VII. PARALELISM

1. METODA REDUCERII LA ABSURD

Ştim că o propoziţie este un enunţ matematic care este ori adevărat, ori fals (aceasta însemnând că nu poate fi şi adevărat şi fals în acelaşi timp). Uneori, în loc să demonstrăm că o propoziţie este adevărată, este mai uşor să demonstrăm că ea nu poate fi falsă.

În enunţuri de tipul „dacă *p*, atunci *q*" (un astfel de enunţ însemnând „dacă propoziţia *p* este adevărată, atunci şi *q* este adevărată") ştim că *p* reprezintă ipoteza, iar *q* concluzia. Metoda reducerii la absurd constă în a demonstra că *q* nu poate fi falsă. Acest lucru se face astfel: presupunem că *q* ar fi falsă şi arătăm că această presupunere conduce la o contradicţie. În consecinţă, *q* nu poate fi falsă. Deci este adevărată. Să urmărim un exemplu:

Exemplu: Să se demonstreze că un segment nu poate avea două mijloace.

Fie $[AB]$ un segment. Să presupunem că $[AB]$ are două mijloace, M şi N.

Avem: $M \in [AB]$ şi $MA = MB = \frac{AB}{2}$;

$N \in [AB]$ şi $NA = NB = \frac{AB}{2}$; Atunci $MN = AB - MA - NB = $
$= AB - \frac{AB}{2} - \frac{AB}{2} = 0$. Din $MN = 0$, obţinem că $M = N$ (în contradicţie cu faptul de la care am pornit, că $M \neq N$). Contradicţia provine din presupunerea că $M \neq N$, deci acest lucru nu poate avea loc, cu alte cuvinte, segmentul nu poate avea două mijloace.

Exerciţii şi probleme

Folosind metoda reducerii la absurd, demonstraţi că:

1. Dacă $n^2 \not\vdots\, 4$, atunci $n \not\vdots\, 2$ ($n \in \mathbb{N}$).

2. Dacă bisectoarele a două unghiuri având acelaşi vârf au drepte suport diferite, atunci unghiurile nu sunt opuse la vârf.

3. Dacă *M* este un punct situat pe dreapta (*d*), atunci în punctul *M* se poate duce o singură perpendiculară pe (*d*).

4. Dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci numerele $n + 3$ şi $2n + 5$ sunt prime între ele.
5. Un unghi nu poate avea două bisectoare interioare.
6. Demonstraţi consecinţa teoremei 6 din capitolul VI: într-un triunghi, unui unghi mai mare i se opune o latură mai mare.

2. DREPTE TĂIATE DE O SECANTĂ

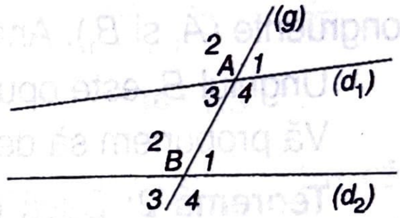


Fig. 7.1

În figura 7.1 sunt reprezentate două drepte, (d_1) şi (d_2) şi o dreaptă (g) care le intersectează, pe care o vom numi *secantă*. Fie A şi B punctele de intersecţie ale dreptei (g) cu (d_1), respectiv (d_2).

În jurul punctului A se formează unghiurile $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$, $\hat{A}_4$ şi în jurul punctului B unghiurile $\hat{B}_1$, $\hat{B}_2$, $\hat{B}_3$, $\hat{B}_4$.

1. Două unghiuri, unul cu vârful în A şi celălalt cu vârful în B se numesc *alterne interne* dacă se află de o parte şi de alta a secantei şi interiorul fiecăruia include intersecţia de semiplane $(d_1B \cap (d_2A$. Perechile de unghiuri alterne interne sunt $(\hat{A}_3, \hat{B}_1)$ şi $(\hat{A}_4, \hat{B}_2)$.

2. Două unghiuri, unul cu vârful în A şi celălalt cu vârful în B se numesc *alterne externe* dacă se află de o parte şi de alta a secantei şi interioarele lor nu au puncte comune cu intersecţia $[d_1B \cap [d_2A$. Perechile de unghiuri alterne externe sunt $(\hat{A}_1, \hat{B}_3)$ şi $(\hat{A}_2, \hat{B}_4)$.

