Mathematik in Medien und Informatik

Vektoren, Vektorrechnung, Koordinatensysteme

4

Prof. Dr. Thomas Schneider

Stand: 05.10.2022

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

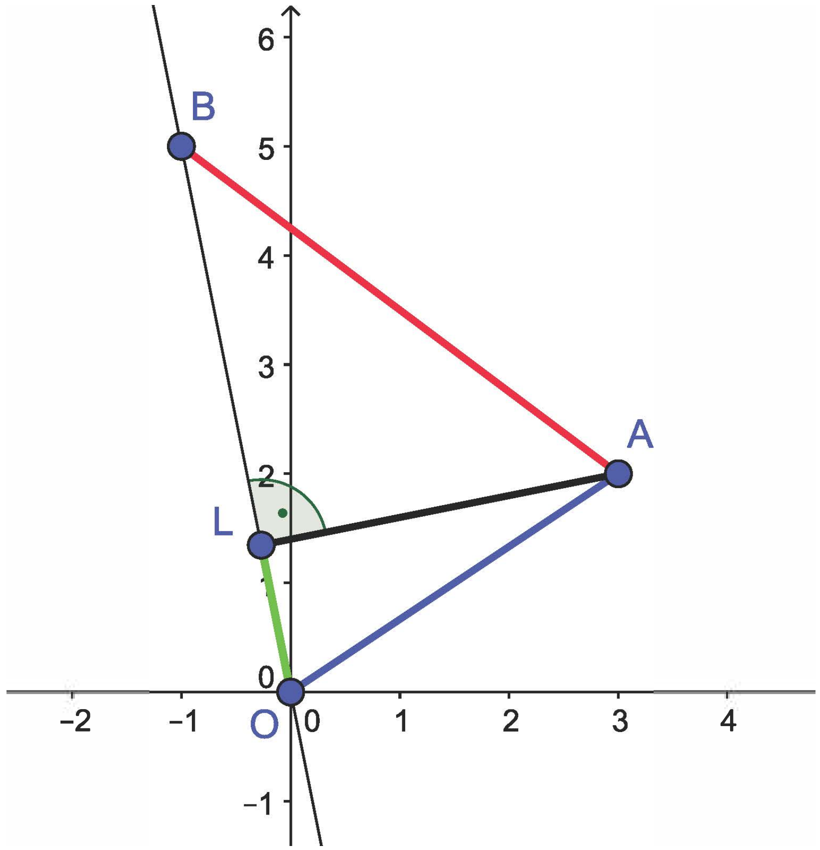
Inhalt

1. Vektoren und Vektorrechnung
   - Ausblick auf Anwendungen der Vektorrechnung
   - Geometrische Definition von Vektoren
   - Vektoraddition
   - Gegenvektor
   - Gruppeneigenschaft
   - Skalare Vielfache von Vektoren
2. Koordinatensysteme
   - Einführung
   - Koordinatensysteme der Ebene
   - Koordinatendarstellung von Punkten
   - Koordinatendarstellungen von Vektoren
   - Vektorrechnung mit Koordinaten

Beispiele:

Die folgenden Fragen lassen sich mit Vektorrechnung beantworten bzw. lösen:

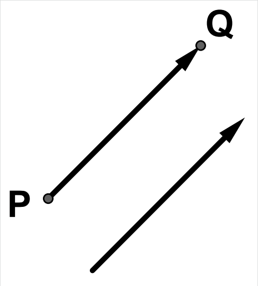
- Länge der Strecke OA
- Abstand der Punkte A und B.
- Winkel zwischen den Strecken OA und OB.
- Bestimmung des Abstands des Punktes A von der Geraden durch O und B
- Bestimmung des Längenverhältnisses der Strecken OL und OB.



Vektoren und Vektorrechnung
Definition

Definition:

Es seien P und Q Punkte der Ebene (oder des Raumes). Das durch die **Länge** der Strecke $\overline{PQ}$ und deren **Richtung** festgelegte **Paar** heißt **Vektor** von P nach Q. Wir bezeichnen diesen Vektor mit dem Symbol $\overrightarrow{PQ}$.



Bemerkungen:

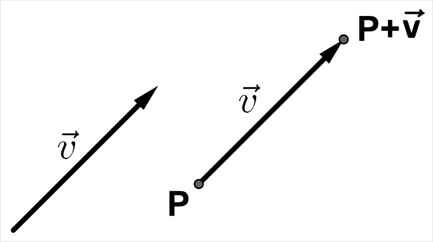
- Vektoren werden durch Pfeile dargestellt.
- Es gibt (unendlich) viele verschiedenen Pfeile, die einen gegebenen Vektor repräsentieren, diese haben die gleiche Länge und die gleiche Richtung.
- Man spricht davon, dass alle Pfeile, die einen Vektor repräsentieren, eine **Pfeilklasse** bilden.

Vektoren und Vektorrechnung

Anheften von Vektoren an Punkten, Vektoren als Verschiebungen

Anheften eines Vektors an einen Punkt

Es sei P ein Punkt der Ebene. Heftet man einen Vektor $\vec{v}$ an einen Punkt P an, so wird der Endpunkt mit $P + \vec{v}$ bezeichnet.



Verschiebung

Alternative Sichtweise:

- Die **Verschiebung** eines Punktes P mit dem Verschiebevektor $\vec{v}$ ergibt den (neuen) Punkt $P + \vec{v}$.
- Wir können den Vektor $\vec{v}$ als **Abbildung** wirken lasssen, nämlich als die Verschiebeabbildung $P \mapsto P + \vec{v}$.

Definition:

Wir führen nun noch den sogenannten **Nullvektor** $\vec{0}$ ein. Wendet man diesen auf einen Punkt P an, so wird dieser in sich selbst überführt:

$$P \mapsto P + \vec{0} = P.$$

Konsequenz:

Damit gilt: $\vec{0} = \overrightarrow{PP}$ für beliebige Punkte P.

Vektoren und Vektorrechnung

Vektoraddition

Einführung:

Stellen Sie sich vor, ich bitte Sie, sich von Ihrem jeweiligen Standort S aus

- zunächst **einen Meter in Richtung Norden** zu bewegen,
- danach **einen Meter in Richtung Osten** zu bewegen.

Den hierbei erreichten Zielpunkt nennen wir Z.

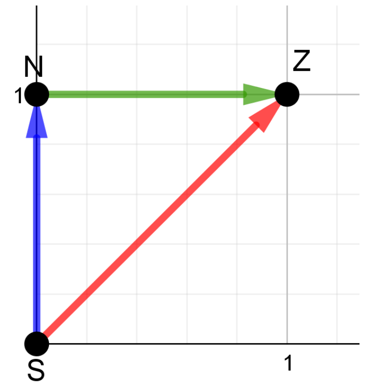
Frage:

Natürlich können Sie auch **auf direktem Weg** vom Ausgangspunkt S zum Zielpunkt Z gelangen. Beschreiben Sie diese Bewegung.

Vektoren und Vektorrechnung
Vektoraddition

Antwort – Teil 1:

Durch eine Bewegung **in Richtung Nordosten**



Nachfrage:

Wie weit nach Nordosten muss man sich bewegen?

