Capitolul 2
PROIECŢII ORTOGONALE PE UN PLAN
1. Proiecţii de puncte, de segmente de dreaptă şi de drepte pe un plan. Unghiul dintre o dreaptă şi un plan. Lungimea proiecţiei unui segment pe un plan

- Proiecţia ortogonală a unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei dusă din acel punct pe dreaptă.
  Observaţie. Dacă punctul se află pe dreaptă, punctul coincide cu proiecţia sa.
- Proiecţia ortogonală a unui segment [AB] pe o dreaptă d este segmentul $[A'B']$, unde A' şi B' sunt proiecţiile punctelor A şi B pe dreapta d.
  Observaţie. Proiecţia ortogonală a unui segment pe o dreaptă este, în general, un segment. Dacă segmentul este perpendicular pe dreaptă, atunci proiecţia lui este un punct.
- Proiecţia ortogonală a unui punct pe un plan este piciorul perpendicularei din acel punct pe plan.
- Pentru a proiecta o dreaptă d pe un plan α, două puncte oarecare A, B ale dreptei d se proiectează pe α în A', B'. Dreapta $A'B'$ es te proiecţia dreptei AB pe planul α.
  Observaţie. Proiecţia unei drepte pe un plan este în general, o dreaptă. Dacă dreapta este perpendiculară pe planul pe care se proiectează atunci proiecţia ei este un punct.
- Teoremă. O dreaptă paralelă cu un plan, este paralelă cu proiecţia sa pe plan.
- Unghiul unei drepte cu un plan (neparalel cu dreapta) este unghiul dintre dreaptă şi proiecţia ei pe plan. Dacă dreapta este perpendiculară pe plan atunci unghiul dintre dreaptă şi

plan este orice unghi dintre dreaptă şi o dreaptă concurentă cu ea din plan şi are măsura 90^o.

- <u>Lungimea proiecţiei unui segment.</u> Lungimea proiecţiei unui segment pe o dreaptă este egală cu lungimea segmenului înmulţită cu cosinusul unghiului dintre dreapta suport a segmentului şi dreapta dată: $A'B' = AB \cdot \cos u$

<u>Exersare și consolidare</u>

...cţia unui segment pe o dreaptă poate fi ....sau ....

2. Proiecţia unei drepte pe un plan poate fi.......sau........

3. Un punct este proiecţia unui segment pe o dreaptă, dacă......

4. Un segment [AB] de lungime 6 cm se proiectează pe un plan α. Aflați lungimea proiecţiei ştiind că unghiul dintre dreapta AB şi planul α are măsura:

a) 30^o; b) 45^o; c) 60^o.

5. Pe planul α se ridică perpendiculara AB, $B \in \alpha$, AB = 12 cm. Fie C un punct din planul α astfel încât AC =13 cm. Să se determine sinusul şi cosinusul unghiului dintre dreapta AC şi planul α.

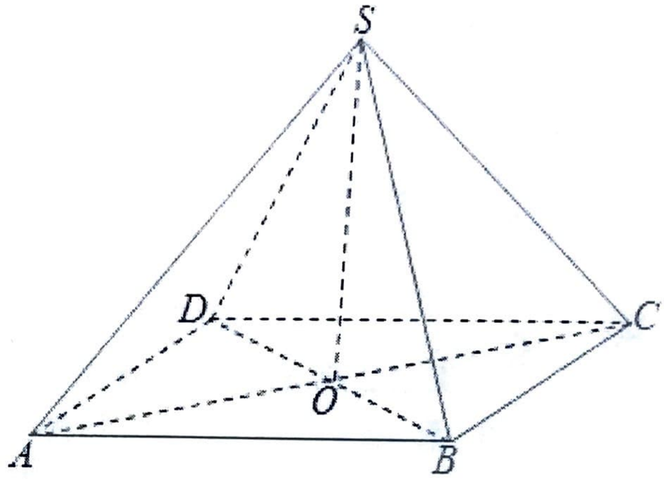
6. Fie SABCD o piramidă patrulateră regulată și SO înălțimea piramidei. Determinați:

a) $pr_{(ABC)}S$; b) $pr_{(ABC)}[SC]$;

c) $pr_{(ABC)}[SA]$; d) $pr_{(ABC)}[SO]$;

e) $pr_{(SBD)}[BC]$; f) $pr_{(SBD)}\Delta SBC$;

g) $pr_{(SAC)}[BS]$; h) $pr_{(SAC)}\Delta SAB$.



