Matematická analýza

Úloha 2. Skupina 1 – Postupy a riešenia

1.4. 2014

Členovia týmu:

1. Gardáš Milan xgarda04
2. Gazdík Oskar xgazdi02
3. Gulán Filip xgulan00
4. Habarta Lukáš xhabar03
5. Ježovica Filip xjezov01
6. Kubiš Jan xkubis13

Príklad 1.

Zadanie:

Vypočítajte $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}$.

Riešenie:

Najprv si určíme substitúciu: $t = e^x$ a $dt = e^x dx$. Substitúciu dosadíme:

$$\int \frac{t}{\sqrt{t-1}} = \int t*(t-1)^{-\frac{1}{2}} = t*2*(t-1)^{\frac{1}{2}} - \int 2*(t-1)^{\frac{1}{2}} = 2t\sqrt{t-1} - 2*(\frac{2}{3}*(t-1)^{\frac{3}{2}})$$

$$= 2t*\sqrt{t-1} - \frac{4}{3}*(t-1)*(t-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{t-1}*(2t - \frac{4}{3}t + \frac{4}{3})$$

$$= \sqrt{t-1}*(\frac{2}{3}t + \frac{4}{3}) = \frac{2}{3}*\sqrt{t-1}*(t+2)$$

A teda konečný výsledok je:

$$\frac{2}{3}*\sqrt{e^x-1}*(e^x+2)+C$$

2.

Vypočítejte $\int_2^\infty R(x)$, kde $R(x)$ je racionální lomená funkce, jejíž rozklad na parciální zlomky jste

počítali v první úloze.

$$\int_2^\infty \frac{4x^3+2x^2+63x+111}{x^5+3x^4+9x^3+23x^2-36}\,dx=\int_2^\infty \frac{2}{(x-1)}-\frac{2}{(x+2)}+\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{3}{(x^2+9)}\,dx$$

Nejprve si rozložíme integrál na menší a snáze integrovatelné integrály.

$$\int_2^\infty \frac{2}{(x-1)}\,dx-\int_2^\infty \frac{2}{(x+2)}dx+\int_2^\infty \frac{1}{(x+2)^2}\,dx-\int_2^\infty \frac{3}{(x^2+9)}\,dx$$

Nyní si spočítáme jednotlivé integrály

$$\int \frac{2}{(x-1)}\,dx=2\cdot\ln(x-1)$$

$$-\int \frac{2}{(x+2)}\,dx=-2\cdot\ln(x+2)$$

$$\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx=\int (x+2)^{-2}\,dx=-\frac{1}{(x+2)}$$

$$-\int \frac{3}{(x^2+9)}\,dx=-3\cdot\frac{1}{3}\cdot\arctan\left(\frac{x}{3}\right)$$

Čímž se dostaneme ke tvaru

$$\left[2\cdot\ln(x-1)-2\cdot\ln(x+2)-\frac{1}{(x+2)}-\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right]_2^\infty$$

Protože v mezích máme ∞ je nutné spočítat limitu

$$\lim_{t\to\infty}\left[2\cdot\ln(x-1)-2\cdot\ln(x+2)-\frac{1}{(x+2)}-\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right]_2^t$$

Po dosazení mezí dostáváme

$$\lim_{t\to\infty}\left[\left(2\cdot\ln(t-1)-2\cdot\ln(t+2)-\frac{1}{t+2}-\arctan\left(\frac{t}{3}\right)\right)-\left(2\cdot\ln(1)-2\cdot\ln(4)-\frac{1}{4}-\arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right)\right]=$$

$$=\left[-\frac{\pi}{2}-0+\ln(16)+\frac{1}{4}+\arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right]$$

Výsledek je tedy

$$-\frac{\pi}{2}+\ln(16)+\frac{1}{4}+\arctan\left(\frac{2}{3}\right)$$

Príklad 3.

Zadanie:

Na grafe funkcie $f(x) = x^2 - x$ nájdite bod, ktorý má najkratšiu vzdialenosť od bodu $A = [0, 1]$. Riešte ako úlohu na extrém.

Riešenie:

Vzdialenosť:

Najprv si nájdeme najmenšiu vzdialenosť dvoch bodov: $A[0, 1]$ a $y = x^2 - x \Rightarrow B[x; x^2 - x]$

$$v = \sqrt{x^2 + (x^2 - x - 1)^2} = \sqrt{x^2 + x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1} = \sqrt{x^4 - 2x^3 + 2x + 1} = (x^4 - 2x^3 + 2x + 1)^{\frac{1}{2}}$$

1. derivácia:

Zderivujem to čo sme dostali vyššie.

$$v'(x) = \frac{1}{2} * (x^4 - 2x^3 + 2x + 1)^{-\frac{1}{2}} * (4x^3 - 6x^2 + 2) = \frac{4x^3 - 6x^2 + 2}{2 * \sqrt{x^4 - 2x^3 + 2x + 1}} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{\sqrt{x^4 - 2x^3 + 2x + 1}}$$

Lokálny extrém

Nájdeme lokálny extrém, v našom prípade minimum pomocou derivovanej funkcie.

