Matematická analýza

Úloha 1. Skupina1 – Postupy a riešenia

10.3. 2014

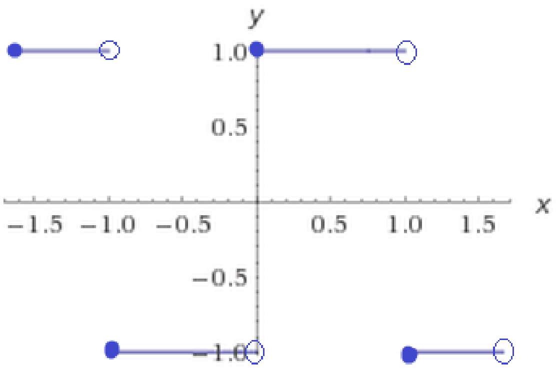
Členovia týmu:

1. Gardáš Milan	xgarda04
2. Gazdík Oskar	xgazdi02
3. Gulán Filip	xgulan00
4. Habarta Lukáš	xhabar03
5. Ježovica Filip	xjezov01
6. Kubiš Jan	xkubis13

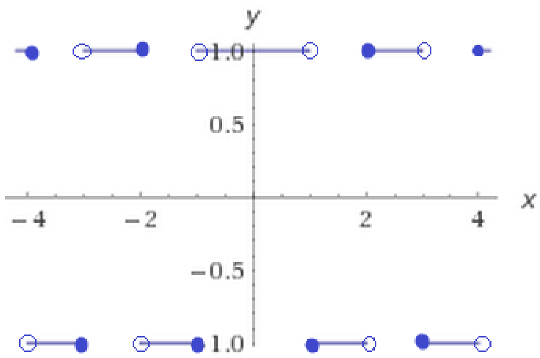
1

Jsou dány funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad g(x) = (-1)^{[x]}$.
Napište funkční předpisy a nakreslete grafy složených funkcí $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$. Dále nakreslete grafy funkcí $|(f \circ g)(x)|$, $|(g \circ f)(x)|$ a $(f \circ g)(|x|)$, $(g \circ f)(|x|)$.

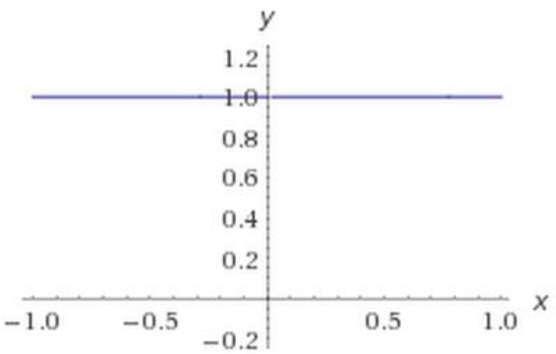
$f \circ g$ má predpis: $\operatorname{sgn}\left((-1)^{\lfloor x \rfloor}\right)$



