FUNCIONES

Las funciones surgen siempre que una cantidad depende de otra. Considere las situaciones siguientes:

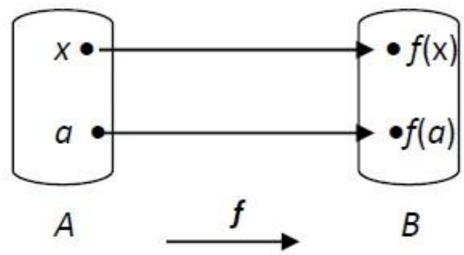
1. El área *A* de un círculo depende del radio *r* del mismo. La regla que relaciona *r* con *A* se expresa con la ecuación $A = \pi r^2$. Con cada número positivo *r* existe asociado un valor de *A* y decimos que *A* es función de *r*.
2. El costo *C* para enviar por correo una carta depende de su peso *w*. Aun cuando no existe una fórmula sencilla que relacione *w* con *C*, la oficina de correo tiene una regla para determinar *C* cuando se conoce *w*.
3. La población humana del mundo, *P*, depende del tiempo *t*. Si se dan las estimaciones del mundo, $P(t)$, en el tiempo *t* para ciertos años. Por ejemplo $P(1995) \approx 2520000000$. Pero para cada valor de tiempo *t* existe un valor de *P* correspondiente, y decimos que *P* es función de *t*.

En cada uno de estos ejemplos se escribe una regla por la cual, dado un número (*r*, *w* o *t*) se asigna otro número (*A*, *C* o *P*). En cada caso, decimos que el segundo número es función del primero.

> "Una **FUNCIÓN** *f* es una regla que asigna a cada elemento *x* de un conjunto *A* exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto *B*".

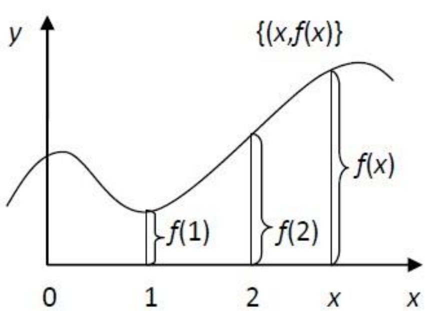
El conjunto *A* se llama **Dominio** de la función. El número $f(x)$ es el **valor de *f* en *x*** y se lee "*f* de *x*". El **Rango** de *f* es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$, conforme x varía en todo el dominio *A*. Un símbolo que representa un número arbitrario en el *dominio* de una función *f* se llama **Variable Independiente**. Un símbolo que representa un número en el rango de *f* se llama **Variable Dependiente**. En el primer ejemplo, *r* es la variable independiente y *A* es la variable dependiente.

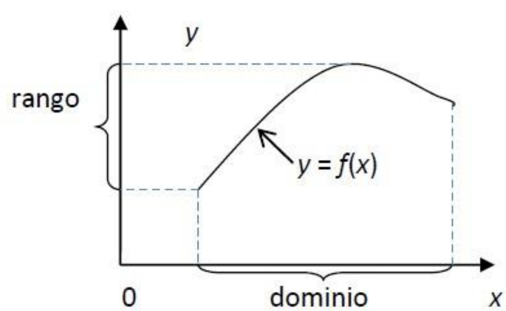
Una Función se puede representar por un diagrama de flechas, cada flecha une un elemento de *A* con un elemento de *B*. La flecha indica que $f(x)$ está asociada con *x*, $f(a)$ con *a*, etc.



El método más común para visualizar una función es su gráfica. Si f es una función con dominio A, entonces su gráfica es el conjunto de las parejas ordenadas $\{(x, f(x))/x \in A\}$. En otras palabras la gráfica de f consta de todos los puntos (x,y) en el plano coordenado, tales que $y = f(x)$ y x está en el dominio de f.

La gráfica de una función f nos da una imagen útil del comportamiento de una función. Como la coordenada y de cualquier punto (x,y) de la gráfica es $y = f(x)$, podemos leer el valor de $f(x)$ a partir de la gráfica como la altura de esta última arriba del punto x. La gráfica de f también nos permite tener una imagen del dominio y del rango de f sobre el eje x y el eje y, respectivamente.

