

Test sisteme, metode directe

5 aprilie 2023

Testul 1

Problema 1 Să se analizeze metoda lui Cramer și eliminarea gaussiană din punct de vedere al complexității (unitatea de măsură va fi numărul de operații flotante - flops) în cazurile $n = 2$ și $n = 3$.

Problema 2 Fie n un număr par și matricea A de dimensiune $n \times n$, cu 3 pe diagonală principală, -1 pe super și subdiagonală (diagonalele -1 și 1) și $1/2$ în pozițiile $(i, n + 1 - i)$ (diagonala secundară) pentru orice $i = 1, \dots, n$, cu excepția lui $i = n/2$ și $n/2 + 1$. Pentru $n = 8$,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Definim vectorul $b = (2.5, 1.5, \dots, 1.5, 1.0, 1.0, 1.5, \dots, 1.5, 2.5)^T$; 1.5 se repetă de $n - 4$ ori, iar 1.0 de două ori.

- (a) Calculați descompunerile LUP și Cholesky ale lui A pentru $n = 12$.
- (b) Rezolvați sistemul $Ax = b$ pentru $n = 100$ folosind descompunerea LUP și Cholesky.

Testul 2

Problema 3 Să se analizeze metoda lui Cramer și eliminarea gaussiană din punct de vedere al complexității (unitatea de măsură va fi numărul de operații flotante - flops) în cazurile $n = 2$ și $n = 3$.

Problema 4 Generați un sistem aleator care are soluția $[1, \dots, 1]^T$. Rezolvați-l cu descompunere LUP ($n = 500$).

Problema 5 Implementați descompunerea Cholesky (algoritmul va fi $\Theta(n)$) pentru un sistem tridiagonal. Date de intrare 3 vectori: 1 pentru diagonală principală, 1 pentru diagonală 1 (identică cu diagonală -1) și unul pentru membrul drept.

Testul 3

Problema 6 Să se analizeze metoda lui Cramer și eliminarea gaussiană din punct de vedere al complexității (unitatea de măsură va fi numărul de operații flotante - flops) în cazurile $n = 2$ și $n = 3$.

Problema 7 Iterația inversă este un algoritm pentru calculul celei mai mici valori proprii (în modul) a unei matrice simetrice A :

```
Choose  $x_0$ 
for  $k = 1, 2, \dots, m$  (until convergence) do
    solve  $Ax_{k+1} = x_k$ 
    normalize  $x_{k+1} := x_{k+1} / \|x_{k+1}\|$ 
end for
```

Atunci $\lambda = x_m^T A x_m / x_m^T x_m$ este o aproximare a celei mai mici valori proprii. O implementare simplă a acestui algoritm este

```
x=rand(n,1)
for k= 1:m
x=A\x;
x=x/norm(x);
if convergence, break; end;
end
lambda=x'*A*x;
```

Pentru matrice mari, putem face economie de operații dacă calculăm descompunerea LU a matricei A o singură dată. Iterația se realizează utilizând factorii L și U . În acest mod, fiecare iterație necesită doar $O(n^2)$ operații, în loc de $O(n^3)$ în programul de mai sus. Utilizați funcțiile dumneavoastră pentru descompunere LUP, substituție directă și inversă pentru a implementa iterația inversă. Experimentați cu câteva matrice și comparați rezultatele dumneavoastră cu cele furnizate de `eig(A)`.

Problema 8 Generați un sistem aleator care are soluția $[1, 2, \dots, n]^T$ și matrice SPD. Rezolvați-l prin descompunere Cholesky ($n = 271$).

Testul 4

Problema 9 Să se analizeze metoda lui Cramer și eliminarea gaussiană din punct de vedere al complexității (unitatea de măsură va fi numărul de operații flotante - flops) în cazurile $n = 2$ și $n = 3$.

Problema 10 Implementați algoritmul Thomas cu pivotare.

Problema 11 Implementați o rutină pentru inversarea unei matrice simetrice pozitiv definite, folosind descompunerea Cholesky și rezolvând un set de sisteme convenabile. (Indicație: $AX = I$, vom putea obține fiecare coloană a lui X rezolvând sisteme de forma $AX(:, k) = I(:, k)$).

Testul 5

Problema 12 Să se analizeze metoda lui Cramer și eliminarea gaussiană din punct de vedere al complexității (unitatea de măsură va fi numărul de operații flotante - flops) în cazurile $n = 2$ și $n = 3$.

Problema 13 Implementați rezolvarea unui sistem având o matrice Hessenberg superioară prin descompunere LUP. Ilustrați pentru un sistem de 20×20 . O matrice se numește Hessenberg superioară dacă are diagonalele începând cu diagonală -1 nenule. Care este complexitatea algoritmului.

Problema 14 Se consideră un sistem de forma $Ax = b$ supradeterminat (are mai multe ecuații decât necunoscute). Să se rezolve sistemul $A^T Ax = A^T b$ eficient. Să se compare soluția celui de-al doilea sistem cu soluția sistemului $Ax = b$ obținută cu backslash. Să se compare condiționarea lui A cu condiționarea lui $A^T A$. Ilustrare pentru un sistem cu matricea A de dimensiune 10×2 generată aleator și soluția cunoscută.