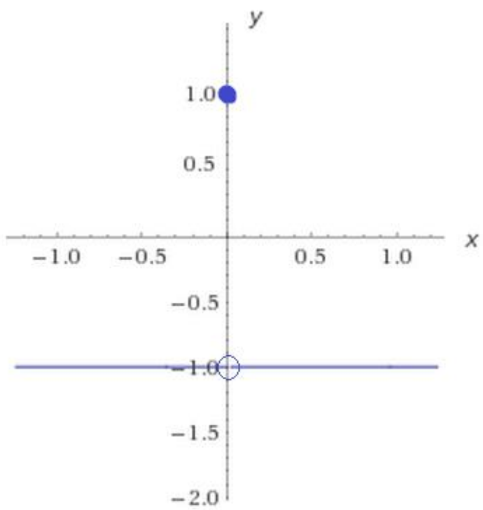
$f \circ g|x|$



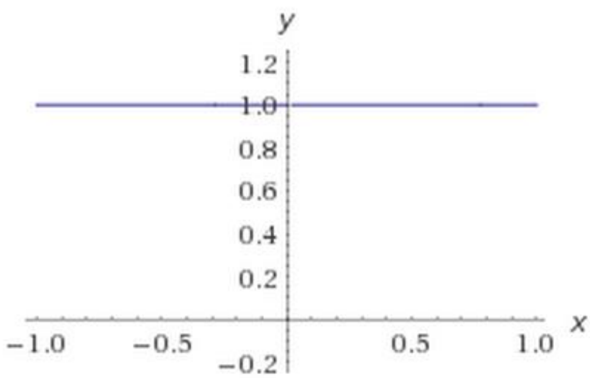
$|f \circ g|x$



$g \circ f$ má predpis: $(-1)^{\lfloor \operatorname{sgn}(x) \rfloor}$ a rovnaký graf aj pre $g \circ f|x|$



$|g \circ f|x$



2.

Rozložte na parciální zlomky funkci $f(x)=\dfrac{4x^3+2x^2+63x+111}{x^5+3x^4+9x^3+23x^2-36}$.
Reálné kořeny jmenovatele (které jsou celočíselné) najděte pomocí Hornerova schématu.

$$f(x)=\frac{4x^3+2x^2+63x+111}{x^5+3x^4+9x^3+23x^2-36}$$

Rozklad dolního polynomu pomocí Hornerova schématu:

	1	3	9	23	0	-36
1		1	4	13	36	36
	1	4	13	36	36	0
-2		-2	-4	-18	-36	
	1	2	9	18	0	
-2		-2	0	-18		
	1	0	9	0		

Výsledek po aplikaci Hornerova schématu: $(x-1)\cdot(x+2)^2\cdot(x^2+9)$

Výsledek dosadíme do zadání a upravujeme:

$$\frac{4x^3+2x^2+63x+111}{x^5+3x^4+9x^3+23x^2-36}=\frac{4x^3+2x^2+63x+111}{(x-1)\cdot(x+2)^2\cdot(x^2+9)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+2)}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{Dx+E}{(x^2+9)}=$$
$$=\frac{A\cdot(x+2)^2\cdot(x^2+9)+B\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x^2+9)+C\cdot(x-1)\cdot(x^2+9)+(Dx+E)\cdot(x-1)\cdot(x+2)^2}{(x-1)\cdot(x+2)^2\cdot(x^2+9)}$$

Po úpravách dostáváme rovnici (pro větší přehlednost rozdělena na levou stranu a pravou stranu).

Levá strana:

$$4x^3+2x^2+63x+111$$

Pravá strana:

$$A\cdot(x+2)^2\cdot(x^2+9)+B\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x^2+9)+C\cdot(x-1)\cdot(x^2+9)+(Dx+E)\cdot(x-1)\cdot(x+2)^2$$

Do této rovnice postupně dosazujeme hodnoty proměnné x tak, aby nám pokud možno zůstal pouze jeden z koeficientů A,B,C,D,E.

$$x=1 \qquad L=180 \qquad P=90A \quad \Rightarrow \quad A=2$$
$$x=-2 \qquad L=-39 \qquad P=-39C \quad \Rightarrow \quad C=1$$

Protože už neexistuje hodnota proměnné x, které by ponechala pouze jeden z koeficientů A,B,C,D,E, je nutné dosadit libovolná čísla, která povedou k získání rovnic s neznámými pro náš příklad potřebujeme3 rovnice, protože zbývá spočítat 3 neznámé. Já jsem si zvolil hodnoty 0, -1 a 2.

$x=0 \quad L=111 \quad P=63-18B-4E \quad \Rightarrow -18B-4E=48 \Rightarrow \quad -9B-2E=24$

$x=2 \quad L=277 \quad P=429+52B+32D+16E \Rightarrow 52B+32D+16E=-152 \Rightarrow \quad 13B+8D+4E=-38$

$x=-1 \quad L=46 \quad P=-20B+2D-2E \Rightarrow -20B+2D-2E=46 \quad \Rightarrow \quad -10B+D-E=23$

Z této soustavy rovnic je nutné vypočítat koeficienty, existuje mnoho způsobů řešení, já jsem se rozhodl pro Cramerovo pravidlo.