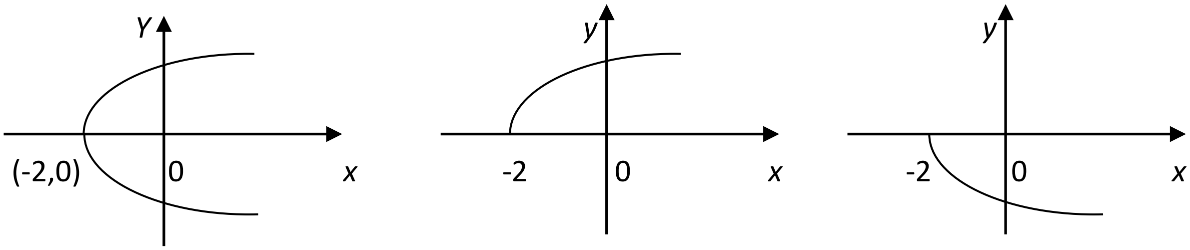




PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL

"Una curva en el plano xy es la gráfica de una función de x si y sólo si ninguna recta vertical se interseca con la curva más de una vez".

Por ejemplo, la parábola $x = y^2 - 2$ no es la gráfica de una función de x porque existen varias rectas verticales que intersecan dos veces esa parábola. Sin embargo, la parábola en realidad contiene las gráficas de dos funciones de x. Entonces $x = y^2 - 2$ significa $y^2 = x + 2$, por lo que $y = \pm\sqrt{x+2}$. Por lo tanto, las mitades superior e inferior de la parábola son las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x+2}$ y $g(x) = -\sqrt{x+2}$.



a) $x = y^2 - 2$ b) $y = \sqrt{x+2}$ c) $y = -\sqrt{x+2}$

FUNCIONES SECCIONALMENTE DEFINIDAS

Las siguientes funciones están definidas por fórmulas diferentes en diferentes partes de sus dominios.

- Una función f se define por:

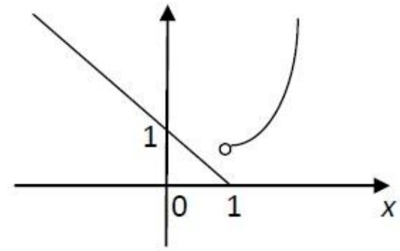
$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Evaluaremos $f(0)$, $f(1)$ y $f(2)$ y realizaremos la gráfica:
Una función es una regla. Para esta función en particular, la regla es: primero se considera el valor de entrada x. Si sucede que $x \leq 1$, entonces el valor de $f(x)$ es $1 - x$. Por otra parte si $x > 1$, entonces el valor de $f(x)$ es x^2.

Como $0 \leq 1$, tenemos $f(0) = 1 - 0 = 1$

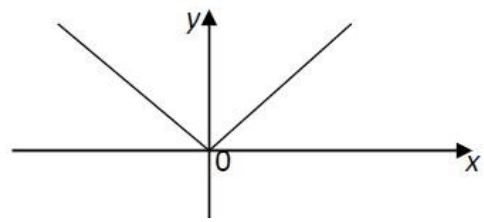
Como $1 \leq 1$, tenemos $f(1) = 1 - 1 = 0$

Como $2 > 1$, tenemos $f(2) = 2^2 = 4$



- La función valor absoluto, $f(x) = |x|$

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Vemos que la gráfica de f coincide con la recta $y = x$ a la derecha del eje y, y coincide con la recta $y = -x$ a la izquierda del eje y.

SIMETRÍA

Si una función f satisface $f(-x) = f(x)$, para todo número x en su dominio, entonces f se denomina **Función Par**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es par porque:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

El significado geométrico de una función par es que su gráfica es simétrica con respecto al eje y.

Si una función f satisface $f(-x) = -f(x)$, para todo número x en su dominio, entonces f se denomina **Función Impar**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es impar porque:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen.

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Se dice que una función es **Creciente** en un intervalo L, si:

$f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en L

Se dice que una función es **Decreciente** en un intervalo L, si:

$f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en L

TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

Al aplicar ciertas transformaciones a la gráfica de una función dada podemos obtener las graficas de ciertas funciones relacionadas.

En primer lugar, consideremos las **traslaciones**. Si c es un número positivo, entonces la gráfica de $y = f(x) + c$ es precisamente la de $y = f(x)$ desplazada hacia arriba una distancia de c unidades (debido a que cada coordenada y se incrementa el mismo número c). Del mismo modo, si $g(x) = f(x - c)$, donde $c > 0$, entonces el valor de g en x es el mismo que el valor de f en $x - c$ (c unidades a la izquierda de x). Por lo tanto, la gráfica de $y = f(x - c)$ es precisamente la de $y = f(x)$ desplazada c unidades a la derecha.

- **Desplazamientos verticales y horizontales:**

$y = f(x) + c$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia arriba. $y = f(x) - c$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia abajo. $y = f(x - c)$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia la derecha. $y = f(x + c)$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia la izquierda.

Consideremos ahora las trasformaciones de **alargamiento** y **reflexión**. Si $c > 1$, entonces la gráfica de $y = c\,f(x)$ es la de $y = f(x)$ alargada en el factor de c en la dirección vertical (porque cada coordenada y se multiplica por el mismo número c.

La gráfica de $y = -f(x)$ es la de $y = f(x)$ reflejada respecto al eje x, porque el punto $(x, -y)$ reemplaza al punto (x,y)

- **Alargamientos y Reflexiones verticales y horizontales.**

Supóngase que $c > 1$. Para obtener la gráfica de:

$y = c\,f(x)$, alárguese la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de c. $y =$

$(1/c)\,f(x)$, comprímase la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de c. $y=$

$f(cx)$, comprímase la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de c. $y =$

$f(x/c)$, alárguese la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de c. $y = -$

$f(x)$, refléjese la gráfica de $y = f(x)$ respecto al eje x.

$y = f(-x)$, refléjese la gráfica de $y = f(x)$ respecto al eje y.

TIPOS DE FUNCIONES

- **Funciones Lineales:**

Cuando se dice que y es una función lineal de x, lo que quiere dar a entender es que la gráfica de esta función es una recta, de tal manera puede usar la fórmula pendienteordenada de la ecuación de una recta para escribir una fórmula para la función como: $y = f(x) = mx + b$

Una de las características representativas de las funciones lineales es que crece en una proporción constante. Ej: $f(x) = 3x - 2$, observe que siempre que x aumenta en 0,1, el valor de $f(x)$ se incrementa en 0,3.

x	$f(x) = 3x - 2$
1,0	1
1,1	1,3
1,2	1,6
1,3	1,9
1,4	2,2

1,5	2,5

Cálculo de la pendiente de una recta:

Si una recta pasa por los puntos $(x_0; y_0)$ y $(x_1; y_1)$, su pendiente m se calcula así:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Significado de la pendiente de una recta:

Si tomamos dos puntos P_0 y P_1 cuyas abscisas x_0, x_0+1, difieren en 1, entonces sus ordenadas difieren en m:

$$[m\,(x_0 + 1) + n] - [m x_0 + n] = m$$

Por lo tanto: La pendiente de una recta es el incremento de la ordenada cuando la abscisa se incrementa en una unidad.

Ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene pendiente m:

La ecuación de la recta que pasa por un punto (x_0,y_0) y tiene una pendiente m es:

$$y = y_0 + m\,(x - x_0)$$

Relación de las pendientes de dos rectas paralelas:

Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente.

Relación de las pendientes de dos rectas perpendiculares:

Sean las rectas r_1 y r_2 de pendientes m_1 y m_2 respectivamente:

r_1: $y = m_1\,x + n_1 \rightarrow m_1\,x - y + n_1 = 0 \rightarrow (m_1,-1) \perp r_1$

r_2: $y = m_2\,x + n_2 \rightarrow m_2\,x - y + n_2 = 0 \rightarrow (m_2,-1) \perp r_2$

Si $r_1 \perp r_2$ entonces $(m_1,-1) \perp (m_2,-1) \rightarrow m_1 \,.\, m_2 + 1 = 0 \rightarrow m_1 \,.\, m_2 = -1$

Si dos rectas son perpendiculares, sus pendientes m_1 , m_2, cumplen la relación:

$m_1 \,.\, m_2 = -1$ o bien $m_2 = -\frac{1}{m_1}$

- **Funciones Cuadráticas:**

Estas funciones están definidas para todo número real, es decir su dominio es **R**. La representación gráfica es una curva llamada **parábola**, los puntos del plano que verifican la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, a ≠ 0 constituyen la gráfica.

Ejemplo: Sea $y = ax^2$.

Notar que si a > 0, las parábolas se abren hacia arriba, y tienen un mínimo en $x = 0$. Si a < 0, las parábolas se abren hacia abajo, en este caso las curvas tienen un máximo en $x =$ 0.