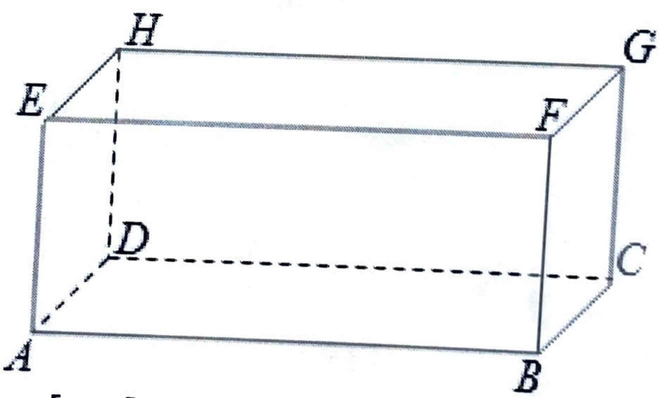
7. Fie ABCDEFGH un paralelipiped dreptunghic. Determinați:

a) $pr_{(ABC)}[AG]$; b) $pr_{(ABC)}[EF]$; c) $pr_{(ABC)}[BG]$;

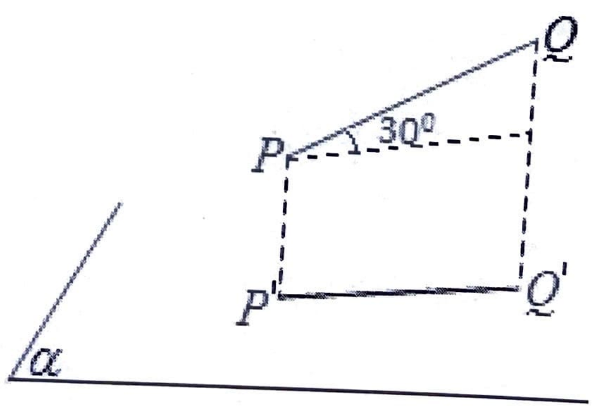
d) $pr_{(ADH)}[BH]$; e) $pr_{(ADH)}C$; f) $pr_{(ADH)}B$;

g) $pr_{(BCF)}A$; h) $pr_{(BCF)}E$; i) $pr_{(BCF)}[AG]$;

j) $pr_{(BCF)}[AE]$; k) $pr_{(ABC)}\Delta HAC$; l) $pr_{(ABC)}\Delta GEH$.



8. Un segment $[PQ]$ formează cu un plan α un unghi de 30^0. Știind că lungimea proiecției segmentului pe plan este $7\sqrt{3}\,cm$, aflați lungimea segmentului $[PQ]$.



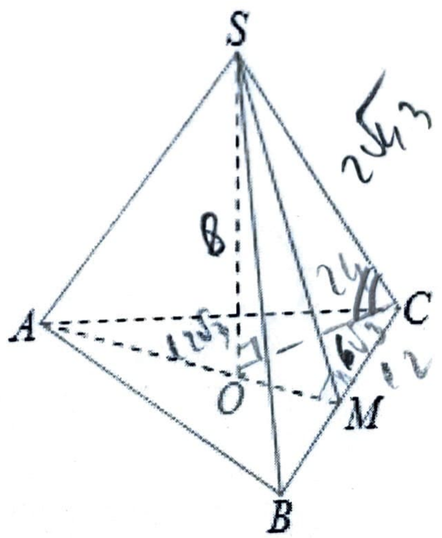
Aprofundare

9. Fie SABC o piramidă triunghiulară regulată, cu $AB = 24\,cm$ și înălțimea $SO = 8\,cm$.

a) Precizați $pr_{(ABC)}[SC]$ și $pr_{(ABC)}\Delta SBC$.

b) Determinați $tg(\sphericalangle(SC,(ABC)))$.

c) Calculați aria triunghiului BOC.

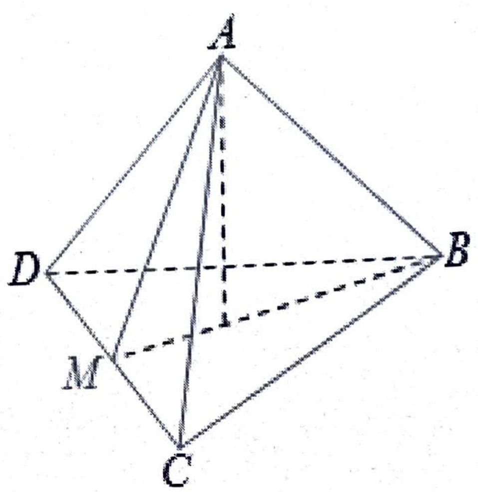


10. Fie ABCD un tetraedru regulat cu $AB = 6\,cm$ și M mijlocul muchiei $[CD]$.

a) Precizați $pr_{(ABM)}D$ și $pr_{(ABM)}[BD]$.

b) Determinați $\sin(\sphericalangle(BD,(ABM)))$.

