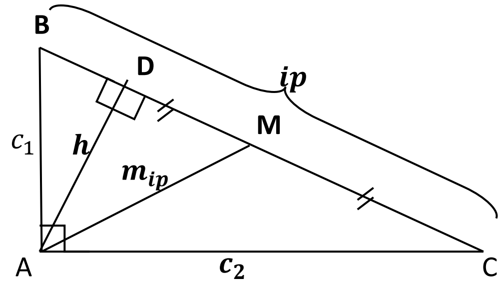
PROPRIETĂŢILE TRIUNGHIULUI DREPTUNGHIC

Def:**Triunghiul dreptunghic** este triunghiul care are un **unghi drept (90°).** Latura opusă unghiului drept se numește **ipotenuză** și este cea mai mare, iar celelalte laturi se numesc **catete.**

Proprietăți:



- În orice triunghi **dreptunghic isoscel unghiurile alăturate bazei(ipotenuzei)** au măsura de 45° fiecare.
- În orice triunghi **dreptunghic** unghiurile ascuțite sunt complementare (suma măsurilor lor este de 90°).
- **Centrul cercului circumscris** unui triunghi dreptunghic se află **în mijlocul ipotenuzei**.
- În orice triunghi dreptunghic, **cateta opusă unui unghi de 30° are lungimea jumătate din lungimea ipotenuzei.**

Teoremă: În orice triunghi dreptunghic **lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei** este egală cu **jumătate din lungimea ipotenuzei**.
Teorema reciprocă: Dacă mediana unui triunghi are lungimea egală cu jumătate din lungimea laturii corespunzătoare, atunci triunghiul este dreptunghic şi are ipotenuză latura corespunzătoare medianei.

Teoremă (teorema 30 – 60 – 90): Oricare ar fi un triunghi dreptunghic cu măsura unui unghi de 30^o, cateta ce se opune acestui unghi are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

Teoremă (reciproca teoremei 30 – 60 – 90): Dacă o catetă a unui triunghi dreptunghic are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei, atunci unghiul ce se opune catetei are măsura de 30^o

RELATIILE INTRE LATURILE SI UNGHIURILE UNUI TRIUNGHI

- intr-un triunghi, unui unghi mai mare i se opune o latura mai mare si reciproc
- dintre doua oblice duse dintr-un punct pe aceeasi dreapta, cea “mai departata” de piciorul perpendicularei este “cea mai lunga”
- intr-un triunghi, lungimea oricarei laturi este mai mica decat suma lungimilor celorlalte doua laturi si mare decat valoarea absoluta a diferentei lor

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Demonstraţi că un triunghi isoscel care are un unghi cu măsura de 60° este echilateral.
Demonstraţie: Fie un triunghi isoscel de bază [IM].
Putem aborda această problemă sub 2 aspecte:

- În ΔSIM avem: $[SI] \equiv [SM]$ şi $\hat{I} \equiv \hat{M}$.

Presupunem că $m\left(\hat{I}\right) = 60^\circ$,

$\Rightarrow m\left(\hat{I}\right) = m\left(\hat{M}\right) = 60^\circ$, dar cum $m\left(\hat{I}\right) + m\left(\hat{M}\right) + m\left(\hat{S}\right) = 180^\circ \Rightarrow m\left(\hat{S}\right) = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ$

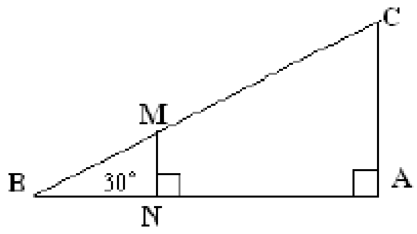
$\Rightarrow m\left(\hat{S}\right) = 60^\circ$.

- Presupunem că $m\left(\hat{S}\right) = 60^\circ$.

