Mathematik und Simulation

Komplexe Zahlen

3

Prof. Dr. Thomas Schneider

Stand: 09.05.2023

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Inhalt

Bemerkung

zum Foliensatz

Bemerkung zum Foliensatz

Der Foliensatz zu diesem Kapitel wurde in Zusammenarbeit zwischen Prof. Dr. R. Lasowski und Prof. Dr. T. Schneider erstellt.

Der Körper der komplexen Zahlen

Agenda I

- Motivation
- Einführung
- Addition und Multiplikation
- Eigenschaften

Komplexe Zahlen

Motivation

Zahlenmengen

- $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ heißt Menge der **natürlichen Zahlen**,
- $\mathbb{Z} := \{.. - 2, -1, 0, 1, 2, 3, ..\}$ heißt Menge der **ganzen Zahlen**,
- $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$ heißt Menge der **rationalen Zahlen**.
- Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ enthält zusätzlich zu $\mathbb{Q}$ alle Wurzeln (Quadratwurzeln, dritte Wurzeln, . . .), ferner (unendliche viele) andere irrationale Zahlen wie die eulersche Zahl e, die Kreiszahl π, die Zahl des Goldenen Schnitts τ, usw.

Erweiterung von Zahlenmengen

Die Notwendigkeit zur „Erfindung“ von Zahlenmengen bzw. zur sukkzessiven Erweiterung bereits gefundener Rechenbereiche ergab sich, weil man bestimmte Typen von Gleichungen lösen (können) wollte.

Beispiele

a) $x + 5 = 2$ hat keine Lösung in $\mathbb{N}$ aber in $\mathbb{Z}$;

b) $5 \cdot x = -1$ hat keine Lösung in $\mathbb{Z}$, aber in $\mathbb{Q}$;

c) $x^2 = 2$ hat keine Lösung in $\mathbb{Q}$, aber in $\mathbb{R}$;

d) $x^2 = -1$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$, wir konstruieren einen neuen Zahlenbereich $\mathbb{C}$, in dem diese Gleichung eine Lösung hat.

Komplexe Zahlen

Erweiterung der reellen Zahlen – imaginäre Einheit

Definition

Die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad x^2 = -1$$

hat in der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ keine Lösung. Zur Erweiterung von $\mathbb{R}$ definieren wir eine Zahl i, welche Lösung dieser Gleichung ist:

$$i^2 = -1.$$

Eine solche Zahl wird **imaginäre Einheit** genannt.

Hörsaalübung: Konstruktion einer imaginären Einheit

Es gibt keine reelle Zahl i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$. Wir betrachten stattdessen 2×2-Matrizen und suchen eine Matrix $\mathbb{i}$ mit der Eigenschaft

$$\mathbb{i}^2 = \mathbb{i} \cdot \mathbb{i} = -\mathbb{1} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Überlegen Sie sich hierzu zunächst, welche Abbildung durch die Matrix $\left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ beschrieben wird.

Komplexe Zahlen

Matrixdarstellung

Konstruktion einer imaginären Einheit

Zur Konstruktion eines Objekts i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$ beschreiten wir den folgenden Weg:

- Jeder reellen Zahl x wird die 2×2-Matrix $[x] = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ zugeordnet. Natürlich ist $[x]$ ein Vielfaches der 2×2-Einheitsmatrix. Wenn wie letztere mit dem Symbol $\mathbb{1}$ bezeichnen, so ist
$$[x] = x \cdot \mathbb{1}.$$
- Die Menge $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen 2×2-Matrizen enhält (natürlich) auch die Matrix der 90°-Drehung. Wir verwenden für diese im aktuellen Kontext die Bezeichnung
$$\mathbb{i} := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
- Man überzeugt sich leicht davon, dass
$$\mathbb{i}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1 \cdot \mathbb{1} := -\mathbb{1}$$
gilt.

Komplexe Zahlen

Matrixdarstellung

Matrixdarstellung der komplexen Zahlen

Wir betrachten nun alle Matrizen der Form

$$x \cdot \mathbb{1} + y \cdot \mathbb{i} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -y \\ y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix},$$

wobei x und y beliebige reelle Werte annehmen dürfen, und bezeichnen die Menge dieser Matrizen mit dem Symbol $[\mathbb{C}]$.

Einbettung der reellen Zahlen

Wir finden die Menge der reellen Zahlen in $[\mathbb{C}]$ wieder, wenn wir Matrizen der Form

$$[\mathbb{R}] := \left\{ x \cdot \mathbb{1} + 0 \cdot \mathbb{i} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$$

betrachten. Man spricht davon, dass die Menge der rellen Zahlen $\mathbb{R}$ in die Menge $[\mathbb{C}]$ **eingebettet** wird.

Komplexe Zahlen als Rechenbereich:

Man kann die Menge

$$\begin{aligned}[\mathbb{C}] &= \left\{ x \cdot \mathbb{1} + y \cdot \mathbb{i} \mid x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -y \\ y & 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

als Rechenbereich verwenden. Im Folgenden sei

$$[z_1] = x_1 \cdot \mathbb{1} + y_1 \cdot \mathbb{i} \qquad \text{und} \qquad [z_2] = x_2 \cdot \mathbb{1} + y_2 \cdot \mathbb{i}.$$

Hörsaalübung:

- Berechnen Sie die Matrix $[z_1] + [z_2]$ und stellen Sie diese in der Form $x \cdot \mathbb{1} + y \cdot \mathbb{i}$ dar.
- Berechnen Sie die Matrix $[z_1] \cdot [z_2]$ und stellen Sie diese in der Form $x \cdot \mathbb{1} + y \cdot \mathbb{i}$ dar.

