



Politecnico
di Torino

Dipartimento di Scienze
Matematiche "G. L. Lagrange"



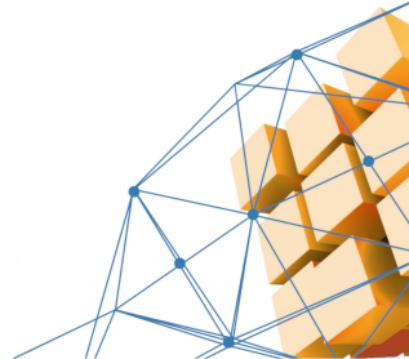
Progetto di gruppo: The Riemann solver of Roe

Studenti:

Marta Di Ridolfi
Ludovica D'Incà
Biagio Torsello

Professor Domenic D'Ambrosio

September 21, 2023



Indice

- Introduzione al problema;
- Legge di conservazione approssimata e metodo di Roe;
- Il metodo di Roe applicato alle equazioni di Eulero;
- Test cases (entropy fix): risultati e conclusioni;
- Low Mach number Roe fix;

Metodo di discretizzazione ai volumi finiti

Legge di conservazione:

$$U_t + (F(U))_x = 0$$

Formula conservativa mediante schema ai volumi finiti:

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F_{i-\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}} \right] \quad (1)$$

Osservazione:

Poichè la ricostruzione dei flussi avviene a partire da dati in genere distinti per ogni cella, alle interfacce si generano delle discontinuità.

Problema di Riemann:

$$\begin{cases} U_t + (F(U))_x = 0 \\ U(x, 0) = \begin{cases} U_L & \text{se } x < 0 \\ U_R & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

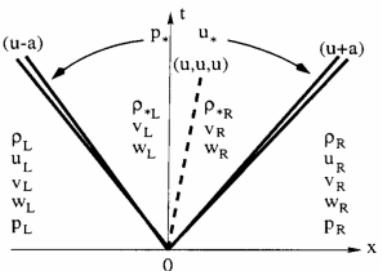


Figure: Struttura della soluzione del problema di Riemann per equazioni di Euler tridimensionali [Tor13]

Legge di conservazione approssimata

Introduciamo la matrice Jacobiana:

$$A(U) = \frac{\partial F}{\partial U} \quad (3)$$

e utilizzando la regola della catena in (2) si ha

$$U_t + A(U) U_x = 0 \quad (4)$$

Problema di Riemann approssimato:

$$\begin{cases} U_t + \tilde{A}U_x = 0 \\ U(x, 0) = \begin{cases} U_L & \text{se } x < 0 \\ U_R & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

Condizioni necessarie per la matrice \tilde{A}

- 1 **Iperbolicità:** \tilde{A} deve avere autovalori reali, $\tilde{\lambda}_i = \tilde{\lambda}_i(U_L, U_R)$, e un insieme di autovettori linearmente indipendenti, \tilde{K}_i ;
- 2 **Consistenza:** $\tilde{A}(U, U) = A(U)$;
- 3 **Conservazione** $F(U_R) - F(U_L) = \tilde{A}(U_R - U_L)$.

Osservazione:

(1) e (3) sono necessarie e sufficienti affinchè l'algoritmo riconosca un'onda d'urto e con questo intendiamo che se (u_L, u_R) soddisfano le equazioni di salto

$$(F_L - F_R) = S(u_L - u_R)$$

allora S è autovalore di \tilde{A} .

Il metodo di Roe ‘originale’

Affinché il metodo approssimato di Godunov (basato su (1) con un flusso numerico di tipo Roe) sia completamente determinato, dobbiamo trovare

- gli autovalori *medi* $\tilde{\lambda}_i$
- i corrispondenti autovettori *medi* \tilde{K}_i (base per la condizione [1])
- le forze d'onda *medie* $\tilde{\alpha}_i$; definite da

$$\begin{cases} U_L = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \tilde{K}_i \\ U_R = \sum_{i=1}^3 \beta_i \tilde{K}_i \\ \Delta U = \sum_{i=1}^3 (\beta_i - \alpha_i) K_i = \sum_{i=1}^3 \tilde{\alpha}_i \tilde{K}_i \end{cases} \quad (6)$$

tramite i quali ricaviamo i flussi

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F_L + \sum_{\tilde{\lambda}_i \leq 0} \tilde{\alpha}_i \tilde{\lambda}_i \tilde{K}_i \quad \circ \quad F_{i+\frac{1}{2}} = F_R - \sum_{\tilde{\lambda}_i \geq 0} \tilde{\alpha}_i \tilde{\lambda}_i \tilde{K}_i \quad (7)$$

