II. RAPOARTE. PROPORȚII. PROCENTE

1. RAPORTUL

1. La un meci de fotbal, echipa *A* învinge echipa *B* cu scorul de 3 la 2. Vom spune că *raportul dintre golurile marcate de echipa A şi golurile marcate de echipa B este* $\frac{3}{2}$.

2. Într-o zi, un elev învaţă acasă timp de 3 ore, apoi se joacă cu fratele lui timp de 1 oră. Vom spune că *raportul dintre timpul de joacă şi timpul în care învaţă este* $\frac{1}{3}$.

3. Alina a făcut o excursie în două zile. În prima zi a parcurs 5,2 km, iar a doua zi 4,3 km. *Vom spune că raportul dintre lungimea drumului parcurs în prima zi şi lungimea drumului parcurs a doua zi este* $\frac{5,2}{4,3}$.

Studiind exemplele date; putem face următoarele observaţii:

1. raportul a două mărimi este numărul $\frac{a}{b}$ unde a şi b sunt numere raţionale ($b \neq 0$).

2. cele două mărimi sunt măsurate cu aceeaşi unitate de măsură.

Definiţie: Fiind date două mărimi, una de măsură *a* şi a doua de măsură *b*, exprimate în aceeaşi unitate de măsură, prin raportul dintre prima mărime şi a doua vom înţelege numărul $\frac{a}{b}$.

Prin raportul numerelor *m* şi *n* vom înţelege numărul $\frac{m}{n}$ ($n \neq 0$).

În contextul definiţiei, *a* şi *b* se numesc *termenii raportului.*

Observaţie: În cazul a două mărimi de tip diferit, putem vorbi de raportul lor, dar acesta nu va mai fi un număr, ci o altă mărime (de exemplu, raportul dintre masa unui corp şi volumul său este o nouă mărime, numită densitate).

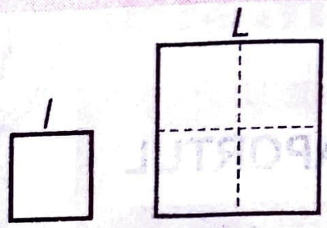


Fig. 2.1

Exemplu: Considerăm un pătrat de latură $l = 7{,}5$ mm şi altul de latură $L = 0{,}15$ dm. Să calculăm raportul dintre aria primului pătrat şi aria celui de-al doilea.

Pentru aceasta, calculăm cele două arii, exprimând mai întâi lungimile laturilor în aceeaşi unitate de măsură: $l = 7{,}5$ mm, $L = 0{,}15$ dm $= 15$ mm. Aria primului pătrat este de $56{,}25\ mm^2$, iar aria celui de-al doilea este de $225\ mm^2$.

Raportul căutat va fi $\frac{56{,}25}{225} = \frac{1}{4}$. Să observăm, privind figura, că aria primului pătrat este un sfert din aria celui de-al doilea.

Probleme rezolvate

1. Un litru de băutură răcoritoare conţine un sfert sirop şi restul apă. Să se afle raportul dintre cantitatea de sirop şi cantitatea de apă folosite la prepararea băuturii.

R: Cantitatea de sirop este de $\frac{1}{4}$ litri şi cantitatea de apă este de $\frac{3}{4}$ litri. Raportul cerut este: $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$.

2. Dintr-un bloc de piatră cântărind 20,5 kg un sculptor sculptează o statuie. Ştiind că statuia cântăreşte 18,25 kg, aflaţi raportul dintre masa statuii şi masa blocului de piatră din care a fost sculptată.

R: Scriem cele două cantităţi sub formă de fracţii:

$20{,}5 = \frac{205}{10} = \frac{41}{2}$ şi $18{,}25 = \frac{1825}{100} = \frac{73}{4}$.

Raportul căutat va fi: $\dfrac{\frac{73}{4}}{\frac{41}{2}} = \frac{73}{4} \cdot \frac{2}{41} = \frac{73}{82}$.

Aplicaţie

Probabilitatea realizării unui eveniment

Considerând o experienţă care poate avea mai multe rezultate, prin *eveniment* vom înţelege una din situaţiile ce pot apărea. Vom numi *eveniment sigur* o situaţie despre care ştim sigur că se realizează. Prin *eveniment imposibil* vom înţelege o situaţie despre care ştim sigur că nu poate avea loc.

Considerăm următorul exemplu: la aruncarea unui zar se pot obţine şase rezultate, adică există şase cazuri posibile: obţinerea feţei cu un punct, obţinerea feţei cu 2 puncte etc. (toate aceste evenimente au şanse egale de apariţie).

Dintre toate cele şase cazuri, numai în trei cazuri se poate obţine un număr par de puncte (2,4 sau 6 puncte). Să considerăm acest eveniment, adică apariţia unui număr par. Evenimentul se realizează în 3 din cele 6 cazuri. Raportul $\frac{3}{6}$ va reprezenta *probabilitatea* ca evenimentul considerat să se realizeze.

Cazurile (în număr de 3) în care evenimentul se realizează le vom numi *cazuri favorabile*.

Definiţie: Vom numi probabilitatea unui eveniment raportul dintre numărul cazurilor favorabile evenimentului şi numărul cazurilor posibile ale experienţei.

Notaţie: Dacă notăm un eveniment cu A, probabilitatea realizării evenimentului A se notează $P(A)$.

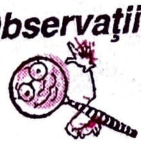
Avem: $$P(A) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile evenimentului } A}{\text{numărul cazurilor egal-posibile ale experienţei}}$$

Exemplu: O fetiţă a primit 5 bomboane, 2 cu alune şi 3 cu gem. Care este probabilitatea ca mâncând o bomboană, aceasta să fie cu alune?

R: Să notăm cu A evenimentul: „prima bomboană aleasă este cu alune". Numărul cazurilor favorabile evenimentului A este 2 (deoarece sunt două bomboane cu alune). Numărul cazurilor posibile este 5 (fetiţa poate alege oricare din cele 5 bomboane).

Deci $P(A) = \frac{2}{5}$.

Observaţii: 1. Dacă A este un eveniment, atunci $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. $P(A) = 0$ dacă şi numai dacă evenimentul A este imposibil.
3. $P(A) = 1$ dacă şi numai dacă evenimentul A este sigur.



Exerciţii şi probleme

1 Măsuraţi lungimea şi lăţimea manualului de matematică şi apoi calculaţi raportul dintre: a) lungime şi lăţime; b) lăţime şi lungime. Ce observaţi?

2 Un scriitor a scris într-o zi 12 pagini dintr-o carte, iar a doua zi 18. a) Să se afle raportul dintre numărul de pagini scrise în prima zi şi numărul de pagini scrise în cea de-a doua; b) Ştiind că toată cartea are 180 de pagini, aflaţi raportul dintre numărul de pagini scrise în cele două zile şi numărul de pagini ale cărţii.

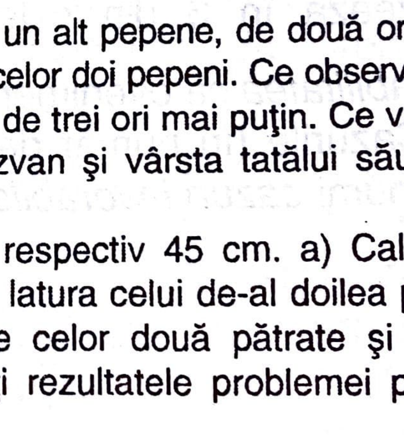
3 Un pepene cântăreşte 7 kg. Cât va cântări un alt pepene, de două ori mai greu decât primul? Calculaţi raportul dintre masele celor doi pepeni. Ce observaţi?

