Test laboratoarele 1 şi 2 - formula lui Taylor şi erori

29 martie 2023

Testul 1

Problema 1 *Să se calculeze* $\sin 10^{22}$ *şi* $\cos 10^{22}$ *cu precizia epsilon-ul maşinii.*

Problema 2 *John Machin (1680-1752) a descoperit următoarea expresie pentru* π*:*

$$\pi = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}. \tag{1}$$

(a) Scrieţi seria Maclaurin şi polinomul lui Taylor T_n *de grad* n *pentru* $\arctan x$ *în jurul lui* $x = 0$*.*

(b) Aproximaţi π *utilizând* T_n *şi (1). Mai concret, utilizaţi aproximarea*

$$\pi \approx P_n = 16 T_n \left(\frac{1}{5}\right) - 4 T_n \left(\frac{1}{239}\right).$$

(c) Care este eroarea relativă în aproximarea de mai sus? Calculaţi π *cu precizia* eps *(în MATLAB). Câte zecimale corecte se obţin pentru* $n = 9$*?*

Testul 2

Problema 3 *Să vedem ce se întâmplă dacă se aplică radicalul repetat şi apoi se ridică rezultatul la pătrat repetat. Scrieţi o funcţie MATLAB care acceptă la intrare un vector* x*, îi aplică rădăcina pătrată de 52 de ori şi apoi ridică rezultatul la pătrat de 52 de ori: teoretic se obţine vectorul iniţial. Numiţi funcţia dumneavoastră Higham. Algoritmul este dat mai jos:*

Intrare: vectorul x

for *i* ***from*** *1* ***to*** *52* ***do***
  $x := \sqrt{x};$
end for
for *i* ***from*** *1* ***to*** *52* ***do***

$x := x^2$;

end for

return x

Rezultatul va fi foarte diferit de x. *Executaţi apoi secvenţa MATLAB*

```
x = logspace( 0, 1, 2013 );
y = Higham( x );
plot( x, y, 'k.', x, x, '--' )
```

Explicaţi reprezentarea grafică. (Indicaţie:identificaţi punctele în care $y \approx x$*).*

Problema 4 *Presupunem că dorim să calculăm în MATLAB factorul Lorenz* γ *definit prin*

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

unde v *este viteza relativă în* m/s *a două cadre inerţiale, iar* c *este viteza luminii, aproximativ* $299,792,458$ m/s*. Ne asigură MATLAB suficientă precizie pentru a determina efectul relativist al unui vehicul ce se mişcă cu* $v = 100.000$ *km/h? Dându-se cifrele semnificative ale lui* v*, este rezultatul numeric dat de MATLAB' satisfăcător? Comparaţi rezultatul cu cel obţinut din*

$$\left(1 - x^2\right)^{-1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + O\left(x^4\right).$$

Testul 3

Problema 5 *Dorim să calculăm integralele*

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a} \mathrm{d}\, x$$

pentru $n = 0, 1, 2, \ldots, 30$ *şi* $a > 0$.

1. *Arătaţi că are loc relaţia de recurenţă:*
$$y_n = \frac{1}{n} - a y_{n-1}, \qquad y_0 = \ln \frac{1+a}{a}. \tag{2}$$

2. *Calculaţi margini superioare şi inferioare pentru valorile lui* y_n *alegând* $x = 0$ *şi respectiv* $x = 1$*, în numitorul integrandului.*

3. *Calculaţi termenii şirului* $\{y_n\}$ *pentru* $a = 10$ *şi* $n = 1, \ldots, 30$ *utilizând (2) repetat. Obţineţi o tabelă cu valorile şi marginile lor.*

4. *Rezolvaţi (2) în raport cu* y_{n-1} *şi calculaţi din nou şirul pentru* $a = 10$*, de această dată* n *mergând în jos şi începând cu* $n = 30$*. Luaţi ca valoare de pornire marginea inferioară pentru* y_{30}.

5. *La final, verificaţi rezultatele dumneavoastră calculând integralele cu funcţia MATLAB* `quad`.

Problema 6 *Ştim de la Analiză matematică că*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Care este "limita în aritmetica maşinii "? Explicaţi.

Testul 4

Problema 7 *Implementaţi o rutină MATLAB pentru calculul lui* $f(x) = \exp(x)$ *cu precizia* eps.

Problema 8 *Calculaţi integrala* $\int_0^1 e^x \mathrm{d}\, x$ *cu ajutorul unei sume Riemann cu* n *subintervale echidistante, evaluând integrandul la mijlocul fiecărui interval. Afişaţi sumele Riemann pentru* $n = 5000 : 5000 : 100000$ *(cu 15 cifre zecimale după marca zecimală), împreună cu erorile absolute. Comentaţi rezultatul.*

Testul 5

Problema 9 *Fie* $y_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(a) *Utilizaţi integrarea prin părţi pentru a obţine o relaţie de recurenţă între* y_k *şi* y_{k-1}, *pentru* $k = 1, 2, 3, \ldots$, *şi determinaţi valoarea de pornire* y_0.