Komplexe Zahlen

Matrixdarstellung

Addition und Mulitplikation komplexer Zahlen:

Es sei

$$[z_1] = x_1 \cdot \mathbb{1} + y_1 \cdot \mathbb{i} \quad \text{und} \quad [z_2] = x_2 \cdot \mathbb{1} + y_2 \cdot \mathbb{i}.$$

- Addition:

$$\begin{aligned} [z_1] + [z_2] &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & -(y_1 + y_2) \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 \end{bmatrix} \\ &= (x_1 + x_2) \cdot \mathbb{1} + (y_1 + y_2) \cdot \mathbb{i}. \end{aligned}$$

- Multiplikation:

$$\begin{aligned} [z_1] \cdot [z_2] &= \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\, x_2 - y_1\, y_2 & -(x_1\, y_2 + x_2\, y_1) \\ x_1\, y_2 + x_2\, y_1 & x_1\, x_2 - y_1\, y_2 \end{bmatrix} \\ &= (x_1\, x_2 - y_1\, y_2) \cdot \mathbb{1} + (x_1\, y_2 + x_2\, y_1) \cdot \mathbb{i}. \end{aligned}$$

Komplexe Zahlen

Darstellungsvarianten

Varianten der Darstellung und Bezeichnung komplexer Zahlen:

- Anstelle der Menge von Matrizen

$$[\mathbb{C}] = \left\{x \cdot \mathbb{1} + y \cdot \mathbb{i} \,\middle|\, x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left[\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right] \,\middle|\, x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\right\}$$

  wird in der Literatur oft die Menge

$$\mathbb{C} := \left\{x \cdot 1 + y \cdot i \,\middle|\, x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\right\},$$

  mit $i^2 = -1$ als **Menge der komplexen Zahlen** bezeichnet.
- Hierbei wird oft „vergessen“, dass eigentlich Matrizen im Spiel sind.
- Die scheinbare Vereinfachung hat ihren Preis: $\left\{x \cdot 1 + y \cdot i \,\middle|\, x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\right\}$ besteht aus **formalen** Linearkombinationen der Zahl 1 und der „imaginären Einheit“ i.
- Anstelle von

$$x \cdot 1 + 0 \cdot i$$

  schreibt man auch einfach nur x und stellt sich x direkt als reelle Zahl vor.
- Multiplikation und Addition werden auf $\mathbb{C}$ so definiert wie auf Folie 10 dargestellt.

Vereinbarungen

- Wir folgenden ab jetzt meist der Literatur und schreiben die Menge der komplexen Zahlen in der Form $\mathbb{C} = \{x + y\,i \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$, wobei stets $i^2 = -1$ gilt.
- Soll die zugrundeliegende Matrixnatur einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ in Erinnerung gerufen bzw. betont werden, so verwenden wir die Notation $[z]$.

Begriffe und Definitionen:

Für eine komplexe Zahl $z = x + y\,i \in \mathbb{C}$ bzw. $[z] = x \cdot \mathbb{1} + y \cdot \mathbb{i} \in [\mathbb{C}]$ heißt

- $\mathrm{Re}(z) := x$ der **Realteil** von z,
- $\mathrm{Im}(z) := y$ der **Imaginärteil** von z,
- $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ der **Absolutbetrag** von z,
- $\bar{z} := x - y\,i$ die zu z **komplex konjugierte** Zahl.

Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen – Vereinbarungen und Begriffe

Beispiel – imaginäre Einheit:

- Für die imaginäre Einheit i ist der Wert des Absolutbetrags gleich 1.
- Begründung: $|i| = |0 \cdot 1 + 1 \cdot i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$.
- Die zur imaginären Einheit i komplex konjugierte Zahl ist $-i$.
- Begründung: $\bar{i} = \overline{0 \cdot 1 + 1i} = 0 \cdot 1 - 1 \cdot i = -i$.
- Es ist $i \cdot \bar{i} = 1$.
- Begründung: $i \cdot \bar{i} = i \cdot (-i) = -i^2 = -(-1) = 1$.

Komplexe Zahlen

Visualisierung – Gauß’sche Zahlenebene

Gauß’sche Zahlenebene

„Komplexe“ Zahlen heißen so, weil sie aus einem Realteil und einem Imaginärteil zusammengesetzt sind.

Mathematiker wie Carl Friedrich Gauß hatten die Idee, komplexe Zahlen geometrisch in einer Ebene darzustellen, weswegen die komplexe Zahlenebene auch als **Gauß’sche Zahlenebene** bezeichnet wird.

Komplexe Zahlen

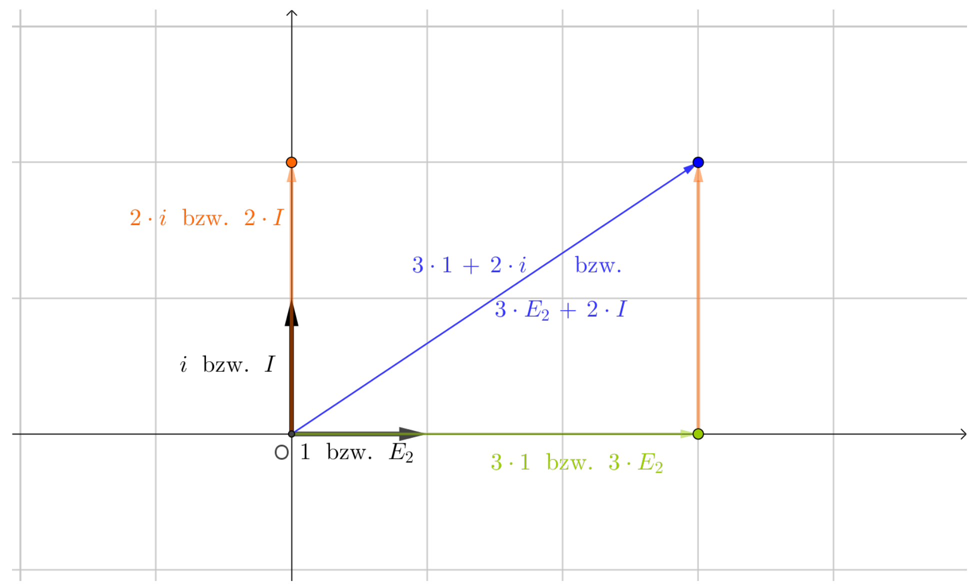
Visualisierung – Gauß'sche Zahlenebene

Koordinatensystem

Zur graphischen Darstellung von komplexen Zahlen in der Ebene

- wählt man einen Punkt O als Kooordinatenursprung,
- einen horizontal nach rechts zeigenden Pfeil der Länge 1 mit der Bezeichnung 1 oder E_2 oder $\mathbb{1}$
- sowie einen vertikal nach oben weisenden Pfeil der Länge 1 mit der Bezeichnung i oder I oder $\mathbb{i}$ an.

