Tema nr. 6

Date $(n+1)$ puncte distincte, x_0, x_1, ..., x_n ($x_i \in \mathbb{R}\ \forall i$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$) şi cele $(n+1)$ valori ale unei funcţii necunoscute f în aceste puncte, $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., $y_n = f(x_n)$:

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
f	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

să se aproximeze funcţia f în $\bar{x}$, $f(\bar{x})$, pentru un $\bar{x}$ dat, $\bar{x} \neq x_i$, $i = 0, \ldots, n$:

- folosind aproximarea polinomială calculată cu metoda celor mai mici pătrate. Pentru calculul valorii polinomului obţinut în punctul $\bar{x}$ să se folosească *schema lui Horner*. Să se afişeze $P_m(\bar{x})$, $|P_m(\bar{x}) - f(\bar{x})|$ şi $\sum_{i=0}^{n} |P_m(x_i) - y_i|$. Se vor folosi valori ale lui m mai mici decât 6.

- folosind interpolarea trigonometrică. În acest caz se consideră că funcţia f este periodică de perioadă 2π iar nodurile de interpolare sunt în număr impar $n = 2m$, $0 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{2m} < 2\pi$. Să se afişeze $T_n(\bar{x})$ şi $|T_n(\bar{x}) - f(\bar{x})|$.

Pentru rezolvarea sistemelor liniare implicate în implementarea metodelor de mai sus se poate folosi biblioteca utilizată la *Tema 2*.

Nodurile de interpolare $\{x_i, i = 0, ..., n\}$ se vor genera astfel: x_0 şi x_n se citesc de la tastatură sau dintr-un fişier astfel ca $x_0 < x_n$, iar x_i se generează aleator astfel ca $x_i \in (x_0, x_n)$ şi $x_{i-1} < x_i$; valorile $\{y_i, i = 0, ..., n\}$ se construiesc folosind o funcţie f declarată în program (exemple de alegere a nodurilor x_0, x_n şi a funcţiei $f(x)$ se găsesc la sfârşitul acestui document), $y_i = f(x_i), i = 0, ..., n$;

Bonus (10 pt): Să se facă graficul funcţiei f şi al funcţiilor aproximative calculate P_m şi T_n

Interpolare prin metoda celor mai mici pătrate

Fie $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Dat $\bar{x} \in [a, b]$ să se aproximeze $f(\bar{x})$ cunoscând cele $n+1$ valori y_i ale funcţiei f în nodurile de interpolare.

Se caută un polinom de grad m:

$$P_m(x) = P_m(x; a_0, a_1, \ldots, a_m) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{m} a_k\, x^k$$

Coeficienţii $\{a_i; i = \overline{0, m}\}$ sunt soluţia problemei de minimizare:

$$\min \left\{ \ \sum_{r=0}^{n} \left| P_m(x_r; a_0, a_1, \ldots, a_m) - y_r \right|^2 \ ; \ a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R} \ \right\}$$

şi de asemenea, sunt soluţia sistemului liniar:

$$Ba = f$$

$$B = (b_{ij})_{i,j=0,\ldots,m} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)} \quad f = (f_i)_{i=0,\ldots,m} \in \mathbb{R}^{m+1}$$

$$\sum_{j=0}^{m} \Big(\sum_{k=0}^{n} x_k^{i+j} \Big) a_j \ = \ \sum_{k=0}^{n} y_k x_k^i \quad , \quad i = 0, \ldots, m$$

Acest sistem liniar se poate rezolva cu biblioteca numerică folosită la *Tema 2*.

Valoarea funcţiei f în punctul $\bar{x}$ se aproximează prin valoarea polinomului P_m în punctul $\bar{x}$:

$$f(\bar{x}) \approx P_m(\bar{x}; a_0, a_1, \ldots, a_m)$$

Valoarea polinomului $P_m(\bar{x})$ se va calcula folosind schema lui Horner.