4 Tatăl lui Răzvan are 36 de ani, iar Răzvan de trei ori mai puţin. Ce vârstă are Răzvan? Aflaţi raportul dintre vârsta lui Răzvan şi vârsta tatălui său. Ce observaţi?

5 Două pătrate au laturile de 150 mm şi respectiv 45 cm. a) Calculaţi raportul laturilor lor; b) De câte ori este mai mare latura celui de-al doilea pătrat faţă de latura primului? c) Calculaţi perimetrele celor două pătrate şi aflaţi raportul acestora. Ce constataţi? d) Generalizaţi rezultatele problemei pentru două pătrate de laturi $l_1 = a$ cm şi $l_2 = ka$ cm.

6 Pentru a învăţa un rol dintr-o piesă, un actor are nevoie de două săptămâni. Pentru a învăţa acelaşi rol, alt actor are nevoie de 18 zile. Calculaţi raportul dintre timpul necesar primului actor şi timpul necesar celui de-al doilea pentru a învăţa rolul.

7 În figura alăturată s-a reprezentat împărţirea unei clase de 24 de elevi în fete şi băieţi. Ştiind că porţiunea haşurată reprezintă numărul fetelor şi că aceasta este de două ori mai mică decât porţiunea nehaşurată, aflaţi: a) câte fete sunt în clasă? Dar băieţi? b) raportul dintre numărul fetelor şi numărul total de elevi; c) raportul dintre numărul fetelor şi numărul băieţilor.



8 Un elev citeşte o povestire în două zile. În prima zi citeşte $\frac{2}{5}$ din povestire, iar în a doua restul. Aflaţi raportul dintre numărul de pagini citite în prima zi şi numărul de pagini citite în cea de-a doua zi, ştiind că povestirea are: a) 20 de pagini; b) 35 de pagini; c) 24 de pagini. Ce observaţi ?

9 Un excursionist parcurge un traseu în trei etape. În prima etapă parcurge $\frac{1}{4}$ din traseu, în a doua etapă un sfert din cât i-a mai rămas, iar în a treia restul. Calculaţi: a) raportul dintre lungimea drumului parcurs în prima etapă şi lungimea drumului parcurs în etapa a doua; b) raportul dintre lungimea drumului parcurs în a treia etapă şi lungimea drumului parcurs în prima etapă. Reprezentaţi grafic drumul parcurs şi împărţirea lui în etape, alegând ca reprezentare a traseului un segment de lungime 10 cm.

10 Aflaţi raportul dintre: a) 12,25 m şi 0,4 m; b) 40 cm şi 16,4 m; c) $2\frac{1}{3}$kg şi $1\frac{3}{4}$hg; d) 5 dm^2 şi 12,5 cm^2; e) 0,1 l şi 0,01 dl.

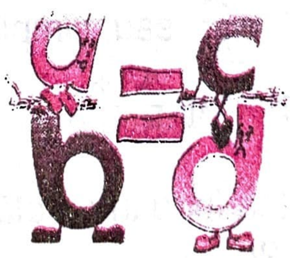
11 a) Care este probabilitatea ca, la aruncarea unui zar, numărul de puncte obţinut să fie cel puţin 3? b) Care este probabilitatea ca numărul de puncte obţinut să fie cel mult 2? c) Calculaţi suma celor două probabilităţi. Ce observaţi?

12 Radu are notat numărul de telefon al prietenului său, dar ultima cifră s-a şters. Care este probabilitatea ca, formând la întâmplare ultima cifră, să nimerească de prima dată numărul căutat ?

13 Primii patru termeni ai unui şir de rapoarte sunt: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

Stabiliţi regula de formare a şirului. Care va fi al zecelea termen ? Dar al 99-lea ?

2. PROPORŢIA



Să ne reamintim că fracţiile obţinute dintr-o fracţie dată prin amplificare sau simplificare se numesc fracţii echivalente. De exemplu, următoarele perechi de fracţii reprezintă câte două fracţii echivalente: $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}=\frac{9}{15}$;

O egalitate de acest tip se numeşte *proporţie*. Cum fiecare fracţie poate fi considerată un raport, avem:

Definiţie: O pereche de rapoarte egale se numeşte proporţie.

În general, o proporţie are forma: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $(b,d\neq 0)$.

Termenii celor două rapoarte ce formează proporţia se numesc *termenii proporţiei*. Se observă imediat că orice proporţie are patru termeni. Aceştia vor purta denumiri specifice în funcţie de poziţia lor în egalitate:

- *a* şi *d* se numesc *extremi*
- *b* şi *c* se numesc *mezi*

În clasa a V-a am arătat că dacă $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ atunci $ad = bc$. În cazul proporţiei această proprietate se păstrează şi ea poartă numele de *proprietatea fundamentală a proporţiei*:

În orice proporţie produsul extremilor este egal cu produsul mezilor.

Exerciţii rezolvate

1. Să se afle x astfel încât $\frac{4x}{3}=\frac{8}{5}$.

R: Aplicăm proprietatea fundamentală pentru proporţia dată: $20x=24$, de unde $x=\frac{24}{20}$ sau, simplificând prin 4, $x=\frac{6}{5}$.

2. Ştiind că $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$, calculaţi $\frac{4a+3b}{5a+2b}$.

R: Aplicăm proprietatea fundamentală pentru proporţia dată: $3a=2b$, de unde $a=\frac{2b}{3}$.

Avem succesiv: $\frac{4a+3b}{5a+2b}=\frac{4\cdot\frac{2b}{3}+3b}{5\cdot\frac{2b}{3}+2b}=\frac{\frac{8b}{3}+3b}{\frac{10b}{3}+2b}=\frac{\frac{8b+9b}{3}}{\frac{10b+6b}{3}}=$

$=\frac{\frac{17b}{3}}{\frac{16b}{3}}=\frac{17b}{3}\cdot\frac{3}{16b}=\frac{17}{16}$.

Exerciţii şi probleme

1. Stabiliți dacă se poate forma o proporție cu numerele 2, 3, 6 și 9. Dar cu 1, 2, 3, 4?

2. Dacă $\frac{2}{a}=\frac{b}{6}$, calculaţi valoarea produsului ab.

3. Scrieţi toate proporţiile ce se pot forma cu numerele din tabloul alăturat şi verificaţi pentru fiecare proprietatea fundamentală.

6	5	10
12	10	20

4. Ştiind că $0,4\,x=0,25\,y\ (x,\ y\neq 0)$, calculaţi valoarea raportului $\frac{x}{y}$.

5. Aflaţi raportul $\frac{a}{b}$, ştiind că: a) $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}$; b) $\frac{7}{a}=\frac{1}{b}$; c) $\frac{4}{b}=\frac{2}{a}$; d) $\frac{b}{8}=\frac{a}{9}$.

6. Dacă $\frac{b}{a}$ din numărul a este egal cu $\frac{a}{b}$ din numărul $b\ (a,\ b\neq 0)$, calculaţi $\frac{a}{b}$.

7. Considerăm proporţia $\frac{2}{5}=\frac{18}{45}$. a) Dacă amplificaţi primul raport cu 2, se mai obţine o proporţie? Verificaţi acest lucru şi în cazul general $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. b) Dacă simplificaţi al doilea raport cu 3, se mai obţine o proporţie? Verificaţi în cazul general.

8. Considerăm proporţia $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$. Raportului $\frac{3}{4}$ îi asociem un alt raport obţinut prin adunarea numitorului 4 la numărătorul 3, numitorul 4 rămânând neschimbat. Obţinem raportul $\frac{3+4}{4}$, adică $\frac{7}{4}$. Procedând analog pentru $\frac{6}{8}$, obţinem raportul $\frac{6+8}{8}$, adică $\frac{14}{8}$. Cele două rapoarte obţinute $\left(\frac{7}{4}\text{ şi }\frac{14}{8}\right)$ formează o proporţie?

