



Teória obvodov

Semestrálny projekt – riešenie obvodov

22. decembra 2013

Autor: Filip Gulán, xgulan00@stud.fit.vutbr.cz
Fakulta Informačných Technológií
Vysoké Učenie Technické v Brne

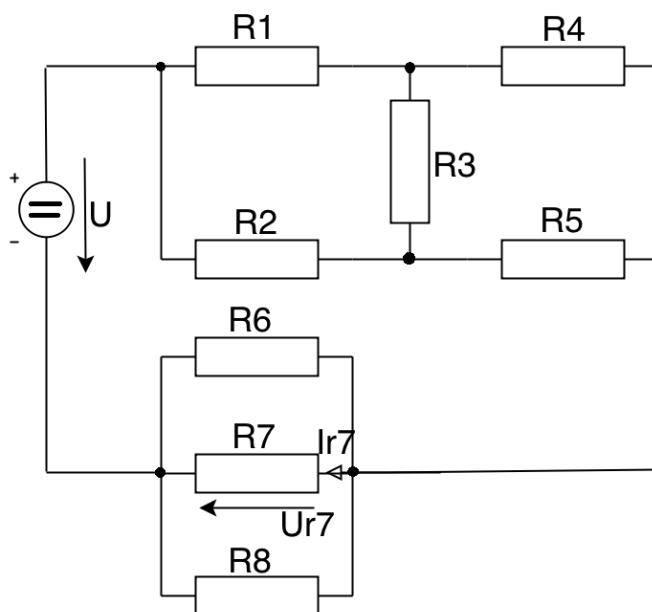
Obsah

Príklad 1 Varianta C	3
Príklad 2 Varanta B	6
Príklad 3 Varianta F	9
Príklad 4 Varianta C	12
Príklad 5 Varianta B	15
Príklad 6 Varianta F	18
Súhrn výsledkov	21

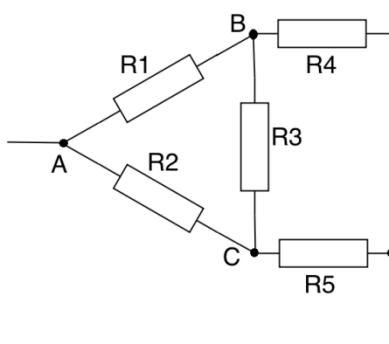
Príklad 1 Varianta C

Stanovte napätie U_{R7} a prúd I_{R7} . Použite metódu postupného zjednodušovania obvodu.

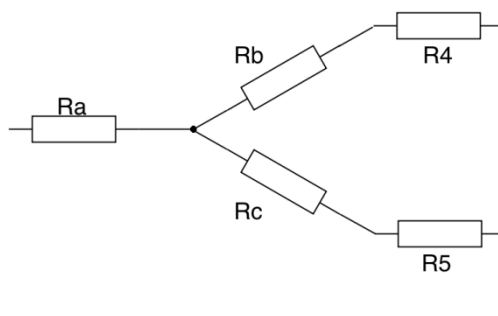
U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
100	450	810	190	220	220	720	260	180



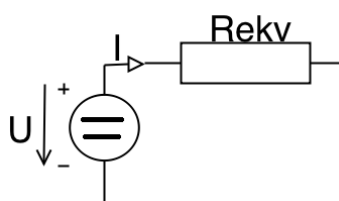
Najprv som urobil v časti obvodu nasledujúce úpravy.



Transformoval som trojuholník na hviezdu .



A nakoniec som postupne zjednodušoval celý obvod aby som dostal vzorec pre R_{ekv} .



$$R_{ekv} = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2 + R_3} + \frac{\left(\frac{R_1 * R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4\right) * \left(\frac{R_2 * R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_5\right)}{\left(\frac{R_1 * R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4\right) + \left(\frac{R_2 * R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_5\right)} + \frac{\left(\frac{R_6 * R_7}{R_6 + R_7}\right) * R_8}{\left(\frac{R_6 * R_7}{R_6 + R_7}\right) + R_8}$$

$$R_{ekv} = 499,25988737 \, \Omega$$

Vďaka R_{ekv} som si vypočítal celkový prúd v obvode.