Antwort – Teil 2:

$\sqrt{2}$ Meter $\approx$ 1.41 Meter.

Vektoren und Vektorrechnung

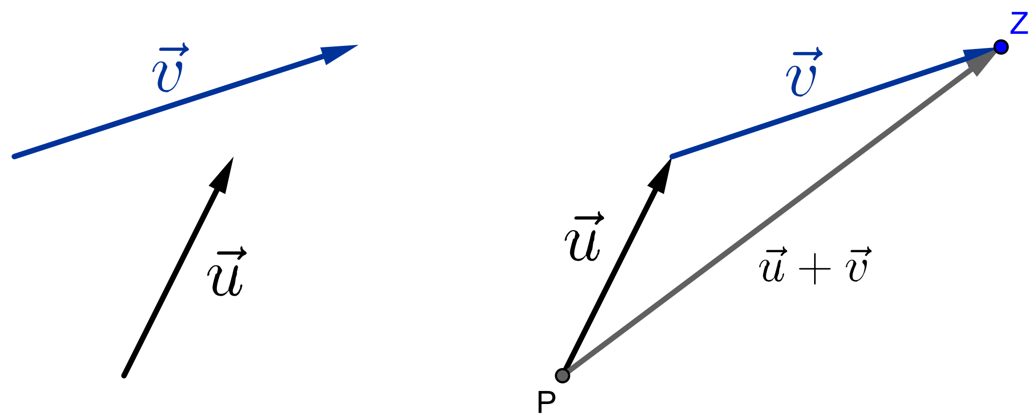
Vektoraddition

Warnung:

Bei der Vektoraddition geht es **nicht** um die Addition der Pfeillängen.

Vektoren und Vektorrechnung
Vektoraddition

Die **Summe** $\vec{u} + \vec{v}$ zweier Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ergibt sich geometrisch durch Legen eines Dreiecks:



Bemerkung:

Die Summe $\vec{u} + \vec{v}$ zweier Vektoren wird also ermittelt, indem zu einem beliebigen Anfangspunkt P durch **sukzessives Anheften** der Zielpunkt $Z := \left(P + \vec{u}\right) + \vec{v}$ gewonnen wird. Es ist dann

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{PZ}.$$

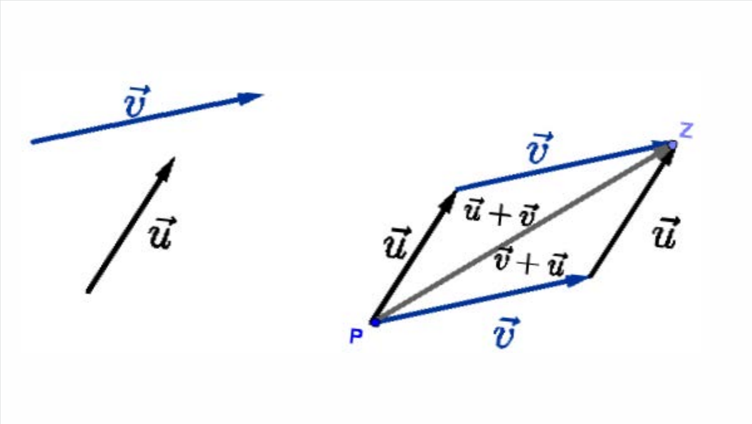
Vektoraddion ist kommutativ

Es sei P ein Punkt der Ebene, und es seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Vektoren. Wir bezeichnen den Zielpunkt $\left(P + \vec{u}\right) + \vec{v}$ wieder mit Z. Dieser kann auf zwei Weisen erreicht werden, vgl. die Abbildung:

$$\begin{aligned} Z &= \left(P + \vec{u}\right) + \vec{v} \\ &= \left(P + \vec{v}\right) + \vec{u}. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\overrightarrow{PZ} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$$

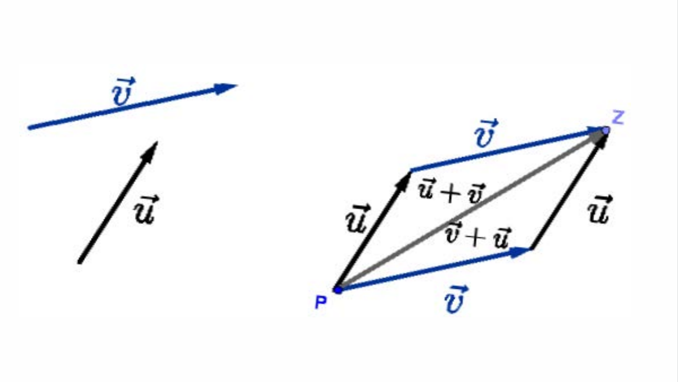


Vektoren und Vektorrechnung

Vektoraddition

Die Gleichung $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ bedeutet:

Die Reihenfolge bei der Vektoraddition spielt keine Rolle, da beide Versionen bei beliebigem gegebenem Anfangspunkt zum selben Zielpunkt führen.



Mit Bezug auf die Skizze sprechen wir ab jetzt bei der geometrischen Ausführung der Vektoraddtion von der **Parallelogrammkonstruktion**.

Eigenschaften der Vektoraddition (1):

Die Vektoraddition ist **assoziativ**. Das heißt:

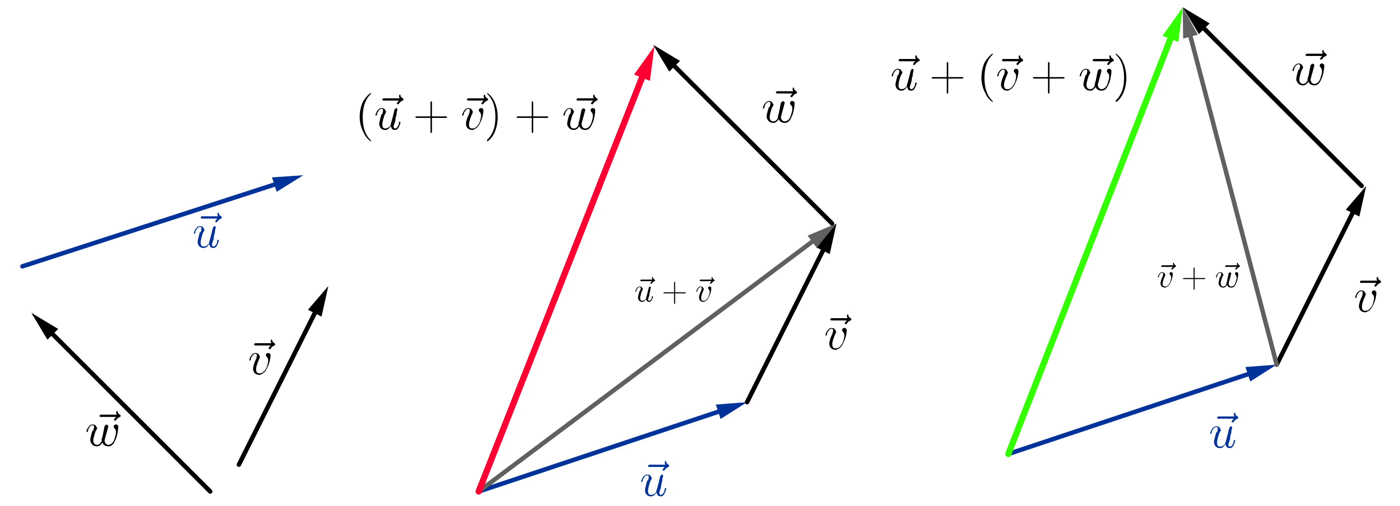
Für je drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gilt die Beziehung

$$\left(\vec{u} + \vec{v}\right) + \vec{w} = \vec{u} + \left(\vec{v} + \vec{w}\right) .$$

Ausblick

Auf der nächten Folie wird die Assoziativität der Vektoraddition geometrisch veranschaulicht.

