ALGEBRĂ

Capitolul 2
FUNCȚII

1. Noţiunea de funcţie. Funcţii definite pe mulţimi finite, exprimate cu ajutorul unor diagrame, tabele, formule

Definiție: Fie A şi B două mulţimi nevide. O corespondenţă (lege) care asociază fiecărui element din A un unic element din B se numeşte funcţie definită pe A cu valori în B, notată cu $f : A \to B$.

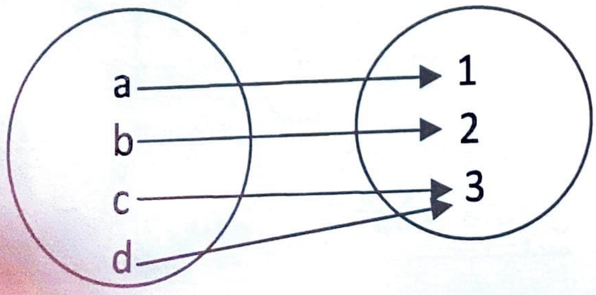
A se numeşte domeniul de definiţie a funcţiei: B se numeşte co-domeniul funcţiei sau mulţimea în care ia valori funcţia.

Pentru a defini o funcţie trebuie să cunoaştem:
– domeniul de definiţie;
– codomeniul (mulţimea în care ia valori);
– legea de corespondenţă (procedeul prin care fiecărui element din domeniu îi corespunde un singur element al codomeniului).

Moduri de definire a unei funcţii:
– prin tabele;
– prin diagrame;
– printr-o proprietate (formulă , relaţie).

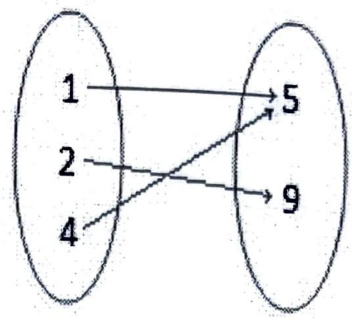
♦ Definiţie: Două funcţii $f : A \to B$ şi $g : C \to D$ sunt egale dacă $A = C$, $B = D$ şi pentru orice $x \in A$ avem $f(x) = g(x)$.

1. Arătaţi că diagrama următoare defineşte o funcţie. Precizaţi domeniul şi codomeniul funcţiei.

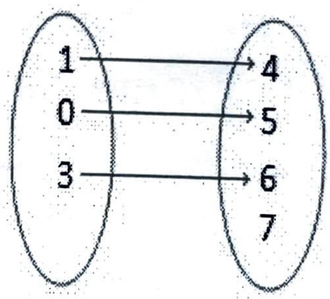


2. Stabiliți care din diagramele următoare descrie o funcție:

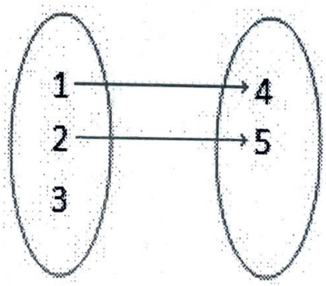
a)



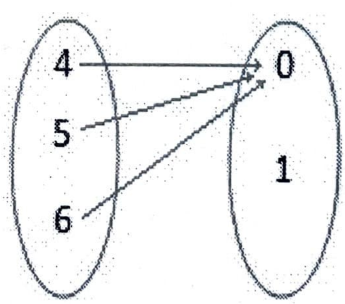
b)



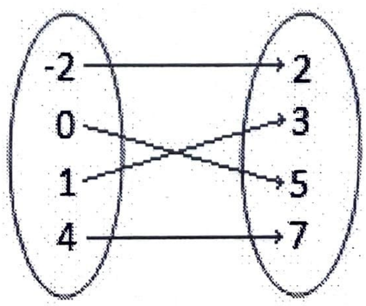
c)



d)



3. Diagrama de mai jos descrie funcția f. Precizați domeniul și codomeniul funcției f. Determinați $f(1)$ și $f(4)$.



4. Fie funcţiile f, g, h date prin tabelele de mai jos. Exprimaţi legea de corespondenţă printr-o diagramă şi apoi printr-o formulă.

$f(x)$	0	1	4	9

b)

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	2	4	6

c)

x	0	2	-2	3	-3
$f(x)$	1	7	-5	10	-8

5. Formați câte o diagramă și un tabel pentru fiecare din funcțiile următoare:

a) $f:\{0,3,4,8\}\to\{2,3,6,7,11,12\},\ f(x)=x+3;$

b) $f:\{3,12,15,21\}\to\{0,1,4,5,7,8\},\ f(x)=\frac{1}{3}\cdot x;$

c) $f:\{-1,0,1,3,4\}\to\{-1,0,1,27,64\},\ f(x)=x^3;$

d) $f:\{-3,-2,1,5\}\to\{-6,-5,-4,0,2,10\},\ f(x)=2x.$

6. Precizați care dintre tabelele de mai jos descrie o funcție:

a)

x	-3	-2	1	6	8
$f(x)$	1	2	5	6	

b)

x	-5	--1	2	6	7
$f(x)$	1	1	1	2	3

c)

x	-3	-2	-3	6	9
$f(x)$	1	2	7	0	4

d)

x	-4	-2	1	6	1

2. Graficele funcţiilor definite pe mulţimi finite

♦ Definiţie: Produsul cartezian al mulţimilor nevide A şi B este mulţimea formată din toate perechile ordonate (a, b) unde $a \in A$ şi $b \in B$. Se notează

