GEOMETRIE

Capitolul 1
RELAŢII ÎNTRE PUNCTE, DREPTE ŞI PLANE

1. Puncte, drepte, plane. Determinarea dreptei, determinarea planului

- Noţiunile fundamentale ale geometriei în spaţiu sunt: punctul, dreapta, planul, distanţa şi măsura unghiurilor (valabile şi în geometria plană) şi noţiunea de spaţiu.
- Axiomele geometriei în spaţiu sunt:

  A_1: Două puncte distincte determină o dreaptă. Există puncte exterioare unei drepte. Dreapta este o mulţime infinită de puncte.

  A_2: Trei puncte necoliniare determină un plan. Există puncte exterioare unui plan.

  A_3: Dacă două puncte ale unei drepte aparţin unui plan, atunci dreapta este inclusă în plan.

  A_4: Dacă două plane au un punct comun, atunci ele au o dreaptă comună.

  A_5: Spaţiul este o mulţime de puncte. Planele şi dreptele sunt submulţimi ale spaţiului.
- Situaţiile de determinare a unui plan sunt:

  D_1: Trei puncte necoliniare determină un plan. Notăm: (ABC).

  D_2: O dreaptă şi un punct exterior ei determină un plan.

  Exemplu: Cu (A, d) sau (d, A) se notează planul care conţine

dreapta d şi punctul A $\notin$ d.
D_3: Două drepte paralele determină un plan. Notăm (d, g) planul determinat de dreptele d şi g.
D_4: Două drepte concurente determină un plan.

Determinarea dreptei

Exersare și consolidare

1. Completați spațiile punctate:

a) Două puncte distincte determină o ....

b) Trei sau mai multe puncte aflate pe aceeași dreaptă se numesc puncte ....

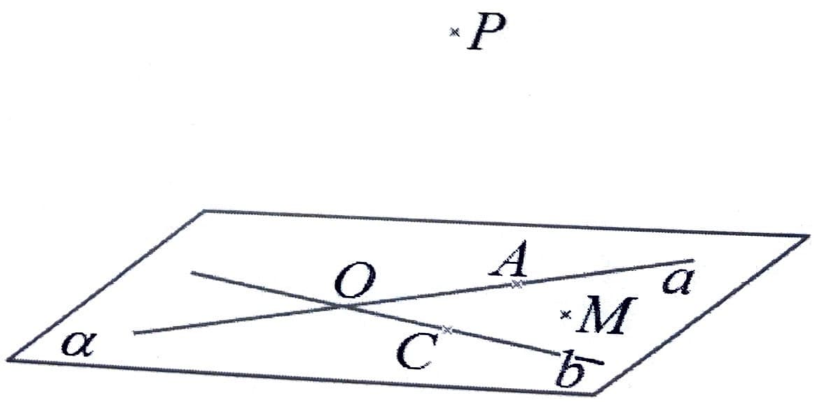
c) Trei sau mai multe puncte care nu se află pe aceeași dreaptă se numesc puncte ....

d) Trei puncte distincte, necoliniare, determină un ....

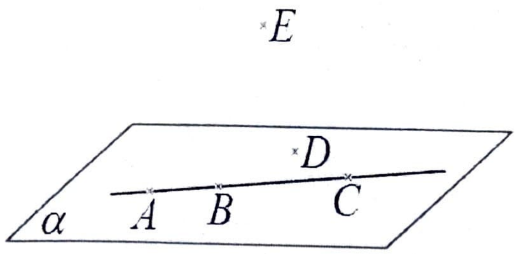
e) Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele au o .... comună.

2. Priviți figura următoare și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $P \in \alpha$; b) $M \notin \alpha$; c) $a \in \alpha$;
d) $a \subset \alpha$; e) $a \cap b = \{O\}$; f) $\alpha = (AOC)$;
g) $(a, M) = (b, M)$; h) $M \in a$; i) $M \notin b$.

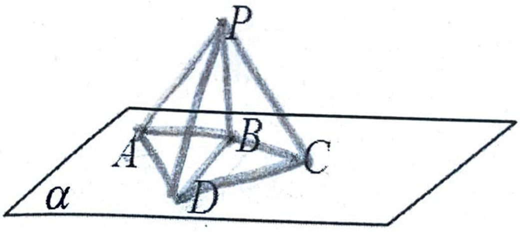


3. Priviți figura alăturată și precizați toate dreptele distincte determinate de cele cinci puncte:



Câte din aceste drepte sunt coplanare?

4. Priviți figura alăturată și precizați toate dreptele distincte determinate de cele cinci puncte:



Câte din aceste drepte sunt coplanare?

5. a) Punctele A, B, C aparţin unui cerc (distincte două câte două). Scrieţi toate dreptele determinate de aceste puncte.

b) Punctele A, B, C, D aparţin unui cerc (distincte două câte două). Scrieţi toate dreptele determinate de aceste puncte.

c) Punctele A, B, C, D şi E aparţin unui cerc (distincte două câte două). Scrieţi toate dreptele determinate de acestea.

6. a) Fie punctele A, B, C situate pe o dreaptă şi D în afara dreptei. Scrieţi toate dreptele determinate de aceste puncte.

b) Fie punctele A, B, C, D situate pe o dreaptă şi E în afara dreptei. Scrieţi toate dreptele determinate de aceste puncte.

Aprofundare

7. Se dau 8 puncte distincte două câte două. Care este numărul minim de drepte determinate de punctele date? Dar numărul maxim? Există 8 astfel de drepte? Dar 15?

8. Dacă A, B, C, D, E sunt necoplanare, pot fi ele puncte coliniare? De ce?

Determinarea planului

Exersare și consolidare

9. Completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate:

a) Trei puncte necoliniare determină un plan

b) Există pct exterioare unui plan.

c) O dreaptă și un pct exterior ei determină un plan.

d) Două dr concurente determină un plan.

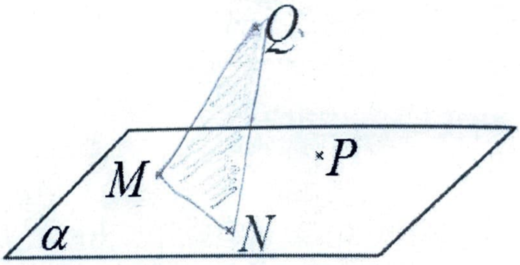
e) Două drepte paralele det un plan.

10. Precizați toate planele distincte determinate de punctele și dreptele din figura alăturată:

α

(QMP)

(QNP)



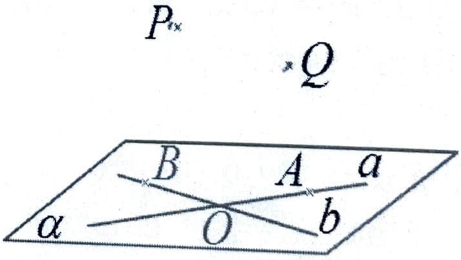
(QMN)

11. Precizați toate planele distincte determinate de punctele și dreptele din figura alăturată:

α

(P,a) (Q;a)

(P,b) (Q;b)



(P;Q;A

(P;Q

(P;Q

12. Priviți figura alăturată și precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $S \notin \alpha$; A

b) $(S,a) \neq (S,b)$; A

c) $(a,R) = (b,R)$; A

d) $(a,b) \neq \alpha$; F

e) $PR \subset \alpha$; A

f) $RQ \not\subset \alpha$; F

g) $(a,b) = (PQR)$; A

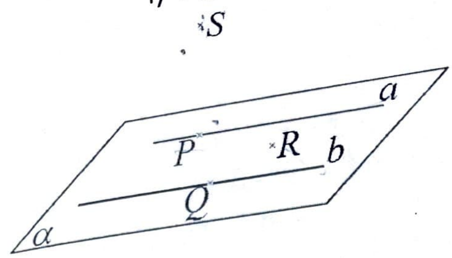
h) $a \subset \alpha$; A

i) $b \not\subset \alpha$; F

j) $R \notin a \cap b$; A

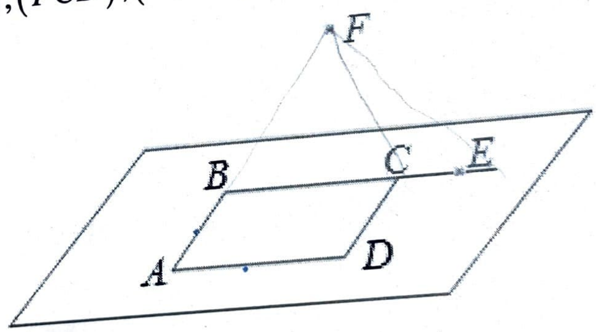
k) $SR \not\subset \alpha$; A

l) $PQ \not\subset \alpha$. F



13. Priviți figura alăturată și precizați câte plane distincte sunt în următorul șir:

$$(FBC),(FCE),(BCD),(ABC),(FBE),(ABD),$$
$$(AB,DC),(AB,AD),(B,DE),(FAD),(F,BC),$$
$$(FAB),(FCD),(F,BE),(BC,A),(BC,AD).$$



14. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) Nu există puncte exterioare unui plan. F

b) Există trei plane distincte care au un punct comun. A

c) Există trei plane distincte care au o dreaptă comună. A

d) Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele au o dreaptă comună. A

15. Răspundeți la următoarele întrebări:

a) Câte plane distincte trec prin trei puncte coliniare? o infinitate

b) Câte plane distincte trec prin trei puncte necoliniare? — 1

c) Câte plane distincte trec printr-o dreaptă? o inf.

Aprofundare

16. Se consideră 2015 puncte distincte, oricare trei necoliniare.

a) Câte drepte distincte determină aceste puncte?

b) Dacă 2014 din aceste puncte sunt coplanare, câte plane distincte determină cele 2015 puncte?

17. Se dau dreptele concurente a şi b, $a \cap b = \{O\}$ şi punctele $M \in a$, $N \in b$, $M \neq O$, $N \neq O$. Arătaţi că P, mijlocul segmentului [MN] aparţine planului determinat de dreptele a şi b.

18. Fie punctele A, B, C situate într-un plan α şi D în afara lui α. Care dintre propoziţiile următoare sunt adevărate şi care sunt false:

a) $AC \not\subset \alpha$;

b) $BC \subset \alpha$;

c) $AD \subset \alpha$;

d) $BD \not\subset \alpha$;

e) A, B, D sunt coliniare.

19. Se consideră punctele A, B, C, D, dintre care A, B, C sunt coliniare. Aflați:

a) Câte plane diferite, care să conţină trei dintre ele, necoliniare, există?

b) Câte plane diferite, care să conţină trei dintre ele, există?