3. Două unghiuri, unul cu vârful în A şi celălalt cu vârful în B se numesc *corespondente* dacă se află de aceeaşi parte a secantei şi interiorul unuia este inclus în interiorul celuilalt. Perechile de unghiuri corespondente sunt $(\hat{A}_1, \hat{B}_1)$, $(\hat{A}_2, \hat{B}_2)$, $(\hat{A}_3, \hat{B}_3)$ şi $(\hat{A}_4, \hat{B}_4)$.

Teorema 1: Dacă două drepte tăiate de o secantă formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci fiecare pereche de unghiuri alterne interne, alterne externe şi corespondente este formată din unghiuri congruente.

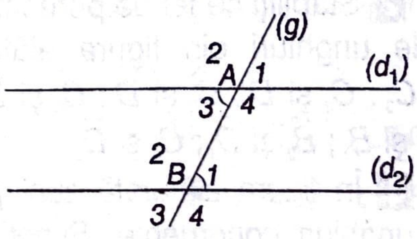


Fig. 7.2

Demonstraţie: Fie dreptele (d_1) şi (d_2) tăiate de secanta (g), astfel încât $\hat{A}_3 \equiv \hat{B}_1$ (fig. 7.2). Vom demonstra că: $\hat{A}_4 \equiv \hat{B}_2$, $\hat{A}_1 \equiv \hat{B}_3$, $\hat{A}_2 \equiv \hat{B}_4$, $\hat{A}_1 \equiv \hat{B}_1$, $\hat{A}_2 \equiv \hat{B}_2$, $\hat{A}_3 \equiv \hat{B}_3$, $\hat{A}_4 \equiv \hat{B}_4$.

Cum $\widehat{A_4}$ şi $\widehat{B_2}$ sunt respectiv suplementare unghiurilor congruente $\widehat{A_3}$ şi $\widehat{B_1}$, rezultă că $\widehat{A_4} \equiv \widehat{B_2}$.

Unghiurile $\widehat{A_1}$ şi $\widehat{B_3}$ sunt respectiv opuse la vârf cu unghiurile congruente $\widehat{A_3}$ şi $\widehat{B_1}$, deci $\widehat{A_1} \equiv \widehat{B_3}$.

Cum $\widehat{A_2}$ şi $\widehat{B_4}$ sunt respectiv suplementare unghiurilor congruente $\widehat{A_1}$ şi $\widehat{B_3}$, rezultă că $\widehat{A_2} \equiv \widehat{B_4}$.

Unghiul $\widehat{A_1}$ este opus la vârf cu $\widehat{A_3}$ şi $\widehat{A_3} \equiv \widehat{B_1}$, deci $\widehat{A_1} \equiv \widehat{B_1}$.

Unghiurile $\widehat{A_2}$ şi $\widehat{B_2}$ sunt congruente ca suplemente de unghiuri congruente ($\widehat{A_1}$ şi $\widehat{B_1}$). Analog, $\widehat{A_2} \equiv \widehat{B_2}$.

Unghiul $\widehat{B_3}$ este opus la vârf cu $\widehat{B_1}$ şi $\widehat{B_1} \equiv \widehat{A_3}$, deci $\widehat{A_3} \equiv \widehat{B_3}$.

Vă propunem să demonstraţi voi următoarele două teoreme:

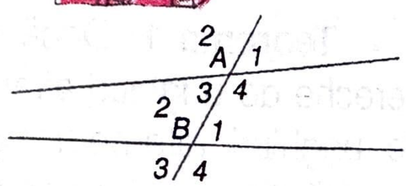
Teorema 2: Dacă două drepte tăiate de o secantă formează o pereche de unghiuri alterne externe congruente, atunci fiecare pereche de unghiuri alterne interne, alterne externe şi corespondente este formată din unghiuri congruente.

Teorema 3: Dacă două drepte tăiate de o secantă formează o pereche de unghiuri corespondente congruente, atunci fiecare pereche de unghiuri alterne interne, alterne externe şi corespondente este formată din unghiuri congruente.

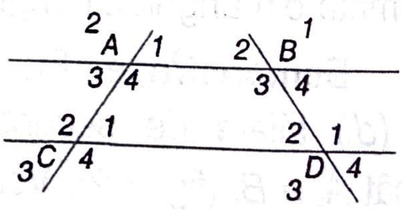
Observaţie:  Teoremele 1, 2 şi 3 ne îndreptăţesc să afirmăm că dacă una din cele opt perechi de unghiuri este formată din unghiuri congruente, toate celelalte perechi sunt formate din unghiuri congruente.

