Metodi Variazionali

Simone Chiomintо (matr. 303022)
Ludovica D'Incà (matr. 315267)
Marta Di Ridolfi (matr. 317226)
Lorenzo Huang (matr. 302705)
Michele Lupini (matr. 316676)
Francesca Marino (matr. 307740)
Biagio Torsello (matr. 315050)

January 2023

1 Introduzione

Si consideri il funzionale

$$F(u) = \int_a^b \left\{ \frac{u'(x)^2}{2} + 2\sqrt{|u(x)|} \right\} dx, \quad u \ \in \ H^1([a,b]) \tag{1}$$

Notiamo innanzitutto che si tratta di un funzionale disaccoppiato che possiamo definire come somma di

$$D(u) = \int_a^b \frac{u'(x)^2}{2} dx$$

e

$$G(u) = \int_a^b 2\sqrt{|u(x)|} dx \tag{2}$$

Punto 1

Dimostrare che esiste un minimo, con i vincoli $u(a) = u_0$ e $u(b) = u_1$ (e anche con un solo vincolo)

Per dimostrare l'esistenza di un minimo di $F(u)$, osserviamo, innanzitutto, che $D(u)$ è il *Funzionale di Dirichlet* che sappiamo ammettere minimo in quanto debolmente semicontinuo inferiormente (il funzionale è una norma) e coercivo. Concentriamoci, dunque, sullo studio di $G(u) = \int_a^b g(u(x))dx$ con $g(y) = 2\sqrt{|y|}$. Verifichiamo che $g(y)$ soddisfi le ipotesi del Teorema 1 :

- g è continua in quanto composizione di funzioni continue : $g = (f \circ k)$, dove $k(y) = |y|$ e $f(z) = \sqrt{z}$;

- $-g(y) \leq h(x)|y|^\alpha$ è verificata con $h \equiv 0$ nell'intervallo $[a, b]$ in quanto $g(y)$ è positiva per ogni $y \in \mathbb{R}$.

Dal Teorema 1 segue che il funzionale $F(u)$ è coercivo e semicontinuo inferiormente in

$$K_{u_0} = \{u \in H^1(a, b) \mid u(a) = u_0\}$$

$$K^{u_1} = \{u \in H^1(a, b) \mid u(b) = u_1\}$$

$$K_{u_0}^{u_1} = \{u \in H^1(a, b) \mid u(a) = u_0 \text{ e } u(b) = u_1\}$$

Di conseguenza, per il Teorema 2 e per il Teorema 3, $F(u)$ ha almeno un minimo in ognuno di questi insiemi.

Punto 2

Scrivere formalmente l'equazione di Eulero-Lagrange in forma debole e forte: quale difficoltà si incontra nel giustificare la loro validità?

Notiamo innanzitutto che il funzionale disaccoppiato $F(u) = \frac{1}{2}\int_a^b u'(x)^2 dx + \int_a^b g(x, u(x))dx$ rientra nel caso generale $F(u) = \int_a^b f(x, y, z)dx$ ponendo

$$f(x, y, z) = \frac{z^2}{2} + g(x, y)$$

In particolare, per il nostro problema si ha:

$$f(y, z) = \frac{1}{2}z^2 + 2\sqrt{|y|}$$

Sia u una funzione minimizzante e consideriamo il competitore $u + tv$, $v \in C_c^\infty((a, b))$. Tale competitore è ammissibile in entrambi i casi descritti al punto 1 (un solo vincolo o due vincoli). Definiamo il seguente funzionale reale di variabile reale:

$$\Phi(t) = F(u + tv) = \int_a^b \frac{(u'(x) + tv'(x))^2}{2} dx + \int_a^b 2\sqrt{|u(x) + tv(x)|}dx \tag{3}$$

Dato che u è un minimo per F otteniamo $\Phi'(0) = 0$. Tuttavia, la derivazione sotto il segno di integrale non è sempre possibile nel caso esaminato. Nella (3) il primo integrando soddisfa le ipotesi del Teorema 5 (è una parabola in t), mentre questo non è vero per il secondo. Infatti, in generale:

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x, u + tv) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, u + tv) \cdot v(x)$$

e nel nostro caso la funzione $g(x, y) = 2\sqrt{|y|}$ non è derivabile per $y = 0$, ovvero nei punti in cui $u(x) = 0$. Al fine di garantire le ipotesi del Teorema di derivazione sotto il segno di integrale (5), è allora necessario restringersi su un opportuno insieme di appartenenza per tale soluzione. La scelta meno riduttiva è assumere di lavorare sull'insieme $A := \{x \in (a, b) \mid y = u(x) \neq 0\}$. Sotto questa ipotesi, si può derivare sotto il segno di integrale e si ottiene la formulazione debole delle equazioni di Eulero Lagrange:

$$\Phi'(0) = \int_A \left\{ \frac{\operatorname{sign}(u(x))}{\sqrt{|u(x)|}} v(x) + u'(x)v'(x) \right\} dx = 0 \qquad \forall v \in C_c^\infty(A). \tag{4}$$