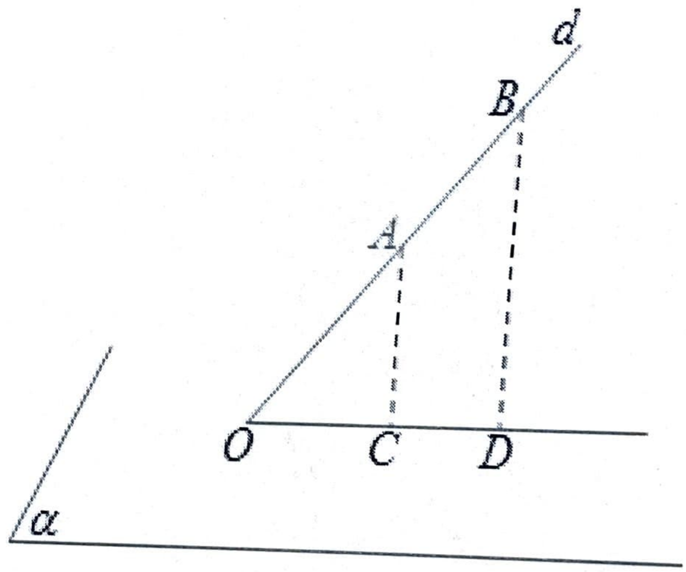
c) Calculați ariile triunghiurilor BCD și ABM.



11. O dreaptă d intersectează un plan α în punctul O și $A, B \in d$, $AC \perp \alpha,\ BD \perp \alpha,\ C, D \in \alpha$.

a) Demonstrați că punctele O, C, D sunt coliniare.

b) Dacă $OC = 4\,cm$ și $\frac{OA}{OB} = \frac{2}{5}$, calculați lungimea segmentului $[CD]$.

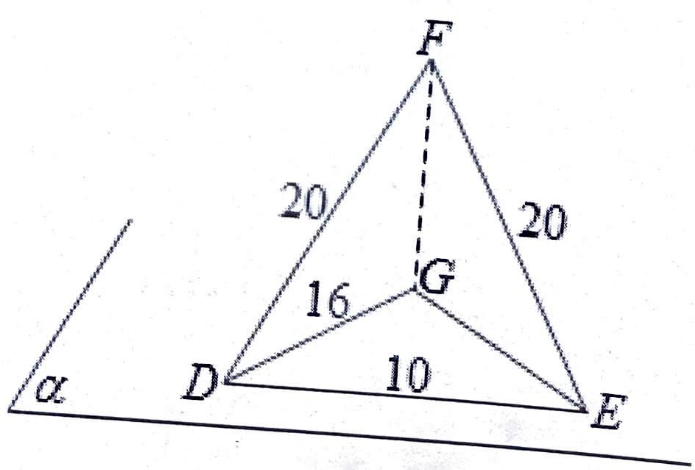


12. Triunghiul isoscel DEF cu $FD = FE = 20\,cm,\ DE = 10\,cm$ are latura DE inclusă în planul α și $F \notin \alpha$. Proiecția punctului F pe planul α este punctul G, nesituat pe dreapta DE, și $DG = 16\,cm$.

a) Precizați $pr_{\alpha}[FD]$ și $pr_{\alpha}\Delta DEF$.

b) Determinați $\sin\left(\widehat{FD, \alpha}\right)$ și $tg\left(\widehat{FE, \alpha}\right)$.

c) Calculați aria triunghiului DEG.

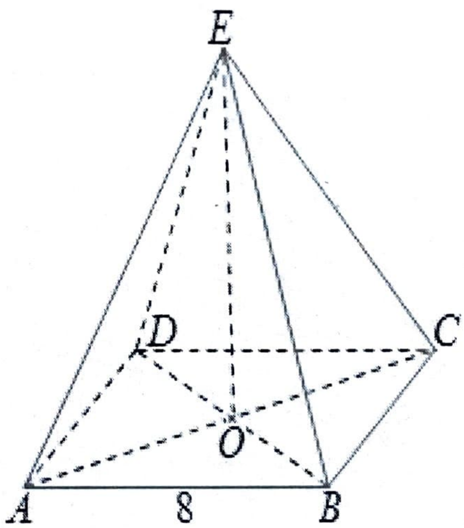


13. Fie ABCDE o piramidă patrulateră regulată cu baza ABCD, $AB = 8\,cm$ și înălțimea $EO = 4\sqrt{7}\,cm$.

a) Precizați $pr_{(ABC)}[EC]$ și $pr_{(ABC)}\Delta EAB$.

b) Determinați $tg\left(\sphericalangle\left(EC,(ABC)\right)\right)$.

c) Calculați perimetrul și aria triunghiului EBC.

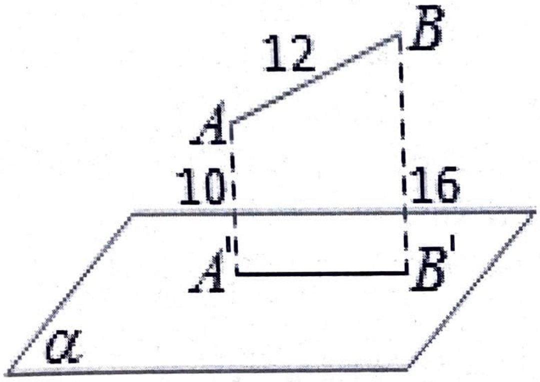


14. În punctul O, intersecţia diagonalelor pătratului ABCD, se ridică perpendiculara MO pe planul (ABC). Să se arate că unghiurile formate de MA, MB, MC şi MD cu planul pătratului sunt congruente.

15. Un segment AB = 12 cm se proiectează pe planul α după segmentul $A'B'$. Ştiind că $AA' = 10\text{cm}$ şi $BB' = 16\text{cm}$ să se afle:

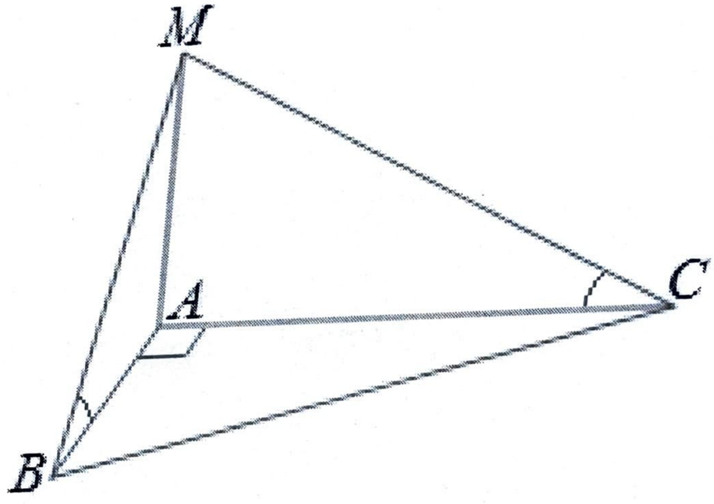
a) lungimea proiecţiei $A'B'$;

b) cosinusul unghiului dintre dreapta AB şi planul α.



16. Se proiectează pe planul α punctele A, B, C coliniare. Să se demonstreze că proiecţiile lor sunt trei puncte coliniare.

17. Pe planul triunghiului dreptunghic ABC, $m(\widehat{A}) = 90°$ şi $AB = 6\sqrt{3}$, $BC = 6\sqrt{30}$ se ridică perpendiculara MA = 18. Să se afle măsurile unghiurilor determinate de MB, respectiv MC cu planul (ABC).



18. Dacă dreapta suport a unui segment AB este paralelă cu un plan α să se demonstreze că proiecţia $A'B'$ a segmentului AB pe planul α este un segment paralel şi congruent cu segmentul AB.

19. Fie VABCD o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei de 12 cm şi înălţimea VO de $6\sqrt{6}$ cm. Arătați că muchiile laterale formează cu planul bazei unghiuri congruente şi să se afle măsura lor.

20. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are laturile bazei AB = = 3 cm, BC = 4 cm şi înălţimea $AA' = 12$ cm. Aflați cosinusul unghiului dintre o diagonală a paralelipipedului şi planul (ABC).

21. Fie $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ o prismă hexagonală regulată cu latura bazei de 2 cm. Ştiind că unghiul făcut de diagonala AD' cu planul bazei este de $60°$, să se afle muchia laterală a prismei.