Exerciţii

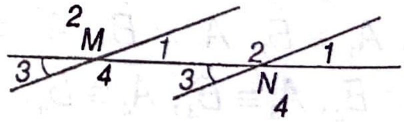
1. Alcătuiţi pe caiete un tabel în care să puneţi în evidenţă perechile de unghiuri alterne interne, alterne externe şi corespondente în figura alăturată.



2. Stabiliţi ce fel de perechi formează următoarele unghiuri din figura alăturată: $\widehat{A_3}$ şi $\widehat{C_1}$; $\widehat{A_1}$ şi $\widehat{C_3}$; $\widehat{C_2}$ şi $\widehat{D_2}$; $\widehat{C_3}$ şi $\widehat{D_1}$; $\widehat{C_4}$ şi $\widehat{D_4}$; $\widehat{B_2}$ şi $\widehat{D_4}$; $\widehat{B_2}$ şi $\widehat{A_4}$; $\widehat{A_1}$ şi $\widehat{B_1}$; $\widehat{B_3}$ şi $\widehat{D_1}$; $\widehat{C_1}$ şi $\widehat{D_3}$.



3. În figura alăturată sunt puse în evidenţă două unghiuri congruente. Scrieţi pe caiete toate perechile de unghiuri congruente care se formează.



3. DREPTE PARALELE

Să ne reamintim ce înseamnă că două drepte sunt paralele:

Definiţia 1: Două drepte coplanare distincte care nu au nici un punct comun se numesc drepte paralele (fig. 7.3).

Dacă dreptele (d) şi (g) sunt paralele, notăm acest lucru prin $(d) \parallel (g)$. Dacă dreptele nu sunt paralele, notăm $(d) \nparallel (g)$.

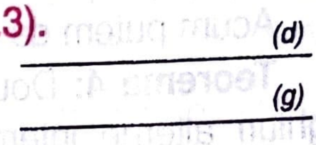


Fig. 7.3

În mod firesc, se pune întrebarea: cum putem demonstra că două drepte date sunt paralele? În acest sens, vom da în continuare câteva criterii de paralelism (adică proprietăţi care, odată stabilite, ne asigură că două drepte date sunt paralele).

Criteriul 1: Dacă două drepte tăiate de o secantă formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci cele două drepte sunt paralele.

Demonstraţie: Să considerăm dreptele (d_1) şi (d_2) şi secanta (g) astfel încât $(d_1) \cap (g) = \{A\}$, $(d_2) \cap (g) = \{B\}$ şi $\hat{A}_1 \equiv \hat{B}_1$ (fig. 7.4).

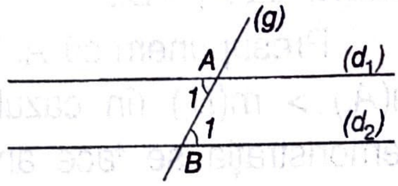


Fig. 7.4

Pentru a demonstra că $(d_1) \parallel (d_2)$, folosim metoda reducerii la absurd:

Să presupunem că $(d_1) \nparallel (d_2)$.

Atunci ele se intersectează într-un punct M (fig. 7.5). Notăm cu $\hat{A}_2$ unghiul opus la vârf cu $\hat{A}_1$.

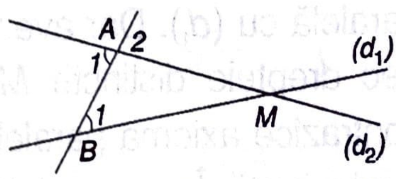


Fig. 7.5

Atunci $\hat{A}_2$ este unghi exterior triunghiului ABM şi neadiacent cu $\hat{B}_1$. În consecinţă, $m(\hat{A}_2) > m(\hat{B}_1)$. Dar $m(\hat{A}_2) = m(\hat{A}_1)$. Obţinem că $m(\hat{A}_1) > m(\hat{B}_1)$, ceea ce contrazice ipoteza. Deci presupunerea că $(d_1) \nparallel (d_2)$ nu poate fi adevărată. Atunci $(d_1) \parallel (d_2)$.

Criteriul 1 împreună cu observaţia de la sfârşitul lecţiei „Drepte tăiate de o secantă“ ne permit să enunţăm un criteriu mai general: criteriul 2.