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ şi } b \in B\}.$$

♦ Definiţie: Fie $f : A \to B$ o funcţie.
Mulţimea $G_f = \{(x, f(x) \mid x \in A\}$ se numeşte graficul funcţie f. Avem $(x, y) \in G_f$ dacă şi numai dacă $x \in A$ şi $f(x) = y$.

♦ Mulţimea $\{f(x) \mid x \in A\}$ se numeşte imaginea funcţiei f sau mulţimea valorilor funcţiei f. Se notează Im f.

♦ Definiţie: Fie $f : A \to B$ o funcţie numerică. Mulţimea punctelor $M(x, y)$ din plan pentru care $x \in A$, $y \in B$ şi $y = f(x)$ se numeşte reprezentarea grafică a funcţiei.

1. a) Reprezentaţi într-un sistem de coordonate punctele

$$B(3, 3),\ C(1, 2),\ D(-2, 4),\ E(0, 3),\ F(3, 0).$$

b) Reprezentaţi grafic $A \times B$ unde $A = \{-2, 1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$.

2. Fie funcţia $f : \{-3, -1, 0\ 1, 2\} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = x + 3$.

a) Calculaţi valorile $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

b) Reprezentaţi grafic funcţia.

3. Se consideră funcția :

$$f : \{-4, -3, -2, -1, 5, 6, 7\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = -x + 1\ .$$

Stabiliți care din punctele următoare aparțin graficului funcției:

$$A(-4;-3), B(-4;5), C(-1;0), D(7;-6), E(1;1),$$
$$F(-3;4), G(6;5),\ H(-2;3), I(5;-4), J(6;-5).$$

4. Se consideră punctele:

$$A(1;5), B(-1;1), C(0;2), D(1;-5), E(-2;-8), F(5;17).$$

Care din aceste puncte aparțin graficului funcției

$f:\{-2,-1,0,1,2,5\} \to \mathbb{Z}, f(x)=3x+2$?

5. Stabiliți mulțimea valorilor funcției, $\operatorname{Im} f$, pentru fiecare funcție de mai jos:

a) $f:\{-4,-3,0,2,5\} \to \mathbb{R},\ f(x)=x^2+2$;

b) $f:\{-15,-10,0,5,20\} \to \mathbb{Z},\ f(x)=\frac{1}{5}\cdot x+2$;

c) $f:\{-11,-9,-5,3,4,8\} \to \mathbb{Z},\ f(x)=-x+4$;

d) $f:\{-5,-4,-3,0,3,4,5,6\} \to \mathbb{N},\ f(x)=|x|$.

6. Determinați $m \in \mathbb{R}$, știind că:

a) $f:\{-4,-3,-2,2,5\} \to \mathbb{R},\ f(x)=mx+1$ și $P(-3;-5) \in G_f$;

b) $f:\{-5,-4,-2,1,4\} \to \mathbb{R},\ f(x)=3x-m$ și $P(1;-1) \in G_f$;

c) $f:\{-10,-1,1,5\} \to \mathbb{R},\ f(x)=2mx+12$ și $P(-10;-48) \in G_f$;

d) $f:\{-4,-1,0,3,7\} \to \mathbb{R},\ f(x)=4x+\frac{m}{2}$ și $P(3;17) \in G_f$.

7. Determinați $\operatorname{Im} f$ și reprezentați grafic această mulțime într-un sistem de coordonate:

a) $f:\{-4,-3,-2,0,1,2,5\} \to \mathbb{R},\ f(x)=x+1$;

b) $f:\{-3,-2,1,2,3,4\} \to \mathbb{R},\ f(x)=-x+2$;

c) $f:\{1,2,3,4,5\} \to \mathbb{R},\ f(x)=6-x$;

d) $f:\{-2,-1,1,3\} \to \mathbb{R},\ f(x)=2x$.

8. Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f:\{-6,-3,-2,0,1,2,3\} \to \mathbb{R},\ f(x)=x-4$;

b) $f:\{-10,-8,0,2,4,6\} \to \mathbb{R},\ f(x)=-\frac{1}{2}\cdot x+2$;

3. Funcţii de tipul $f: I \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, unde *I* este un interval. Reprezentare grafică

- <u>Definiţie:</u> O funcţie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ descrisă de formula $f(x) = ax + b$ (unde a şi b sunt numere reale) se numeşte funcţie liniară.
- Graficul unei funcţii liniare este o dreaptă.
- Funcţia liniară $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ este:

  a) strict crescătoare, dacă a > 0;
  b) constantă, dacă a = 0;
  c) strict descrescătoare, dacă a < 0.
- Graficul unei funcţii liniare $f(x) = ax + b$, cu a, $b \neq 0$ intersectează axa Ox în A$\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ şi axa Oy în B(0, b).
- Graficul unei funcţii $f: I \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, este un segment sau o semidreaptă, după cum intervalul *I* este mărginit, respectiv nemărginit.