Din datele problemei ştim că $\hat{I} \equiv \hat{M}$ şi că $m\left(\hat{I}\right) + m\left(\hat{M}\right) + m\left(\hat{S}\right) = 180^\circ$, adică

$2 \cdot m\left(\hat{I}\right) + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2 \cdot m\left(\hat{I}\right) = 120^\circ \Rightarrow m\left(\hat{I}\right) = m\left(\hat{M}\right) = 60^\circ$.
Prin urmare, putem concluziona:
Orice triunghi isoscel care are un unghi cu măsura de 60° este echilateral.

2. Fie un triunghi dreptunghic ΔABC cu ipotenuza $[BC]$, $m\left(\hat{B}\right) = 30^\circ$, $MN \perp AB$ şi MB este $\frac{1}{3}$ din BC. Demonstraţi că: $MN = \frac{1}{3} AC$.
Demonstraţie:

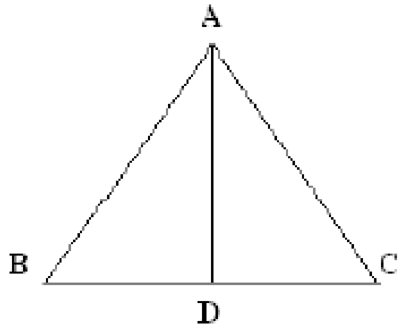


$$\left.\begin{cases} m\left(\hat{A}\right) = 90^\circ \\ m\left(\hat{B}\right) = 30^\circ \end{cases}\right. \Rightarrow AC = \frac{1}{2} \cdot BC$$

În ΔMNB, $m\left(\hat{B}\right) = 30^\circ$, $MN \perp AB \Rightarrow MN = \frac{1}{2} \cdot MB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot AC \Rightarrow MN = \frac{1}{3} AC$.

3. Fie triunghiul isoscel ΔABC cu baza [BC] şi [AD] înălţime. Dacă $BD = \frac{1}{2} \cdot AB$, demonstraţi că ΔABC este echilateral.

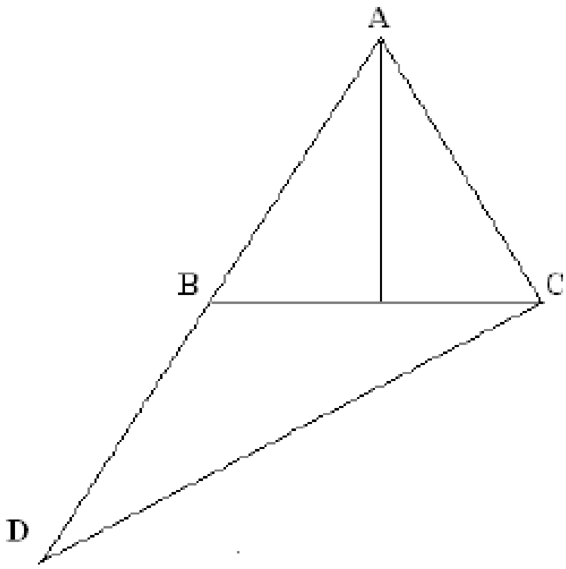
Demonstraţie:



$m\left(\hat{D}\right) = 90°$, $AD \perp BC \Rightarrow BD = \frac{AB}{2} \Rightarrow m\left(B\hat{A}D\right) = 30°$, $m\left(\hat{B}\right) = 60° \Rightarrow \Delta ABC$ este echilateral.

4. Fie triunghiul echilateral ΔABC şi D punctul ce aparţine semidreptei opuse semidreptei $[BA$, astfel încât $[BD] \equiv [AC]$. Demonstraţi că $m\left(B\hat{C}D\right) = 30°$.