Las dos gráficas son simétricas con respecto al eje y. Esto significa que si el punto (x_1,y_1) está sobre una curva, también lo está el punto de coordenadas $(-x_1, y_1)$.

Por ejemplo para la curva $y = 2x^2$ los puntos (1, 2) y (-1, 2) pertenecen a ella. El único punto que pertenece al eje de simetría y también a la parábola se llama vértice. Las dos parábolas tienen vértice V(0,0).

Las parábolas son curvas simétricas, que alcanza un mínimo (o un máximo) en su vértice.

Intersección con el eje y:

Hay que hacer x = 0 en la función: $f(0) = a$x2 + bx + c, es decir, (0, c) es el punto de corte de la parábola con el eje y.

Para determinar las coordenadas del vértice $v(h;k)$, buscamos los puntos en que la recta $y = c$ corta a la parábola, para lo cual resolvemos es siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = c \end{cases}$$

Solución: $(x; y) = (0; -\frac{b}{a}); (0; c)$

La recta $y = c$ corta a la parábola en puntos de abscisas $x = 0$ y $x = -\frac{b}{a}$, la abscisa del vértice es el punto medio, tanto si la curva se abre hacia arriba, como hacia abajo es:

$$h = \frac{0 + \left(-\frac{b}{a}\right)}{2} = -\frac{b}{2a}$$

La ordenada del vértice se obtiene evaluando la función en: $-\frac{b}{2a}$

En resumen, las coordenadas del vértice son:

$$v(h,k) = \left(-\frac{b}{2a}; f(h)\right)$$

Intersección con el eje x:

Hay que hacer $y = 0$ es decir determinar los ceros de la función o raíces de la ecuación de segundo grado $0 = ax^2 + bx + c$

Estas ecuaciones pueden tener dos soluciones distintas, una solución o ninguna, según sea el discriminante $d = b^2 - 4ac$, mayor, igual o menor que cero.

Si $d > 0$ el gráfico corta al eje x en dos puntos, la función tiene dos ceros.

Si $d = 0$ el gráfico toca al eje x en un único punto, es el vértice de la parábola.

Si $d < 0$ el gráfico de la parábola no corta al eje x.

Funciones Exponenciales:

Son las funciones de la forma $f(x) = a^x$, donde la base a es una constante positiva.

El dominio es $(-\infty,\infty)$ y el rango es $(0,\infty)$.

Ejemplo:

La función $f(x) = 2^x$ es una función exponencial porque la variable "*x*", es el exponente. No debe confundirse con la función potencia $g(x) = x^2$, en la cual la variable es la base.

Si *x* = *n*, un entero positivo, entonces: $a^n = n. n \ldots . . n$ (*n* factores).

Si *x* = 0, en tal caso a^0= 1.

Si *x* = -*n*, donde *n* es un entero positivo, entonces: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Si *x* = *p/q*, es un número racional, donde *p* y *q* son enteros positivos y *q* > 0, entonces: $a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$

La gráfica de toda función exponencial pasa por el punto (0; 1), además, a medida que aumenta la base "*a*", se incrementa más rápido la función (para *x* > 0).

Pueden diferenciarse a tres tipos de funciones exponenciales:

Si 0 < *a* < 1, disminuye la función exponencial.

Si *a* = 1, es una constante.

Si *a* > 1, se incrementa la función exponencial.

Ley de los exponentes:

a) $a^{x+y} = a^x a^y$

b) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

c) $(a^x)^y = a^{xy}$

d) $(ab)^x = a^x b^x$

El número e:

De todas las bases posibles para una función exponencial, existe una que es la más conveniente para los propósitos del cálculo. La elección de una base *a* se ve influida por la manera en que la gráfica de la función $y = a^x$ cruza el eje *y*. Resulta que algunas funciones de cálculo se simplificarán en gran medida si se elige la base *a* de manera que la pendiente de la línea tangente a $y = a^x$ en (0, 1) sea "exactamente" 1. De hecho, existe tal número y es denotado por la letra e.

Función Inversa:

Se llama función inversa o recíproca de f a otra función f^{-1} que cumple:

$$f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$$

No todas las funciones poseen inversa, por ejemplo, $f(x) = x^2$.
A una función f se la llama "función uno a uno" si nunca adopta el mismo valor dos veces, es decir:

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \forall\, x_1 \neq x_2$$

Prueba de la línea horizontal: Una función es uno a uno si y sólo si, ninguna línea horizontal interseca su gráfica más de una vez.