Le equazioni di Eulero

Vettori delle variabili conservative e dei flussi:

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix}$$

La matrice Jacobiana esatta è:

$$A = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \hat{\gamma} \\ \hat{\gamma}u^3 - \gamma \frac{uE}{\rho} & \gamma \frac{E}{\rho} - \frac{3\hat{\gamma}}{2}u^2 & \gamma u \end{bmatrix}$$

dove

$$\hat{\gamma} = \gamma - 1$$

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

$$H = \frac{E + p}{\rho}$$

Il metodo di Roe applicato alle equazioni di Eulero, I

Roe dimostrò che l'esistenza di una matrice \tilde{A} che soddisfa la proprietà (3) è assicurata dal teorema dei valori medi (Teorema di Lagrange). [Roe97]

Il vettore parametrico Q

Roe ebbe l'idea di introdurre un vettore parametrico Q tale che entrambi i vettori delle variabili conservative e i flussi potessero essere espressi in termini di Q : $U = U(Q)$ e $F = F(Q)$.

Per le equazioni di Eulero, Roe scelse come vettore parametrico:

$$Q = [q_1, q_2, q_3]^T \equiv \sqrt{\rho} [1, u, H]^T \quad (8)$$

Il metodo di Roe applicato alle equazioni di Eulero, II

Tramite il vettore parametrico (8) Roe ricava la matrice Jacobiana approssimata, \tilde{A} , i corrispondenti autovalori e autovettori medi, $\tilde{\lambda}_i$ e \tilde{K}_i rispettivamente.

In particolare, tramite questa tecnica ricaviamo:

$$\begin{cases} \tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \tilde{H} = \frac{\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \tilde{a} = (\gamma - 1) \sqrt{[\tilde{H} - \frac{1}{2} \tilde{u}^2]} \end{cases} \quad (9)$$

Infine le forze d'onda medie, $\tilde{\alpha}_i$, necessarie per determinare il flusso numerico di Roe, sono ottenute proiettando il salto ΔU sulla base degli autovettori medi destri: $\Delta U = \sum_{i=1}^3 \tilde{\alpha}_i \tilde{K}_i$.

ALGORITMO

Algoritmo per calcolare il flusso numerico di Roe all'interfaccia

- 1 Calcolo dei valori medi \tilde{u} , \tilde{H} e \tilde{a} in accordo con (9);
- 2 Calcolo degli autovalori medi, $\tilde{\lambda}_i$;
- 3 Calcolo degli autovettori medi destri, \tilde{K}_i ;
- 4 Tutte le quantità ricavate agli step precedenti vengono utilizzate per calcolare $F_{i \pm \frac{1}{2}}$ tramite (7).

Il problema di entropia

- Il solutore di Roe interpreta tutte le onde come discontinuità.
- Si può provare che per onde d'urto della prima famiglia:

$$S_R - S_L \propto (M_L^2 - 1)^3$$

da cui onde d'urto di espansione non sono fisicamente ammissibili, e similmente per le onde d'urto della terza famiglia.

- L'interpretazione dei fasci di rarefazione come onde d'urto conduce ad una violazione del II principio della termodinamica.

