Testul 1

Problema 1 *Să se aproximeze funcţia* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin x^2$.

(a) *Folosind toate cele patru tipuri de spline, noduri echidistante şi noduri Cebîşev de speţa a doua,* $n = 10$.

(b) *Folosind metoda celor mai mici pătrate discretă şi noduri Cebîşev de speţa I,* $n = 10$.

În fiecare caz se va reprezenta grafic funcţia şi aproximanta.

Testul 2

Problema 2 *Să se aproximeze funcţia* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \cos x^2$.

(a) *Folosind toate cele patru tipuri de spline, noduri echidistante şi noduri Cebîşev de speţa I,* $n = 10$.

(b) *Folosind metoda celor mai mici pătrate discretă şi noduri Cebîşev de speţa II,* $n = 10$.

În fiecare caz se va reprezenta grafic funcţia şi aproximanta.

Testul 3

Problema 3 *Să se aproximeze funcţia* $f(x) = \arctan x$, *pe* $[-1, 1]$.

(a) *Folosind toate cele patru tipuri de spline, noduri echidistante şi noduri Cebîşev de speţa I,* $n = 15$.

(b) *Folosind metoda celor mai mici pătrate discretă şi noduri echidistante,* $n = 10$.

În fiecare caz se va reprezenta grafic funcţia şi aproximanta.

Testul 4

Problema 4 *Să se aproximeze funcţia* $f(x) = x^2 \sin x$, *pe* $[-2\pi, 2\pi]$.

(a) *Folosind toate cele patru tipuri de spline, noduri echidistante şi noduri Cebîşev de speţa a doua,* $n = 12$.

(b) *Folosind metoda celor mai mici pătrate discretă şi noduri echidistante,* $n = 11$.

În fiecare caz se va reprezenta grafic funcţia şi aproximanta.

Testul 5

Problema 5 *Să se aproximeze funcţia* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, *pe* $[-5, 5]$.

(a) *Folosind toate cele patru tipuri de spline, noduri echidistante şi noduri Cebîşev de speţa a doua,* $n = 12$.

(b) *Folosind metoda celor mai mici pătrate discretă şi noduri echidistante,* $n = 11$ *şi considerând 25 de puncte de pe grafic.*

În fiecare caz se va reprezenta grafic funcţia şi aproximanta.

Testul 6

Problema 6 *Constanta lui Euler* $\gamma = 0.57721566490153286\ldots$ *se defineşte ca limita*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \gamma_n, \text{ unde } \gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n.$$

Presupunând că $\gamma - \gamma_n \sim cn^{-d}$, $n \to \infty$, *pentru constantele* c *şi* d *strict pozitive, determinaţi* c *şi* d *experimental pe calculator. (*Indicaţie*: logaritmaţi relaţia* $\gamma - \gamma_n \approx cn^{-d}$ *şi aplicaţi metoda celor mai mici pătrate).*

Problema 7 *Energia potenţială a două sau mai multe molecule ce interacţionează se numeşte energie de interacţiune van der Waals. Un calcul teoretic pentru doi atomi de heliu are energiile* $V(r)$ *pentru diferite valori de distanţe internucleare* r *date mai jos. Energia se manifestă repulsiv* $(V > 0)$ *pentru* r *mic şi atractiv* $(V < 0)$ *pentru valori mai mari ale lui* r.

r *(bohr)*	4.6	4.8	5.0	5.1	5.2
$V(r)$	32.11	9.0	−3.52	−7.11	−9.22
r *(bohr)*	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7
$V(r)$	−10.74	−11.57	−11.95	−12.00	−11.73
r *(bohr)*	5.8	5.9	6.0	6.5	7.0
$V(r)$	−11.23	−10.71	−10.13	−7.15	−4.77
r *(bohr)*	7.5	8.0	9.0	10.0	
$V(r)$	−3.17	−2.14	−1.03	−0.54	

Să se aproximeze $S(r)$ *utilizând un spline cubic şi să se reprezinte grafic. Aproximaţi derivata de ordinul I a lui* V *pe întregul domeniu de valori tabelate şi* $\int_5^9 V(r)\,\mathrm{d}\,r$.

Testul 7

Problema 8 *Generaţi 11 puncte luând* $t_k = (k-1)/10$ *şi* $y_k = \mathrm{erf}(t_k)$, $k = 1$, $\ldots$, 11.

(a) Deoarece $\mathrm{erf}(t)$ *este o funcţie impară în* t*, este rezonabil să se aproximeze datele printr-o combinaţie liniară de puteri impare ale lui* t*,*

$$\mathrm{erf}(t) \approx c_1 t + c_2 t^3 + \cdots + c_n t^{2n-1}.$$

Cum depind erorile între punctele t_k *de* n*?*

(b) Polinoamele nu sunt aproximante bune pentru $\mathrm{erf}(t)$*, deoarece sunt nemărginite, pe când* $\mathrm{erf}(t)$ *tinde către 1 pentru* t *mare. Utilizând aceleaşi date, aproximaţi utilizând un model de forma*

$$\mathrm{erf}(t) \approx c_1 + e^{-t^2}\left(c_2 + c_3 z + c_4 z^2 + c_5 z^3\right)$$

unde $z = 1/(1+t)$*. Cum sunt erorile în valori ale lui* t *situate între punctele* t_k*, comparativ cu modelul polinomial?*

Problema 9 *Tabela de mai jos arată coeficientul de frânare* c_D *al unei sfere în funcţie numărul Reynolds* Re*. Utilizaţi un spline cubic natural pentru a determina* c_D *corespunzând* Re = 5, 50, 500 *şi* 5000. *Indicaţie: Utilizaţi o scară log–log (logaritmaţi ambele coordonate).*

Re	0.2	2	20	200	2000	20000
c_D	103	13.9	2.72	0.800	0.401	0.433

Aproximaţi derivata lui c_D *în raport cu* Re *şi reprezentaţi* c_D *şi derivata pe acelaşi grafic.*