione: la funzione d'insieme $v : \mathcal{R}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, \infty]$ tale che $v(\emptyset) = 0$ e:

$$v(R) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_n - a_n), \quad \forall R \neq \emptyset$$

è detta **funzione di volume**. $v(R)$ definisce dunque il volume di un generico rettangolo R.

Osservazioni:

- ricordando la costruzione generale di Carathéodory, abbiamo che $S = \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ e $\nu = v$;
- per $n = 1$ e $n = 2$, il volume del rettangolo coincide rispettivamente con la sua lunghezza e la sua area.

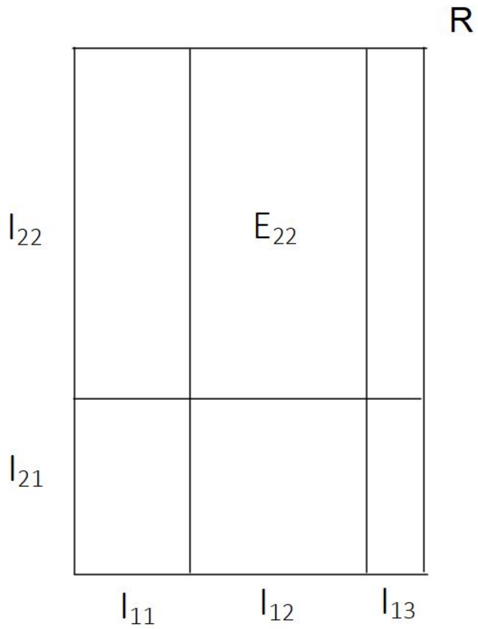


Figura 1.1: Rettangolo $R \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^2)$.

Seguono ora alcune proprietà della funzione di volume, le quali, sebbene intuitive dal punto di vista geometrico, ci consentiranno di dimostrare, una volta definita la misura di Lebesgue, che il volume di un rettangolo coincide con la sua misura.

1.5.1 Proprietà della funzione di volume

Questa sezione è tratta da [Hun, Capitolo 2, p. 12], [SS09, Capitolo 1, p. 5].

1. **Lemma:** sia $R \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ tale che:

$$R = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n,$$

dove ogni $I_i \subset \mathbb{R}$ è l'unione quasi disgiunta di intervalli chiusi e limitati I_{ij}, ovvero:

$$I_i = \bigcup_{j=1}^{N_i} I_{ij}, \quad \{I_{ij} \subset \mathbb{R} : j = 1, ..., N_i\}.$$

Allora, definiamo i seguenti rettangoli:

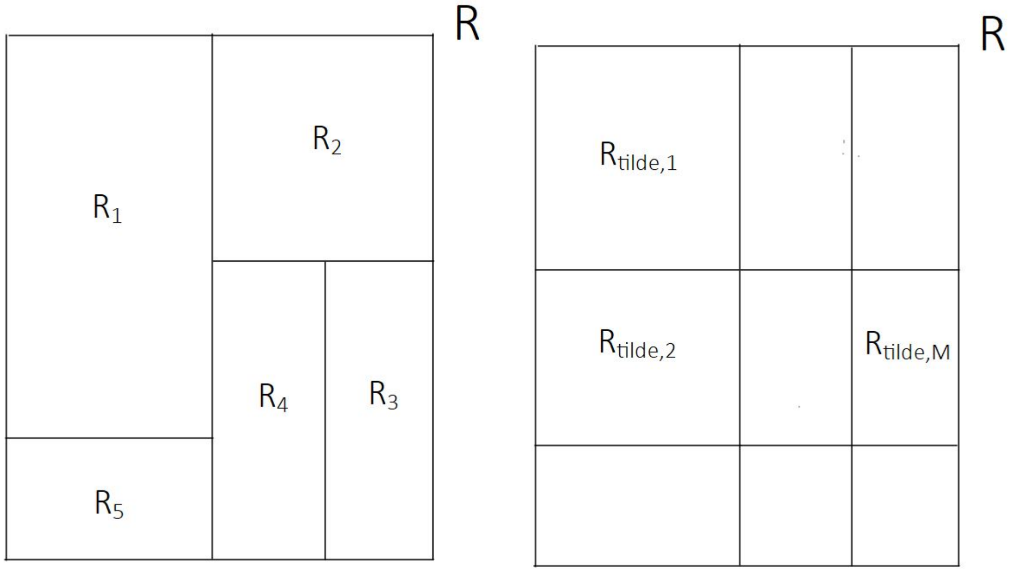
$$E_{j_1 j_2 ... j_n} := I_{1,j_1} \times I_{2,j_2} \times ... \times I_{n,j_n}$$

Abbiamo che:

$$v(R) = \sum_{j_1=1}^{N_1} ... \sum_{j_n=1}^{N_n} v(E_{j_1 j_2 ... j_n})$$

Dimostrazione: il lemma segue dalla definizione di funzione di volume. Infatti, denotata con $|I_i|$ la lunghezza dell'intervallo i-esimo, abbiamo:

$$v(R) = \prod_{i=1}^{N} |I_i| = \left(\sum_{j_1=1}^{N_1} |I_{1,j_1}| \right) \left(\sum_{j_2=1}^{N_2} |I_{2,j_2}| \right) ... \left(\sum_{j_n=1}^{N_n} |I_{n,j_n}| \right)$$
$$= \sum_{j_1=1}^{N_1} \sum_{j_2=1}^{N_2} ... \sum_{j_n=1}^{N_n} |I_{1,j_1}||I_{2,j_2}|...|I_{n,j_n}| = \sum_{j_1=1}^{N_1} \sum_{j_2=1}^{N_2} ... \sum_{j_n=1}^{N_n} v(E_{j_1 j_2 ... j_n})$$



(a) partizione di $R \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^2)$

(b) nuova partizione di R ottenuta mediante "estensione" dei lati

Figura 1.2: Due diverse partizioni di un rettangolo

Il lemma appena dimostrato è in realtà una proprietà geometrica molto intuitiva, soprattutto se consideriamo il caso $R \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^2)$, come nella Figura 1.1 (pagina precedente): l'area del rettangolo è pari alla somma delle aree dei rettangoli interni definiti dalla "griglia" raffigurata, derivante dalla partizione di I_1 e I_2, che in questo caso è: $I_1 = I_{1,1} \cup I_{1,2} \cup I_{1,3}$, $I_2 = I_{2,1} \cup I_{2,2}$, $(N_1 = 3, N_2 = 2)$.

2. **Proposizione:** sia R l'unione finita quasi disgiunta dei rettangoli $\{R_1, R_2, ...R_N\}$. Allora:

$$v(R) = \sum_{k=1}^{N} v(R_k),$$

ovvero v è **additiva**. Inoltre, dato un ricoprimento $\{R_1, R_2, ...R_N\}$ non necessariamente disgiunto:

$$v(R) \leq \sum_{k=1}^{N} v(R_k),$$

ovvero v è **subadditiva**.

Dimostrazione:

- *Additività*: sia $\{R_1, R_2, ...R_N\}$ una partizione finita di R. "Estendiamo" i lati di ogni rettangolo R_k, $k = 1,2,\ldots,N$, mediante dei prolungamenti: è facile osservare, anche visivamente nel caso di rettangoli in $\mathbb{R}^2$ (si veda Figura 1.2), che in questo modo otteniamo una nuova partizione finita di R in M rettangoli $\{\tilde{R}_1, ..., \tilde{R}_M\}$, tali che:

$$R = \bigcup_{j=1}^{M} \tilde{R}_j,$$

e:

$$R_k = \bigcup_{l=1}^{N_k} \tilde{R}_l, \quad k = 1, ...N.$$

dove N_k è l'insieme di indici associato al k-esimo rettangolo della partizione costituita da N rettangoli: ovvero, ogni rettangolo R_k della partizione "originaria" si può scrivere come unione quasi disgiunta di N_k rettangoli della "nuova" partizione. Gli interi N_k costituiscono dunque una partizione degli interi compresi tra 1 e M. Valgono le ipotesi del lemma precedente sia per R che per i rettangoli della partizione R_k (con $\tilde{R}_j = E_{j_1 j_2 ... j_N}$) e dunque abbiamo:

$$v(R) = \sum_{j=1}^{M} v(\tilde{R}_j) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N_k} v(\tilde{R}_l) = \sum_{k=1}^{N} v(R_k).$$

- *Subadditività*: dato un ricoprimento finito $\{R_1, R_2, ...R_N\}$ non necessariamente disgiunto, l'obiettivo è quello di ricondurci ad una partizione finita e sfruttare l'additività di v. Consideriamo dunque un nuovo ricoprimento, in cui a R_i, $i = 1, \dots N$, sostituiamo $R \cap R_i$. Questo è ancora un ricoprimento non necessariamente disgiunto; per ottenere degli insiemi disgiunti, "scartiamo" le intersezioni, e dunque otteniamo una partizione finita data dai nuovi insiemi $\tilde{R}_j$, $j = 1, ..., M$. Ricordando l'additività di v dimostrata al punto precedente e che $\sum_{j=1}^{M} v(\tilde{R}_j) \leq \sum_{i=1}^{N} v(R_i)$ a causa degli "scarti" delle intersezioni effettuati in precedenza (l'eliminazione delle sovrapposizioni tra i rettangoli non può far altro che diminuire la somma dei volumi):

$$v(R) = \sum_{j=1}^{M} v(\tilde{R}_j) \leq \sum_{i=1}^{N} v(R_i),$$

abbiamo la tesi.

□

1.5.2 La misura di Lebesgue $\mathscr{L}^n$

Definizione: la funzione d'insieme $\mathscr{L}^n : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, \infty]$ tale che $\mathscr{L}^n(\emptyset) = 0$ e:

$$\mathscr{L}^n(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} v(A_k) : A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,\, A_k \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n) \right\}, \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n,\, A \neq \emptyset,$$

dove l'estremo inferiore è preso tra tutti i ricoprimenti numerabili di A costituiti da rettangoli A_k, è detta **misura di Lebesgue**.