20. Într-un plan α sunt date 5 puncte diferite: A, B, C, D, E şi punctul K exterior planului α. Aflați:

a) care este numărul minim de plane, exceptând planul α, determinate de câte trei dintre ele şi în ce caz se obţine?

b) care este numărul cel mai mare de astfel de plane?

21. Fie un trapez ABCD, $AD \parallel BC$, [AB] este inclusă într-un plan α. Dacă $CD \cap \alpha = \{K\}$, arătaţi că punctele A, B şi K sunt coliniare.

22. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare şi punctele M, N, P, Q, mijloacele segmentelor [AB], [BC], [CD] şi respectiv [DA].

a) Arătaţi că MNPQ este paralelogram.

b) Demonstraţi că planele (ABP), (BCQ) şi (DAN) au un punct comun.

23. a) Se dau dreptele paralele d şi g. Arătaţi că toate dreptele care au un punct comun cu d şi unul cu g sunt conţinute în planul determinat de d şi g.

b) Dacă dreapta a este coplanară cu dreapta b iar b este coplanară cu c, rezultă că a şi c sunt coplanare?

24. Se consideră punctele necoplanare A, B, C, D. dacă N este mijlocul segmentului (AD) şi $M \in (AB)$ astfel încât $MB = 3 \cdot AM$, arătați că:

a) dreapta MN intersectează planul (BCD) într-un punct E;

b) aflaţi EB ştiind că $BD = 20$ cm.

25. Triunghiurile dreptunghice ABC şi ABD, de ipotenuză [AB] sunt situate în plane diferite iar E şi F sunt mijloacele segmentelor [AB], respectiv [CD]. Arătați că $EF \perp CD$.

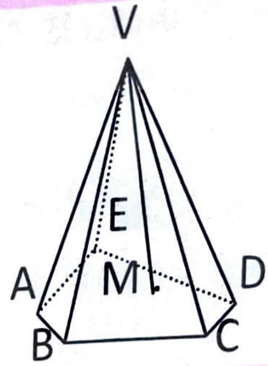
Excelentă

26. Se consideră planul α, punctele $A, B \notin \alpha$, $C \in \alpha$ şi $AB \cap \alpha = \{D\}$. Arătaţi că: $DA - DB \geq |CA - CB|$.

27. Fie A, B, C, D patru puncte diferite în spaţiu, E şi F mijloacele segmentelor [AD], respectiv [BC]. Dacă $EF = \dfrac{AB + CD}{2}$, arătaţi că punctele A, B, C şi D sunt coplanare.

2. Piramida. Tetraedrul

- Piramida. Fie S o suprafaţă poligonală şi V un punct exterior planului S. Se numeşte piramidă de bază S şi vârf V, reuniunea segmentelor [VM], unde $M \in S$.



Elementele unei piramide sunt:

1) Vârful: punctul V.

2) Baza: suprafaţa poligonală S (în figura alăturată baza este suprafaţă pentagonală.

3) Muchiile piramidei, care sunt de două feluri:

- muchiile bazei: segmentele [AB], [BC], [CD], [DE], [EA];
- muchiile laterale: segmentele [VA],[VB],[VC],[VD],[VE].

3) Suprafaţa laterală: reuniunea feţelor laterale (care sunt suprafeţele triunghiurilor [VAB], [VBC], [VCD], [VDE] şi [VEA].

4) Suprafaţa totală: suprafaţa laterală reunită cu baza.

- Tetraedrul este poliedrul determinat de patru puncte necoplanare A, B, C, D.

  Tetraedrul are şase muchii: segmentele: [AB], [AC], [AD], [BC], [BD], [CD] iar triunghiurile ABC, ABD, ACD, BCD şi interioarele lor alcătuiesc feţele tetraedrului.

- Piramida regulată este piramida cu baza poligon regulat şi muchiile laterale congruente.

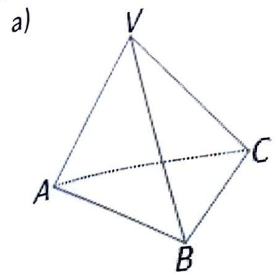
  Apotema unei piramide regulate este distanţa de la vârful piramidei la o latură a bazei.

- Tetraedrul regulat este un tetraedru cu toate muchiile congruente.

Exersare și consolidare

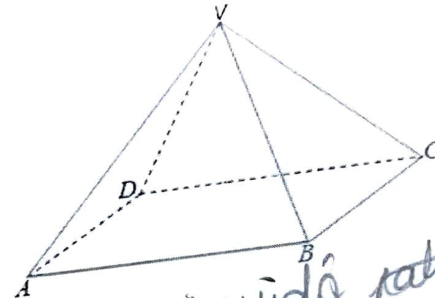
1. Precizați ce corp geometric este reprezentat în fiecare din figurile de mai jos:

a)



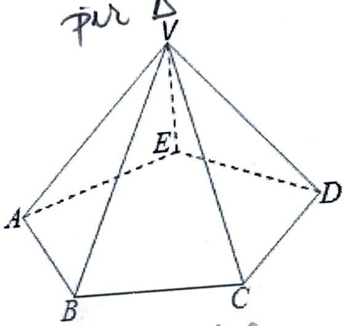
tetraedu
pir Δ

b)



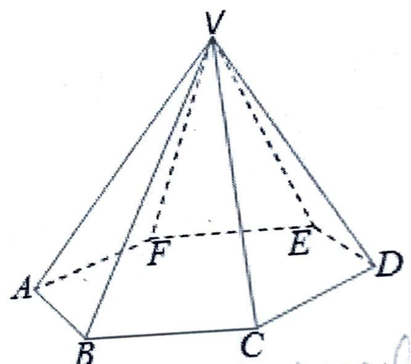
piramidă patrulateră

c)



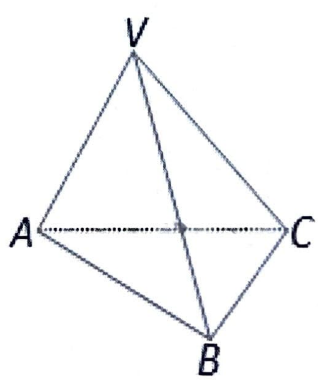
pir. pentagonală

d)



hexagonală reg

2. Priviți figura alăturată și completați spațiile punctate din propozițiile următoare:



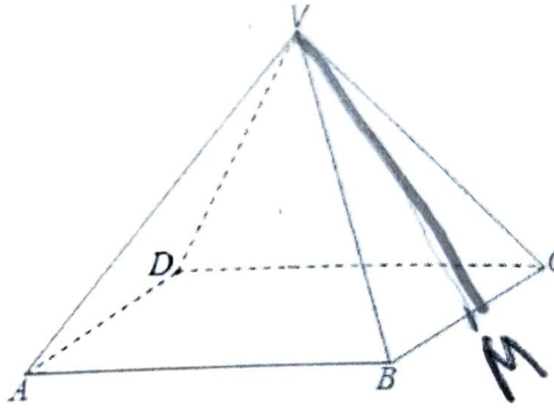
a) *VABC* este o ...pir Δ

b) Baza piramidei este un Δ ABC

c) Muchiile bazei sunt: ..AB, BC, AC

d) Muchiile laterale ale piramidei sunt: VA ; VB ; VC
e) Vârfurile piramidei sunt punctele: ..V ; A ; B ; C
f) Fețele laterale ale piramidei sunt: .(VAB) ; (VBC)

3. Priviți figura alăturată și completați spațiile punctate din propoziții următoare:

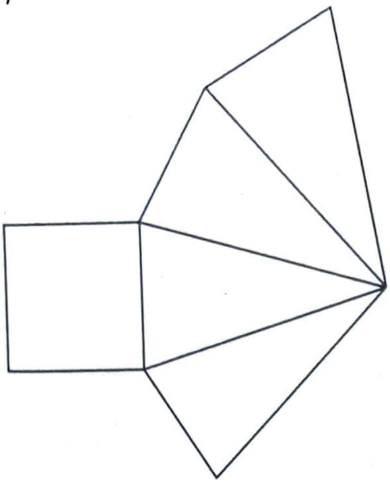


a) *VABCD* este o piramidă ... patrulată regulată
b) Baza piramidei este pătrat *ABCD*, iar vârful piramidei este punctul ....
c) Piramida *VABCD* are 8.. muchii.
d) Piramida *VABCD* are 5 muchii laterale. Acestea sunt: VA ; VB
e) Piramida *VABCD* are 4 fețe laterale. Acestea sunt: (VAB) ; (VB ; (V
f) Segmentul $[AB]$ este o muchie a bazei.
g) În total, piramida are 5.. fețe.

4. Răspundeți la următoarele întrebări:
a) Ce este un poliedru?
b) Ce este tetraedrul regulat?
c) Câte fețe are un tetraedru regulat? 4
d) Câte muchii are un tetraedru regulat? Cum sunt ele? 6 eg
e) Ce sunt fețele unui tetraedru regulat? Δ echilat
f) Ce este o piramidă regulată?
g) Este piramida regulată un poliedru? Da
h) Ce este baza unei piramide regulate? poligon regulat
i) Ce sunt fețele laterale ale unei piramide regulate? Δ isoscele
j) Ce este apotema unei piramide regulate?

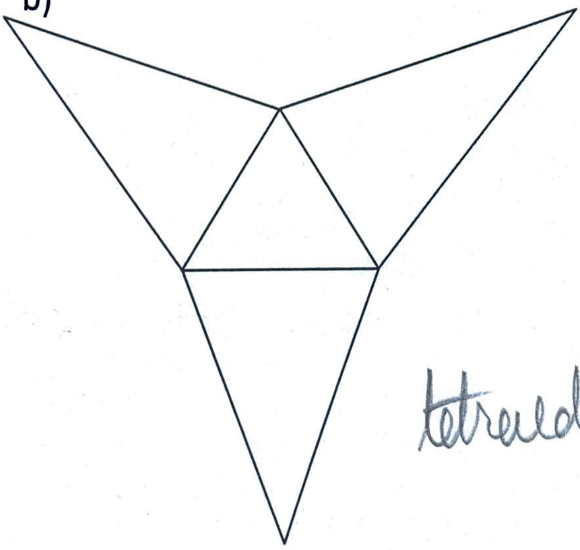
5. Ce corpuri geometrice au următ...

a)



piramidă patrulateră

b)



tetraedru regulat

6. Câte muchii are o piramidă cu 4 fețe? 6

7. Câte fețe are o piramidă cu 8 muchii? 5

8. Un tetraedru regulat are muchia cu lungimea de 18 cm. Calculați suma lungimilor tuturor muchiilor tetraedrului.

Aprofundare

9. Aria unei fețe a unui tetraedru regulat este $100\sqrt{3}\,cm^2$. Calculați lungimea unei muchii a tetraedrului și suma ariilor tuturor fețelor tetraedrului.