Determinant matice:

$$\begin{pmatrix} -9 & 0 & -2 \\ 13 & 8 & 4 \\ -10 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad |A| = 72-26-(160-36) = -78$$

Determinanty matic s vyměněnými sloupci:

$$\begin{pmatrix} 24 & 0 & -2 \\ -38 & 8 & 4 \\ 23 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad |A1| = -192+76-(-368+96) = 156$$

$$\begin{pmatrix} -9 & 24 & -2 \\ 13 & -38 & 4 \\ -10 & 23 & -1 \end{pmatrix} \quad |A2| = -342-598-960-(-760-828-312) = 0$$

$$\begin{pmatrix} -9 & 0 & 24 \\ 13 & 8 & -38 \\ -10 & 1 & 23 \end{pmatrix} \quad |A3| = -1656+312-(-1920+342) = 234$$

Pomocí těchto determinantů vypočítám hodnoty jednotlivých koeficientů:

$$B = \frac{|A1|}{|A|} = \frac{156}{-78} = -2$$

$$D = \frac{|A2|}{|A|} = \frac{0}{-78} = 0$$

$$E = \frac{|A3|}{|A|} = \frac{234}{-78} = -3$$

Hodnoty těchto koeficientů dosadím do zlomků, čímž je rozklad na parciální zlomky hotov.

$$\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{Dx+E}{(x^2+9)} = \frac{2}{(x-1)} - \frac{2}{(x+2)} + \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{3}{(x^2+9)}$$

3.

Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = x\ln x$ v bodech, ve kterých je tečna rovnoběžná s přímkou $2x - 2y + 3 = 0$.

Rovnicu **2x – 2y + 3 = 0** upravíme na smernicový tvar: **y = x + 2/3**.

Z tohto tvaru vidíme že smernica sa rovná 1. Musíme sa teda zaujímať o bod x_o taký, že $\mathbf{f'(x_o) = 1}$.

Zderivujeme funkciu **f(x) = xlnx** a dostaneme $\mathbf{f'(x) = \ln x_o + 1}$.

Vytvoríme rovnicu $\mathbf{\ln x_o + 1 = 1}$ teda $\mathbf{\ln x_o = 0}$ a $\mathbf{x_o = 1}$.

Dosadíme ešte x_o do nederivovanej funkcie **f(x) = xlnx = ln1 = 0**.

Teraz f´(x), f(x) a x_o dosadím do vzorca na výpočet rovnice dotyčnice (tečny) a rovnice normály.

Rovnica dotyčnice (tečny):

$$y - f(x_o) = f'(x_o) * (x - x_o)$$

dosadíme hodnoty

$$y - 0 = 1 * (x - 1)$$

Rovnica požadovanej dotyčnice (tečny) teda je: **y = x -1** .

Rovnica normály:

$$y - f(x_o) = \frac{-1}{f'(x_o)} * (x - x_o)$$

dosadíme hodnoty

$$y - 0 = \frac{-1}{1} * (x - 1)$$

a teda rovnica požadovanej normály je **y =-x + 1** .

Načrtněte graf funkce spojité na $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$, přímky $y = x$ a $x = 3$ jsou její asymptoty,

$f(0) = f(2) = 1, f(-1) = f(1) = 0,$

$f'(-1) = 2, f'(0) = f'(2) = 0, f'_+(1) = \infty, f'_-(1) = -2,$

$f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, -1)$, $f''(x) < 0$ pro $x \in (-1,1), x \in (1,3), x \in (3,\infty)$.

Do obrázku nakreslete také obě asymptoty a tečny resp. polotečny v bodech $x = -1, 0, 1, 2$.