Încercaţi să faceţi acelaşi lucru adunând, în fiecare raport, numărătorul la numitor.

9. Să se afle x astfel încât: a) $\frac{x}{6}=\frac{2}{3}$; b) $\frac{12}{x}=\frac{4}{5}$; c) $\frac{10}{5}=\frac{x}{12}$; d) $\frac{6}{7}=\frac{12}{x}$; e) $\frac{x}{5}=\frac{1}{1}$;

f) $\frac{x}{4}=2\frac{1}{2}$; g) $\frac{1}{x}=0,2$; h) $\frac{x}{0,6}=1$; i) $\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{x}=\frac{1}{6}$; j) $\frac{x}{4\frac{1}{2}-1\frac{3}{4}}=5\frac{1}{2}$; k) $\frac{2x}{3}=\frac{6}{12}$;

l) $\frac{5}{6x}=1\frac{1}{24}$; m) $\frac{x+2}{3}=\frac{4}{5}$; n) $\frac{2+\frac{1}{3}}{7-\frac{2}{3}}=\frac{1}{x}$; o) $\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x+2}$; p) $\frac{x-3}{2}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}}$.

10. Aflaţi numerele m şi n ştiind că $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$ şi $\frac{m}{n+2}=\frac{1}{3}$.

11. Raportul dintre timpul necesar unul elev pentru a memora o poezie şi timpul necesar altui elev pentru a o memora este $\frac{3}{4}$. Ştiind că al doilea o memorează în 12 minute, aflaţi în cât timp o memorează primul.

12. Raportul maselor a două piese este de $\frac{2}{3}$. Ştiind că piesa mai grea cântăreşte 36 kg, aflaţi cât cântăreşte celalată piesă.

13. Raportul dintre numărul de cărţi cumpărate dintr-o librărie într-o zi şi numărul de cărţi cumpărate a doua zi este $\frac{5}{7}$. Ştiind că în prima zi au fost cumpărate 150 de cărţi, aflaţi câte cărţi s-au cumpărat a doua zi.

14. Din oraşul A se poate ajunge în oraşul C fie pe un drum direct, fie ocolind prin oraşul B (fig. 2.2.). Distanţele dintre oraşele A şi C, A şi B, B şi C sunt respectiv de 120 km, 50 km şi 80 km. Două automobile pleacă în acelaşi moment din A spre C, unul pe drumul direct, iar al doilea ocolind prin B, deplasându-se fiecare cu viteză constantă. Ştiind că viteza primului automobil este de 60 km/ h şi cele două automobile ajung simultan în C, aflaţi viteza celui de-al doilea.

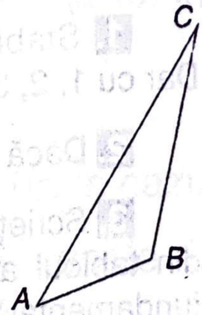


Fig. 2.2

15. a) Ştiind că $\frac{x}{y}=\frac{7}{2}$, calculaţi $\frac{3x+5y}{2x+y}$, $(y \neq 0)$;

b) Ştiind că $\frac{\frac{3y}{2}}{\frac{5x}{7}}=\frac{1}{2}$, calculaţi $\frac{x}{y}$ şi $\frac{x+y}{3x+4y}$ $(x, y \neq 0)$;

c) Aflaţi $\frac{y}{x}$ ştiind că $\frac{2x+3y}{3x+13y}=\frac{1}{4}$ $(x \neq 0)$;

d) Dacă $\frac{x}{y}=\frac{1}{a}$, arătaţi că valoarea raportului $\frac{ax+y}{2ax-y}$ nu depinde de a $(a, y \neq 0)$.

3. PROCENT. RAPORT PROCENTUAL

Aşa cum ştiţi, 1 m = 100 cm. Cu alte cuvinte, 1 centimetru reprezintă $\frac{1}{100}$ dintr-un metru. În general, p centimetri reprezintă $\frac{p}{100}$ dintr-un metru.

Practica a consacrat exprimarea unor mărimi cu ajutorul rapoartelor cu numitorul 100 (spre exemplu, dobânda acordată de bănci, numărul de voturi care exprimă o anume opţiune, câştigul într-o afacere etc.).

Prin convenţie, raportul $\frac{1}{100}$ se notează 1% (citim „unu la sută") şi poartă numele de *procent*.

În general, raportul $\frac{p}{100}$ se notează p % (citim: „p la sută") şi poartă numele de *raport procentual.*

Deci: $\mathbf{p\%} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{100}}$.

Exemple: 1. O persoană depune o sumă de bani la o bancă, pentru care primeşte o dobândă de 80% pe o anumită perioadă de timp. Aceasta înseamnă că, la sfârşitul perioadei, pentru fiecare 100 de lei depusă, persoana primeşte din partea băncii 80 de lei. Astfel, dacă suma depusă este de 100 000 de lei, dobânda primită de la bancă este de 80% din această sumă, adică $\frac{80}{100} \cdot 100000$, deci 80 000 lei.

2. O soluţie de apă sărată are concentraţia de 6%. Acest lucru înseamnă că la 100 g de apă vom avea 6 g de sare. De exemplu, la 275 g de apă vom avea 6% din această cantitate sare, adică $\frac{6}{100} \cdot 275$ g sare, ceea ce înseamnă 16,5 g sare.

Probleme rezolvate

1. La un chestionar au răspuns 1 500 de persoane. Ştiind că 20% dintre ele au răspuns „da", aflaţi: a) Câte persoane au răspuns „da" ? b) Câte pesoane au răspuns „nu" ?

R: a) Ştim că numărul persoanelor care au răspuns „da" reprezintă 20 % din numărul total (1 500) de persoane, adică $\frac{20}{100} \cdot 1500 = 300$. Deci 300 de persoane au răspuns „ da".

b) Restul de persoane au răspuns „nu", adică 1 500 – 300 = 1 200.

2. Într-o clasă sunt 15 fete, care reprezintă 75 % din numărul de elevi ai clasei. Aflaţi câţi elevi sunt în clasă.

R: Să notăm cu n numărul de elevi ai clasei. Ştim, din datele problemei, că 15 reprezintă 75% din n. Avem: $\frac{75}{100} n = 15$, adică $n = \frac{15}{\frac{75}{100}} = 15 \cdot \frac{100}{75} = 20$. Deci clasa este formată din 20 de elevi.

3. O cantitate de 200 ml de apă se fierbe un interval de timp. O parte din apă se evaporă, rămânând după fierbere 180 ml. Cât la sută din apă s-a pierdut prin evaporare?

R: Problema cere aflarea raportului procentual $p\%$ din cantitatea iniţială de apă, reprezentând cantitatea pierdută prin evaporare, adică 20 ml (200 −180). Avem: $20 = \frac{p}{100} \cdot 200$, de unde se obţine $p = 10$, adică $p\% = 10\%$.

Deci prin evaporare se pierde 10% din apă.

Aplicaţii

1. Reprezentarea datelor prin grafice

La un sondaj de opinie, s-au obţinut următoarele rezultate: 50% din cei intervievaţi au răspuns „da", 30 % au răspuns „nu" şi 20% au răspuns „nu ştiu".

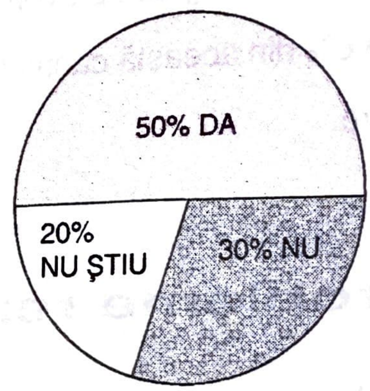


Fig. 2.3

Acest lucru poate fi pus în evidenţă cu ajutorul unui grafic ca în figura 2.3. Un astfel de grafic se numeşte *grafic circular*.