Criteriul 2: Dacă două drepte tăiate de o secantă formează o pereche de unghiuri alterne interne, alterne externe sau corespondente congruente, atunci cele două drepte sunt paralele.

Pentru a demonstra că şi reciproca acestei afirmaţii este adevărată, vom enunţa mai întâi o axiomă:

Axioma paralelelor: Printr-un punct exterior unei drepte trece o singură dreaptă paralelă cu dreapta dată.

Acum putem da următoarea teoremă:

Teorema 4: Două drepte paralele tăiate de o secantă formează respectiv unghiuri alterne interne, alterne externe şi corespondente congruente.

Demonstraţie: Este suficient să demonstrăm că dacă două drepte sunt paralele, atunci formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente (apoi, folosind teorema 2, se obţin şi celelalte congruenţe).

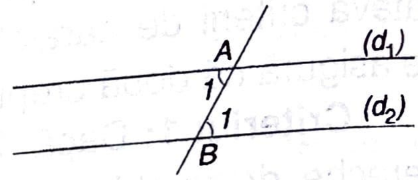


Fig. 7.6 a

Fie deci $(d_1) \parallel (d_2)$ şi $(g) \cap (d_1) = \{A\}$, $(g) \cap (d_2) = \{B\}$ (fig. 7.6 a). Vom demonstra, folosind metoda reducerii la absurd, că $\hat{A}_1 \equiv \hat{B}_1$.

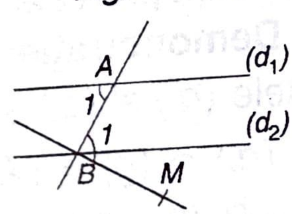


Fig. 7.6 b

Presupunem că $\hat{A}_1 \not\equiv \hat{B}_1$, de exemplu $m(\hat{A}_1) > m(\hat{B}_1)$ (în cazul $m(\hat{A}_1) < m(\hat{B}_1)$, demonstraţia se face analog). Construim un unghi cu o latură $[BA$, congruent cu $\hat{A}_1$ (fig. 7.6 b), notat $\widehat{MBA}$.

Avem $\hat{A}_1 \equiv \widehat{MBA}$ deci, conform criteriului 1, dreapta MB este paralelă cu (d_1). Dar avem şi $(d_2) \parallel (d_1)$. Cu alte cuvinte, prin punctul B trec dreptele distincte MB şi (d_2), ambele paralele cu (d_1), ceea ce contrazice axioma paralelelor. Deci, presupunerea că $\hat{A}_1 \not\equiv \hat{B}_1$ nu poate fi adevărată. În consecinţă, $\hat{A}_1 \equiv \hat{B}_1$.

Folosind teorema 4, vom demonstra încă o proprietate importantă:

Teorema 5: Două drepte paralele determină, pe alte două drepte paralele pe care le intersectează, segmente congruente.

Demonstraţie: Fie dreptele $AB \parallel CD$ şi $AD \parallel BC$ (fig. 7.7).

Vom demonstra că $[AB] \equiv [CD]$. Unim A cu C. Avem: $\hat{C}_1 \equiv \hat{A}_2$ (alterne interne determinate de dreptele paralele AB şi CD tăiate de secanta AC), $\hat{C}_2 \equiv \hat{A}_1$ (alterne interne determinate de dreptele paralele AD şi BC tăiate de secanta AC).

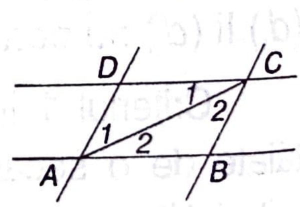


Fig. 7.7

Aceste două congruenţe, împreună cu faptul că $[AC]$ este latură comună pentru triunghiurile ABC şi CDA, ne asigură că $\Delta ABC \equiv \Delta CDA$ (Cazul U.L.U.). Deci $[AC] \equiv [BD]$.

Consecinţă: Dacă $(d) \parallel (g)$, toate punctele dreptei (d) se află la aceeaşi distanţă faţă de dreapta (g).

La începutul acestei lecţii am definit ce înseamnă că două drepte distincte sunt paralele. Convenim că orice dreaptă e paralelă cu ea însăşi. Obţinem astfel o definiţie mai „largă“ a noţiunii de drepte paralele:

Definiţia 2: Două drepte coplanare se numesc paralele dacă nu au nici un punct comun sau coincid.