Dimostrazione: $\mathscr{L}^n$ è una misura. L'abbiamo già dimostrato nella costruzione generale di Carathéodory: basta porre $X = \mathbb{R}^n, \nu = v$, $S = \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$, $\mu = \mathscr{L}^n$.

□

Siamo in grado di dimostrare una proprietà intuitiva ed ora giustificabile anche formalmente mediante la seguente:

Proposizione: il volume di un rettangolo è pari alla sua misura di Lebesgue. Ovvero, dato $R \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$, si ha:

$$\mathscr{L}^n(R) = v(R).$$

Dimostrazione ([Hun, Proposizione 2.7, p. 14]): procediamo mostrando che vale la doppia disuguaglianza.

- $\leq$: poichè $\{R\}$ costituisce un ricoprimento di R, allora per definizione di $\mathscr{L}^n$ abbiamo che:
$$\mathscr{L}^n(R) \leq v(R).$$
- $\geq$: consideriamo un ricoprimento numerabile $\{R_k,\ k = 1,2,\dots\}$ del rettangolo R. Ricordiamo inoltre che per definizione R è compatto. "Estendiamo" ogni rettangolo R_k del ricoprimento in modo da associare ad ognuno di essi un nuovo rettangolo S_k, tale che $R_k \subseteq \mathring{S}_k$ e:
$$v(S_k) < v(R_k) + \frac{\epsilon}{2^k}$$
Dunque, $\{\mathring{S}_k,\ k = 1,2,\dots\}$ costituisce un ricoprimento numerabile ed aperto di R; poichè R è compatto, possiamo estrarre un sottoricoprimento finito, che denotiamo con $\{\mathring{S}_1, \mathring{S}_2, ..., \mathring{S}_M\}$. Chiaramente, anche $\{S_1, S_2, ..., S_M\}$ costituisce un ricoprimento finito di R; per la subadditività di v, si ha:
$$v(R) \leq \sum_{i=1}^{M} v(S_i) \leq \sum_{i=1}^{M} \left(v(R_i) + \frac{\epsilon}{2^k} \right) \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} v(R_i) \right) + \epsilon.$$
Per $\epsilon \longrightarrow 0$, abbiamo:
$$v(R) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v(R_i),$$
e poichè vale per un qualunque ricoprimento, si ha:
$$\mathscr{L}^n(R) \geq v(R),$$
da cui la tesi.

□

Osservazione: la validità della proposizione appena dimostrata è strettamente legata alla scelta di considerare solo ricoprimenti **numerabili** di rettangoli; nel caso in cui fossero ammessi anche ricoprimenti più che numerabili, potremmo, ad esempio, considerare quello costituito da soli punti. Il volume di ogni punto è pari a 0, dunque sarebbe nullo anche quello di ogni rettangolo.

Capitolo 2

Misura e dimensione di Hausdorff: definizione, proprietà ed applicazioni

In questo secondo capitolo tratteremo un caso particolare della costruzione di Carathéodory introdotta in precedenza, ovvero la costruzione di misure su spazi metrici. Passeremo dunque alla trattazione della **misura di Hausdorff** in $\mathbb{R}^n$ dotato di un'adeguata metrica d: ne analizzeremo le proprietà ed il rapporto con la misura di Lebesgue sullo spazio metrico $(\mathbb{R}^n, d)$. Introdurremo inoltre il concetto di dimensione di Hausdorff, per poi applicare quanto studiato a particolari sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$. Infine, vedremo due casi particolari della cosiddetta formula dell'Area, soffermandoci sulla necessità di introdurre la misura di Hausdorff per misurare insiemi immersi in spazi di dimensione maggiore.

2.1 Introduzione

2.1.1 Metrica euclidea in $\mathbb{R}^n$

Definizione: sia d: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$ un'applicazione tale che:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

dove x_j, y_j costituiscono le componenti j-esime dei vettori x, y. Tale applicazione prende il nome di **metrica euclidea**, e la coppia $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno spazio metrico.

Dimostrazione: verifichiamo che l'applicazione d è una metrica.

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = 0 \iff x = y$: segue immediatamente dalla definizione;
- *simmetria*: segue anch'essa dalla definizione;
- *disuguaglianza triangolare*: mostriamo che

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - z_j)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(y_j - z_j)^2}, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

Definiamo $a_j := x_j - y_j$, $b_j := y_j - z_j$. Riscriviamo dunque la (2.1) come:

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(a_j + b_j)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2}$$

Ricordando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n,$$

otteniamo:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}(a_j + b_j)^2 &= \sum_{j=1}^{n} a_j^2 + \sum_{j=1}^{n} b_j^2 + 2\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_j^2 + \sum_{j=1}^{n} b_j^2 + 2\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2} \\ &= \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2}\right)^2,\end{aligned}$$

da cui la tesi, prendendo la radice quadrata di entrambi i termini.

□

2.1.2 Funzioni Lipschitziane, curve e superfici regolari in $\mathbb{R}^n$

Definizione(funzioni Lipschitziane): sia f: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tale che:

$$d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2}$$

per qualche costante $L > 0$. La funzione f è detta **Lipschitziana**, la più piccola costante L_f che soddisfa la (2.2) per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ è detta **costante di Lipschitz** di f:

$$L_f = \sup\left\{\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} : x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y\right\}$$

Osservazione: nella definizione appena data, le due metriche d che compaiono ai due membri della disuguaglianza sono ovviamente funzioni diverse, seppur indicate con lo stesso simbolo; l'una fa riferimento alla metrica euclidea in $\mathbb{R}^m$ e l'altra a quella in $\mathbb{R}^n$. Inoltre, si può verificare, dalla definizione di continuità, che una funzione Lipschitziana è continua.

Definizione: dato $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, una **curva regolare** in $\mathbb{R}^n$ (parametrizzata a partire da I) è un'applicazione:

$$P : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \in I \longrightarrow P(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

soddisfacente le seguenti proprietà:

1. $P(t) \in C^k(I),\ k \geq 1$;
2. $P'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t)) \neq (0, \ldots, 0),\ \forall t \in I$.

Definiamo la **lunghezza di una curva** parametrizzata da P mediante la seguente quantità:

$$L(P) := \int_I ||P'(t)||\, dt, \tag{2.3}$$

dove $||\cdot||$ indica la norma euclidea in $\mathbb{R}^n$.

Definizione: dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, una **superficie regolare** in $\mathbb{R}^3$ (parametrizzata a partire da Ω) è un'applicazione:

$$S : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u,v) \in \Omega \longrightarrow S(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)) \in \mathbb{R}^3$$

soddisfacente le suguenti proprietà:

1. $S(u,v) \in C^k(\Omega),\ k \geq 1$;

2. definiti $S_u(u,v) = ((x_1(u,v))_u, (x_2(u,v))_u, (x_3(u,v))_u)$ e $S_v(u,v) = ((x_1(u,v))_v, (x_2(u,v))_v, (x_3(u,v))_v)$, allora:

$$S_u \times S_v \neq (0{,}0{,}0), \quad \forall\, (u,v) \in \Omega$$

dove $\times$ indica il prodotto vettoriale definito in $\mathbb{R}^3$. Quest'ultima condizione implica che i vettori S_u, S_v sono linearmente indipendenti, dunque è ben definito il piano tangente nel punto $S(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$ per ogni $(u_0, v_0) \in \Omega$.

Definiamo l'**area di una superficie** parametrizzata da S mediante la seguente quantità:

$$A(S) := \iint_\Omega ||S_u(u,v) \times S_v(u,v)||\, dudv \tag{2.4}$$

Esempio 1: sia $I = [0,1]$; consideriamo una curva $g : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ Lipschitziana. Mostriamo che $\mathscr{L}^2(g(I)) = 0$. Per farlo, costruiamo un ricoprimento di rettangoli $R = \{R_j,\ j = 1, \dots\}$ tali che $g(I) \subseteq \bigcup_j R_j$ e $\sum_{j=1}^{n} v(R_j)$ possa essere resa piccola a piacere.
In tal modo, dalla definizione di $\mathscr{L}^2$, segue che $\mathscr{L}^2(g(I)) = 0$. Consideriamo dunque una suddivisione uniforme dell'intervallo I in n sottointervalli $I_j,\ j = 1, \dots, n$, di lunghezza $\frac{1}{n}$. Su ognuno di essi, definiamo un rettangolo R_j tale che $g(I_j) \subseteq R_j$. A tal scopo, si consideri che g è una funzione Lipschitziana, dunque continua, sui compatti I_j: ammette allora massimo e minimo per il Teorema di Weierstrass:

$$m_j = \min(g|_{I_j}) = (x_{m_j}, y_{m_j}), M_j = \max(g|_{I_j}) = (x_{M_j}, y_{M_j}), \tilde{y}_j = \frac{y_{m_j} + y_{M_j}}{2}.$$

Questi sono i punti che realizzano la massima distanza:

$$d_{max,j} = d(g(m_j), g(M_j)) = \max\bigl\{d(g(x), g(y)), \forall x, y \in I_j\bigr\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Sia dunque $R_j := \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right] \times [\tilde{y}_j - d_{max,j}, \tilde{y}_j + d_{max,j}]$: per costruzione $g(I_j) \subseteq R_j$, per ogni $j = 1, \dots, n$. Ricordando la disuguaglianza di Lipschitz e che ogni intervallo I_j ha lunghezza pari a $\frac{1}{n}$, abbiamo che:

$$v(R_j) = \frac{1}{n} \cdot 2d_{max,j} \leq \frac{2}{n} \cdot L_g \cdot d(x_{m_j}, x_{M_j}) \leq \frac{2}{n} \cdot L_g \cdot \frac{1}{n} = \frac{C}{n^2},$$

avendo definito $C = 2L_g$.
Otteniamo dunque: $g(I) \subseteq \bigcup_j R_j$, e:

$$\sum_{j=1}^{n} v(R_j) \leq n \cdot \frac{C}{n^2} \leq \frac{C}{n},$$

da cui: $\mathscr{L}^2(g(I)) \leq \frac{C}{n}$, per definizione della misura di Lebesgue. Per $n \longrightarrow \infty$, abbiamo:

$$\mathscr{L}^2(g(I)) = 0$$

Osservazione: l'ipotesi di g funzione Lipschitziana è fondamentale per garantire la validità dell'esempio precedente. Inoltre, quest'ultimo può essere generalizzato per una qualunque funzione Lipschitziana $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $a, b \in \mathbb{R}$.