$$I = U/R_{ekv}$$

$$I = 100/499,25988737$$

$$I = 0,20226 \, A$$

Pomocou I som si vypočítal U_{r7} . Keďže viem, že R_6 , R_7 a R_8 sú zapojené paralelne, teda majú rovnaký napätie tak môžem napísať, že $U_{r678} = U_{r7}$.

$$U_{r7} = I * \frac{\left(\frac{R_6 * R_7}{R_6 + R_7}\right) * R_8}{\left(\frac{R_6 * R_7}{R_6 + R_7}\right) + R_8}$$

$$U_{r7} = 0,20226 * \frac{\left(\frac{720 * 260}{720 + 260}\right) * 180}{\left(\frac{720 * 260}{720 + 260}\right) + 180}$$

$$U_{r7} = 18,7441 \, V$$

A teda pre I_{r7} platí nasledovný vzťah.

$$I_{r7} = U_{r7}/R_7$$

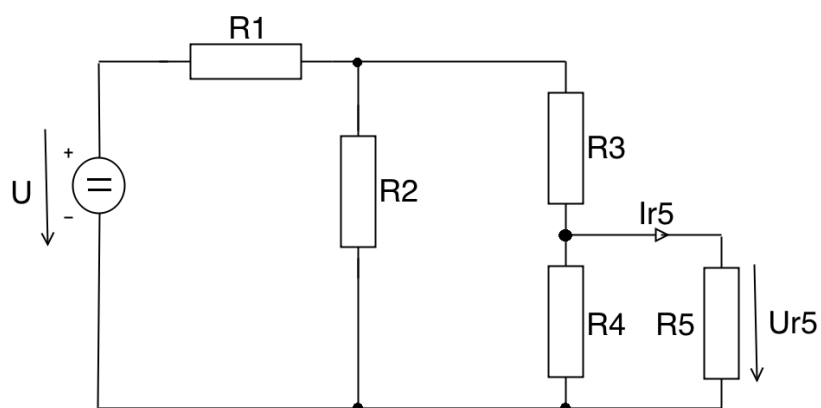
$$I_{r7} = 18.744095/260$$

$$I_{r7} = 0.0721 \text{ A}$$

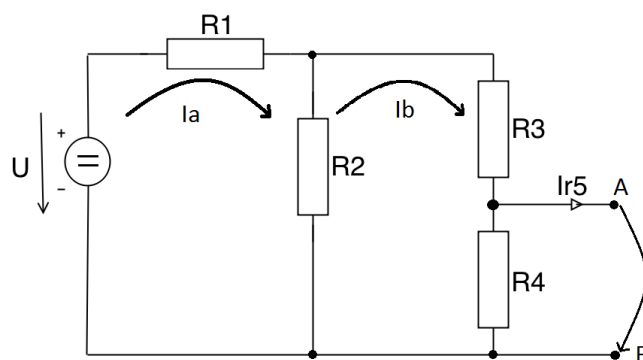
Príklad 2 Varianta B

Stanovte napätie U_{R5} a prúd I_{R5} . Použite metódu Thevenivovej vety.

U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
100	310	610	220	120	200



Prekreslil som si obvod a odpojil rezistor medzi svorkami A, B.



Zostavil som si rovnice pre smyčku I_a a I_b .

$$R_1 I_a + R_2 I_a - R_2 I_b - U = 0$$

$$R_3 I_b + R_4 I_b + R_2 I_b - R_2 I_a = 0$$

Vyjadril som si I_a z druhej rovnice a dosadil do prvej rovnice.

