# Mathematik in Medien und Informatik 1

## Systeme linearer Gleichungen 7

Prof. Dr. Thomas Schneider

Stand: 29.11.2022

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

# Inhalt

# Lineare Gleichungssysteme (LGS)

## Definition

**Definition:**

Ein **System linearer Gleichungen** oder **lineares Gleichungssystem (LGS)** ist von folgender Form:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{1s}\,x_s & = & b_1 & & \text{(Glg. 1)} \\
a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{2s}\,x_s & = & b_2 & & \text{(Glg. 2)} \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \\
a_{z1}\,x_1 & + & a_{z2}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{zs}\,x_s & = & b_z & & \text{(Glg. z)}
\end{array}
$$

Bezeichnungen:

$x_j$ : Unbekannte

$a_{ij}$ : Koeffizienten

$z$ : Anzahl der Gleichungen

$s$ : Anzahl der Unbekannten

**Beispiel**

$$\begin{aligned} 2\,x_1 &+ 3\,x_2 &= 0 \quad &(\text{Glg. } 1)\\ 3\,x_1 &- 2\,x_2 &= 8 \quad &(\text{Glg. } 2)\\ 4\,x_1 &- 6\,x_2 &= -2 \quad &(\text{Glg. } 3)\end{aligned}$$

$$z = 3 \qquad s = 2$$
$$b_1 = 0 \qquad a_{32} = -6$$

# Lineare Gleichungssysteme (LGS)

## Lösung von Gleichungssystemen

### Definition:

Unter einer **Lösung** des vorstehenden LGS verstehen wir einen Vektor bzw. ein $s$-Tupel $v = (v_1, v_2, \ldots, v_s) \in \mathbb{R}^s$, der/das **alle** Gleichungen erfüllt.

D.h., $v$ ist Lösung des LGS, wenn Folgendes gilt:

$$\begin{array}{rlcl}
 & a_{11}\,v_1 + a_{12}\,v_2 + \ldots + a_{1s}\,v_s = b_1 & & \text{ist wahr} \\
\textbf{und} & a_{21}\,v_1 + a_{22}\,v_2 + \ldots + a_{2s}\,v_s = b_2 & & \text{ist wahr} \\
 & \vdots & & \vdots \\
\textbf{und} & a_{z1}\,v_1 + a_{z2}\,v_2 + \ldots + a_{zs}\,v_s = b_z & & \text{ist wahr.}
\end{array}$$

Die **Lösungsmenge** $\mathcal{L}$ eines LGS umfasst **alle** Lösungen des LGS.

# Lineare Gleichungssysteme (LGS)

## Homogene Gleichungssysteme

### Homogene Gleichungssysteme:

Ein LGS heißt **homogen**, wenn $b_i = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, z\}$ gilt.

Jedes *homogene* LGS

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \dots & + & a_{1s}\,x_s & = & 0 & \quad (\text{Glg. } 1) \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \dots & + & a_{2s}\,x_s & = & 0 & \quad (\text{Glg. } 2) \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \\ a_{z1}\,x_1 & + & a_{z2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{zs}\,x_s & = & 0 & \quad (\text{Glg. } z) \end{array}$$

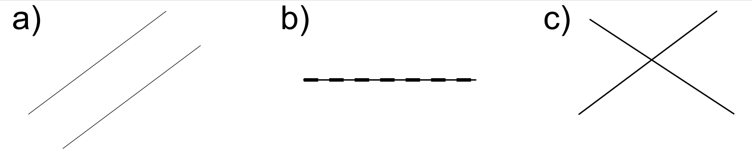
besitzt **zumindest** die Lösung $v = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^s$.

# Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Systeme zweier Gleichungen in zwei Unbekannten

## Schnittmenge zweier Geraden in der Ebene

- Jede Gleichung der Form $a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 = b_i$ lässt sich leicht in eine AKG umschreiben: $a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 - b_i = 0$.
- Wie wir im vorigen Kapitel gesehen haben, stellt die Lösungsmenge einer solchen Gleichung eine Gerade in der Ebene dar (vorausgesetzt, dass $(a_{i1}, a_{i2}) \neq (0, 0)$ gilt).
- Abgesehen von zwei (uninteressanten) Sonderfällen besteht die Lösungsmenge eines LGS mit **zwei Gleichungen** in **zwei Unbekannten** daher aus den Schnittpunkten **zweier Geraden in der Ebene**.