als Basisvektoren.



Visualisierung komplexer Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene:

Jeder komplexen Zahl $z = x \cdot 1 + y \cdot i \in \mathbb{C}$ bzw. $x \cdot \mathbb{1} + y \cdot \mathbb{i} \in [\mathbb{C}]$ bzw. $x \cdot E_2 + y \cdot \mathbb{i} \in [\mathbb{C}]$ wird nun der Punkt mit Koordinaten (x, y) bzw. der Pfeil (Ortsvektor) mit Koordinaten $\binom{x}{y}$ zugeordnet.

Komplexe Zahlen

Visualisierung – Gauß'sche Zahlenebene

Veranschaulichung des Absolutbetrags:

- Der Absolutbetrag $|z|$ einer komplexen Zahl $z = x \cdot 1 + y \cdot i \in \mathbb{C}$ bzw. $x \cdot \mathbb{1} + y \cdot \mathbb{i} \in [\mathbb{C}]$ entspricht der **Länge** des Pfeils mit Koordinaten $\binom{x}{y}$ mit dem z in der Gauß'schen Zahlenebene dargestellt wird.
- Insbesondere ist die Länge der Basispfeile richtig gewählt, weil sowohl 1 als auch i den Absolutbetrag 1 haben, vgl. Folie 13.
- Andere Sprechweise: Der Absolutbetrag $|z|$ einer komplexen Zahl $z = x + y\,i \in \mathbb{C}$ entspricht **dem Abstand** des Punktes mit Koordinaten (x, y), durch den z in der Gauß'schen Zahlenebene dargstellt wird, **vom Koordinatenursprung**.

Komplexe Zahlen

Visualisierung – Gauß'sche Zahlenebene

Bemerkung:

In der Matrix $z = \begin{bmatrix} x & -y \\ x & y \end{bmatrix}$ stehen **zwei** Spaltenvektoren.

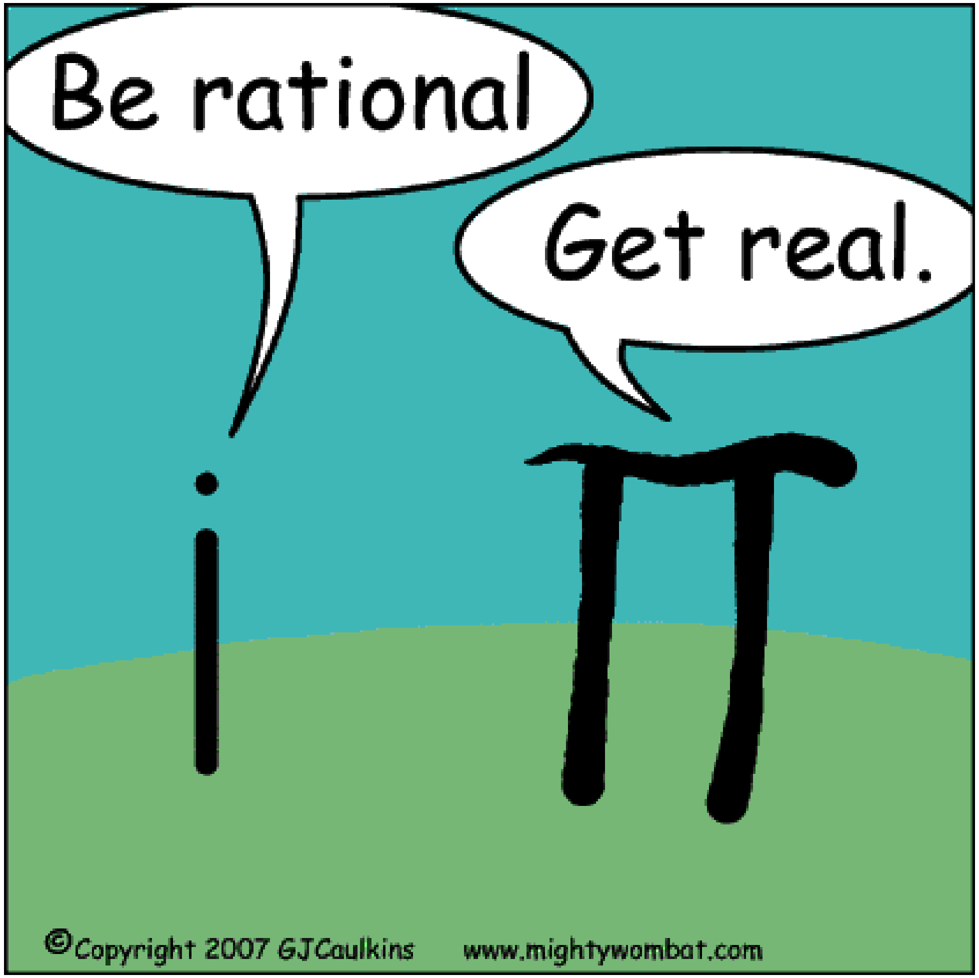
- Der erste Vektor $\binom{x}{y}$ wird für die Darstellung von z in der Gauß'schen Zahlenebene verwendet.
- Der zweite Vektor $\binom{-y}{x}$ wird meistens ignoriert, er **könnte** aber als „orthogonaler Begleitvektor" mit eingezeichnet werden.