22. Segmentul AB se proiectează pe planul α în segmentul $A'B'$.

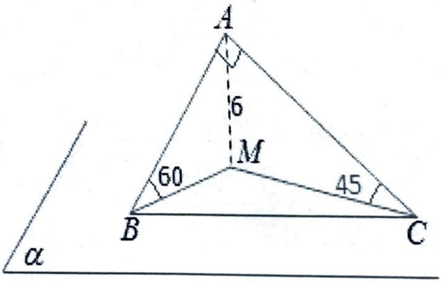
Arătaţi că mijlocul M al segmentului AB se proiectează în M', mijlocul segmentului $A'B'$.

23. Se proiectează ΔABC pe planul α în $\Delta A'B'C'$. Să se demonstreze că centrul de greutate al ΔABC se proiectează în centrul de greutate G' al $\Delta A'B'C'$.

24. Triunghiul dreptunghic ABC are ipotenuza BC conţinută în planul α, laturile AB şi AC formează cu planul α unghiuri cu măsurile de 60°, respectiv 45°. Ştiind că distanţa de la punctul A la planul α este de 6 cm să se calculeze:

a) perimetrul triunghiului MBC unde M este proiecţia punctului A pe planul α

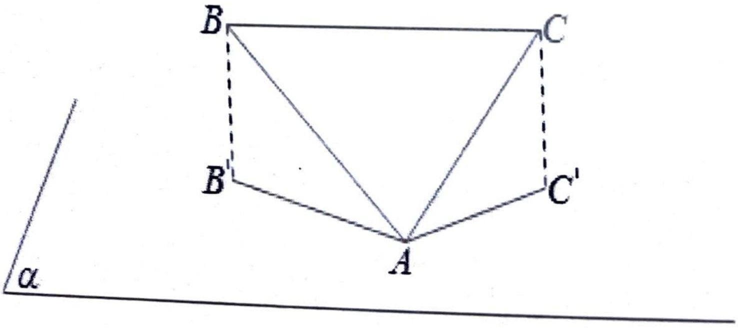
b) aria triunghiului ABC.



25. Triunghiul echilateral ABC are latura de 12 cm. Se proiectează vârfurile B şi C ale triunghiului pe un plan α, ce trece prin A. Ştiind că dreptele AB şi AC formează cu planul α unghiuri de 45° să se demonstreze că:

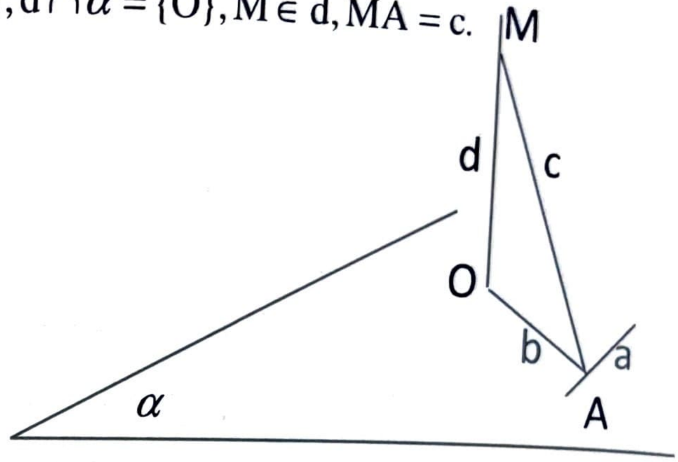
a) $BC \parallel \alpha$;

b) $\Delta AB'C'$ este dreptunghic isoscel.



2. Teorema celor trei perpendiculare. Calculul distanţei de la un punct la o dreaptă

- <u>Teorema directă:</u> $d \perp \alpha, b \perp a \Rightarrow c \perp a$, unde $a, b \subset \alpha, a \cap b = \{A\}, d \cap \alpha = \{O\}, M \in d, MA = c.$



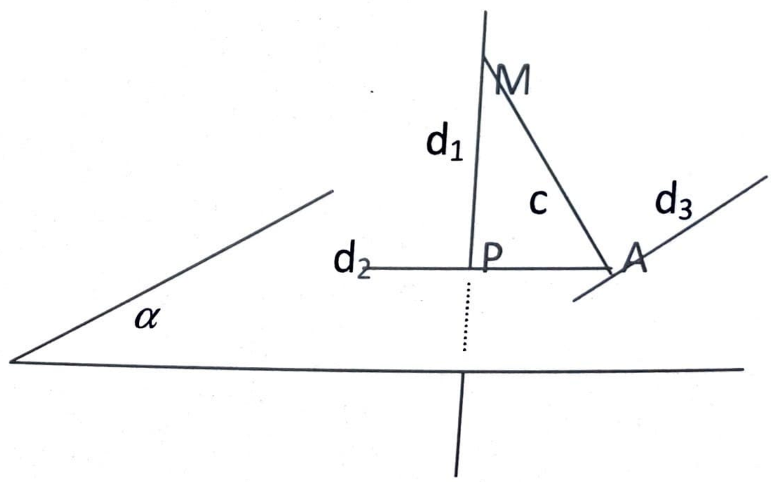
- <u>Reciproce ale teoremei celor trei perpendiculare.</u>