$$I_a = \frac{R_3 + R_4 + R_2}{R_2} I_b$$

$$R_1 \left(\frac{R_3 + R_4 + R_2}{R_2} I_b \right) + R_2 \left(\frac{R_3 + R_4 + R_2}{R_2} I_b \right) - R_2 * I_b - U = 0$$

$$310 \left(\frac{950}{610} I_b \right) + 610 \left(\frac{950}{610} I_b \right) - 610 * I_b - 100 = 0$$

$$I_b = 0,121538 A$$

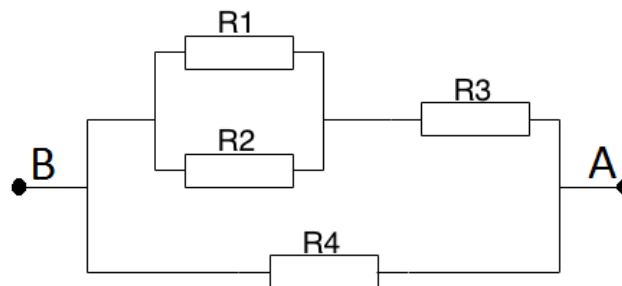
Keďže na R_4 a R_5 je rovnaké napätie môžeme napísať vzťah pre výpočet U_i .

$$U_i = I_b * R_4$$

$$U_i = 0,121538 * 120$$

$$U_i = 14,584578 V$$

Pri ďalšom výpočte som si obvod prekreslil bez R_5 .



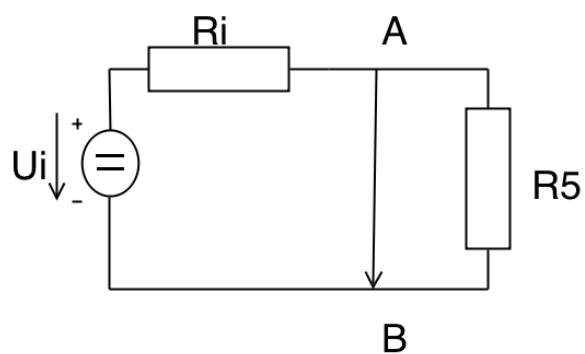
A vypočítal R_i .

$$R_i = \frac{\left(\frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \right) * R_4}{\left(\frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \right) + R_4}$$

$$R_i = \frac{\left(\frac{310 * 610}{310 + 610} + 220 \right) * 120}{\left(\frac{310 * 610}{310 + 610} + 220 \right) + 120}$$

$$R_i = 93,604304 \Omega$$

Nakoniec som si zostavil nasledovný obvod.



A vypočítal som si I_{r5} a U_{r5} .

$$I_{r5} = \frac{U_i}{R_i + R_5}$$

$$I_{r5} = 0,0497 A$$

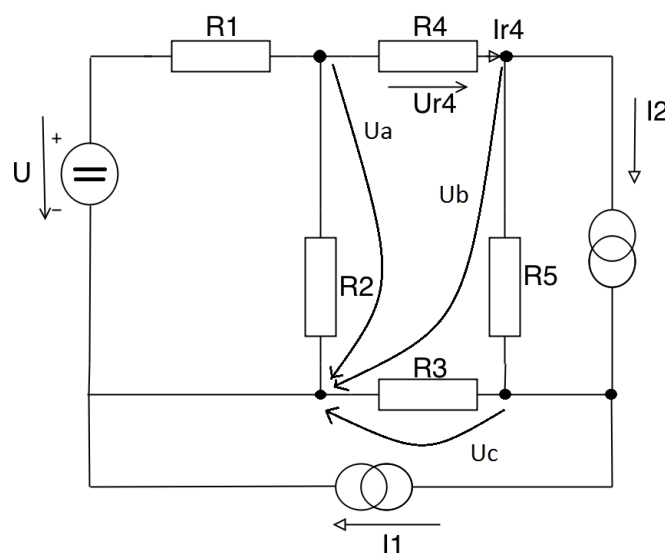
$$U_{r5} = R_5 * I_{r5}$$

$$U_{r5} = 9,9348 V$$

Príklad 3 Varianta F

Stanovte napätie U_{R4} a prúd I_{R4} . Použite metódu uzlových napätí (U_A , U_B , U_C).