1. Reprezentaţi grafic funcţiile:

a) $f: [1;3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$;

b) $f: (-1;4) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$;

c) $f: [-3;4) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 1$;

d) $f: (-4;4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 5$;

e) $f: (-6;8) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$;

f) $f: [-6;9] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{3}x$.

2. Reprezentaţi grafic funcţiile:

a) $f: [-3, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$;

b) $g:(-4, 2) \to \mathbb{R}$, $g(x)=3x+1$;

c) $h:(0, 5] \to \mathbb{R}$, $h(x)=2x-3$;

d) $k:[-2; 3) \to \mathbb{R}$, $k(x)=2x$.

3. Reprezentaţi grafic următoarele funcţii:

a) $f:(-\infty, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}\cdot x$;

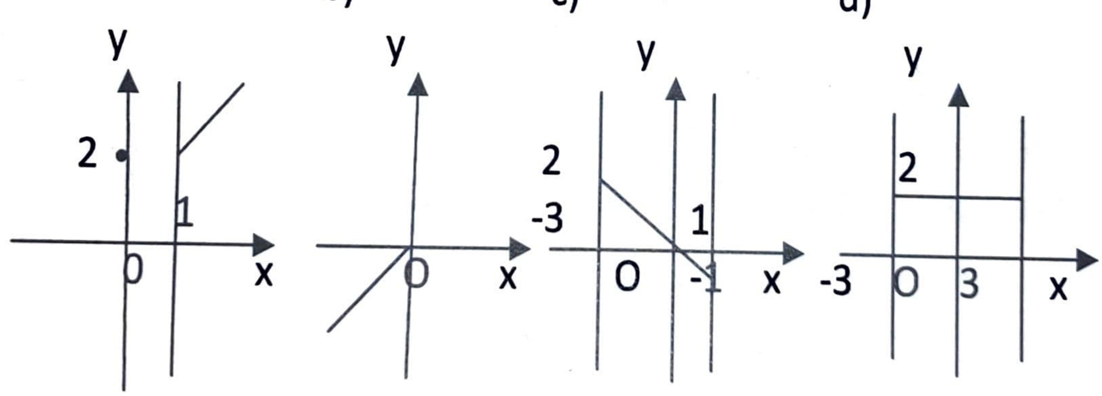
b) $g:(-\infty, 3) \to \mathbb{R}$, $g(x)=-3x$;

c) $h:[-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $h(x)=5$;

d) $k:(-5, \infty) \to \mathbb{R}$, $k(x)=2x+3$.

4. Determinaţi domeniul şi codomeniul funcţiilor descrise prin reprezentările grafice următoare:

a) b) c) d)



5. a) O semidreaptă [AB conţine punctele A(– 2, 3) şi B(3, 5). Ce funcţie are drept grafic semidreapta [AB.

b) O semidreaptă [CD conţine punctele C(0, 3) şi D(– 5, 2). Ce funcţie are drept grafic semidreapta (CD.

6. a) Un segment are extremităţile în M(2, 3) şi N (– 5, 2). Ce funcţie are drept grafic [MN]?

b) Un segment are extremităţile în P(–2, 3) şi Q(3,3). Ce funcţie are drept grafic (PQ)?

7. Fie $f:[-5, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x-1}{3}$.

a) Reprezentaţi grafic funcţia.

b) Stabiliţi care dintre punctele A $(-5, 2)$, B$(-4, -3)$, C$\left(4, \frac{7}{3}\right)$ sunt pe graficul funcţiei.

c) Stabiliţi punctul de pe grafic cu coordonatele egale.

8. Fie $f: A \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x)=x+3$ unde:

$$A=\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ şi } -2 \leq x < 5\}.$$

a) Determinaţi domeniul lui f.

b) Reprezentaţi grafic funcţia.

c) Stabiliţi dacă M(2, 3) aparţine lui G_f.

9. Fie $f: A \to \mathbb{R}$ exprimată prin $f(x)=2x-1$ unde $A=\{x \mid x \in \mathbb{R}$ şi $|x| \leq 2\}$.

a) Determinaţi domeniul lui f.

b) Reprezentaţi grafic funcţia.

c) Determinaţi punctele de intersecţie ale graficului cu Ox şi Oy.

10. Fie $f:[-2, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x)=2x$.

a) Stabiliţi care dintre punctele A$(-2, 4)$, B$(0, 0)$, C$(6, 12)$ aparţine lui G_f.

b) Determinaţi punctele de intersecţie ale graficului cu axele Ox şi Oy;

c) Reprezentaţi grafic.

11. Fie funcţia $f:[-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.

a) Reprezentaţi grafic funcţia f.

b) Arătaţi că dacă m, n $\in \mathbb{N}$, atunci $\frac{f(m)-f(n)}{2} \in \mathbb{Z}$.

c) Calculaţi $f(1) + f(2) + \ldots + f(50)$.