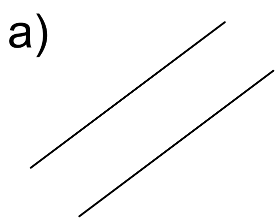
# Lineare Gleichungssysteme (LGS)

## Systeme zweier Gleichungen in zwei Unbekannten – Beispiele

a) Das LGS

$$\begin{aligned} 2\,x_1 \;+\; 3\,x_2 \;&=\; 0 \\ 2\,x_1 \;+\; 3\,x_2 \;&=\; 1 \end{aligned}$$

besitzt keine Lösung.




**Begründung**

Angenommen es gäbe eine Lösung $v = (v_1, v_2)$. Dann gälte:

$$\begin{aligned} & 2\,v_1 + 3\,v_2 = 0 \\ \text{und} \qquad & 2\,v_1 + 3\,v_2 = 1 \end{aligned}$$

Dann aber wäre $0 = 1$ ↯ *Widerspruch*

Daher ist die Annahme zu verwerfen, d.h. es gibt keine Lösung.

Notation: $\mathcal{L} = \varnothing$ Lösungsmenge = leere Menge

# Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Systeme zweier Gleichungen in zwei Unbekannten – Beispiele

b) Das LGS

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + 3\,x_2 &= 1 \\ -4\,x_1 - 6\,x_2 &= -2 \end{aligned}$$

besitzt unendlich viele Lösungen.

b)



**Begründung**

Jede Lösung $v = (v_1, v_2)$ der ersten Gleichung ist auch Lösung der zweiten Gleichung und umgekehrt.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \big\{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2\,v_1 + 3\,v_2 = 1\big\} \\ &= \big\{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -4\,v_1 - 6\,v_2 = -2\big\} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{L}$ enthält unendlich viele Elemente / Lösungen.



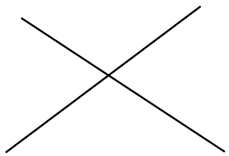
HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

c) Das LGS

$$\begin{aligned} 1\,x_1 + 1\,x_2 &= 1 \\ 3\,x_1 - 2\,x_2 &= 8 \end{aligned}$$

besitzt genau eine Lösung.

c)



**Begründung**

Die beiden Geraden haben genau einen Schnittpunkt, also gibt es genau eine Lösung $v = (2, -1)$.

Der Punkt $v = (2, -1)$ erfüllt beide Gleichungen,

| | | |
|---|---|---|
| denn | $1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 1$ | ist wahr |
| und | $3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 8$ | ist wahr. |

$\rightsquigarrow \mathcal{L} = \{(2, -1)\}$.

# Lineare Gleichungssysteme (LGS)

## Systeme zweier Gleichungen in zwei Unbekannten – Beispiele

**Bemerkung:**

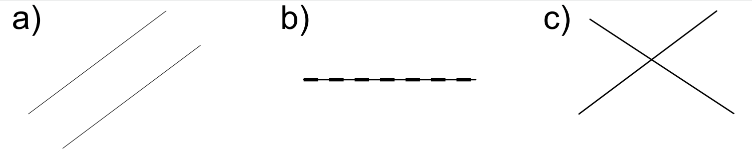
Wir lesen aus den Gleichungen direkt die Normalenvektoren der Geraden ab:

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 &= b_2 \end{aligned} \qquad \vec{n_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}, \quad \vec{n_2} = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

a) $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{n_2} = 1 \cdot \vec{n_1}.$

b) $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{n_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \vec{n_2} = (-2) \cdot \vec{n_1}.$

c) $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{n_2}$ ist kein Vielfaches von $\vec{n_1}$.




Sind die Normalenvektoren keine Vielfachen voneinander, so gibt es genau einen Schnittpunkt (Fall c).