Rezultatele aceluiaşi sondaj pot fi puse în evidenţă şi sub forma următoare:

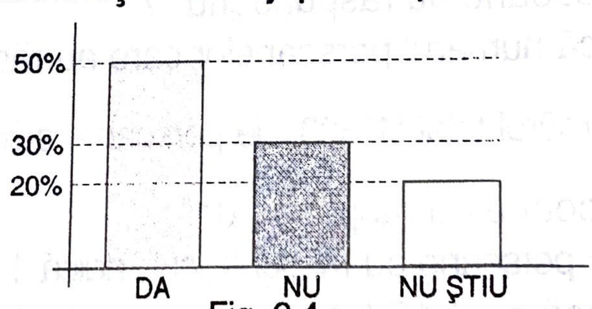


Fig. 2.4

Un grafic cum e cel din figura 2.4. se numeşte *grafic cu bare*.

2. Probabilitatea realizării unui eveniment

Aşa cum am văzut, probabilitatea realizării unui eveniment este un raport de forma $\frac{n}{N}$ unde n este numărul cazurilor favorabile şi N numărul cazurilor egal-posibile ale experienţei.

Acest raport poate fi transformat în raport procentual reprezentând, sub această formă, şansele ca evenimentul să se realizeze.

Exemplu: Un săculeţ conţine 50 de bile, 15 albe şi 35 negre. a) Să se afle probabilitatea ca, extrăgând la întâmplare o bilă, aceasta să fie albă. b) Să se afle probabilitatea ca, extrăgând la întâmplare o bilă, aceasta să fie neagră. c) Să se scrie probabilităţile aflate sub formă de raport procentual şi să se reprezinte printr-un grafic cu bare.

R: a) Fie A evenimentul: „bila extrasă este albă". Avem $P(A)=\frac{15}{50}$.

b) Fie B evenimentul: „bila extrasă este neagră". Atunci $P(B)=\frac{35}{50}$.

c) $P(A)=\frac{15}{50}=\frac{30}{100}$ şi $P(B)=\frac{35}{50}=\frac{70}{100}$.

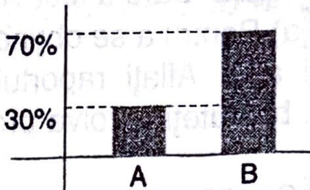
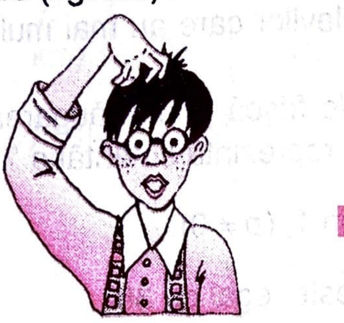


Fig. 2.5

Evenimentul A are 30% şanse de realizare, iar evenimentul B are 70 % şanse de realizare (fig. 2.5).



Exerciţii şi probleme

1. Transformaţi următoarele rapoarte în rapoarte procentuale:

a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{4}{5}$; c) $\frac{11}{10}$; d) $\frac{4}{0{,}1}$; e) $\frac{1}{2\frac{2}{3}}$; f) $\frac{4\frac{1}{2}}{0{,}(3)}$.

2. Exprimaţi ca fracţie ordinară ireductibilă: a) 12%; b) 27%; c) 1,2%; d) $3\frac{1}{3}$%; e) 3,2(4)%; f) 0,0(5)%.

3. Calculaţi : a) 25% din 100 m; b) 30% din 12,05 km; c) 40% din 60 m^2; d) 32% din $3\frac{1}{3}$kg; e) 0,1% din 10 l.

4. Într-o clasă de 20 de elevi, 15% sunt premianţi. Câţi elevi premianţi sunt în clasă?

5. Untul conţine 65% grăsime. Ce cantitate de grăsime conţine un pachet de unt de 250 g ?

6. O grădină zoologică este vizitată într-o zi de 2 000 de persoane. Dintre acestea, 35 % sunt adulţi, iar restul copii. Câţi copii vizitează grădina zoologică în acea zi ?

7. Un excursionist are de parcurs un drum de 40 km în trei zile. Ştiind că în prima zi a parcurs 40 % din drum şi a doua zi 25 % din restul drumului, aflaţi câţi kilometri mai are de parcurs a treia zi.

8. Florile de tei pierd prin uscare 48% din greutatea lor. Ce cantitate de flori de tei uscate se obţine din 2 kg de flori de tei proaspăt culese?

9. Numărul cărţilor împrumutate de la o bibliotecă este de 276 de cărţi, ceea ce reprezintă 6% din numărul total de cărţi din bibliotecă. Câte cărţi deţine biblioteca?

10. Emisiunile pentru copii reprezintă 15% din programele unui post de televiziune care emite 24 h pe zi. Cât timp este afectat zilnic emisiunilor pentru copii?

11. Un elev a rezolvat corect 12 probleme, ceea ce reprezintă 80% din numărul total de probleme pe care le avea de rezolvat. Câte probleme a greşit elevul? Puteţi rezolva şi altfel problema?

12. Un automobil şi-a mărit viteza cu 15 km/ h, reprezentând 20% din viteza sa iniţială. Care a fost viteza iniţială a maşinii?

13. a) Pentru a se obţine 10 litri de citronadă s-au pus 2 părţi suc de lămâie şi 6 părţi apă. Aflaţi raportul procentual dintre cantitatea de apă şi cea de citronadă. b) Puteţi rezolva problema fără să cunoaşteţi cantitatea de citronadă? Cum?

14. Din 800 de elevi ai unei şcoli, 120 au vârsta mai mică de 9 ani. Cât la sută din numărul total de elevi reprezintă numărul elevilor care au mai mult de 9 ani ?

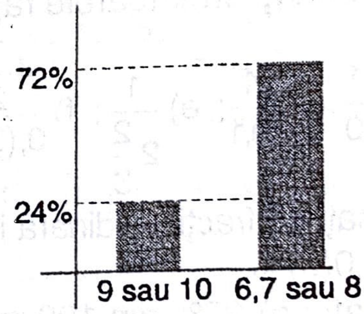
15. Din 400 g de smântână se obţin 500 g de frişcă prin adăugarea unei cantităţi de zahăr. Cât la sută din cantitatea de frişcă reprezintă smântâna ?

16. Arătaţi că p % din $\frac{a}{p}$ este egal cu a % din 1, ($p \neq 0$).

17. Aflaţi valoarea lui x ştiind că 3 % din $50x$ este egal cu 36.

18. Aflaţi valorile lui m şi n ştiind că m % din n este egal cu 3 şi că raportul dintre m şi n este $\frac{1}{3}(m, n \in \mathbb{N}^*)$.

19. Aflaţi, privind graficul alăturat, câţi elevi dintr-o clasă au obţinut la teză note de: a) 9 sau 10; b) 6, 7 sau 8; c) sub 6, ştiind că în clasă sunt 25 de elevi.



20. Aflaţi: a) cât la sută din suprafaţa cercului din figura 2.6. este colorată cu roşu? b) cât la sută din suprafaţă este haşurată cu negru?