In seguito, definiremo formalmente la dimensione di un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$: facciamo per un primo momento riferimento al concetto intuitivo di "dimensione". Possiamo immaginare che quella di una curva regolare (nel senso della sua immagine) sia pari a 1 (ne vorremmo misurare la *lunghezza*), mentre quella di una superficie regolare (nel senso della sua immagine) sia pari a 2 (ne vorremmo misurare l'*area*). L'esempio precedente mette in evidenza il problema "naturale" di misurare sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ aventi dimensione minore di n (come sono ad esempio le curve in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ e le superfici in $\mathbb{R}^3$) usando una misura appropriata alla loro dimensione, ovvero tale che, ad esempio, la misura dell'immagine di una curva sia pari alla sua *lunghezza* (data dalla (3)) e quella dell'immagine di una superficie alla sua *area* (data dalla (4)), anche se immerse in uno spazio ambiente di dimensione (rispettivamente) due e tre. A questo problema risponde il concetto di misura di Hausdorff s-dimensionale in $\mathbb{R}^n$, che consente inoltre lo studio di sottoinsiemi di dimensione non intera.

Partendo dalla costruzione di Carathéodory, presentiamo allora una procedura per la costruzione di misure di Borel su spazi metrici, passando poi alla definizione ed allo studio della misura di Hausdorff in $\mathbb{R}^n$.

2.2 Misura di Hausdorff

Definizione: sia $(X,\, d)$ spazio metrico e $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Definiamo il **diametro** di A come:

$$\mathrm{diam(A)} = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

Se $A = \emptyset$, poniamo $\mathrm{diam}(A) = 0$. Se $\mathrm{diam}(A) < \infty$, A si dice limitato.

Definizione(Costruzione di Carathéodory di una misura di Borel): sia $(X,\, d)$ uno spazio metrico e S una qualunque collezione di sottoinsiemi di X. Sia inoltre $\nu : S \longrightarrow [0, \infty]$ una funzione d'insieme e $\delta \in (0, \infty]$. Definiamo $\mu_\delta : \mathscr{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ tale che $\mu_\delta(\emptyset) = 0$ e:

$$\mu_\delta(A) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k) : A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,\, A_k \in S,\, \mathrm{diam}(A_k) \leq \delta \right\}, \quad \forall A \subseteq X,\, A \neq \emptyset$$

dove l'estremo inferiore è preso tra tutti ricoprimenti numerabili di A costituiti da sottoinsiemi $A_k \in S$ con diametro minore od uguale a δ (si parla di δ-ricoprimenti). Definiamo la funzione d'insieme:

$$\mu : \mathscr{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$$

$$\mu(A) := \lim_{\delta \to 0^+} \mu_\delta(A), \quad \forall A \subseteq X$$

μ è una misura di Borel sullo spazio metrico $(X,\, d)$.

Osservazione: il limite sopra è ben definito. Infatti, se $0 < \delta' < \delta$, allora ogni δ'-ricoprimento di A è anche un δ-ricoprimento di A, ovvero:

$$\mu_\delta(A) \leq \mu_{\delta'}(A)$$

Di conseguenza, la funzione

$$\delta \in (0, \infty] \longrightarrow \mu_\delta(A) \in [0, \infty]$$

è monotona non crescente, dunque ammette limite per $\delta \longrightarrow 0^+$, ovvero:

$$\mu(A) = \lim_{\delta \to 0^+} \mu_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mu_\delta(A)$$

Dimostrazione: la vedremo nel caso particolare della misura di Hausdorff nello spazio metrico $(\mathbb{R}^n,\, d)$.

Definizione(Misura di Hausdorff s-dimensionale in $\mathbb{R}^n$): siano $s \in [0, \infty)$ e $\delta \in (0, \infty]$. Sia inoltre:

$$\Gamma : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$$
$$z \longrightarrow \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

la funzione Gamma di Eulero. Definiamo:

$$\mathscr{H}^s_\delta : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, \infty]$$

$$\mathscr{H}^s_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^\infty \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(A_k)}{2} \right)^s : A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty A_k,\, A_k \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n),\, \operatorname{diam}(A_k) \leq \delta \right\}, \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n,$$

dove:

$$\alpha(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)}$$

è un'opportuna costante di normalizzazione.

La funzione d'insieme

$$\mathscr{H}^s : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, \infty]$$
$$A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathscr{H}^s(A) := \lim_{\delta \to 0^+} \mathscr{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathscr{H}^s_\delta(A)$$

è una misura di Borel sullo spazio metrico $(\mathbb{R}^n,\, d)$ ed è detta **misura di Hausdorff s-dimensionale in $\mathbb{R}^n$**.

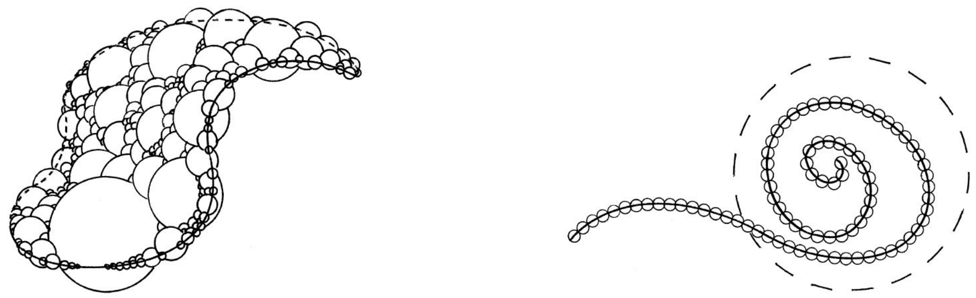
Osservazione: per ottenere $\mathscr{H}^s$, basta porre $X = \mathbb{R}^n$, $S = \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$, $\mu_\delta = \mathscr{H}^s_\delta$, $\mu = \mathscr{H}^s$ e ν tale che:

$$\nu(A_k) = \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(A_k)}{2} \right)^s, \quad \forall A_k \in S = \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$$

nella costruzione generale di Carathéodory di una misura di Borel su spazi metrici.

Teorema: $\mathscr{H}^s$ è una misura di Borel su $(\mathbb{R}^n,\, d)$, per ogni $s \in [0, \infty)$.

Dimostrazione ([EG15, Teorema 2.1, p. 82]:



(a) δ-ricoprimento di una superficie immersa in $\mathbb{R}^3$

(b) Due diversi ricoprimenti di una curva: una stima migliore della sua lunghezza è data dalla somma dei diametri delle "pallette", mentre risulta più grossolana quella fornita dalla palla con diametro maggiore

Figura 2.1: Esempi di δ-ricoprimenti ([Mor08, p. 11])

- $\mathscr{H}^s_\delta$ *è una misura, per ogni* $\delta \in (0, \infty]$.
  Infatti: $\mathscr{H}^s_\delta : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, \infty]$ funzione d'insieme tale che:

  1. $\mathscr{H}^s_\delta(\emptyset) = 0$, per definizione di diametro;
  2. soddisfa la condizione di *subadditività*: consideriamo $\{A_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}^n$, con $A_k \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty B_k^j$, diam$(B_k^j) \leq \delta$, per ogni k, $j \geq 1$. Dunque, $\{B_k^j\}_{j,k=1}^\infty$ costituisce un ricoprimento di $\bigcup_{k=1}^\infty A_k$, da cui, per definizione di $\mathscr{H}^s_\delta$:

  $$\mathscr{H}^s_\delta\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \alpha(s)\left(\frac{\mathrm{diam}(B_k^j)}{2}\right)^s$$

  Infine, prendendo l'estremo inferiore della sommatoria indicizzata da j:

  $$\mathscr{H}^s_\delta\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty \mathscr{H}^s_\delta(A_k).$$

- $\mathscr{H}^s$ *è una misura.*
  Infatti $\mathscr{H}^s : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, \infty]$ funzione d'insieme tale che:

  1. $\mathscr{H}^s(\emptyset) = 0$ per definizione di diametro;
  2. soddisfa la condizione di *subadditività*. Consideriamo $\{A_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}^n$:

  $$\mathscr{H}^s_\delta\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty \mathscr{H}^s_\delta(A_k) \leq \sum_{k=1}^\infty \mathscr{H}^s(A_k),$$

  dove l'ultima disuguaglianza deriva dalla definizione stessa di $\mathscr{H}^s_\delta$. Per $\delta \longrightarrow 0$, si ha la tesi.