10. O piramidă triunghiulară regulată are apotema cu lungimea de 8 cm și muchia bazei cu lungimea de 10 cm.

a) Calculați lungimea muchiei laterale a piramidei.
b) Calculați suma ariilor fețelor laterale ale piramidei.

11. O piramidă patrulateră regulată are muchia laterală cu lungimea de 20 cm și apotema cu lungimea de 16 cm. Calculați lungimea muchiei bazei și aria bazei.

12. O piramidă patrulateră regulată are aria bazei egală cu 64 cm^2 și muchia laterală este egală cu muchia bazei. Calculați lungimea apotemei piramidei și aria unei fețe laterale.

13. Suma lungimilor tuturor muchiilor unui tetraedru regulat este de 144 cm. Calculați lungimea unei muchii a tetraedrului și aria unei fețe a tetraedrului.

14. Un tetraedru regulat are aria unei fețe egală cu $81\sqrt{3}$ cm^2. Calculați lungimea unei muchii a tetraedrului și suma ariilor tuturor fețelor tetraedrului.

15. Un tetraedru regulat are suma ariilor tuturor fețelor egală cu $144\sqrt{3}$ cm^2.
a) Calculați aria unei fețe a tetraedrului.
b) Determinați lungimea unei muchii a tetraedrului.

16. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$.
a) Demonstraţi că $AB'CD'$ este un tetraedru regulat.
b) Găsiţi trei tetraedre având vârfurile în vârfurile cubului.
c) Găsiţi trei piramide patrulatere având vârfurile în vârfurile cubului.

17. În tetraedrul ABCD, $M \in (AB)$ şi $N \in (CD)$. Desenaţi şi scrieţi intersecţia planelor (MCD) şi (ABN).

18. În tetraedrul DABC, M, N, P sunt mijloacele segmentelor [AB], [AC], respectiv [BC]. Să se arate că: planele (DAP), (DBN) şi (DCM) au o dreaptă comună.

19. Se dă piramida triunghiulară VABC, punctele $D \in (VB)$ astfel ca $BD = 3 \cdot VD$, E mijlocul segmentului [AC] şi G centrul de greutate al triunghiului ABC. Demonstraţi că dreptele DE şi VG sunt concurente într-un punct K şi $[KV] \equiv [KG]$.

20. În piramida VABCD, M şi N sunt centrele de greutate ale feţelor VBC şi VCD iar E şi F sunt mijloacele segmentelor [AB], respectiv [AD]. Să se demonstreze că dreptele MN şi EF sunt coplanare.

21. Fie tetraedrul regulat ABCD având muchia de lungime 4cm. Determinaţi distanţa dintre centrele de greutate a două feţe laterale.

22. Arătaţi că unind mijloacele muchiilor opuse ale unui tetraedru se obţin trei segmente concurente, punctul de concurenţă fiind mijlocul fiecăruia dintre segmente.

23. Fie ABCD un tetraedru regulat, M şi N mijloacele muchiilor (BC), respectiv (AD).

a) Să se afle $AC \cap (BDN)$, $(AMN) \cap (BDM)$;

b) Arătaţi că $MN \perp AD$ şi $BC \perp MN$;

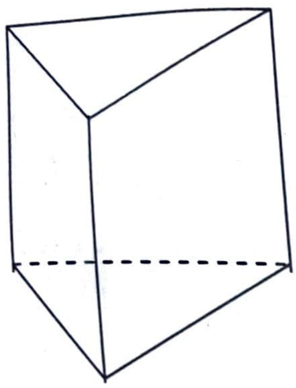
c) Dacă aria triunghiului ADM este $100\sqrt{2}\ cm^2$, aflaţi muchia tetraedrului.

Excelenţă

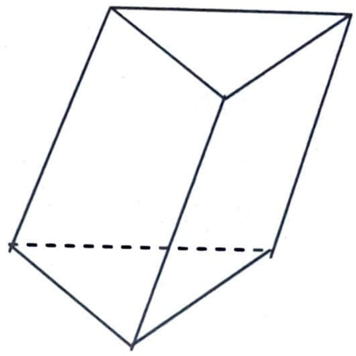
24. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare şi G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor BCD, ABD, ACD, respectiv ABC. Calculaţi aria triunghiului $G_1G_2G_3$, ştiind că aria triunghiului AG_4C este $24\ cm^2$.

25. Fie tetraedrul ABCD cu $AB = 2\sqrt{7}$ m, $BC = 6$ m, $AC = 8$ m, $AD = 4\sqrt{3}$ m, $CD = 4$ m. Arătaţi că există un punct egal depărtat de vârfurile tetraetraedrului.

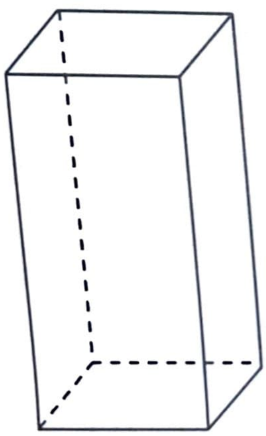
3. Prisma. Paralelipipedul dreptunghic. Cubul



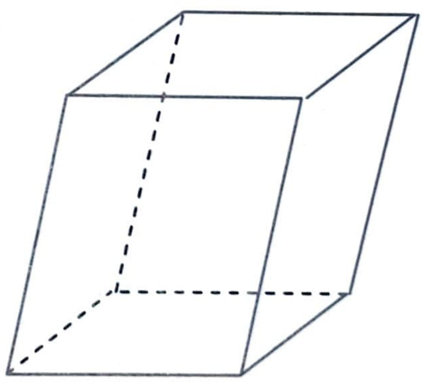
Prismă triunghiulară dreaptă



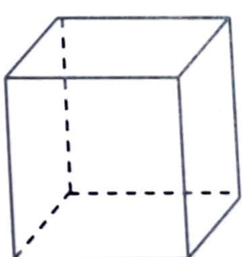
Prismă triunghiulară oblică



Prismă patrulateră dreaptă
(paralelipiped dreptunghic)



Prismă patrulateră oblică
(paralelipiped oblic)



Cubul

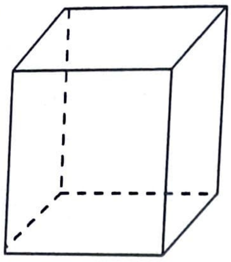
Diagonala d a paralelipipedului dreptunghic verifică relaţia:
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, unde a, b, c sunt dimensiunile sale.

Diagonala cubului cu muchia a are lungimea $d = a\sqrt{3}$.

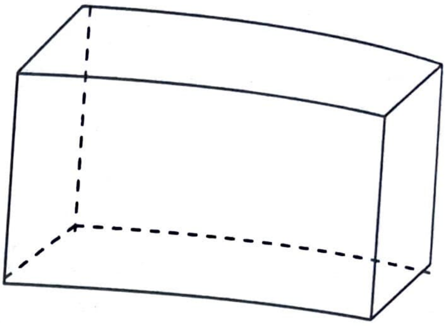
Exersare și consolidare

1. Precizați ce corpuri geometrice sunt desenate în figurile următoare

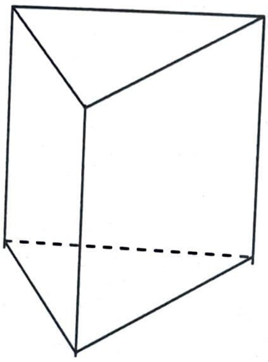
a)



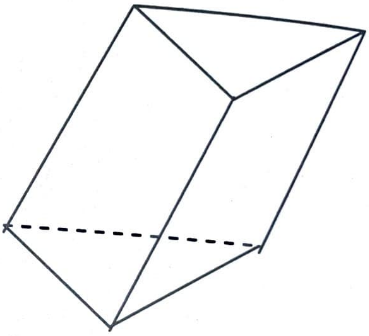
b)



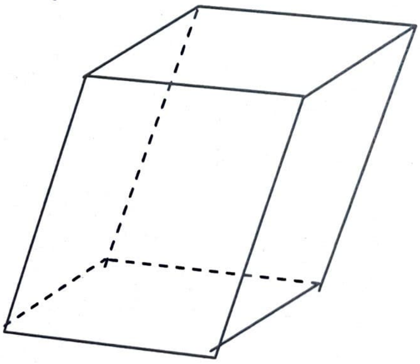
c)



d)



e)



2. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

a) O prismă dreaptă cu baza .... se numește prismă regulată.
b) Paralelipipedul dreptunghic este o prismă ....
c) Toate fețele unui paralelipiped dreptunghic sunt ....
d) Muchiile laterale ale unui paralelipiped dreptunghic sunt ....
e) Într-un paralelipiped dreptunghic fețele opuse sunt .....
f) O prismă triunghiulară regulată are baza ....
g) O prismă patrulateră regulată are baza ....

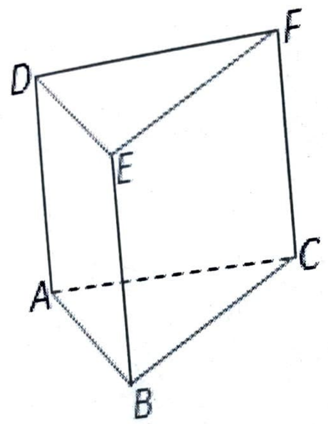
h) Un paralelipiped dreptunghic cu toate muchiile congruente este un ....

i) Cubul are .... fețe, iar acestea sunt ....

j) Un cub are .... diagonale, care sunt ....

k) Un cub are .... muchii, care au lungimi ....

3. Priviți figura de mai jos și completați propozițiile:



a) Poliedrul *ABCDEF* este o ....

b) Bazele prismei sunt: ....

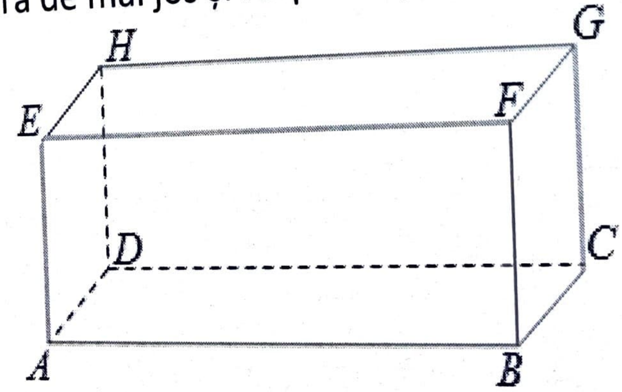
c) Muchiile bazei sunt: ....

d) Muchiile laterale sunt: ....

e) Fețele laterale sunt: ....

f) *BEFC* este un ....