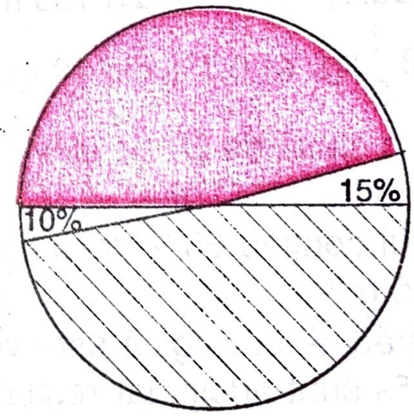


Fig. 2.6

21. O carte având 140 de pagini este deschisă la întâmplare.

a) Aflaţi probabilitatea realizării următoarelor evenimente:

A: „numărul paginii din stânga este multiplu de 4".

B: „numărul paginii din dreapta este multiplu de 5".

C: „numărul paginii din stânga este multiplu de 10".

b) Scrieţi $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ sub formă de rapoarte procentuale şi reprezentaţi-le într-un grafic cu bare. Care din cele trei evenimente are şanse mai mari de realizare ?

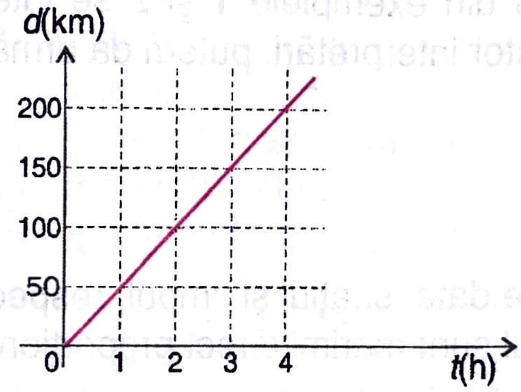
4. MĂRIMI DIRECT PROPORȚIONALE

1. Un automobil având o viteză de 50 km/h va parcurge după un timp t o distanţă $d = 50\ t$ km. Deci într-o oră parcurge 50 km, în două ore 100 km, în trei ore 150 km, iar în patru ore 200 km. Aceste rezultate pot fi aşezate:

a) într-un tabel de forma:

t (ore)	1	2	3	4
d (km)	50	100	150	200

b) într-un grafic:



Analizând rezultatele obţinute, constatăm că:

–dacă timpul creşte, distanţa, de asemenea, creşte.

–dacă timpul creşte de un număr de ori (de exemplu, se dublează), atunci distanţa creşte de acelaşi număr de ori (se dublează).

–graficul „urcă" de la stânga spre dreapta.

–rezultatele tabelului pot fi exprimate ca rapoarte egale:

$$\frac{1}{50} = \frac{2}{100} = \frac{3}{150} = \frac{4}{200}.$$

Dacă notăm cu k valoarea comună a acestor rapoarte,obţinem

$\frac{1}{50} = \frac{2}{100} = \frac{3}{150} = \frac{4}{200} = k.$ Acest k se numeşte *raport de proporţionalitate.*

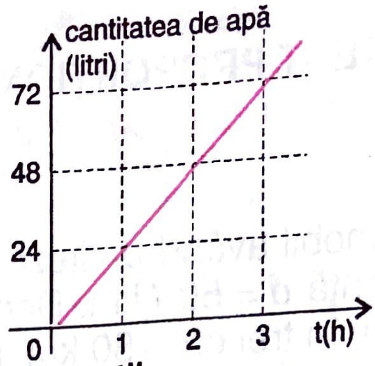
De obicei, valoarea lui k se alege ca fiind forma ireductibilă a rapoartelor egale.

2. Un bazin se umple cu ajutorul unui robinet care are un debit de 24 de litri pe oră. Cantitatea de apă din bazin după un timp t poate fi exprimată:

a) cu ajutorul unui tabel:

t (ore)	1	2	3
cantitatea de apă (litri)	24	48	72

b) cu ajutorul unui grafic:



Putem face următoarele observaţii:

–când timpul creşte de un număr de ori, cantitatea de apă creşte de acelaşi număr de ori;

–graficul „urcă" de la stânga spre dreapta;

–rezultatele din tabel formează rapoarte egale: $\frac{1}{24}=\frac{2}{48}=\frac{3}{72}=k.$

Rezultatele din exemplele **1** şi **2** se interpretează în acelaşi fel. Pe baza acestor interpretări, putem da următoarea definiţie:

Definiţie: Două mărimi se numesc direct proporţionale atunci când dacă una din ele creşte (scade) de un număr de ori, atunci şi cealaltă creşte (scade) de acelaşi număr de ori.

În exemplele date, spaţiul şi timpul, respectiv cantitatea de apă din bazin şi timpul sunt mărimi direct proporţionale.

Observaţie: În definiţia dată, este foarte important faptul că cele două mărimi cresc (sau scad) simultan de acelaşi număr de ori. Dacă această condiţie nu este îndeplinită, mărimile nu sunt direct proporţionale.

Faptul că numerele x, y, z sunt direct proporţionale cu a, b, c îl exprimăm prin şirul de rapoarte egale $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

Exerciţiu rezolvat

Să se împartă numărul 176 în părţi direct proporţionale cu numerele 5, 6 şi 11.

R: Cerinţa problemei înseamnă să găsim trei numere x, y şi z direct proporţionale cu 5, 6 şi 11 şi a căror sumă să fie 176, adică $\frac{x}{5}=\frac{y}{6}=\frac{z}{11}$ şi $x+y+z=176$.

Fie k raportul de proporţionalitate: $\frac{x}{5}=\frac{y}{6}=\frac{z}{11}=k$. Avem: $\frac{x}{5}=k$, de unde $x=5k$. Analog, $y=6k$ şi $z=11k$. Cum $x+y+z=176$, obţinem $5k+6k+11k=176$, adică $22k=176$. Deci $k=176:22$, de unde $k=8$. Numerele căutate sunt: $x=5\cdot8=40$, $y=6\cdot8=48$, $z=11\cdot8=88$.

Regula de trei simplă

3. Să considerăm din nou tabelul din exemplul 1 care exprimă distanţa parcursă de un automobil având viteza de 50 km/ h după un timp t. Să ne reamintim că am obţinut rapoarte egale: $\frac{1}{50}=\frac{2}{100}=\frac{3}{150}=k$.

Să calculăm câţi kilometri va parcurge automobilul în 9 ore.

Notând cu x distanţa căutată vom avea: $\frac{9}{x}=k$, adică $\frac{9}{x}=\frac{1}{50}$, de unde $x=9\cdot 50$. Deci, după 9 ore va parcurge 450 km.

Să observăm că egalitatea $\frac{9}{x}=\frac{1}{50}$, poate fi scrisă $\frac{1}{9}=\frac{50}{x}$.

Acelaşi rezultat îl putem obţine în felul următor (*regula de trei simplă*): într-o oră automobilul parcurge 50 km. În 9 ore, va parcurge x km. Pe scurt, scriem: 1 h ... 50 km
9 h ... x km.

Construim proporţia: $\frac{1}{9}=\frac{50}{x}$, de unde $x=9\cdot 50=450$ (km).

4. Ştiind că un elev rezolvă 24 de probleme în 3 zile, să aflăm în câte zile va rezolva 80 de probleme, ştiind că rezolvă acelaşi număr de probleme pe zi.

Să observăm mai întâi că numărul de probleme rezolvate este direct proporţional cu numărul de zile în care elevul le rezolvă. Atunci avem:

24 probleme .... 3 zile
80 probleme .... x zile.

Construim proporţia $\frac{24}{80}=\frac{3}{x}$, în care $24x=80\cdot 3$, de unde $x=240:24=10$. Deci elevul va rezolva cele 80 de probleme în 10 zile.

Exerciţii şi probleme

1 a) Verificaţi că numerele 2, 5 şi 7 sunt direct proporţionale cu numerele 6, 15 şi 21. Care este raportul de proporţionalitate ?

b) Verificaţi că numerele $2\frac{2}{5}$, 4,2 şi 5,52 sunt direct proporţionale cu 2, $3\frac{1}{2}$ şi $4\frac{3}{5}$.