1) $d \perp \alpha, c \perp a \Rightarrow b \perp a,\ a, b \subset \alpha, a \cap b = \{A\}, d \cap \alpha = \{O\}, M \in d, MA = c.$

2) $b \perp a, c \perp a, d \perp b \Rightarrow d \perp \alpha$, unde $a, b \subset \alpha, a \cap b = \{A\}, M \in c, M \in d.$

<u>Exersare și consolidare</u>

Fie următoarea figură:

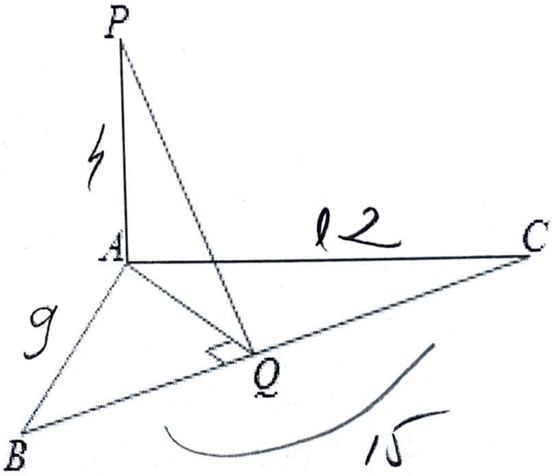


1. Dacă $d_1 \perp \alpha, d_2 \perp d_3$, atunci spunem despre dreapta c şi dreapta d_3 că sunt..$\perp$

2. Dacă $d_1 \perp d_2, c \perp d_3$ şi $d_2 \perp d_3$ atunci spunem despre dreapta d_1 că...$d_1 \perp \alpha$

3. Dacă $d_1 \perp \alpha, c \perp d_3$ spunem că d_2 şi d_3 sunt..$\perp$

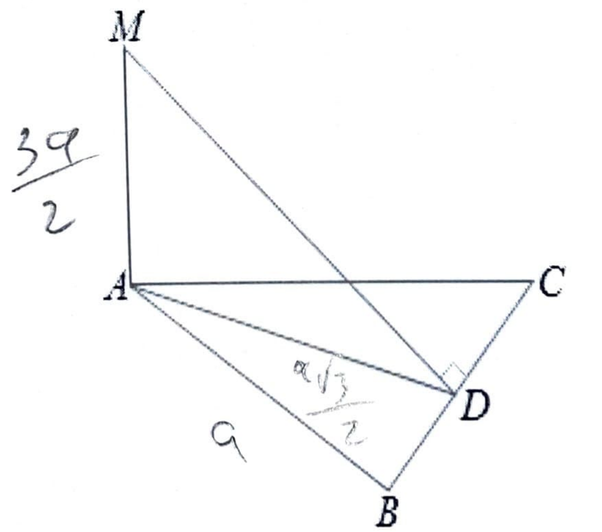
4. Fie un triunghi dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^{\circ}, AB = 9\,\text{cm}$ şi BC = = 15 cm. În vârful A se ridică perpendiculara pe planul triunghiului pe care se ia un punct P aşa încât AP = 4 cm. Aflaţi distanţa de la P la BC.



5. În vârful A al unui triunghi echilateral ABC se ridică o perpendiculară pe planul triunghiului, pe care se consideră punctul M. Fie D mijlocul laturii BC.

a) Demonstraţi că $MD \perp BC$;

b) Calculaţi distanţa de la M la BC ştiind că AB = a şi $AM = \frac{3a}{2}$.



Aprofundare

6. Fie MA o dreaptă perpendiculară pe planul rombului ABCD. Să se demonstreze că $MO \perp BD$, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

7. Fie O un punct în planul triunghiului ABC. Dacă $DO \perp (ABC)$ să se arate că $DA \perp BC$ dacă şi numai dacă O se găseşte pe înălţimea triunghiului, dusă din punctul A.