Se, inoltre, $u \in C^2(A)$ allora si può scrivere formalmente l'equazione di Eulero-Lagrange in forma forte:

$$u''(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x), u'(x)) = \frac{\partial g}{\partial y}(u(x)) \qquad \forall x \in A \tag{5}$$

Punto 3

Sia u un minimo e $A = \{x \in (a, b) \mid u(x) \neq 0\}$. Dimostrare che u risolve Eulero-Lagrange forte nell'aperto A e che $u \in C^\infty(A)$

Sia $A := \{x \in (a, b) \mid u(x) \neq 0\}$ e sia $u \in H^1$ una funzione minimizzante del funzionale F. Per provare che u verifica le equazioni di Eulero-Lagrange in forma forte nell'aperto A osserviamo che nell'insieme $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y) = \frac{\operatorname{sign}(y)}{\sqrt{|y|}}$$

esiste ed è ben definita. In particolare, $g \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Sulla linea della dimostrazione del Teorema 4, possiamo concludere che $u \in C^2(A)$ soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange in forma forte in ciascun intervallo aperto in cui $u > 0$ o $u < 0$.

Verifichiamo adesso che $u \in C^\infty(A)$. Dall'equazione (5), dalle osservazioni eseguite in precedenza e facendo riferimento al Teorema 4.*3*, possiamo scrivere:

$$u''(x) = \frac{\operatorname{sign}(u(x))}{\sqrt{|u(x)|}} \in C^0(A), \tag{6}$$

deduciamo che $u \in C^2(A)$. Allora, la funzione $\frac{\operatorname{sign}(u(x))}{\sqrt{|u(x)|}} \in C^2(A)$ perché composizione di funzioni C^∞ e C^2. Questo ci permette di concludere (con lo stesso ragionamento fatto sopra) che $u \in C^4(A)$. Procedendo per induzione (bootstrap) concludiamo quindi che $u \in C^\infty(A)$.

Punto 4

Sia ora $[a, b] = [0, l]$, u un minimo con vincoli $u(0) = u_0 > 0$ e $u(l) = 0$ e sia $x_0 = \min\{x \in [0, l]$ t.c. $u(x) = 0\}$. Mostrare che $u(x) \geq 0$ e determinare u nell'intervallo $[x_0, l]$. Concludere che $A = (0, x_0)$. Mostrare che u è decrescente su $[0, l]$.

Trattiamo il problema in due sottoinsiemi di $[0, l]$: $(0, x_0)$ e $[x_0, l]$. Per definizione di x_0, è possibile affermare che in $(0, x_0)$ $u > 0$ per continuità, dunque $(0, x_0) \subseteq A$. Prendiamo ora in considerazione l'intervallo $[x_0, l]$. Il minimo del funzionale vorrà "avere poca pendenza" (per minimizzare il funzionale di Dirichlet $D(u)$) e "concedere meno area possibile" (per minimizzare il funzionale $G(u)$). Quindi possiamo concludere che $u(x) = 0 \ \ \forall x \in [x_0, l]$. Infatti, dalla condizione al contorno $u(l) = 0$ e dalla condizione $u(x_0) = 0$, si avrebbe che se la funzione ristretta all'intervallo considerato non fosse costantemente identicamente nulla, entrambi $D(u)$ e $G(u)$ darebbero un contributo strettamente positivo al funzionale che non risulterebbe, quindi, minimizzato da u. In altre parole, se per assurdo $u(x)$ non fosse identicamente nulla in $[x_0, l]$, potremmo ottenere un minorante ponendo u identicamente uguale a 0 in $[x_0, l]$.

Dalla trattazione svolta possiamo affermare che $u(x) > 0 \ \ \forall x \in [0, x_0)$ e $u(x) = 0 \ \ \forall x \in [x_0, l]$. L'insieme A quindi coincide con i valori di $x \in (0, l)$ per cui u è strettamente positivo, ossia $A = (0, x_0)$.

Poiché $u(x) = 0$ su $[x_0, l]$, possiamo ridurci a dimostrare che $u(x)$ è decrescente su $[0, x_0)$. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che non lo sia. Questo può realizzarsi in tanti modi: ovvero, potremmo avere una serie di intervalli in $[0, x_0)$ in cui la u prima cresce e poi decresce, fino a congiungersi con il valore nullo in x_0. Senza perdita di generalità consideriamo il caso in cui ci sia un unico intervallo in cui u è crescente. Poiché per ipotesi $u(0) = u_0 > 0$ e $u(x_0) = 0$, allora devono esistere due punti distinti $x_1 \in (0, x_0)$, $x_2 \in (x_1, x_0)$ tali che $u(x) > u(x_1), \forall x \in (x_1, x_2)$ e $u(x)$ sia decrescente in (x_2, x_0), al fine di raccordarsi con continuità al valore in x_0 nullo (cfr. 1). Inoltre, essendo $u(x)$ continua, per il Teorema dei valori intermedi esiste un punto $x_3 \in (x_2, x_0)$ tale che $u(x_1) = u(x_3)$.