Veranschaulichung der Assoziativität:



Eigenschaften der Vektoraddition (2):

- Die Vektoraddition ist **assoziativ**.
- Der Nullvektor ist das **Neutralelement** bzgl. der Vektoraddition. Das heißt, für jeden Vektor $\vec{v}$ gilt

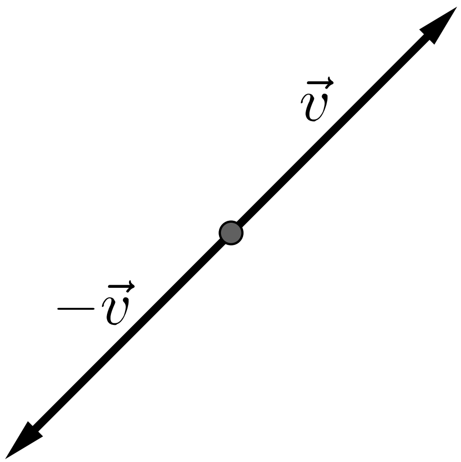
$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \qquad \text{und} \qquad \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}\,.$$

Vektoren und Vektorrechnung

Gegenvektoren

Definition:

Zu jedem Vektor $\vec{v}$ erklären wir den **Gegenvektor** $-\vec{v}$. Dieser hat die **gleiche Länge** wie $\vec{v}$ und die zu $\vec{v}$ **entgegengesetzte Richtung**.



Bemerkung:

Für jeden Vektor $\vec{v}$ gilt

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}\,.$$

Vektoren und Vektorrechnung

Vektoraddition – Gruppeneigenschaft:

Bemerkung:

Die Menge der Vektoren mit der Vektoraddition ist eine **kommutative Gruppe** mit dem Nullvektor als Neutralement.

Vektoren und Vektorrechnung

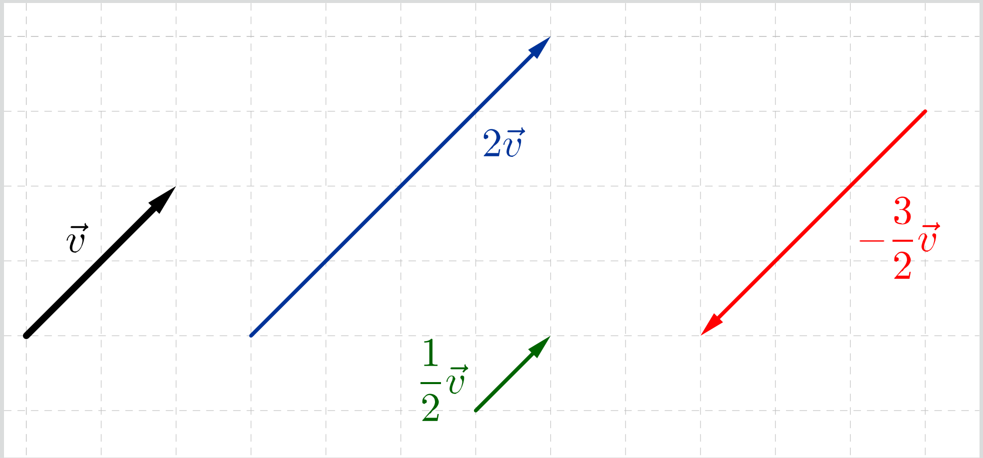
Skalare Vielfache von Vektoren

Definition

Es sei $k \in \mathbb{R}$ ein **Skalar** (eine Zahl) und $\vec{v}$ ein Vektor. Wir erklären $k\,\vec{v}$ zunächst für nichtnegative Werte von k:

- Für $k > 0$ ist $k\,\vec{v}$ der Vektor, der die gleiche Richtung wie $\vec{v}$ hat und dessen Länge das k-fache der Länge von $\vec{v}$ ist.
- Falls $k = 0$ gilt, so ist $k\,\vec{v} = 0\,\vec{v} := \vec{0}$.

Betrachten Sie die ersten drei Vektoren.



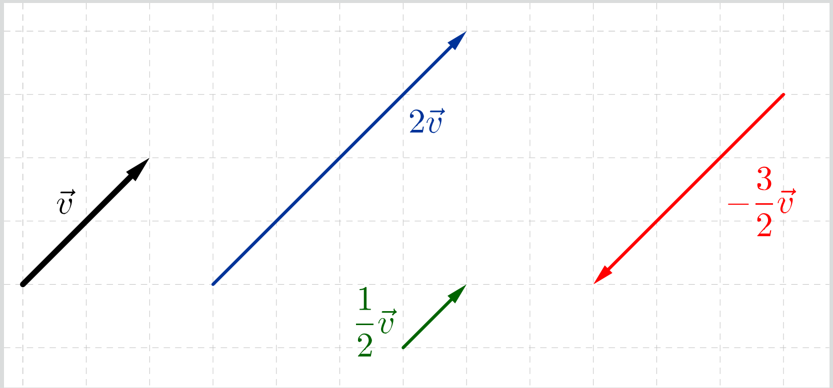
Vektoren und Vektorrechnung

Skalare Vielfache von Vektoren

Definition von $k\,\vec{v}$ für negative $k \in \mathbb{R}$

Für $k < 0$ ist $k = -|k|$ und wir erklären $k\,\vec{v}$ als den **Gegenvektor** von $|k|\,\vec{v}$.

Betrachten Sie den Vektor ganz rechts.



Bemerkung:

Für jeden Vektor $\vec{v}$ gilt $1\,\vec{v} = \vec{v}$ und $(-1)\,\vec{v} = -\vec{v}$.

Vektoren und Vektorrechnung

Skalare Vielfache von Vektoren

Eigenschaften der Multiplikation mit Skalaren

Für alle Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ und alle Zahlen $k, \ell \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Beziehungen:

- $k\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = k\,\vec{u} + k\,\vec{v}$,
- $(k + \ell)\,\vec{u} = k\,\vec{u} + \ell\,\vec{u}$,
- $k\left(\ell\,\vec{v}\right) = (k \cdot \ell)\,\vec{v}$.

Hausübung:

Veranschaulichen Sie analog zur Folie 12 anhand geeigneter Beispiele die Bedeutung der Beziehungen:

- $k\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = k\,\vec{u} + k\,\vec{v}$,
- $(k + \ell)\,\vec{u} = k\,\vec{u} + \ell\,\vec{u}$,
- $k\left(\ell\,\vec{v}\right) = (k \cdot \ell)\,\vec{v}$.