Demonstraţie:



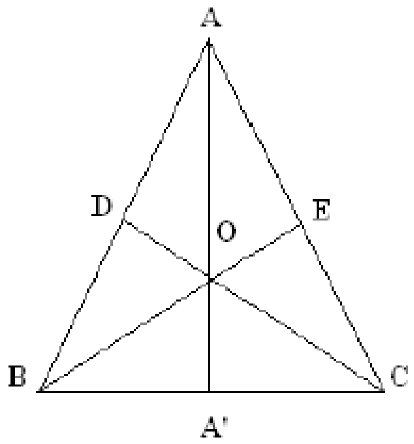
ΔBCD este isoscel, deoarece $\begin{cases}[BD] \equiv [AC] \\ [BC] \equiv [AC]\end{cases} \Rightarrow [BC] \equiv [BD]$

$m\left(B\hat{C}D\right) = \left[180° - m\left(D\hat{B}C\right)\right] : 2 = \left[180° - 120°\right] : 2 = 30°$

Deci, $m\left(B\hat{C}D\right) = 30°$.

5. Medianele $[BE]$ şi $[CD]$ ale unui triunghi isoscel ABC cu baza $[BC]$ se intersectează în O. Demonstraţi că $AO \perp BC$.

Demonstraţie:



Desenul problemelor 5,7

este isoscel cu baza

şi sunt mediane

$[AA'] \cap [BE] \cap [CD] = \{O\}$= centru de greutate

Rezultă că AO este mediană .

Dar AO este mediană în triunghiul isoscel ΔABC , rezultă că este şi înălţime $\Rightarrow$.

6. Fie un triunghi dreptunghic ABC, în care $m\left(\hat{A}\right) = 90^\circ$ şi [AD] este înălţime.

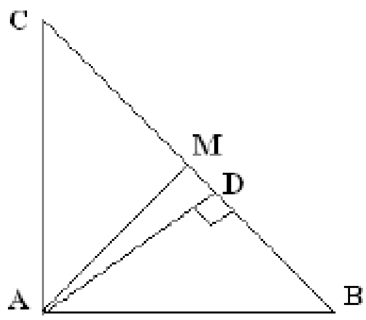
Demonstraţi că :

a) $AD \le \frac{BC}{2}$;

b) dacă $AD = \frac{BC}{2}$, atunci $\hat{B} \equiv \hat{C}$;

c) $AD < \frac{1}{4} \cdot (AB + BC + CA)$.

Demonstraţie:



a) Fie AM mediană în ΔABC . În, $m\left(\hat{D}\right) = 90^\circ \Rightarrow AD < AM = \frac{BC}{2} \Rightarrow AD < \frac{BC}{2}$.

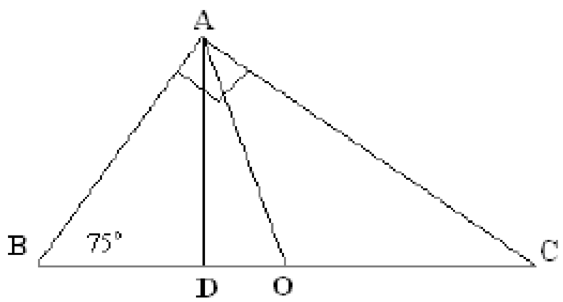
b) $AD = \frac{BC}{2}$ şi $AM = \frac{BC}{2} \Rightarrow AD = AM$, iar înălţimea este şi mediană $\Rightarrow \Delta ABC$ este isoscel, deci $\hat{B} \equiv \hat{C}$.

c) în ΔABD, $AD < AB$; în ΔADC, $AD < AC$.
Din demonstraţia a) avem: $AD < \frac{BC}{2} \Rightarrow 2 \cdot AD < BC$
Adunând cele trei relaţii obţinem:
$$AD + AD + 2 \cdot AD < AB + AC + BC \Rightarrow 4 \cdot AD < AB + AC + BC \Rightarrow AD < \frac{1}{4} \cdot (AB + BC + CA).$$

7. Demonstraţi că medianele corespunzătoare laturilor congruente ale unui triunghi isoscel sunt congruente.
Demonstraţie:
ΔABC - isoscel $\Rightarrow [AB] \equiv [AC]$
$[BE], [CD]$ - mediane $\Rightarrow \begin{cases} [AD] \equiv [BD] \\ [AE] \equiv [EC] \end{cases} \Rightarrow [AD] \equiv [BD] \equiv [AE] \equiv [EC]$

