Matematická analýza

# Úloha 3. Skupina 1 – Postupy a riešenia

6.5. 2014

**Členovia týmu:**

1. Gardáš Milan xgarda04
2. Gazdík Oskar xgazdi02
3. Gulán Filip xgulan00
4. Habarta Lukáš xhabar03
5. Ježovica Filip xjezov01
6. Kubiš Jan xkubis13

# Príklad 1.

## Zadanie:

Vypočítajte obsah S množiny ohraničenej krivkami o rovniciach $y = x^2 - 4x + 3$ a $y = 3 - x$. Množinu načrtnite.

## Vypracovanie:

Najprv zistíme mädze určitého integrálu:

$$x^2 - 4x + 3 = 3 - x$$

$$x^2 - 3x = 0$$

vyjmeme si x

$$x(x-3) = 0$$

a teda vydíme, že korene kvadratickej rovnice sú $x_1 = 0$ a $x_2 = 3$.
Podľa obrázku vidíme, ktorá je horná medz a ktorá naopak doná. Vypočítame určitý integrál:

$$\int_0^3 (3-x) - \int_0^3 (x^2 - 4x + 3) = \int_0^3 (3 - x - x^2 + 4x - 3) = \int_0^3 (3x - x^2)$$

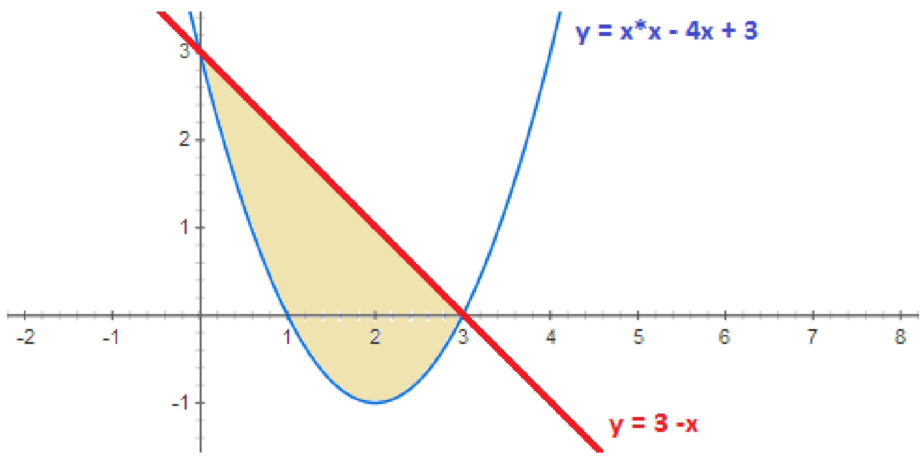
Zintegrujeme:

$$\Big[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^3$$

Dosadíme mädze:

$$[\frac{27}{2} - \frac{27}{3} - (\frac{0}{3} - \frac{0}{2})] = 4,5$$

## Náčrt grafu:



# Príklad 2.

## Zadanie:

Pomocou vzťahu pre súčet geometrickej rady, riešte rovnicu $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(x-1)^n = \frac{4}{3}(x-1)$.

## Vypracovanie:

Najprv si určím podmienku $|q| < 1 \Rightarrow x \in (0;2)$ aby rade nedivergovala do nekonečna.
Vypočítame si prvý člen nekonečnej geometrickej postupnosti dosadením 3 za n:

$$(x-1)^n = (x-1)^3$$

Tak isto si vypočítame 4 člen dosadením 4:

$$(x-1)^n = (x-1)^4$$

teda $q = x - 1$ a vďaka vzorcu pre výpočet nekonečnej geometricke rady $S = \frac{a_1}{1-q}$ z toho vidíme že:

$$S = \frac{(x-1)^3}{1-x+1}$$

a teda:

$$\frac{(x-1)^3}{1-(x-1)} = \frac{4}{3}(x-1)$$

$$\frac{x^2-2x+1}{2-x} = \frac{4}{3}$$

$$3x^2 - 6x + 3 = 8 - 4x$$

$$3x^2 - 2x - 5 = 0$$

spočítame kvadratickú rovnicu:

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 4 + 60 = 8^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-b + -\sqrt{D}}{2a} = \frac{2 + -8}{6}$$

a teda koreňe rovnice sú $x_1 = \frac{5}{3}$ a $x_2 = -1$ a výsledkom je ale iba $x_1 = \frac{5}{3}$ pretože $x_1 = \frac{5}{3}$ a $x_2 = -1$ nesplnuje podmienku $x \in (0;2)$

# Príklad 3.

## Zadanie:

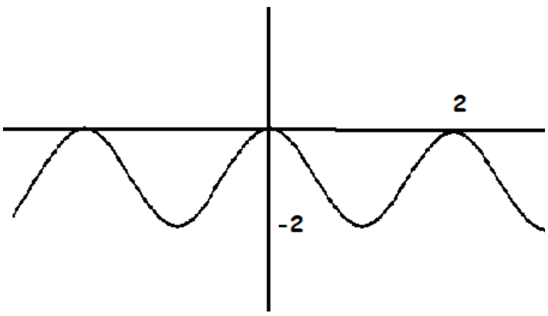
Nájdite a nakreslite definičný obor funkcie $f(x, y) = \frac{1}{\ln(\cos(\pi x) - y)} + \sqrt{\cos(\pi x) + y}$