U [V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
145	75	0,85	480	440	530	360	255



Vytvoril som si jednotlivé rovnice pre uzly A,B,C.

$$I_{R1} = I_{R2} + I_{R4}$$

$$I_{R4} = I_{R5} + I_2$$

$$I_1 + I_{R3} = I_{R5} + I_2$$

Zostavil som si rovnice pre jednotlivé prúdy.

$$R_1 I_{R1} + U_a - U = 0$$

$$R_2 I_{R2} - U_a = 0$$

$$R_4 I_{R4} + U_b - U_a = 0$$

$$R_5 I_{R5} + U_c - U_b = 0$$

$$R_3 I_{R3} + U_c = 0$$

Vyjadril som si jednotlivé prúdy.

$$I_{r1} = \frac{U - U_a}{R_1}$$

$$I_{r2} = \frac{U_a}{R_2}$$

$$I_{r3} = \frac{U_c}{R_3}$$

$$I_{r4} = \frac{U_a - U_b}{R_4}$$

$$I_{r5} = \frac{U_b - U_c}{R_5}$$

Dosadil som si prúdy do jednotlivých rovníc pre uzly.

$$\frac{U - U_a}{R_1} = \frac{U_a}{R_2} + \frac{U_a - U_b}{R_4}$$

$$\frac{U_a - U_b}{R_4} = I_2 + \frac{U_a - U_b}{R_4}$$

$$\frac{U_c}{R_3} + I_1 = I_2 + \frac{U_b - U_c}{R_5}$$

Rovnice som si zjednodušil.

$$R_2 R_4 (U - U_a) = R_1 R_4 (U_a) + R_1 R_2 (U_a - U_b)$$

$$R_5 (U_a - U_b) = R_5 R_4 I_2 + R_4 (U_b - U_c)$$

$$R_5 U_c + R_3 R_5 I_1 = R_3 R_5 I_2 + R_3 (U_b - U_c)$$

Dosadil som si konkrétne hodnoty a vypočítal.

$$5425U_a - 2112U_b = 229680$$

$$-255U_a + 615U_b - 360U_c = -78030$$

$$530U_b - 785U_c = 10021372,5$$

Zostavil som si maticu a získal hodnoty.

$$U_c = -24313,02 \text{ V}$$

$$U_b = -17102,55 \text{ V}$$

$$U_a = -6617,05 \text{ V}$$

Vďaka získaným hodnotám som dosadil do rovnice I_{r4} konkrétne hodnoty.

$$I_{r4} = \frac{U_a - U_b}{R_4}$$

$$I_{r4} = \frac{-6617,05 - (-17102,55)}{360}$$

$$I_{r4} = 29,1264 \text{ A}$$

Pomocou I_{r4} som vypočítal U_{r4} .

$$U_{r4} = I_{r4} * R_4$$

$$U_{r4} = 29,1264 * 360$$

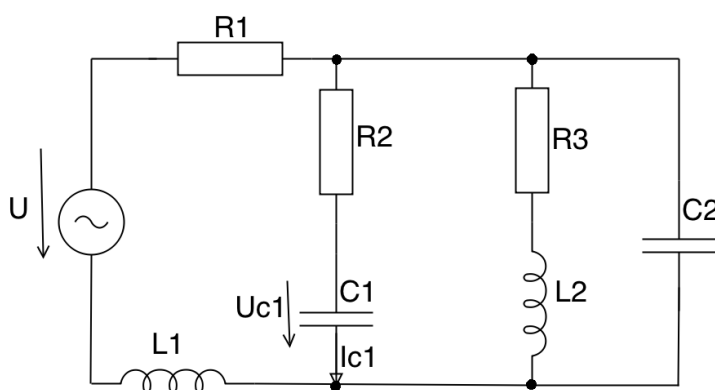
$$U_{r4} = 10485.4968 \text{ V}$$

Príklad 4 Varianta C

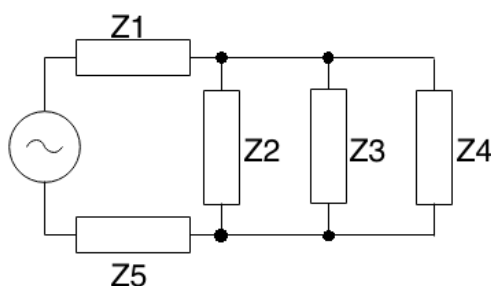
Pre napájacie napätie platí: $u = U \cdot \sin(2\pi ft)$. Vo vzťahu pre napätie na kondenzátore C_1 : $u_{c1} = U_{c1} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{c1})$ určte $|U_{c1}|$ a φ_{c1} . Použite metódu zjednodušovania obvodu.