12. Fie punctele A(– 5, 6), B(– 3, 4). Reprezentaţi şi determinaţi funcţia f al cărei grafic este [AB].

13. Fie funcţia definită de formula $f(x)=4x-1$ pentru numărul real x astfel încât $-3 \leq x \leq 2$. Reprezentaţi grafic funcţia.

14. Fie funcţia $f : [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=-2x+3$.

a) Reprezentaţi grafic funcţia.

b) Aflaţi punctele de pe grafic cu ordonata egală cu dublul abscisei.

c) Aflaţi distanţa de la origine la graficul funcţiei.

15. Fie funcţiile $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definite de formulele $f(x)=2x+1$, $g(x) = \frac{1}{2}x$.

a) Reprezentaţi în acelaşi sistem de coordonate graficele celor două funcţii.

b) Aflaţi punctul de intersecţie al graficelor funcţiilor.

c) Aflaţi tangenta unghiului format de G_f şi axa Ox.

16. Fie funcția $f:[-3;5]\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=-x+2$.

a) Reprezentați grafic funcția într-un sistem de coordonate.

b) Dacă $M(-3;-3)$ și $N(5;5)$, precizați natura patrulaterului $AMBN$ și calculați perimetrul și aria lui.

c) Determinați lungimea segmentului $[AB]$.

17. Fie funcția $f:[-2;3]\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$.

a) Reprezentați grafic funcția într-un sistem de coordonate.

b) Dacă $P(-2;0)$ și $Q(3;0)$, precizați natura patrulaterului $APQB$ și calculați aria lui.

c) Determinați aria triunghiului ABQ.

d) Calculați lungimea segmentului $[AB]$.

4. Funcţia liniară $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ (a,b\in\mathbb{R})$

1. Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+3;$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x+2;$

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+1;$

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x-1;$

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-3x;$

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+2.$

2. Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x;$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x;$

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3;$

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x;$

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-3x;$

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-5.$

3. Reprezentați grafic în același sistem de coordonate următoarele funcții:

a) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+5$ și $g(x)=-x;$

b) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x$ și $g(x)=-2x+2;$

c) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x+3$ și $g(x)=x-5;$

d) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-1$ și $g(x)=-x+1;$

e) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{2}x$ și $g(x)=-\frac{1}{3}x;$

f) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-\frac{1}{3}x+2$ și $g(x)=-2x.$

4. Să se reprezinte grafic funcţiile:

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 2x - 3$;

b) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x + 2$;

c) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = -x + 4$;

d) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = 3x + 1$;

e) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_5(x) = -2x + 1$;

f) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_6(x) = \frac{x}{2} + 1$;

g) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_7(x) = -\frac{2x}{3} + 3$;

h) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_8(x) = \sqrt{3}x - 2$;

i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_9(x) = 2$.

5. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ ştiind că graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax - 2$ conţine perechea ordonată (3, 2).

6. Fie funcţia $f : A \to B$, $f(x) = \max(2x+3, x-3)$.

a) Determinaţi $f(x)$.

b) Calculaţi $f(-7)$, $f(-6)$, $f(-3)$, $f(0)$.

7. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 4$. Determinați punctul de pe grafic care îndeplinește condiția:

a) are ordonata egală cu 10;

b) are abscisa egală cu -3;

c) are coordonatele opuse;

d) are ordonata egală cu triplul abscisei;

e) are abscisa egală cu triplul ordonatei;

f) are ordonata egală cu dublul abscisei.

8. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 6$. Aflați punctul de pe graficul funcției care are:

a) coordonatele egale;
b) coordonatele numere opuse;
c) abscisa egală cu 4;
d) ordonata egală cu -12;
e) are ordonata egală cu triplul abscisei;
f) are abscisa egală cu dublul ordonatei.

9. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-1$. Determinați care dintre punctele următoare aparțin graficului funcției:

$$A(-1;-4), B(0;1), C(2;5), D(-2;6), E(-2;-7),$$
$$F(3,8), G(4;-11), H\left(\frac{1}{3};0\right), I\left(\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right).$$

10. Reprezentaţi în acelaşi sistem de axe de coordonate graficele următoarelor funcţii $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=-3x+1$. Ce observaţi?

11. Reprezentaţi în acelaşi sistem de axe de coordonate graficele funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-3$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=-2x+3$. Ce observaţi?

12. Reprezentaţi în acelaşi sistem de axe de coordonate graficele următoarelor funcţii: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-4$; $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=2x$; $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=2x+4$. Ce observaţi?

13. Care dintre punctele:

A(– 1; 0), B (1;–1), C$\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$; D(2; 3), E(–2; 5), F(0; 2); G$\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

aparţin graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-2x+1$.

14. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x+a, a\in\mathbb{R}$.

a) Determinaţi valoarea lui *a* ştiind că A(2; 3) aparţine graficului funcţiei f.

b) Pentru a = 5 trasaţi graficul funcţiei f.