(b) *Scrieţi un program MATLAB care generează* y_0, y_1, $\ldots$, y_{20}, *utilizând recurenţa de la (a), şi afişaţi rezultatul cu 15 cifre zecimale după marca zecimală. Explicaţi detaliat ce se întâmplă.*

(c) *Utilizaţi recurenţa de la (a) în ordine inversă, pornind cu valoarea (arbitrară)* $y_N = 0$. *Plasaţi în cinci coloane consecutive ale unei matrice de* (21×5) Y *valorile* $y_0^{(N)}$, $y_1^{(N)}$, $\ldots$, $y_{20}^{(N)}$ *astfel obţinute pentru* $N = 22$, *24, 26, 28, 30. Determinaţi cât de mult diferă una de alta coloanele consecutive ale lui* Y *afişând*

$$e_i = \max\left|\left(Y(:, i+1) - Y(:, i)\right)/Y(:, i+1)\right|, \ i = 1, 2, 3, 4.$$

Tipăriţi ultima coloană $Y(:, 5)$ *a lui* Y *şi explicaţi de ce ea reprezintă precis cantităţile* y_0, y_1, $\ldots$, y_{20}.

Problema 10 *La evaluarea pe calculator a funcţiei*

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

se observă o eroare relativă mare pentru valori $x \approx 0$.

1. *Reprezentaţi grafic pe intervalul* $x \in [-10^{-11}, 10^{-11}]$. *Explicaţi ce se întâmplă.*

2. *Găsiţi o metodă de calcul a lui* f *pentru* $|x| < 1$ *la precizia maşinii şi scrieţi o funcţie MATLAB pentru calculul lui* f. *Reprezentaţi din nou cu noua funcţie.*

Testul 6

Problema 11 *La evaluarea pe calculator a funcţiei*

$$f(x) = \frac{x^2}{\cos(\sin(x))^2 - 1}$$

se observă o eroare relativă mare pentru valori $x \approx 0$.

1. *Reprezentaţi grafic pe intervalul* $x \in \left[-10^{-7}, 10^{-7}\right]$. *Explicaţi ce se întâmplă.*

2. *Găsiţi o metodă de calcul a lui* f *pentru* $|x| < 1$ *la precizia maşinii şi scrieţi o funcţie MATLAB pentru calculul lui* f. *Reprezentaţi grafic.*

Problema 12 *Să se aproximmeze derivata lui* $f(x) = \exp(x)$ *în* $x = 0$ *cu formula*

$$f'(x) = \frac{\exp(h) - 1}{h}$$

pentru valori ale lui h *de forma* $h = 10.\hat{}(-15:0)$ *şi* $h = 2.01^{-k}$, $k = 10 : 54$; *reprezentaţi grafic eroarea, explicaţi fenomenul şi propuneţi un remediu.*

Testul 7

Problema 13 *Care este cea mai mare valoare pentru care funcţia* $f(x) = 3^x$ *dă depăşire în MATLAB? Care este cea mai mică valoare pozitivă pentru care* $f(x)$ *dă depăşire superioară? Analog pentru depăşire inferioară.*

Problema 14 *Fie*

$$f(x) = e^x - \cos(x) - x.$$

(a) *Reprezentaţi grafic* f *pe o vecinătate a lui 0, utilizând metodele Analizei matematice.*

(b) *Reprezentaţi grafic* f *pentru* $|x| < 5 \times 10^{-8}$, *utilizând aritmetica în virgulă flotantă, în simplă şi dublă precizie.*

(c) *Cum s-ar putea obţine un grafic mai realist?*

Testul 8

Problema 15 *Care este cea mai mare valoare pentru care exponenţiala din MATLAB* **`exp`** *nu dă depăşire? Care este cea mai mică valoare pozitivă pentru care exponenţiala din MATLAB* **`exp`** *dă depăşire superioară? Analog pentru depăşire inferioară.*

Problema 16 *Se consideră ecuaţia de gradul al doilea* $x^2 + 2bx + 1 = 0$.

1. *Determinaţi condiţionarea problemei de determinare a rădăcinilor ecuaţiei în funcţie de* b.
2. *Reprezentaţi grafic* $\left(-b+\sqrt{b^2-1}\right)\left(-b-\sqrt{b^2-1}\right)$ *care ar trebui să fie egală cu 1 pe o scară logaritmică în MATLAB după cum urmează:*

```
b = logspace( 6, 7.5, 1001 );
one = (-b-sqrt(b.^2-1) ).*(-b+sqrt(b.^2-1));
plot( b, one, '.' )
```

3. *Explicaţi ce se întâmplă şi găsiţi un remediu.*
4. *Dacă* $b \gg 1$, *care rădăcină este mai precisă* $-b+\sqrt{b^2-1}$ *sau* $-b-\sqrt{b^2-1}$*? De ce?*

Testul 9

Problema 17 *Să se reprezinte grafic funcţia* $f(x) = \cosh^2 x - \sinh^2 x - 1$ *pe intervalul* $[-2\pi, 2\pi]$, *aşa cum este definită, fără a face nici o simplificare. Reduceţi apoi plaja de reprezentare pe axa Oy la limita* $[1-2e-12, 1+2e-12]$. *Explicaţi fenomenul şi găsiţi un remediu.*

Problema 18 *Scrieţi o rutină care primeşte la intrare un număr în virgulă flotantă, simplă sau dublă precizie şi care returnează:*

- *semnul*
- *exponentul în binar*
- *semnificantul întreg (adică semnificantul interpretat ca întreg pe 53 de biţi, ţinând cont şi de bitul ascuns) în zecimal*
- *semnificantul în zecimal (ţinând cont de bitul ascuns).*

Rutina trebuie să funcţioneze pentru orice număr în virgulă flotantă.