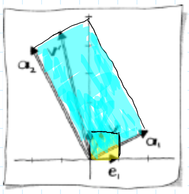
Koordinatentransf. mit affinen Transformationen

Dienstag, 16. Januar 2024 09:36



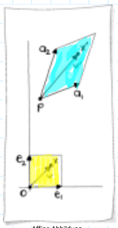
Lineare Abbildungen

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$v' = v_1 a_1 + v_2 a_2 = v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Dupliziere Geometrie bzgl. a_1, a_2 Koord.

Schife Box wird immer die linke untere Ecke im Ursprung haben



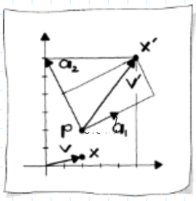
Affine Abbildung

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$v' = p + v_1 a_1 + v_2 a_2 = p + v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Schife Box kann beliebig platziert werden

Konkretes Beispiel



$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad p = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x' = p + \underbrace{2 a_1 + \tfrac{1}{2} a_2}_{v'}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \boxed{\tfrac{1}{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \boxed{\tfrac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Wie gehen wir vor, wenn $x' = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ bzgl. $0; e_1, e_2$ gegeben aber x' bzgl. a_1, a_2 nicht gegeben!

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

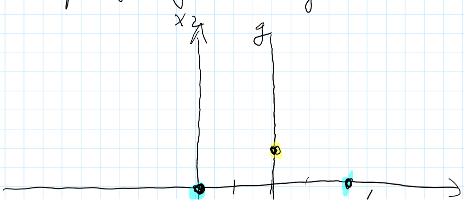
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3 = 2x_1 - 2x_2 \\ 4 = x_1 + 4x_2 \end{cases} \rightsquigarrow \text{Gauß} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Folie 34

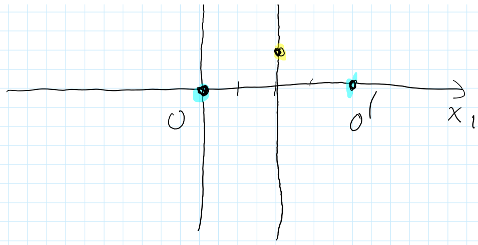
$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) x_1 + 0 \cdot x_2 \\ 0 \, x_1 + 1 \, x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Spiegelung an $g: x = 2$



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

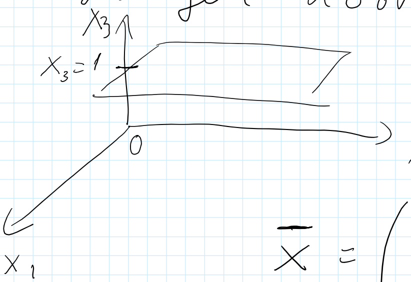


$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \checkmark$$

Schneller
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-x_1+4\\x_2\end{pmatrix}$$

Homogene Koordinaten



Punkt im $\mathbb{R}^2$ (x_1, x_2) wird in homogenen Koord. zu $(x_1, x_2, 1)$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\1\end{pmatrix}$$

$$\bar{x} \mapsto (A|v)\,\bar{x} = \underbrace{\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & v_1\\a_{21} & a_{21} & v_2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\1\end{pmatrix}}_{3\times 3 \quad 3\times 1} =$$

$$= \begin{pmatrix}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + v_1\\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + v_2\\0x_1 + 0x_2 + 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\1\end{pmatrix}$$

Nicht homog. Koord. $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \boxed{A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + v}$

Spiegelung an $x=2$ mit hom. Koord.

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 4\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\a\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2+0+4\\a\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\a\\1\end{pmatrix}$$

$a \in \mathbb{R}$

Bsp Drehung mit anschließender Translation:

$$A = T \circ D_{0,\alpha}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & v_1\\0 & 1 & v_2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & v_1\\ \dots\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & v_1 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Translation mit anschließender Drehung

$D_{0,\alpha} \circ T$

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & \cos\alpha \cdot v_1 - \sin\alpha\, v_2 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha\, v_1 + \cos\alpha\, v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Drehung um beliebigen Punkt $z = (a, b)$

$T(a,b) \circ D_{0,\alpha} \circ T(-a,-b)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & -\cos\alpha a + \sin\alpha b + a \\ \sin\alpha & \cos\alpha & -\sin\alpha a - \cos\alpha b + b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Testen Sie, dass der Punkt $[a, b, 1]$ der Fixpunkt dieser Abbildung ist.

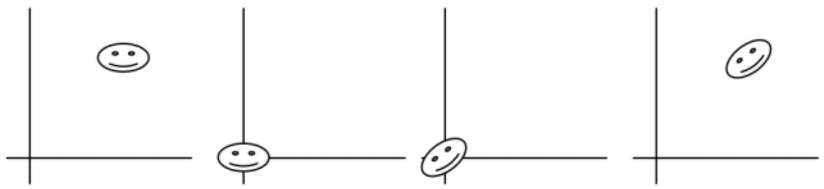


Bild 10.8

Quelle: P. Hartmann Mathematik für Informatiker

https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-8348-2002-0

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & -\cos\alpha\, a + \sin\alpha\, b + a \\ \sin\alpha & \cos\alpha & -\sin\alpha\, a - \cos\alpha\, b + b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{\cos\alpha\, a} - \cancel{\sin\alpha\, b} - \cancel{\cos\alpha\, a} + \cancel{\sin\alpha\, b} + a \\ \cancel{\sin\alpha\, a} + \cancel{\cos\alpha\, b} - \cancel{\sin\alpha\, a} - \cancel{\cos\alpha\, b} + b \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diskussion: Drehung mit Drehzentrum, das nicht im Ursprung liegt.

Wir betrachten die Drehung um den Punkt $Z = (-2, 1)$ mit Drehwinkel $180°$.

- Zerlegen Sie die Abbildung $D_{Z,180°}$ nach dem Dreischrittverfahren.
- Stellen Sie die Abbildungsvorschrift $\binom{x_1}{x_2} \mapsto \ldots$ für die Abbildung $D_{Z,180°}$ auf.

$D_{z,180°} = T(z) \circ D_{0,180°} \circ T(-z)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xmapsto{T(2,-1)} \begin{pmatrix} x_1 + 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

$D_{z,180°} \downarrow \qquad \downarrow D_{0,180°}$

H.A. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -x_1 - 4 \\ \ldots \end{pmatrix} \xleftarrow{T(-2,1)} \begin{pmatrix} -x_1 - 2 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x_1-4 \\ -x_2+2 \end{pmatrix} \xleftarrow{T_{(-2,1)}} \begin{pmatrix} -x_1-2 \\ -x_2+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$a = -2$

$b = 1$

Ergebnis Mult.

3 hom. Matrizen

$$T_{Z,180} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & -\cos\alpha a + \sin\alpha b + a \\ \sin\alpha & \cos\alpha & -\sin\alpha a - \cos\alpha b + b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\cos 180^\circ = -1$

$\sin 180^\circ = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1\cdot(-2) + (-2) \\ 0 & -1 & 1\cdot 1 + 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$