15. Determinaţi m $\in \mathbb{R}$ astfel încât:

a) A(1; – 1) $\in G_{f_1}$ unde $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_1(x)=-2x+m$;

b) B(– 1; 2) $\in G_{f_2}$ unde $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_2(x)=mx+4$;

c) C(2; 1) $\in G_{f_3}$ unde $f_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_3(x)=(m+1)x-m+1$;

d) D(1; m + 2) $\in G_{f_4}$ unde $f_4:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_4(x)=2x+1$;

e) E(m; 2) $\in G_{f_5}$ unde $f_5:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_5(x)=(m-2)x-1$;

f) F(m + 1; – m) $\in G_{f_6}$ unde $f_6:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_6(x)=x-3$.

16. Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie a graficelor următoarelor funcţii, cu axele de coordonate şi trasaţi graficele acestora:

a) $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_1(x)=-x+3$;

b) $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_2(x)=2x+1$;

c) $f_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_3(x)=3x+\frac{1}{2}$;

d) $f_4:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_4(x)=\frac{x}{2}+3$;

e) $f_5:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_5(x)=\sqrt{2}x-2$;

f) $f_6:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_6(x)=-x+\sqrt{3}$.

17. Ştiind că pentru a afla punctul de intersecţie a graficelor celor două funcţii f şi g rezolvăm sistemul $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$, aflaţi punctele de intersecţie a graficelor, pentru următoarele perechi de funcţii şi trasaţi graficele lor, precizând punctele de intersecţie cu axele de coordonate, apoi aflaţi aria triunghiului determinat de graficele celor două funcţii şi axa Ox.

21. Pentru ce valori ale lui m următoarele puncte sunt coliniare:

a) A(−1, − 1), B(m , 8), C(− 2, − 4);

b) A(1, 3), B(2, m), C(− 2, − 3);

c) A(− 2, − 3), B(3, 2), C(− m, m + 2);

d) A(− 1, 4), B(2, 7), C(2m + 1, m + 3).

22. Să se determine funcţia liniară de forma $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$ ştiind că:

a) $f(-1) = 2$ şi $f(2) = 5$;

b) $f(-2) = -1$ şi $f(1) = 5$;

c) Graficul funcţiei conţine punctele A(− 2, 9) şi B(1, 3);

d) Graficul funcţiei conţine punctele A(3, 5) şi B(− 1, 1);

e) Graficul funcţiei intersectează axa Ox în punctul de abscisă − 5 şi axa Oy în punctul de ordonată 5;

f) Graficul funcţiei intersectează axa Ox în punctul de abscisă − 2 şi axa Oy în punctul de ordonată 4.

23. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax-3$. Determinați $a\in\mathbb{R}$, astfel încât punctul $A(2;5)$ să aparțină graficului funcției.

24. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+4m$. Determinați $m\in\mathbb{R}$, astfel încât $M(-2;-4)\in G_f$.

25. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2(m-1)x-4$. Determinați $m\in\mathbb{R}$, astfel încât punctul $P(-1;-8)$ să aparțină graficului funcției.

26. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(2a-3)x+a+1$. Determinați $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $Q(5;-3)\in G_f$.

27. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(3m+1)x-m+2$. Determinați $a\in\mathbb{R}$, astfel încât punctul $P(-2;7)$ să aparțină graficului funcției.

28. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=5x-3$. Determinați $a\in\mathbb{R}$, astfel încât punctul $A\left(\frac{m}{2};\frac{3m+2}{4}\right)$ să aparțină graficului funcției.

29. Determinați $m\in\mathbb{R}$, astfel încât punctul $A(m-3;8m+2)$ să aparțină graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+6$.

30. Aflați $a\in\mathbb{R}$, astfel încât punctul $A(a+5;a-2)$ să aparțină graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-4x+3$.

31. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât graficul funcției este dreapta PQ, unde:

a) $P(1;2),Q(-4;-3)$;
b) $P(-1;-3),Q(4;7)$;
c) $P(-2;-4),Q(1;5)$;
d) $P(-2;5),Q(4;-1)$;
e) $P(3;-1),Q(2;-3)$;
f) $P(1;-2),Q(0;2)$.

32. Fie puntele A(– 6, 3), B(2, – 3), C(2, 1), D(3, 4). Reprezentaţi şi determinaţi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ al cărei grafic este (BA $\cup$ [CD.

33. Reprezentaţi grafic funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ descrisă de formula $f(x)=|x-3|$. Ce este graficul funcţiei?

34. Fie punctele *A*(– 1, 2), *B*(1, 4), *C*(3, 2). Reprezentaţi şi determinaţi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ al cărei grafic este unghiul $\sphericalangle ABC$.

35. Determinaţi a$\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcţiei:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}4x+1, & dacă \quad x\le 2\\ 2a+x, & dacă \quad x>2\end{cases}$$

să fie un unghi.