# Lösungsverfahren für LGS



## Anforderungen

Zur Lösung von Gleichungssystemen benötigt man ein Verfahren, das

- **systematisch**
- (auch bei händischer Ausführung) **übersichtlich**
- **skalierbar** (also auch auf große Systeme anwendbar)
- **automatisierbar** (und somit auf Rechenanlagen ausführbar)

ist.

Eines der bekanntesten Verfahren ist nach dem Mathematiker Carl Friedrich Gauß und dem Geodäten Wilhelm Jordan benannt und heißt **Gauß-Jordan-Verfahren** oder auch **Gauß-Jordan-Algorithmus**. Wir werden dieses Verfahren nun vorstellen.

# Gauß-Jordan-Algorithmus
Lösungsverfahren für LGS

## Schritt 1:

Zur Vereinfachung verwenden wir eine Notation, bei der die Unbekannten unterdrückt werden:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{z1} & a_{z2} & \dots & a_{zs} & b_z \end{array}\right]}_{\text{Erweiterte Koeff.-Matrix (EKM)}} = \left[\, A \,\middle|\, b \,\right] \quad \text{(Kurzschreibweise)}$$

Koeffizientenmatrix: $a_{11}, \dots, a_{zs}$; „rechte Seite“: $b_1, \dots, b_z$

# Gauß-Jordan-Algorithmus

Lösungsverfahren für LGS

**Weitere Schritte:**

Wir wollen das Gleichungssystem, das nach Schritt 1 als erweiterte Koeffizientenmatrix (EKM)

$$\left[\, A \,\middle|\, b \,\right]$$

vorliegt, durch eine Reihe von Prozessschritten so umformen, dass die Lösungsmenge aus der am Ende erhaltenen EKM

$$\left[\, \overline{A} \,\middle|\, \overline{b} \,\right]$$

auf einfache Weise ablesbar ist. Natürlich darf sich die Lösungsmenge bei keinem Schritt verändern.

# Gauß-Jordan-Algorithmus

## Elementare Zeilenumformungen / -operationen

### Satz

Die Lösungsmenge eines LGS $[\,A\,|\,b\,]$ ändert sich nicht bei Ausführung der folgenden Operationen (elementare Zeilenoperationen):

a) **Vertauschung** zweier Zeilen.

b) **Multiplikation einer Zeile** mit einem Faktor $k \neq 0$.

c) **Addition eines Vielfachen einer Zeile** zu einer anderen Zeile.

Begründung z. B. siehe H. Anton: *Elementary Linear Algebra*.

### Achtung:

⚠ **Nicht** erlaubt ist z.B. die Addition einer konstanten Zeile zu einer anderen Zeile:

Bsp:
$$\begin{array}{ccccccc} x = -2 & \rightsquigarrow & [\,1\,|\,-2\,] & \stackrel{\text{Addition der Zeile}[\,2\,|\,2\,]}{\rightsquigarrow} & [\,3\,|\,0\,] & \rightsquigarrow & 3\,x = 0 \\ \mathcal{L} = \{-2\} & & & \neq & & & \mathcal{L}' = \{0\} \end{array}$$

⚠ **Nicht** erlaubt ist z. B. Quadrieren:

Bsp:
$$\begin{array}{ccc} x = -2 & \stackrel{\text{Quadr.}}{\rightsquigarrow} & x^2 = 4 \\ \mathcal{L} = \{-2\} & \neq & \mathcal{L}' = \{2, -2\} \end{array}$$

# Gauß-Jordan-Algorithmus

## Reduzierte Stufenform (RSF)

Wir wollen als Ziel des Verfahrens eine Form der EKM erreichen, aus der die Lösungsmenge der LGS einfach abzulesen ist, die sogenannte reduzierte Stufenform (RSF):

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 0 & \boxed{1} & * & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right] \qquad * \text{ beliebiger Eintrag}$$

1) Alle Nullzeilen (links vom Strich) sind unten angeordnet.
2) In jeder Nicht-Nullzeile ist der am weitesten links stehende von Null verschiedene Eintrag eine *Eins* $\rightarrow$ „führende Eins“
3) Oberhalb und unterhalb jeder führenden Eins stehen Nullen.
4) Vergleicht man zwei Zeilen mit führenden Einsen, so steht die führende Eins der unteren Zeile *rechts* von der führenden Eins der oberen Zeile.