Verallgemeinerung

Wir haben an unserem geometrisch-physikalischen Vektorraumbegriff eine Reihe von Eigenschaften beobachtet. In der Mathematik werden Vektorräume allgemein definiert, indem diese Eigenschaften als Anforderungen (Axiome) formuliert werden (vgl. unser Vorgehen bei Gruppen, Ringen und Körpern).

Definition

Unter einem **Vektorraum** versteht man eine Menge V, auf der eine **Addition** (mit Neutralelement 0) und eine **Multiplikation mit Skalaren (aus einem Körper $\mathbb{K}$)** so erklärt sind, dass die folgenden Anforderungen erfüllt sind:

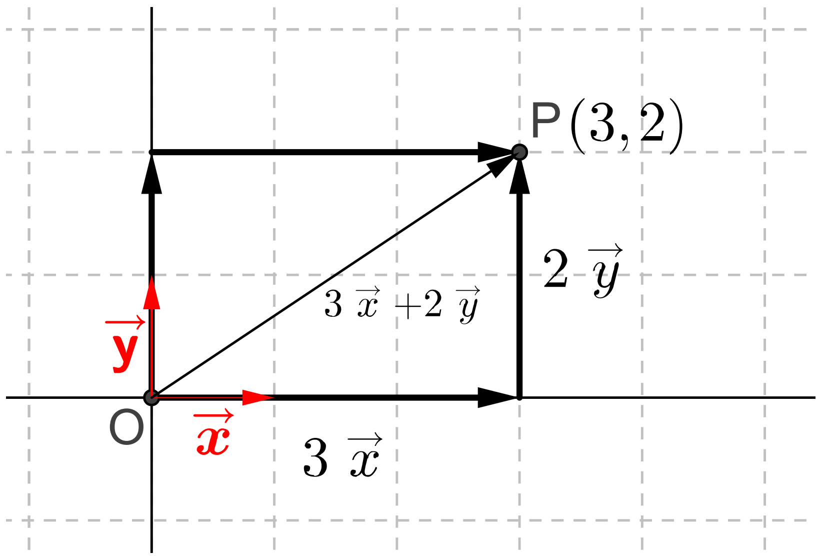
- $(V, +, 0)$ ist eine kommutative Gruppe.
- Für alle Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ und alle Skalare $k, \ell \in \mathbb{K}$ gelten die Beziehungen
  - $k\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = k\,\vec{u} + k\,\vec{v}$,
  - $(k + \ell)\,\vec{u} = k\,\vec{u} + \ell\,\vec{u}$,
  - $k\left(\ell\,\vec{v}\right) = (k \cdot \ell)\,\vec{v}$.
  - $1\,\vec{v} = \vec{v}$.

Bemerkung:

Der Begriff des **Vektorraums** geht weit über die von uns bislang studierten Pfeilklassen hinaus. Für die Audiotechnik relevant ist zum Beispiel der Vektorraum der periodischen Funktionen (Signale).

Erinnerung 1

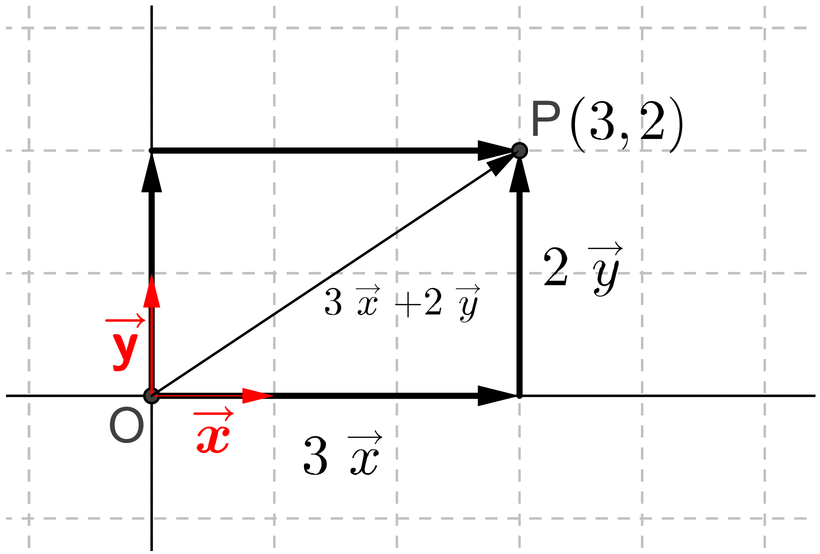
Stellen Sie sich Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ der Länge 1 vor, die zueinander senkrecht stehen und beide am selben Punkt O (dem Ursprung) angeheftet sind.



Koordinatensysteme
Einführung

Erinnerung 2

Ein beliebiger Punkt P kann nun durch Anheften eines geeigneten Vielfachen $k_x \vec{x}$ von $\vec{x}$ an den Punkt O und danach eines geeigneten Vielfachen $k_y \vec{y}$ von $\vec{y}$ an das Zwischenziel $O + k_x \vec{x}$ erreicht werden.