- $\mathscr{H}^s$ *è una misura di Borel.*
  Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che dist$(A, B) > 0$. Sia $0 < \delta <$ dist(A, B) e supponiamo $A \cup B \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty E_k$, con diam$(E_k) \leq \delta$. Definiamo: $L := \{E_k : E_k \cap A \neq \emptyset\}$, $M := \{E_k :$

$E_k \cap B \neq \emptyset\}$, da cui: $A \subseteq \bigcup_{k\colon E_k \in L} E_k$, $B \subseteq \bigcup_{k\colon E_k \in M} E_k$, con $E_i \cap E_j = \emptyset$, se $E_i \in L$, $E_j \in M$. Infatti, se fosse $L \cap M \neq \emptyset$, esisterebbe $\tilde{k}$ tale che $E_{\tilde{k}} \cap A \neq \emptyset$, $E_{\tilde{k}} \cap B \neq \emptyset$ e:

$$\mathrm{dist}(A,B) \leq \mathrm{diam}(E_{\tilde{k}}) \leq \delta,$$

il che è assurdo per l'ipotesi $0 < \delta < \mathrm{dist}(A,B)$. Dunque:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\mathrm{diam}(E_k)}{2}\right)^s &\geq \sum_{k\colon E_k \in L} \alpha(s) \left(\frac{\mathrm{diam}(E_k)}{2}\right)^s + \sum_{k\colon E_k \in M} \alpha(s) \left(\frac{\mathrm{diam}(E_k)}{2}\right)^s \\ &\geq \mathscr{H}^s_\delta(A) + \mathscr{H}^s_\delta(B)\end{aligned}$$

Prendendo l'estremo inferiore tra tutti i ricoprimenti $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$, dalla disuguaglianza precedente otteniamo $\mathscr{H}^s_\delta(A \cup B) \geq \mathscr{H}^s_\delta(A) + \mathscr{H}^s_\delta(B)$, con $0 < \delta < \mathrm{dist}(A,B)$. Per $\delta \longrightarrow 0$, abbiamo: $\mathscr{H}^s(A \cup B) \geq \mathscr{H}^s(A) + \mathscr{H}^s(B)$; poichè la disuguglianza opposta discende dalla subadditività della misura di Hausdorff, si ha:

$$\mathscr{H}^s(A \cup B) = \mathscr{H}^s(A) + \mathscr{H}^s(B), \quad \forall A, B \subseteq \mathbb{R}^n,\ \mathrm{dist}(A,B) > 0$$

Dal Criterio di Carathéodory, si ottiene la tesi.

□

Osservazione: dalla Figura 2.1 (si veda pagina precedente), possiamo ripercorrere "intuitivamente" la costruzione della misura di Hausdorff mediante i δ-ricoprimenti: ad esempio, supponendo di voler trovare la lunghezza di una curva regolare P in $\mathbb{R}^3$ possiamo ricoprirla con delle pallette $B(x_k, r_k)$, $r_k \leq \delta$, $k = 1, \ldots, n$, tali che $Im(P) \subseteq \bigcup_{k=1}^n B(x_k, r_k)$, e pensare che la lunghezza della curva sia circa:

$$L(P) \sim \sum_{k=1}^{n} 2r_k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{diam}(B(x_k, r_k)); \tag{2.5}$$

analogamente, si può ricoprire una superficie regolare S in $\mathbb{R}^3$ con delle pallette $B(x_k, r_k)$, $r_k \leq \delta$, $k = 1, \ldots, n$, e "raffinare" tale ricoprimento in modo che valga:

$$A(S) \sim \sum_{k=1}^{n} \pi r_k^2 \sim \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{diam}(B(x_k, r_k)))^2; \tag{2.6}$$

Si noti che nella (2.5) l'esponente a cui è elevata la quantità $\mathrm{diam}(B(x_k, r_k))$ è pari a 1, mentre nella (2.6) è pari a 2, da cui, ricordando la definizione di misura di Hausdorff, $s = 1$ e $s = 2$, rispettivamente. Quest'aspetto sarà poi approfondito quando verrà introdotta la dimensione di Hausdorff.

Esempio 2: sia $c \in \mathbb{R}^n$. Calcoliamo $\mathscr{H}^0(c)$. Sia $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ un δ-ricoprimento di c, $\delta > 0$. Allora:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(0) \left(\frac{\mathrm{diam}(B_k)}{2}\right)^0 = card(\mathcal{B}) \geq 1,$$

dove $card(\mathcal{B})$ indica la cardinalità dell'insieme $\mathcal{B}$. Da ciò, segue che: $\mathscr{H}^0_\delta(c) \geq 1$. D'altra parte $\mathcal{C} = \{c\}$ è esso stesso un ricoprimento di c, da cui:

$$\mathscr{H}^0_\delta(c) \leq card(\mathcal{C}) = 1$$

Dalla doppia disuguaglianza, $\mathscr{H}_\delta^0(c) = 1$, per ogni $\delta > 0$. Perciò:

$$\mathscr{H}^0(c) = 1.$$

Esempio 3: sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ numerabile, ovvero: $C = \cup_{k=1}^{\infty} c_k$, $c_k \in \mathbb{R}^n$. Calcoliamo $\mathscr{H}^0(C)$. Ricordando l'esempio precedente, il fatto che i c_k siano a due a due disgiunti e le proprietà generali di una misura, otteniamo:

$$\mathscr{H}^0(C) = \mathscr{H}^0(\cup_{k=1}^{\infty} c_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{H}^0(c_k) = card(C)$$

$\mathscr{H}^0$ viene dunque identificata con la "misura che conta".

2.2.1 Proprietà della misura di Hausdorff

Questa sezione è tratta da [EG15, Teorema 2.2, Lemma 2.2, Teorema 2.8], [Fal04, Scaling property 2.1, p. 29].

1. Sia T una similitudine con fattore di scala $\lambda > 0$, ovvero una trasformazione geometrica tale che:

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$d(T(a), T(b)) = \lambda \cdot d(a, b), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n$$

Allora vale:

$$\mathscr{H}^s(T(A)) = \lambda^s \mathscr{H}^s(A), \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n$$

Dimostrazione: sia $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k\geq 1}$ un δ-ricoprimento di A. Allora esso è un $\lambda\delta$-ricoprimento di $T(A)$, e vale:

$$\sum_{k\geq 1} \alpha(s) \left(\frac{\mathrm{diam}(T(B_k))}{2}\right)^s = \lambda^s \sum_{k\geq 1} \alpha(s) \left(\frac{\mathrm{diam}(B_k)}{2}\right)^s$$

Prendendo l'estremo inferiore tra tutti i possibili δ-ricoprimenti di A otteniamo:

$$\mathscr{H}_{\lambda\delta}^s(T(A)) \leq \lambda^s \mathscr{H}_\delta^s(A)$$

La disuguaglianza opposta si ottiene seguendo lo stesso ragionamento, considerando che T^{-1} è una similitudine con fattore di scala $\frac{1}{\lambda}$.

□

2. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathscr{H}_\delta^s(\mathrm{A}) = 0$ per qualche $\delta \in (0, \infty)$. Allora:

$$\mathscr{H}^s(A) = 0$$

Dimostrazione:

- $s = 0$: ovvio ($\mathscr{H}^0$ è la misura che conta);
- $s > 0$: sia $\epsilon > 0$; consideriamo un ricoprimento dato da $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ tale che:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\mathrm{diam}(B_k)}{2}\right)^s \leq \epsilon,$$

da cui, per ogni $k \geq 1$:

$$\operatorname{diam}(B_k) \leq 2\left(\frac{\epsilon}{\alpha(s)}\right)^{\frac{1}{s}} =: \delta(\epsilon)$$

Allora:

$$\mathscr{H}^s_{\delta(\epsilon)}(A) \leq \epsilon$$

Poichà $\delta(\epsilon) \longrightarrow 0$ per $\epsilon \longrightarrow 0$, abbiamo $\mathscr{H}^s(A) = 0$.

$\square$

3. $\mathscr{H}^s \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n$, per ogni $s > n$. Ovvero:

$$\mathscr{H}^s(A) = 0, \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n,\ s > n$$

Dimostrazione: sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$; consideriamo un ricoprimento di A costituito da rettangoli unitari, ovvero:

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k, \quad R_k = [0,1] \times \cdots \times [0,1],\ k \geq 1$$

Fissiamo $m \geq 1$ intero. Per ogni $k \geq 1$, consideriamo una decomposizione del rettangolo R_k in m^n rettangoli di lato $\frac{1}{m}$ e diametro $\frac{\sqrt{n}}{m}$. Dunque, per la subadditività della misura $\mathscr{H}^s_{\frac{\sqrt{n}}{m}}$:

$$\mathscr{H}^s_{\frac{\sqrt{n}}{m}}(R_k) \leq \sum_{k=1}^{m^n} \alpha(s)\left(\frac{\sqrt{n}}{m}\right)^s = \alpha(s) n^{\frac{s}{2}} m^{n-s}$$

Poichè $s > n$, per $m \longrightarrow +\infty$, il termine a destra della disuguaglianza tende a zero. Per definizione di $\mathscr{H}^s_\delta$, con $\delta = \frac{\sqrt{n}}{m}$, otteniamo:

$$\mathscr{H}^s_{\frac{\sqrt{n}}{m}}(A) = 0$$

Per la proprietà 2:

$$\mathscr{H}^s(A) = 0, \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n$$

$\square$

4. Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < r < +\infty$:
   - se $\mathscr{H}^s(A) < +\infty$, allora $\mathscr{H}^r(A) = 0$;
   - se $\mathscr{H}^r(A) > 0$, allora $\mathscr{H}^s(A) = +\infty$.

