CONJUNTOS – INTRODUCCIÓN

En matemáticas un conjunto es una colección de objetos que constituye un objeto en sí mismo. **Esto nos permite tratar a esa colección como un todo.**

Esto significa que podemos tratar a todos o cada uno de los elementos del conjunto en forma individual o bien, referirnos a ellos a través del conjunto mismo.

Pensemos en un ejemplo sencillo. El conjunto S de los días de la semana.

- S = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}

Sabemos que todos los días tienen en común una duración de 24 horas.

Es así que podríamos decir…

- El lunes tiene 24 horas.
- El martes tiene 24 horas.
- El domingo tiene 24 horas.

Pero tenemos una colección o conjunto que llamamos S. Por lo tanto, no necesitamos nombrar a cada uno de sus elementos. Podemos decir, más fácilmente, que **los elementos de S tienen 24 horas.**

Podemos definir a un conjunto por extensión y, entonces, establecer sus elementos en forma arbitraria.

Podemos también definir a un conjunto por comprensión. Esto es muy común en conjuntos con una gran cantidad de elementos o bien, en conjuntos con infinitos elementos.

Cuando hacemos esto lo usual es definir al conjunto a partir de una propiedad o atributo común de todos sus elementos.

Veamos un ejemplo de esto.

- **N = {x/x es un número natural}**

Si un conjunto es una colección de objetos bien determinados, estos objetos que pertenecen al conjunto son llamados **elementos**.

Es usual que llamemos a los conjuntos con un nombre o letra mayúscula. También es usual que llamemos a los elementos con minúscula. Esto es una convención.

Veamos ahora algunos otros ejemplos de conjuntos…

- V = {x/x es una letra del alfabeto}
- C = {x/x es un cliente del Banco Industrial}
- M = {x/x es un mes del año}

Si observamos los ejemplos anteriores veremos que todos los conjuntos pueden ser descriptos por extensión. Sin embargo, es de suponer, que la descripción extensiva del conjunto C nos resultaría sumamente incómoda por la gran cantidad de clientes que implica una compañía bancaria.

En el caso del conjunto N, en cambio, notaremos que la descripción extensiva es imposible dada la infinitud de elementos que a este pertenecen.

LA INFORMÁTICA Y LOS CONJUNTOS

¿Por qué estudiar teoría de conjuntos si yo quiero programar computadoras?

En la computación aplicamos la teoría de conjuntos de muchas y diferentes formas. Ampliaremos más adelante como es que usamos estas herramientas. Pero digamos que, en principio, gran parte del trabajo de los informáticos se vincula a modelar la realidad.

Es en esa realidad que encontramos personas, clientes, empleados, productos que de alguna forma debemos agrupar y poder tratar en forma individual o colectiva.

Los conjuntos nos proporcionan las herramientas para hacer esto. Podemos tratar a los elementos de una colección como un todo, podemos tomar sólo una parte de ellos (subconjunto) o podemos trabajar con un individuo en particular.

UNICIDAD DE LOS ELEMENTOS DE UN CONJUNTO

Los elementos que pertenecen a un conjunto son únicos. Ahora veamos los siguientes ejemplos:

1. Conjunto de modelos fabricados por FIAT ARGENTINA SA
   F= {500, palio, línea, siena, punto}
2. Conjunto de automotores estacionados en la cuadra…
   C= {palio, fiesta, palio…}

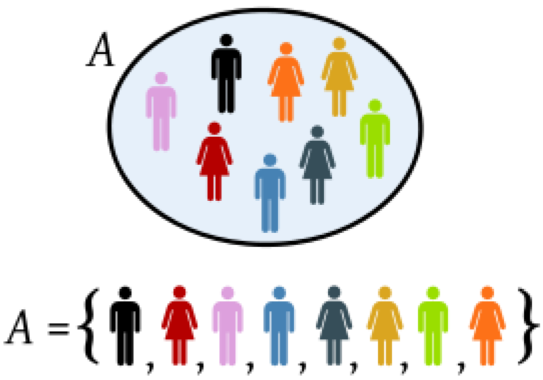
Parece que entramos en una contradicción.

La compañía citada fabrica muchas unidades de cada uno de los vehículos del ejemplo 1. Sin embargo, nos referimos a los modelos que fabrica. Cada uno de esos modelos es único más allá de cuantos terminen construyendo.