Schema lui Horner de calcul a valorii $P(x_0)$

Fie P un polinom de grad p:

$$P(x) = c_0x^p + c_1x^{p-1} + \cdots + c_{p-1}x + c_p \ , \quad (c_0 \neq 0)$$

Putem scrie polinomul P şi astfel:

$$P(x) = ((\cdots(((c_0x + c_1)x + c_2)x + c_3)x + \cdots)x + c_{p-1})x + c_p$$

Ţinând cont de această grupare a termenilor obţinem un mod eficient de a calcula valoarea polinomului P într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ oarecare, procedeu numit *metoda lui Horner*:

$$\begin{array}{rcl} d_0 & = & c_0 \,, \\ d_i & = & c_i + d_{i-1}x_0 \ , \quad i = \overline{1,p} \end{array} \tag{1}$$

În şirul de mai sus:

$$P(x_0) = d_p$$

iar ceilalţi termeni calculaţi ($d_i, i = 0, \ldots, p-1$) , sunt coeficienţii polinomului cât, Q, din împărţirea cu rest:

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & (x - x_0)Q(x) + r \ , \\ Q(x) & = & d_0x^{p-1} + d_1x^{p-2} \cdots + d_{p-2}x + d_{p-1} \ , \\ r & = & d_p = P(x_0). \end{array}$$

Pentru a calcula $P(x_0)$ (d_p) cu formulele (1) se poate folosi o singură valoare reală $d \in \mathbb{R}$ şi nu un vector $d \in \mathbb{R}^p$.

Interpolare trigonometrică

Interpolarea trigonometrică se foloseşte pentru aproximarea funcţiilor periodice de perioadă T:

$$f(x+T) = f(x) \quad , \quad \forall x.$$

Vom considera cazul $T = 2\pi$. Presupunem că avem un număr impar de puncte de interpolare $n = 2m$ din intervalul $[0, 2\pi)$:

$$0 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n < 2\pi.$$

Funcţia f se aproximează ca o combinaţie liniară de funcţii sin şi cos astfel:

$$f(x) \approx T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos(k\,x) + \sum_{k=1}^{m} b_k \sin(k\,x).$$

Notăm cu:

$$\phi_0(x) = 1 \quad , \quad \phi_{2k-1}(x) = \sin(k\,x) \quad , \quad \phi_{2k}(x) = \cos(k\,x) \quad , \quad k = 1, \ldots, m.$$

Coeficienţii $\{a_k; k = 0, \ldots m\}$ şi $\{b_k; k = 1, \ldots m\}$ se găsesc rezolvând sistemul liniar:

$$TX = Y \quad , \quad X = (a_0, b_1, a_1, b_2, a_2, \ldots, b_m, a_m)^T$$

$$T = \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \ldots & \phi_{n-1}(x_0) & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \ldots & \phi_{n-1}(x_1) & \phi_n(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \ldots & \phi_{n-1}(x_2) & \phi_n(x_2) \\ \vdots & & & & & \\ \phi_0(x_{n-1}) & \phi_1(x_{n-1}) & \phi_2(x_{n-1}) & \ldots & \phi_{n-1}(x_{n-1}) & \phi_n(x_{n-1}) \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \phi_2(x_n) & \ldots & \phi_{n-1}(x_n) & \phi_n(x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_1 \\ a_1 \\ \vdots \\ b_m \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m+1}.$$

Rezolvarea acestui sistem liniar se poate face folosind biblioteca utilizată la *Tema 2*.

$$f(\bar{x}) \approx T_n(\bar{x}) = a_0\phi_0(\bar{x}) + b_1\phi_1(\bar{x}) + a_1\phi_2(\bar{x}) + \cdots + b_m\phi_{2m-1}(\bar{x}) + a_m\phi_{2m}(\bar{x}).$$

Date de intrare - exemple

$$x_0 = a = 1 \quad , \quad x_n = b = 5 \quad , \quad f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 12$$

$$x_0 = 0 \quad , \quad x_n = \frac{31\pi}{16} \quad , \quad f(x) = \sin(x) - \cos(x)$$

$$x_0 = 0 \quad , \quad x_n = \frac{31\pi}{16} \quad , \quad f(x) = \sin(2x) + \sin(x) + \cos(3x)$$

$$x_0 = 0 \quad , \quad x_n = \frac{63\pi}{32} \quad , \quad f(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x)$$

Interpolare în sensul celor mai mici pătrate
(Least Squares Interpolation)

$m = 1 \qquad P_1(x) = a_1 x + a_0$

$\{a_0, a_1\}$ soluția problemei de optimizare

$$\min \{ g(a_0, a_1) ;\ a_0, a_1 \in \mathbb{R} \} \qquad (LSP)$$

$$g(a_0, a_1) = \sum_{r=0}^{n} (a_1 x_r + a_0 - y_r)^2$$

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
f	y_0	y_1	$\dots$	y_n

$y_i = f(x_i)$

$$f(x) \simeq P_1(x)$$

Soluția problemei (LSP) se găsește printre soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial a_0} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial a_1} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial g}{\partial a_0}(a_0, a_1) = \sum_{r=0}^{n} 2\,(a_1 x_r + a_0 - y_r)$$

$$\frac{\partial g}{\partial a_1}(a_0, a_1) = \sum_{r=0}^{n} 2\,(a_1 x_r + a_0 - y_r)\cdot x_r$$

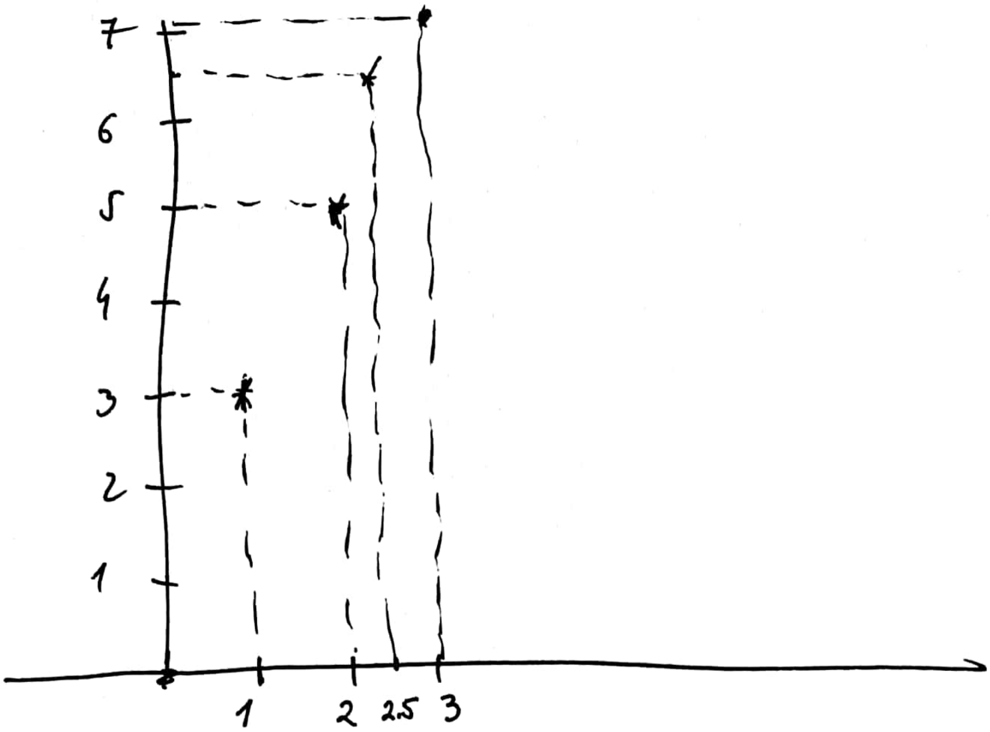
$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 \cdot \sum_{r=0}^{n} 1 + a_1 \sum_{r=0}^{n} x_r = \sum_{r=0}^{n} y_r \\ a_0 \sum_{r=0}^{n} x_r + a_1 \sum_{r=0}^{n} x_r^2 = \sum_{r=0}^{n} x_r y_r \end{cases}$$

Soluția sistemului de mai sus este soluția problemei (LSP) dacă matricea

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 g}{\partial a_0^2} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial a_0 \partial a_1} \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial a_1 \partial a_0} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial a_1^2} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \sum_{r=0}^{n} 1 & \sum_{r=0}^{n} x_r \\ \sum_{r=0}^{n} x_r & \sum_{r=0}^{n} x_r^2 \end{bmatrix}$$

este pozitiv definită.

x	1	2	2.5	3
f	3	5	6.5	7



a_0, a_1 soluția sistemului

$$\begin{cases} 4a_0 + 8.5a_1 = 21.5 \\ 8.5a_0 + 20.25a_1 = 50.25 \end{cases}$$

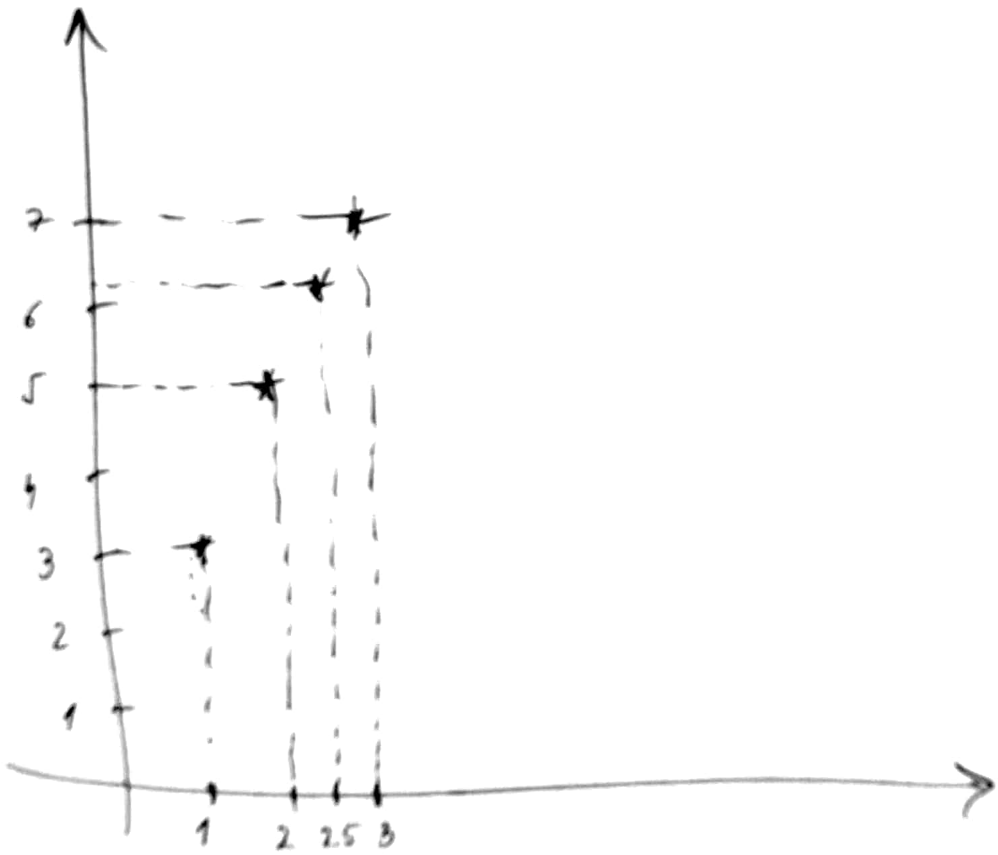
$a_0 = 0,9429 \qquad a_1 = 2.0857$

x	1	2	2.5	3
f	3	5	6.1	7

a_0, a_1 soluția sistemului:

$$4a_0 + 8.5a_1 = 21.1$$
$$8.5a_0 + 20.25a_1 = 49.25$$

$$a_0 = 0.9886 \qquad a_1 = 2.0171$$



(a_0, a_1) soluția sistemului

$$Ba = f$$

$$\sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^{i+j} \right) a_j = \sum_{k=0}^{n} y_k x_k^i$$

$m = 1$

$i = 0$ $$\sum_{j=0}^{1} \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^{0+j} \right) a_j = \sum_{k=0}^{n} y_k x_k^0 \Rightarrow$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} x_k^0 \right) a_0 + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right) a_1 = \sum_{k=0}^{n} y_k$$

$i = 1$ $$\sum_{j=0}^{1} \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^{1+j} \right) a_j = \sum_{k=0}^{n} y_k x_k^1 \Rightarrow$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} x_k^{1+0} \right) \cdot a_0 + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^{1+1} \right) a_1 = \sum_{k=0}^{n} y_k x_k^1$$

$$\begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{n} 1 \right) a_0 + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right) a_1 = \sum_{y=0}^{n} y_k \\ \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right) a_0 + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^2 \right) a_1 = \sum_{y=0}^{n} y_k x_k \end{cases}$$