8. Fie VABC o piramidă triunghiulară regulată. Dacă VM este înălţime în ΔVBC, demonstrați că AM este înălţime în ΔABC. Ştiind că AB = 6 cm şi VA = 5 cm, calculaţi VO, $VO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$.

9. Fie o piramidă triunghiulară VABC în care VA = VB = VC = AB = BC = a şi $m(\sphericalangle AVC) = m(\sphericalangle ABC) = 90^\circ$.

a) Arătați că $AC \perp (VBD)$, unde D este mijlocul lui AC;

b) Calculați distanţa de la vârful V la laturile bazei.

10. În centrul O al pătratului ABCD se ridică $MO \perp (ABC)$, $MO = a\sqrt{2}$. Ştiind că d(M, BC) = 2a calculați latura pătratului.

11. Fie AD înălţimea triunghiului ABC, $D \in BC$ şi punctul M în afara planului (ABC) aşa încât $MD \perp BC$. Ştiind că în ΔMAD avem AD = 5 cm, MA = 12 cm şi MD = 13 cm, arătaţi că $MA \perp (ABC)$.

12. Se dă ΔABC dreptunghic în A şi D piciorul înălţimii din A a triunghiului. Pe planul (ABC) se ridică MA perpendiculară.

a) Arătați că $MD \perp BC$;

b) Arătați că $AC \perp MB$;

c) Dacă $AE \perp MB$ arătați că $CE \perp MB$.

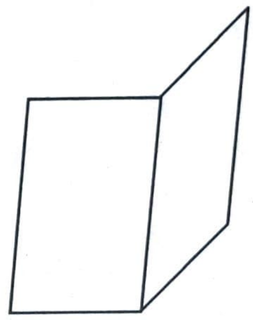
13. Pe planul trapezului ABCD, AD || $BC, AD = AB = 5\text{cm}$, $CD = 6\text{cm}$, $BC = 10\text{cm}$, ducem perpendiculara MD, MD = 3,6 cm.

a) Arătaţi că $BD \perp MC$.

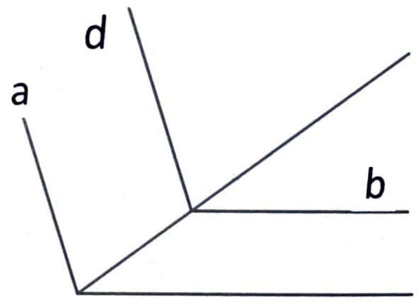
b) Calculaţi distanţele de la M la BC şi AB.

Plane perpendiculare

- O dreaptă conţinută în plan împarte planul în două semiplane. <u>Unghiul diedru</u> este figura geometrică formată de două semiplane delimitate de aceeaşi dreaptă. Dreapta comună se numeşte <u>muchia diedrului</u>, iar cele două semiplane se numesc <u>feţele diedrului</u>.



- <u>Unghiul plan asociat unui unghi diedru</u> este un unghi determinat de două semidrepte conţinute respectiv în semiplanele ce formează diedrul, având originea pe muchia acestuia şi fiind perpendiculare pe muchia diedrului.



- <u>Măsura unui unghi diedru</u> este măsura unghiului plan asociat diedrului.
- <u>Unghiul a două plane</u> (neparalele) este unghiul format de două drepte concurente, conţinute respectiv în cele două plane, care sunt perpendiculare pe dreapta de intersecţie a planelor.

<u>Teoremă</u>: Aria proiecţiei unui triunghi pe un plan α este egală cu aria triunghiului înmulţită cu cosinusul unghiului dintre

planul triunghiului şi planul α.

$$A_{A'B'C'} = A_{ABC} \cdot \cos u.$$

Două plane se numesc perpendiculare dacă unghiul dintre ele este unghi drept.

Teoremă: Dacă un plan conţine o dreaptă perpendiculară pe un alt plan atunci planele sunt perpendiculare.

Teoremă: Dându-se două plane perpendiculare, perpendiculara dusă dintr-un punct oarecare al unuia dintre plane pe dreapta de intersecţie a celor două plane este perpendiculară pe cel de-al doilea plan.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ \alpha \cap \beta = d \\ a \perp d, a \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp \beta.$$

Teoremă: Printr-un punct exterior unui plan trece o dreaptă şi numai una perpendiculară pe acel plan.

Distanţa de la un punct exterior unui plan la acest plan este egală cu lungimea segmentului perpendicular din acel punct pe plan.