Vom enumera acum câteva proprietăţi ale relaţiei de paralelism:

1. relaţia de paralelism este reflexivă ($(d) \parallel (d)$);

2. relaţia de paralelism este simetrică (dacă $(d) \parallel (g)$, atunci $(g) \parallel (d)$).

3. relaţia de paralelism este tranzitivă (dacă $(d) \parallel (g)$ şi $(g) \parallel (h)$ atunci $(d) \parallel (h)$).

Aceste trei proprietăţi ne spun că paralelismul este o relaţie de echivalenţă.

Observaţie: Dacă nu conveneam să considerăm că orice dreaptă este paralelă cu ea însăşi, relaţia de paralelism nu ar fi fost nici reflexivă, nici tranzitivă.

Construcţia dreptelor paralele

Problema pe care ne propunem s-o studiem este construcţia a două drepte paralele în următoarele situaţii:

1) se dă o dreaptă şi trebuie construită o dreaptă paralelă cu dreapta dată.

2) se dă o dreaptă şi trebuie construită o paralelă la dreapta dată care să treacă printr-un punct dat, exterior dreptei date.

Să analizăm fiecare caz în parte:

1) Să considerăm dreapta (d) dată. Pentru a construi o dreaptă (g) paralelă cu dreapta (d), procedăm astfel (fig. 7.8):

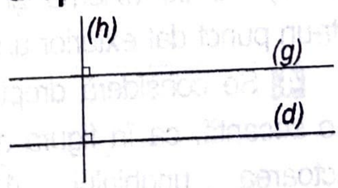


Fig. 7.8

– construim o dreaptă (h) perpendiculară pe dreapta (d) (realizarea acestei construcţii este prezentată în capitolul IV);

– printr-un punct al dreptei (h), exterior dreptei (d), ducem o dreaptă (g) perpendiculară pe (h). Dreapta (g) este paralelă cu (d).

2) Fie dreapta (d) şi punctul $M \notin (d)$. Pentru a construi dreapta (g) care trece prin M şi este paralelă cu (d) procedăm ca în figura 7.9, şi anume:

– construim dreapta (h) care trece prin M şi este perpendiculară pe (d) (construcţie prezentată în capitolul IV).

– construim dreapta (g) care trece prin M şi este perpendiculară pe (h).

Dreapta (g) este paralelă cu (d).

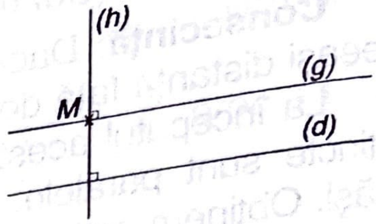
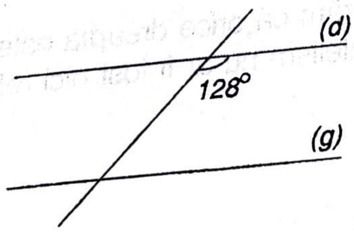
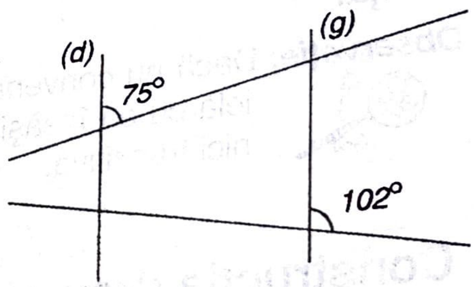


Fig. 7.9

Exerciţii şi probleme

1. În figurile următoare avem $(d) \parallel (g)$. Notaţi unghiurile care se formează şi calculaţi măsurile lor:



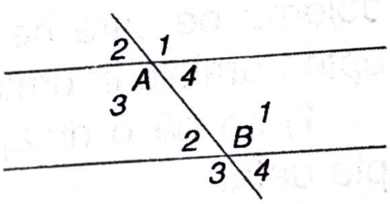


2. Determinaţi măsurile unghiurilor din figura următoare, ştiind că:

a) $m(\widehat{A_1}) + m(\widehat{B_1}) + m(\widehat{B_3}) = 360°$.

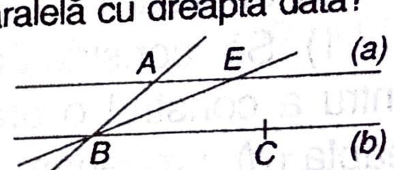
b) $m(\widehat{A_4}) = \frac{1}{3} m(\hat{B_3})$

c) $m(\widehat{A_2}) = 20\%$ din $m(\widehat{B_1})$

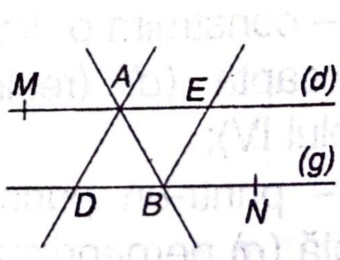


3. a) Pe ce proprietate se bazează construcţia unei drepte paralele cu o dreaptă dată? b) Pe ce axiomă şi proprietate se bazează construcţia dreptei care trece printr-un punct dat exterior unei drepte date şi care este paralelă cu dreapta dată?

4. Se consideră dreptele paralele (a) şi (b) şi AB o secantă, ca în figura alăturată. Dacă $[BE$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$, demonstraţi că $[AE] \equiv [AB]$.



5. În figura alăturată, $(d) \parallel (g)$, $[AD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{MAB}$ şi $[BE$ bisectoarea unghiului $\widehat{ABN}$. Demonstraţi că: a) $AD \parallel BE$; b) $[AB] \equiv [DB]$.



6. În triunghiul ABC cu $AB = AC$ se aleg punctele $D \in [AB]$ şi $E \in [AC]$ astfel încât $DE \parallel BC$. Demonstraţi că triunghiul ADE este isoscel.

7. Se consideră un triunghi ABC cu $AB = AC$ şi M un punct oarecare pe segmentul deschis (AB). Cum trebuie ales un punct N pe una din laturile triunghiului astfel încât $MN \parallel BC$?

8. Se consideră trei puncte necoliniare A, B, C. Construiţi un triunghi MNP cu laturile paralele cu laturile triunghiului ABC, astfel încât: a) ΔMNP să se afle în exteriorul triunghiului ABC; b) ΔMNP să se afle în interiorul triunghiului ABC; c) $M = A$.

9. Se consideră triunghiul ABC şi M un punct exterior dreptei BC. Construiţi un triunghi MNP care să aibă două laturi respectiv paralele cu AB şi AC şi a treia inclusă în dreapta BC.

10. În triunghiul ascuţitunghic ABC se duce înălţimea $[AD]$ şi se prelungeşte cu segmentul $[DM] \equiv [AD]$. Demonstraţi că $CM \parallel AB$ dacă şi numai dacă $AB = AC$.

11. Fie I intersecţia bisectoarelor unghiurilor $\hat{B}$ şi $\hat{C}$ ale triunghiului ABC. Se consideră punctele $M \in [AB]$ şi $N \in [AC]$ astfel încât $MB = MI$ şi $NC = NI$. a) Demonstraţi că $MI \parallel BC$; b) Demonstraţi că punctele M, I şi N sunt coliniare.

12. În triunghiul ABC se duce bisectoarea $[AD]$. Paralelele prin D la AB şi AC intersectează laturile $[AC]$ şi $[AB]$ în N, respectiv M. Demonstraţi că $\Delta AMD \equiv \Delta DNA$.

13. Folosind metoda reducerii la absurd, demonstraţi că: a) dacă (d), (g), (h) sunt trei drepte astfel încât $(d) \parallel (g)$ şi $(h) \parallel (g)$, atunci $(d) \parallel (h)$; b) dacă $(d) \perp (g)$ şi $(g) \perp (h)$, atunci $(d) \parallel (h)$; c) dacă A şi B sunt puncte pe o dreaptă (d), atunci perpendiculara cu piciorul în A pe (d) şi o oblică cu piciorul în B sunt concurente.

14. Găsiţi o metodă de a construi numai cu ajutorul unui echer o paralelă la o dreaptă dată şi care să treacă printr-un punct aflat la o distanţă faţă de dreapta dată mai mare decât lungimea oricărei laturi a echerului.

15. Demonstraţi consecinţa teoremei 5, enunţată la pagina 183.

4. SUMA MĂSURILOR UNGHIURILOR UNUI TRIUNGHI

Vom demonstra că, indiferent ce măsuri ar avea unghiurile unui triunghi, suma acestor măsuri este întotdeauna aceeaşi.

Teorema 6: În orice triunghi, suma măsurilor unghiurilor sale este 180°.