En el ejemplo 2 también parece que tuviéramos una contradicción. Sin embargo, ahora no hablamos de CONCEPTS como se los llama en la industria automotriz sino de unidades concretas que se han fabricado. Los dos automóviles palio del conjunto C son claramente diferentes. Cada uno tiene su propio número de chasis, motor, patente y, posiblemente estén en estados muy diferentes según como los hayan cuidado sus dueños.

DIAGRAMAS DE VENN

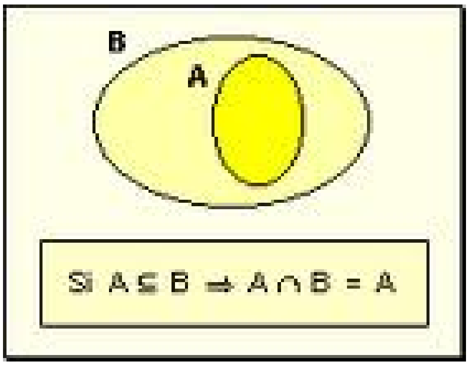
Una forma muy usual de describir a los conjuntos es mediante el uso de estos diagramas.



SUBCONJUNTOS

Sea un conjunto al que llamaremos B.

A será un subconjunto incluido en B ($A \subseteq B$), si al definirlo, todo elemento que pertenece al conjunto A también pertenece al conjunto B.



También podemos decir que $A \subseteq B \Longleftrightarrow \forall\ x \in A \Rightarrow x \in B$

Veamos algunos ejemplos de subconjuntos…

Dado N = {conjunto de los números naturales} son subconjuntos de N…

- M1 = {x/x es un número natural ^ x es par ^ x < 10} o bien

  M1 = {2, 4, 6, 8)

- M2 = {x/x es un número natural ^ x es impar ^ $5 < x \leq 17$} o bien
  M2 = {7, 9, 11, 13, 15, 17}

Vemos que todos los elementos de los conjuntos M1 y M2 también pertenecen al conjunto N y, por lo tanto, M1 y M2 son subconjuntos del conjunto N

IGUALDAD DE CONJUNTOS

Dados dos conjuntos A y B, estos son iguales si se cumple

$$A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A$$

Teorema: A = B <==> A ⊆ B y B ⊆ A

Demostración:

A = B <==> ∀x (x ∈ A <==> x ∈ B) <==> ∀ x (x ∈ A => x ∈ B ^ x ∈ B => x ∈ A)

<==> ∀ x (x ∈ A => x ∈ B) ^ ∀ x (x ∈ B => x ∈ A)

Siendo estas últimas las definiciones, vistas anteriormente, de subconjuntos.

CONJUNTO REFERENCIAL

La computación es usada habitualmente para modelar la realidad. Los plazos fijos no están dentro de una computadora. Tampoco los clientes ni los empleados de un banco. Lo que almacenamos son símbolos que nos permiten modelar los objetos de la realidad y su comportamiento.

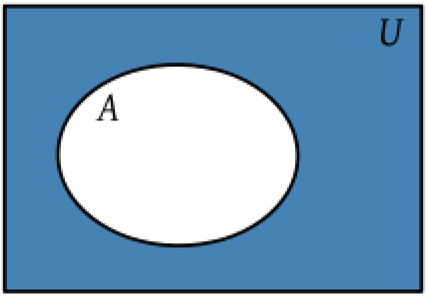
Las matemáticas son una herramienta imprescindible para modelar la realidad. Si queremos decirle a una persona cuanto la queremos no hay como la literatura y la poesía, pero, si queremos describir como gira la tierra alrededor del sol o cómo evoluciona un depósito a una determinada tasa de interés no hay forma de hacerlo más clara y eficazmente que con una simple ecuación.

Los conjuntos también nos sirven para modelar la realidad. Ahora bien, si hacemos una encuesta respecto de la imagen del gobierno o respecto de un determinado producto que se consume en nuestra ciudad, no es demasiado significativa la opinión de las personas que viven en Japón.

Es así como podemos definir a un conjunto referencial. Este será entonces un conjunto al que pertenecen todos los elementos de un determinado contexto que nos interesa estudiar. Por ejemplo, los habitantes de nuestra ciudad.

El conjunto referencial es el conjunto más abarcativo de los elementos que queremos estudiar. De esta forma, cualquier conjunto que se defina en un problema dado será un subconjunto del conjunto referencial.

Los conjuntos referenciales son a menudo llamados conjuntos universales o conjunto universo.



El conjunto referencial suele ser llamado con una X (letra x mayúscula) o una U (letra u mayúscula)

CONJUNTO UNITARIO

Los conjuntos unitarios son conjuntos que tienen un solo elemento.

CONJUNTO VACÍO

El conjunto vacío es aquel que no tiene elemento alguno. Se suele denotar como $\emptyset$ o con la simbología de dos llaves cerradas sin nada en medio { }

El conjunto vacío está por definición, incluido en cualquier conjunto que definamos. Todos los conjuntos INCLUYEN al conjunto vacío.

Teorema: Para cualquier conjunto A se verifica que $\emptyset \subseteq A$.
Demostración: supóngase que $\emptyset$ no incluido en A. Luego existe x tal que $x \in \emptyset$ y $x \notin A$. Esta situación es absurda ya que sabemos que $\nexists\, x \in \emptyset$. Entonces concluimos que $\emptyset \subseteq A$.

CARDINALIDAD

Dijimos antes que un conjunto puede tener un número finito o infinito de elementos. La cardinalidad de un conjunto es el número de elementos diferentes que ese conjunto tiene.

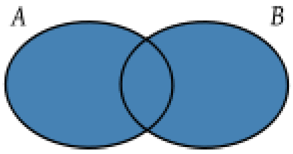
En consecuencia, la cardinalidad de un conjunto unitario es 1 (uno) y la cardinalidad de un conjunto vacío es 0 (cero)

La cardinalidad de, por ejemplo, un conjunto A se suele denotar con el símbolo $|A|$ o bien #A

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

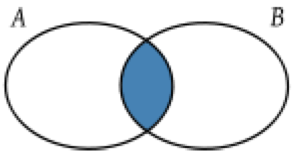
- **Unión**: (símbolo ∪) La unión de dos conjuntos *A* y *B*, que se representa como $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos *A* y *B*.

  $A \cup B = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}$



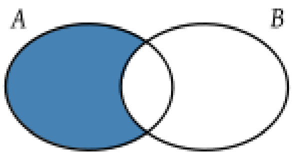
- **Intersección**: (símbolo ∩) La intersección de dos conjuntos *A* y *B* es el conjunto ($A \cap B$) de los elementos comunes a *A* y *B*.

  $A \cap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$



- **Diferencia**: (símbolo -) La diferencia del conjunto *A* con *B* es el conjunto $A - B$ que resulta de eliminar de *A* cualquier elemento que esté en *B*.

  $A - B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$

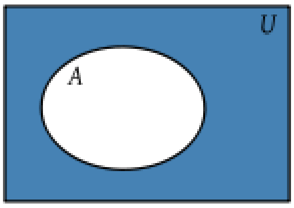


- **Complemento**: El complemento de un conjunto *A* es el conjunto A^C, también llamado –A o Ã que contiene todos los elementos que no pertenecen a *A* pero si pertenecen al conjunto universal o de referencia.

  $A^C = \{x \,/\, x \notin A \wedge x \in X\}$

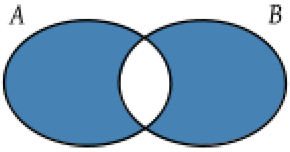
  Donde x ∈ X constituye una redundancia ya que todos los elementos pertenecen al conjunto de referencia.

  Puede deducirse entonces que $A^C = U - A$



- **Diferencia simétrica**: (símbolo Δ) La diferencia simétrica de dos conjuntos *A* y *B* es el conjunto *A* Δ *B* con todos los elementos que pertenecen, o bien a *A*, o bien a *B*, pero no a ambos a la vez.

  (A – B) ∪ (B – A) y otra forma es (A ∪ B) – (A ∩ B)



CONJUNTOS DISJUNTOS

Son conjuntos que no tienen elementos en común.

$$\forall x \in A : x \notin B$$

CONCEPTO DE CLASE O FAMILIA

Una clase o familia es un conjunto cuyos elementos son otros conjuntos.

Recordar que dado un conjunto podemos definir en él subconjuntos. Estos subconjuntos no pertenecen al conjunto referido, sino que están incluidos en él.

La diferencia con una clase es que no sólo podemos definir en ella subconjuntos, sino que los elementos mismos son conjuntos.