Observaţie. Teorema este valabilă şi dacă punctul este în plan, distanţa de la el la plan fiind în acest caz 0.

Teoremă: Printr-un punct exterior unei drepte trece un plan şi numai unul perpendicular pe acea dreaptă.

Exersare şi consolidare

...hiul diedru este figura geometrică formată de ...

2. Măsura unghiului diedru este măsura ...

3. Unghiul a două plane este unghiul format de două drepte concurente conţinute ...... şi perpendiculare pe ......

4. Dacă triunghiul *ABC* se proiectează pe un plan α în triunghiul $A'B'C'$ atunci cosinusul unghiului dintre planul *(ABC)* şi planul α

poate fi exprimat ca raportul $\cos u = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

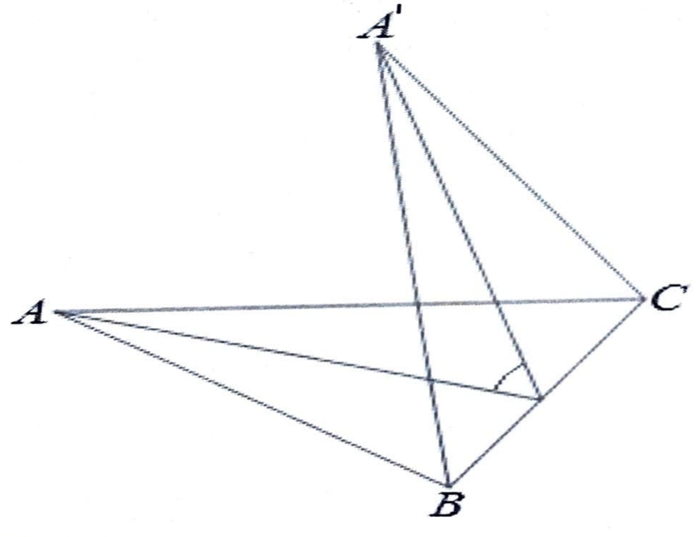
5. Dacă unghiul dintre două plane este drept atunci planele .....

6. Dacă planele α şi β perpendiculare se intersectează după dreap
d şi *a* este o dreaptă inclusă în planul α perpendiculară pe dreapta
atunci dreapta *a* ......

7. Se proiectează triunghiul *ABC* de arie 240 cm^2 pe planul α
triunghiul $A'B'C'$. Să se găsească aria triunghiului $A'B'C'$ ştiind
unghiul dintre planul *(ABC)* şi planul α are măsura de:

a) 30^0; b) 45^0; c) 60^0.

8. Se consideră triunghiurile isoscele *ABC* şi $A'BC$ de bază *[BC]*, fie
care conţinute în câte un plan. Să se evidenţieze unghiul dintre cele
două plane. (Demonstraţie).



Aprofundare

9. Trapezul dreptunghic *ABCD* cu $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) = 90^0$ este conţinut într-un plan α, iar dreptunghiul $ABC'D'$ este conţinut într-un plan β. Care dintre unghiurile ce se formează este unghi plan corespunzător unghiului dintre cele două plane? (Demonstraţie).

10. Un triunghi *ABC* de arie $12\sqrt{7}cm^2$ se proiectează pe un plan α în triunghiul $A'B'C'$ care are lungimile laturilor $A'B'=5cm$, $A'C'==13cm$, $B'C'=10cm$. Aflaţi măsură unghiului dintre planul (ABC) şi planul α.

11. Triunghiurile *ABC* şi $A'BC$ echilaterale cu latura de lungime *4cm* sunt conţinute în plane diferite. Cunoscând lungimea segmentului AA' de $2\sqrt{3}$ cm să se afle măsură unghiului dintre cele două plane.

12. În punctul *O* de intersecţie a diagonalelor rombului *ABCD* se ridică perpendiculara MO pe planul rombului. Să se demonstreze că:

a) *(MAC)* $\perp$ *(ABC);* b) *(MBD)* $\perp$ *(ABC);* c) *(MAC)* $\perp$ *(MBD).*

13. Să se demonstreze că dacă $ABCDA'B'C'D'$ este o prismă dreaptă cu baza pătrat sau romb atunci $(ACC')\perp(BDB')$.

14. Dacă *VABCD* este o piramidă patrulateră regulată să se demonstreze că *(VAC)* $\perp$ *(VBD).* Determinați perpendiculara din A pe planul *(VBD).*

15. În tetraedrul regulat *ABCD* să se construiască un unghi plan corespunzător unghiului dintre planele *(ABC)* şi *(ACD).*