Poznámka: Pomocné smery šípok napájacích zdrojov platí pre špeciálny časový okamžik ($t = \pi/2\omega$)

U [V]	R ₁ [Ω]	R ₂ [Ω]	R ₃ [Ω]	L ₁ [mH]	L ₂ [mH]	C ₁ [μF]	C ₂ [μF]	f [Hz]
55	180	175	410	450	370	110	185	80



Obvod som si prekreslil, aby sa tam nachádzali iba rezistory, ktoré reprezentujú impedancie jednotlivých vetiev.



Previedol som si jednotky do jednotiek SI sústavy.

$$C_1 = 110 \mu F = 0,00011 F$$

$$C_2 = 185 \mu F = 0,000185 F$$

$$L_1 = 450 mH = 0,45 H$$

$$L_2 = 370 mH = 0,37 H$$

Vypočítal som si jednotlivé impedancie a nakoniec celkovú impedanciu.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi * 80 = 502,65482 \text{ rad/s}$$

$$Z_1 = R_1 = 180 \Omega$$

$$Z_2 = R_2 - j \frac{1}{\omega C_1} = (175 - j18,085789) \Omega$$

$$Z_3 = R_3 + j\omega L_2 = (410 + j185,9789534) \Omega$$

$$Z_4 = -j \frac{1}{\omega C_2} = -j10,753717 \Omega$$

$$Z_5 = j \omega L_1 = j226,194669 \Omega$$

Obvod som zjednodušil a vypočítal celkovú impedanciu.

$$1/Z_{234} = 1/Z_2 + 1/Z_3 + 1/Z_4$$

$$Z_{234} = (1,302643 + j10,79239956) \Omega$$

$$Z = Z_1 + Z_{234} + Z_5 = (181,302643 + j236,98706854) \Omega$$

Vďaka Z som si vypočítal prúd v obvode.

$$I = U/Z = (0,111998778 + j0,146397547) A$$

Vďaka I som si vypočítal napätie na U_{z234} .

$$U_{z234} = Z_{234} * I = (-1,4340858 + j1,3994389) V$$

Keďže v R_2 , R_3 a R_4 je rovnaké napätie môžeme napísať nasledujúci vzťah.

$$I_{z2} = U_{z234} / Z_2 = (-0,008925889 + j0,0070743266) A$$

So získanými hodnotami som si vypočítal U_{c1} .

$$U_{c1} = -j \frac{1}{\omega C_1} = (0,127945 - j0,161432)V$$

$$|U_{c1}| = \sqrt{0,127945^2 + 0,161432^2} = 0,0665 \text{ V}$$

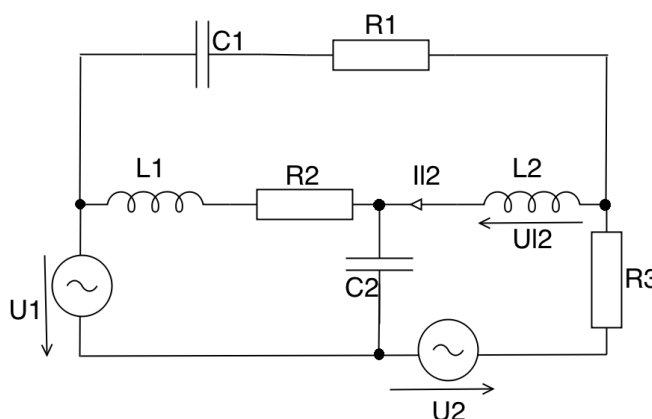
$$\Phi_{c1} = \arctan\left(-\frac{0,161432}{0,127945}\right) = -51,6^\circ$$

Príklad 5 Varianta B

Pre napájacie napätie platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$. Vo vzťahu pre napätie na cievke L_2 : $u_{l2} = U_{l2} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{l2})$ určte $|U_{l2}|$ a φ_{l2} . Použite metódu smyčkových prúdov.