36. Determinați coordonatele punctului de intersecție al graficelor funcțiilor $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, în fiecare din cazurile următoare:

a) $g(x)=x+1;\ h(x)=-x+5;$

b) $g(x)=x+3;\ h(x)=2x+1;$

c) $g(x)=-2x+3;\ h(x)=-x+7;$

d) $g(x)=3x-2;\ h(x)=-x+10;$

e) $g(x)=4x+1;\ h(x)=5x+3;$

f) $g(x)=-6x+5;\ h(x)=4x+15$.

37. Determinați aria triunghiului *POQ*, unde *P* și *Q* sunt punctele de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu axele de coordonate, în cazurile următoare:

a) $f(x)=x+6;$

b) $f(x)=2x+2;$

c) $f(x)=-x+4;$

d) $f(x)=-3x+6;$

e) $f(x)=2x-8;$

f) $f(x)=-4x+2$.

38. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-6$.

a) Să se determine coordonatele punctelor A și B de intersecție ale graficului funcției cu axele de coordonate.

b) Determinați aria triunghiului AOB.

c) Calculați distanța de la originea axelor de coordonate la graficul funcției.

d) Determinați perimetrul triunghiului AOB.

39. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+8$.

a) Să se determine coordonatele punctelor A și B de intersecție ale graficului funcției cu axele de coordonate.

b) Aflați coordonatele punctului M, aflat pe graficul funcției, de coordonate egale.

c) Calculați aria triunghiului AOB.

d) Determinați lungimea medianei OP, a triunghiului AOB.

40. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-8$.

a) Dacă M și N sunt punctele în care graficul funcției intersectează axele de coordonate, calculați aria triunghiului MON.

b) Determinați coordonatele punctului P aflat pe graficul funcției, de coordonate numere opuse.

c) Calculați distanța de la originea axelor de coordonate la dreapta MN.

d) Aflați măsura unghiului format de dreapta MN cu axa Ox.

41. Se consideră funcțiile:

$$f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+6,\ g(x)=-x+2.$$

a) Reprezentați grafic cele două funcții în același sistem de coordonate.

b) Determinați coordonatele punctului de intersecție ale graficelor celor două funcții.

c) Calculați aria triunghiului format de graficele celor două funcții cu axa Ox.

42. Se consideră funcțiile, care îndeplinesc relațiile:

$$3f(x)+2g(x)=5x-3,\quad f(x)+3g(x)=4x-6$$

a) Determinați cele două funcții.

b) Reprezentați grafic cele două funcții în același sistem de coordonate.

c) Precizați care dintre punctele $A(-2;-1), B(7;4)$ și $C(2;1)$ aparțin graficelor celor două funcții.

43. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-3$.

a) Reprezentați grafic funcția.

b) Demonstrați că $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}\in\mathbb{N},\ (\forall)a,b\in\mathbb{R},\ a\neq b$.

c) Calculați $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2015)$.

44. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+1$.

a) Reprezentați grafic funcția.

b) Demonstrați că $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}\in\mathbb{N},\ (\forall)a,b\in\mathbb{R},\ a\neq b$.

c) Calculați $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+...+f(50)$.

45. Fie funcția liniară $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care îndeplinește relația:

$$f(x-1)+f(x-2)=10x-9.$$

a) Determinați funcția și reprezentați-o grafic într-un sistem de coordonate.

b) Calculați tangenta unghiului format de axa Ox cu graficul funcției.

46. Fie funcția liniară $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care îndeplinește relația:

$$f(x-4)+f(x+5)=6x-1.$$

a) Determinați funcția și reprezentați-o grafic într-un sistem de coordonate.

b) Calculați tangenta unghiului format de axa Oy cu graficul funcției.

c) Rezolvați ecuația: $2f(2x+1)-f(x+3)=4$.

47. Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât următoarele puncte să fie coliniare:

a) $A(1;3), B(-2;-3), C(2a+1, a+6)$;

b) $A(-2;2), B(1;5), C(4-a, 5a+2)$;

c) $A(1;1), B(2;-1), C(a+3, a-9)$;

d) $A(4;3), B(-5;-6), C(3a-7, 4a-11)$.

48. Determinaţi funcţiile liniare care îndeplinesc următoarele condiţii:

a) $f_1(x+1) = 2x+3$;

b) $f_2(-x+1) = -2x+1$;

c) $f_3(x-2) = 3x-2$;

d) $f_4(-2x+3) = 2x-1$;

e) $f_5(2x-1) = 2x-2$;

f) $f_6(2x-3) = x+2$.

49. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = 3x+2$. Aflați coordonatele punctelor de pe grafic care au:

a) abscisa egală cu ordonata;

b) abscisa egală cu jumătate din ordonată;

c) abscisa egală cu o treime din ordonată;

d) ordonata egală cu opusul abscisei;

e) ordonata egală cu jumătate din abscisă;

f) ordonata egală cu $\frac{2}{3}$ din abscisă;

g) abscisa egală cu opusul ordonatei.

50. Aceleaşi cerinţe de la exerciţiul 49 pentru următoarele funcţii:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = 2x-3$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = -x+2$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = 2x$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = x+3$.

51. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = 2x+1$.

a) Aflaţi $x\in\mathbb{R}$, pentru care funcţia ia valoarea 7.

b) Aflaţi $x\in\mathbb{R}$, pentru care funcţia ia valoarea –3.

c) Aflaţi $y\in\mathbb{R}$, ştiind că $A(-1, y) \in G_f$.

d) Aflaţi $y \in \mathbb{R}$, ştiind că $B\left(\frac{1}{2}, y\right) \in G_f$.

e) Rezolvaţi ecuaţia $f(x) = 17,\ x \in \mathbb{R}$.

f) Rezolvaţi ecuaţia $f(x-1) = x+3,\ x \in \mathbb{Z}$.

g) Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale inecuaţia $f(x) \leq 11$.

52. Rezolvaţi aceleaşi cerinţe de la exerciţiul 51 pentru funcţiile:

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x+1$ și $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -x+2$.

53. Pentru fiecare dintre următoarele funcţii:

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x+2$,

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x-3$,

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x+3$,

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}\,x-1$,

să se rezolve cerințele:

a) determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie a graficului cu axele de coordonate;

b) reprezentaţi grafic funcţia;

c) aflaţi distanţa de la originea sistemului de axe ortogonale la dreapta ce reprezintă graficul funcţiei;

d) aflaţi o funcţie trigonometrică a unghiului format de grafic cu axa Ox şi respectiv axa Oy;

e) aflaţi aria triunghiului determinat de graficul funcţiei cu axele de coordonate.

54. Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = mx+2$.

a) Aflaţi m $\in \mathbb{R}$ astfel încât graficul funcţiei să intersectează Ox în punctul de abscisă -2.

b) Pentru m = 1, aflaţi punctele de intersecţie a graficului funcţiei f cu axele de coordonate şi trasaţi graficul funcţiei;

c) Aflaţi distanţa de la originea sistemului de axe la dreapta ce reprezintă graficul funcţiei.

d) Aflaţi aria triunghiului format de grafic cu axele de coordonate.

e) Aflaţi măsura unghiurilor formate de grafic cu axele de coordonate.

55. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-2x+5$.

a) Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f cu axele de coordonate şi trasaţi graficul.

b) Determinaţi punctele ce aparţin graficul funcţiei f şi au coordonatele egale.

c) Aflaţi aria triunghiului cuprinsă între graficul funcţiei şi axele de coordonate.

56. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=mx+1, m\in\mathbb{R}$.

a) Aflaţi $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $A(1, 3)\in G_f$.

b) Reprezentaţi grafic funcţia pentru *m* găsit anterior.

c) Aflaţi aria şi perimetrul triunghiului determinat de grafic şi axele de coordonate.

d) Determinaţi o funcţie trigonometrică a unghiurilor formate de dreapta ce reprezintă graficul funcţiei f cu axele de coordonate.

57. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(m+1)x-2, m\in\mathbb{R}$.

a) Aflaţi $m\in\mathbb{R}$, ştiind că $A(1, 1)\in G_f$.

b) Pentru *m* aflat mai sus, determinaţi punctele de intersecţie a graficului funcţiei f cu axele de coordonate şi trasaţi graficul funcţiei f.

c) Calculaţi distanţa de la originea sistemului la axele de coordonate;

d) Determinaţi $M(x, y)$ pe graficul funcţiei pentru care $|x| = |y|$.

58. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(m-1)x+3m+2, m\in\mathbb{R}$.

a) Aflaţi $m\in\mathbb{R}$, ştiind că $A(-1, 3)\in G_f$.

b) Pentru *m* aflat mai sus reprezentaţi graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$g(x)=f(-x+2)$.

c) Arătaţi că $(\forall)$ a, b $\in \mathbb{R}$ are loc relaţia $\frac{f(a)+f(b)}{2}=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

59. Reprezentaţi grafic funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(m-2)x+3$, ştiind că graficul funcţiei f nu intersectează axa absciselor.

60. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{3}x-3$.

a) Să se trateze graficul funcţiei f.

b) Să se arate că $(\forall)x_1,x_2\in\mathbb{R},\ \sqrt{3}\cdot\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\in\mathbb{Z}$.

61. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-3$.

a) Să se determine graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=f(2x+1)$.

b) Să se rezolve ecuaţia $f(x+3)-f(2x+1)=f(x)+f(2)$.

c) Să se determine coordonatele punctelor M(x, y) $\in G_g$ care are proprietatea $|x|=|y|$.

62. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=mx-n,\ m\in\mathbb{R}$.

a) Să se afle m$\in\mathbb{R}$, ştiind că funcţia este crescătoare şi A(m, 6) $\in G_f$.

b) Pentru m = 2 reprezentaţi grafic funcţia şi determinaţi punctele M(a, b) care aparţin graficului şi $|a|=|b|$.

63. Se consideră funcţiile: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-1$ şi g : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-3x+9$.

a) Determinaţi punctul de intersecţie a graficelor celor două funcţii.

b) Reprezentaţi grafic funcţiile în acelaşi sistem de axe ortogonale.

c) Aflaţi aria triunghiului mărginit de graficele celor două funcţii şi axa ordonatelor.

