Testul 1

Problema 1 *Utilizaţi metoda lui Romberg şi o cuadratură adaptivă pentru a aproxima cu o precizie de* 10^{-9} *integrala*

$$\int_0^{48} \sqrt{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Explicaţi de ce pot să apară dificultăţi şi reformulaţi problema astfel încât să se poată obţine mai uşor o aproximaţie precisă.

Testul 2

Problema 2 *Determinaţi lungimea arcului de curba parametrică*

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-\cos(t))\cos(t) \\ y(t) &= (1-\cos(t))\sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

folosind o cuadratură adaptivă şi metoda lui Romberg. Indicaţie: formula este

$$\ell = \int_a^b \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

Testul 3

Problema 3 *Evaluaţi* $\int\limits_0^1 \frac{\exp(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$ *utilizând o cuadratură adaptivă şi metoda lui Romberg*

(a) rezolvând problema aşa cum este enunţată;

(b) utilizând o schimbare de variabilă;

(c) utilizând o tehnică de dezvoltare în serie.

Comparaţi rezultatele.

Testul 4

Problema 4 *Funcţia* $y(x) = e^{-x^2}\int\limits_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}\,t$ *se numeşte integrala lui Dawson. Tabelaţi această funcţie pentru* $x = 0,\ 0.1,\ \ldots,\ 0.5$ *(cu* `adquad2` *şi* `Romberg`*). Pentru a evita evaluările de funcţii nenecesare, descompuneţi integrala într-o sumă de integrale pe subintervale.*

Testul 5

Problema 5 *Funcţia Bessel de ordinul zero* $J_0(x)$ *se poate calcula cu formula*

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Utilizaţi formula pentru a evalua $J_0(x)$ *pentru* $x = 1.0,\ 2.0,\ 3.0$ *cu o cuadratură adaptivă şi cu metoda lui Romberg şi comparaţi rezultatul obţinut cu cel furnizat de MATLAB.*

Testul 6

Problema 6 *O sferă de rază* R *pluteşte pe jumătate scufundată într-un lichid. Dacă este împinsă în jos până când planul diametral este la distanţa* p $(0 < p \leq R)$ *sub suprafaţa lichidului şi apoi este eliberată, perioada vibraţiei care se produce astfel este*

$$T = 8R\sqrt{\frac{R}{g\left(6R^2 - p^2\right)}}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{t}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}},$$

unde $k^2 = p^2/\left(6R^2 - p^2\right)$ *şi* $g = 10m/s^2$*. Pentru* $R = 1$ *şi* $p = 0.5,\ 0.75,\ 1.0$ *găsiţi* T *(cu o cuadratură adaptivă şi cu Romberg,* $\varepsilon = 1e-9$*).*

Testul 7

Problema 7 *Utilizaţi o cuadratură adaptivă şi metoda lui Romberg cu diverse toleranţe pentru a aproxima* π *prin*

$$\pi = \int_{-1}^{1} \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x.$$

Cum variază precizia şi numărul de evaluări de funcţie odată cu toleranţa? Reprezentați grafic.

Testul 8

Problema 8 *Integrala exponenţială*

$$E_1(x) = \int_1^{\infty} e^{-tx}\frac{\mathrm{d}\,x}{x}, \qquad t > 0,$$

apare în studiul transferului radiativ şi în teoria transportului. Integrala se transformă succesiv

$$
\begin{aligned}
E_1(t) &= \int\limits_1^{\infty} e^{-x}\frac{\mathrm{d}\,x}{x} + \int\limits_t^{1} e^{-x}\frac{\mathrm{d}\,x}{x} \\
&= -\left\{ \int\limits_1^{\infty} e^{-x}\frac{\mathrm{d}\,x}{x} - \int\limits_0^{1} \left(1-e^{-x}\right)\frac{\mathrm{d}\,x}{x} \right\} \\
&+ \int\limits_t^{1} \frac{\mathrm{d}\,x}{x} + \int\limits_0^{t} \left(1-e^{-x}\right)\frac{\mathrm{d}\,x}{x}.
\end{aligned}
$$

Expresia dintre acolade are valoarea aproximativă $\gamma = 0.5772156649015329$ *(constanta lui Euler). Al doilea termen se integrează analitic la* $-\ln t$. *Deci,*

$$
E_1(t) = -\gamma - \ln t + \int\limits_0^{t} \left(1-e^{-x}\right)\frac{\mathrm{d}\,x}{x}.
$$

Evaluaţi $E_1(t)$ *pentru* $t = 1.0,\ 2.0,\ 3.0$. *Apare vreo dificultate datorită comportării integrandului în* $x = 0$*?*

Problemă obligatorie

Problema 9 *(a) Arătaţi că extrapolarea în formula repetată a trapezului din* $R_{i,1}$ *şi* $R_{i+1,1}$ *ne dă regula repetată a lui Simpson cu pasul* h_i *în* $R_{i,i}$.

(b) Arătaţi că $R_{i,3}$ *din metoda lui Romberg poate fi exprimat cu ajutorul regulii Boole-Villarceau repetate (cu pasul* h_i*), a cărei variantă elementară este*

$$
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{90}\left[7f(a) + 32f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 12f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 32f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + 7f(b)\right]
$$

(c) Verificați practic punctele (a) şi (b) pentru $\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$ *cu ajutorul unor grafice de tip loglog ale erorii în funcție de pasul* h.