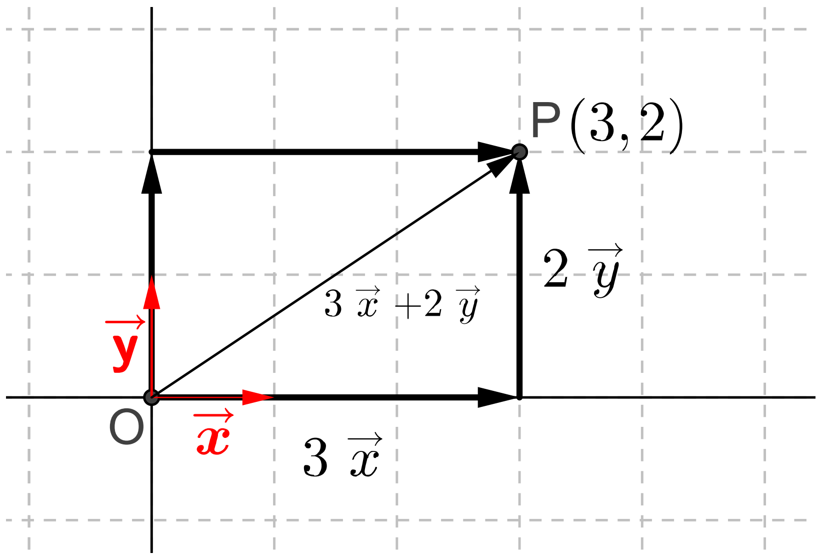


Erinnerung 3

Dann gilt

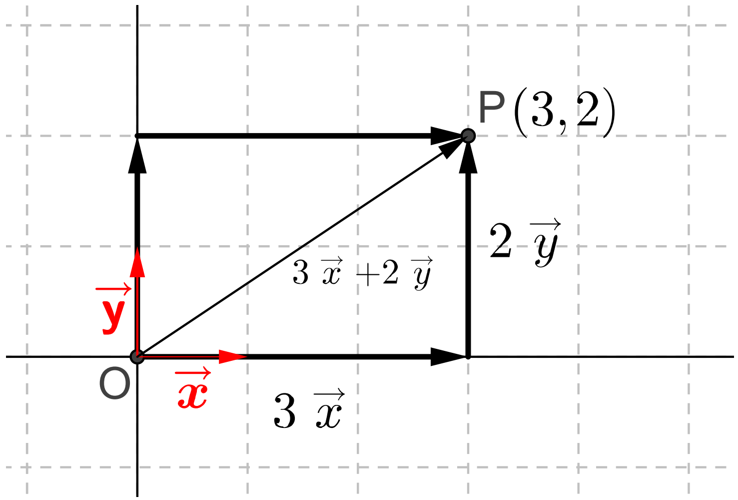
$$P = O + k_x \vec{x} + k_y \vec{y},$$

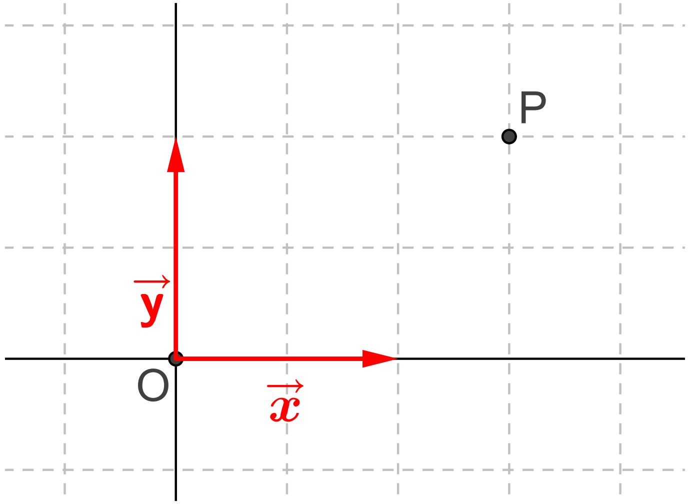
und wir weisen dem Punkt P die Koordinaten (k_x, k_y) zu, im hier dargestellten Beispiel $(3, 2)$.



Frage:

Wie verändern sich die Koordinaten des (festen) Punktes P, wenn die Einheitslängen verdoppelt werden?





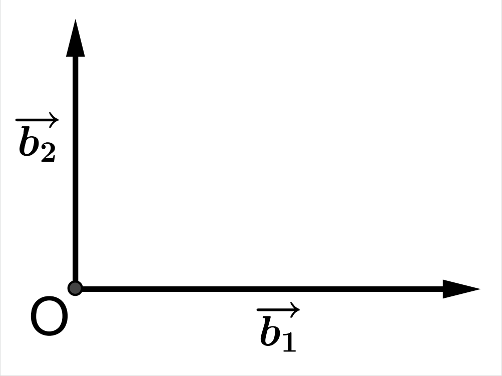
Definition:

Es sei O ein Punkt der Ebene, und es seien $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$ vom Nullvektor verschiedene Vektoren, die keine Vielfachen voneinander sind. Dann heißt

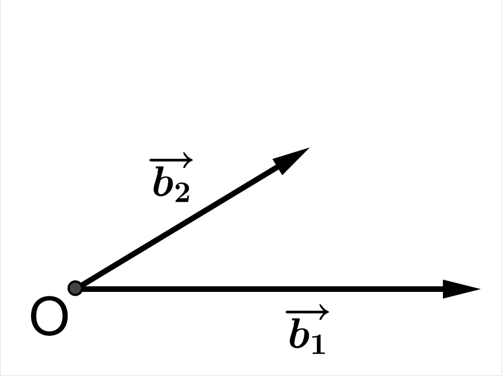
$$K = \left(O; \vec{b_1}, \vec{b_2}\right)$$

Koordinatensystem der Ebene mit **Koordinatenursprung** O und **Vektorbasis** $\left(\vec{b_1}, \vec{b_2}\right)$

Beispiele



oder



Koordinatensysteme

Koordinatendarstellung von Punkten

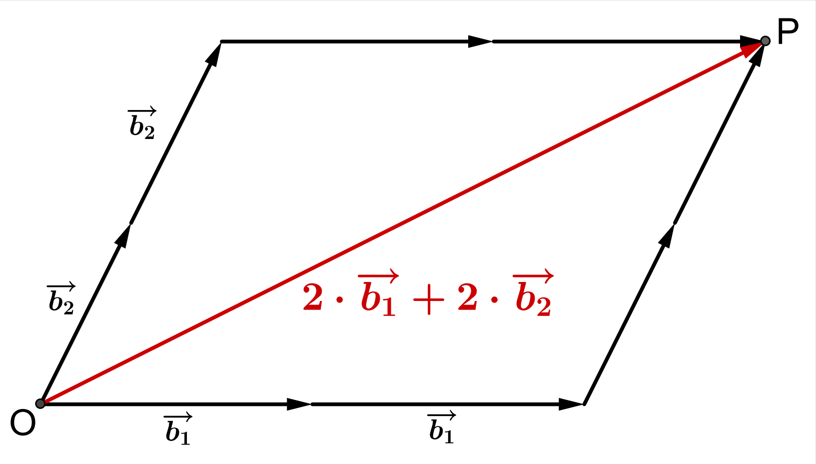
Existenz und Eindeutigkeit der Darstellung

Zu jedem Punkt P der Ebene existieren (eindeutig bestimmte) Zahlen p_1 und p_2 so, dass die Beziehung

$$P = O + \left(p_1 \vec{b_1} + p_2 \vec{b_2}\right)$$

gilt, dass also P erreicht wird, wenn man den Vektor $p_1 \vec{b_1} + p_2 \vec{b_2}$ an den Punkt O anheftet.

Beispiel:



hier:
$P = O + \left(2\,\vec{b_1} + 2\,\vec{b_2}\right)$.

Koordinatensysteme

Koordinatendarstellung von Punkten

Bezeichnungsweise

Falls die Beziehung $P = O + p_1\,\vec{b_1} + p_2\,\vec{b_2}$ gilt, so

$$\left\{\begin{array}{c}\text{heißt}\\ \text{heißen}\end{array}\right\}(p_1, p_2)\left\{\begin{array}{c}\text{Koordinatenpaar}\\ \text{Koordinaten}\end{array}\right\}$$

von P **bezüglich des Koordinatensystems** $K = \left(O; \vec{b_1}, \vec{b_2}\right)$, und wir schreiben

$$(P)_K = (p_1, p_2)\,.$$

Bemerkung:

Die ausdrückliche Einbeziehung des Koordinatensystemnamens K in die Bezeichnung $(P)_K$ ist sinnvoll, denn beim Wechsel des Koordinatensystems ändern sich im Allgemeinen auch die Koordinaten von Punkten. Ein Ausdruck wie z.B $P = (2, 1)$ ist ohne (wenigstens implizite) Angabe des Bezugskoordinatensystems sinnlos.

