Ex1 Pentru a arăta că dacă A, B și C sunt variabile aleatoare discrete și $A \perp C | B$, atunci distribuția comună poate fi factorizată în termenii funcțiilor pozitive $\phi_{A,B}(x_A, x_B)$ și $\phi_{B,C}(x_B, x_C)$ vom urma pașii de mai jos.

$\Rightarrow$ Independența condiționată $A \perp C | B$

Independența condiționată între variabilele A și C dată variabila B poate fi definită astfel:

$$A \perp C | B \Leftrightarrow P(A = x_A, C = x_C | B = x_B) = P(A = x_A | B = x_B) \cdot P(C = x_C | B = x_B) \cdot \cancel{P(B = x_B)}$$

Această relație ne spune că, dacă că B este cunoscut, probabilitatea lui A și a lui C se descompune în produse de probabilități marginale condiționate de B.

Din definiția probabilității condiționate avem că:

$$P(A = x_A, C = x_C | B = x_B) = P(A = x_A | B = x_B) P(C = x_C | B = x_B) P(B = x_B)$$

Distribuția comună

$$P(A = x_A, C = x_C | B = x_B) = P(A = x_A | B = x_B) P(C = x_C | B = x_B) P(B = x_B)$$

Observăm că avem

$P(A = x_A | B = x_B) \cdot P(B = x_B)$ conține doar A și B

$P(C = x_C | B = x_B)$ conține doar C și B

Folosim funcțiile pozitive

$$\phi_{A,B}(x_A, x_B) = P(A=x_A \mid B=x_B)$$

$$\phi_{C,B}(x_C, x_B) = P(C=x_C \mid B=x_B)$$

Astfel putem scrie:

$$P(A=x_A \mid B=x_B)\cdot P(B=x_B)\, P(C=x_C \mid B=x_B) =$$

$$= P(A=x_A, B=x_B, C=x_C)$$

$$P(A=x_A, B=x_B, C=x_C) = \frac{1}{k}\phi_{A,B}(x_A, x_B)\,\phi_{BC}(x_B, x_C)$$

k - constanta de normalizare

$\Longleftarrow$ Avem funcțiile pozitive $\phi_{A,B}$ ϕ_{BC} și $k>0$ constanta de normalizare a.î.

$$P(A=x_A, B=x_B, C=x_C) = \frac{1}{k}\phi_{AB}(x_A, x_B)\,\phi_{BC}(x_B, x_C)$$

Pt a arăta că A este condiționat independent de C dat B trebuie să demonstrăm că:

$$P(A, C \mid B) = P(A \mid B)\, P(C \mid B)$$

Din def. probabilității condiționate, avem

$$P(A, C \mid B) = \frac{P(A, C, B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{k}\phi_{AB}(x_A, x_B)\,\phi_{BC}(x_B, x_C)}{P(B)}$$

Folosim definiția funcțiilor ϕ

$$P(A|B) = \frac{\phi_{A,B}(x_A, x_B)}{P(B)} \qquad P(C|B) = \frac{\phi_{BC}(x_B, x_C)}{P(B)}$$

Astfel putem scrie:

$$P(A, C|B) = P(A|B)\,P(C|B)$$

$$\Rightarrow A \perp C | B$$

Din cele două demonstrații rezultă că afirmația inițială este adevărată:

$$A \perp C | B \Leftrightarrow \exists\ \phi_{AB},\ \phi_{BC},\ k>0 \text{ a.î.}$$

$$P(A = x_A, B = x_B, C = x_C) = \frac{1}{k}\,\phi_{A,B}(x_A, x_B)\,\phi_{BC}(x_B, x_C)$$