Definición: Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. Luego su función inversa f^{-1} tiene dominio B y rango A y se define mediante:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y; \qquad \forall y \text{ en } B$$

Ecuaciones de cancelación:

$$f^{-1}(f(x)) = x; \quad \forall\, x \text{ en } A$$

$$f(f^{-1}(x)) = x; \quad \forall x \text{ en } B$$

Pasos para encontrar la función inversa de una función uno a uno:

a) Escriba $y = f(x)$

b) Resuelva la ecuación para *x* en términos de *y* (de ser posible)

c) Para expresar f^{-1} como una función de *x*, intercambie *x* e *y*. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$

La gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f respecto a la línea $y = x$

Funciones Logarítmicas:

Son las funciones $f(x) = \log_a x$, donde la base *a* es una constante positiva. Son funciones uno a uno, debido a esto, son las funciones inversas de las funciones exponenciales. El dominio es (0,∞) y el rango es (- ∞,∞).

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Propiedades:

a) $\log_a(a^x) = x \quad \forall\, x \in \Re$

b) $a^{\log_a x} = x \quad \forall\, x > 0$

Leyes de los logaritmos:

Si *x* e *y* son números positivos, entonces:

a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ b) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

c) $\log_a(x^r) = r \log_a x$ (donde *r* es cualquier número real)

Logaritmos Naturales:

Al logaritmo con base *e* se lo denomina "*Logaritmo Natural*": $log_e x = ln\, x$, por lo tanto:

$$\ln(e^x) = x \quad x \in \Re$$

$$e^{\ln x} = x \quad x > 0$$

Funciones Constantes:

La función constante $f(x) = c$ tiene el dominio $\mathcal{R}$ y su rango es el número c. Su gráfica es una recta horizontal.

Funciones Potencias:

Una función de la forma $f(x) = x^a$, donde a es una constante, se llama Función Potencia. Consideremos los siguientes casos:

a. $a = n$, un entero positivo. La forma general de la gráfica de $f(x) = x^n$ depende de si n es par o impar.

Si n es par, entonces $f(x) = x^n$ es una función par y su gráfica es similar a la parábola $y = x^2$. Si n es impar, entonces $f(x) = x^n$ es una función impar y su gráfica es similar a la parábola $y = x^3$.

b. $a = -1$. La función $f(x) = x^{-1} = 1/x$. Su gráfica tiene la ecuación $y = 1/x$, tiene la forma de una hipérbola equilátera con los ejes de coordenadas como asíntotas.

c. $a = 1/n$, n un entero positivo. La función $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ es una **Función Raíz**.

Para $n = 2$, es una función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$, cuyo dominio es $[0,\infty)$ y cuya gráfica es la mitad superior de la parábola $x = y^2$. Para otros valores pares de n, la gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ es similar a la de $y = \sqrt{x}$. Para $n = 3$, tenemos la función raíz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$, cuyo dominio es $\mathcal{R}$. La gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$, para n impar es similar a la de $y = \sqrt[3]{x}$.

Polinomios:

Una función P recibe el nombre de Polinomio si:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

Donde n es un entero no negativo y los números a_0 , a_1 ,…, a_n , son constantes llamadas **Coeficientes** del polinomio. El dominio de cualquier polinomio es $\mathcal{R} = (-\infty, \infty)$. Si el primer coeficiente $a_n \neq 0$, entonces el grado del polinomio es n. Un polinomio de primer grado es de la forma $P(x) = ax + b$, y se llama función lineal porque su gráfica es la recta $y = ax + b$ (pendiente a, ordenada al origen b.

Un polinomio de segundo grado es de la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$, y se llama función cuadrática.

Funciones Racionales:

Una función racional f es una razón de dos polinomios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde P y Q son polinomios. El dominio consta de todos los valores de x tales que $Q(x) \neq 0$.

Funciones Algebraicas:

Una función f recibe el nombre de función algebraica si puede construirse usando operaciones algebraicas (adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíz) a partir de polinomios.

Funciones Trigonométricas:

Una función f recibe el nombre de función trigonométrica si es de la forma: sen x, cos x, tg x, etc. En la gráfica de f se utiliza la medida Radián, por ejemplo, la $f(x) =$ sen x, se entiende que sen x significa el seno del ángulo cuya medida en radianes es x. El dominio para las funciones seno y coseno es $(-\infty, \infty)$ y el rango es el intervalo cerrado $[-1,1]$.