Poznámka: Pomocné smery šípok napájacích zdrojov platí pre špeciálny časový okamžik ($t = \pi/2\omega$)

U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [μ F]	C_2 [μ F]	f [Hz]
25	40	115	150	130	100	85	220	95	80



Previedol som si jednotky do jednotiek SI sústavy.

$$C_1 = 220 \mu F = 0,00022 F$$

$$C_2 = 95 \mu F = 0,000095 F$$

$$L_1 = 100 mH = 0,1 H$$

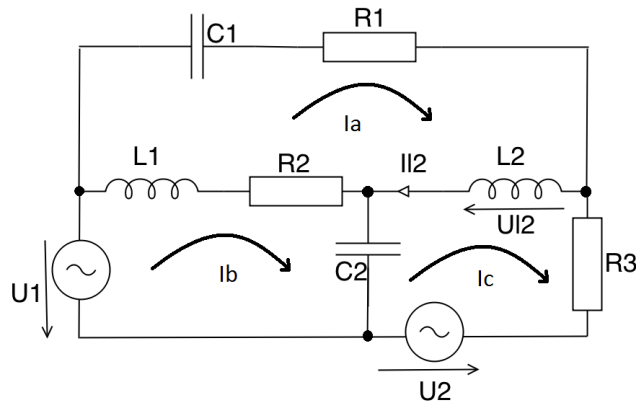
$$L_2 = 85 mH = 0,085 H$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 80 = 502,65482 \text{ rad/s}$$

$$X_L = \omega L$$

$$X_C = 1/(\omega C)$$

Zostavil som si 3 rovnice s 3 neznámymi podľa obrázka.



$$I_a: -jX_{C1} * I_a + R_1 * I_a + jX_{L2} * I_a - jX_{L2} * I_c + R_2 * I_a - R_2 * I_b + jX_{L1} * I_a - jX_{L1} * I_b = 0$$

$$I_b: jX_{L1} * I_b - jX_{L1} * I_a + R_2 * I_b - R_2 * I_a - jX_{C2} * I_b + jX_{C2} * I_c - u_1 = 0$$

$$I_c: -jX_{C2} * I_c + jX_{C2} * I_b + jX_{L2} * I_c - jX_{L2} * I_a + R_3 * I_c - u_2 = 0$$

Zjednodušil som rovnice a vypočítal prúdy I_a , I_b a I_c .

$$I_a * (R_1 + R_2 + jX_{L2} + jX_{L1} - jX_{C1}) - I_b * (R_2 + jX_{L1}) - I_c * jX_{L2} = 0$$

$$-I_a * (R_2 + jX_{L1}) + I_b * (R_2 + jX_{L1} - jX_{C2}) + I_c * jX_{C2} = u_1$$

$$-I_a * jX_{L2} + I_b * jX_{C2} + I_c * (R_3 + jX_{L2} - jX_{C2}) = u_2$$

$$I_a = (0,159884 - j0,0516333) A$$

$$I_b = (0,26073 - j0,162614) A$$

$$I_c = (0,239977 + j0,0674413) A$$

Vypočítané hodnoty som dosadil do rovnice pre výpočet I_2 .

$$I_2 = I_a - I_c$$

$$I_2 = (-0,080009 - j0,119075) A$$

Vďaka I_2 som si ľahko vyrátal $|U_{I2}|$.

