Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Departamento de Matemática

MTM 131 – Geometria Analítica e Cálculo Vetorial – 2019/2

Prof. Fabiana Lopes Fernandes

Lista L4P1 – Circunferências

Instruções: Utilizar apenas conceitos e fórmulas vistos em aula para resolver os exercícios. Bom trabalho!

1. Determine a equação da circunferência de centro $C = (2, 0)$ que passa pelo ponto de interseção entre as retas $r : x + y - 6 = 0$ e $s : x - y - 2 = 0$.

2. Completando os quadrados, decida se cada equação abaixo define uma circunferência, um ponto ou um conjunto vazio.

   (a) $2x^2 + 2y^2 - 3x + y - 1 = 0$

   (b) $-x^2 - y^2 + 6x - 4y + 3 = 0$

   (c) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 26 = 0$

   (d) $4x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 21 = 0$

3. Considere a circunferência $\gamma : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ e a reta $r : x + y - 8 = 0$. Determine a equação da reta perpendicular a r, que passa pelo centro de γ.

4. Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos A e B dados e cujo centro C pertence à reta indicada.

   (a) $A = (2, 1)$, $B = (3, 0)$ e C está no eixo das abscissas

   (b) $A = (8, 4)$, $B = (1, -3)$ e C pertence à reta $r : x - y - 3 = 0$

5. Considere as circunferências $\gamma : x^2 + y^2 + 8x - 6y + 5 = 0$ e $\lambda : 4x^2 + 4y^2 - 24x + 4y + 17 = 0$. Determine os pontos de interseção entre as circunferências e a reta que une seus centros.

6. Determine a equação da circunferência inscrita no triângulo de vértices $O = (0, 0)$, $M = (8, 0)$ e $N = (0, 8)$.

7. Em cada caso, avalie a posição relativa entre a reta r e a circunferência γ dadas abaixo.

   (a) $\begin{cases} r : 3x + 4y + 4 = 0, \\ \gamma : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} r : 12x - 5y - 5 = 0, \\ \gamma : x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} r : 4x - 3y = 10, \\ \gamma : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20 \end{cases}$

8. Fixado o número real a, para quais valores de b, a reta $r : y = ax+b$ é tangente à circunferência de centro na origem e raio R?

9. A reta tangente, no ponto P, à circunferência de centro na origem e raio 3 é paralela à reta $r : y = -2x + 1$. Quais são as coordenadas de P? E se o raio da circunferência fosse 5?

10. Sabendo que a reta $r : x + y - 3 = 0$ é secante à circunferência de centro $C = (-2, 1)$ e raio $\sqrt{10}$ nos pontos A e B, calcule a área do triângulo ABC.

11. Determine os valores de k para a reta $r : x - y + k = 0$ seja secante à circunferência $\gamma : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0$.

12. Determine os possíveis valores de $k \in \mathbb{R}$ para que a reta $r : x + 2y + k = 0$ não seja nem secante, nem tangente à circunferência $\gamma : x^2 + y^2 + 8x - 4y + 19 = 0$.

13. A reta $r : x - y = 2$ e a circunferência $\gamma : x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ interceptam-se nos pontos A e B. Dertermine a equação da mediatriz da corda $\overline{AB}$ e mostre que essa reta contém o centro de γ.

14. Dados os pontos $A = (2, 4)$, $B = (3, 1)$ e $C = (5, 3)$, determine as equações das mediatrizes dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e determine as coordenadas do ponto de interseção entre essas retas. A partir daí, determine a equação da circunferência que passa por A, B e C.

15. Determine as equações das retas tangentes à circunferência $\gamma : x^2 + y^2 + 10x - 4y + 9 = 0$, que são paralelas à reta $r : 2x - y = 0$.

16. Mostre que o ponto $P = (7, 0)$ é exterior à circunferência $\gamma : x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$ e determine as equações das tangentes a γ conduzidas por P. Faça um esboço no plano.