Entropy fix di Harten-Hyman

Rarefazione transonica di sinistra

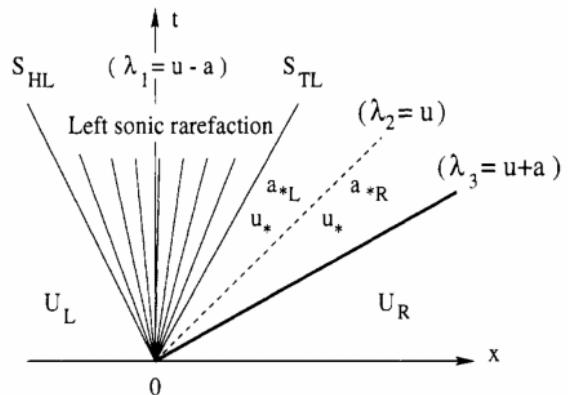


Figure: Rarefazione transonica sinistra

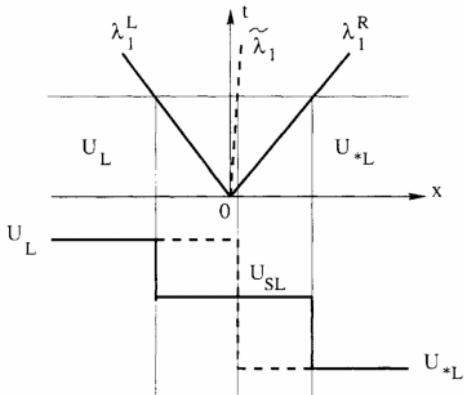


Figure: Entropy fix di Harten-Hyman.

Entropy fix di Harten-Hyman

Rarefazione transonica di sinistra

- Assumiamo di avere u_* e a_{*L} ;
- Calcoliamo $\lambda_1^L = u_L - a_L$ e $\lambda_1^R = u_* - a_{*L}$ con $\lambda_1^L < 0 < \lambda_1^R$;
- Dividiamo il salto $U_{*L} - U_L = \tilde{\alpha}_1 \tilde{K}_1$ in due salti più piccoli: $U_{SL} - U_L$ e $U_{*L} - U_{SL}$;
- Attraverso l'utilizzo della forma integrale si arriva a:

$$(\Delta F)_1^L = \lambda_1^L \left(\frac{\lambda_1^R - \tilde{\lambda}_1}{\lambda_1^R - \lambda_1^L} \right) \tilde{\alpha}_1 \tilde{K}_1 \implies F_{i+\frac{1}{2}} = F_L + \bar{\lambda}_1 \tilde{\alpha}_1 \tilde{K}_1$$

Test: robustezza e accuratezza del metodo

$$\rho_L = 1.0 \quad u_L = 0.0 \quad p_L = 1000 \quad \rho_R = 1.0 \quad u_R = 0.0 \quad p_R = 0.01$$

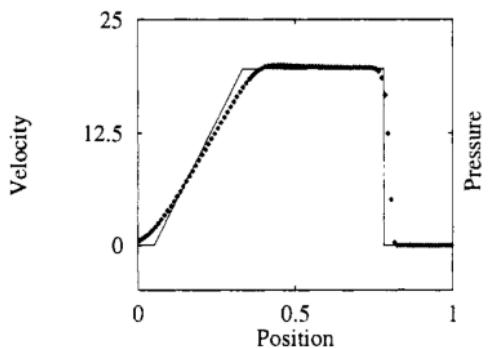


Figure: Velocità

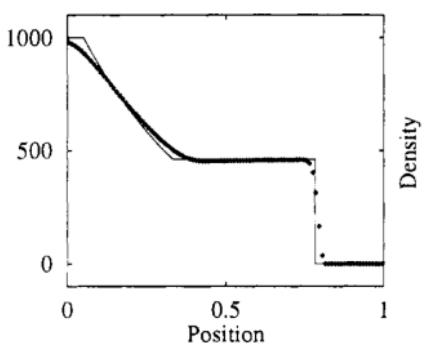


Figure: Pressione

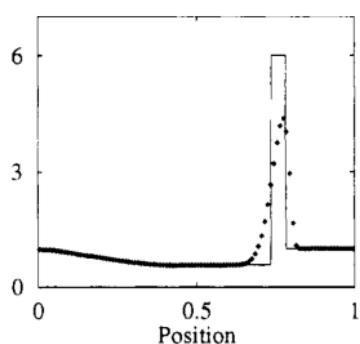


Figure: Densità

Test: applicazione dell'entropy fix

$$\rho_L = 1.0 \quad u_L = 0.75 \quad p_L = 1.0 \quad \rho_R = 0.125 \quad u_R = 0.0 \quad p_R = 0.1$$

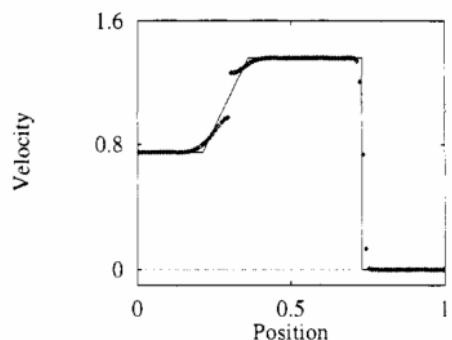


Figure: Velocità senza fix.