Dimostrazione: basta dimostrare la prima proprietà; infatti, la seconda discende direttamente da essa. Sia allora $\mathscr{H}^s(A) < +\infty$ e $\delta > 0$. Fissata una costante $C > 0$, esiste un δ-ricoprimento $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ di A tale che:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{\operatorname{diam}(B_k)}{2}\right)^s \leq \mathscr{H}^s_\delta(A) + C \leq \mathscr{H}^s(A) + C$$

Dunque:

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}^r_\delta(A) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(r)\left(\frac{\operatorname{diam}(B_k)}{2}\right)^r = \frac{\alpha(r)}{\alpha(s)} 2^{s-r} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{\operatorname{diam}(B_k)}{2}\right)^s (\operatorname{diam}(B_k))^{r-s} \\
&\leq \frac{\alpha(r)}{\alpha(s)} 2^{s-r} \delta^{s-r} (\mathscr{H}^s(A) + C),
\end{aligned}$$

da cui, per $\delta \longrightarrow 0$, abbiamo la tesi: $\mathscr{H}^r(A) = 0$.

$\square$

5. **Misura di Hausdorff e funzioni Lipschitziane**

   - **Proposizione**: sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione Lipschitziana, $0 \leq s < \infty$. Allora:
   $$\mathscr{H}^s(f(A)) \leq L_f^s \mathscr{H}^s(A) \tag{2.7}$$
   Dimostrazione: fissato $\delta > 0$, sia $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ un ricoprimento di A tale che $\operatorname{diam}(B_k) \leq \delta$. Poichè f Lipschitziana, vale:
   $$\operatorname{diam}(f(B_k)) \leq L_f \operatorname{diam}(B_k) \leq L_f \delta,$$
   con $f(A) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} f(B_k)$, ottenendo dunque un ricoprimento di $f(A)$. Allora:
   $$\mathscr{H}^s_{L_f\delta}(f(A)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(f(B_k))}{2}\right)^s \leq L_f^s \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(B_k)}{2}\right)^s$$
   Considerando l'estremo inferiore tra tutti i possibii valori derivanti dai diversi ricoprimenti $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$, si ottiene:
   $$\mathscr{H}^s_{L_f\delta}(f(A)) \leq L_f \mathscr{H}^s_\delta(A)$$
   Per $\delta \longrightarrow 0$, abbiamo la tesi.

   □

   - **Corollario:** sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione Lipschitziana, $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < \infty$. Se $\mathscr{H}^s(A) = 0$, allora:
   $$\mathscr{H}^s(f(A)) = 0$$
   Dimostrazione: segue immediatamente dalla (2.7).

   □

Osservazione: consideriamo nuovamente l'Esempio 1. Nel caso della funzione Lipschitziana $g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ in esso definita, abbiamo, per la proprietà 3, $\mathscr{H}^2(I) = 0$. Per il corollario precedente:
$$\mathscr{H}^2(g(I)) = 0 = \mathscr{L}^2(g(I))$$
Tale uguaglianza costituisce un caso particolare di un risultato più generale che dimostreremo in seguito: $\mathscr{H}^n \equiv \mathscr{L}^n$ in $\mathbb{R}^n$.

2.2.2 La dimensione di Hausdorff

Definizione: sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. La sua **dimensione di Hausdorff** è:
$$\dim_{\mathrm{H}}(A) := \inf\{0 \leq s < \infty : \mathscr{H}^s(A) = 0\} = \sup\{0 \leq s < \infty : \mathscr{H}^s(A) = +\infty\}$$

Osservazione: dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$, per la proprietà 3: $\mathscr{H}^s(A) = 0$, per ogni $s > n$. Pertanto:
$$\dim_{\mathrm{H}}(A) \leq n, \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n$$

Osservazione: sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dalla proprietà (4) dimostrata in precedenza, segue:
$$0 < \mathscr{H}^s(A) < +\infty \implies \dim_{\mathrm{H}}(A) = s$$

Proposizione: sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $\dim_{\mathrm{H}}(A) > 0$. Allora:
$$\mathscr{H}^t(A) = \begin{cases} +\infty, & 0 \leq t < \dim_{\mathrm{H}}(A); \\ 0, & t > \dim_{\mathrm{H}}(A) \end{cases}$$

Dimostrazione:

- sia $0 \leq t < \dim_{\mathrm{H}}(A)$; per assurdo, supponiamo $\mathscr{H}^t(A) < \infty$: per la proprietà 4, abbiamo $\mathscr{H}^s(A) = 0$, per ogni $s > t$. Dalla definizione di dimensione di Hausdorff, si ha: $\dim_{\mathrm{H}}(\mathrm{A}) \leq t$, che è contro l'ipotesi assunta.

- sia $t > \dim_{\mathrm{H}}(A)$; esiste $s < t$ tale che $\mathscr{H}^s(A) = 0$. Dunque, per la proprietà 4:

$$\mathscr{H}^t(A) = 0$$

□

Proposizione(dimensione di Hausdorff e funzioni Lipschitziane): sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitziana. Allora:

$$\dim_{\mathrm{H}}(f(A)) \leq \dim_{\mathrm{H}}(A), \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n$$

Dimostrazione: sappiamo che vale la (2.7). Deduciamo: $\mathscr{H}^s(f(A)) = 0$, per ogni $s > \dim_{\mathrm{H}}(A)$. Dalla definizione di dimensione di Hausdorff, otteniamo:

$$\dim_{\mathrm{H}}(f(A)) \leq s, \quad \forall s > \dim_{\mathrm{H}}(A)$$

Per $s \longrightarrow \dim_{\mathrm{H}}(A)$, si ha la tesi.

□

Esempio 4: sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme numerabile, ovvero tale che: $C = \cup_{k=1}^{\infty} c_k$, $c_k \in \mathbb{R}^n$. Calcoliamo $\dim_{\mathrm{H}}(C)$. Dall'esempio 3, sappiamo che: $\mathscr{H}^0(C) = card(C) < +\infty$. Dall'esempio 2, sappiamo inoltre che: $\mathscr{H}^0(c_k) = 1$. Di conseguenza, per ogni $t > 0$, dalla proprietà 4:

$$\mathscr{H}^t(c_k) = 0, \quad \forall k \geq 1$$

Per ogni $t > 0$:

$$\mathscr{H}^t(C) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{H}^t(c_k) = 0,$$

da cui, per definizione di dimensione di Hausdorff, abbiamo:

$$\dim_{\mathrm{H}}(C) = 0$$

2.3 $\mathscr{H}^n \equiv \mathscr{L}^n$ in $\mathbb{R}^n$

Introduciamo, senza dimostrare, dei risultati preliminari riguardanti $\mathscr{H}^n$ e $\mathscr{L}^n$. Lo spazio ambiente considerato in questo paragrafo sarà sempre $(\mathbb{R}^n, d)$.

Lemma (*): sia $O \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\delta > 0$. Allora esiste una collezione numerabile $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i \geq 1}$ di palle chiuse a due a due disgiunte contenute in O tale che:

$$\mathrm{diam}(G_i) < \delta, \quad \forall i \geq 1,$$

$$\mathscr{L}^n\left(O \setminus \bigcup_{i \geq 1} G_i\right) = 0$$

□

Lemma (**): sia $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < r\} \subset \mathbb{R}^n$. Allora:

$$\mathscr{L}^n(B(x,r)) = \alpha(n) r^n = \alpha(n)\left(\frac{\mathrm{diam}(B(x,r))}{2}\right)^n$$

□

Definizione: siano μ, ν due misure su $\mathbb{R}^n$. La misura ν si dice **assolutamente continua** rispetto a μ se vale:

$$\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$$

Proposizione: $\mathscr{H}^n$ è assolutamente continua rispetto a $\mathscr{L}^n$.

□

Teorema(Disuguaglianza isodiametrica): sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora:

$$\mathscr{L}^n(A) \leq \alpha(n) \left(\frac{\operatorname{diam}(A)}{2} \right)^n$$

□

Teorema ($\mathscr{H}^n \equiv \mathscr{L}^n$):

$$\mathscr{H}^n(A) = \mathscr{L}^n(A), \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n$$

Dimostrazione ([EG15, Teorema 2.5, p. 91]): procediamo mostrando che vale la doppia disuguaglianza.

- $\mathscr{H}^n(A) \geq \mathscr{L}^n(A)$, $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$: fissato $\delta > 0$, sia $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ un δ-ricoprimento di A. Dalla subadditività di $\mathscr{L}^n$ e dalla disuguaglianza isodiametrica:

$$\mathscr{L}^n(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(n) \left(\frac{\operatorname{diam}(B_k)}{2} \right)^n$$

  Considerando l'estremo inferiore del termine a destra della disuguaglianza, al variare dei δ-ricoprimenti, otteniamo: $\mathscr{L}^n(A) \leq \mathscr{H}^n_\delta(A)$, da cui per $\delta \longrightarrow 0$:

$$\mathscr{H}^n(A) \geq \mathscr{L}^n(A)$$

- $\mathscr{H}^n(A) \leq \mathscr{L}^n(A)$, $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$: fissiamo $\epsilon > 0$. Ricordiamo la definizione della misura di Lebesgue:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^n(A) &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} v(A_k) : A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,\ A_k \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n) \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(A_k) : A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,\ A_k \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n) \right\} \end{aligned}$$

  Consideriamo $\delta > 0$ ed un ricoprimento di rettangoli $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$; ogni rettangolo A_k può essere suddiviso in rettangoli più piccoli di diametro minore od uguale a δ tali che $\mathscr{L}^n(A)$ rimanga invariata:

$$\mathscr{L}^n(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(A_k) : A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,\ A_k \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n),\ \operatorname{diam}(A_k) \leq \delta \right\}$$

  ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(A_k) \leq \mathscr{L}^n(A) + \epsilon \tag{2.8}$$

  con la (2.8) che deriva dalla definizione di $\mathscr{L}^n$. Dal lemma (*), per ogni $k \geq 1$, esiste una collezione di palle chiuse a due a due disgiunte $\{C_k^i\}_{i=1}^{\infty}$ contenute in $\mathring{A}_k$ tali che:

$$\operatorname{diam}(C_k^i) \leq \delta,$$

$$\mathscr{L}^n\left(A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_k^i\right) = \mathscr{L}^n\left(\mathring{A}_k \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_k^i\right) = 0$$

Poichè $\mathscr{H}^n$ è assolutamente continua rispetto a $\mathscr{L}^n$:

$$\mathscr{H}^n\left(A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_k^i\right) = 0$$

Allora:

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}_\delta^n(A) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{H}_\delta^n(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{H}_\delta^n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_k^i\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{H}_\delta^n(C_k^i) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(n)\left(\frac{\operatorname{diam}(C_k^i)}{2}\right)^n = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(C_k^i) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_k^i\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(A_k) \leq \mathscr{L}^n(A) + \epsilon
\end{aligned}$$

Per $\delta \longrightarrow 0$, $\epsilon \longrightarrow 0$, si ha la tesi.

□

Corollario: sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $\mathscr{L}^n(A) > 0$, allora:

$$\dim_{\mathrm{H}}(A) = n$$

Dimostrazione: poichè $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\dim(A) \leq n$. D'altra parte, per il teorema precedente:

$$\mathscr{H}^n(A) = \mathscr{L}^n(A) > 0$$

Allora, se $s \geq 0$ tale che $\mathscr{H}^s(A) = 0$, deve essere $s > n$: dunque $\dim_{\mathrm{H}}(A) = \inf\{0 \leq s < \infty : \mathscr{H}^s(A) = 0\} \geq n$. Dalla doppia disuguaglianza, segue la tesi.

□

Osservazione: abbiamo visto in precedenza che vale l'implicazione:

$$0 < \mathscr{H}^s(A) < +\infty \implies \dim_{\mathrm{H}}(A) = s, \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n$$

Sfruttando il teorema appena dimostrato, mostriamo che non vale l'implicazione opposta: infatti, basta osservare che $\dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{R}^n) = n$ (segue dalla definizione di dimensione di Hausdorff), ma:

$$\mathscr{H}^n(\mathbb{R}^n) = \mathscr{L}^n(\mathbb{R}^n) = +\infty$$

2.4 Applicazioni

2.4.1 Rettangolo unitario in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$

Sia $R_1 = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Calcoliamone misura e dimensione di Hausdorff.
Poichè $\mathscr{L}^1(R_1) = v(R_1) = 1$, otteniamo subito:

$$\mathscr{H}^1(R_1) = \mathscr{L}^1(R_1) = 1, \quad \dim_{\mathrm{H}}(R_1) = 1$$

applicando il teorema $\mathscr{H}^1 \equiv \mathscr{L}^1$ in $\mathbb{R}$ ed il relativo corollario. Poichè la misura di Lebesgue di R_1 è pari alla sua lunghezza, possiamo affermare che ad un insieme con dimensione di

Hausdorff pari a 1 è associata una misura finita e non nulla $\mathscr{H}^s$ "di tipo lunghezza", ovvero con $s = 1$.
Sia $R_2 = [0{,}1] \times [0{,}1] \subset \mathbb{R}^2$. Calcoliamone misura e dimensione di Hausdorff.
Poichè $\mathscr{L}^2(R_2) = v(R_2) = 1$, abbiamo:

$$\mathscr{H}^2(R_2) = \mathscr{L}^2(R_2) = 1, \quad \dim_{\mathrm{H}}(R_2) = 2$$

applicando il teorema $\mathscr{H}^2 \equiv \mathscr{L}^2$ in $\mathbb{R}^2$ ed il relativo corollario. Poichè la misura di Lebesgue di R_2 è pari alla sua area, possiamo affermare che ad un insieme con dimensione di Hausdorff pari a 2 è associata una misura finita e non nulla $\mathscr{H}^s$ "di tipo area", ovvero con $s = 2$. Analogamente, ad un insieme con dimensione di Hausdorff pari a 3 associamo una misura finita e non nulla $\mathscr{H}^s$ "di tipo volume", ovvero con $s = 3$.

Calcoliamo ora $\dim_{\mathrm{H}}(R_2)$ con un altro metodo, ovvero mediante stime di $\mathscr{H}^2(R_2)$. Sia $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ un δ-ricoprimento di R_2; in particolare, ogni B_k è contenuto in un'opportuna palla E_k di raggio $r_k = \mathrm{diam}(B_k)$. Abbiamo:

$$1 = \mathscr{L}^2(R_2) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^2(B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^2(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(2)(\mathrm{diam}(B_k))^2,$$

da cui: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(2) \left(\frac{\mathrm{diam}(B_k)}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4}$, per ogni δ-ricoprimento di R_2, ovvero: $\mathscr{H}^2_\delta(R_2) \geq \frac{1}{4}$.
Dunque: $\mathscr{H}^2(R_2) \geq \mathscr{H}^2_\delta(R_2) \geq \frac{1}{4}$. D'altra parte, sia $\delta > 0$, $n > \frac{\sqrt{2}}{\delta}$ e consideriamo un δ-ricoprimento $\{D_k\}_{k=1}^{n^2}$ costituito da rettangoli di lato $\frac{1}{n}$ e diametro $\frac{\sqrt{2}}{n}$, ovvero tali che:

$$D_k = \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right] \times \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, n^2.$$

Dunque:

$$\mathscr{H}^2_\delta(R_2) \leq \sum_{k=1}^{n^2} \alpha(2) \left(\frac{\mathrm{diam}(D_k)}{2}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{\alpha(2)}{4} \cdot \frac{2}{n^2} = \frac{\alpha(2)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Per $\delta \longrightarrow 0$, grazie all'arbitrarietà di δ, abbiamo: $\mathscr{H}^2(R_2) \leq \frac{\pi}{2}$. In definitiva:

$$\frac{1}{4} \leq \mathscr{H}^2(R_2) \leq \frac{\pi}{2},$$

e concludiamo che: $\dim_{\mathrm{H}}(R_2) = 2$. Inoltre, poichè $\mathscr{H}^2(R_2) < +\infty$, sappiamo che:

$$\mathscr{H}^s(R_2) = +\infty, \quad \forall s \in [0{,}2)$$

$$\mathscr{H}^s(R_2) = 0, \quad \forall s \in (2, \infty)$$

In particolare: $\mathscr{H}^1(R_2) = +\infty$, $\mathscr{H}^3(R_2) = 0$; ovvero, proseguendo nell'interpretazione esplicitata sopra, ad R_2 associamo una misura "di tipo lunghezza" pari ad infinito ed una misura "di tipo volume" pari a zero. In altre parole, R_2 ha "lunghezza infinita" e "volume nullo", come ci aspettiamo intuitivamente da un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ con area finita non nulla.

2.4.2 L'insieme di Cantor

Consideriamo l'intervallo $S_0 := [0{,}1] \subset \mathbb{R}$: costruiamo ricorsivamente l'insieme di Cantor (si veda la Figura 2.2, pagina successiva).

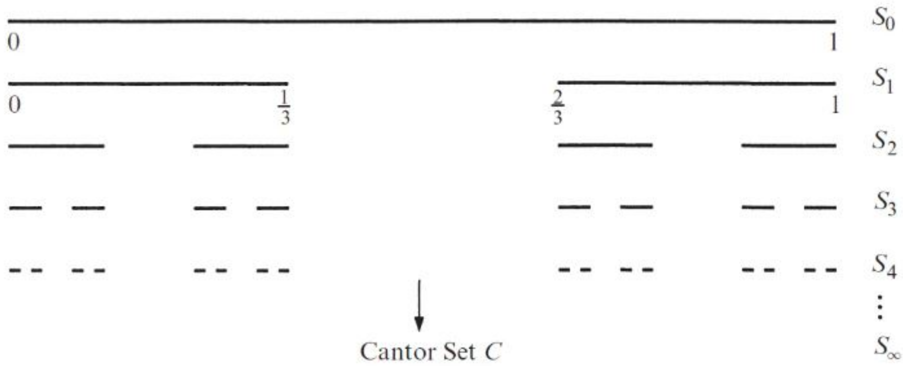


Figura 2.2: Costruzione dell'insieme di Cantor ([Str14])

- Passo 1: rimuoviamo l'intervallo aperto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, ottenendo $S_1 = S_{1,1} \cup S_{1,2} = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $S_{1,1} = [0, \frac{1}{3}]$, $\;S_{1,2} = [\frac{2}{3}, 1]$.

- Passo 2: consideriamo $S_{1,j},\ j = 1{,}2$, e ripetiamo il passo 1 per ognuno di essi. Otteniamo:

$$S_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right],$$

$$S_{2,1} = \left[0, \frac{1}{9}\right], S_{2,2} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], S_{2,3} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right], S_{2,4} = \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

- Passo k: applicando ricorsivamente il procedimento descritto, si ottiene l'insieme S_k costituito dall'unione di 2^k intervalli chiusi, ovvero rettangoli, di lunghezza $\left(\frac{1}{3}\right)^k$:

$$S_k = S_{k,1} \cup \cdots \cup S_{k,2^k}, \quad S_{k,j} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}), \quad j = 1, \ldots, 2^k$$

  tali che:

$$\mathscr{L}^1(S_{k,j}) = v(S_{k,j}) = \left(\frac{1}{3}\right)^k, \quad j = 1, \ldots, 2^k$$

Definiamo **l'insieme di Cantor** come l'intersezione di tutti gli S_k, $k \in \mathbb{N}$:

$$S := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_k$$

Osserviamo anzitutto che l'insieme di Cantor è non vuoto: $0, 1 \in S$, ed in generale tutti gli estremi degli intervalli $S_{k,j}$ che costituiscono S_k al passo k-esimo appartengono anch'essi a S: quest'ultimo contiene allora (almeno) l'insieme numerabile di tutti tali estremi. In realtà, si può dimostrare che l'insieme di Cantor ha la potenza del continuo, ovvero ha la stessa cardinalità di $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

Calcoliamo $\mathscr{L}^1(S)$. Rircordando la costruzione descritta sopra, possiamo scrivere:

$$\mathscr{L}^1(S) = \lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{2^k} \mathscr{L}^1(S_{k,j}) = \lim_{k \to \infty} 2^k \left(\frac{1}{3}\right)^k = 0$$

Da ciò deduciamo: $\mathscr{H}^1(S) = 0$, da cui: $\dim_{\mathrm{H}}(S) \leq 1$.

