Tema nr. 7

Fie P un polinom de grad n cu coeficienţi reali:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \ , \ a_0 \neq 0 \, , \ a_i \in \mathbb{R}$$

$\epsilon = 10^{-p}$ precizia calculelor şi $k_{\max}$ numărul maxim de iteraţii în metoda Halley.

Să se calculeze intervalul $[-R, R]$ în care se găsesc toate rădăcinile reale ale polinomului P. Să se implementeze metoda lui Halley de aproximare a rădăcinilor unui polinom. Pentru calculul valorii unui polinom într-un punct să se folosească schema lui Horner. Să se aproximeze cât mai multe rădăcini ale polinomului P cu metoda Halley pornind de la puncte de start x_0 diferite. Rezultatele se vor afişa pe ecran şi se vor memora într-un fişier. În fişierul respectiv se vor scrie doar rădăcinile distincte (2 valori reale v_1 şi v_2 sunt considerate diferite dacă $|v_1 - v_2| > \epsilon$).

Bonus 20 pt.: Implementaţi metodele (N^4) şi (N^5) din articolul postat aici, pentru aproximarea rădăcinilor reale ale unei funcţii f oarecare. Derivata funcţiei f va fi declarată la fel ca funcţia f.

Metoda Halley de aproximare a rădăcinilor reale ale unui polinom

Fie P un polinom de grad n:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \ , \quad (a_0 \neq 0) \tag{1}$$

Se numeşte rădăcină a unui polinom, un număr real sau complex, $r \in \mathbb{R}$ sau $r \in \mathbb{C}$ pentru care:

$$P(r) = a_0r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Orice polinom cu coeficienţi reali are n rădăcini, reale sau complexe. Dacă $r = c + id$ este rădăcină complexă a polinomului P atunci şi $\bar{r} = c - id$ este rădăcină a polinomului P. Dacă $r \in \mathbb{R}$ este rădăcină reală a polinomului P atunci:

$$P(x) = (x - r)Q(x) \ , \ Q \text{ este polinom de grad } n - 1.$$

Dacă numerele complexe $a \pm ib$ sunt rădăcini ale polinomului P atunci:

$$P(x) = (x^2 - 2c\,x + c^2 + d^2)Q(x)\ ,\ Q \text{ este polinom de grad } n-2.$$

(polinomul de gradul al 2-lea $x^2 - 2c\,x + c^2 + d^2$ are rădăcinile $c \pm id$)

Toate rădăcinile reale ale polinomului P se află în intervalul $[-R,\ R]$ unde R este dat de:

$$R = \frac{|a_0| + A}{|a_0|} \quad , \quad A = \max\{|a_i|\ ;\ i = \overline{1,n}\} \tag{2}$$

Pentru a aproxima o rădăcină reală x^* (din intervalul [-R, R]) a polinomului P definit de (1), se construieşte un şir de numere reale, $\{x_k\}$, care converge la rădăcina $x^* \in [-R,\ R]$ căutată ($x_k \longrightarrow x^*$ pentru $k \to \infty$) .

Dându-se primul element x_0, şirul $\{x_k\}$ se construieşte astfel (x_{k+1} se calculează din x_k):

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{1}{a_k}\ , \\ a_k &= \frac{P'(x_k)}{P(x_k)} - \frac{P''(x_k)}{2P'(x_k)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Această metodă poartă numele de metoda lui Halley. Această metodă iterativă se poate aplica nu numai pentru aproximarea rădăcinilor polinoamelor ci pentru rădăcinile oricărei funcţii neliniare continue de două ori derivabilă.

Observaţie importantă: Alegerea primului element ale şirului, x_0, poate determina convergenţa sau divergenţa şirului x_k la x^*. De obicei, o alegere a iteraţiei iniţiale x_0 în vecinătatea lui x^* asigură convergenţa $x_k \longrightarrow x^*$ pentru $k \to \infty$.

Nu este nevoie de memorat tot şirul $\{x_k\}$ ci doar 'ultimul' element x_{k_0} calculat. Se consideră că o valoare $x_{k_0} \approx x^*$ (este 'ultimul' element calculat) atunci când diferenţa dintre două iteraţii succesive devine suficient de mică, i.e.,

$$|x_{k_0} - x_{k_0-1}| < \epsilon$$

unde ϵ este precizia cu care vrem să aproximăm soluţia x^*. Prin urmare, o schemă posibilă de aproximare a soluţiei x^* cu metoda lui Halley este următoarea:

Metoda lui Halley

x se alege aleator ; $k = 1$;
(pentru convergenţa şirului $\{x_k\}$ este de preferat alegerea valorilor x_0 în vecinătatea soluţiei căutate)
do
{
$\star$ calculează $A = 2[P'(x)]^2 - P(x)P''(x)$;
$\star$ if ($|A| < \epsilon$) STOP;
//(reporneşte algoritmul cu alt x_0)
$\star$ se calculează $\Delta = \dfrac{2P(x)P'(x)}{A}$;
$\star$ $x = x - \Delta$;
$\star$ $k++$;
}
while ($|\Delta| \geq \epsilon$ şi $k \leq k_{\max}$ şi $|\Delta| \leq 10^8$)
if ($|\Delta| < \epsilon$) $x \approx x^*$;
else *divergenţă* ; //(de încercat alte valori pentru x_0)

$k_{\max} \in \{1000, 2000, 5000, ...\}$

Schema lui Horner de calcul al valorii $P(v)$

Fie P un polinom de grad n:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \ , \ a_i \in \mathbb{R} \ \forall i \ , \ \ a_0 \neq 0 \quad (4)$$

Putem scrie polinomul P şi astfel:

$$P(x) = ((\cdots(((a_0x + a_1)x + a_2)x + a_3)x + \cdots)x + a_{n-1})x + a_n$$

Ţinând cont de această grupare a termenilor, obţinem un mod eficient de a calcula valoarea polinomului P într-un punct $v \in \mathbb{R}$ oarecare, procedeu numit *metoda lui Horner*:

$$\begin{array}{rcl} b_0 & = & a_0 \ , \\ b_i & = & a_i + b_{i-1}v \ , \quad i = \overline{1,n} \end{array} \qquad (5)$$

Folosind şirul de mai sus, valoarea polinomului P în punctul v este:

$$P(v) = b_n$$

iar ceilalţi termeni b_i calculaţi, sunt coeficienţii polinomului cât, Q, din împărţirea cu rest:

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & (x-v)Q(x) + r \ , \\ Q(x) & = & b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1} \ , \\ r & = & b_n = P(v). \end{array} \qquad (6)$$

Pentru a calcula $P(v)$ (b_n) cu formulele (5) se poate folosi o singură valoare reală $b \in \mathbb{R}$ şi nu un vector $b \in \mathbb{R}^n$.

Exemple

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \;, \\
& \quad a_0 = 1.0\,, \quad a_1 = -6.0\,, \quad a_2 = 11.0\,, \quad a_3 = -6. \\
P(x) &= (x - \frac{2}{3})(x - \frac{1}{7})(x+1)(x - \frac{3}{2}) \\
&= \frac{1}{42}(42x^4 - 55x^3 - 42x^2 + 49x - 6) \\
& \quad a_0 = 42.0\,, \quad a_1 = -55.0\,, \quad a_2 = -42.0\,, \quad a_3 = 49.0\,, \quad a_4 = -6.0. \\
P(x) &= (x-1)(x - \frac{1}{2})(x-3)(x - \frac{1}{4}) \\
&= \frac{1}{8}(8x^4 - 38x^3 + 49x^2 - 22x + 3) \\
& \quad a_0 = 8.0\,, \quad a_1 = -38.0\,, \quad a_2 = 49.0\,, \quad a_3 = -22.0\,, \quad a_4 = 3.0. \\
P(x) &= (x-1)^2(x-2)^2 \\
&= x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 \\
& \quad a_0 = 1.0\,, \quad a_1 = -6.0\,, \quad a_2 = 13.0\,, \quad a_3 = -12.0\,, \quad a_4 = 4.0. \\
f(x) &= e^x - \sin(x) \quad , \quad f'(x) = e^x - \cos(x) \quad , \\
f''(x) &= e^x + \sin(x) \quad , \quad x^* = -3.18306301193336.
\end{aligned}$$