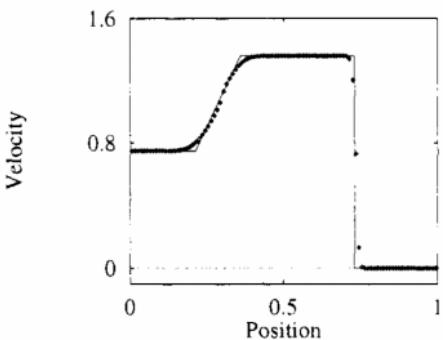


Figure: Velocità con entropy fix di Harten-Hyman.

Low Mach number Roe (LMN Roe) [Rie11]

- Nel limite $Ma \rightarrow 0$, la viscosità artificiale cresce come $\frac{1}{Ma}$.
- $\Delta U \rightarrow \Delta U \cdot \min(Ma, 1)$.

Obiettivi:

- 1 LMN Roe robusto per ogni valore di Ma ;
- 2 i risultati dati da LMN Roe tendono al limite incompribile per $Ma \rightarrow 0$;
- 3 LMN Roe tende al solutore di Roe classico nel caso comprimibile.

1 Low Mach number Roe (LMN Roe): Gresho vortex

$$Ma_{rel,loc} = \sqrt{\frac{(u - u_0)^2 + v^2}{\gamma p / \rho}}$$

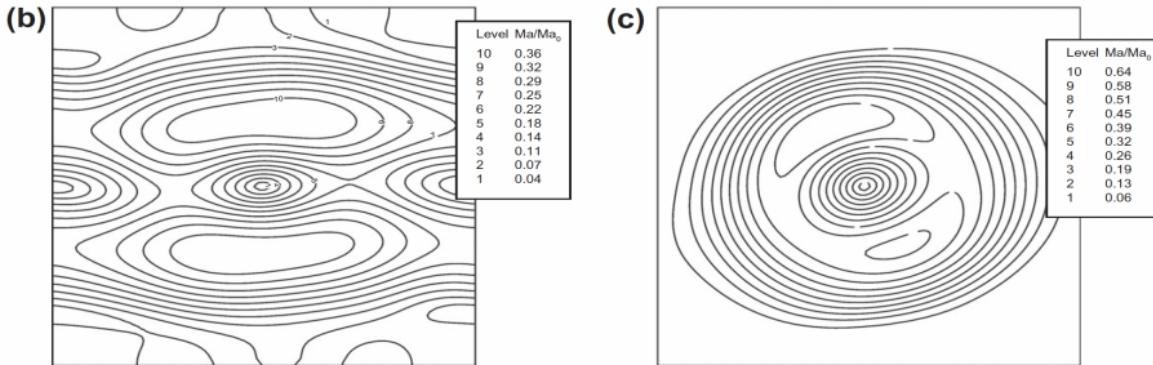


Figure: Isolinee del rapporto tra numeri di Mach Ma_{loc}/Ma_0 per il caso del vortice di Gresho. (b) Solutore di Roe originale con $Ma_0 = 0.1$; (c) Solutore LM Roe con $Ma_0 = 0.1$ ([Rie11])