# Gauß-Jordan-Algorithmus

## RSF – Beispiele

a) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ RSF

b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$ RSF

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ keine RSF

RSF wird mit einer Operation von Typ c) erreicht:

$$(-1) \cdot z_2 + z_1 \to z_1$$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ RSF

# Gauß-Jordan-Algorithmus

## RSF – Beispiele

Einlösung des Versprechens: Lösung kann vergleichsweise einfach abgelesen werden.

<u>Rückübersetzung:</u>

a) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$$\begin{aligned} 1\,x_1 + 0\,x_2 &= 3 \rightsquigarrow x_1 = 3 \\ 0\,x_1 + 1\,x_2 &= 1 \rightsquigarrow x_2 = 1 \\ 0\,x_1 + 0\,x_2 &= 0 \end{aligned}$$

b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \quad 0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 = 2 \rightsquigarrow 0 = 2$

$$\rightsquigarrow \mathcal{L} = \varnothing$$

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

Dieses LGS hat unendlich viele Lösungen, denn aus

$$x_1 + 2\,x_2 = 2$$

folgt $\quad x_1 = -2\,x_2 + 2.$

Für jeden beliebigen Wert von $x_2$ ergibt sich ein Wert für $x_1$.

# Gauß-Jordan-Algorithmus

Vorgehensweise

## Zusammenfassung der Vorgehensweise

1) LGS als EKM $[\,A \mid b\,]$ schreiben.
2) Geeignete Folge von elementaren Zeilenoperationen durchführen, bis RSF $\left[\,\overline{A} \mid \overline{b}\,\right]$ erreicht ist.
3) Die Lösungsmenge von $\left[\,\overline{A} \mid \overline{b}\,\right]$ ablesen. Diese ist gleich der Lösungsmenge des ursprünglich gegebenen LGS $[\,A \mid b\,]$.

# Gauß-Jordan-Algorithmus
## Beispiel

Gegeben:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 3\,x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ x_1 & - & 3\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & 0 \end{array}$$

Schritt 1):
LGS als EKM $[\,A\,|\,b\,]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Schritt 2): RSF durch elementare Zeilenoperationen herstellen.

# Gauß-Jordan-Algorithmus

## Beispiel: Umwandlung zu RSF

Vorgehen: nach unten, dann rechts

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

um „1“ kümmern $\rightarrow$ nach oben

$z_1 \leftrightarrow z_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ \boxed{3} & 1 & -1 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

unter „1“ muss Null stehen

$(-3) \cdot z_1 + z_2 \rightarrow z_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

# Gauß-Jordan-Algorithmus

## Beispiel: Umwandlung zu RSF

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 7 \\ \boxed{2} & -2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

unter „1“ muss Null stehen

$(-2) \cdot z_1 + z_3 \to z_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{10} & -7 & 7 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

weitere „1“ in Zeile 2

$\frac{1}{10} \cdot z_2 \to z_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

# Gauß-Jordan-Algorithmus

## Beispiel: Umwandlung zu RSF

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & \boxed{4} & -3 & 3 \end{array}\right]$$

unter „1“ muss Null stehen

$$(-4) \cdot z_2 + z_3 \to z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{2}{10}} & \frac{2}{10} \end{array}\right]$$

weitere „1“ in Zeile 3

$$-\frac{10}{2} \cdot z_3 \to z_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

# Gauß-Jordan-Algorithmus

## Beispiel: Umwandlung zu RSF

weiteres Vorgehen: nach oben, dann links

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{-\frac{7}{10}} & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

über „1“ muss Null stehen

$\frac{7}{10} \cdot z_3 + z_2 \rightarrow z_2$

$-2 \cdot z_3 + z_1 \rightarrow z_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