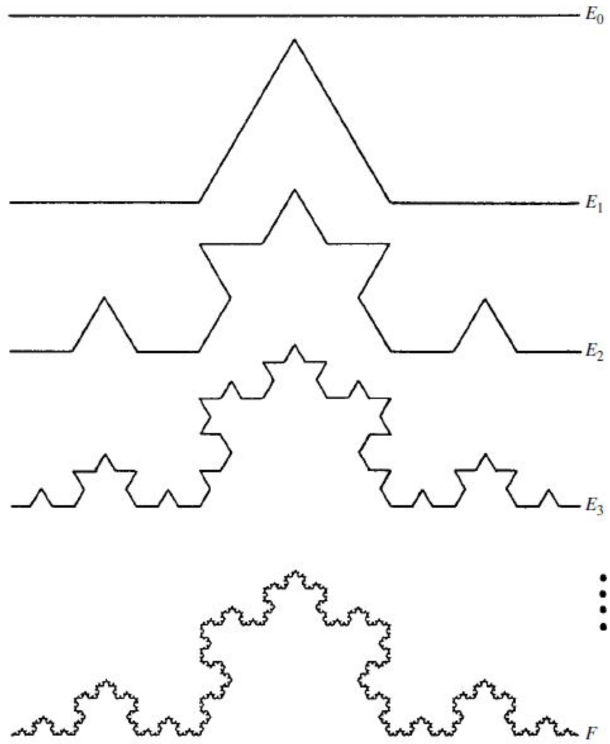


Figura 2.3: Costruzione della curva di Koch ([Fal04, Introduction, p. xix])

Calcoliamo $\mathscr{H}^s_{\delta_k}(S)$, con $\delta_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k$, $k \geq 1$. A tale scopo, consideriamo il δ_k-ricoprimento costituito dai rettangoli $S_{k,j}$ introdotti in precedenza. Questo è un δ_k-ricoprimento di S_k, dunque lo è anche di S in quanto $S \subseteq S_k$. Abbiamo allora:

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^s_{\delta_k}(S) &\leq \sum_{j=1}^{2^k} \frac{\alpha(s)}{2^s} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^k\right)^s = \frac{\alpha(s)}{2^s} \left(\frac{2}{3^s}\right)^k = \alpha(s) 2^{-s} e^{log(2^k 3^{-sk})} \\ &= \alpha(s) 2^{-s} e^{k(log(2) - slog(3))},\end{aligned}$$

dove $\log(a)$, $a > 0$, indica il logaritmo naturale (ovvero in base e = numero di Nepero) del numero reale a. Abbiamo quindi ottenuto una stima superiore per il valore di $\mathscr{H}^s_{\delta_k}(S)$, con $s \in [0, +\infty)$. Per $k \longrightarrow 0$, si ha $\delta_k \longrightarrow 0$, ovvero, dalla definizione di misura di Hausdorff:

$$\mathscr{H}^s(S) = \lim_{k \to \infty} \mathscr{H}^s_{\delta_k}(S) \leq \lim_{k \to \infty} \alpha(s) 2^{-s} e^{k(log(2) - slog(3))} \tag{2.9}$$

Dalla (2.9) possiamo trovare i valori di s tali che $\mathscr{H}^s(S) = 0$, e dunque una stima dall'alto per $\dim_{\mathrm{H}}(S)$. Infatti, definiamo $\tilde{s} := \frac{log(2)}{log(3)}$; dalla (2.9), deduciamo che:

- se $s > \tilde{s}$: $\lim_{k \to \infty} \alpha(s) 2^{-s} e^{k(log(2) - slog(3))} = 0$, da cui: $\mathscr{H}^s(S) = 0$;
- se $s = \tilde{s}$: $\mathscr{H}^{\tilde{s}}(S) \leq \alpha(\tilde{s}) 2^{-\tilde{s}}$;
- se $s < \tilde{s}$, otteniamo una stima banale: $\mathscr{H}^s(S) \leq +\infty$, per $k \longrightarrow +\infty$.

Dal ragionamento effettuato, abbiamo:

$$\dim_{\mathrm{H}}(S) \leq \tilde{s}, \quad \mathscr{H}^{\tilde{s}}(S) \leq \alpha(\tilde{s}) 2^{-\tilde{s}}$$

Si può mostrare che vale anche la disuguaglianza opposta [Fal86, Teorema 1.14, p. 14], ovvero che: $\mathscr{H}^{\tilde{s}}(S) \geq \alpha(\tilde{s})2^{-\tilde{s}}$. Dunque:

$$\mathscr{H}^{\tilde{s}}(S) = \alpha(\tilde{s})2^{-\tilde{s}},$$

ovvero: $\dim_{\mathrm{H}}(S) = \tilde{s} = \frac{log(2)}{log(3)}$.

2.4.3 La curva di Koch

Consideriamo l'intervallo $E_0 := [0,1]$: a partire da esso, costruiamo ricorsivamente la curva di Koch (si veda la Figura 2.3, pagina precedente).

- Passo 1: rimuoviamo l'intervallo aperto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, ed inseriamo due segmenti che costituiscono i lati di un triangolo equilatero con base il segmento rimosso. Otteniamo in questo modo E_1, costituito da 4 segmenti di lunghezza pari a $\frac{1}{3}$:

$$E_1 = E_{1,1} \cup E_{1,2} \cup E_{1,3} \cup E_{1,4}$$

  Notiamo che la lunghezza di E_1 è pari a $\frac{4}{3}$.

- Passo 2: consideriamo $E_{1,j}$, $j = 1, \ldots, 4$, e ripetiamo il procedimento descritto al passo precedente. Otteniamo la poligonale E_2, costituita da $4 \cdot 4$ segmenti di lunghezza pari a $\frac{1}{9}$. Notiamo che la lunghezza di E_2 è pari a $\frac{16}{9}$.

- Passo k: si ottiene E_k rimuovendo la parte centrale (di lunghezza pari a un terzo rispetto al totale) di ogni segmento costituente E_{k-1} e rimpiazzandola con due lati di un triangolo equilatero: E_k è una poligonale costituita da 4^k segmenti di lunghezza $\left(\frac{1}{3}\right)^k$. Notiamo che la lunghezza di E_k è pari a $\left(\frac{4}{3}\right)^k$.

Si può dimostrare che le poligonali E_k costituiscono delle curve continue nel piano, ovvero possono essere parametrizzate mediante funzioni continue $\gamma_k : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Queste convergono uniformemente ad una curva limite continua F, detta **curva di Koch**. Dalle osservazioni fatte in precendenza, si ha che la lunghezza della curva di Koch è pari ad infinito. Infatti:

$$\text{lunghezza}(F) = \lim_{k\to\infty} \text{lunghezza}(E_k) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k = +\infty$$

Calcoliamone la dimensione di Hausdorff. Per farlo, consideriamo un ragionamento euristico ([Fal04, Esempio 2.7, p. 34]) basato sulla costruzione geometrica della curva di Koch. Possiamo scrivere: $F = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$, dove:

$$F_1 = F \cap E_{1,1}, \quad F_2 = F \cap E_{1,2}, \quad F_3 = F \cap E_{1,3}, \quad F_4 = F \cap E_{1,4}$$

Dalla costruzione ricorsiva di F, notiamo che questa è un'unione disgiunta e deriviamo che ogni F_j, $j = 1, \ldots, 4$, può essere ottenuto mediante una similitudine con fattore di scala $\lambda = \frac{1}{3}$ a partire da F. Allora, ricordando le proprietà della misura di Hausdorff $\mathscr{H}^s$, abbiamo:

$$\mathscr{H}^s(F) = \mathscr{H}^s(F_1) + \mathscr{H}^s(F_2) + \mathscr{H}^s(F_3) + \mathscr{H}^s(F_4) = 4\left(\frac{1}{3}\right)^s \mathscr{H}^s(F)$$

Assumendo che per il valore $\tilde{s} = \dim_{\mathrm{H}}(F)$ sia valida la seguente condizione (in generale non valida, come già osservato):

$$0 < \mathscr{H}^{\tilde{s}}(F) < +\infty \tag{2.10}$$

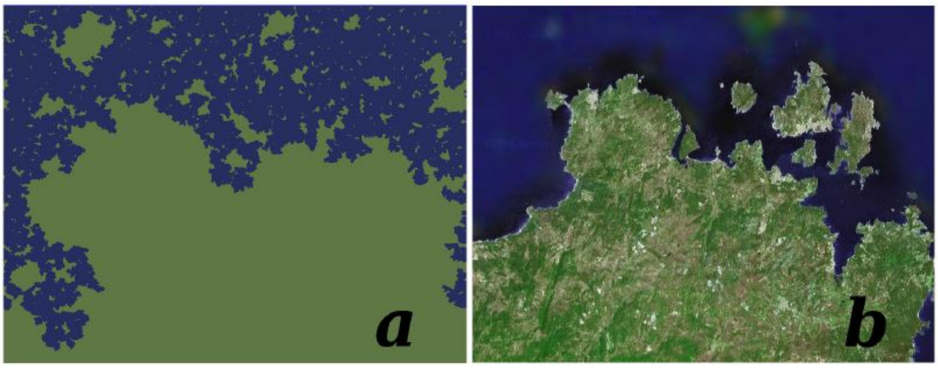


Figura 2.4: (a) Profilo della costa della Sardegna ottenuto mediante la simulazione del modello proposto in [B S04], (b) il profilo reale della medesima costa ([CCV10, Fig. 5.3, p. 97])

si ha:

$$1 = 4\left(\frac{1}{3}\right)^{\tilde{s}} \iff \tilde{s} \cdot log(3) = log(4) \iff \tilde{s} = \frac{log(4)}{log(3)},$$

da cui: $\dim_{\mathrm{H}}(F) = \tilde{s} = \frac{log(4)}{log(3)}$

Osservazione: il ragionamento euristico appena esposto può essere replicato anche per l'insieme di Cantor. Infatti, definiamo:

$$C_1 := S \cap S_{1,1}, \quad C_2 := S \cap S_{1,2},$$

e notiamo che essi si ottengono a partire da S mediante una similitudine con fattore di scala $\lambda = \frac{1}{3}$:

$$\mathscr{H}^s(S) = \mathscr{H}^s(C_1) + \mathscr{H}^s(C_2) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^s \mathscr{H}^s(S),$$

da cui, assumendo la (2.10):

$$1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{\tilde{s}} \iff \tilde{s} \cdot log(3) = log(2) \iff \tilde{s} = \frac{log(2)}{log(3)}$$