Ejemplo:

A = {Ø, {1}, {2}, {1,2}} donde podemos ver que los miembros de esta clase A son conjuntos que podrían a su vez ser clasificados en diferentes subconjuntos si quisiéramos.

FAMILIA DE PARTES O CONJUNTO POTENCIA

La familia de partes o conjunto potencia de un conjunto A suele expresarse como P(A) y es la CLASE o FAMILIA que agrupa a todos los subconjuntos posibles que se pueden definir en el conjunto A dado.

Estos serán, por lo tanto, ELEMENTOS del conjunto potencia.

Ejemplo: A = {1,2} entonces P(A) = {Ø, {1}, {2}, {1.2}}

La cardinalidad de P(A) se escribe $|P(A)|$ y es igual a $2^{|A|}$

ALGUNAS PROPIEDADES PARA RECORDAR

Los conjuntos y las operaciones que hemos explicado satisfacen una serie de propiedades. Estas propiedades son identidades, es decir, igualdades que no dependen de lo que los conjuntos contengan y ocurren siempre.

Describamos algunas de ellas…

Idempotencia con la unión	A U A = A
Idempotencia con la unión	A ∩ A = A
Asociatividad con la unión	AU(BUC)=(AUB)UC
Asociatividad con la intersección	A∩(B∩C)=(A∩B)∩C
Asociatividad con la diferencia simétrica	AΔ(BΔC)=(AΔB)ΔC
Conmutatividad con la unión	AUB = BUA
Conmutatividad con la intersección	A∩B = B∩A
Conmutatividad con la diferencia simétrica	AΔB = BΔA
Distributividad de la unión respecto de la intersección	AU(B∩C)= (AUB) ∩ (AUC)
Distributividad de la intersección respecto de la unión	A∩(BUC)= (A∩B) U (A∩C)
Elemento neutro respecto de la unión	A UØ = A
Elemento neutro respecto de la intersección	A ∩ X = A
Elemento neutro respecto de la diferencia simétrica	A ΔØ = A

Leyes del Complemento

$A \cup \tilde{A} = X$

$X - \tilde{A} = A$

$A \cap \tilde{A} = \emptyset$

$X^c = \emptyset$

$\emptyset^c = X$

$A \Delta A^c = X$

$A \Delta X = A^c$

Leyes de De Morgan

$(A \cup B)^c = A^C \cap B^C$

$(A \cup B)^c = A^C \cap B^C$

$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

OPERACIONES GENERALIZADAS ENTRE CONJUNTOS

Sea $\{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ una familia finita de conjuntos, en este caso podemos formar la unión o intersección de dicha familia. Veamos respectivamente los ejemplos:

Unión $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

Intersección $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$

Si consideramos tener un conjunto de índices llamado $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ entonces podemos escribir las mismas expresiones anteriores de la siguiente forma:

Unión $\bigcup_{i=1}^{n} Ai$

Intersección $\bigcap_{i=1}^{n} Ai$

Si n es ∞ entonces la familia se llama “sucesión de conjuntos.

De esta visión generalizada vemos que se cumplen también las leyes de De Morgan:
$[\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{Ai}]^c = \bigcap_{i=1}^{n} \boldsymbol{Ai}^c$ Demostración Sea x / x ∈ $[\bigcup_{i=1}^{n} Ai]^c$ <==> x ∉ $\bigcup_{i=1}^{n} Ai$ <==> $\forall_i$ x ∉ A_i <==> $\forall_i$ x ∈ A_i^c <==> x ∈ $\bigcap_{i=1}^{n} Ai^c$
$[\bigcap_{i=1}^{n} \boldsymbol{Ai}]^c = \bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{Ai}^c$ Demostración propuesta como ejercicio para el alumno. Se resuelve en forma análoga.

PARTICIONES

Si consideramos tener un conjunto de índices llamado I = {1, 2, 3,..., n} y siendo A_i subconjuntos de un conjunto A, diremos que A_i son particiones de A siempre que se cumplan las siguientes condiciones…

- $A_i \neq \emptyset$
- $[\bigcup_{i=1}^{n} Ai]$ = A
- $[\bigcap_{i=1}^{n} Ai] \neq \emptyset$

Veamos un par de ejemplos sobre esto.

Sea A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} y sea

A = {(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)} y

B = {(0,1, 2,3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)}

Podemos decir que la familia *A* no es una partición de A puesto que no cumple con la segunda propiedad. La unión de los subconjuntos mencionados no da como resultado el conjunto A.