$$U_{I2} = jX_{I2} * I_2$$

$$U_{I2} = (-5,08756 + j3,41844) \text{ V}$$

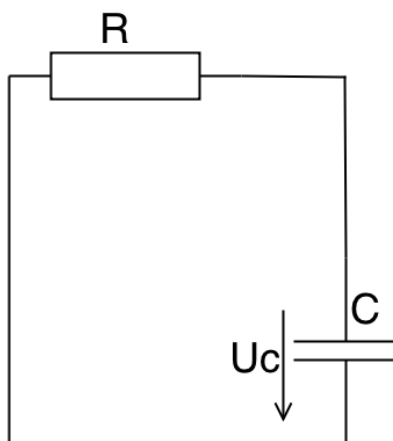
$$|U_{I2}| = \sqrt{5,08756^2 + 3,41844^2} = 6,1294 \text{ V}$$

$$L_2 = \arctan\left(\frac{-3,41844}{5,08756}\right) = 146,1^\circ$$

Príklad 6 Varianta F

Zostavte diferenciálnu rovnicu popisujúcu chovanie obvodu na obrázku, ďalej ju upravte dosadením hodnôt parametrov. Vypočítajte analytické riešenie $u_c = f(t)$. Urobte kontrolu výpočtu dosadením do zostavenej diferenciálnej rovnice.

C [F]	R [Ω]	$u_c(0)$ [V]
35	15	7



Podľa druhého Kirchofho zákona som si vytvoril rovnicu.

$$u_c + u_r = 0$$

Podľa ohmovho zákona som si zostavil rovnicu.

$$u_r = R * I$$

$$u_c + R * I = 0$$

$$I = -\frac{u_c}{R}$$

Použil som axiom a dosadil som.

$$u'_c = \frac{1}{C} * I_c$$

$$u'_c = \frac{1}{C} * \left(-\frac{u_c}{R}\right)$$

$$R * C * u'_c = -u_c$$

$$R * C * u'_c + u_c = 0$$

$$525u'_c + u_c = 0$$

$$525\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = -1/525$$

Do očakávaného tvaru riešenia som dosadil hodnotu λ .

$$u_c = c(t) * e^{\lambda t}$$

$$u_c = c(t) * e^{-\frac{1}{525}t}$$

Zderivoval som u_c .

$$u'_c = c'(t) * e^{-\frac{1}{525}t} + c(t) * e^{-\frac{1}{525}t} * \frac{-1}{525}$$

Zderivovaný tvar u'_c a očakávaný tvar som vložil do pôvodnej rovnice a zjednodušíme.

$$525 \left(c'(t) * e^{-\frac{1}{525}t} + c(t) * e^{-\frac{1}{525}t} * \frac{-1}{525} \right) + c(t) * e^{-\frac{1}{525}t} = 0$$

$$525c'(t) * e^{-\frac{1}{525}t} = 0$$

Derivácia 0 je práve vtedy keď derivujeme konštantu.

$$\int c(t)dt = 0$$

$$c(t) = K$$

Hodnotu dosadíme do očakávaného tvaru.

$$u_c(t) = c(t) * e^{-\frac{1}{525}t}$$

$$u_c(t) = K * e^{-\frac{1}{525}t}$$

$$7 = K * e^{-\frac{1}{525} * 0}$$

$$K = 7$$

A nakoniec som dostal výsledok.

$$u_c(t) = 7 * e^{-\frac{1}{525}t}$$

Skúška správnosti:

$$525 * u_c'(t) + u_c(t) = 0$$

$$525 \left(7 * e^{-\frac{1}{525}t} * \frac{-1}{525} \right) + 7 * e^{-\frac{1}{525}t} = 0$$

$$-7 * e^{-\frac{1}{525}t} + 7 * e^{-\frac{1}{525}t} = 0$$

$$0 = 0$$

Súhrn výsledkov

Číslo príkladu	Varianta	Výsledky
Príklad 1	C	$I_{r7} = 0.0721 \text{ A}$ $U_{r7} = 18,7441 \text{ V}$
Príklad 2	B	$I_{r5} = 0,0497 \text{ A}$ $U_{r5} = 9,9348 \text{ V}$
Príklad 3	F	$I_{r4} = 29,1264 \text{ A}$ $U_{r4} = 10485,4968 \text{ V}$
Príklad 4	C	$ U_{c1} = 0,0665 \text{ V}$ $\varphi_{c1} = -51,6^\circ$
Príklad 5	B	$ U_{l2} = 6,1293 \text{ V}$ $\varphi_{l2} = 146,1^\circ$
Príklad 6	F	$u_c(t) = 7 * e^{\frac{-1}{525}t}$