Tema nr. 1

1. Să se găsească cel mai mic număr pozitiv $u > 0$, de forma $u = 10^{-m}$, unde $m \in \mathbb{N}$, care satisface proprietatea:

$$1 +_c u \neq 1$$

unde prin $+_c$ am notat operația de adunare efectuată de calculator. Numărul u se numește ***precizia mașină***.

2. Operația $+_c$ este ***neasociativă***: fie numerele $x=1.0$, $y = u/10$, $z = u/10$, unde u este precizia mașină calculată anterior (acea valoare pentru care $1 +_c u \neq 1$ şi $1 +_c u/10 = 1$). Să se verifice că operația de adunare efectuată de calculator este neasociativă:

$$(x +_c y) +_c z \neq x +_c (y +_c z).$$

Să se găsească un exemplu pentru care operația de înmulțire $\times_c$ este neasociativă.

3. **Aproximări polinomiale ale funcţiei *sin***

Fie polinoamele:

$$P_1(x) = x - c_1x^3 + c_2x^5$$
$$P_2(x) = x - c_1x^3 + c_2x^5 - c_3x^7$$
$$P_3(x) = x - c_1x^3 + c_2x^5 - c_3x^7 + c_4x^9$$
$$P_4(x) = x - 0.166x^3 + 0.00833x^5 - c_3x^7 + c_4x^9$$
$$P_5(x) = x - 0.1666x^3 + 0.008333x^5 - c_3x^7 + c_4x^9$$
$$P_6(x) = x - 0.16666x^3 + 0.0083333x^5 - c_3x^7 + c_4x^9$$
$$P_7(x) = x - c_1x^3 + c_2x^5 - c_3x^7 + c_4x^9 - c_5x^{11}$$
$$P_8(x) = x - c_1x^3 + c_2x^5 - c_3x^7 + c_4x^9 - c_5x^{11} + c_6x^{13}$$

unde constantele c_i au următoarele valori:

$$c_1 = \frac{1}{3!} = 0.16666666666666666666666666666667$$

$$c_2 = \frac{1}{5!} = 0.0083333333333333333333333333333333$$

$$c_3 = \frac{1}{7!} = 1.984126984126984126984126984127e\text{-}4$$

$$c_4 = \frac{1}{9!} = 2.7557319223985890652557319223986e\text{-}6$$

$$c_5 = \frac{1}{11!} = 2.5052108385441718775052108385442e\text{-}8$$

$$c_6 = \frac{1}{13!} = 1.6059043836821614599392377170155e\text{-}10$$

Toate polinoamele de mai sus sunt aproximări ale funcției ***sin*** pentru $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\sin(x) \approx P_i(x) \quad , \quad \forall\, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Să se genereze 10.000 de numere aleatoare din intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ și să se calculeze valorile celor 8 polinoame de mai sus în aceste puncte. Se consideră că valoarea funcției ***sin*** calculată de biblioteca matematică a programului cu care lucrați (Math.sin – Java , Math.Sin – C#, math.sin - Python) este valoarea exactă a funcției ***sin***.

$$v_{exact} = \sin(x) = Math.\sin(x).$$

Pentru fiecare din cele 10.000 de numere generate să se memoreze cele trei polinoame care au furnizat cele mai bune aproximări (acele polinoame care furnizează cele mai mici erori).

$$\boldsymbol{eroare_i\,(x) = |\,P_i(x) - v_{exact}\,|}.$$

În funcție de aceste rezultate, să se facă o ierarhie a celor 8 polinoame.

Să se implementeze modul de calcul al celor 8 polinoame astfel încât să se facă un număr minim/cât mai mic de operații elementare (adunări, scăderi, înmulțiri, împărțiri). De exemplu, pentru polinomul $\boldsymbol{P_2}$ putem folosi următoarea grupare a termenilor:

$$P_2(x) = x\left(1 + y\left(-c_1 + y\left(c_2 - c_3 y\right)\right)\right) \text{ unde } y = x^2$$

Cele 6 constante c_i vor fi declarate ca atare în program, fie vor fi calculate o singură dată.

Bonus 5pt: să se calculeze timpul de calcul pentru fiecare din cele 8 polinoame folosind aceleaşi 10.000 de valori din $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Să se afişeze în ordine crescătoare aceşti 8 timpi de lucru (şi numărul polinomului care a produs timpul de lucru).