En cambio, la familia *B* si es una partición pues vemos que cumple con las tres propiedades antes mencionadas.

PRODUCTO CARTESIANO

Supongamos ahora un conjunto A y un conjunto B. Podríamos entonces establecer un producto cartesiano

$$A \times B = \{(a, b) \ / \ a \in A \wedge b \in B\}$$

Si observamos con detenimiento la definición anterior veremos que, al fin de cuentas, A x B constituye un nuevo conjunto. Este conjunto es objetivamente distinto de A y distinto de B y está conformado por elementos que encerramos entre paréntesis.

Esos elementos se llaman pares ordenados y están compuestos por dos coordenadas donde la primera de ellas pertenece al conjunto A y la segunda pertenece al conjunto B.

Veamos un ejemplo de esto…

Tenemos un conjunto A = {a1, a2} y un conjunto B = {b1, b2, b3}

Por lo tanto, el producto A x B será un nuevo conjunto de pares ordenados
A x B = {(a1, b1), (a1, b2), (a1, b3), (a2, b1), (a2, b2), (a2, b3)}

Podemos apreciar que el conjunto de pares ordenados A x B tiene seis elementos.

La cantidad de elementos del producto cartesiano está dada por el producto de la cardinalidad de los conjuntos que componen ese mismo producto cartesiano.

De tal forma tendremos que…

$$|A \times B| = |A| * |A|$$

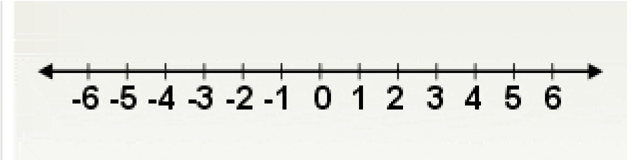
En el ejemplo dado vemos que $|A| = 2$ y la $|B| = 3$ luego, la $|A \times B| = 6$

CONJUNTOS Y PARES ORDENADOS – EL CONCEPTO DE ORDEN

A priori sabemos que el orden de los elementos es irrelevante al analizar un conjunto. De esta forma A = {1, 2) = {2, 1}

Sin embargo, también sabemos que algunas veces nos resulta conveniente representar ordenadamente un conjunto.

Para eso podemos valernos de diferentes herramientas. Una de ellas puede ser, por ejemplo, la recta numérica.



Sin embargo, el tema es diferente cuando hablamos de pares ordenados. Al describir al producto cartesiano vimos que la consecuencia de este producto era un nuevo conjunto. Este nuevo conjunto tenía elementos constituidos por dos coordenadas donde cada una de estas coordenadas se correspondía con cada uno de los conjuntos intervinientes en el producto dado.

Es así como

- A x B = {(a, b) / a ∈ A ^ b ∈ B}

y entonces

- B x A = {(b, a) / b ∈ B ^ a ∈ A}

De esta forma podemos ver que **A x B ≠ B x A**

Se puede apreciar que el concepto de producto cartesiano está presente en forma frecuente en la vida cotidiana. Una simple hoja de cálculo no es otra cosa que un espacio cuyas posiciones están dadas por coordenadas.

Es evidente entonces que el orden de las coordenadas se hace fundamental para establecer un posicionamiento preciso dentro de ese espacio de trabajo.

PRODUCTO CARTESIANO ENTRE MÁS DE DOS CONJUNTOS

Supongamos ahora un conjunto A, un conjunto B y un conjunto C.
Podríamos también establecer un producto cartesiano.
En este caso…

A x B x C = {(a, b, c) / a ∈ A ^ b ∈ B ^ c ∈ C}

Si observamos con detenimiento la definición anterior veremos que, en este caso, A x B x C constituye un nuevo conjunto. Este conjunto es objetivamente distinto de A, distinto de B y distinto de C siendo conformado por ternas (en lugar de pares ordenados) conformadas por tres coordenadas.
Como se puede apreciar, el concepto de producto cartesiano puede generalizarse e incorporar un número indeterminado de conjuntos.

Como caso adicional, un producto cartesiano puede contemplar la constitución de pares ordenados, ternas o en general tuplas con coordenadas que podrían ser de un mismo conjunto. Esto da espacio a relaciones, entre otras cosas binarias, que son muy frecuentes y cuyas propiedades estudiaremos más adelante.