über „1“ muss Null stehen

$3 \cdot z_2 + z_1 \rightarrow z_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \text{RSF}$$

# Gauß-Jordan-Algorithmus

## Beispiel: Umwandlung zu RSF

Lösung des folgenden Gleichungssystems war gesucht:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 3\,x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ x_1 & - & 3\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & 0 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Durch Umwandlung in die RSF

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightsquigarrow x_1 = 2 \\ \rightsquigarrow x_2 = 0 \\ \rightsquigarrow x_3 = -1 \end{array}$$

lässt sich folgende *Lösungskandidatin* ablesen:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1 \rightsquigarrow \mathcal{L} = \{(2, 0, -1)\}\,.$$

# Gauß-Jordan-Algorithmus

## Beispiel: Umwandlung zu RSF

### Emfehlung: Probe

Eine Probe (Einsetzen der Lösungskandidatin in *jede* Gleichung des ursprünglich gegebenen LGS) wird dringend empfohlen. Denn niemand ist gegen Rechenfehler gefeit.

### Unser Beispiel – Probe

$$\begin{array}{rcrcrl}
2\cdot 2 & - & 2\cdot 0 & + & (-1) & = 4-0-1=3 \checkmark \\
3\cdot 2 & + & 0 & - & (-1) & = 6+0+1=7 \checkmark \\
2 & - & 3\cdot 0 & + & 2\cdot(-1) & = 2-0-2=0 \checkmark
\end{array}$$

Alle drei Gleichungen erfüllt

# Gauß-Jordan-Algorithmus

## Beispielsysteme mit 2 Gleichungen in 2 Unbekannten

**Hörsaalübung:**

Verwenden Sie (der Übung halber) das Gauß-Jordan-Verfahren zur Bestimmung der Lösungsmengen der folgenden (sehr kleinen) Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{rcrcr} 6\,x_1 & + & 6\,x_2 & = & 30 \\ 4\,x_1 & + & 2\,x_2 & = & 12 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcrcr} -6\,x_1 & + & 8\,x_2 & = & 24 \\ 3\,x_1 & - & 4\,x_2 & = & 0 \end{array}$$

# Bestimmung der Lösungsmenge

Auswertung der reduzierten Stufenform – mögliche Fälle

## Auswertung der reduzierten Stufenform

Gegeben sei ein LGS mit $z$ Gleichungen und $s$ Unbekannten.

Gegebenes LGS: $\left[\, A \,|\, b \,\right] \xrightarrow[\text{Zeilenumformungen}]{\text{elementare}} \left[\, \overline{A} \,|\, \overline{b} \,\right]$ (RSF, vgl. Folie 14)

Es sei $r$ (Rang) die Anzahl derjenigen Zeilen von $\overline{A}$, die <u>keine</u> Nullzeilen sind ($r$ ist Anzahl der „führenden Einsen“):

## Fälle:

a) Falls $r = s$ gilt, so sind die folgenden Fälle möglich: $\left[\, \overline{A} \,|\, \overline{b} \,\right]$ und damit auch $[A \,|\, b]$ hat
   - (i) entweder genau eine Lösung oder
   - (ii) keine Lösung

b) Falls $r < s$ gilt, so besitzt $\left[\, \overline{A} \,|\, \overline{b} \,\right]$ und damit auch $[\, A \,|\, b \,]$
   - (i) entweder keine Lösung oder
   - (ii) unendlich viele Lösungen.

# Bestimmung der Lösungsmenge

## Beispiele

zu a) (i) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\quad z = 5 \quad$ (Zeilen)

$$\left.\begin{array}{l} s = 2 \quad \text{(Spalten)} \\ \\ r = 2 \end{array}\right\} r = s$$

$\to$ Rückübersetzung:

$$\begin{array}{llcl} z_1: & 1\,x_1 + 0\,x_2 = -2 & \rightsquigarrow & x_1 = -2 \\ z_2: & 0\,x_1 + 1\,x_2 = 3 & \rightsquigarrow & x_2 = 3 \end{array}$$

$$z_3 \text{ bis } z_5: \; 0 = 0$$

$$\rightsquigarrow \mathcal{L} = \{(-2, 3)\}$$

(ii) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\to z_3: \; 0 = 7 \; ↯$ (Widerspruch)