4. Priviți figura de mai jos și răspundeți la următoarele întrebări:



a) Ce poliedru este în figura de mai sus?

b) Ce figură geometrică este *ADHE* ?

c) Care sunt fețele opuse și cum sunt ele?

d) Precizați care sunt muchiile laterale ale paralelipipedului. Cum sunt ele?

e) Câte diagonale are paralelipipedul? Cum sunt ele?

f) Precizați o diagonală a unei fețe laterale și o diagonală a bazei.

g) Ce muchii sunt congruente cu $[AB]$?

h) Ce muchii sunt congruente cu $[BC]$?

5. O prismă triunghiulară regulată are muchia bazei cu lungimea de 8 cm și muchia laterală cu lungimea de 11 cm.

a) Calculați suma lungimilor tuturor muchiilor prismei.

b) Calculați aria unei baze a prismei.

6. O prismă triunghiulară regulată are muchia bazei egală cu muchia laterală. Dacă aria bazei este egală cu $49\sqrt{3}\text{ cm}^2$, calculați aria unei fețe laterale a piramidei.

7. O prismă patrulateră regulată are muchia bazei cu lungimea de 20 cm și muchia laterală cu lungimea de 15 cm.

a) Calculați suma lungimilor tuturor muchiilor prismei.

b) Calculați aria unei baze a prismei.

c) Calculați aria unei fețe laterale a prismei.

8. O prismă patrulateră regulată are aria bazei de 9 cm^2 și muchia laterală cu lungimea de 10 cm.

a) Calculați lungimea unei muchii a bazei.

b) Calculați suma lungimilor tuturor muchiilor prismei.

c) Determinați aria unei fețe laterale a prismei.

9. O prismă patrulateră regulată are suma ariilor fețelor laterale egală cu 160 cm^2, iar muchia bazei are lungimea de 8 cm.

a) Calculați aria unei fețe laterale a prismei.

b) Calculați lungimea muchiei laterale a prismei.

c) Calculați lungimea diagonalei unei fețe laterale a prismei.

10. Un cub are muchia cu lungimea de 15 cm.

a) Calculați suma lungimilor tuturor muchiilor cubului.

b) Calculați aria unei fețe a cubului.

11. Suma lungimilor tuturor muchiilor unui cub este egală cu 120 cm.

a) Calculați lungimea unei muchii a cubului.

b) Calculați aria unei fețe a cubului.

c) Calculați lungimea diagonalei unei fețe a cubului.

12. Aria unei fețe a unui cub este egală cu 196 cm^2.

a) Calculați suma ariilor tuturor fețelor cubului.

b) Calculați lungimea unei muchii a cubului.

Aprofundare

13. Lungimea diagonalei unei fețe a unui cub este egală cu $7\sqrt{2}$ cm.

a) Determinați lungimea unei muchii a cubului.

b) Calculați aria unei fețe a cubului.

c) Calculați suma ariilor fețelor laterale ale cubului.

14. Suma ariilor tuturor fețelor unui cub este egală cu 125 cm^2.

a) Calculați aria unei fețe a cubului.

b) Determinați lungimea unei muchii a cubului.

c) Calculați lungimea diagonalei unei fețe a cubului.

15. Desenaţi o prismă triunghiulară dreaptă $ABCA'B'C'$ şi o prismă triunghiulară oblică $DEFD'E'F'$. Puneţi în evidenţă, pe desen, diagonalele fețelor laterale.

16. Desenaţi paralelipipedele: oblic $ABCDA'B'C'D'$, drept $EFGHE'F'G'H'$ şi dreptunghic $MNPQM'N'P'Q'$. Puneţi în evidenţă, pe desen, diagonalele fețelor laterale și ale bazelor.

17. Desenaţi o prismă hexagonală regulată, scrieţi elementele acesteia şi apoi reprezentaţi o desfăşurare plană a prismei desenate.

relația de paralelism în spațiu

- <u>Două drepte în spaţiu pot fi coplanare sau necoplanare.</u>

Două drepte sunt coplanare dacă sunt situate în acelaşi plan; ele pot fi concurente sau paralele;

Două drepte care nu au nici un punct comun şi nu sunt nici paralele se numesc drepte necoplanare .

Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă şi numai una la dreapta dată <u>(axioma paralelelor)</u> .

Două drepte distincte paralele cu o a treia dreaptă sunt paralele între ele.

<u>Exersare și consolidare</u>

1. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) Două drepte concurente sunt coplanare.

b) Trei drepte concurente sunt coplanare.

c) Dacă două drepte sunt paralele, atunci ele sunt coplanare.

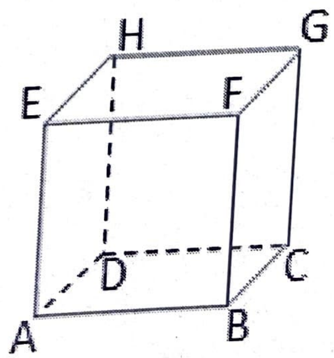
d) Dacă trei drepte sunt paralele, atunci ele sunt coplanare.

e)Dacă două drepte nu au nici un punct comun, atunci ele sunt necoplanare.

f) Dacă două drepte nu au nici un punct comun, atunci ele sunt paralele.

g) Dacă trei drepte se intersectează două câte două, atunci ele sunt coplanare.

2. Fie cubul ABCDEFGH. Precizați dacă următoarele perechi de drepte sunt coplanare sau necoplanare.

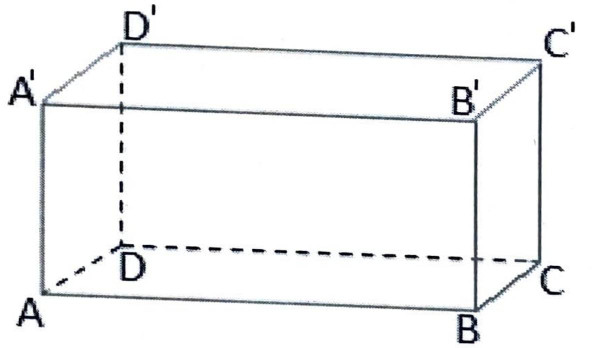


a) AB și BC;
b) AB și EF;
c) AE și GC;
d) AE și DC;
e) HD și EF;
f) HD și BF;
g) AC și BD;
h) EG și AC;
i) AH și BG;
j) AH și FC;
k) ED și AH;
l) HF și DB.

3. Fie cubul ABCDEFGH. Precizați perechi de drepte paralele.

4. Se consideră paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D'. Precizați dacă următoarele triplete de drepte sunt coplanare:

a) AB, BC, DB;
b) AA', BB', CC';
c) AA', CC', AC;
d) AC, A'C', AA';
e) DD', DA, DC;
f) A'B', D'C', D'B'.



5. Se consideră paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D'. Precizați perechi de drepte paralele

Excelență

6. Fie ABCD un tetraedru regulat și P, Q, R, S mijloacele muchiilor $[DC],[AB],[AD]$, respectiv $[BC]$. Demonstrați că dreptele PQ și RS sunt coplanare.

7. Fie ABCD un tetraedru regulat, iar I și J sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABD, respectiv BCD. Demonstrați că dreptele IJ și AC sunt coplanare.

8. Fie ABCDEFGH un cub, O_1, O_2 centrele fețelor ABFE, respectiv BCGF. Demonstrați că dreptele O_1O_2 și EG sunt coplanare. Dacă $AB = 4\,cm$,

5. Unghiuri cu laturile respectiv paralele. Unghiul a două drepte în spaţiu. Drepte perpendiculare

- Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare.
- Prin unghiul a două drepte în spaţiu înţelegem orice unghi ascuţit sau drept cu vârful în orice punct al spaţiului şi cu laturile paralele cu dreptele date.
- Două drepte din spaţiu sunt perpendiculare dacă măsura unghiului lor este de 90^0.

Exersare și consolidare

1. Se consideră prisma triunghiulară regulată ABCA’B’C’ cu $AB = 12\,cm$ și $AA' = 8\,cm$.

a) Calculați sinusul unghiului determinat de dreptele A’B și CC’.

b) Calculați tangenta unghiului format de dreptele BC și B’C.

c) Determinați sinusul unghiului format de dreptele A’B și A’C.

2. Se consideră piramida patrulateră regulată SABCD, cu AB = 16 cm și SC = 16 cm. Calculați:

a) $\sin\left(\widehat{SC, SB}\right)$;

b) $tg\left(\widehat{BC, SB}\right)$;

c) $\sin\left(\widehat{SA, AC}\right)$;

d) $m\left(\widehat{SA, SC}\right)$;

e) $tg\left(\widehat{SD, SB}\right)$;

f) $\sin\left(\widehat{AC, DB}\right)$;

g) $m\left(\widehat{SB, AD}\right)$.

3. Se consideră cubul ABCDA’B’C’D’, cu $AB = 6\,cm$, E și F centrele fețelor ADD’A’, respectiv DCC’D’.

a) Calculați $\sin\left(\widehat{D'E, C'F}\right)$ și $tg\left(\widehat{EF, CC'}\right)$.

b) Calculați perimetrul și aria triunghiului A’C’B.

4. Se consideră tetraedrul regulat SABC cu AB=24 cm și D, E, F, G mijloacele muchiilor $[SA],[AB],[BC]$, respectiv $[SC]$.

a) Calculați $\sin\left(\widehat{DE, SC}\right)$ și $tg\left(\widehat{DG, AB}\right)$.

b) Determinați natura patrulaterului DEFG și calculați perimetrul și aria lui.

5. Se consideră prisma patrulateră regulată ABCDA′B′C′D′, cu $AB = 6cm$ și $AA' = 10cm$.

a) Calculați $\sin\left(\widehat{BC, A'D}\right)$, $\sin\left(\widehat{C'B, A'D}\right)$, $tg\left(\widehat{A'B, CD}\right)$.

b) Calculați perimetrul triunghiului D′AC.

6. Fie cubul ABCDA′B′C′D′. Determinaţi unghiurile formate de următoarele perechi de drepte:

a) AC şi CD;
b) AD şi A′C′;
c) BC şi A′D′;
d) AC şi B′D′;
e) AD′ şi A′C′;
f) BC′ şi AD′.

