RELACIONES - INTRODUCCIÓN

Anteriormente dijimos que en la computación aplicábamos la teoría de conjuntos de muchas formas. Una de ellas era modelando la realidad. En la realidad nos encontramos con objetos que queremos simbolizar en nuestro software. Esos objetos pueden ser tratados en forma individual o colectiva y, para tratarlos colectivamente la teoría de conjuntos nos daba herramientas formidables.

Ahora bien, esos mismos objetos en la realidad se relacionan. Por lo tanto, tenemos personas, clientes, empleados, productos…etc. Pero, también queremos poder establecer de manera formal esas relaciones.

Sigamos pensando, por ejemplo, en algún software que vayamos a crear para una empresa comercial.
Seguramente quisiéramos responder preguntas como…

¿Qué clientes atendió el vendedor #123?
¿Qué clientes han comprado nuestros neumáticos 195-65-15 hace más de 2 años?
¿Qué clientes nunca nos compraron baterías Williard de 75 amperes?

De estas preguntas podemos deducir fácilmente al menos tres conjuntos. Es evidente que hay, al menos, un conjunto de clientes, otro de vendedores (o empleados en el cual podemos discriminar la función) y otro de productos.

También se hace evidente que para modelar la realidad el software puede establecer con certeza qué elementos de qué conjuntos se han relacionado en qué fechas.

Estos temas la informática los resuelve utilizando los conceptos de relaciones que nos proporciona la teoría de relaciones que iremos viendo a continuación.

RELACIONES BINARIAS

Definición de Relación Binaria: Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, será una relación binaria $R_{A=>B}$ cualquier subconjunto del producto cartesiano AXB
Es decir
R es una relación de A en B ⇔ $R_{A=>B} \subseteq A \times B$
De lo cual deducimos que los elementos de la relación $R_{A=>B}$ son pares ordenados (a_i, b_i) donde $a_i \in A$ y $b_i \in B$.

Ejemplo:

Tenemos dos conjuntos
- A = {a1, a2}
- B = {b1, b2, b3}

Vemos que

A x B = {(a1, b1), (a1, b2), (a1, b3), (a2, b1) (a2, b2) (a2, b3)}

R_i será una relación binaria A=>B en la medida que R_i sea un subconjunto del producto cartesiano.
- R_1 = {(a1, b1)}
- R_2 = {(a1, b2), (a1, b3)}
- R_3 = {(a1, b1), (a1, b2), (a1, b3), (a2, b1) (a2, b2) (a2, b3)} = A x B

Por lo tanto, todos los ejemplos anteriores constituyen relaciones binarias entre los conjuntos A y B.

Para pensar…
Relaciones los conceptos de Familia de Partes o Conjunto Potencia con las relaciones.

De la definición anterior, podemos deducir que una relación binaria puede contener pares ordenados de un mismo conjunto. En este caso tendremos una relación que va de A en A y será un subconjunto del producto cartesiano A x A.

¿CÓMO DEFINIR RELACIONES?

En los ejemplos anteriores de relaciones binarias, las mismas fueron hechas explícitas en forma extensiva. Sin embargo, no siempre queremos o podemos establecer una relación de esa forma.

Esto supone entonces que una relación también puede ser establecida por comprensión a través de reglas.

Veamos un ejemplo de esto.
- A = {x/x ∈ ℕ}
- B = {x/x ∈ N ^ x es par}

Luego establecemos una posible relación entre A y B
- R = {(x, y) / x ∈ A ^ y ∈ B ^ x>y}

Por supuesto que hay formas más sencillas de establecer esta misma relación, pero, en cualquier caso, la relación resultante resulta tener infinitos elementos (pares ordenados) y no hubiera sido posible establecerla por extensión.

DOMINIO Y RANGO

Al hablar de relaciones aparece inmediatamente el concepto de par ordenado. Sabemos entonces que los pares ordenados son elementos de la relación (que es un conjunto) y que están formados por coordenadas. Estas coordenadas se corresponden con los conjuntos que conforman el producto cartesiano del cual la relación es subconjunto.