$\rightsquigarrow \mathcal{L} = \varnothing$

# Bestimmung der Lösungsmenge

Auswertung der reduzierten Stufenform – mögliche Fälle

## Erinnerung:

a) Falls $r = s$ gilt, so sind die folgenden Fälle möglich: $\left[\, \overline{A} \mid \overline{b} \,\right]$ und damit auch $[A \mid b]$ hat
   (i) entweder genau eine Lösung oder
   (ii) keine Lösung

b) Falls $r < s$ gilt, so besitzt $\left[\, \overline{A} \mid \overline{b} \,\right]$ und damit auch $[\,A \mid b\,]$
   (i) entweder keine Lösung oder
   (ii) unendlich viele Lösungen.

# Bestimmung der Lösungsmenge

## Beispiele

zu b) (i) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} z = 3 \\ s = 3 \\ r = 2 \end{array}$ $\quad r < s \quad$ $z_3: \; 0 = 7 \; ↯$ $\quad \rightsquigarrow \mathcal{L} = \varnothing$

(ii) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\begin{array}{ll} z_1: & x_1 + 2\,x_2 = 6 \\ z_2: & x_3 = 3 \\ z_3: & 0 = 0 \end{array}$

Weise der Unbekannten $x_2$ einen Parameterwert zu, z. B. $x_2 = t$.
Hierbei steht $t$ für eine beliebige reelle Zahl.

Dann ergibt sich aus Gleichung 1: $x_1 = 6 - 2\,x_2 = 6 - 2\,t$
bzw. Gleichung 2: $x_3 = 3$

Fasse zusammen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 2\,t \\ t \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

Allgemeine Lösung

# Bestimmung der Lösungsmenge

## Beispiele

Die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

ist eine Gerade im dreidimensionalen Raum.

# Bestimmung der Lösungsmenge

Allgemeiner Lösungsweg für eine RSF mit $r < s$:

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array}}^{s} \\ \begin{array}{c} r \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ z-r \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \end{array} & \left[ \begin{array}{cccccc|c} 1 & * & 0 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array} \right] \end{array}$$

Weise jeder der $s - r$ Unbekannten, die <u>nicht</u> über einer „führenden Eins“ stehen, einen Parameterwert zu. Verwende ggf. $t_1, t_2, \dots, t_{s-r}$. Die übrigen $r$ Unbekannten sind dann bestimmt.

# Bestimmung der Lösungsmenge

## Beispiel

Nehme an, dass ein gegebenes LGS durch den Gauß-Jordan-Algorithmus in die folgende RSF überführt wurde:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \qquad \begin{array}{l} z = 4 \\ s = 5 \\ r = 3 \end{array}$$

Weise den beiden ($s - r = 5 - 3 = 2$) Unbekannten $x_2$ und $x_4$ Parameterwerte zu:

$$x_2 = s,\ x_4 = t,\quad s, t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{lll} z_1: & x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_4 = 3 & \rightsquigarrow x_1 = 3 - 3\,s - 4\,t \\ z_2: & x_3 + 7\,x_4 = 5 & \rightsquigarrow x_3 = 5 - 7\,t \\ z_3: & x_5 = 6 & \rightsquigarrow x_5 = 6 \end{array}$$

# Bestimmung der Lösungsmenge

## Beispiel

Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 - 3\,s - 4\,t \\ s \\ 5 - 7\,t \\ t \\ 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\,s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4\,t \\ 0 \\ -7\,t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s, t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

# Bestimmung der Lösungsmenge

## Beispiel

Die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

entspricht einer Ebene im 5-dimensionalen Raum.

# Bestimmung der Lösungsmenge

Probe

## Bemerkung

Auch hier ist nach Durchführung des Lösungsverfahrens nach Gauß eine Probe unbedingt angezeigt. Hierzu wird die allgemeine Lösung in das ursprünglich gegebene Gleichungssystem eingesetzt und überprüft, ob alle Gleichungen erfüllt sind.