Supponiamo che u sia una funzione minimizzante del funzionale F e costruiamo il competitore $w(x)$ così definito:

$$w(x) = \begin{cases} u(x) & x \in [0, x_1) \cup (x_3, l] \\ u(x_1) & x \in [x_1, x_3] \end{cases}$$

Per definizione di funzione minimizzante:

$$F(u) \leq F(w)$$

Scriviamo esplicitamente tale disequazione:

$$\int_0^l \frac{u'(x)^2}{2} \, dx + \int_0^l 2\sqrt{u(x)} \, dx \leq \int_0^l \frac{w'(x)^2}{2} \, dx + \int_0^l 2\sqrt{w(x)} \, dx,$$

che per la linearità dell'integrale e per definizione di $w(x)$ si riduce a:

$$\int_{x_1}^{x_3} \frac{u'(x)^2}{2} \, dx + \int_{x_1}^{x_3} 2\sqrt{u(x)} \, dx \leq \int_{x_1}^{x_3} \frac{w'(x)^2}{2} \, dx + \int_{x_1}^{x_3} 2\sqrt{w(x)} \, dx,$$

Definendo $B := \{x \in [x_1, x_0] \,|\, u(x) > u(x_1)\}$, osservando che $B = (x_1, x_3)$ è un aperto e che $w'(x) = 0$ per $x \in B$, otteniamo:

$$\int_B \frac{u'(x)^2}{2} \, dx + \int_B 2(\sqrt{u(x)} - \sqrt{w(x)}) \, dx \leq 0$$

Tale disuguaglianza è verificata solo se la misura di B è nulla; infatti, il contributo di Dirichlet è sempre positivo o nullo, mentre, data la monotonia della funzione radice quadrata $\sqrt{(\cdot)}$, il secondo integrando è sempre strettamente positivo in B. In particolare risulta nulla la misura dell'intervallo (x_1, x_2) in cui avevamo supposto u crescente (poiché aperto contenuto in un insieme di misura nulla, ovvero B). Ossia $u(x) \leq u(x_1)$, $x \geq x_1$. Poiché x_1 è arbitrario, abbiamo mostrato che u è decrescente.

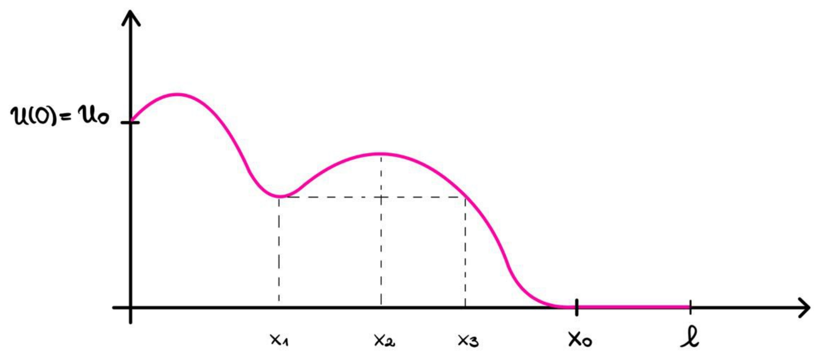

Figure 1: Rappresentazione qualitativa di $u(x)$ al fine di concludere, attraverso una dimostrazione per assurdo, che $u(x)$ è decrescente.

Punto 5

Supponiamo ora che $x_0 < l$ e consideriamo il competitore

$$\begin{cases} u\left(\frac{x_0}{x_0+\varepsilon}x\right), & \textbf{se } 0 \leq x \leq x_0 + \varepsilon \\ 0 & \textbf{se } x > x_0 + \varepsilon \end{cases} \tag{7}$$

con $|\epsilon|$ sufficientemente piccolo. Qual è il suo significato geometrico? Calcolare $F(u_\epsilon)$ e $\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} F(u_\epsilon)$ che deve valere 0... Cosa si ottiene?

Supponiamo $x_0 < l$ e consideriamo il competitore

$$u_\varepsilon(x) := \begin{cases} u\left(\frac{x_0}{x_0+\varepsilon}x\right), & \text{se } 0 \leq x \leq x_0 + \varepsilon \\ 0 & \text{se } x > x_0 + \varepsilon \end{cases}$$

ammissibile per $-x_0 < \varepsilon \leq l - x_0$. Il competitore u_ε può essere visto geometricamente come una versione "leggermente dilatata" (o "leggermente ristretta" per $\varepsilon < 0$) di u in modo tale da avere supporto in $[0, x_0 + \varepsilon)$.

Calcoliamo il valore del funzionale F sul competitore u_ε.

$$\begin{aligned}
F(u_\varepsilon) &= \int_0^l \left[\frac{u_\varepsilon'(x)^2}{2} + 2\sqrt{|u_\varepsilon(x)|}\right] dx \\
&= \int_0^{x_0+\varepsilon} \left[\frac{u_\varepsilon'(x)^2}{2} + 2\sqrt{u_\varepsilon(x)}\right] dx \\
&= \int_0^{x_0+\varepsilon} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}u\left(\frac{x_0}{x_0+\varepsilon}x\right)\right)^2 + 2\sqrt{u\left(\frac{x_0}{x_0+\varepsilon}x\right)}\right] dx
\end{aligned}$$

cambiando variabile $x_\varepsilon = \frac{x_0}{x_0+\varepsilon}x$ e ricordando che $dx = \left(\frac{x_0+\varepsilon}{x_0}\right) dx_\varepsilon$ si ottiene

$$F(u_\varepsilon) = \int_0^{x_0} \left[\left(\frac{x_0}{x_0+\varepsilon}\right)\frac{u'(x_\varepsilon)^2}{2} + 2\left(\frac{x_0+\varepsilon}{x_0}\right)\sqrt{u(x_\varepsilon)}\right] dx_\varepsilon.$$

Sia $u \in H^1([0,l])$ minimo del funzionale F sotto le ipotesi del punto precedente e sia $\hat{u}(x,\varepsilon) := u_\varepsilon(x)$. Consideriamo la funzione reale di variabile reale $\hat{F}$ definita da $\hat{F}(\varepsilon) = F(\hat{u}(\cdot,\varepsilon))$. $\hat{F}$ ha un minimo per $\varepsilon = 0$ perché u è una funzione minimizzante per F per ipotesi. Vorremmo quindi sfruttare il Teorema 5 per poter concludere $\hat{F}'(0) = 0$. Controlliamo che le ipotesi del Teorema siano soddisfatte:

- Dobbiamo verificare che per q.o x esiste

  $$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\left(\frac{x_0}{x_0+\varepsilon}\right)\frac{u'(x)^2}{2} + 2\left(\frac{x_0+\varepsilon}{x_0}\right)\sqrt{u(x)}\right),$$

  che è sempre vero per $-x_0 < \varepsilon \leq l - x_0$ (ovvero per $0 < x_0 + \varepsilon \leq l$);

- Dobbiamo verificare che per q.o x e per ogni ε la funzione

  $$\left|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\left(\frac{x_0}{x_0+\varepsilon}\right)\frac{u'(x)^2}{2} + 2\left(\frac{x_0+\varepsilon}{x_0}\right)\sqrt{u(x)}\right)\right|$$

  è dominata da una funzione $g \in L^1([0,l])$.
  Questo è sempre possibile poiché, dal secondo membro della disuguaglianza triangolare

  $$\left|-\frac{u'(x)^2}{2}\frac{x_0}{(x_0+\varepsilon)^2} + \frac{2}{x_0}\sqrt{|u(x)|}\right| \leq \left|-\frac{u'(x)^2}{2}\frac{x_0}{(x_0+\varepsilon)^2}\right| + \left|\frac{2}{x_0}\sqrt{|u(x)|}\right|,$$

  dove, ricordando che $u, u' \in L^2([0,l])$, il secondo membro può essere dominato da una funzione in $L^1([0,l])$, restringendo l'intervallo su cui è definita ε a $[-x_0+\delta, l-x_0]$ con $\delta > 0$.

Dunque è possibile applicare il Teorema 5, da cui segue che esiste la derivata di $\hat{F}$ per $\varepsilon = 0$ e vale

0. Più precisamente

$$
\begin{aligned}
0 &= \hat{F}'(0) = \\
&= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_0^{x_0} \left[\left(\frac{x_0}{x_0+\varepsilon} \right) \frac{u'(x)^2}{2} + 2 \left(\frac{x_0+\varepsilon}{x_0} \right) \sqrt{u(x)} \right] dx \Bigg|_{\varepsilon=0} = \\
&= \int_0^{x_0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\left(\frac{x_0}{x_0+\varepsilon} \right) \frac{u'(x)^2}{2} + 2 \left(\frac{x_0+\varepsilon}{x_0} \right) \sqrt{u(x)} \right] dx \Bigg|_{\varepsilon=0} = \\
&= \int_0^{x_0} \left[-\frac{1}{2x_0} u'(x)^2 + \frac{2}{x_0} \sqrt{u(x)} \right] dx
\end{aligned}
$$

Da cui otteniamo

$$
0 = \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} \left[-\frac{1}{2} u'(x)^2 + 2\sqrt{u(x)} \right] dx. \tag{8}
$$

Punto 6

Scrivere l'identità di Beltrami su $(0, x_0)$ usando il punto 5). Dedurre che, se $x_0 < l$, $\frac{(u')^2}{2} = 2\sqrt{u}$ su $(0, x_0)$ e $u \in C^1([0, l])$.

Definizione 1 *Un funzionale del tipo $F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx$ si dice **autonomo** se $f(x, y, z)$ NON dipende da x, ovvero $f(x, y, z) = f(y, z)$.*

Il funzionale F trattato nel problema in esame è autonomo. Nelle ipotesi in cui la soluzione del problema di minimo risolva l'equazione di Eulero-Lagrange in forma forte (che sono garantite per $x \in (0, x_0)$) possiamo scrivere l'equazione di Beltrami come

$$
u'(x) \frac{\partial}{\partial z} f(u(x), u'(x)) - f(u(x), u'(x)) = C
$$

dove, nel nostro caso, $f(y, z) := \frac{z^2}{2} + 2\sqrt{y}$. Otteniamo, quindi,

$$
\frac{1}{2} u'(x)^2 - 2\sqrt{u(x)} = C. \tag{9}
$$

Confrontando le equazioni (8) e (9), otteniamo banalmente che

$$
\frac{1}{2} u'(x)^2 - 2\sqrt{u(x)} = 0
$$

per ogni $x \in [0, x_0)$ (intervallo di integrazione di (8)) che è un'equazione differenziale del primo ordine. Facendone il limite per $x \to x_0^-$ si ricava:

$$
\lim_{x \to x_0^-} u'(x)^2 = \lim_{x \to x_0^-} 4\sqrt{u(x)} = 0,
$$

dove l'ultima uguaglianza è possibile perché u è continua in $[0, l]$ e $u(x_0) = 0$. Pertanto, notiamo che esiste $\lim_{x \to x_0} u'(x)$ e dunque $u \in C^1([0, l])$.

Punto 7

Sempre nell'ipotesi $x_0 < l$, calcolare x_0 in funzione di $u_0 > 0$ e calcolare $F(u)$ in funzione di u_0.

Dal punto precedente segue che la soluzione del problema di minimo diventa la soluzione del problema al contorno

$$\begin{cases} (u')^2 = 4u^{\frac{1}{2}} & x \in (0, x_0) \\ u(0) = u_0 > 0 \\ u(x_0) = 0 \end{cases}$$

con $x_0 < l$ incognita e $u(x) = 0$ per $x \in [x_0, l]$. Possiamo, quindi, risolvere il problema di Cauchy equivalente

$$\begin{cases} (u')^2 = 4u^{\frac{1}{2}} & x \in (0, x_0) \\ u(0) = u_0 > 0 \end{cases}$$

facendo attenzione che $l > x_0 := \min\{x \in [0, l] \mid u(x) = 0\}$ e poi raccordando con regolarità C^1, la soluzione con la funzione costante uguale a 0.

Essendo $u(x) > 0$ e decrescente per ogni $x < x_0$ possiamo scrivere il problema in forma normale come

$$\begin{cases} u' = -2u^{\frac{1}{4}} & x \in (0, x_0) \\ u(0) = u_0 > 0 \end{cases} \tag{10}$$

che si può risolvere con il metodo di separazione delle variabili ottenendo

$$-2x = \int_0^x u(s)^{-\frac{1}{4}} u'(s)\ ds = \int_{u_0}^{u(x)} u^{-\frac{1}{4}}\ du = \frac{4}{3}(u(x)^{\frac{3}{4}} - u_0^{\frac{3}{4}})$$

da cui otteniamo

$$u(x) = \begin{cases} \left(u_0^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{2}x\right)^{\frac{4}{3}} & 0 \le x < x_0 \\ 0 & x_0 \le x \le l \end{cases} \tag{11}$$

Imponendo la condizione $u(x_0) = 0$, si ricava:

$$x_0 = \frac{2}{3} u_0^{\frac{3}{4}}. \tag{12}$$

Possiamo, quindi, calcolare il valore minimo del funzionale sostituendo la formula esplicita di u in

(1)

$$
\begin{aligned}
F(u) = & \int_0^l \left[\frac{u'(x)^2}{2} + 2\sqrt{|u(x)|} \right] dx \\
= & \int_0^{x_0} \left[\frac{u'(x)^2}{2} + 2\sqrt{u(x)} \right] dx \\
= & \int_0^{x_0} 4\sqrt{u(x)} dx \\
= & 4 \int_0^{x_0} \left(u_0^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{2}x \right)^{\frac{2}{3}} dx \\
= & \frac{8}{5} \left(u_0^{\frac{5}{4}} - \left(u_0^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{2}x_0 \right)^{\frac{5}{3}} \right).
\end{aligned}
$$

Punto 8

Se vale $x_0 < l$, che relazione ci deve essere tra u_0 e l?

Dato che $l > x_0$ allora dall'equazione (12) ricaviamo che $l > \frac{2}{3}u_0^{\frac{3}{4}}$.

Punto 9

Usando $a^2 + b^2 \geq -2ab$, stimare (nel caso generale sotto le sole ipotesi $u(0) = u_0 > 0$ e $u(l) = 0$) $F(u)$ dal basso in termini di u_0. Quando vale l'uguaglianza? Dedurre che la relazione trovata al punto 8) tra l e u_0 è anche sufficiente per avere $x_0 < l$.

Sfruttando la disequazione $a^2 + b^2 \geq -2ab$ sul funzionale F con $a = u'/\sqrt{2}$ e $b = \sqrt{2}u^{\frac{1}{4}}$, otteniamo la seguente minorazione

$$
F(u) \geq T(u) := -2 \int_0^l u(x)^{\frac{1}{4}} u'(x) dx
$$

dove l'uguaglianza è verificata quando $a = -b$, ovvero se u risolve $u' = -2u^{\frac{1}{4}}$ (cfr (10)). Inoltre, il funzionale $T(u)$ è integrabile e vale

$$
T(u) = \frac{8}{5}(u(0)^{\frac{5}{4}} - u(l)^{\frac{5}{4}}) \tag{13}
$$

Dipende, quindi, solo dai valori al bordo di u. Osserviamo che, fissati i valori al bordo, il valore in (13) ci definisce un lower bound su tutti i possibili valori di $F(u)$. Pertanto, se si trova una funzione u^* che verifica l'uguaglianza, allora u^* è un minimo per F. Supponiamo, quindi, che esista u tale che $u(0) = u_0$, $u(l) = 0$ e $F(u) = T(u)$, allora deve risolvere anche il problema di Cauchy (10) che ha soluzione (11) (unica in $[0, x_0)$) con $x_0 = \frac{2}{3}u_0^{\frac{3}{4}}$. Dunque, se $l > \frac{2}{3}u_0^{\frac{3}{4}}$ allora $l > x_0$.

Punto 10

Tracciare qualitativamente $u(x)$, a seconda del legame tra l e u_0.

Richiamiamo il nostro funzionale disaccoppiato $F(u) = \int_a^b \left\{ \frac{u'(x)^2}{2} + 2\sqrt{|u(x)|} \right\} dx$ per cui abbiamo verificato che esiste una soluzione del problema di minimo con condizioni di Dirichlet $u(0) = u_0 > 0$ e $u(l) = 0$ e che la soluzione ottimale u verifica

$$\begin{cases} (u')^2 = 4u^{\frac{1}{2}} & x \in (0, x_0) \\ u(0) = u_0 > 0 \end{cases}$$

supponendo u_0 sufficientemente piccolo rispetto all'intervallo $(0, l)$, ossia supponendo $l > \frac{2}{3}u_0^{\frac{3}{4}}$.

Ragionando qualitativamente si avrà che se $x_0 < l$, allora la funzione u minimizzante sarà decrescente, convessa (dall'equazione (6) e dal fatto che $u > 0$ in $(0, x_0)$) e identicamente nulla nell'intervallo (x_0, l) come si può vedere da anche dalla sua scrittura analitica in (11).

Nel caso in cui, invece, si abbia un dominio molto piccolo, ovvero $l \leq \frac{2}{3}u_0^{\frac{3}{4}}$ allora il comportamento qualitativo della soluzione u sarà differente. La soluzione sarà ancora convessa e decrescente e si verificherà $x_0 = l$, dunque non ci saranno tratti costantemente nulli. Dimostreremo, inoltre, che $u'(l) < 0$ strettamente (nel caso di disuguaglianza stretta $l < \frac{2}{3}u_0^{\frac{3}{4}}$).

La funzione u è necessariamente strettamente positiva in $(0, l)$ e decrescente. Possiamo, quindi, scrivere l'equazione di Beltrami

$$\frac{1}{2}u'(x)^2 - 2\sqrt{u(x)} = C,$$

dove C è incognita, ed esprimere il problema in forma normale come:

$$\begin{cases} u' = -(2C + 4\sqrt{u})^{\frac{1}{2}} & x \in (0, l) \\ u(0) = u_0 > 0 \end{cases} \tag{14}$$

Calcoliamo ora il limite di u' per $x \to l^-$:

$$\lim_{x \to l^-} u'(x) = -\sqrt{2C}.$$

Osserviamo che la scrittura ha senso solo per $C \geq 0$. Verifichiamo ora che $C > 0$ di modo da poter concludere che $u'(l) \neq 0$.

Consideriamo il competitore u_ε definito nel punto 5), che notiamo essere un competitore ammissibile per $\varepsilon \leq 0$. Dal momento che, per ipotesi, u è minimizzante per F, si avrà che

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\hat{F}(0) < 0$$

dove il minore stretto segue dal fatto che se valesse l'uguaglianza si ricadrebbe nei casi considerati precedentemente con la presenza di $x_0 < l$. Otteniamo, quindi,

$$\frac{1}{l}\int_0^l \Big(-\frac{1}{2}u'(x)^2 + 2\sqrt{u(x)} \Big) dx < 0 \Rightarrow \frac{1}{l}\int_0^l -C dx < 0$$

In conclusione, $C > 0$ e, dunque, la derivata prima di u in l è non nulla (cvd).

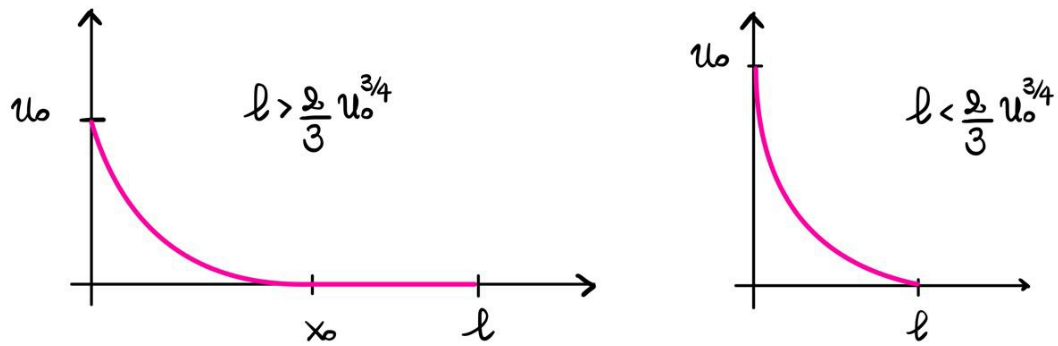

Figure 2: Grafico qualitativo della soluzione u al variare del legame tra l e u_0

Punto 11

Com'è fatta la u nel caso $u(0) = u_0 > 0$ e $u(l) = u_l < 0$, al variare di l?

Dividiamo anche in questo punto il problema in due sotto casi.

Se l'intervallo $[0, l]$ è sufficientemente grande rispetto a u_0 e u_l, ovvero se $l > \frac{2}{3}(u_0^{\frac{3}{4}} + (-u_l)^{\frac{3}{4}})$, possiamo sfruttare la simmetria del problema rispetto all'asse $u = 0$ e concludere che esistono due punti, $x_0 := \min\{x \in (0, l) \mid u(x) = 0\}$ e $x_l := \max\{x \in (0, l) \mid u(x) = 0\}$, tali che la soluzione è decrescente e convessa in $[0, x_0)$, è identicamente nulla in $[x_0, x_l]$ e decrescente e concava in $(x_l, l]$. Inoltre, nei punti x_0 e x_l il raccordo con la soluzione nulla avviene con regolarità C^1. Se ne può anche trovare una scrittura analitica esatta, sfruttando le equazioni di Beltrami con costante $C = 0$ nei due sotto intervalli $[0, x_0)$ e $(x_l, l]$.

Se, invece, $l < \frac{2}{3}(u_0^{\frac{3}{4}} + (-u_l)^{\frac{3}{4}})$ non riusciamo a determinare un'espressione analitica della soluzione, ma possiamo osservarne alcune proprietà. La soluzione è decrescente e per continuità esiste un punto x_0 tale che $u(x_0) = 0$. Inoltre, dalle equazioni di Eulero-Lagrange possiamo concludere che la soluzione ottimale è convessa in $[0, x_0)$ e concava in $(x_0, l]$. Dedichiamo il resto della trattazione a dimostrare che u è derivabile.

Sia u funzione minimizzante del funzionale F; consideriamo il competitore (ispirati da quanto fatto al punto 5)

$$u_\varepsilon(x) := \begin{cases} u\left(\frac{x_0}{x_0+\varepsilon} x\right), & \text{se } 0 \le x \le x_0 + \varepsilon \\ u\left(l - \frac{l-x_0}{l-x_0-\varepsilon}(l-x)\right) & \text{se } x > x_0 + \varepsilon \end{cases}$$

con $|\varepsilon|$ sufficientemente piccolo. Posso studiare, $\frac{d}{d\varepsilon}\hat{F}(0)$ che per le condizioni di ottimalità deve valere 0. Come visto in precedenza siamo nelle ipotesi del Teorema 5, quindi

$$0 = \hat{F}'(0) = \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} \left[\frac{1}{2}u'(x)^2 - 2\sqrt{u(x)}\right] dx - \frac{1}{l - x_0} \int_{x_0}^{l} \left[\frac{1}{2}u'(x)^2 - 2\sqrt{|u(x)|}\right] dx.$$

In ognuno dei due integrali è possibile risolvere l'equazione di Beltrami con coefficienti C_1 e C_2, poiché essendo u minimizzante nell'intervallo $[0, l]$, lo sarà anche nei singoli intervalli: $[0, x_0]$, $[x_0, l]$. Avrò allora che

$$\frac{1}{x_0}\int_0^{x_0} C_1 dx - \frac{1}{l - x_0}\int_{x_0}^{l} C_2 dx = 0 \;\Rightarrow\; C_1 - C_2 = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = C_2 =: C.$$

La soluzione u soddisfa quindi le equazioni di Beltrami:

$$\frac{1}{2}u'(x)^2 - 2\sqrt{u(x)} = C \quad \text{su} \quad x \in (0, x_0)$$

e

$$\frac{1}{2}u'(x)^2 - 2\sqrt{|u(x)|} = C \quad \text{su} \quad x \in (x_0, l)$$

Da cui si giunge alla conclusione che:

$$\lim_{x \to x_0^-} u'(x) = \lim_{x \to x_0^-} -(2C + \sqrt{4u})^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{2C}$$
$$\lim_{x \to x_0^+} u'(x) = \lim_{x \to x_0^+} -(2C + \sqrt{4u})^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{2C}$$

dunque u è derivabile in x_0 e quindi su tutto l'intervallo $[0, l]$.

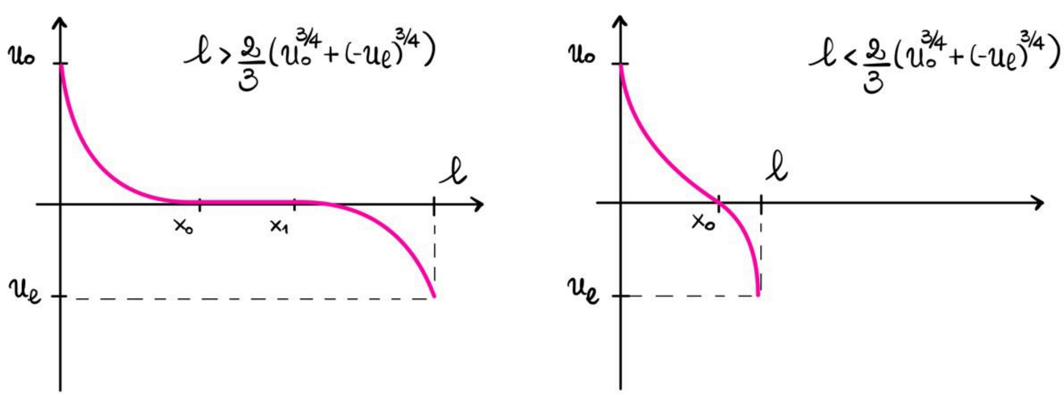

Figure 3: Grafico qualitativo della soluzione u al variare di l rispetto ai valori u_0 e u_l

Appendice

Teorema 1 ('Condizioni su g per avere semicontinuità debole e coercività')
Supponiamo che $g(x,y)$ sia una funzione continua in y $\forall x \in [a,b]$ fissato, ***e*** *che esista un controllo 'da sotto' del tipo*

$$-g(x,y) \leq h(x)|y|^{\alpha} + c \quad \forall x \in [a,b], \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad h \in L^1((a,b)) \text{ e } \alpha \in [0,2)$$

Allora il funzionale $F(u) = \int_a^b u'(x)^2 dx + \int_a^b g(x,u(x))dx$ è:

- ***Coercivo*** *su $K_\gamma = \{u \in H^1(a,b) \mid u(a) = \gamma\}$ oppure $K^\beta = \{u \in H^1(a,b) \mid u(b) = \beta\}$ oppure $K_\gamma^\beta = \{u \in H^1(a,b) \mid u(a) = \gamma \text{ e } u(b) = \beta\}$, cioè se $u \in K$ e $F(u) \leq l$ allora $||u||_{H^1} \leq c_l$ con c_l indipendente da u;*

- ***Debolmente semicontinuo inferiormente*** *su H^1, cioè se $u_n \rightharpoonup u$ in H^1 allora*

$$\int_a^b g(x,u(x)) \leq \liminf_n \int_a^b g(x,u_n(x))dx$$

Teorema 2 (Teorema. 'Esistenza dei minimi')
Sia X spazio di Banach riflessivo $F : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ debolmente semicontinua inferiormente e coerciva. Allora F ammette minimo su X.

Teorema 3 ('Esistenza dei minimi per F disaccoppiati con almeno un dato al bordo')
Nelle ipotesi del teorema 1, il problema $\min\limits_{v \in K} F(v)$ dove $K = K_\gamma$ oppure $K = K^\beta$ oppure $K = K_\gamma^\beta$ ha almeno una soluzione $u \in K$.

Teorema 4 ('Eulero Lagrange per funzionali disaccoppiati')
Sia $u \in H^1((a,b))$ una soluzione di $\min\limits_{v \in K} F(v)$ dove $K = H^1$, $K = K_\gamma$ oppure $K = K^\beta$ oppure $K = K_\gamma^\beta$ e $F(u) = \frac{1}{2}\int_a^b u'(x)^2 dx + \int_a^b g(x,u(x))dx$

1. *Se $\frac{\partial g}{\partial y}$ esiste ed è continua su $[a,b] \times \mathbb{R}$, allora vale Eulero-Lagrange in forma debole:*

$$\int_a^b \left[\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\ v(x) + u'(x)v'(x)\right] dx = 0;$$

2. *Inoltre $u \in C^2([a,b])$ e vale Eulero-Lagrange in forma forte:*

$$u''(x) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,u(x))\ \forall x \in [a,b];$$

3. *Infine, se $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ è di classe C^k su $[a,b] \times \mathbb{R}$, allora $u \in C^{k+2}([a,b])$.*

Teorema 5 ('Derivazione sotto il segno di integrale')
Sia (Ω, A, μ) uno spazio con misura e sia $h(x,t) : \Omega \times I \to \mathbb{R}$, dove $I = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ è un intervallo, e h è una funzione tale che $h(\cdot,t) \in L^1(\Omega)$ $\forall t \in I$.
Ponendo $\Phi(t) := \int_\Omega h(x,t)\, d\mu(x)$, $t \in I$, si ha che se:

- *per* μ-*q.o.*, $x \in \Omega$, $\exists\, \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\ \forall t \in I$*;*
- *dominazione:* $\exists\, g \in L^1(\Omega)$ *tale che* $\left|\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\right| \le g(x)$ *per q.o.* $x \in \Omega,\ \forall t \in I$*;*

allora $\exists\, \Phi'(t_0)$ *e* $\Phi'(t_0) = \int_\Omega \frac{\partial h}{\partial t}(x,t_0)\, d\mu(x)$.