Hausübung:

Zeichnen Sie den Vektor und den orthogonalen Begleitvektor für die komplexe Zahl

$$z = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zur Erholung:



Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen – Multiplikative Inverse und Division

Hörsaalübung zur Vorbereitung der Division komplexer Zahlen:

Es sei

$$[z] = x \cdot \mathbb{1} + y \cdot \mathbb{i} = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$$

und

$$[\bar{z}] = x \cdot \mathbb{1} - y \cdot \mathbb{i} = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}.$$

- Berechnen Sie das Matrixprodukt $[z] \cdot [\bar{z}]$.
- Berechnen Sie aus der Gleichung

$$[z] \cdot [\bar{z}] = |z|^2 \cdot \mathbb{1}$$

die Matrix $[z]^{-1}$.

Komplexe Zahlen
Komplexe Zahlen – Multiplikative Inverse und Division

Hörsaalübung – Fazit:

Für

$$[z] = x \cdot \mathbb{1} + y \cdot \mathbb{i} = \left[\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right] \quad \text{und} \quad [\bar{z}] = x \cdot \mathbb{1} - y \cdot \mathbb{i} = \left[\begin{smallmatrix} x & y \\ -y & x \end{smallmatrix}\right]$$

gilt

$$[z] \cdot [\bar{z}] = |z|^2 \cdot \mathbb{1}.$$

Hieraus errechnet sich die multiplikative Inverse von $[z]$:

$$\begin{aligned} [z]^{-1} &= \frac{1}{|z|^2} [\bar{z}] \\ &= \tfrac{1}{x^2+y^2} \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Komplex Konjugierte und Inverse in konventioneller Notation:

Für jede komplexe Zahl $z = x + y\,i \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (x + y\,i) \cdot (x - y\,i) = x^2 - (y\,i)^2 \\ &= x^2 - y^2 \cdot i^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 \end{aligned}$$

Hieraus folgt

- die Gleichung $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ sowie
- die wichtige Beziehung

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z} \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (x - y\,i) \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\, i. \end{aligned}$$

Wir können die multiplikative Inverse von z auch als Bruch schreiben:

$$\frac{1}{z} := z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\, i.$$

Bestimmung der Inversen durch Erweitern:

Für jede komplexe Zahl $z = x + y\,i \in \mathbb{C}$ lässt sich die Inverse $z^{-1} = \frac{1}{z}$ formal durch **Erweitern** des Bruchs $\frac{1}{z}$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1 \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \\ &= \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z} = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (x - y\,i) \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\,i\,. \end{aligned}$$

Erinnerung:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

Hörsaalübung:

Es sei

$$z_1 = 2 + i := 2 \cdot 1 + 1\,i \qquad \text{und} \qquad z_2 = 3 + 4\,i.$$

- Berechnen Sie
$$z_2^{-1} = \frac{1}{z_2}$$
- sowie
$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$

entweder in konventioneller Darstellung oder mit dem „Umweg“ über die Matrixdarstellung.

Hörsaalübung – Lösung (1):

Gegeben sind $z_1 = 2 + i$ und $z_2 = 3 + 4\,i$.

- Berechnung von $z_2^{-1} = \frac{1}{z_2}$ in konventioneller Notation:

$$\frac{1}{3+4\,i} = \frac{3-4\,i}{(3+4\,i)\cdot(3-4\,i)} = \frac{3-4\,i}{9-16\,i^2}$$
$$= \frac{3-4\,i}{9-16\cdot(-1)} = \frac{3-4\,i}{25}$$
$$= \tfrac{3}{25} - \tfrac{4}{25}\,i\,.$$

- Die Inverse der Matrix $[z_2] = 3\cdot\mathbb{1} + 4\cdot\mathbb{i} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \in [\mathbb{C}]$ lässt sich mit der Formel aus dem 1. Semester berechnen:

$$[z_2]^{-1} = \frac{1}{3\cdot 3 - 4\cdot(-4)} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{25} & \frac{4}{25} \\ -\frac{4}{25} & \frac{3}{25} \end{bmatrix}$$
$$= \tfrac{3}{25}\cdot\mathbb{1} - \tfrac{4}{25}\cdot\mathbb{i}$$

Hausübung:

Berechnen Sie zur Probe die Produkte

$$\left(\frac{3}{25} - \frac{4}{25}\,i\right) \cdot \left(3 + 4\,i\right)$$

und

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{25} & \frac{4}{25} \\ -\frac{4}{25} & \frac{3}{25} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Hörsaalübung – Lösung (2):

Gegeben sind $z_1 = 2 + i$ und $z_2 = 3 + 4\,i$.

- Wir haben $z_2^{-1} = \frac{1}{z_2} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}\,i$ bzw. $[z_2]^{-1} = \frac{3}{25} \cdot \mathbb{1} - \frac{4}{25} \cdot \mathbb{i}$ bereits ermittelt.
- Die Zahl $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$ in konventioneller Notation:

$$(2 + i) \cdot \left(\tfrac{3}{25} - \tfrac{4}{25}\,i\right) = \frac{6 - 4\,i^2}{25} + \frac{3\,i - 8\,i}{25} = \frac{10}{25} + \frac{-5}{25}\,i = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\,i\,.$$

- In Matrix-Notation:

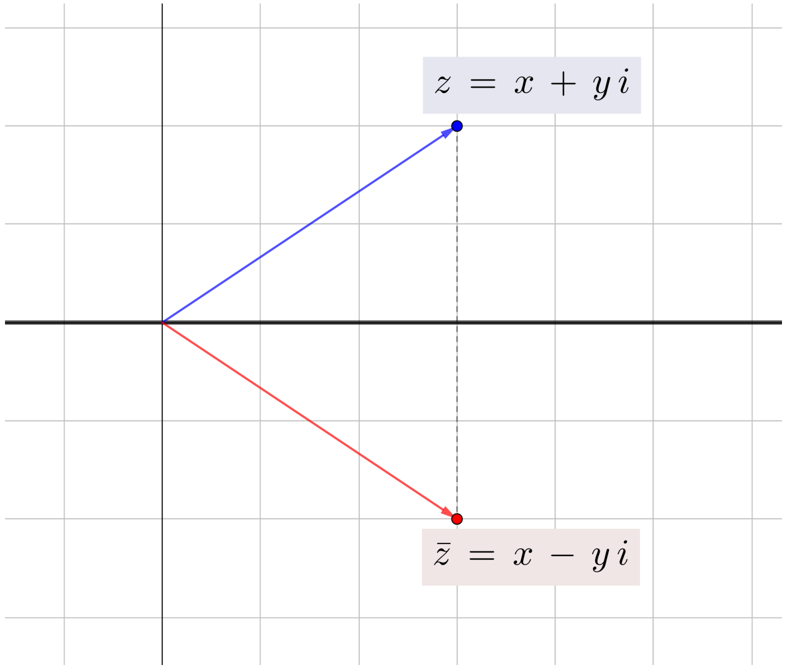
$$\begin{aligned}
[z_1] \cdot [z_2]^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{25} & \frac{4}{25} \\ -\frac{4}{25} & \frac{3}{25} \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} = \frac{10}{25} \cdot \mathbb{1} + \frac{-5}{25} \cdot \mathbb{i} \\
&= \frac{2}{5} \cdot \mathbb{1} - \frac{1}{5} \cdot \mathbb{i}\,.
\end{aligned}$$

Komplexe Zahlen

Eigenschaften der komplexen Konjugation und des Absolutbetrags

Geometrische Deutung der komplexen Konjugation:

- Werden die komplexen Zahl $z = x + y\,i$ und $\bar{z} = x - y\,i$ in der Gauß'schen Zahlenebene dargestellt, so ist $\bar{z}$ das Bild von z unter der **Spiegelung an der horizontalen Achse**.
- Die Absolutbeträge $|z|$ und $|\bar{z}|$ stimmen(daher) überein.
- Man sagt auch: **Komplexe Konjugation** entspricht der **Spiegelung an der rellen Achse**.



Komplexe Zahlen

Eigenschaften der komplexen Konjugation und des Absolutbetrags

Eigenschaften:

Für alle komplexe Zahlen z, z_1 und z_2 gelten die folgenden Identitäten:

- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ (Erinnerung)
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung)

Komplexe Zahlen

Polardarstellung und Exponentialdarstellung

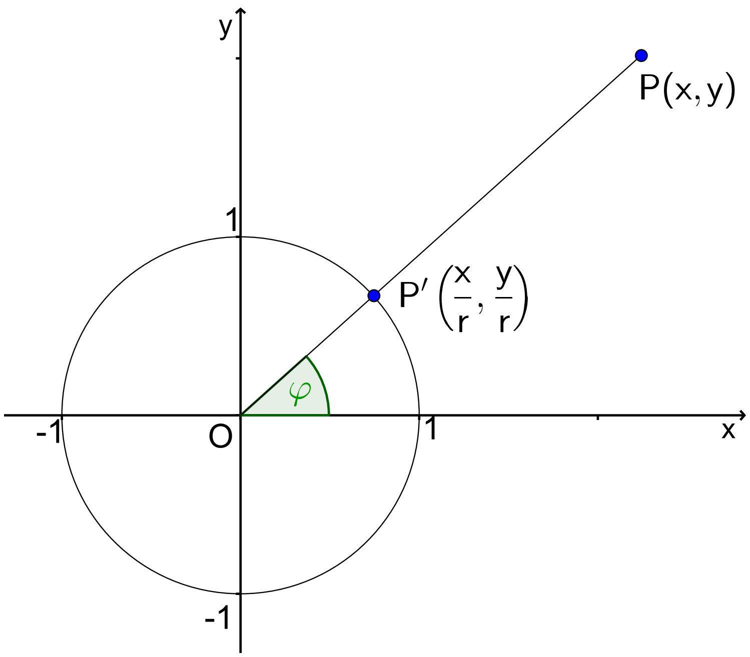
Ziel:

- Wir wollen die komplexen Zahlen in Form von Polarkoordinaten beschreiben, ganz in Analogie zum ersten Semester.
- Dort führten wir für einen Punkt mit Koordinaten (x, y) den **Polarwinkel** φ so ein, dass die Beziehungen

$$\cos(\varphi) = \frac{x}{r} \qquad \text{und} \qquad \sin(\varphi) = \frac{y}{r}$$

  erfüllt sind.
- Hierbei ist r der Abstand des Punkts vom Ursprung, also

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Komplexe Zahlen

Polardarstellung und Exponentialdarstellung

Polardarstellung komplexer Zahlen

- Für eine komplexe Zahl $z = x + y\,i$ führen wir den **Polarwinkel** φ so ein, dass die Beziehungen

$$\cos(\varphi) = \frac{x}{r} \qquad \text{und} \qquad \sin(\varphi) = \frac{y}{r}$$

erfüllt sind.

- Hierbei ist r der Absolutbetrag von z also

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

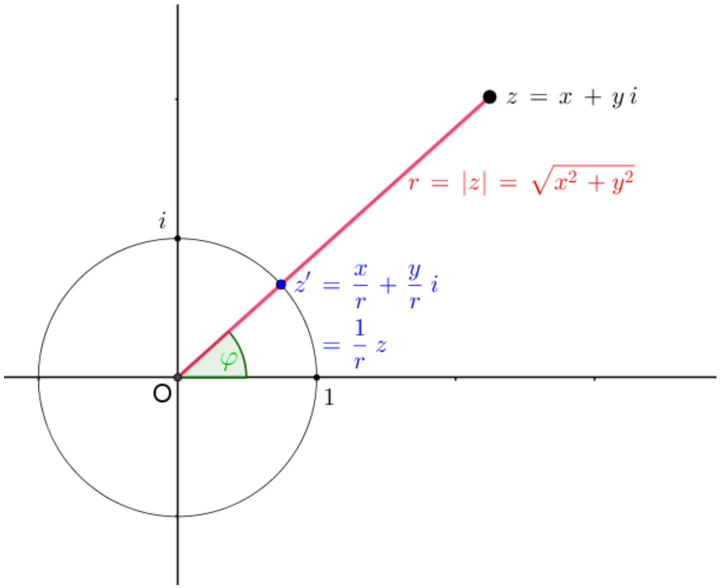
- Die komplexe Zahl

$$\begin{aligned} z' &:= \tfrac{1}{r}\,z = \tfrac{x}{r} + \tfrac{y}{r}\,i \\ &= \cos(\varphi) + \sin(\varphi)\,i \end{aligned}$$

liegt auf dem Einheitskreis,

- Durch Umstellen ergibt sich die Darstellung

$$z = r \cdot z' = r\,(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\,i)\,.$$



Komplexe Zahlen
Polardarstellung und Exponentialdarstellung

Polarform in Matrixdarstellung

Mit den Bezeichnungen der vorigen Folie schreiben wir für $z = x + y\,i \neq 0$:

$$[z] = |z| \cdot \begin{bmatrix} \frac{x}{|z|} & -\frac{y}{|z|} \\ \frac{y}{|z|} & \frac{x}{|z|} \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi). \end{bmatrix}$$

Die Matrix $[z]$ lässt sich also als Vielfache einer Drehmatrix schreiben.

Polardarstellung(en):

Konventionelle Darstellung:

$$\begin{aligned} z &= r\,(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\,i) \\ &= r\,\cos(\varphi) + r\,\sin(\varphi)\,i\,. \end{aligned}$$

Matrixdarstellung:

$$\begin{aligned} [z] &= r\left(\cos(\varphi) \cdot \mathbb{1} + \sin(\varphi) \cdot \mathbb{i}\right) \\ &= r\,\cos(\varphi) \cdot \mathbb{1} + r\,\sin(\varphi) \cdot \mathbb{i}\,. \end{aligned}$$

Komplexe Zahlen
Polardarstellung und Exponentialdarstellung

Multiplikation zweier komplexer Zahlen in Polardarstellung:

Es seien $w, z \in \mathbb{C}$. Wir verwenden die Polardarstellungen in Matrixform

$$[z] = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} = |z| \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

und

$$[w] = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = |w| \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

zur Ausführung der Multiplikation.

Ausführung:

$$\begin{aligned} [z] \cdot [w] &= |z| \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \cdot |w| \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \\ &= |z| \cdot |w| \cdot \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\alpha) & \cos(\varphi) \cdot (-\sin(\alpha)) - \sin(\varphi) \cdot \cos(\alpha) \\ \sin(\varphi) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\alpha) & -\sin(\alpha) \cdot \sin(\varphi) + \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Komplexe Zahlen
Polardarstellung und Exponentialdarstellung

Ausführung (2):

Aus unserem Zwischenergebis

$$[z] \cdot [w] = |z| \cdot |w| \cdot \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\alpha) & \cos(\varphi) \cdot (-\sin(\alpha)) - \sin(\varphi) \cdot \cos(\alpha) \\ \sin(\varphi) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\alpha) & -\sin(\alpha) \cdot \sin(\varphi) + \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

erhalten wir mithilfe der Additionstheoreme den Ausdruck

$$[z] \cdot [w] = |z|\,|w| \begin{bmatrix} \cos(\varphi + \alpha) & -\sin(\varphi + \alpha) \\ \sin(\varphi + \alpha) & \cos(\varphi + \alpha) \end{bmatrix}$$

Komplexe Zahlen
Polardarstellung und Exponentialdarstellung

Beobachtung für Drehmatrizen:

Für die Drehmatrizen

$$D(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad D(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

folgt also die Beziehung

$$D(\varphi) \cdot D(\alpha) = D(\varphi + \alpha),$$

die wir in ähnlicher Form als **Exponentialgesetz** kennen:

$$\exp(a) \cdot \exp(b) = \exp(a + b) \qquad \text{bzw.} \qquad e^a \cdot e^b = e^{(a+b)}$$

Eulersche Formel:

Dies nehmen wir zum Anlass, die folgenden Identitäten zur Kenntnis zu nehmen:

- Euler-Formel in Matrixnotation:

$$\exp(\varphi \cdot \mathbb{i}) := \cos(\varphi) \cdot \mathbb{1} + \sin(\varphi) \cdot \mathbb{i} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

- Euler-Formel in konventioneller Notation:

$$e^{i\varphi} := \exp(\varphi \cdot i) := \cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot i\,.$$

Exponentialdarstellung

Auf der Grundlage des bisher Gesagten können wir jede komplexe Zahl $z = x + y\,i$ in der Form

$$z = r \cdot e^{i\,\varphi}$$

schreiben. Hierin ist

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und

$$\cos(\varphi) = \frac{x}{r} \qquad \text{sowie} \qquad \sin(\varphi) = \frac{y}{r}.$$

Diese Form der Darstellung komplexer Zahlen heißt **Exponentialform** oder **Exponentialdarstellung**.

Komplexe Zahlen

Komplexe Konjugation in Exponentialdarstellung

Wenn eine komplexe Zahl in der Form

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

gegeben ist, so gilt

$$\bar{z} = r \cdot e^{-i\varphi}.$$

Denn aus der uns bekannten Identität

$$r^2 = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

folgt

$$\bar{z} = \frac{r^2}{z} = \frac{r^2}{r \cdot e^{i\varphi}} = r \cdot e^{-i\varphi}$$

Komplexe Zahlen

Polardarstellung und Exponentialdarstellung

Erinnerung (Exponentialdarstellung):

$$z = x + y\,i = r \cdot e^{i\,\varphi}.$$

Hörsaalübung:

- Zeichnen Sie die folgenden Zahlen, die in Exponentialdarstellung gegeben sind, in der Gauß'schen Zahlenebene.
  a) $e^{i \cdot 0}$,
  b) $2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$,
  c) $e^{-i\,\frac{\pi}{2}}$,
  d) $e^{-i\,\pi}$,
- Bestimmen Sie die Exponentialdarstellungen der komplexen Zahlen $z = 1 + \sqrt{3}\,i$ und $w = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}\,i}}$ und zeichnen Sie diese in der Gauß'schen Zahlenebene.

Komplexe Zahlen

Polardarstellung und Exponentialdarstellung

Drehstreckung:

Wir kehren noch einmal zurück zu unserer Berechnung des Produktes

$$[z] \cdot [w] = |z| \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \cdot |w| \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

und schreiben diese nun in Exponentialform:

$$z \cdot w = |z|\, e^{i\,\varphi} \cdot |w|\, e^{i\,\alpha} = |z| \cdot |w| \cdot e^{i\,(\varphi+\alpha)}.$$

Interpretation:

- Die Zahl $z \cdot w$ hat den Absolutbetrag $|w| \cdot |z|$ und den Polarwinkel $\varphi + \alpha$.
- Die Abbildung $z \mapsto z \cdot w$ lässt sich geometrisch als **Drehstreckung** mit **Drehwinkel** α, dem Polarwinkel von w, und **Streckfaktor** $|w|$ deuten.

Hörsaalübung:

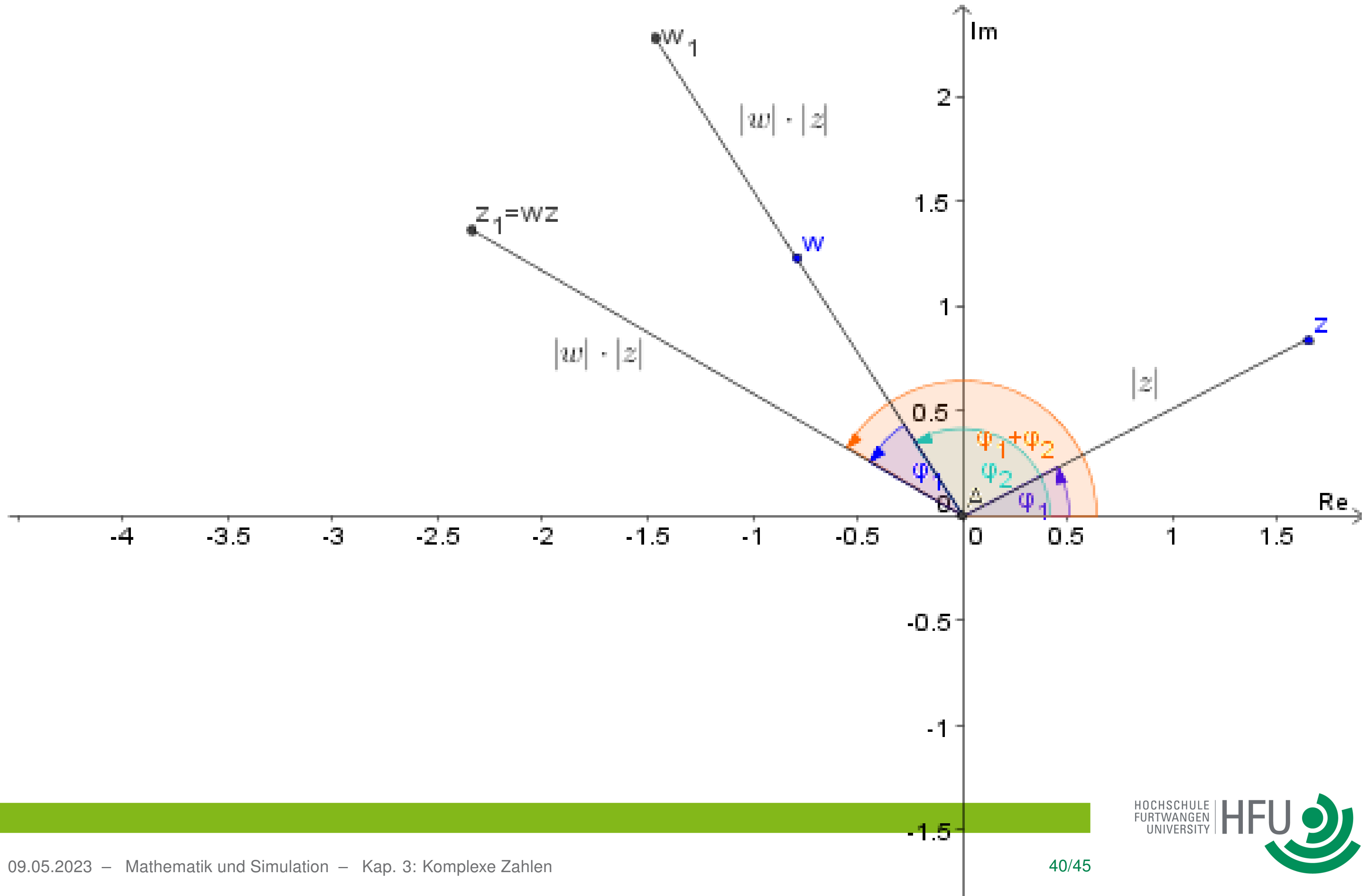
Berechnen oder bestimmen und zeichnen Sie für $z = 2 - 1\,i$ das Bild unter der Abbildung

a) $z \mapsto e^{\frac{\pi}{2}\,i} \cdot z$,

b) $z \mapsto -i \cdot z$.

Komplexe Zahlen

Multiplikation als Drehstreckung



N-te Einheitswurzeln

Die Anwendungen der komplexen Zahlen sind sehr vielfältig, da viele Berechnungen mit Hilfe der komplexen Zahlen einfacher sind als im Reellen. Wir schauen uns die N-ten Einheitswurzeln an, die die Gleichung $z^N = 1$ erfüllen.
Denn z.B. sind die Einträge der komplexen Fouriermatrix, die in der Signalverarbeitung oder Codierungstheorie eine große Rolle spielt, solche N-te Einheitwurzeln.
Deshalb lohnt es sich diese Teilmenge der komplexen Zahlen genauer anzusehen.

N-te Einheitswurzeln Einführungsbeispiel

4-te Einheitswurzeln - Algebra

Als Einführung betrachten wir folgende komplexe Zahlenfolge:

- i
- $i^2 = i \cdot i = -1$
- $i^3 = i \cdot i^2 = -i$
- $i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1$
- $i^5 = i^4 \cdot i = i$
- ...

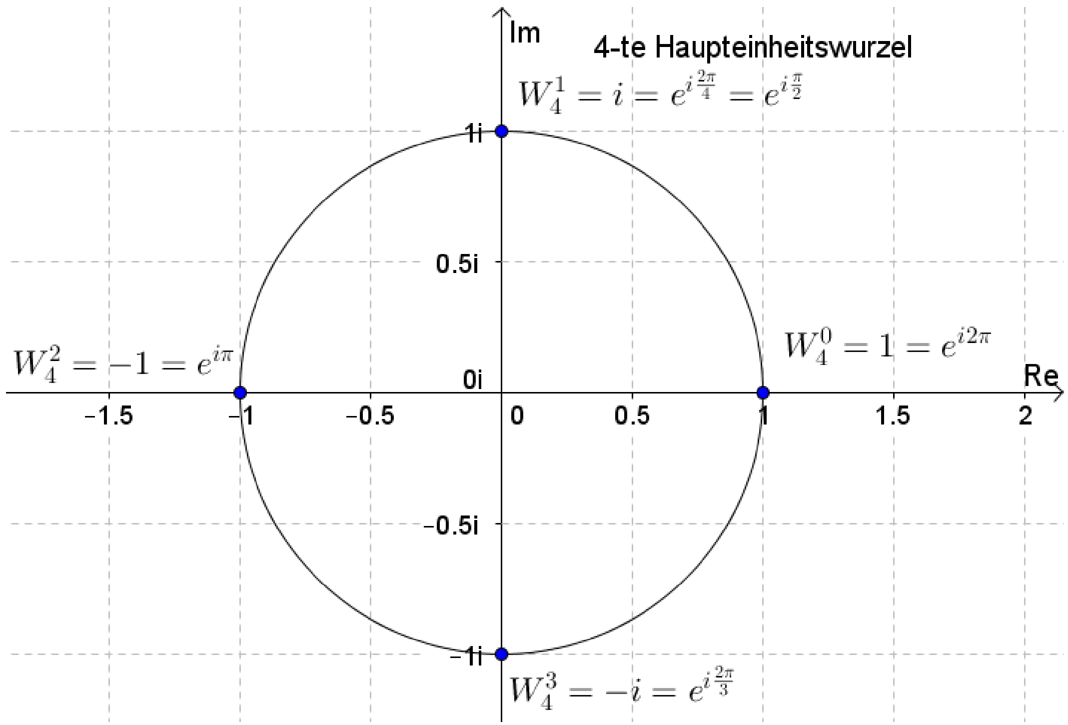
Diese Zahlenfolge, i^k mit $k = 1, 2, 3, 4, ...$, ist periodisch mit Periode 4, denn

$$i^{k+4} = i^k \cdot i^4 = i^k \cdot 1 = i^k.$$

N-te Einheitswurzeln Einführungsbeispiel

4-te Einheitswurzeln - Was passiert geometrisch?

Benutzen wir die Euler'sche Indentität, so ist die Exponentialform der imaginären Einheit $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Wenn wir also mit i multiplizieren, dann entsteht eine Drehung um 90° bzw. um $\frac{\pi}{2}$. Wir bewegen uns in 90° Schritten um den Kreis herum, wenn wir jedesmal mit i multiplizieren und damit eine neue höhere Potenz von i erzeugen bis wir an der selben Stelle wieder ankommen. Diese Zahlenfolge erfüllt also die Gleichung $z^4 = 1$, und hat genau die 4 Lösungen die wir hier sehen. (Bzgl. Notationen s. nächste Folie)



N-te Einheitswurzeln

- Teilmenge der komplexen Zahlen, die die Gleichung $z^N = 1$ erfüllen.
- Auf der Menge der komplexen Zahlen hat diese Gleichung genau N Lösungen.
- Eine von Ihnen ist die N-te Haupteinheitswurzel $W_N = \cos(\frac{2\pi}{N}) + i\sin(\frac{2\pi}{N}) = e^{i\frac{2\pi}{N}}$
- Sie generiert alle N verschiedene Lösungen:
$$W_N^0, W_N^1, W_N^2, ..., W_N^{N-1}$$
- Die Einheitswurzeln sind gleichmäßig auf dem Einheitskreis verteilt auf Intervallen von $\frac{2\pi}{N}$. Sie bilden ein regelmäßiges N-Eck.

8-te Einheitswurzel

- Wir suchen komplexe Zahlen, die die Gleichung $z^8 = 1$ erfüllen
- 8-te Haupteinheitswurzel $W_8 = e^{i\frac{2\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$