2. Să se afle trei numere direct proporţionale cu 2,5; 3 şi 7,5 ştiind că primul număr este 8.

3. a) Calculaţi valoarea lui a şi b astfel încât numerele a, 5 şi 8 să fie direct proporţionale cu 12, b şi 48.

b) Ce se întâmplă dacă din ipoteză eliminăm numerele 8 şi 48 ?

4. Împărţiţi numărul 600 în părţi direct proporţionale cu 7, 3 şi 2.

5. Găsiţi trei numere x, y, z direct proporţionale cu 2,5 şi 3, astfel încât $4x - y + 2z = 783$.

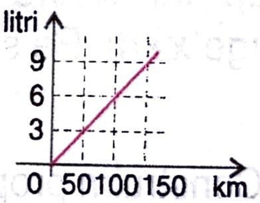
6. Aflaţi cifra $a \neq 0$ astfel încât numerele $\overline{1a}$ şi $\overline{a1}$ să fie direct proporţionale cu 4 şi 7.

7. Aflaţi cifrele a şi b nenule astfel încât numerele $\overline{aa}$ şi $\overline{bb}$ să fie direct proporţionale cu 3 şi 2. Câte soluţii are problema ?

8. Împărţiţi numărul 40 în părţi direct proporţionale cu 2, 5, 6 şi 7.

9. Arătaţi că dacă numerele m şi n sunt direct proporţionale cu 3 şi 4, atunci numerele $2m + 3n$ şi $6m + n$ sunt direct proporţionale cu 9 şi 11.

10. Arătaţi că dacă numerele $a + 2b$ şi $b + 2a$ sunt direct proporţionale cu 5 şi 6, atunci a şi b sunt direct proporţionale cu 7 şi 4.



11. Graficul alăturat arată consumul de benzină, exprimat în litri, al unei maşini care parcurge diverse distanţe.

a) Acest grafic prezintă o situaţie de proporţionalitate ? De ce ?

b) Construiţi un tabel care să indice consumul de benzină la 50 km, 100 km, 150 km, 200 km.

c) Construiţi un tabel care să indice distanţa parcursă cu 4,5 l, 18 l şi 31,5 l de benzină.

12. a) Construiţi un grafic care să reflecte datele din tabelul alăturat, reprezentând distanţa parcursă de un automobil, ce se deplasează cu viteză constantă, după diverse intervale de timp.

Distanţa parcursă (km)	Timpul (h)
60	1
120	2
180	3
240	4

b) Care este raportul de proporţionalitate dintre distanţă şi timp? Dar viteza de mişcare? Ce observaţi?

13. Doi fraţi îşi împart bomboanele dintr-o cutie direct proporţional cu vârstele lor. Ştiind că unul are 11 ani şi celălalt 13 ani şi că în cutie sunt 48 de bomboane, aflaţi câte bomboane va lua fiecare.

14. Din 4 kg de alune verzi se obţin 3,8 kg de alune prăjite.

a) Ce cantitate de alune prăjite se obţin din 14 kg de alune verzi? b) Ce cantitate de alune verzi e necesară pentru a se obţine 19 kg de alune prăjite?

15. Un biciclist mergând cu viteză constantă a parcurs în 5 ore distanţa de 75 km. În cât timp va parcurge 120 km deplasându-se cu aceeaşi viteză?

16. Din 20 kg de portocale se obţin 3 litri de suc. Câţi litri de suc se obţin din 36 kg de portocale?

17. Ghepardul parcurge, când aleargă, 17 m din două salturi. Ce distanţă va parcurge făcând 11 salturi?

18. a) Un elev are de rezolvat în vacanţă 63 de probleme. Ştiind că rezolvă un număr egal de probleme în fiecare zi şi că în primele două zile rezolvă $\frac{2}{9}$ din numărul total de probleme, aflaţi în câte zile va termina tema. b) Rezolvaţi problema fără să cunoaşteţi numărul total de probleme.

19. Mihai şi-a cumpărat trei cărţi. Câte caiete şi-ar fi putut cumpăra cu aceeaşi sumă de bani, ştiind că două cărţi costă cât opt caiete? Rezolvaţi problema prin două metode.

20. Într-un bazin se află10 litri de apă. Se adaugă apă de la un robinet cu debitul de 12 litri pe oră. Alcătuiţi un tabel în care să puneţi în evidenţă cantitatea de apă aflată în bazin după1 oră, 2 ore, 3 ore, 4 ore de la deschiderea robinetului. Este cantitatea de apă din bazin direct proporţională cu timpul scurs de la deschiderea robinetului? Justificaţi răspunsul.

5. MĂRIMI INVERS PROPORŢIONALE

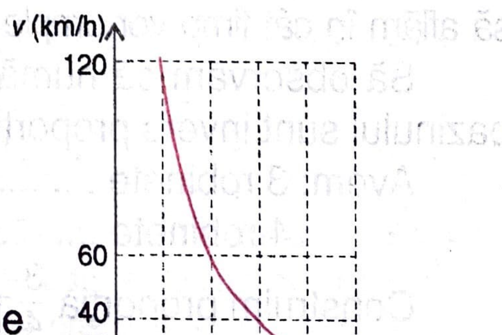
1. Un automobil parcurge o distanţă de 120 km într-o oră, mergând cu viteză constantă. Ştiind că $d = v \cdot t$, putem calcula viteza de deplasare: $v = 120$ km/ h.

Dacă aceeaşi distanţă este parcursă în 2 ore, viteza va fi de 60 km/ h.

Putem construi tabelul:

t (ore)	1	2	3	4	5
v (km/ h)	120	60	40	30	24

Construim şi graficul:



Analizând rezultatele obţinute, observăm că:

– dacă timpul creşte de un număr de ori, viteza scade de acelaşi număr de ori.

– graficul „coboară" de la stânga spre dreapta.

– cu datele din tabel se pot construi proporţii:

$\frac{120}{60} = \frac{2}{1}; \frac{60}{40} = \frac{3}{2}, \frac{40}{30} = \frac{4}{3}, \frac{30}{24} = \frac{5}{4}, \frac{60}{24} = \frac{5}{2}$ etc. (raportul a două viteze este egal cu inversul raportului timpilor corespunzători).

Definiţie: Două mărimi se numesc invers proporţionale atunci când dacă una din ele creşte (scade) de un număr de ori, atunci cealaltă scade (creşte) de acelaşi număr de ori.

Observaţie: În definiţia dată, este foarte important faptul că una din cele două mărimi creşte şi cealaltă scade de acelaşi număr de ori. Dacă această condiţie nu e îndeplinită, mărimile nu sunt invers proporţionale.

Faptul că numerele *x, y, z* sunt invers proporţionale cu *a, b, c* îl exprimăm prin şirul de rapoarte egale $\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}}$.

Regula de trei simplă

2. Să considerăm din nou un automobil care parcurge o distanţă în 3 ore mergând cu viteza constantă de 60 km/ h. Să calculăm cu ce viteză ar trebui să meargă pentru a parcurge aceeaşi distanţă în 2 ore.

Pentru aceasta, să notăm cu x viteza căutată.

Scriem datele problemei astfel: 3 h .... 60 km / h
2 h .... x km / h.

Construim proporţia: $\frac{3}{2} = \frac{x}{60}$, de unde $2x = 3 \cdot 60$, adică $2x = 180$.

$2x = 180$. Obţinem $x = 90$ (km/ h).

3. Ştiind că 3 robinete având aceaşi debit umplu un bazin în 2 ore, să aflăm în cât timp vor umple bazinul 4 robinete cu acelaşi debit.

Să observăm că numărul de robinete şi timpul de umplere a bazinului sunt invers proporţionale.