7. Fie cubul ABCDA′B′C′D′. Determinaţi perechi de drepte perpendiculare.

Aprofundare

8. Fie ABCD şi CDEF două paralelograme situate în plane diferite. Ce fel de patrulater este ABFE?

9. Fie paralelipipedul dreptunghic ABCDA′B′C′D′ având AB = 3cm, BC = = 4cm şi AA′ = 4cm. Ştiind că M, N şi P sunt mijloacele laturilor AB, BC şi respectiv CD, calculaţi:

a) $m\left(\widehat{AB, A'D'}\right)$;

b) $m\left(\widehat{AA', C'D'}\right)$;

c) $\sin\left(\widehat{MN, AC'}\right)$;

d) $\cos\left(\widehat{AD, PN}\right)$.

10. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$, O şi O' mijloacele feţelor $ABCD$ şi $A'B'C'D'$ şi M, N, N' şi P' respectiv mijloacele laturilor AB, BC, $B'C'$ și $C'D'$. Calculaţi măsurile unghiurilor dintre:

a) MN şi $B'D'$;
b) AC şi DD';
c) MN şi CC';
d) $C'O$ şi $O'A$;
e) AD şi BC';
f) CD şi $B'B$;
g) MN şi $N'P'$;
h) BD şi $A'C'$.

11. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ având $AB = AA' = 2\sqrt{3}cm$ şi $AD = 2cm$. Calculaţi:

a) măsura unghiului dintre CC' şi $A'B$;

b) $\sin\left(\widehat{AC', BC'}\right)$.

12. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Determinaţi perechi de drepte perpendiculare.

13. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ având $AB = AA' = \sqrt{3}cm$ şi $AD = 3cm$. Calculaţi măsurile unghiurilor dintre:

a) AC şi $B'D'$;
b) AD şi CB';
c) BD şi $A'D'$.

Excelență

14. Se dă piramida SABCD, regulată, cu raza cercului circumscris bazei de $4\sqrt{2}$ cm şi aria feţei SBC de $16\sqrt{3}$ cm.

a) Aflaţi măsura unghiului format de SB şi AD;

b) Calculaţi aria triunghiului SBD şi $m(\sphericalangle DSB)$.

6. Poziţiile relative ale unei drepte faţă de un plan. Dreaptă paralelă cu planul

- O dreaptă este secantă unui plan dacă are un singur punct comun cu planul.
- O dreaptă neconţinută într-un plan este paralelă cu planul dacă şi numai dacă este paralelă cu o dreaptă din acel plan.
- Dacă o dreaptă d este paralelă cu un plan α şi conţinută într-un plan oarecare β care se intersectează cu planul α după o dreaptă g, atunci dreptele d şi g sunt paralele.
- Dacă o dreaptă d este paralelă cu un plan α şi printr-un punct A al planului α ducem paralela g la d, atunci dreapta d este inclusă în planul α.

Exersare şi consolidare

1. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Demonstraţi că:

a) $AB \parallel (CDD')$; b) $AB \parallel (CDB')$;

c) $AD' \parallel (A'BC')$; d) $AD' \parallel (DBC')$.

2. Fie patrulaterul ABCD şi triunghiul CDE situate în plane diferite. Ştiind că M, N, P, Q sunt respectiv mijloacele segmentelor DE, EC, AD, BC, arătaţi că:

a) $MN \parallel (ABC)$; b) $MP \parallel (EAB)$; c) $NQ \parallel (EAB)$.

3. Se consideră triunghiul ABC astfel încât BC să fie inclusă într-un plan α şi $A \notin \alpha$. Dacă M şi N sunt mijloacele laturilor [AB], respectiv [AC] stabiliţi poziţia dreptei MN faţă de planul α.

4. Fie patrulaterul ABCD şi un plan α astfel încât $AB \parallel \alpha$ şi $CD \subset \alpha$. Ce fel de patrulater este ABCD ştiind că el este inscriptibil?

5. Triunghiul ABC are latura AC inclusă într-un plan α, AB = 12 cm, BC = = 15 cm. Ştim că $D \in (BA)$ şi $E \in (BC)$ astfel încât:

a) $BD = 4$ cm, $BE = 5$ cm;
b) $BD = 8$ cm, $BE = 12$ cm.
Stabiliţi, în fiecare caz în parte, ce poziţie are dreapta DE faţă de planul α?

Aprofundare

6. În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle BAC) = 90°$, $D \notin (ABC)$ iar M, N, P sunt mijloacele segmentelor (DA), (DB) respectiv (DC).
a) Stabiliţi poziţia dreptei MN faţă de planul (ABC).
b) Arătaţi că dreapta ce conţine înălţimea din A a triunghiului ABC este paralelă cu planul (MNP).

7. Trapezul ABCD are baza CD situată într-un plan π. Un plan α care conţine baza AB a trapezului intersectează planul π după o dreaptă h. Stabiliţi poziţia dreptei h faţă de CD.

T **8.** Paralelogramele ABCD şi ABEF sunt situate în plane diferite şi O_1 şi O_2 sunt centrele lor. Arătaţi că:
a) $EF \parallel (ABC)$;
b) $AB \parallel (DCF)$;
c) $O_1O_2 \parallel (ACE)$;
d) $CE \parallel (BDF)$.

T **9.** În tetraedrul ABCD, G_1 şi G_2 sunt centrele de greutate ale feţelor (DAB) şi (DBC). Arătaţi că: $AC \parallel (BG_1G_2)$ şi $AC \parallel (DG_1G_2)$.

T **10.** Fie piramida patrulateră regulată VABCD. Dacă E şi F sunt respectiv mijloacele muchiilor VA şi VD arătaţi că: $AB \parallel (VDC)$ şi $EF \parallel (VBC)$.

T **11.** Fie ABCDA′B′C′D′ un paralelipiped dreptunghic. Arătaţi că dreapta de intersecţie a planelor (BCD′) şi (ADC′) este paralelă cu planul (ABC).

12. Se intersectează laturile [AB], [BC], [CD] şi [DA] ale patrulaterului strâmb ABCD cu un plan α paralel cu AC şi BD şi se obţin punctele M, N, P, respectiv R. Stabiliţi natura patrulaterului MNPR.

7. Dreaptă perpendiculară pe un plan. Distanţa de la un punct la un plan. Înălţimea piramidei

- Două drepte din spaţiu (concurente sau necoplanare) care formează între ele un unghi drept se numesc drepte perpendiculare.
- Numim dreaptă perpendiculară pe un plan o dreaptă care este perpendiculară pe orice dreaptă din acel plan.
- Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente dintr-un plan, atunci ea este perpendiculară pe acel plan.
- Dintr-un punct se poate duce pe un plan o perpendiculară şi numai una.
- Printr-un punct se poate duce un plan şi numai unul perpendicular pe o dreaptă dată.
- Două plane perpendiculare pe aceeaşi dreaptă sunt paralele.
- Două drepte perpendiculare pe acelaşi plan sunt paralele.
- O dreaptă care intersectează un plan dar nu este perpendiculară pe plan se numeşte oblică faţă de plan.
- Se numeşte distanţa de la un punct la un plan, lungimea segmentului care uneşte punctul cu piciorul perpendicularei duse din punctul dat pe plan.
- Înălţimea unei piramide este distanţa de la vârful piramidei la planul bazei.
- O înălţime a unui tetraedru este distanţa de la un vârf la faţa opusă.
- Perpendiculara dusă dintr-un punct pe un plan, este mai scurtă decât orice oblică dusă din acel punct faţă de plan.
- Două oblice, duse din acelaşi punct la un plan, sunt congruente dacă şi numai dacă distanţele de la picioarele lor la piciorul perpendicularei sunt egale.

Exersare și consolidare

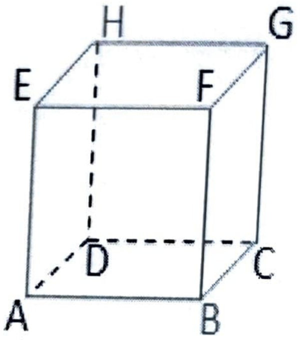
1. Se consideră cubul ABCDEFGH. Stabiliţi valoarea logică a fiecăreia dintre propoziţiile:

p_1: BF $\perp$ BC; p_2: CG $\perp$ AD;

p_3: DH $\perp$ BF; p_4 : AH $\perp$ FC;

p_5: CG $\perp$ (ABD); p_6: EG $\perp$ BF;

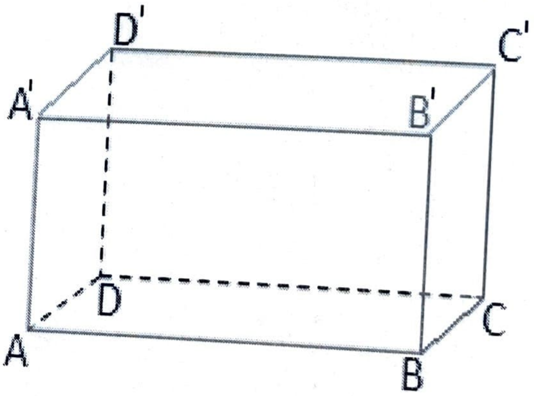
p_7: BD $\perp$ (ACG); p_8: CD $\perp$ (AED).



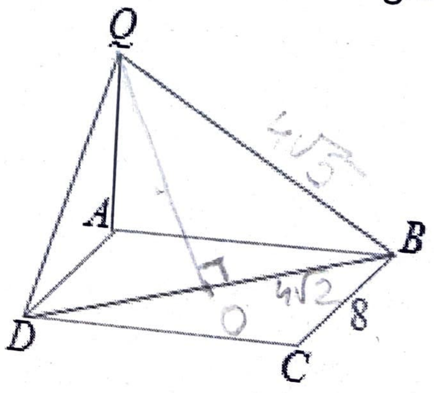
2. Fie ABCDA′B′C′D′ un paralelipiped dreptunghic cu AB = 10 cm, B′C = = 10 cm, AA′ = 6 cm. Să se determine:

a) distanţa de la A la B′D′;

b) distanţa de la O′ la planul (ABC), unde {O′} = A′C′ ∩ B′D′.



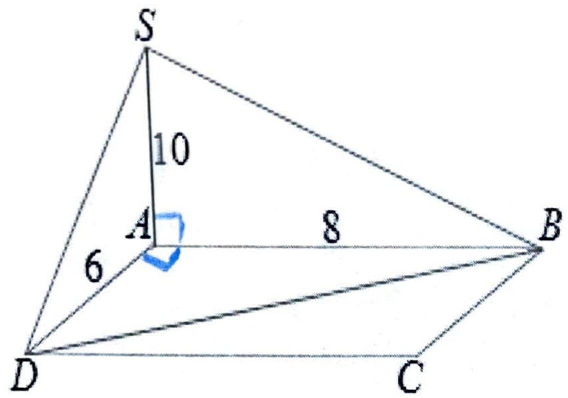
3. Pe planul pătratului ABCD cu $AB = 8\,cm$ se ridică perpendiculara $QA = 4\,cm$. Calculați perimetrul și aria triunghiului QBD.