Demonstraţie: Considerăm un triunghi oarecare ABC şi prin vârful A ducem o paralelă la BC (fig. 7.10). Cum (d) $\parallel$ BC, avem: $\hat{A}_1 \equiv \hat{B}$ (alterne interne determinate de secanta AB) şi $\hat{A}_2 \equiv \hat{C}$ (alterne interne determinate de secanta AC).

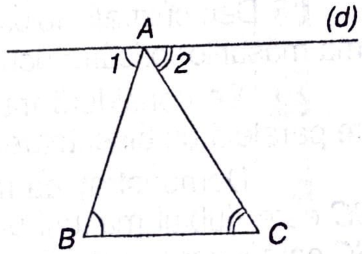


Fig. 7.10

Atunci $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = m(\hat{A}) + m(\hat{A}_1) + m(\hat{A}_2) = 180°$.

Această teoremă are câteva consecinţe imediate:

1. Unghiurile unui triunghi echilateral au măsura de $60°$.

2. Unghiurile ascuţite într-un triunghi dreptunghic isoscel au măsura de $45°$.

3. Măsura unui unghi exterior al unui triunghi este egală cu suma măsurilor celor două unghiuri ale triunghiului neadiacente celui exterior.

Exerciţii şi probleme

1. Calculaţi măsurile unghiurilor unui triunghi ABC cu $AB = AC$, în care:
a) $m(\hat{A}) = 50°$; b) $m(\hat{B}) = 65°$; c) $m(\hat{C}) = \frac{1}{2}m(\hat{A})$; d) $m(\hat{A}) - m(\hat{B}) = 90°$.

2. Calculaţi măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri ale unui triunghi echilateral.

3. În triunghiul isoscel ABC, măsura unghiului de la vârf este de $40°$. Calculaţi: a) măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor congruente; b) măsura unghiului format de bisectoarea unghiului de la vârf cu bisectoarea unui unghi de la bază.

4. În triunghiul ABC, fie I intersecţia bisectoarelor $[BB']$ şi $[CC']$. Demonstraţi că $m(\widehat{BIC}) = \frac{1}{2}m(\hat{A}) + 90°$.

5. Demonstraţi consecinţele 1, 2, 3 ale teoremei 6.

6. Se consideră triunghiul ABC obtuzunghic în B. Fie $[BD]$ bisectoarea unghiului $\hat{B}$ ($D \in [AC]$). Demonstraţi că $m(\widehat{ADB}) + m(\hat{A}) < 135°$.

7. În triunghiul MNP se dau $m(\hat{M}) = 70°$, $m(\hat{N}) = 50°$. Fie H ortocentrul triunghiului. Demonstraţi că $m(\widehat{MHN}) = 2m(\widehat{MPN})$.

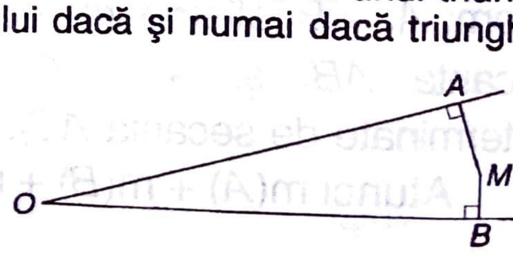
8. Se consideră triunghiul ABC oarecare şi de aceeaşi parte a dreptei BC ca şi punctul A se construiesc semidreptele $[BM$ şi $[CN$, astfel încât $BM \perp BC$ şi $CN \perp BC$. Demonstraţi că $m(\hat{A}) = m(\widehat{MBA}) + m(\widehat{ACN})$.

9. Demonstraţi, folosind metoda reducerii la absurd, că nu este posibil ca suma măsurilor oricăror două unghiuri ale unui triunghi să fie mai mare decât $120°$.

10. Se consideră triunghiul isoscel MNP ($MN = MP$). Demonstraţi că NP este paralelă cu bisectoarea unui unghi exterior cu vârful în M.

11. Demonstraţi că măsura unghiului exterior cu vârful în C al unui triunghi ABC este dublul măsurii unghiului $\hat{B}$ al triunghiului dacă şi numai dacă triunghiul ABC este isoscel cu vârful în C.

12. În figura alăturată, $\widehat{AOB}$ este un unghi ascuţit, M un punct în interiorul unghiului şi $MA \perp OA$, $MB \perp OB$. Demonstraţi că $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{AMB}) = 180°$.