Avem: 3 robinete .... 2 ore.
4 robinete .... x ore.

Construim proporţia $\frac{3}{4} = \frac{x}{2}$, deci $x = \frac{6}{4}$h, adic ă $x = \frac{3}{2}$h = 1h 30min.

Exerciţii rezolvate

1. Să se exprime printr-o proporţie faptul că numerele *a* şi *b* sunt invers proporţionale cu 2 şi 3.

R: Acest lucru se scrie $\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{3}}$ sau, încă, $2a = 3b$.

2. Să se împartă numărul 62 în părţi invers proporţionale cu numerele 2, 3, şi 5.

R: Pentru a rezolva problema, trebuie să găsim trei numere x, y, z astfel încât $\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y}{\frac{1}{3}}=\frac{z}{\frac{1}{5}}$ şi $x+y+z=62$.

Egalitatea celor trei rapoarte se poate scrie $2x = 3y = 5z$ şi notăm cu p valoarea comună. Deci $2x = 3y = 5z = p$, de unde $x=\frac{p}{2}, y=\frac{p}{3}, z=\frac{p}{5}$. Cum $x+y+z=62$, atunci $\frac{p}{2}+\frac{p}{3}+\frac{p}{5}=62$.

Avem $\frac{31p}{30}=62$, de unde $p=\frac{30\cdot 62}{31}=60$.

Atunci $x=\frac{60}{2}=30$, $y=\frac{60}{3}=20$, $z=\frac{60}{5}=12$.

Exerciţii şi probleme

1. Să se arate că numerele 21, 14 şi 6 sunt invers proporţionale cu 2, 3 şi 7.

2. a) Aflaţi trei numere invers proporţionale cu 2, 3 şi 4, ştiind că al treilea număr este 6.

b) Aflaţi două numere invers proporţionale cu 3 şi 6, ştiind că diferenţa lor este 5.

3. Calculaţi numerele a şi b astfel încât a, 5 şi 12 să fie invers proporţionale cu 30, b, 10. Ce se întâmplă dacă din ipoteză eliminăm numerele 12 şi 10 ?

4. Arătaţi că dacă x şi y sunt direct proporţionale cu a şi b, atunci x şi y sunt invers proporţionale cu $\frac{1}{b}$ şi $\frac{1}{a}$ $(a,b\neq 0)$.

5. Împărţiţi numărul 714 în părţi invers proporţionale cu $\frac{2}{3},\frac{5}{4},\frac{10}{7}$.

6. Aflaţi cifra x astfel încât numerele $\overline{2x}$ şi 54 să fie invers proporţionale cu 9 şi 4.

7. Arătaţi că numerele $\overline{a0}$ şi 50 sunt invers proporţionale cu 5 şi a $(a\neq 0)$.

8. Un automobil parcurge distanţa dintre două oraşe în 8 ore, mergând cu viteza constantă de 60 km/ h.

a) În cât timp ar fi parcurs aceeaşi distanţă dacă ar fi mers cu viteza de 80 km/ h? b) Cu ce viteză ar fi trebuit să meargă pentru a parcurge distanţa dintre cele două oraşe în 10 ore?

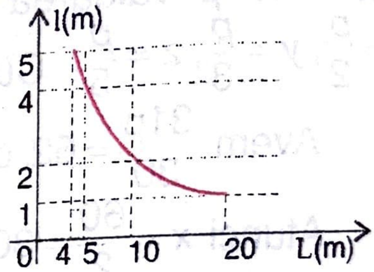
9. O suprafaţă de teren a fost arată de 3 tractoare în 12 zile. În câte zile vor ara aceeaşi suprafaţă 4 tractoare? Dar 9?

10. O cantitate de dulceaţă este pusă în 6 borcane de 800 g fiecare. Câte borcane de 750 g ar fi fost necesare pentru aceeaşi cantitate de dulceaţă? Cât la sută din ultimul borcan s-ar umple?

11. Pentru a executa o comandă, o întreprindere trebuie să utilizeze 6 maşini de acelaşi tip timp de 20 de zile. Clientul a cerut însă ca lucrarea să fie gata în 15 zile. Cu câte maşini trebuie suplimentat lucrul ?

12. Patru copii îşi împart în mod egal biscuiţii dintr-un pachet. Ştiind că, dacă ar fi fost cinci copii, fiecare primea cu un biscuit mai puţin, aflaţi câţi biscuiţi erau în pachet.

13. Construiţi un tabel şi un grafic pentru următoarea problemă: Un bazin cu capacitatea de 576 litri poate fi umplut de la 12 robinete, toate având acelaşi debit de 24 litri pe oră. În cât timp se va umple bazinul folosind: a) 1 robinet; b) 2 robinete; c) 3 robinete; d) 6 robinete.



14. Compuneţi o problemă cu datele din graficul alăturat, ştiind că acesta reflectă o situaţie de proporţionalitate inversă între lungimea şi lăţimea unui dreptunghi de dimensiuni variabile. Calculaţi pentru fiecare caz aria. Ce observaţi? Puteţi explica acest rezultat?

15. Arătaţi că dacă x şi y sunt direct proporţionale cu 3 şi 5, atunci $4x + 3y$ şi $5x + 6y$ sunt invers proporţionale cu 5 şi 3.

16. Un excursionist are de parcurs o distanţă de 20 km. Ştiind că viteza sa este constantă de 4 km/h, completaţi pe caiete tabelul alăturat şi stabiliţi dacă datele din tabel prezintă o situaţie de proporţionalitate inversă. Alcătuiţi şi un grafic. Ce observaţi?

t (ore)	Distanţa rămasă (km)
1	16
2	
3	
4	

17. Un ceas întârzie 4 minute pe zi. a) Completaţi pe caiete tabelul:

Număr de zile	1	2	3	4	5
Întârzierea (min)	4				

b) Datele din tabel prezintă o situaţie de proporţionalitate inversă? De ce? Dar directă?

Exerciţii şi probleme suplimentare

1. a) Aflaţi raportul dintre a şi b ştiind că $\frac{a}{a+b} = \frac{7}{5}$ şi $\frac{b}{a+b} = \frac{2}{9}$; b) Aflaţi raportul dintre a şi b ştiind că $\frac{a}{m} = \frac{3}{2}$ şi $\frac{b}{7m} = \frac{1}{6}$. Arătaţi că $\frac{a}{b}$ nu depinde de m.

2. Aflaţi numerele x şi y ştiind că raportul dintre y şi x este $\frac{2}{5}$ şi că y este de trei ori mai mic decât $x + 1$.

3. Se consideră numerele: $a = \overline{xyx}$ şi $b = \overline{yy}$. Aflaţi toate perechile de numere a şi b astfel încât a şi b să fie direct proporţionale cu 11 şi 2 ($x, y \neq 0$).

4. Un tren lung de 250 m trece printr-un tunel. a) Ştiind că trenul circulă cu viteza de 100 km/h şi că locomotiva intră în tunel la ora 8 şi 58 minute, iar ultimul vagon iese din tunel la ora 9 şi 3 secunde, aflaţi lungimea tunelului;

b) Cât timp s-ar fi scurs de la intrarea locomotivei în tunel până la ieşirea ultimului vagon, dacă viteza trenului ar fi fost de 150 km/ h ?

c) Cu ce viteză ar fi trebuit să circule trenul pentru ca locomotiva să intre în tunel la ora 8 şi 58 de minute şi ultimul vagon să iasă din tunel la ora 9 şi 20 de secunde ?