## Etüde:

Führen Sie die Probe exemplarisch für das vorstehende (bereits auf RSF reduzierte) Gleichungssystem durch.

# Drei Gleichungen in drei Unbekannten

Geometrische Analyse

## Ausgangslage

- Wir betrachten Gleichungssysteme der folgenden Form:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 &= b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

- Jede Gleichung (wir verwenden vorübergehend die allgemeine „Gleichungsnummer" $i$) lässt sich von der Ausgangsform

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + a_{i3} \cdot x_3 = b_i$$

  in die Form

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + a_{i3} \cdot x_3 - b_i = 0$$

  bringen.
- Falls für $i = 1$ und $i = 2$ und $i = 3$ jeweils die Bedingung $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) \neq (0, 0, 0)$ erfüllt ist, so beschreibt jede der drei Gleichungen eine **Ebene im Raum**, denn wir haben dann drei **Allgemeine Koordinatengleichungen** vorliegen.

# Drei Gleichungen in drei Unbekannten

## Geometrische Analyse

### Ausgangslage

Jede Lösung des Gleichungssystems ist somit ein Punkt, der auf **jeder** der drei Ebenen liegt, die durch die drei Gleichungen beschrieben werden. Also besteht die Lösungsmenge des Gleichungssystems genau aus denjenigen Punkten, die auf allen drei Ebenen (zugleich) liegen.

### Aufgabenstellung

- Wir wissen bereits, dass die Lösungsmengen von Gleichungssystemen unterschiedlich aussehen können.
- Wir wollen uns nun einen Überlick „über alle möglichen Fälle“ machen. Das heißt, wir wollen verstehen, wie drei Ebenen grundsätzlich zueinander liegen können.
- Jeden Fall nennen wir eine **Ebenenkonfiguration**.
- Wir skizzien jede der acht möglichen Ebenenkonfigurationen, kennzeichnen jeweils die Lösungsmenge und geben jeweils ein Beispiel-Gleichungssystem an, das zur gerade betrachteten Konfiguration passt.

# Drei Gleichungen in drei Unbekannten

## Geometrische Analyse

**Hörsaalübung:**

Wir wollen nun

- jede der acht möglichen Ebenenkonfigurationen skizzieren,
- jeweils die Lösungsmenge kennzeichnen
- jeweils ein Beispiel-Gleichungssystem angeben, das zur gerade betrachteten Konfiguration passt.

# Drei Gleichungen in drei Unbekannten

## Geometrische Analyse

### „Startkapital“ für die Lösung – die beiden Extremfälle:

Fall 1: Es ist möglich, dass alle drei Gleichungen ein und dieselbe Ebene beschreiben. In diesem Fall besteht die Lösungsmenge des Gleichungssysteme genau aus allen Punkten jener Ebene.

Fall 8: Es gibt natürlich auch den Fall, dass sich alle drei Ebenen **in genau einem Punkt** schneiden. Betrachten Sie etwa im Hörsaal die Tafelebene, Deckenebene und Fensterebene. Diese drei Ebenen schneiden sich in einem (Eck-)Punkt des Hörsaals. Dass diese drei Ebenen paarweise senkrecht aufeinander stehen, ist **nicht** wesentlich dafür, dass es **genau einen** gemeinsamen Schnittpunkt gibt, vgl. Folie 42.

### Eine Möglichkeit, Lösungsmengen zu „messen“, die Dimension.

Ohne eine genaue Definition des Begriffs der (affinen) Dimension zu geben, sagen wir, dass die Lösungsmenge im obigen Fall 1 die **Dimension** 2 und im obigen Fall 8 die **Dimension** 0 hat. Der leeren Menge $\emptyset$ weist man per Übereinkunft[1] die **Dimension** $-1$ zu.

[1] Es lohnt sich nicht, lange über diese einigermaßen willkürliche Festlegung nachzudenken, aber die Plausibiltät soll doch erläutert werden: Da eine leere Menge noch „etwas kleiner“ ist als eine einpunktige Menge, wählt man für die Dimension von $\emptyset$ eben $-1$, was kleiner als 0 ist.