Ahora bien…
Si una relación es subconjunto del producto cartesiano A x B, esto significa que no necesariamente todos los elementos de A están presentes en ella.
Lo mismo puede ocurrir con todos los elementos de B.

Definición de Dominio y Rango: Sean dos conjuntos cualesquiera A y B y sea una relación $R \subseteq A \times B$ definimos el dominio de la relación R, D(R) y el rango de la relación R, R(R) a los siguientes conjuntos…

$D(R) = \{a / a \in A \text{ y existe } b \in B / (a, b) \in R\}$ donde $D(R) \subseteq A$
$R(R) = \{b / b \in B \text{ y existe } a \in A / (a,b) \in R\}$ donde $R(R) \subseteq B$

Veamos un ejemplo de esto…

- $A = \{a_1, a_2\}$
- $B = \{b_1, b_2, b_3\}$
- $A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\}$
- $R1_{A, B} = \{(a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$

En el ejemplo anterior podemos apreciar que hay elementos de A y elementos de B que no están presentes en la relación (nos referimos a a_1 y b_3) aunque esta cumple perfectamente con ser un subconjunto del producto cartesiano.

Esto significa que hay un subconjunto del conjunto A que forma parte de la relación y un subconjunto del conjunto B que forma parte de la relación.

Estos subconjuntos de A y B son llamados Dominio y Rango o bien, Dominio e Imagen por diversos autores.

En el caso anterior diremos entonces…

Dominio $(R1_{A, B}) = D(R1_{A, B}) = \{a_2\}$
Rango $(R1_{A, B}) = R(R1_{A, B}) = \{b_1, b_2\}$

RELACIÓN INVERSA

Comencemos con una visión intuitiva.

Podemos imaginar a las relaciones también como transformaciones.

Pensemos en una máquina que, sin saber nosotros como funciona, podemos incorporarle materias primas por un lado para obtener un producto en el otro extremo.

Pensemos ahora que a esa máquina podemos reversarle el funcionamiento.
Esto significaría poner el producto terminado y que, al funcionar al revés, nos devuelva las materias primas.

Nos parece raro pero no lo es tanto. ¿Acaso no hablamos hoy día de reciclar materiales?

Si pensamos a la máquina en su descripción original estamos viendo una función de producción que, al menos por ahora, no nos interesa analizar.

Si pensamos a la máquina funcionando al revés, tenemos entonces una función inversa.

Definición de Relación Inversa: Sea R una relación de A en B se llama relación inversa de R a la relación R^{-1} donde $R^{-1} = \{(b, a) / (a, b) \in R\}$

Obsérvese que si R es una relación de A en B, entonces R^{-1} será una relación de B en A.

Veamos un ejemplo de esto:

Sean los conjuntos A y B y su producto cartesiano.
- $A = \{a_1, a_2\}$
- $B = \{b_1, b_2, b_3\}$
- $A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\}$

Sea una relación llamada R1
- $R1_{A,B} = \{(a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$

Entonces
- $R1^{-1}{}_{A,B} = \{(b_1, a_2), (b_2, a_2,)\}$

COMPOSICIÓN DE RELACIONES

La composición de relaciones es una operación entre relaciones que nos da una nueva relación.

Definición de Composición de Relaciones: Se llama composición de las relaciones $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$, y se denota $R \circ S$ (o bien RS), al subconjunto de A x C definido por:
$R \circ S = \{(a, c) \in A \times C / \exists\, b \in B : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$

Obsérvese que la composición de relaciones requiere que el rango o imagen de la primera relación constituya el dominio de la segunda.

Por lo tanto, sólo se pueden componer las relaciones R y S en la medida que $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$.

Veamos un ejemplo:

Sean los conjuntos A, B y C

- A = {-1, 0, 1}
- B = {a, b}
- C = {α, β, γ}

Las relaciones $R_{A,B}$ y $S_{B,C}$ definidas como

- $R_{A,B}$ = {(-1, a), (1, b)}
- $S_{B,C}$ = {(a, β), (b, γ). (a, γ)}

Entonces

- RS = {(-1, β), (-1, γ), (1, γ)}

Para pensar…
Defina una composición y descríbala usando diagramas de Venn.
Observe y analice el resultado.