Analizând triunghiurile ΔABE şi $\Delta ACD \Rightarrow \begin{cases} [AB] \equiv [AC] \\ [AE] \equiv [AD] \\ \hat{BAC} \equiv \hat{CAB} \end{cases} \overset{LUL}{\Rightarrow} \Delta ABE \equiv \Delta ACD \Rightarrow [BE] \equiv [CD]$.

8. Fie un triunghi dreptunghic ABC, cu ipotenuza [BC]. Dacă $m\left(\hat{B}\right) = 75^\circ$ şi lungimea înălţimii AD este de 2 cm, calculaţi lungimea ipotenuzei.
Demonstraţie:

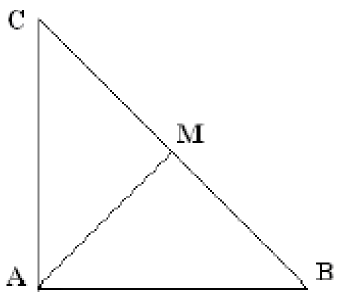


În ABC dreptunghic în A, AO este mediană, iar AD este înălţime.
Deci, $AO = \frac{BC}{2} = BO \Rightarrow m\left(\hat{AOB}\right) = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$

În dreptunghic ΔADC, $m\left(\hat{D}\right) = 90^\circ$ aplicând teorema 30-60-90
$$\Rightarrow AD = \frac{AO}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{BC}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot BC \Rightarrow 2 = \frac{1}{4} \cdot BC \Rightarrow BC = 8 \text{ cm}.$$

9. Măsurile unghiurilor $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$ ale unui triunghi sunt respective proporţionale cu numerele 3, 2 şi 1. Ştiind că M este mijlocul laturi[BC], calculaţi perimetrul ΔABM, ştiind că $BC = 10cm$.

Demonstraţie:



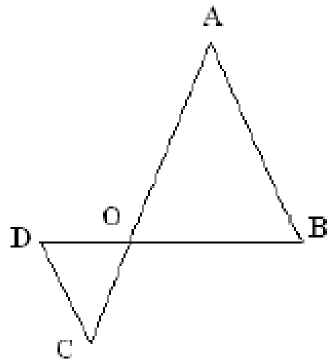
Fie A, B, C măsurile unghiurilor.

$\frac{A}{3} = \frac{B}{2} = \frac{C}{1} = \frac{A+B+C}{3+2+1} = \frac{180°}{6} = 30° \Rightarrow A = 90°;\ B = 60°;\ C = 30°.$

În ΔABC, AM este mediană, deci $AM = \frac{BC}{2} = MB \Rightarrow \Delta ABM$ este isoscel cu $m\left(\widehat{B}\right) = 60°$, rezultă că ΔABC este echilateral, iar perimetrul va fi: $P_{\Delta ABM} = 3 \cdot AM = 3 \cdot 5 = 15$ cm.

10. Fie un triunghi ΔAOB şi un punct C, astfel încât $O \in (AC)$. Paralela prin C la AB intersectează BO în D. Dacă $\widehat{ABO} > \widehat{BAO}$, demonstraţi că AC>BD.

Demonstratie:



În ΔAOB, avem $m\left(\widehat{ABO}\right) > m\left(\widehat{BAO}\right) \Rightarrow AO > BO$.

$DC \parallel AB \Rightarrow \widehat{BAO} \equiv \widehat{OCD}$ şi $\widehat{OBA} \equiv \widehat{ODC}$

Rezultă că $\widehat{ODC} > \widehat{OCD} \Rightarrow OC > OD$

$AO + OC > BO + OD \Rightarrow AC > BD$

TEMA: Manual ex. 5-13, pag. 252, 253