17. Determine a equação da circunferência que é tangente aos eixos coordenados e à reta $y = 6$.

18. Determine a equação da circunferência que passa pelo ponto $A = (4, 8)$ e tangencia as retas $y = 0$ e $y = 10$.

19. Determine a equação da circunferência com centro no ponto $C = (2, 5)$, que é tangente à reta $r : y = 3x + 1$.

20. Calcule a área do quadrilátero formado pelos centros e pelos pontos de interseção entre as circunferências $\gamma : x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$ e $\lambda : x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0$.

21. Em cada item, estude a posição relativa entre as circunferências dadas.

    (a) $\gamma : x^2 + y^2 - 2 = 0, \;\; \lambda : x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0$

    (b) $\gamma : x^2 + y^2 + 4x - 10y + 16 = 0, \;\; \lambda : x^2 + y^2 - 14x + 2y - 2 = 0$

    (c) $\gamma : x^2 + y^2 - 6x - 12y + 9 = 0, \;\; \lambda : x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$

    (d) $\gamma : x^2 + y^2 - 2x = 0, \;\; \lambda : x^2 + y^2 - 4x - 2y - 31 = 0$

22. Mostre que as circunferências $\gamma : x^2 + y^2 + 2x = 0$ e $\lambda : x^2 + y^2 - 4x = 0$ são tangentes exteriormente. Determine o ponto comum a ambas e a reta tangente comum.

23. Considere a circunferência $\gamma : x^2 + y^2 - 16x - 6y + 53 = 0$ e o ponto $P = (2, 0)$. Determine o ponto de γ que se encontra:

    (a) mais próximo de P

    (b) mais afastado de P.

RESPOSTAS

1 $(x-2)^2+y^2=8$

2 (a) Circunferência de centro $C=\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{4}\right)$ e raio $R=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.
(b) Circunferência de centro $C=(3,-2)$ e raio $R=4$.
(c) Ponto $(5,-1)$.
(d) Conjunto vazio.

3 $x-y-2=0$

4 (a) $(x-2)^2+y^2=1$
(b) $(x-4)^2+(y-1)^2=25$

5 $r\cap\gamma=\{(0,1),\ (-8,5)\}$; $r\cap\lambda=\left\{\left(5,-\frac{3}{2}\right),\ \left(1,\frac{1}{2}\right)\right\}$

6 O centro é $C=(8+4\sqrt{2},8+4\sqrt{2})$ e o raio é $R=8+4\sqrt{2}$

7 (a) r é exterior a γ.
(b) r é tangente a γ.
(c) r é secante a γ.

8 $b=\pm R\sqrt{a^2+1}$

9 $P=\left(\frac{6\sqrt{5}}{5},\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$ ou $P=\left(-\frac{6\sqrt{5}}{5},-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$

10 4

11 $0<k<4$

12 $k<-\sqrt{5}$ ou $k>\sqrt{5}$

13 $x-y-2=0$

14 Mediatriz de $\overline{AB}$: $x-3y+5=0$. Mediatriz de $\overline{BC}$: $x+y-6=0$. Ponto de interseção: $P=\left(\frac{13}{4},\frac{11}{4}\right)$. Equação da circunferência: $(4x-13)^2+(4y-11)^2=2$.

15 $2x-y+2=0$ ou $2x-y+22=0$

16 $y=0$ e $4x-3y-28=0$

17 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$

18 $x^2+(y-5)^2=25$ ou $(x-8)^2+(y-5)^2=25$

19 $(x-2)^2+(y-5)^2=\frac{2}{5}$

20 $3\sqrt{7}$

21 (a) γ é tangente interiormente a λ.
(b) γ e λ são tangentes exteriormente.
(c) λ é tangente interiormente a γ.
(d) γ é interior a λ.

22 O ponto comum é a origem e a reta tangente comum é $x=0$.

23 O ponto mais próximo é $A=(4,1)$ e o mais afastado é $B=(12,5)$.