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{\sqrt{(x^4 - 2x^3 + 2x + 1}} &= 0 \\ 2x^3 - 3x^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Vidíme, že nám vyšiel špeciálny prípad kubickej rovnice, ktorú si môžeme rozložiť na:

$$(x - 1)^2 * (2x + 1) = 0$$

A teda vidíme, že korene rovníc sú 1 a $-\frac{1}{2}$. My chceme najkratšiu vzdialenosť, teda naša hľadaná najkratšia vzdialenosť je $-\frac{1}{2}$

Výsledok

$-\frac{1}{2}$ dosadíme za $B[x; x^2 - x]$ a dostaneme súradnice bodu, ktorý hľadáme:

$$B[-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}]$$

4.

Vyšetřete průběh funkce $f : y = x - arctg\ x$

1. Určení definičního oboru a oboru hodnot funkce

   $D(f) = R$, protože x i $arctg\ x$ jsou definovány v celém R

   $H(f) = R$

2. Určení lichosti či sudosti funkce

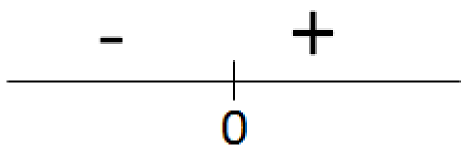
   $f(-x) = -x + arctg\ x$

   $-f(x) = -x + arctg\ x$

   Protože $f(-x) = -f(x)$ je funkce lichá

3. Nalezení průsečíku s osami a určení znaménka

   $$\begin{array}{l} x - arctg\ x = 0 \ /\cdot(-1) \\ \qquad x = 0 \\ \hline \quad arctg\ x = 0 \end{array}$$



   $arctg\ x = 0$ právě tehdy když $x = 0$ proto průsečík s osou x je v bodě 0

   Pro zjištění znamének dosadíme do původní funkce

   $pro\, x = -1$ $\qquad$ $pro\, x = 1$

   $-1 + \frac{1}{4}\pi = -0{,}2146$ $\qquad$ $1 - \frac{1}{4}\pi = 0{,}2146$

   Průsečík s osou y

   $y = 0 - arctg\,(0)$

   $y = 0$

   Průsečík má tedy souřadnice $[0;0]$

4. Určení asymptot

   Protože je funkce definována v celém R tak nemá svislou asymptotu

   Šikmá asymptota má předpis $y = ax + b$

   Výpočet a

   $$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - arctg\ x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x \cdot \left(1 - \frac{arctg\ x}{x}\right)}{x} = 1$$

   Limita je stejná pro plus i mínus nekonečno

   Výpočet b

   $$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - a \cdot x = \lim_{x\to\infty} x - arctg\ x - x = \lim_{x\to\infty} - arctg\ x = -\frac{\pi}{2}$$

   $$b = \lim_{x\to-\infty} f(x) - a \cdot x = \lim_{x\to-\infty} x - arctg\ x - x = \lim_{x\to-\infty} - arctg\ x = \frac{\pi}{2}$$

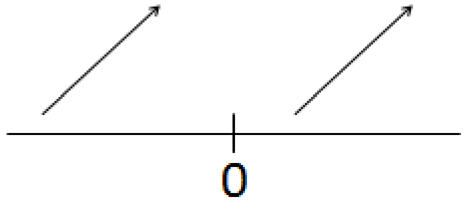
   Čímž získáváme rovnice asymptot

   $y_1 = x - \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $y_2 = x + \frac{\pi}{2}$

5. Výpočet první derivace pro zjištění lokálních extrémů

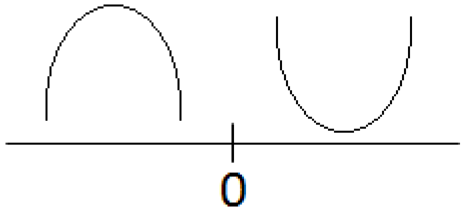
$$f'(x) = 1 - \left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

Funkce je na intervalu $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ vždy kladná, proto je na těchto intervalech rostoucí



6. Výpočet druhé derivace pro zjištění inflexních bodů a intervalů konvexnosti a konkávnosti

$$f''(x) = -\left(\frac{-1 \cdot 2x}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$



Zjištění inflexního bodu

$$\frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \qquad y = \frac{2 \cdot 0}{(1+0^2)^2} = 0$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

Inflexní bod má tedy souřadnice $[0;0]$

7. Graf funkce