4. Pe planul dreptunghiului ABCD cu $AB = 8cm$ și $AD = 6cm$ se ridică perpendiculara $SA = 10cm$.

a) Calculați perimetrul triunghiului SBD.

b) Demonstrați că $BC \perp (SAB)$ și $DC \perp (SAD)$.

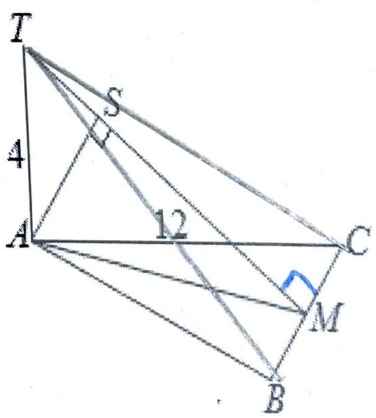


5. Pe planul triunghiului echilateral ABC cu $AB = 12cm$, se ridică perpendiculara $TA = 4cm$. Fie M mijlocul lui $[BC]$.

a) Calculați perimetrul triunghiului TBC.

b) Calculați ariile triunghiurilor TAM și TBC.

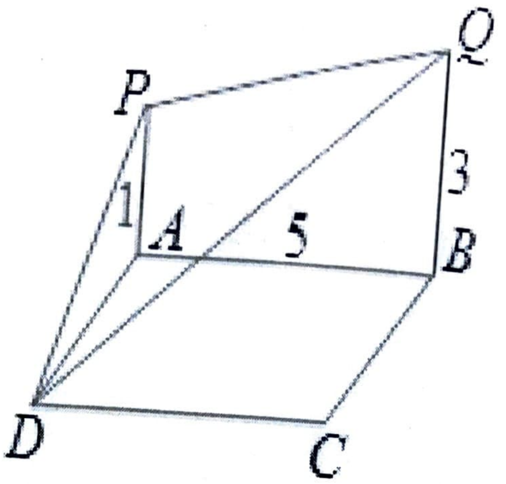
c) Fie $AS \perp TM$. Demonstrați că $AS \perp (TBC)$.



6. Pe planul pătratului ABCD cu $AB = 5cm$ se ridică perpendicularele $PA = 1cm$ și $QB = 3cm$.

a) Calculați perimetrul triunghiului PQD.

b) Demonstrați că $BC \perp (PAQ)$.



7. Pe planul dreptunghiului ABCD cu $AB = 8\,cm$, $AD = 6\,cm$, se ridică perpendicularele $TA = 6\,cm$ și $SB = 8\,cm$.

a) Calculați perimetrele triunghiurilor TSD și SCD.

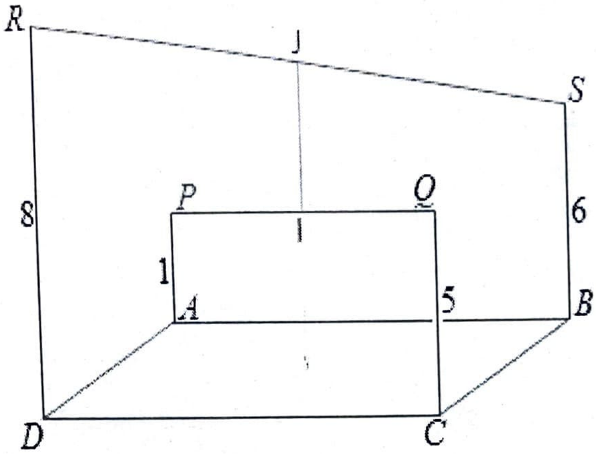
b) Dacă P și Q sunt mijloacele segmentelor TC, respectiv DS, calculați lungimea segmentului PQ.

c) Demonstrați că $PQ \perp (ABC)$.

8. Pe planul dreptunghiului ABCD se ridică, de aceeași parte, perpendicularele $PA = 1\,cm$, $QC = 5\,cm$, $SB = 6\,cm$, $RD = 8\,cm$. Fie I și J mijloacele segmentelor PQ, respectiv RS.

a) Calculați lungimea segmentului IJ.

b) Demonstrați că $IJ \perp (ABC)$.

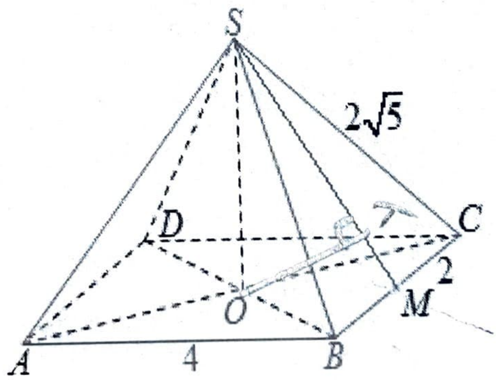


9. Se consideră piramida patrulateră SABCD cu $AB = 4\,cm$ și $SC = 2\sqrt{5}\,cm$. Fie M mijlocul muchiei BC.

a) Calculați lungimea apotemei SM a piramidei.

b) Determinați lungimea înălțimii SO a piramidei.

c) Dacă $OT \perp SM$, $T \in (SM)$, demonstrați că $OT \perp (SBC)$.

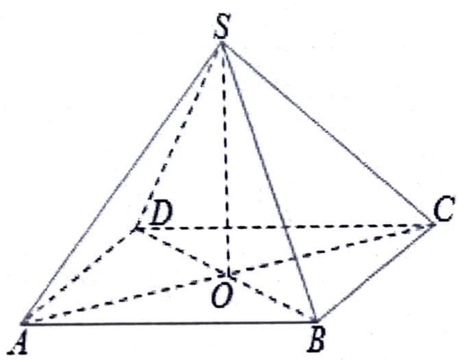


10. Se consideră piramida patrulateră SABCD cu $SA = AB = 10\,cm$.

a) Calculați lungimea înălțimii SO a piramidei.

b) Calculați perimetrul și aria triunghiului SAC.

c) Demonstrați că $OB \perp (SAC)$.

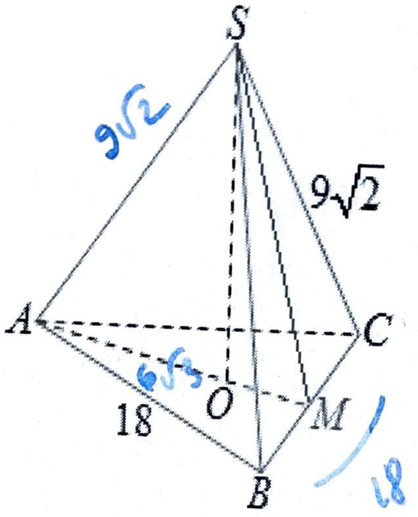


11. Se consideră piramida triunghiulară regulată SABC, cu $AB = 18\,cm$ și $SC = 9\sqrt{2}\,cm$.

a) Determinați $m(\sphericalangle BSC)$.

b) Calculați lungimea înălțimii SO a piramidei.

c) Demonstrați că $SB \perp (SAC)$.

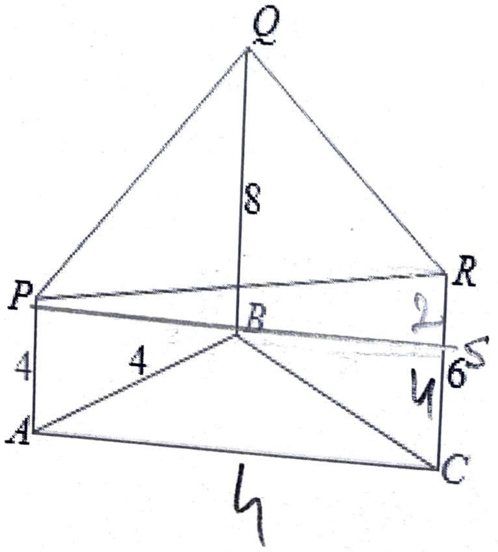


12. Pe planul triunghiului echilateral ABC, cu $AB = 4\,cm$, se ridică de aceeași parte perpendicularele $PA = 4\,cm$, $QB = 8\,cm$ și $RC = 6\,cm$.

a) Calculați perimetrul triunghiului PQR.

b) Demonstrați că $RC \parallel (ABQ)$.

c) Determinați distanța de la punctul R la planul (PQB).



Aprofundare

13. Pe planul triunghiului ABC, AB = AC = 10 cm, BC = 16 cm se ridică perpendiculara în A, pe care se ia punctul P, astfel ca PA = 24 cm. Calculaţi PB, PD, unde D este piciorul înălţimii din A a triunghiului ABC precum şi distanţa de la B la planul (PAD).

14. Pe planul cercului de centru O şi rază R = 12 cm se ridică în O perpendiculara OM. Dacă A, B, C şi D sunt punctele cercului astfel ca $AC \cap BD = \{O\}$, $AC \perp BD$, şi AM = 20 cm se cer:

a) distanţa de la M la planul cercului;
b) aria triunghiului MAC;
c) distanţa de la punctul A la planul (MBD).

15. În vârful A al pătratului ABCD de latură 16 cm se ridică perpendiculara EA = 12 cm. Dacă P este mijlocul segmentului [EC], se cer:

a) distanţa de la E la vârfurile pătratului;
b) distanţa de la C la planul (ABE);
c) distanţa de la P la planul (BCD).

16. Se dă piramida patrulateră regulată VABCD cu VA = 18 cm, DB = $= 18\sqrt{2}$ iar M este mijlocul muchiei [BC].

a) Calculaţi lungimea apotemei piramidei VABCD, [VM];
b) Aflaţi înălţimea piramidei VABCD;
c) Determinaţi distanţa de la centrul bazei piramidei la planul (VBC).

17. Fie tetraedrul regulat ABCD, cu AB = 18 cm. Calculaţi distanţa de la A la planul (BCD).

18. Fie un triunghi dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle BAC) = 90°$ şi $MA \perp (ABC)$, AB = 8 cm, AC = $8\sqrt{3}$ cm, MA = 4 cm.

a) Calculaţi MB, MC, MD, unde $AD \perp BC$; $D \in BC$;
b) Aflaţi distanţa de la C la planul (MAB);
c) Arătaţi că $AB \perp MC$ şi $CA \perp MB$. Poate fi $BC \perp MC$?

19. Pe planul triunghiului ABC, cu AB = 6 cm se duc perpendicularele AM = 6 cm şi BN = 6 cm. Dacă MC = NC = $6\sqrt{2}$ cm, arătaţi că ΔABC este echilateral.

20. Fie dreptunghiul ABCD astfel încât $MA \perp (ABC)$, MA = 24 cm, AB = 10 cm şi MD = $24\sqrt{2}$ cm.

a) Calculaţi MB, MC, MO, unde $\{O\} = AC \cap BD$;

b) Arătaţi că $DC \perp MD$ şi $BC \perp MB$;

c) Dacă S este mijlocul lui [MC], aflaţi SB şi SD.

21. Pe planul pătratului ABCD cu AB = 8 cm se ridică perpendiculara BM = 8 cm. Fie E mijlocul lui [MD], F mijlocul lui [AB] şi P mijlocul lui [BC]. Arătaţi că dreapta MD este perpendiculară pe planul (EFP) şi să se calculeze aria triunghiului EFP.

22. Se dă triunghiul dreptunghic ABC astfel încât $m(\sphericalangle A) = 90°$, AB = 18 cm şi AC = 24 cm. Dacă $P \notin (ABC)$ şi PA = PB = PC = 25 cm calculaţi:

a) lungimea laturii BC, aria şi perimetrul triunghiului ABC;

b) distanţa de la punctul P la planul (ABC).

23. Se consideră trapezul ABCD, $AB \parallel CD$, cu BC = 12 cm. În mijlocul M al laturii neparalele [AD] se ridică perpendiculara PM pe planul trapezului astfel ca PM = 24 cm şi distanţa de la P la dreapta BC să fie 26 cm. Să se calculeze aria trapezului ABCD.

24. Fie ABC un triunghi echilateral, $MA \perp (ABC)$, $NB \perp (ABC)$ şi M şi N de aceeaşi parte a planului (ABC) astfel ca $AM = 2 \cdot BN$. Ştiind că triunghiul MNC este dreptunghic şi AB = a aflaţi aria triunghiului MBC.

25. Pe planul triunghiului ABC se duce perpendiculara BM. Dacă $AD \perp BC$, $D \in BC$, $AE \perp MC$, $E \in MC$ arătaţi că $MC \perp (ADE)$.

<u>Excelenţă</u>

26. Dacă ABCD este un tetraedru în care $AC \perp BD$ şi $AB \perp CD$ arătaţi că

8. Poziţiile relative a două plane. Plane paralele. Distanţa dintre două plane paralele

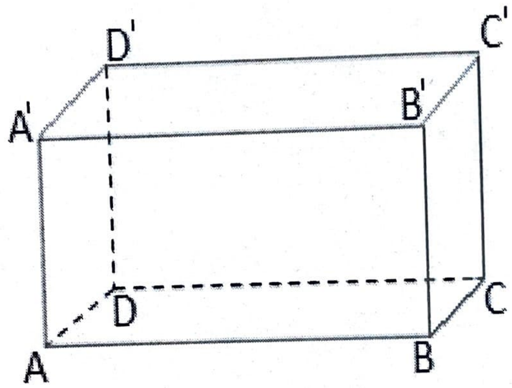
- Două plane diferite pot fi secante sau paralele.
- Două plane a căror intersecţie este o dreaptă se numesc plane secante.
- Două plane care nu au puncte comune se numesc plane paralele.
- Două plane sunt paralele dacă două drepte concurente dintr-un plan sunt paralele cu celălalt plan,
- Dacă o dreaptă d este paralelă cu un plan α şi conţinută într-un plan oarecare β care se intersectează cu planul α după o dreaptă g, atunci dreptele d şi g sunt paralele.
- Dacă o dreaptă d este paralelă cu un plan α şi printr-un punct A al planului α ducem paralela g la d, atunci dreapta d este inclusă în planul α .
- Dându-se două plane paralele, orice dreaptă dintr-un plan este paralelă cu celălalt plan.
- Dacă două plane paralele sunt tăiate de un al treilea plan, atunci dreptele lor de intersecţie sunt paralele.
- Două plane distincte paralele cu un al treilea plan sunt paralele între ele.
- Două plane paralele, determină pe două drepte paralele, pe care le intersectează, segmente congruente.
- Mai multe plane paralele determină pe două drepte oarecare, pe care le intersectează, segmente proporţionale (teorema lui Thales în spaţiu).
- Printr-un punct exterior unui plan, trece un singur plan paralel cu el.
- Dacă trei plane α,β,γ nu au toate trei nici un punct comun dar se taie două câte două, atunci cele trei drepte de intersecţie sunt paralele.

♦ Dacă dreptele paralele a şi b sunt conţinute în planele secante α respectiv β, atunci dreapta de intersecţie a celor două plane este paralelă cu a şi b.

Exersare și consolidare

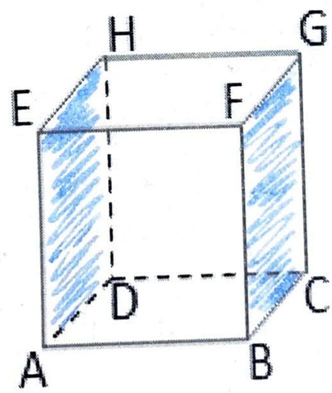
1. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Determinaţi intersecţiile:

a) $(ABB')\cap(AA'C)$; b) $(ABB')\cap(ACD)$; c) $(ACC')\cap(BDD')$.



2. Fie cubul ABCDEFGH. Arătaţi că:

a) $(ABC)\parallel(EGH)$; b) $(ADH)\parallel(BCG)$; c) $(ABF)\parallel(DCG)$.



3. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ indicaţi poziţiile relative ale planelor.

a) $(A'AB)$ şi $(D'DC)$;
b) (BCC') şi (ADD');
c) (BCD) şi $(A'B'C')$;
d) $(A'C'C)$ şi (ABC);
e) (BCD') şi $(B'C'C)$;
f) (ADA') şi $(AB'C')$.

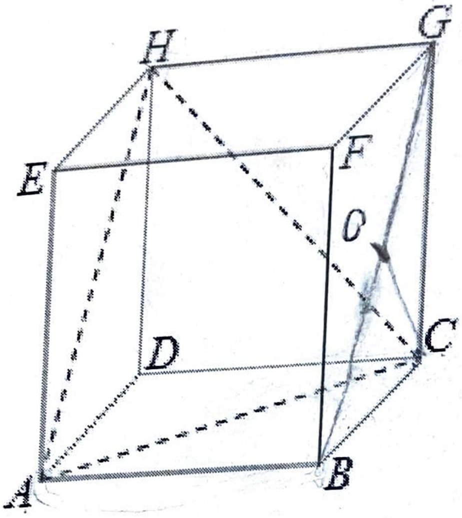
4. Fie cubul ABCDEFGH, cu $AB = 4\,cm$.

a) Determinați intersecția planelor (HAG) și (FBC).

b) Verificați dacă $DC \parallel (ABG)$.

c) Demonstrați că $(HAC) \parallel (BEG)$.

d) Calculați distanța de la punctul C la planul (ABG).



$(BCGF) \cap (AHGB) = BG$

$CO = \frac{FC}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2}$

$CO = 2\sqrt{2}$

Aprofundare

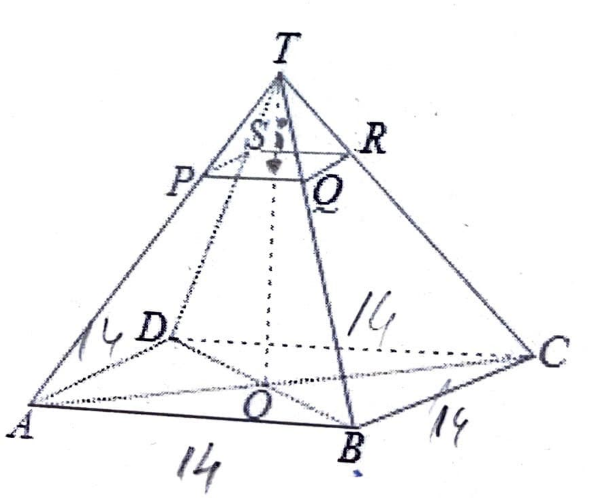
5. Se consideră piramida patrulateră regulată TABCD. Pe muchiile TA, TB, TC și TD se iau punctele P, Q, R, S astfel încât:

$$\frac{TP}{PA} = \frac{2}{5}, \frac{TQ}{TB} = \frac{2}{7}, \frac{RC}{RT} = \frac{5}{2}, \frac{TD}{TS} = \frac{7}{2}.$$

a) Demonstrați că $(PQR) \parallel (ABC)$.

b) Dacă $AB = 14\,cm$, calculați aria patrulaterului PQRS.

c) Planul (PQR) intersectează înălțimea TO a piramidei, în punctul I. Dacă $TO = 21\,cm$, calculați lungimea segmentului TI.

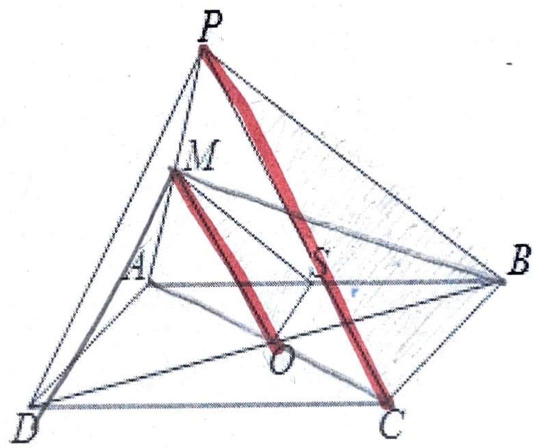


6. Fie ABCD un paralelogram și $P \notin (ABC)$. Fie M, O, S mijloacele segmentelor AP, BD, respectiv AB.

a) Verificați dacă $PC \parallel (MBD)$.

b) Cercetați dacă $MO \parallel (PDC)$.

c) Demonstrați că $(MOS) \parallel (PBC)$.

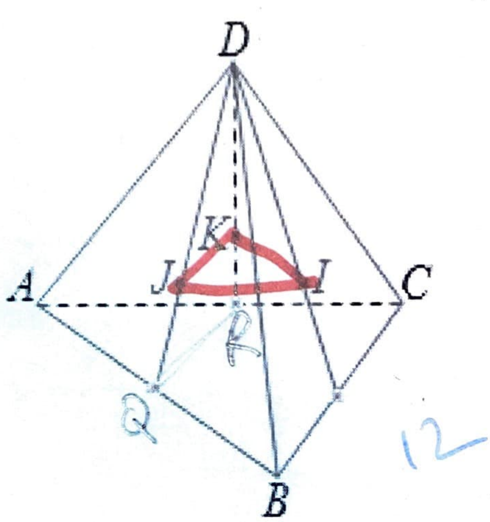


7. Se consideră tetraedrul regulat ABCD, cu $AB = 12cm$ și I, J, K centrele de greutate ale triunghiurilor DBC, DAC, respectiv DAB.

a) Cercetați dacă $(IJK) \parallel (ABC)$.

b) Demonstrați că $AC \parallel (BIJ)$.

c) Calculați perimetrul și aria triunghiului IJK.

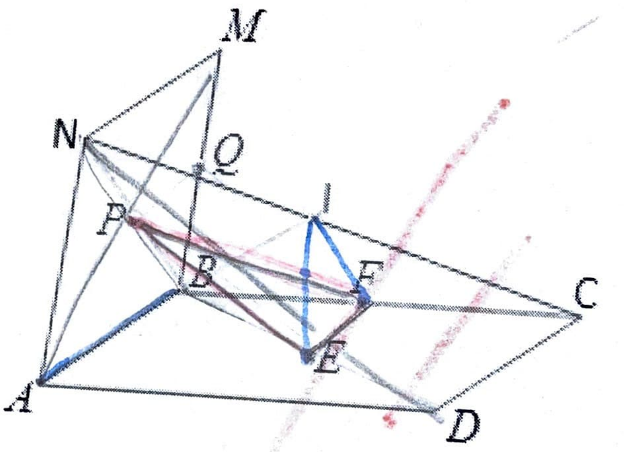


8. Paralelogramele ABCD și ABMN sunt situate în plane diferite. Fie E, F, P, Q mijloacele segmentelor (BD), (BC), (BN), respectiv (BM).

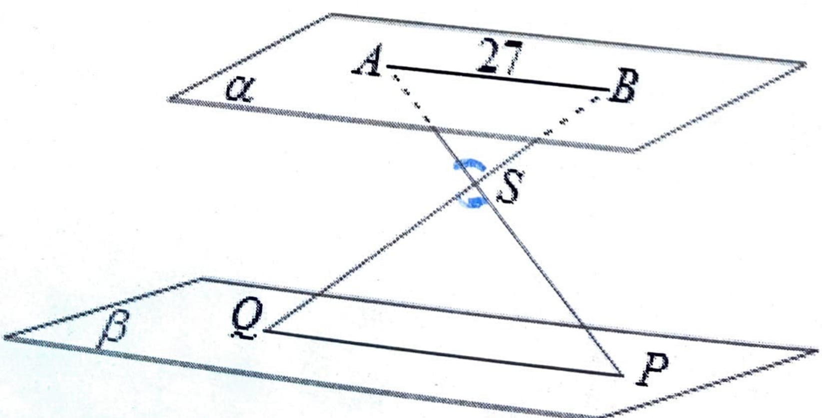
a) Verificați dacă $AB \parallel (EPQ)$.

b) Demonstrați că $(PEF) \parallel (NDC)$ și $(MQF) \parallel (NAD)$.

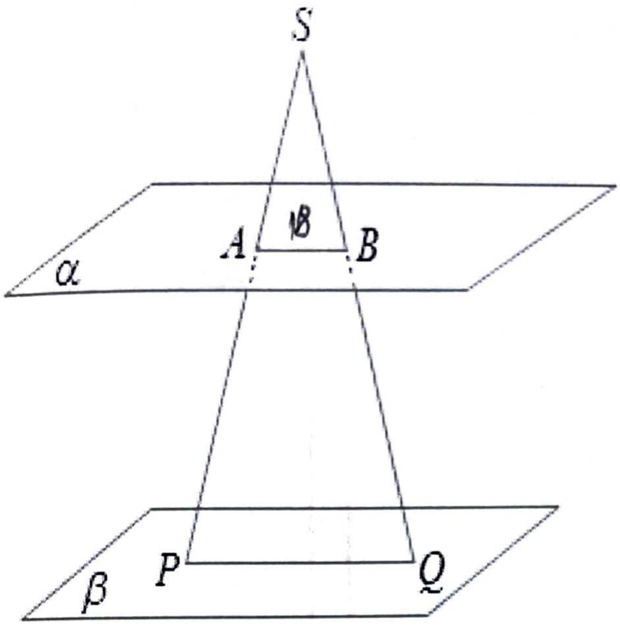
c) Dacă I este mijlocul segmentului (CN), demonstrați că $(IEF) \parallel (ABM)$.



9. Planele α și β sunt paralele, $A, B \in \alpha$, $AB = 27\,cm$, iar S este un punct situat între cele două plane, $SA \cap \beta = \{P\}$, $SB \cap \beta = \{Q\}$, $\frac{SA}{SP} = \frac{3}{5}$. Determinați lungimea segmentului (PQ).



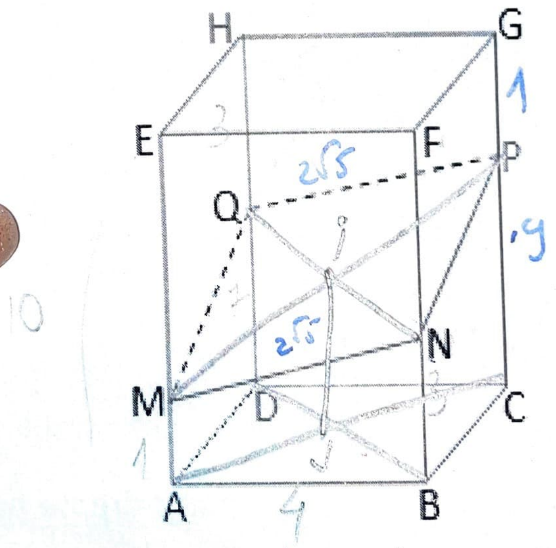
10. Planele α și β sunt paralele, $A, B \in \alpha$, $AB = 18\,cm$, iar S este un punct exterior celor două plane $SA \cap \beta = \{P\}$, $SB \cap \beta = \{Q\}$, $\frac{SA}{SP} = \frac{3}{7}$. Determinați lungimea segmentului (PQ).



11. Se consideră prisma patrulateră regulată ABCDEFGH, cu $AB = 4\,cm$ și $AE = 10\,cm$. Un plan α intersectează muchiile laterale ale prismei în punctele M, N, P, Q, astfel încât $AM = 1\,cm$, $BN = 3\,cm$, $DQ = 7\,cm$.

a) Determinați lungimea segmentului (PC).

b) Calculați perimetrul patrulaterului MNPQ.



12. În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle BAC) = 90°$, D $\notin$ (ABC) iar M, N, P sunt mijloacele segmentelor (DA), (DB) respectiv (DC).

a) Care este poziţia relativă a planelor (MNP) şi (ABC)?

b) Dacă AB = 10 cm şi AC = 24 cm, calculaţi aria triunghiului (MNP).

9. Secţiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate. Trunchiul de piramidă

- Figura geometrică obţinută prin intersecţia unui corp geometric cu un plan se numeşte <u>secţiune.</u>
- Secţiunea obţinută prin intersectarea unei prisme cu un plan paralel cu planul bazei este un poligon congruent cu baza.
- Secţiunea obţinută prin intersectarea unei piramide cu un plan paralel cu baza este un poligon asemenea cu cel de la baza piramidei.
  Trunchiul de piramida este corpul geometric obţinut prin secţionarea unei piramide cu un plan paralel cu baza şi înlăturarea piramidei mici obţinute.
- Se numeşte înălţime a trunchiului de piramidă segmentul determinat de planele bazelor trunchiului pe o dreaptă perpendiculară pe acestea.
- Apotema unui trunchi de piramidă regulată este înălţimea unei feţe laterale.

<u>**Exersare şi consolidare**</u>

1. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de 4cm şi punctele $M \in (AA')$, $N \in (BB')$, $P \in (CC')$, $Q \in (DD')$ astfel încât $AM = BN = CP = DQ = 1cm$. Planul (MNPQ) împarte cubul în două paralelipipede dreptunghice. Aflaţi diagonalele celor două paralelipipede.

2. Desenaţi trunchiul de piramidă $ABCDA'B'C'D'$, apoi reprezentaţi pe desen înălţimea trunchiului.

3. Se dă prisma triunghiulară regulată cu latura bazei de 16 cm şi piramida triunghiulară regulată VMNP cu latura bazei de 24 cm. Ambele corpuri sunt secţionate cu câte un plan paralel cu planul bazei, dus prin mijlocul unei muchii laterale. Realizaţi desenele corespunzătoare şi calculaţi perimetrele şi ariile celor două secţiuni obţinute.

...unghiulară regulată SABC are latura bazei de 12 cm și ...imea de 18 cm. Planul α, paralel cu planul bazei determină în piramidă secţiunea triunghiulară MNP cu aria de $4\sqrt{3}$ cm^2. Aflaţi înălţimea piramidei SMNP şi înălţimea trunchiului de piramidă ABCMNP.

5. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari de 10 cm, diagonala bazei mici $6\sqrt{2}$ şi înălţimea de 8 cm. Calculaţi:

a) înălţimea piramidei din care a provenit trunchiul;

b) apotema trunchiului şi apotema piramidei din care face parte trunchiul.

Aprofundare

6. Fie VABCDEF o piramidă hexagonală regulată cu raza cercului circumscris bazei de 6 cm şi apotema piramidei de 9 cm.

a) Calculaţi înălţimea piramidei;

b) Calculaţi distanţa de la centrul O al bazei la o faţă laterală.

c) Dacă se secţionează piramida cu un plan paralel cu planul bazei, dus la o distanţă de $\frac{1}{3}$ din înălţime faţă de vârf, aflaţi raportul ariilor trunchiului de piramidă format precum şi înălţimea trunchiului.

7. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mari $L = 4\sqrt{3}$ m, latura bazei mici $l = 2\sqrt{3}$ m şi înălţimea $h = 3$m. Calculaţi:

a) lungimea apotemei trunchiului şi a muchiei laterale;

b) înălţimea piramidei din care a provenit trunchiul.

8. O prismă triunghiulară regulată are toate feţele laterale pătrate. Un plan paralel cu planul bazei secţionează prisma, trece prin mijlocul segmentului [C′B] şi distanţa dintre planele bazelor este de 6 cm. Aflaţi distanţa de la A la planul (BCC′).

9. Secţiunea diagonală a trunchiului de piramidă patrulateră regulată ABCDA′B′C′D′ este un trapez isoscel ortodiagonal cu bazele $18\sqrt{2}$cm şi $12\sqrt{2}$cm. Aflaţi: