Tema nr. 5

Fie $p \in \mathbb{N}^*$ şi $n \in \mathbb{N}^*$ dimensiunile matricei A, $p \geq n$, ϵ - precizia calculelor, matricea $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$, vectorul $b \in \mathbb{R}^p$.

- Pentru $p = n > 500$ să se genereze aleator o matrice pătratică, rară şi simetrică ($A = A^T$), cu elemente nenule pozitive, folosind schema de memorare cu liste descrisă în *Tema 3*. De asemenea, să se genereze structurile rare citind matricea din fişierul postat aici.

- Pentru $p = n$ şi A matrice simetrică ($A = A^T$) şi rară să se implementeze metoda puterii pentru aproximarea celei mai mari valori proprii a matricei A şi a unui vector propriu asociat. După citirea matricei din fişier, să se verifice dacă matricea este simetrică. Să se afişeze valoarea proprie de modul maxim aproximată pentru matricea generată aleator şi pentru cele postate. Afişaţi norma:

$$\|Au^{\max} - \lambda_{\max} u^{\max}\|.$$

  unde $u^{\max}$ şi $\lambda_{\max}$ sunt vectorul şi respectiv valoarea proprie aproximată cu metoda puterii.

- Cazul $p > n$ (matrice clasice, nerare): utilizând descompunerea după valori singulare (**S**ingular **V**alue **D**ecomposition) din biblioteca folosită la *Tema 2*, să se calculeze şi să se afişeze:

  - valorile singulare ale matricei A,
  - rangul matricei A,
  - numărul de condiţionare al matricei A,
  - pseudoinversa Moore-Penrose a matricei A, $A^I \in \mathbb{R}^{n \times p}$,

  $$A^I = V S^I U^T$$

  - vectorul $x^I \in \mathbb{R}^n$, $x^I = A^I b$ soluţia sistemului $Ax = b$ şi norma:

  $$\|b - Ax^I\|_2.$$

  Pentru rangul şi numărul de condiţionare al matricei să se folosească relaţiile descrise în acest fişier şi de asemenea funcţiile din bibliotecă, funcţii care calculează aceste valori.

Vectori şi valori proprii - definiţii

Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice reală de dimensiune n. Se numeşte *valoare proprie* asociată matricei A, numărul complex $\lambda \in \mathbb{C}$, pentru care există un vector nenul $u \neq 0$, $u \in \mathbb{C}^n$, numit şi *vector propriu* asociat valorii proprii λ pentru care:

$$Au = \lambda\, u$$

Valorile proprii ale matricei A pot fi definite şi ca rădăcini ale polinomului caracteristic asociat matricei A, $p_A(\lambda)$:

$$p_A(\lambda) \;=\; \det(\lambda I - A) = 0$$

Polinomul caracteristic este un polinom de grad n, deci orice matrice de dimensiune n are n valori proprii (reale şi/sau complex conjugate).

Despre matricele simetrice se poate arăta că au toate valorile proprii reale.

Metoda puterii

Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice simetrică. Se poate arăta că, pentru un vector $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, şirul de vectori:

$$\frac{x}{||x||_2},\ \frac{Ax}{||Ax||_2},\ \frac{A^2x}{||A^2x||_2},\ \frac{A^3x}{||A^3x||_2},\ \ldots \tag{1}$$

converge la vectorul propriu asociat valorii proprii de modul maxim.

Se defineşte *coeficientul Rayleigh* pentru un vector $x \in \mathbb{R}^n$ ca fiind numărul real:

$$r(x) = \frac{x^T A x}{x^T x} = \frac{(Ax, x)_{\mathbb{R}^n}}{||x||_2^2}$$

În relaţiile de mai sus am notat cu $||\cdot||_2$, $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^n}$ norma euclidiană a unui vector şi respectiv produsul scalar a doi vectori.

Coeficientul Rayleigh are proprietatea că dacă x este vector propriu al matricei A asociat valorii proprii λ atunci $r(x) = \lambda$. Dacă, atunci când se calculează şirul (1), se calculează şi coeficienţii Rayleigh pentru vectorii din şir, obţinem o metodă de aproximare a valorii proprii de modul maxim.

Ţinând cont de observaţiile de mai sus putem descrie metoda puterii astfel:

Metoda puterii - schema algoritmului

se alege vectorul $v^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ aleator, dar cu $||v^{(0)}||_2 \, = \, 1$;

$w = Av^{(0)}\,$;

$\lambda_0 = (w, v^{(0)})_{\mathbb{R}^n}\,$;

$k \, = \, 0$;

do

$$v^{(k+1)} = \frac{1}{||w||_2}\, w\,;$$

$$w \, = \, Av^{(k+1)}\,;$$

$$\lambda_{k+1} = (w, v^{(k+1)})_{\mathbb{R}^n} \;;$$

$$k{+}{+} \quad ;$$

while $(||w - \lambda_k v^{(k)}||_2 > n\epsilon$ şi $\quad k \leq k_{\max})$;

(la intoducerea datelor, se pot lua $\epsilon \leq 10^{-9}$ şi $k_{\max} = 1000000$)

Dacă se iese din bucla *while* pe varianta $k > k_{\max}$ algoritmul nu a reuşit să calculeze valoarea proprie de modul maxim şi un vector propriu asociat. În acest caz se poate încerca mărirea valorii lui ϵ şi reluarea calculelor.

Dacă s-a ieşit pe cealaltă variantă, ($||Av^{(k)} - \lambda_k v^{(k)}||_2 \leq n\epsilon$), în λ_{k+1} avem o aproximare a unei valori proprii de modul maxim a matricei A, iar în $v^{(k+1)}$ o aproximare a unui vector propriu asociat acestei autovalori.

În algoritmul de mai sus nu este nevoie să alocăm şiruri pentru λ_k şi $v^{(k)}$ ci avem nevoie doar de un singur element pentru fiecare şir: $\lambda \in \mathbb{R}$ pentru a memora valoarea lui λ_k şi $v \in \mathbb{R}^n$ pentru $v^{(k)}$.

Alegerea vectorului iniţial $v^{(0)}$ cu $||v^{(0)}||_2 = 1$ se poate face pornind de la un vector nenul generat aleator, $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, şi punând:

$$v^{(0)} = \frac{1}{||x||_2} x\,.$$

Metoda puterii - schema algoritmului

se alege vectorul $v \in \mathbb{R}^n$ aleator, de normă euclidiană 1, $||v||_2 \,=\, 1$;

$(v = \dfrac{1}{||x||_2} x \ ,\ x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0)$

$w = Av\,;$

$\lambda = (w, v)_{\mathbb{R}^n}\,;$

$k \,=\, 0;$

do

$\quad v = \dfrac{1}{||w||_2}\, w\,;$

$\quad w \,=\, Av\,;$

$\quad \lambda = (w, v)_{\mathbb{R}^n}\ ;$

$\quad k{+}{+}\quad ;$

while $(||w - \lambda v||_2 > n\epsilon$ şi $\ k \leq k_{\max});$

Descompunerea după valori singulare

(**S**ingular **V**alue **D**ecomposition)

Fie $A \in \mathbb{R}^{p\times n}$. Se numeşte decompunere după valori singulare a matricei:

$$A = USV^T \quad , \quad U \in \mathbb{R}^{p\times p} \ , \ S \in \mathbb{R}^{p\times n} \ , \ V \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

cu $U = [u_1\ u_2\ ...\ u_p]$ (vectorii u_i sunt coloanele matricei U) şi $V = [v_1\ v_2\ ...\ v_n]$ matrice ortogonale iar S matrice de forma:

$$\text{pentru } p \le n \qquad S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_p & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times n}$$

$$\text{pentru } p > n \qquad S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times n}$$

unde numerele nenegative $\sigma_i \ge 0, \forall i$ sunt valorile singulare ale matricei A.

Rangul matricei A este numărul de valori singulare strict pozitive:

$$\text{rang } (A) = \text{ numărul de valori singulare } \sigma_i > 0 (\sigma_i > \epsilon, \text{in your program}).$$

Numărul de condiţionare al matricei A este raportul dintre cea mai mare valoare singulară şi cea mai mică valoare singulară strict pozitivă.

$$k_2(A) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \quad ,$$

$$\sigma_{\max} = \max\{\sigma_i; \sigma_i \text{ valoare singulară}\} \ ,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\min} &= \min\{\sigma_i; \sigma_i > 0 \text{ valoare singulară}\} \\ &\approx \min\{\sigma_i; \sigma_i > \epsilon \text{ valoare singulară}\} \end{aligned}$$

Pseudoinversa Moore-Penrose a matricei A se calculează folosind formula:

$$A^I = VS^IU^T.$$

Matricea S^I se calculează folosind formula descrisă mai jos. Presupunem că am calculat pentru matricea $A \in \mathbb{R}^{p\times n}$ descompunerea după valori singulare. Fie $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r > 0$ valorile singulare strict pozitive ale matricei A, $r = \operatorname{rang}(A)$.

Matricea $S^I \in \mathbb{R}^{n\times p}$ se defineşte astfel:

$$S^I = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_r} & \cdots & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times p}.$$

Vectorul $x^I = VS^IU^Tb$ poate fi considerat soluţia sistemului $Ax = b$ chiar şi când $p \neq n$ iar sistemul nu are soluţie clasică. Când $p = n$ şi matricea A este nesingulară vectorul x^I coincide cu soluţia clasică a sistemului $Ax = b$.