Koordinatensysteme

Koordinatendarstellungen von Vektoren

Koordinaten von Vektoren

- Sei $\vec{v}$ ein Vektor und $K = \left(O; \vec{b_1}, \vec{b_2}\right)$ ein Koordinatensystem der Ebene.
- Wir bestimmen **die Koordinaten von** $\vec{v}$, indem wir ihn am Koordinatenursprung O anheften und einen sog. **Ortsvektor** erhalten.
- Wenn dann für den Endpunkt $E = O + \vec{v}$ des Ortsvektors die Gleichung

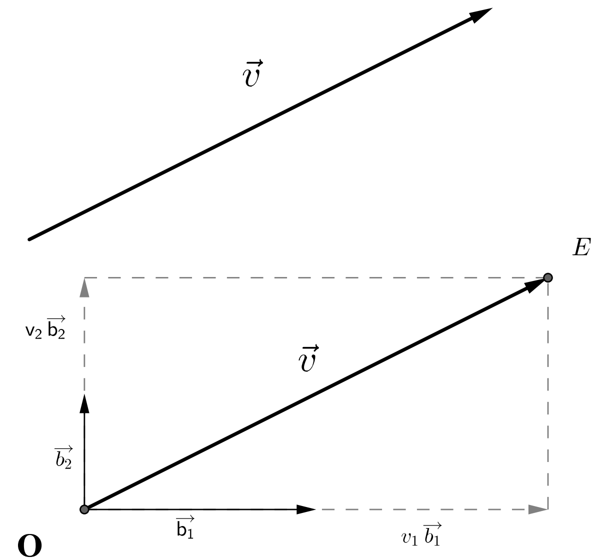
$$E = O + v_1\,\vec{b_1} + v_2\,\vec{b_2}$$

gilt, so schreiben wir

$$\vec{v} = v_1\,\vec{b_1} + v_2\,\vec{b_2}$$

bzw.

$$\left(\vec{v}\right)_K = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ oder } \left(\vec{v}\right)_K = (v_1, v_2)^{\mathrm{T}}.$$



Koordinaten von Vektoren

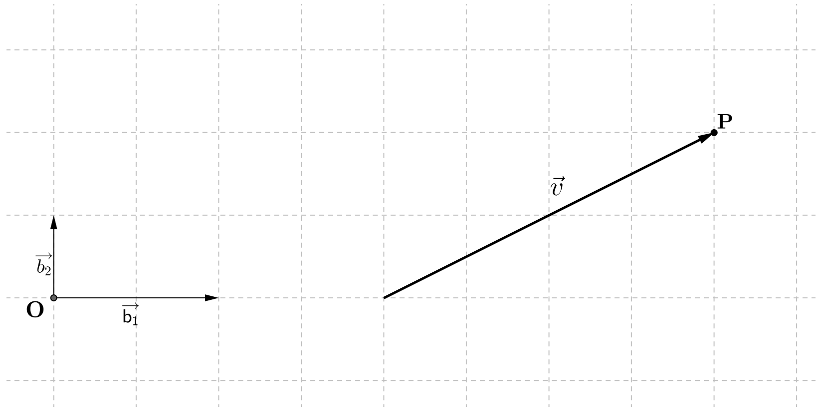
- Der Punkt P hat bezüglich des Koordinatensystems $K = \left(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2\right)$ die Koordinatendarstellung

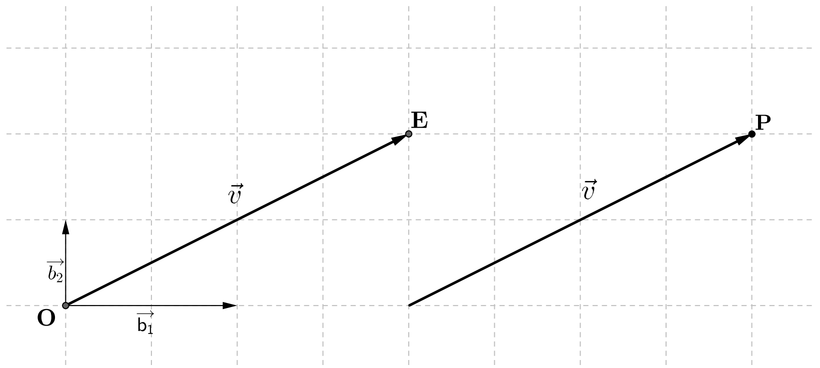
$$(P)_K = (4, 2).$$

- Dagegen hat der Vektor $\vec{v}$ **nicht** die Koordinatendarstellung $(4, 2)^T$. Vielmehr gilt

$$\left(\vec{v}\right)_K = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

  wie man nach Anheften des Vektors $\vec{v}$ am Ursprung, d.h. nach Betrachtung des **Endpunkts** E **des zugehörigen Ortsvektors** erkennen kann: $E = O + 2\,\vec{b}_1 + 2\,\vec{b}_2$.





Koordinatensysteme

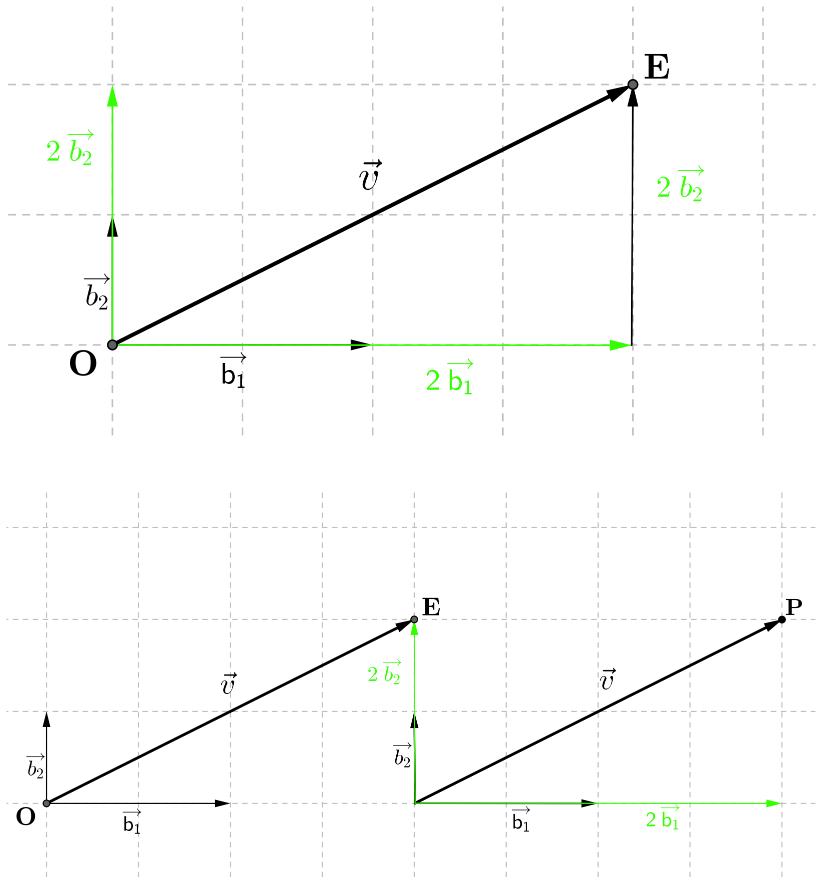
Koordinatendarstellungen von Vektoren

Koordinaten von Vektoren – verschiedene Sichtweisen

Der Vektor $\vec{v}$ hat die Koordinatendarstellung

$$\left(\vec{v}\right)_K = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Dies erkennt man nach Anheften des Vektors $\vec{v}$ am Ursprung und Betrachtung der Koordinaten des **Endpunkts** E **des zugehörigen Ortsvektors**: $E = O + 2\,\vec{b_1} + 2\,\vec{b_2}$.
- Alternativ hierzu kann man die beiden Basisvektoren am Anfangspunkt des ursprünglich gegebenen Pfeils anheften. Die entsprechende Dreieckskonstruktion zeigt $\vec{b_1} = 2\,\vec{b_1} + 2\,\vec{b_2}$.



HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

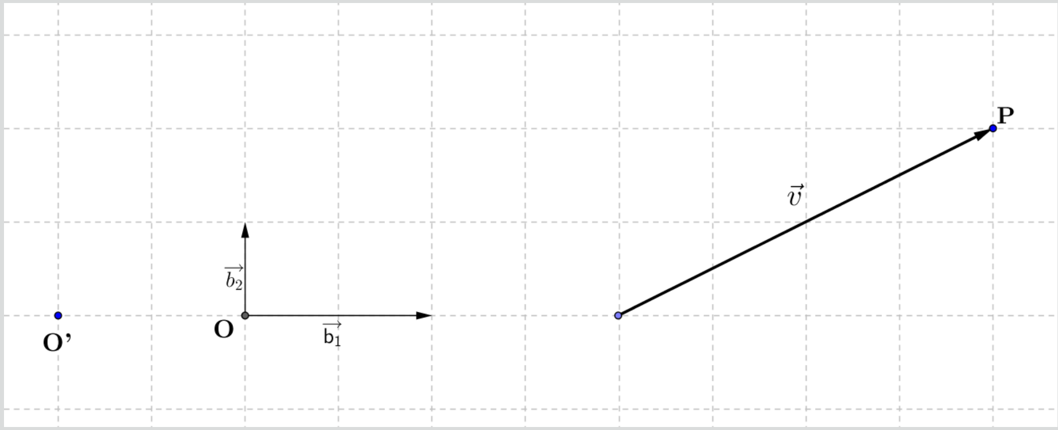
Hörsaalübung

- Wie verändern sich die Koordinaten von P bzw. $\vec{v}$, wenn der Koordinatenursprung um zwei „Kästchen“ nach links verschoben wird? Präziser ausgedrückt: Bestimmen Sie $(P)_{K'}$ und $\left(\vec{v}\right)_{K'}$ für ein neues (zweites) Koordinatensystem

$$K' = \left(O'; \vec{b_1}', \vec{b_2}'\right) = \left(O - \vec{b_1}; \vec{b_1}, \vec{b_2}\right).$$

- Wie verändern sich die Koordinaten von P bzw. $\vec{v}$, wenn anstelle des Basisvektors $\vec{b_1}$ der Basisvektor $\vec{b_1}'' = \frac{1}{2}\vec{b_1}$ verwendet wird? Präziser ausgedrückt: Bestimmen Sie $(P)_{K''}$ und $\left(\vec{v}\right)_{K''}$ für ein (drittes) Koordinatensystem

$$K'' = \left(O''; \vec{b_1}'', \vec{b_2}''\right) = \left(O; \tfrac{1}{2}\vec{b_1}, \vec{b_2}\right).$$



Hörsaalübung – Fortsetzung

Fassen Sie das unterschiedliche „Transformationsverhalten“ von Punkten und Vektoren in einem Merksatz zusammen.

Koordinatensysteme

Koordinatendarstellungen von Vektoren

Unabhängigkeit vom Koordinatenursprung

- Die Koordinatendarstellung eines Vektors hängt nur von den Vektorbasis ab, sie ist **unabhängig** von der Wahl des Koordinatenursprungs.
- Das heißt: Falls zwei Koordinatensysteme

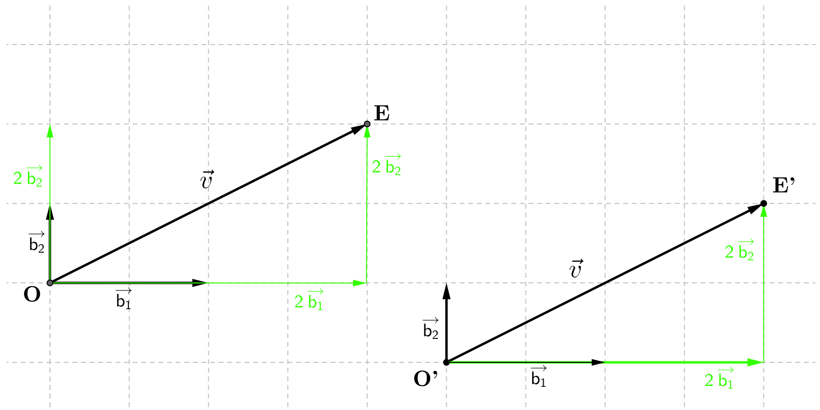
$$K = \left(O; \vec{b_1}, \vec{b_2}\right)$$

und

$$K' = \left(O'; \vec{b_1}, \vec{b_2}\right)$$

mit **gleicher Vektorbasis** $\left(\vec{b_1}, \vec{b_2}\right)$ gegeben sind, so ist

$$\left(\vec{v}\right)_K = \left(\vec{v}\right)_{K'}.$$



Vereinbarung:

Wenn das Koordinatensystem aus dem Kontext klar ist, dürfen wir uns die vereinfachte Notation

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

gestatten.

Vektorrechnung mit Koordinaten

Bemerkung:

Sind Koordinatendarstellungen von Punkten und Vektoren gegeben, so übersetzen sich die bislang eingeführten Rechenoperationen auf die Koordinatendarstellungen:

- Anheften von Vektoren an Punkte
- Vektoraddition
- Gegenvektorbildung
- Multiplikation von Vektoren mit Skalaren

Vektorrechnung mit Koordinaten

Anheften von Vektoren an Punkte und Vektoraddition

Übersetzung in Koordinaten

Es sei gegeben ein Koordinatensystem $K = \left(O; \vec{b_1}, \vec{b_2}\right)$, ein Punkt P sowie Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ in der Ebene.

Die Koordinatendarstellungen seien $(P)_K = (p_1, p_2)$, $(\vec{u})_K = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, und $(\vec{v})_K = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Dann gilt

$$\left(P + \vec{u}\right)_K = (p_1 + u_1, p_2 + u_2)$$

und

$$\left(\vec{u} + \vec{v}\right)_K = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}.$$

Vektorrechnung mit Koordinaten

Anheften von Vektoren an Punkte und Vektoraddition

Begründung

Aus $(P)_K = (p_1, p_2)$, $(\vec{u})_K = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ und $(\vec{v})_K = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ folgt

$$P = O + p_1\,\vec{b_1} + p_2\,\vec{b_2},\ \vec{u} = u_1\,\vec{b_1} + u_2\,\vec{b_2},\ \text{sowie}\ \vec{v} = v_1\,\vec{b_1} + v_2\,\vec{b_2}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} P + \vec{u} &= \left(O + p_1\,\vec{b_1} + p_2\,\vec{b_2}\right) + \left(u_1\,\vec{b_1} + u_2\,\vec{b_2}\right) \\ &= O + (p_1 + u_1)\ \vec{b_1} + (p_2 + u_2)\ \vec{b_2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= \left(u_1\,\vec{b_1} + u_2\,\vec{b_2}\right) + \left(v_1\,\vec{b_1} + v_2\,\vec{b_2}\right) \\ &= (u_1 + v_1)\ \vec{b_1} + (u_2 + v_2)\ \vec{b_2}. \end{aligned}$$

Vektorrechnung mit Koordinaten

Gegenvektorbildung und Multiplikation mit Skalaren

Übersetzung in Koordinaten

In der Ebene seien gegeben ein Koordinatensystem, $K = \left(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2\right)$, ein Vektor $\vec{u}$ mit Koordinatendarstellung $\left(\vec{u}\right)_K = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ sowie eine Zahl $k \in \mathbb{R}$.