RELACIONES SOBRE UN ÚNICO CONJUNTO

Ahora nos resulta obvio que podemos realizar un producto cartesiano de un conjunto por si mismo. Si al conjunto lo llamáramos A entonces tendríamos un producto cartesiano A x A y cualquier subconjunto de este producto cartesiano sería entonces una relación.

En la práctica y a la hora de modelar la realidad, tarea habitual de los informáticos, las relaciones de conjuntos con sí mismos son muy comunes.

Veamos algunos ejemplos de esto…

En el campeonato de fútbol juegan clubes contra clubes.
Luego tenemos Clubes y Partidos.

- Clubes = {Boca, River, Racing,…,Velez}
- Partidos – {(Boca, River), (Racing, Arsenal),…., (Velez, Boca)}

El orden de los pares ordenados no es un tema menor, ya que el primer componente del par ordenado nos indica cual es local y el segundo, en consecuencia, el visitante.

Las materias de la universidad tienen correlatividades.
Luego tenemos Materias y Correlatividades.

- Materias = {matemática 1, matemática 2, laboratorio 1,…, práctica profesional}
- Correlatividades = {(matemática 1, matemática 2),…,(matemática 1, base de datos 1)}

Podríamos seguir citando ejemplos de este tipo de relaciones de un único conjunto con mucha facilidad.

Justamente, por ser tan comunes estas relaciones se estudian algunas propiedades que les son particulares. Estas propiedades se verán a continuación.

PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

Reflexiva: Sea una relación $R_{A,\,A}$
$R_{A,\,A}$ es reflexiva ⇔ $\forall$ x ∈ A: (x, x) ∈ R
Obsérvese que todos los pares de la forma (x, x) deben estar presentes en R con x ∈ A.

Ejemplos

a) Sea A = {a, b, c, d} y R = {(a; b), (b; a), (a; a), (b; b), (c; d), (c; c), (d;d),(d;a)} definida sobre A.

   La relación R **es reflexiva** pues $\forall$ x ∈ A: (x; x) ∈ R, en efecto:
   a ∈ A ^ (a; a) ∈ R
   b ∈ A ^ (b; b) ∈ R
   c ∈ A ^ (c; c) ∈ R
   d ∈ A ^ (d; d) ∈ R.

b) Sea S = {(a; a), (b; b), (c; d), (c; a), (d; d), (d; c)} definida sobre el conjunto A del ejemplo anterior.

   No es reflexiva por que no se verifica que todos los pares de la forma (x; x) están en S, en efecto el par (c; c) ∉ S, siendo c un elemento de A.

c) Sea R la relación definida sobre Z por:
   R = {(a; b) ∈ Z x Z / a divide a b}.

   Como el conjunto Z es infinito, para saber sí R es reflexiva no podemos usar el recurso de ir verificando uno por uno si todos los pares de la forma (x; x) pertenecen a R. Aquí debemos **demostrar** que R es reflexiva, es decir debemos demostrar que: $\forall$ x ∈ Z: x divide a x.
   Sea x ∈ Z arbitrario, debemos probar que x divide x.
   Recordemos que x/ x si y solo sí $\exists$ c ∈ Z / x .c = x, o sea que debemos encontrar un entero c tal que x .c = x y ese entero es c = 1 pues
   x .1 = x, luego x divide a x y como x era arbitrario, vale que $\forall$ x ∈ Z : x divide a x y podemos asegurar que R es reflexiva.

Simétrica: Sea una relación $R_{A,\,A}$
$R_{A,\,A}$ es simétrica ⇔ $\forall$ x ∈ A $\forall$ y ∈ A: si $\exists$(x, y) ∈ R => $\exists$(y, x) ∈ R
En otras palabras, R es simétrica si para cada par (x; y) que pertenece a R, también pertenece a R el par (y; x).