2 LMN Roe: limite incomprimibile (flusso a potenziale)

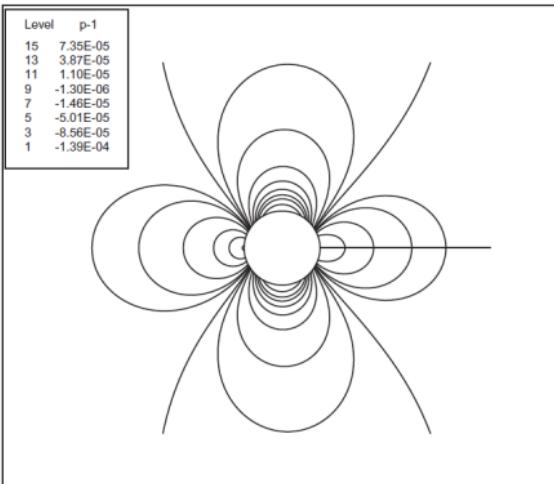
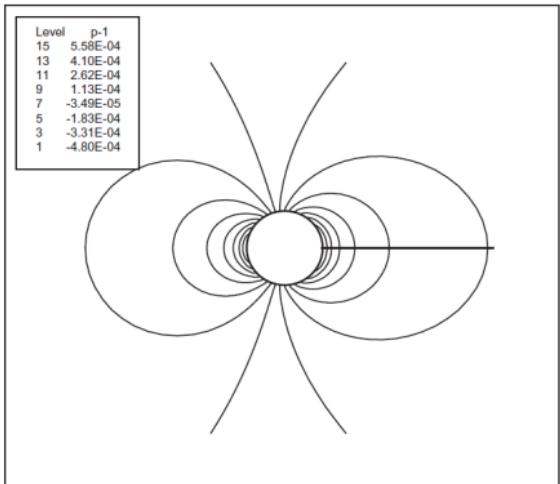


Figure: Isolinee della pressione $(\frac{p}{p_{ref}} - 1)$ con solutore di Roe (a sinistra) e LMN Roe (a destra), $Ma = 0.01$ ([Rie11])

).

3 LMN Roe: Sod shock tube

Nel caso comprimibile, il solutore LMN Roe ricade nel caso del classico solutore di Roe (garantito per costruzione):

$$\rho_L = 1.0 \quad u_L = 0.0 \quad p_L = 1.0 \quad \rho_R = 0.125 \quad u_R = 0.0 \quad p_R = 0.1$$

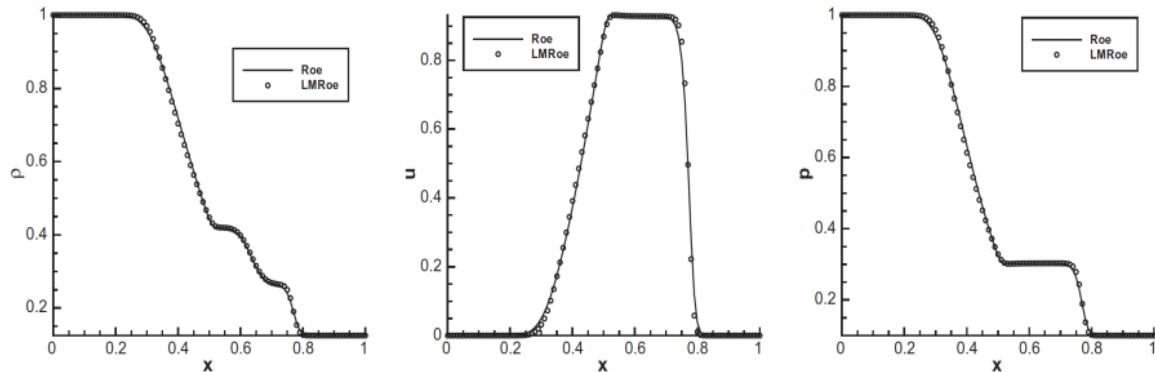


Figure: I risultati sono stati ricavati tramite una griglia equispaziata ($\Delta x = 0.01$) al tempo $t = 0.15$ ([Rie11])

Fonti

-  Felix Rieper, *A low-mach number fix for roe's approximate riemann solver*, Journal of Computational Physics **230** (2011), no. 13, 5263–5287.
-  Philip L Roe, *Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes*, Journal of computational Physics **135** (1997), no. 2, 250–258.
-  Eleuterio F Toro, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*, Springer Science & Business Media, 2013.