5. Un biciclist pleacă din Bucureşti spre Braşov şi se deplasează cu viteza constantă de 20 km/ oră. După o oră, din acelaşi loc şi în aceeaşi direcţie pleacă o maşină care se deplasează cu viteza constantă de 60 km/ oră. Stabiliţi: a) La ce distanţă se află biciclisul de maşină la 15 minute de la plecarea maşinii? b) După cât timp de la plecarea biciclistului şi la ce distanţă de Bucureşti biciclistul este ajuns de maşină?

6. a) Un ceas întârzie 15 minute pe zi. Dacă îl fixăm la ora 13, care este numărul minim de zile după care ora 13 indicată de ceas va fi ora reală? b) Care este intervalul maxim de timp la care ar trebui potrivit ceasul astfel încât întârzierea să nu depăşească 5 minute?

7. Primii patru termeni ai unui şir de rapoarte sunt: $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \ldots$. Stabiliţi regula de formare a şirului. Care va fi al 87-lea termen din şir?

8. a) Scrieţi primii cinci termeni ai unui şir de rapoarte ştiind că, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, al n- lea termen din şir este egal cu $\frac{n+1}{2n}$.

b) Alcătuiţi un şir de rapoarte după o regulă creată de voi. Propuneţi colegilor să descopere regula.

9. Fie *a*, *b*, *c* trei numere nenule. Arătaţi că *a* şi *c* sunt invers proporţionale cu *c* şi *b* dacă şi numai dacă $a = b$.

10. a) Ştiind că 40% din 6% dintr-o cantitate de mere este de 3 tone, aflaţi întreaga cantitate.

b) Comparaţi numerele: *a* % din *b* % din *c*; *b* % din *c* % din *a*; *c* % din *a* % din *b*.

11. Se consideră trei numere *a*, *b*, *c* nenule. a) Scrieţi rapoartele dintre fiecare număr şi media aritmetică a lor; b) Arătaţi că suma acestor rapoarte nu depinde de numerele *a*, *b*, *c*.

12. Se consideră mulţimile $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{f, g, h\}$. Toate perechile produsului cartezian $A \times B$ se scriu câte una pe câte un bilet de hârtie. a) Câte bilete se obţin? b) Introducând biletele într-o cutie, care este probabilitatea ca, extrăgând un bilet, acesta să conţină perechea (a, f)? c) Care este probabilitatea ca, extrăgând un bilet, acesta să conţină o pereche de elemente din care primul să fie *a*? d) Care este probabilitatea să se obţină perechea (f, a)?

Exerciţii şi probleme recapitulative

1. a) Ştiind că $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100 = 5\ 050$, calculaţi suma $101 + 102 + 103 + 104 + ... + 200$. b) Aflaţi raportul celor două sume.

2. Demonstraţi că dacă numerele naturale nenule x, y, x^2, y^2 formează o proporţie, atunci $x = y$.

3. Ştiind că raportul numerelor nenule a şi b este $\frac{5}{2}$, arătaţi că $4a^2 + 25b^2 = 20ab$. Rezolvaţi problema prin două metode.

4. Calculaţi raportul numerelor $3a + 5b$ şi $4a + 7b$, ştiind că $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, $(b \neq 0)$.

5. Calculaţi raportul $\frac{m}{n}$ ştiind că $\frac{3m+n}{2m+3n} = \frac{2}{3}$, $(n \neq 0)$.

6. Aflaţi x astfel încât: a) $\frac{x}{0{,}2} = \frac{5}{4}$; b) $\frac{\frac{1}{7}}{x} = 0{,}(3)$; c) $\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{b}}{x}$, d) $\frac{x+1}{x} = \frac{7}{3}$, $(a, b, x \neq 0)$.

7. Împărţiţi numărul 234: a) în părţi direct proporţionale cu 2, 3, 4; b) în părţi invers proporţionale cu 2, 3, 4.

8. Un automobil porneşte la ora 10 şi merge cu viteză constantă. Alt automobil porneşte din acelaşi loc şi în aceeaşi direcţie la ora 12 şi merge cu viteză constantă. Aflaţi raportul vitezelor de deplasare, ştiind că al doilea automobil îl ajunge din urmă pe primul la ora 15.

9. O persoană depune la o bancă suma de 3 000 000 lei, pentru care primeşte,după un an, o dobândă în valoare de 360 000 lei. Care ar fi fost valoarea dobânzii anuale dacă ar fi depus 7 500 000 lei? Rezolvaţi problema prin trei metode.

10. Într-un grup de 25 de persoane, 28% vorbesc limba franceză, 32% limba engleză, 24% limba spaniolă şi 20% limba germană. Arătaţi că există o persoană din grup care cunoaste două limbi.

11. Vârsta unui copil şi vârsta tatălui său sunt mărimi direct proporţionale? Construiţi un exemplu care să ilustreze răspunsul vostru.

12. Un elev citeşte o carte. Numărul de pagini citite şi numărul de pagini care i-au mai rămas de citit sunt mărimi invers proporţionale? Construiţi un exemplu care să ilustreze răspunsul vostru.

13. Compuneţi o problemă pe care să o rezolvaţi folosind regula de trei simplă în cazul a două mărimi a) direct proporţionale; b) invers proporţionale.

14. Într-o cutie sunt 30 de creioane roşii şi albastre. Aflaţi câte creioane sunt albastre, ştiind că probabilitatea ca, la o extragere întâmplătoare, creionul extras să fie roşu este $\frac{7}{15}$.

15. a) Cosmin are în buzunar 12 monede, de 100 de lei şi de 50 de lei. Ştiind că numărul monedelor de 100 de lei este de trei ori mai mare decât al monedelor de 50 de lei, calculaţi probabilitatea ca, scoţând o monedă din buzunar, aceasta să fie de 50 lei; b) Ce se întâmplă dacă înlocuim ipoteza „Cosmin are în buzunar 12 monede“ cu ipoteza „Cosmin are în buzunar câteva monede“?

1. Numărul $x + 10$ este de [illegible] ori mai mare decât x. a) Care este raportul dintre x şi $x + 10$?	1
b) Aflaţi numărul x cu proprietatea dată.	1
2. Stabiliţi dacă numerele 1,(2); 2,(1); 3,(6); 6,(3) formează o proporţie.	1
3. O cantitate de fructe este vândută astfel: 64% din cantitate în prima zi, 50% din rest în a doua zi şi restul de 45 kg în a treia zi. Aflaţi cantitatea totală de fructe.	2
4. Un automobil parcurge o distanţă în 6 ore, mergând cu viteză constantă. Dacă ar fi mers cu o viteză mai mică cu 25% decât cea cu care a mers, în cât timp ar fi parcurs aceeaşi distanţă?	2
5. Să se afle numerele naturale m şi n ştiind că sunt direct proporţionale cu 2 şi 3 şi cel mai mic multiplu comun al lor este 12.	2
Timp de lucru: 50 min.	

TEST DE VERIFICARE 2

Enunţuri	**Punctaj**
	1
1. Raportul dintre vârstele a doi fraţi este $\frac{6}{5}$. a) Ştiind că cel mai mic are 10 ani, cât are cel mare?	1
b) Care va fi raportul dintre vârstele lor peste 4 ani?	1
2. Aflaţi x din proporţia: $\frac{5,4}{x} = \frac{4,5}{2}$.	1
3. Aflaţi cât reprezintă: a) 15% din 20 m;	0,5
b) 0,3% din 200,5 kg;	1
c) 4% din 30% din 3,75 l.	1
4. Arătaţi că dacă două numere naturale nenule sunt direct proporţionale cu cel mai mare divizor comun al lor şi cel mai mic multiplu comun al lor, atunci unul dintre numere îl divide pe celălalt.	2
5. Descompuneţi numărul 198 în părţi invers proporţionale cu $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ şi $\frac{1}{6}$.	1,5
Timp de lucru: 50 min.	