## Vypracovanie:

Funkciu si rozdelíme a zistíme jednotlivé definičné obory:

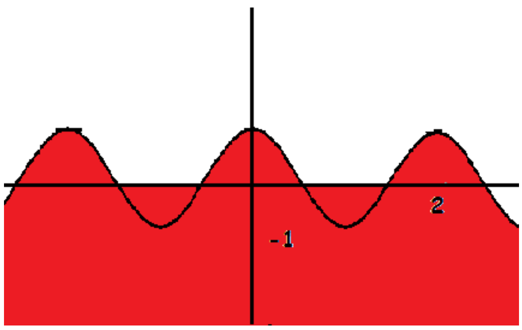
a:

$$\ln(\cos(\pi x) - y) \neq 0$$
$$\cos(\pi x) - y \neq 1$$
$$y \neq \cos(\pi x) - 1$$



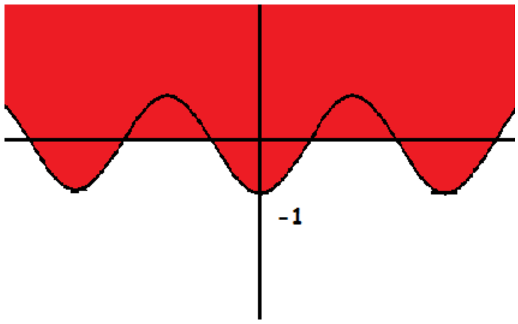

b:

$$cos(\pi x) - y > 0 \Rightarrow y < cos(\pi x)$$



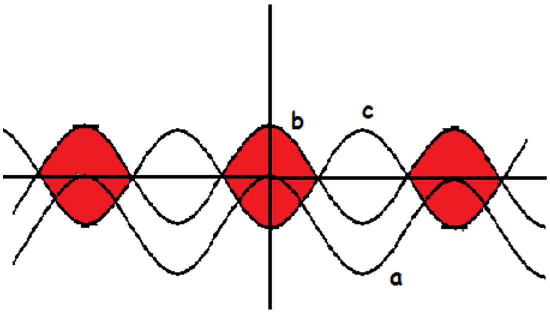
c:

$$cos(\pi x) + y \geq 0 \Rightarrow y \geq -cos(\pi x)$$




Nakoniec všetko dáme dokopy:

$$(b \cap c) - a$$




+ tam patrí v úseku $b \cap c$ čiara $a$ a čiara $c$.

# Príklad 4.

## Zadanie:

Nájdite lokálne extrémy funkcie $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$.

## Vypracovanie:

Zderivujeme funkciu podľa x a y:

$$f'x = 4x^3 - 4x - 4y$$

$$f'y = 4y^3 - 4x - 4y$$

Teraz rovnice položíme nule:

$$f'x = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4x - 4y = 0 \Rightarrow y = x^3 - x$$

$$f'y = 0 \Rightarrow 4y^3 - 4x - 4y = 0$$

Dosadíme prvú rovnicu do druhej:

$$(x^3 - x)^3 - x - x^3 + x = 0$$

$$x^3 - x = x$$

$$x^3 - 2x = 0$$

$$x(x^2 - 2) = 0$$

a vidíme, že korene rovnice sú:

$$x_1 = 0\,, x_2 = -\sqrt{2}\,, x_3 = \sqrt{2}$$

.
dosadením do jeden z dvoch rovníc korene rovnice dostávame a to sú vlastne podozrivé body:

$$A[0, 0]\,, B[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]\,, C[\sqrt{2}\,, \sqrt{2}]$$

Teraz zistíme nasledovné derivácie, prvej rovnice:

$$f''(xx) = 12x^2 - 4$$

$$f''(yy) = 12y^2 - 4$$

$$f''(yx) = -4$$

$$f''(xy) = -4$$

Pomocou silvestrovho pravidla zistíme, ktoré body sú lokálne minimum alebo maximum (dosadíme bod x a y pre každý prípad do 2x derivovanej funkcie):

$$f''(A) = \begin{bmatrix} f''(xx) & f''(xy) \\ f''(yx) & f''(yy) \end{bmatrix}$$

$$f''(A) = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = -4$$

$$D_2 = 0$$

a teda nevieme rozhodnúť o maxime alebo minime.

$$f''(B) = \begin{bmatrix} 20 & -4 \\ -4 & 20 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = 20$$

$$D_2 = 384$$

a teda to je lokálne minimum.

$$f''(C) = \begin{bmatrix} 20 & -4 \\ -4 & 20 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = 20$$

$$D_2 = 384$$

a teda to je lokálne minimum.