Un'analogia con il caso scalare - Flux difference splitting

$$f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} = \overrightarrow{\Delta f}_{i+\frac{1}{2}} + \overleftarrow{\Delta f}_{i+\frac{1}{2}}$$

$$s_{i+\frac{1}{2}}^+ \Delta w_{i+\frac{1}{2}} = \overrightarrow{\Delta f}_{i-\frac{1}{2}} = f(w_{i+1}) - f(w_{R,i+\frac{1}{2}}) \quad (10)$$

$$s_{i+\frac{1}{2}}^- \Delta w_{i+\frac{1}{2}} = \overleftarrow{\Delta f}_{i+\frac{1}{2}} = f(w_{R,i+\frac{1}{2}}) - f(w_i) \quad (11)$$

dalla (10):

$$f(w_{R,i+\frac{1}{2}}) = f(w_{i+1}) - s_{i+\frac{1}{2}}^+ \Delta w_{i+\frac{1}{2}} \quad (\iff F_{i+\frac{1}{2}} = F_R - \sum_{\tilde{\lambda}_i \geq 0} \tilde{\lambda}_i \tilde{\alpha}_i \tilde{K}_i)$$

dalla (11)

$$f(w_{R,i+\frac{1}{2}}) = f(w_i) + s_{i+\frac{1}{2}}^- \Delta w_{i+\frac{1}{2}} \quad (\iff F_{i+\frac{1}{2}} = F_L + \sum_{\tilde{\lambda}_i \leq 0} \tilde{\lambda}_i \tilde{\alpha}_i \tilde{K}_i)$$

Traformazione dei termini di A in funzione dell'entalpia, I

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2} \frac{U_2^2}{U_1} & (3-\gamma) \frac{U_2}{U_1} & \gamma - 1 \\ (\gamma-1) \frac{U_2^3}{U_1^3} - \gamma \frac{U_2 U_3}{U_1^2} & \gamma \frac{U_3}{U_1} - \frac{3(\gamma-1)}{2} \frac{U_2^2}{U_1^2} & \gamma \frac{U_2}{U_1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2} u^2 & (3-\gamma)u & \gamma - 1 \\ (\gamma-1)u^3 - \gamma \frac{uE}{\rho} & \gamma \frac{E}{\rho} - \frac{3(\gamma-1)}{2} u^2 & \gamma u \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Traformazione dei termini di A in funzione dell'entalpia, II

$$\begin{aligned}\frac{\gamma - 3}{2}u^2 &= (\gamma - 1)\frac{1}{2}u^2 - u^2 = (\gamma - 1)\frac{E}{\rho} - c_v(\gamma - 1)T - u^2 = (\gamma - 1)\frac{E}{\rho} - \frac{p}{\rho} - u^2 \\ &= (\gamma - 1)\left[\frac{E + p}{\rho}\right] - \gamma\frac{p}{\rho} - u^2 = (\gamma - 1)H - a^2 - u^2 \quad (12)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\gamma - 1)u^3 - \gamma\frac{uE}{\rho} &= u\left[(\gamma - 1)u^2 - \gamma\frac{E}{\rho}\right] = u\left[(\gamma - 1)u^2 - (\gamma - 1)\frac{1}{2}u^2 - \frac{E}{\rho} - \frac{p}{\rho}\right] \\ &= u\left[(\gamma - 1)\frac{1}{2}u^2 - \frac{E + p}{\rho}\right] = u[(\gamma - 1)H - a^2 - H] = u[(\gamma - 2)H - a^2] \quad (13)\end{aligned}$$

Traformazione dei termini di A in funzione dell'entalpia, III

$$\gamma \frac{E}{\rho} - 3 \frac{(\gamma - 1)}{2} u^2 = \gamma \frac{E}{\rho} - \frac{\gamma - 1}{2} u^2 - (\gamma - 1) u^2 = \quad (14)$$

$$\frac{\gamma - 1}{2} u^2 + \frac{E + p}{\rho} - \frac{\gamma - 1}{2} u^2 = H$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (\gamma - 1)H - u^2 - a^2 & (3 - \gamma)u & \gamma - 1 \\ u[(\gamma - 2)H - a^2] & H - (\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ (\gamma - 1)H - u^2 - a^2 & (3 - \gamma)u - \lambda & \gamma - 1 \\ u[(\gamma - 2)H - a^2] & H - (\gamma - 1)u^2 & \gamma u - \lambda \end{bmatrix} \quad (16)$$