13. În triunghiul ABC se duc înălţimile $[AD]$ şi $[BE]$ ($D \in [BC]$, $E \in [AC]$). Demonstraţi că $\widehat{DAC} \equiv \widehat{EBC}$.

14. În triunghiul ABC dreptunghic în A se duce înălţimea $[AD]$ ($D \in [BC]$). Ştiind că bisectoarea unghiului $\widehat{ADB}$ este perpendiculară pe AB, demonstraţi că $m(\widehat{C}) = 45°$.

Probleme suplimentare

1. Se consideră un triunghi ABC şi în exteriorul său se construieşte triunghiul isoscel ACM cu $[AC]$ ca bază. Ştiind că măsura unghiului $\widehat{AMC}$ este media aritmetică a măsurilor unghiurilor triunghiului ABC, demonstraţi că: a) mediatoarea segmentului $[MC]$ trece prin A; b) dacă MN este mediatoarea segmentului $[AC]$ ($N \in [AC]$) şi punctele M, N, B sunt coliniare, atunci triunghiul ABC este isoscel.

2. În triunghiul ABC se duce bisectoarea $[AD]$ a unghiului $\widehat{A}$ ($D \in [BC]$). Prin punctul C se duce o paralelă la AD, pe care se alege punctul M, în semiplanul opus semiplanului $[BC, A$, astfel încât $[CM] \equiv [CD]$. a) Ştiind că $m(\widehat{C}) = 50°$ şi $m(\widehat{B}) = 72°$, calculaţi $m(\widehat{CDM})$; b) Dreptele CM şi AB se intersectează în N. Demonstraţi că triunghiul ACN este isoscel.

3. Măsurile unghiurilor unui triunghi sunt direct proporţionale cu numerele 2, 5 şi 7. Demonstraţi că triunghiul este dreptunghic.

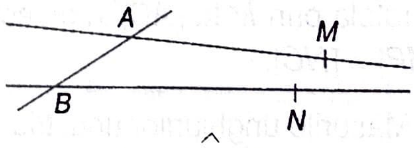
4. Demonstraţi că dacă intersecţia dintre o dreaptă şi un triunghi este formată dintr-un singur punct, atunci acest punct este un vârf al triunghiului.

5. Construiţi un punct aflat la distanţe egale faţă de două drepte paralele, folosind numai echerul şi compasul.

6. Se dă un unghi ascuţit $\widehat{AOB}$ şi un segment $[CD]$. Construiţi cu echerul şi compasul două puncte, $M \in [OA$ şi $N \in [OB$, astfel încât $MN \perp OA$ şi $[MN] \equiv [CD]$.

Probleme recapitulative

1. În figura alăturată, $m(\widehat{MAB}) = 115°$ şi $m(\widehat{NBA}) = 60°$. Demonstraţi că dreptele AM şi BN sunt concurente.



2. În triunghiul ABC se duce $[BE]$ bisectoarea unghiului $\widehat{B}$ ($E \in [AC]$), $[EM]$ bisectoarea unghiului $\widehat{AEB}$ ($M \in AB$) şi $[EN]$ bisectoarea unghiului $\widehat{BEC}$ ($N \in BC$) bisectoarea unghiului $\widehat{BEC}$ ($N \in BC$). Stabiliţi ce fel de triunghi este ABC ştiind că $ME \parallel BC$ şi $NE \parallel AB$.

3. Se consideră dreptele $(d) \parallel (g)$ tăiate de o secantă în punctele A şi B. Demonstraţi că orice două unghiuri cu vârful în A, respectiv B, sunt congruente sau suplementare în măsură.

4. În triunghiul ascuţitunghic isoscel ABC cu $AB = AC$ se duc înălţimile $[AA_1]$ şi $[BB_1]$ şi fie H ortocentrul triunghiului. Demonstraţi că $\widehat{HBA_1} \equiv \widehat{HAB}$. Rămâne adevărată această afirmaţie dacă triunghiul ABC este obtuzunghic isoscel?

5. Într-un triunghi, măsurile unghiurilor exprimate în grade reprezintă trei numere naturale consecutive. Ştiind că $m(\widehat{A}) < m(\widehat{B}) < m(\widehat{C})$, demonstraţi că există un punct $M \in [AB]$ astfel încât triunghiul MBC să fie echilateral.