Dann gilt

$$\left(-\vec{u}\right)_K = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix}$$

und

$$\left(k\,\vec{u}\right)_K = \begin{pmatrix} k \cdot u_1 \\ k \cdot u_2 \end{pmatrix}.$$

Vektorrechnung mit Koordinaten

Gegenvektorbildung und Multiplikation mit Skalaren

Begründung

- Aus $\left(\vec{u}\right)_K = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{u} + \vec{-u} = \vec{0}$ folgt $\left(\vec{-u}\right)_K + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  Also ist $\left(-\vec{u}\right)_K = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix}$.
- Nach Definition ist die Länge von $\left(k\,\vec{u}\right)$ gleich dem $|k|$-Fachen der Länge von $\vec{u}$ ist und die Richtung von $\left(k\,\vec{u}\right)$ hängt in natürlicher Weise vom Vorzeichen von k ab. Dies ist genau dann der Fall, wenn man

$$\left(k\,\vec{u}\right) = \left(k \cdot u_1\right)\vec{b_1} + \left(k \cdot u_2\right)\vec{b_2}$$

  setzt.

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Vektorrechnung mit Koordinaten

Beispiele

Hörsaalübung:

- **Zeichnen Sie** ein Koordinatensystem $K = \left(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2\right)$ so, dass die beiden Basisvektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ gleiche Länge haben und aufeinander senkrecht stehen.
- Es sei P der Punkt mit Koordinatendarstellung $(P)_K = (3, 2)$, $\vec{u}$ der Vektor mit Koordinaten $(\vec{u})_K = \binom{2}{1}$, und $\vec{v}$ der Vektor mit Koordinaten $(\vec{v})_K = \binom{3}{-1}$.
  Zeichnen Sie die Punkte P, $Q := P + \vec{u}$ und $R := P + \vec{v}$ sowie die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$ und $\overrightarrow{QR}$.
- **Berechnen Sie** ferner die Koordinatendarstellungen der Punkte Q und R sowie der Vektoren $\vec{u} + \vec{v}$ und $\overrightarrow{QR}$.
- **Prüfen Sie** jeweils, ob Ihre Rechnungen zu Ihren zeichnerischen Ergebnissen passen.

Vektorrechnung mit Koordinaten

Beispiele

Hörsaalübung – Teillösung:

Die Skizze erstellen Sie bitte selbst, sie wurde an der Tafel demonstriert und wird hier nicht wiederholt.

- Der Punkt $Q := P + \vec{u}$ hat die Koordinaten

$$(Q)_K = \left(3+2,\ 2+1\right) = \left(5,\ 3\right),$$

der Punkt $R := P + \vec{v}$ hat die Koordinaten

$$(P)_K = \left(3+3,\ 2+(-1)\right) = \left(6,\ 1\right).$$

- Der Vektor $\vec{u} + \vec{v}$ hat die Koordinatendarstellung

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)_K = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}.$$

- Für die Bestimmung der Koordinatendarstellung des Vektors $\overrightarrow{QR}$ gibt es mehrere Möglichkeiten:

Alternative 1: Wir entnehmen der Skizze die Beziehung $\vec{u} + \overrightarrow{QR} = \vec{v}$ und lösen diese nach $\overrightarrow{QR}$ auf: $\overrightarrow{QR} = \vec{v} - \vec{u}$.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \quad \left(\overrightarrow{QR}\right)_K &= \left(\vec{v}\right)_K - \left(\vec{u}\right)_K \\ &= \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-2\\-1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vektorrechnung mit Koordinaten

Beispiele

Hörsaalübung – Teillösung:

- ...
- Für die Bestimmung der Koordinatendarstellung des Vektors $\overrightarrow{QR}$ gibt es mehrere Möglichkeiten:

Alternative 1: ...

Alternative 2: Wir entnehmen der Skizze die Beziehung $\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR}$ und lösen diese nach $\overrightarrow{QR}$ auf: $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ}$.

$$\begin{aligned} \leadsto \quad \left(\overrightarrow{QR}\right)_K &= \left(\overrightarrow{OR}\right)_K - \left(\overrightarrow{OQ}\right)_K \\ &= \binom{6}{1} - \binom{5}{3} = \binom{6-5}{1-3} = \binom{1}{-2}. \end{aligned}$$

Hinweis: Die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{OQ}$ sind die gleichen wie die Koordinaten des Endpunkts Q. Dies ist deswegen so, weil der Vektor $\overrightarrow{OQ}$ ***am Ursprung angeheftet ist****, vgl. die Folien 30 ff. Entsprechendes gilt für die Koordinaten von $\overrightarrow{OQ}$ und R.*

Zwei Denkschulen

Beim Umgang von Punkten und Vektoren sind zwei Denkweisen üblich.

1. Punkte und Vektoren werden streng unterschieden, die Addition von Vektoren zu Punkten wird jedoch verwendet. Geraden und Ebenen werden als **Punktmengen** beschrieben, Geraden z.B. in der Form

$$g = \left\{ P + t\,\vec{v} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Wenn ein Koordinatensystem $\left(O; \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right)$ eingeführt wurde, so lässt sich jeder Punkt P durch seinen **Ortsvektor** $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ beschreiben. Punktmengen wie etwa Geraden können dann auch durch **Mengen von Ortsvektoren** dargestellt werden:

$$g = \left\{ \vec{p} + t\,\vec{v} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vektorrechnung mit Koordinaten

Erlaubte und nicht erlaubte Operationen

Bemerkung

Welcher Denkschule man auch folgt, eine **Addition von Punkten** lässt sich im Allgemeinen **nicht sinnvoll** definieren.

1. Versucht man, die Summer zweier Punkte P und Q über ihre Koordinatendarstellungen $(P)_K$ und $(Q)_K$ in der Form $(P)_K + (Q)_K$ zu definieren, so stellt sich heraus, dass das Ergebnis vom gewählten Koordinatensystem $K = \left(O; \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right)$, insbesondere von der Wahl des Koordinatenursprungs abhängt. Dieser Versuch liefert also keine geometrisch wohldefinierte Operation.
2. Dieses Problem lässt sich (natürlich) nicht lösen, wenn man anstelle der Punkte P und Q ihre Ortsvektoren $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OQ}$ betrachtet, denn deren Koordinaten sind in gleicher Weise wie die der Punkte vom gewählten Koordinatensystem abhängig.