Calcolo degli autovalori

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) = & -\lambda^3 - 3u\lambda^2 + [\hat{\gamma}H - (\gamma + 1)u^2 + \hat{\gamma}H - u^2 - a^2]\lambda + \\ & + (-2\hat{\gamma}H + a^2 + \gamma u^2)u = -\lambda^3 - 3u\lambda^2 + [2\hat{\gamma}H + (-\gamma - 2)u^2 - a^2]\lambda + \\ & + (-2\hat{\gamma}H + a^2 + \gamma u^2)u\end{aligned}$$

$$\lambda_1 = u - a \quad \lambda_2 = u \quad \lambda_3 = u + a \quad (17)$$

Calcolo degli autovettori, I

$$\lambda = u - a :$$

$$\begin{bmatrix} -u + a & 1 & 0 \\ \hat{\gamma}H - u^2 - a^2 & (2 - \gamma)u + a & \hat{\gamma} \\ u[(\gamma - 2)H - a^2] & H - \hat{\gamma}u & \hat{\gamma}u + a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(u - a)k_1 + k_2 = 0 \\ (\hat{\gamma}H - u^2 - a^2)k_1 + [(2 - \gamma)u + a]k_2 + \hat{\gamma}k_3 = 0 \\ u[(\gamma - 2)H - a^2]k_1 + (H - \hat{\gamma}u)k_2 + (\hat{\gamma}u + a)k_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \\ H - ua \end{bmatrix}$$

Calcolo degli autovettori, II

$\lambda = u :$

$$\begin{bmatrix} -u & 1 & 0 \\ \hat{\gamma}H - u^2 - a^2 & (2 - \gamma)u & \hat{\gamma} \\ u[(\gamma - 2)H - a^2] & H - \hat{\gamma}u & \hat{\gamma}u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} -u k_1 + k_2 = 0 \\ (\hat{\gamma}H - u^2 - a^2)k_1 + (2 - \gamma)uk_2 + \hat{\gamma}k_3 = 0 \\ u[(\gamma - 2)H - a^2]k_1 + (H - \hat{\gamma}u)k_2 + \hat{\gamma}uk_3 = 0 \end{cases}$$

$$\implies k^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{bmatrix}$$

Calcolo degli autovettori, III

$$\lambda = u + a :$$

$$\begin{bmatrix} -u - a & 1 & 0 \\ \hat{\gamma}H - u^2 - a^2 & (2 - \gamma)u - a & \hat{\gamma} \\ u[(\gamma - 2)H - a^2] & H - \hat{\gamma}u & \hat{\gamma}u - a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(u + a)k_1 + k_2 = 0 \\ (\hat{\gamma}H - u^2 - a^2)k_1 + (2 - \gamma)(u - a)k_2 + \hat{\gamma}k_3 = 0 \\ u[(\gamma - 2)H - a^2]k_1 + (H - \hat{\gamma}u)k_2 + (\hat{\gamma}u - a)k_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \\ H + ua \end{bmatrix}$$

Calcolo di F e U in funzione di Q

$$Q = \sqrt{\rho} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ H \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{E + p}{\rho} & E &= \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{p}{\hat{\gamma}} & \rho H - \frac{1}{2}\rho u^2 - \left(1 + \frac{1}{\hat{\gamma}}p\right) &= 0 \\ \implies p &= \frac{\hat{\gamma}}{\gamma} \left(\rho H - \frac{1}{2}\rho u^2\right) & &= \frac{\hat{\gamma}}{\gamma} \left(q_1 q_3 - \frac{1}{2}q_2^2\right) \\ \implies E &= \left(1 - \frac{\gamma}{\hat{\gamma}}\right)\rho H + \frac{1}{2}\rho u^2 & &= \frac{1}{\gamma}q_1 q_3 + \frac{1}{2}q_2^2 \end{aligned}$$

Calcolo di F e U in funzione di Q

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^2 \\ q_1 q_2 \\ \frac{1}{\gamma} q_1 q_3 + \frac{1}{2} q_2^2 \end{bmatrix} = U(Q) \quad (18)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 q_2 \\ q_2^2 + \frac{\hat{\gamma}}{\gamma} (q_1 q_3 - \frac{1}{2} q_2^2) \\ \left(q_1 q_3 + \frac{1}{2\gamma} q_2^2 \right) \frac{q_2}{q_1} \end{bmatrix} = F(Q) \quad (19)$$



Thank you for your attention