Analogamente, possiamo ripetere tale ragionamento considerando $D_j := S \cap S_{2,j}$, $j = 1, \ldots, 4$: in questo caso ogni D_j è simile a S con fattore di scala $\lambda = \frac{1}{9}$. Per la curva di Koch, si procede allo stesso modo partendo da $E_{2,j}$, con $j = 1, \ldots, 16$, sempre con fattore di scala pari a $\frac{1}{9}$. Naturalmente, il calcolo della dimensione di Hausdorff porta al medesimo risultato: assumendo valida la (2.10), otteniamo:

$$1 = 16\left(\frac{1}{9}\right)^{\tilde{s}} \iff \tilde{s} \cdot 2log(3) = 2log(4) \iff \tilde{s} = \frac{log(4)}{log(3)},$$

Si può poi proseguire allo stesso modo considerando intersezioni di S e F con i sottoinsiemi $S_{k,i}$, $E_{k,j}$, $k \geq 1$, $i = 1, \ldots, 2^k$, $j = 1, \ldots, 4^k$ e fattori di scala $\lambda_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k$. In definitiva, osserviamo che entrambi gli insiemi descritti hanno la caratteristica di essere simili a infiniti loro sottoinsiemi con fattori di scala $\lambda_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k$. Per tale motivo, essi si dicono ***autosimilari***. Esistono oggetti autosimilari anche in natura, come ad esempio le coste rocciose (Figura 2.4): tenendo conto dell'erosione e di altri processi fisici interagenti con essa e tra di loro, si trova $\dim_{\mathrm{H}}$ pari a circa $\frac{4}{3}$ ([B S04]).

2.5 La formula dell'area: due casi particolari

Proposizione: sia $m \geq 1$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo limitato e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una curva regolare ed iniettiva. Allora:

$$\mathscr{H}^1(f(I)) = \int_I ||f'(t)||\, dt \tag{2.11}$$

□

Corollario: nelle stesse ipotesi, abbiamo che:

$$\dim_{\mathrm{H}}(f(I)) = 1$$

Dimostrazione: poichè f è una curva regolare definita su I, ovvero è differenziabile con continuità sulla chiusura dell'intervallo, dunque su un compatto, è in particolare anche Lipschitziana. Dunque: $\dim_{\mathrm{H}}(f(I)) \leq \dim_{\mathrm{H}}(I) = 1$. Supponiamo per assurdo che $\dim_{\mathrm{H}}(f(I)) < 1$: allora dovremmo avere $\mathscr{H}^1(f(I)) = 0$, ovvero:

$$\int_I ||f'(t)||dt = 0 \iff ||f'(t)|| = 0 \iff f'(t) = (0, \ldots ,0),$$

dove nell'ultima uguaglianza si intende che l'insieme su cui $f'(t) \neq (0, \ldots ,0)$ è trascurabile. Ma questo è impossibile in quanto per ipotesi $f'(t) \neq (0, \ldots ,0)$ per ogni $t \in I$. Dunque $\dim_{\mathrm{H}}(f(I)) \geq 1$, e dalla doppia disuguaglianza segue la tesi.

□

Proposizione: sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitato e $S : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regolare ed iniettiva. Allora:

$$\mathscr{H}^2(S(\Omega)) = \iint_\Omega ||S_u \times S_v||\, dudv \tag{2.12}$$

□

Corollario: nelle stesse ipotesi, abbiamo che:

$$\dim_{\mathrm{H}}(S(\Omega)) = 2$$

Dimostrazione: ragionamento analogo a quello del Corollario precedente.

□

Osservazione: le due proposizioni enunciate costituiscono casi particolari di un Teorema valido per funzioni Lipschitziane (eventualmente non iniettive) da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$, $n \leq m$. Proprio per il significato che esso assume nei due casi considerati, tale Teorema prende in nome di **formula dell'Area** (si veda [EG15, Teorema 3.8, p. 119]). Si noti che per la validità di (2.11) e (2.12) non è necessario richiedere che f e S siano definite su un limitato; inoltre, basterebbe solo l'ipotesi f e S Lipschitziane, senza la necessità di curve o superfici che appartengano a C^k, $k \geq 1$ (sebbene in questa sede sia stata richiesta anche la loro regolarità): quest'ultimo aspetto è legato ad un altro risultato, dato dal Teorema di Rademacher ([EG15, Teorema 3.2, p. 103]).

Osservazione: le due proposizioni ci consentono di dare una risposta al problema introdotto prima della definizione della misura di Hausdorff, ovvero quello di misurare sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ aventi dimensione minore di n. In particolare, affermiamo che la dimensione dell'immagine di una curva regolare è pari a 1, dunque ci aspettiamo che $\mathscr{H}^1(f(I))$ dia come risultato una misura "di tipo lunghezza", come già osservato in precedenza negli esempi svolti. Coerentemente, la (2.11) stabilisce che $\mathscr{H}^1(f(I))$ è proprio la lunghezza della curva f, nel senso definito dalla (2.3). Allo stesso modo, affermiamo che la dimensione dell'immagine di una superficie regolare è pari a 2, dunque ci aspettiamo che $\mathscr{H}^2(S(\Omega))$ dia come risultato una misura "di tipo area". Infatti, dalla (2.12) abbiamo che $\mathscr{H}^2(S(\Omega))$ è l'area della superficie S, nel senso definito dalla (2.4).

Bibliografia

[B S04] A. Gabrielli B. Sapoval A. Baldassarri. In: *Physical Review Letters* 93.9 (August 2004). URL: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.098501 (cit. a p. 34).

[CCV10] M. Cencini, F. Cecconi e A. Vulpiani. *Chaos: From Simple Models to Complex Systems*. Series on advances in statistical mechanics. World Scientific, 2010. ISBN: 9789814277655. URL: https://books.google.it/books?id=YTepwrrU4a0C (cit. a p. 34).

[EG15] L.C. Evans e R.F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions, Revised Edition*. Textbooks in Mathematics. CRC Press, 2015. ISBN: 9781482242393. URL: https://books.google.it/books?id=e3R3CAAAQBAJ (cit. alle pp. 8, 21, 24, 28, 35).

[Fal04] K. Falconer. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, 2004. ISBN: 9780470871355. URL: https://books.google.it/books?id=JXnGzv7X6wcC (cit. alle pp. 24, 32–33).

[Fal86] K.J. Falconer. *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1986. ISBN: 9780521337052. URL: https://books.google.it/books?id=-Kwp-GrimCIC (cit. a p. 33).

[Hun] John K. Hunter. *Measure theory*. URL: https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/m206/measure_notes.pdf (visitato il 13/08/2022) (cit. alle pp. 12, 15).

[Mor08] F. Morgan. *Geometric Measure Theory: A Beginner's Guide*. Elsevier Science, 2008. ISBN: 9780080922409. URL: https://books.google.it/books?id=fM0ISD-uaZoC (cit. a p. 22).

[RF10] H.L. Royden e P. Fitzpatrick. *Real Analysis*. Prentice Hall, 2010. ISBN: 9780131437470. URL: https://books.google.it/books?id=0Y5fAAAACAAJ (cit. a p. 10).

[SS09] E.M. Stein e R. Shakarchi. *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*. Princeton University Press, 2009. ISBN: 9781400835560. URL: https://books.google.it/books?id=2Sg3Vug65AsC (cit. a p. 12).

[Str14] S.H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Studies in Nonlinearity. Avalon Publishing, 2014. ISBN: 9780813349114. URL: https://books.google.it/books?id=JDQGAwAAQBAJ (cit. a p. 31).

Ringraziamenti

Giunto a questo primo traguardo, voglio ringraziare la mia famiglia per avermi supportato ed incoraggiato in ogni momento: papà Enzo, mamma Mariella, Francesco, Roberta e Pimpa. Ringrazio anche Maria Grazia, Isacco, Giorgia, "Antonio" Pitanni e tutti i miei amici per essermi stati accanto. Grazie a Ludovica e Roberta per aver reso ancora più piacevoli le lezioni. Un pensiero anche per i coinquilini della famiglia allargata del Camplus, in particolare Lorenzo, Roberto e Andrea. Infine, un sentito ringraziamento a tutti i Professori che mi hanno accompagnato nel percorso scolastico e accademico: in particolare, un pensiero alla Professoressa Costante, per avermi fatto conoscere e apprezzare la letteratura ed il mondo classico, ed al Professor Tilli per avermi accompagnato nell'ultima parte della Laurea Triennale permettendomi di scoprire ed approfondire un nuovo ed affascinante ambito della Matematica.