Ejemplos

a) Sea R = {(a; a), (a; b), (b; c), (c; c), (b; a), (c; b)} definida sobre el conjunto A = {a, b, c, d, e}. Esta relación es simétrica porque:

(a, a) ∈ R => (a, a) ∈ R
(a, b) ∈ R => (b, a) ∈ R
(b, c) ∈ R => (c, b) ∈ R
(c, c) ∈ R => (c, c) ∈ R
(b, a) ∈ R => (a, b) ∈ R
(c, b) ∈ R => (b, c) ∈ R.

b) Sea A = {1,2,3,4} y R = {(1;2), (2;3), (3;2), (4;4)}, R no es simétrica porque el par (1, 2) ∈ R y el par (2; 1) ∉ R.
c) Sea A = R (conjunto de números reales) y sea la siguiente relación definida sobre R.
   E = {(x, y) ∈ R x R / |x| = |y|}

La relación E es simétrica. En efecto: sea (x, y) ∈ E arbitrario. Hay que demostrar que (y, x) ∈ E.
Sea (x, y) ∈ E => |x| = |y| => |y| = |x| => (y, x) ∈ E.

Transitiva: Sea una relación $R_{A,\,A}$
$R_{A,\,A}$ es transitiva ⇔ ∀x ∈ A, ∀y ∈ A, ∀z ∈ A:
Si ∃(x, y) ∈ R ^ ∃(y, z) ∈ R => ∃(x, z) ∈ R.
En otras palabras R es transitiva si cuando los pares (x; y) e (y; z) pertenecen a R, también el par (x; z) ∈ R.

Ejemplos

a) Sea A = {a, b, c, d} y R = {(a; b), (a; c), (b; d), (a; d)}, R es transitiva porque: (a, b) ∈ R, (b, d) ∈ R y también (a; d) ∈ R.
b) La relación del ejemplo anterior:
   R = {(a; a), (a; b), (b; c), (c; c), (b; a), (c; b)} no es transitiva por que (a, b) ∈ R, (b, c) ∈ R y sin embargo (a; c) ∉ R.
c) L relación del ítem c) del ejemplo anterior es transitiva **(demostrar el alumno).**

Completa: Sea una relación $R_{A,\,A}$
$R_{A,\,A}$ es completa ⇔ ∀x ∈ A, ∀y ∈ A siendo x ≠ y: ∃(x, y) ∈ R v ∃(y, x) ∈ R
Es decir que una relación R es completa cuando para cada elemento (x; y) de A x A, con x ≠ y, al menos uno de los dos pares: (x; y) o (y; x) está en R.

Ejemplos

a) Sea A = {1,2,3} y sea R = {(1;2), (3;1), (2;3)}, es completa por que
   1 ≠ 2 ^ (1; 2) ∈ R
   1 ≠ 3 ^ (3; 1) ∈ R
   2 ≠ 3 ^ (2; 3) ∈ R
b) La relación S = {(a; b) ∈ Z x Z / a < b} es completa porque para cada par (x; y) de números enteros, con x ≠ y, siempre se pueden comparar y por la ley de tricotomía, sabemos que x < y o y < x.

Irreflexiva: Sea una relación $R_{A, A}$

$R_{A, A}$ es reflexiva ⇔ $\forall$ x ∈ A: (x, x) ∉ R

Obsérvese que ningún par de la forma (x, x) debe estar presente. En consecuencia, hablar de “ireflexividad” no es lo mismo que hablar de “no reflexividad”.

Ejemplo

La relación S = {(x; y) ∈ Z x Z / x < y} es irreflexiva por que $\forall$x ∈ Z, (x; x) ∉ S porque x no es menor que sí mismo.

Antisimétrica: Sea una relación $R_{A, A}$
$R_{A, A}$ es anti - simétrica ⇔ $\forall$x ∈ A, $\forall$y ∈ A: si (x, y) ∈ R ^ (y, x) ∈ R => x = y

Obsérvese que esto es equivalente a decir que basta con un caso donde
- $\exists$ (x, y) y $\exists$ (y, x) ^ x ≠ y para que no cumpla con la anti - simetría. O bien R es antisimétrica si no contiene simultáneamente los pares (x; y) e (y; x) excepto el caso en que x = y.

Ejemplo:

Sea R la relación **meno**r definida en el conjunto A = {1, 2, 3, 4}
R = {(1; 2),(1; 3),(1; 4),(2; 3),(3;4),(3;4)} es antisimétrica por que en el condicional (x, y) ∈ R ^ (y, x) ∈ R => x = y el antecedente es siempre falso porque para cada par (x; y) ∈ R, no es cierto que (y; x) ∈ R, luego el condicional es verdadero (ver tabla del condicional).

CLASIFICACIÓN DE LAS RELACIONES

Las diferentes propiedades que pueden cumplir las relaciones ha llevado a los matemáticos a clasificarlas.

Veamos cómo es esa clasificación.

Relaciones de Orden Parcial

Una relación $R_{A, A}$ es de Orden Parcial si cumple con las propiedades **reflexiva, antisimétrica** y **transitiva**.

Ejemplo

Sean A = {2, 4, 6, 8}, R = {(x; y) ∈ A x A / x $\leq$ y }
R es reflexiva pues: $\forall$x ∈ A: x $\leq$ x.
R es antisimétrica pues: (x, y) ∈ R ^ (y, x) ∈ R => x = y.
(x, y) ∈ R => x $\leq$ y
^ => x $\leq$ y $\leq$ x => x = y
(y, x) ∈ R => y $\leq$ x

R es transitiva pues: $\exists$ (x, y) ∈ R ^ $\exists$ (y, z) ∈ R => $\exists$ (x, z) ∈ R.

$(x, y) \in R \Rightarrow x \leq y$
$\wedge$ $\Rightarrow x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z \Rightarrow (x, z) \in R.$
$(y, z) \in R \Rightarrow y \leq z$

Relaciones de Orden Total

Una relación $R_{A, A}$ es de Orden Total si es de Orden Parcial y además cumple la propiedad de ser completa.

Por lo tanto, $R_{A, A}$ es de Orden Total si cumple con las propiedades **reflexiva, antisimétrica, transitiva y completa.**

Ejemplo

La relación anterior define un orden total en A porque además de ser de orden parcial también R es completa. Verifique esto el alumno.

Relaciones de Equivalencia

Una relación $R_{A, A}$ es de Equivalencia si cumple con las propiedades **reflexiva, simétrica y transitiva.**

Ejemplo

Sea A = R (conjunto de números reales) y sea la siguiente relación definida sobre R.

> $E = \{(x, y) \in R \times R \ / \ |x| = |y|\}$, es una relación de equivalencia. Verificar el alumno.

Se dice que las relaciones de equivalencia “abstraen” una forma de igualdad.

Cuando establecemos una relación de equivalencia podremos entonces establecer también clases de equivalencia.

$[a] = \{x / x \in A \wedge \mathbf{x\ R\ a}\}$

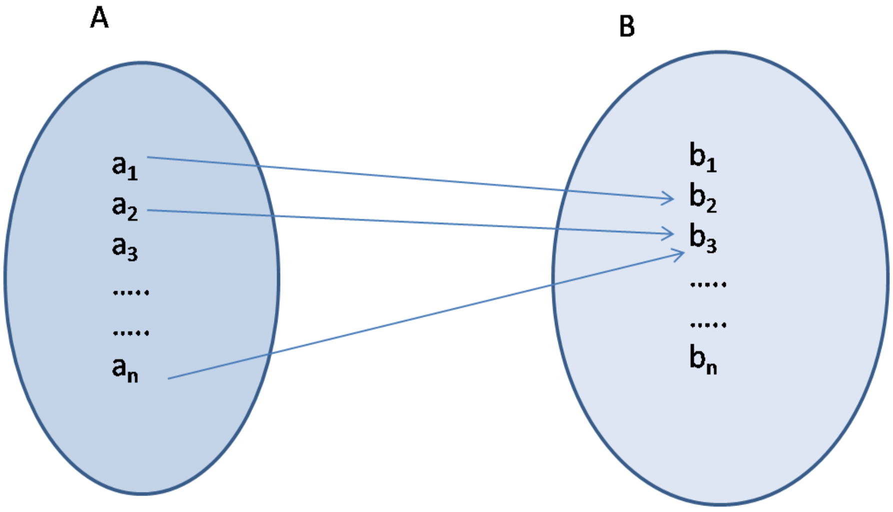
Léase x R a como que el elemento x está relacionado con el elemento a. En estos casos decimos que x es R – equivalente con a.

Las clases de equivalencia son muy útiles en problemas complejos de tecnología computacional cuando necesitamos “agrupar” elementos en diferentes clases.

REPRESENTACIÓN DE RELACIONES

Mayormente trabajaremos con relaciones binarias y, en consecuencia, nos enfocaremos en algunas formas posibles de representar a estas relaciones.

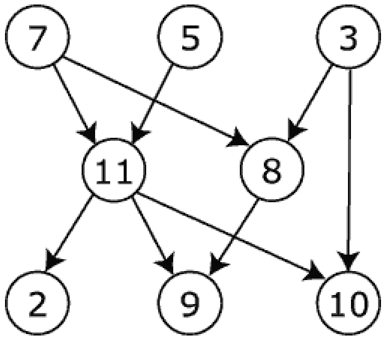
Representación mediante Diagramas de Venn



Puede apreciarse que la representación usa los diagramas para describir los conjuntos, en este caso A y B.

Una serie de arcos con una flecha indican que elementos del conjunto de partida A (en particular del subconjunto que llamamos dominio) se vinculan con que elementos del conjunto de llegada B (con los elementos del subconjunto de B que llamamos rango o imagen)

Representación mediante grafos



En este caso estamos representando una relación $R_{A, A}$ donde los "nodos" o "vértices" representan a los elementos del conjunto A.

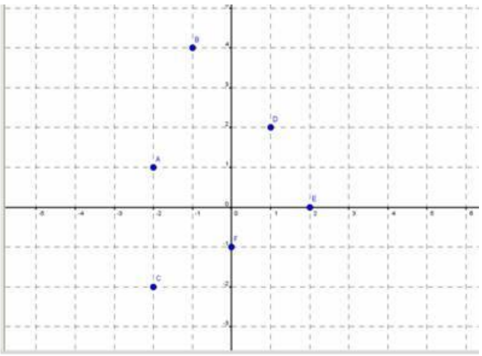
Vemos que entre los nodos hay flechas o arcos.
Estas flechas indican la "relación" entre dos nodos y, lo que es muy importante, la dirección de esa relación.

Si se observa con atención se apreciará que en la relación del ejemplo existe el par ordenado ((7,11) pero no existe el par (11, 7)

Una relación que fuera simétrica, por ejemplo, requeriría de flechas bidireccionales o la utilización de dos pares de flechas indistintamente.

Una relación que fuera reflexiva, o bien, un par ordenado relacionado con si mismo se representaría con una flecha que sale y llega al mismo nodo en forma de rulo o bucle.

Representación mediante ejes cartesianos



La representación anterior bien podría ser una relación donde el conjunto de partida y de llegada son los números naturales.

El mismo conjunto ha sido dispuesto en dos ejes transversales llamados “x” e “y” que facilitan establecer coordenadas para los puntos que simbolizan la relación.

Si observamos apreciaremos que la relación representada a la que llamaremos R tiene los siguientes pares ordenados

R = {(2, 0), (0, -1), (-2, -2), (-2, 1), (1, 2), (-1, 4)}

La convención universalmente utilizada es que el eje horizontal “x” es el conjunto de partida siendo el eje “y” el de llegada.

Representación mediante matrices

Aulas >	aula 1	aula 2	aula 3	aula 4
Alumnos v				
alberto	x			
alejandro	x		x	
carlos		x		
darío		x		x
ernesto		x		
fabio	x		x	
gerardo			x	
horacio				x
juan			x	x

El ejemplo nos ilustra una relación entre el conjunto de alumnos y de aulas. Más concretamente “Qué alumnos asisten a que aulas”.

Las filas nos muestran al conjunto de partida (Alumnos) y las columnas al conjunto de llegada (Aulas)

La existencia de una “x” nos muestra que el alumno de esa fila asiste en algún momento al aula de esa columna.

Las mencionadas son algunas de las formas posibles en que una relación puede ser representada. No existe una forma “ideal” de representación.

Dado un problema a resolver y dependiendo de los conjuntos y su cardinalidad nos convendrá más alguna forma que otra.