68. Determinaţi funcţiile liniare f şi g ştiind că verifică simultan condiţiile:

a) $2f(x-2)+g(x+2)=2x+1, \quad f(x-2)-g(x+2)=x+2$;

b) $f(x+1)+2g(x-2)=4x-4, \quad f(x+1)+g(x-2)=x-3$;

c) $f(x+1)+3g(x-1)=4x-2, \quad 2f(x+1)-g(x-1)=x+3$.

69. Fie funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax-5$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=-x+b$, unde *a* şi *b* sunt numere reale.

a) Determinaţi numerele *a* şi *b* ştiind că punctul *D*(4, – 1) aparţine graficelor celor două funcţii.

b) Dacă *a* = 1 şi *b* = 3, în acelaşi sistem de coordonate xOy, reprezentaţi grafic funcţiile f şi g.

c) Pentru *a* = 1 şi *b* = 3, graficul funcţiei f intersectează axele Ox şi Oy în punctele *A*, respectiv *B*, iar graficul funcţiei g intersectează axele Ox şi Oy în punctele *C*, respectiv *E*. Demonstraţi că dreapta *BC* este perpendiculară pe dreapta *AE*.

(Examen)

70. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(a+1)x+5$, unde *a* este un număr real.

a) Aflaţi valorile lui *a* pentru care punctul *A*(*a*, 25) aparţine graficului funcţiei f.

b) Pentru *a* = 4, reprezentaţi grafic funcţia f.

c) Pentru *a* = 4 punctul *M*(*m*, *n*) aparţine graficului funcţiei f. Determinaţi coordonatele punctului *M* ştiind că $5 \cdot |m| = |n|$.

(Examen)

71. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{2}\cdot x-2, g(x)=-2x+3$.

a) Reprezentaţi grafic funcţiile f şi g într-un sistem de coordonate xOy.

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(x)=g(x)$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

1. Fie funcţia $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to B$, $f(x) = 2x - 3$.

a) Determinaţi mulţimea B.

b) Reprezentaţi grafic funcţia.

c) Stabiliţi care dintre punctele $A(-3, -9)$, $B(1, -1)$, $C(2, 1)$ aparţin graficului. Justificaţi.

2. Reprezentaţi grafic funcţiile:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$;

b) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$;

c) $f : [-5, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2$.

3. Determinaţi funcţia liniară al cărei grafic conţine punctele $A(-2, 3)$ şi $B(2, 5)$.

4. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$.

a) Aflaţi punctele de intersecţie ale graficului cu axele de coordonate.

b) Calculaţi aria triunghiului determinat de graficul funcţie şi axele de coordonate.

c) Aflaţi punctele de pe grafic care au coordonatele egale .

5. Fie funcţia liniară $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) - 2f(1 - x) = 4x - 2$. Determinaţi funcţia f.

Testul 2

1. Fie funcţia $f : \{-1, 0, 1, 2, 3\} \to B$, $f(x) = 3x - 1$.

a) Determinaţi B.

b) Reprezentaţi grafic funcţiei f.

c) Stabiliţi care dintre punctele $A(-2, -7)$, $B(1, 2)$, $C(3, 5)$ aparţine graficului. Justificaţi.

2. Reprezentaţi grafic funcţiile:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$;

b) $f:(-\infty, 3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x$;

c) $f:[-2, 3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=4$.

3. Determinaţi funcţia liniară al cărei grafic conţine punctele $A(-1, 2)$ şi $B(3, 6)$.

4. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-1$.

a) Aflaţi punctele de intersecţie ale graficului cu axele de coordoate.

b) Calculaţi aria triunghiului determinat de graficul funcţiei şi axele de coordonate.

c) Aflaţi punctele de pe grafic cu abscisa egală cu dublul ordonatei.

5. Fie funcţia liniară $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât: $f(2-x)+2f(x)=4x+2$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$. Determinaţi $f(x)$.

Testul 3 (grilă)

1. Dacă $f:\{-1, 0, 1, 2, 4\}\to B$, $f(x)=3x-2$ atunci B este:

A) $\{-3,-2,1,4,10\}$; B) $\{-5,-2,1,4,10\}$;
C) $\{-5,-3,-1,2,4\}$; D) $\{-2,1,4,3,10\}$.

2. Fie funcţia $f:[-3,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$.

Dintre punctele $A(-3, 4)$, $B(2, 6)$, $C(3, 6)$ şi $D(2, 5)$ aparţine graficului:

A) $(-3, 4)$; B$(2, 6)$; C) $(2, 5)$; D) $(3, 6)$.

3. Fie funcţia $f:\{-3, -2, 0, 1, 2, 3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x-5, & x\geq 1 \\ 2x+3, & x<1 \end{cases}$.

Atunci $f(1)$ este:

A) 5; B) -4; C) 7; D) 6.

4. Punctul $A(3,-2)\in G_f$ unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+a$ pentru a egal cu:

A) 2; B) -4; C) -5; D) 5.

5. Intersecţia graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}\cdot x+5$ cu Oy este: