

**Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации**

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования**

**«Национальный исследовательский университет
ИТМО»**

**Факультет информационных технологий и
программирования**

Лабораторная работа № 2

Выполнили студенты:

Иванов А.С. М32001

Круглов Г.Н. М32001

Писарева Ю.И. М32051

Проверил:

Москаленко М.А.

Санкт-Петербург
2022

Постановка задачи

Дана квадратная матрица. Используя метод вращений Якоби, найти её собственные значения и собственные векторы с заданной точностью.

Описание метода

Метод вращений Якоби является методом решения полной проблемы собственных значений вещественной симметричной матрицы. Он основан на построении последовательности матриц, которые ортогонально подобны исходной матрице и имеют монотонно убывающие до нуля суммы всех внедиагональных элементов

Итерационный процесс осуществляется следующим образом:

- В матрице A_k определяется максимальный по абсолютной величине элемент $a_{ij}^{(k)}$
- Строится матрица вращения $T_{ij} =$

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \cos(\theta) & & -\sin(\theta) & \\ & & & \ddots & & \\ & & \sin(\theta) & & \cos(\theta) & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Угол θ выбирается так, чтобы в матрице A_{k+1} обратился в нуль элемент $a_{ij}^{(k)}$. Из этого условия можно получить

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}}; |\theta| \leq \frac{\pi}{2}$$

- Получаем новую матрицу $A_{k+1} = T_{ij}^T A_k T_{ij}$
- Вычисление заканчивается при обращении в 0 всех недиагональных элементов матрицы

В итоге матрица A_k сходится к диагональной матрице Λ при $k \rightarrow \infty$. Тогда приближенными значениями собственных чисел матрицы A будут диагональные элементы матрицы A_k , а

приближенными значениями собственных векторов - столбцы матрицы $T_k = \prod_{v=1}^k T_{v-1} T_{ij_v}$

Результаты решения задач

Симметричные матрицы с диагональным преобладанием

Размер: 10

k	Количество итераций	Точность
0	118	8,1E-6
1	117	6,6E-6
3	120	7,5E-6
5	120	6,7E-6
15	100000	0,375

Размер: 25

k	Количество итераций	Точность
0	893	8E-6
1	869	7,2E-6
3	862	6,18E-6
5	884	6,58E-6
15	100000	0,625

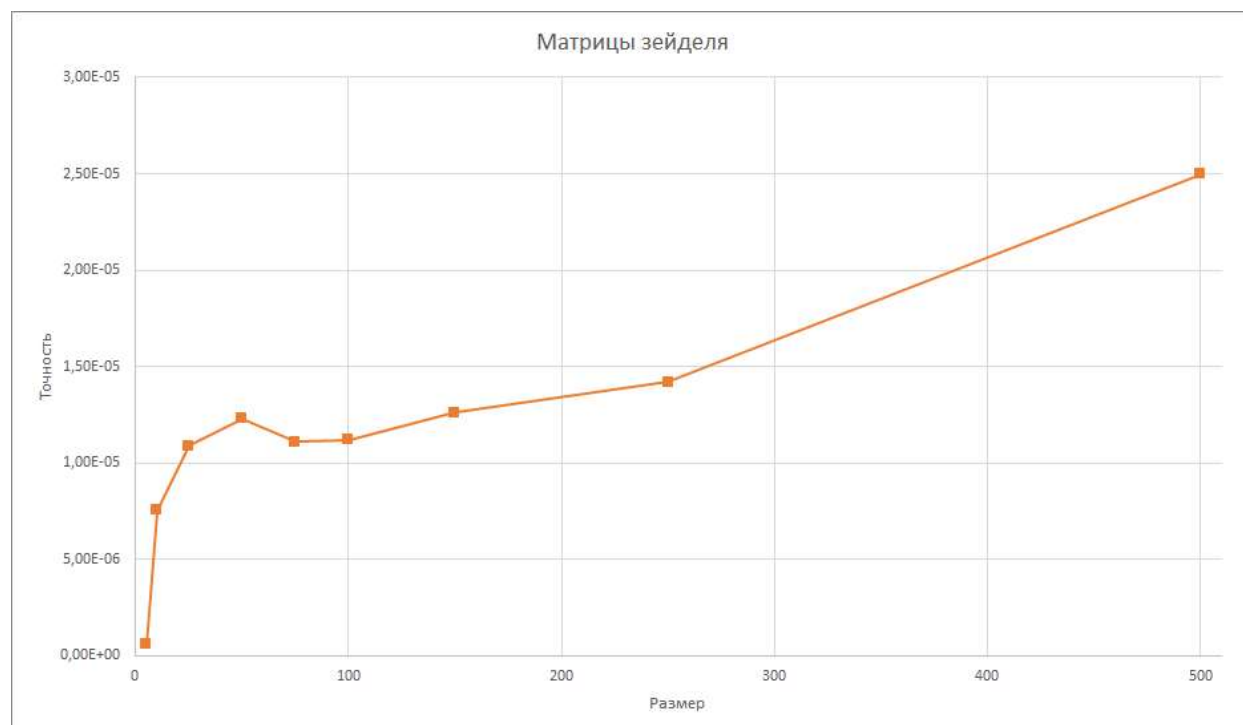
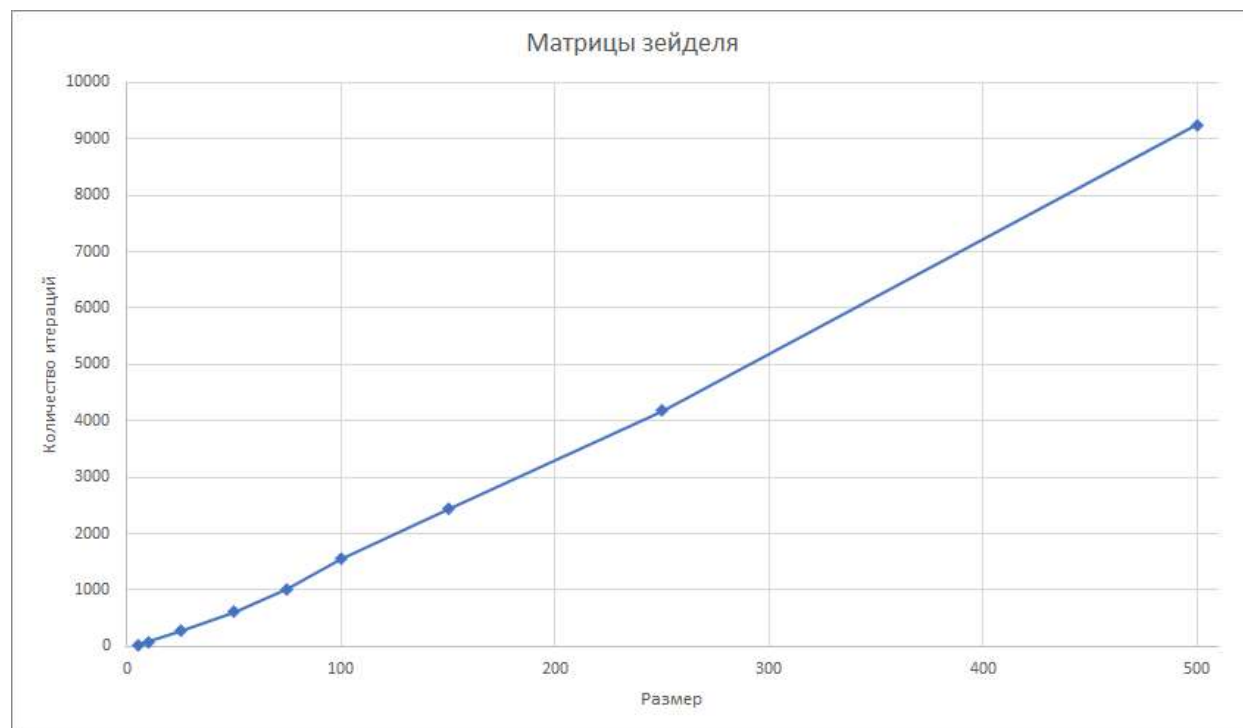
Размер: 50

k	Количество итераций	Точность
0	3642	9,95E-6
1	3643	9,25E-6
3	3624	8,81E-6
5	3655	7,94E-6
15	100000	2,875

Матрицы гилберта

Размер	Количество итераций	Точность
5	24	5,79E-7
10	76	7,55E-6
25	270	1,09E-5
50	618	1,23E-5
75	1013	1,11E-5

Размер	Количество итераций	Точность
100	1553	1,12E-5
150	2440	1,26E-5
250	4184	1,42E-5
500	9249	2,5E-5



Выводы

Проанализировав выполненную работу, можно сделать следующий вывод о рассмотренном методе

- Метод Якоби находит собственные значения и векторы с хорошей точностью
- При росте числа обусловленности матрицы, количество итераций необходимых для достижения заданной точности тоже увеличивается
- При увеличении размера матрицы, точность полученных данных при одинаковых условиях выхода уменьшается