# Drei Gleichungen in drei Unbekannten

Geometrische Analyse

**Diskussion von Fall 1 – alle drei Ebenen sind identisch:**

- Der Fall, dass die drei Gleichungen dieselbe Ebene beschreiben, tritt natürlich u.a. dann ein, wenn alle drei Gleichungen identisch sind.
- Es reicht jedoch aus, dass die drei Gleichungen Vielfache voneinander sind.
- Dann sind die drei Normalenvektoren der drei Ebenen, die durch die drei Gleichungen beschrieben werden, Vielfache voneinander, alle drei Ebenen haben jedoch den gleichen Abstand vom Ursprung.

**Beispielsystem für Fall 1:**

Zur Konstruktion eines Beispielsystems beschreiben wir mit drei unterschiedlichen Gleichungen diejenige zur $x$-$y$-Ebene parallele Ebene, welche die $z$-Achse im Punkt $(0, 0, 2)$ schneidet. Als Normalenvektoren wählen wir z.B. $\overrightarrow{n_1} = (0, 0, 1)$, $\overrightarrow{n_2} = (0, 0, 3)$ und $\overrightarrow{n_3} = (0, 0, 7)$, dann ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &= 2 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 &= 6 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 &= 14 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad [\,A \mid b\,] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{array}\right] \quad \rightsquigarrow \quad \left[\,\overline{A} \mid \overline{b}\,\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ dieses Gleichungssystems kann zum Beispiel in der Form

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

geschrieben werden, es ist also $\dim \mathcal{L} = 2$.

# Drei Gleichungen in drei Unbekannten

## Geometrische Analyse

### Diskussion von Fall 8 – genau ein gemeinsamer Schnittpunkt:

- Der Fall, dass sich alle drei Ebenen in genau einem Punkt schneiden, tritt genau dann ein, wenn sich je zwei der Ebenen in einer Schnittgeraden schneiden und auch der Schnitt der jeweils dritten Ebene mit dieser Geraden nicht leer ist.
- Hierzu dürfen natürlich keine zwei Ebenen parallel sein, zusätzlich ist es nicht erlaubt, dass die Schnittgerade eines Ebenenpaars parallel zur jeweils dritten Ebene ist.
- Keiner der drei Normalenvektoren der drei Ebenen darf ein Vielfaches eines anderen Normalenvektors sein; ferner dürfen die drei Normalenvektoren, wenn man sie alle am Koordinatenursprung anheftet, **nicht** in einer gemeinsamen Ursprungsebene liegen.
- Man kann dies daran erkennen, dass die Menge der drei Normalenvektoren $\{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}\}$ der drei Ebenen **linear unabhängig** ist, d.h. dass die Gleichung $x\,\overrightarrow{n_1} + y\,\overrightarrow{n_2} + z\,\overrightarrow{n_3} = \vec{0}$ nur die (sog. *triviale*) Lösung $(x, y, z) = 0$ besitzt.

# Drei Gleichungen in drei Unbekannten

## Geometrische Analyse

### Beispielsystem für Fall 8:

Zur Konstruktion eines Beispielsystems wählen wir drei Ursprungsebenen mit Normalenvektoren $\overrightarrow{n_1} = (1,0,0)^\mathsf{T}$, $\overrightarrow{n_2} = (0,3,0)^\mathsf{T}$ und $\overrightarrow{n_3} = (0,0,7)^\mathsf{T}$. Diese drei Vektoren sind linear unabhängig (siehe unten), und aus ihnen ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 &= 0 && (x\text{-}y\text{-Ebene}) \\ 0 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 &= 0 && (z\text{-}x\text{-Ebene}) \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 &= 0 && (y\text{-}z\text{-Ebene}) \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ dieses Gleichungssystem enthält nur den Punkt $(0,0,0)$, d.h. $\mathcal{L} = \{(0,0,0)\}$ und $\dim \mathcal{L} = 0$.

### Prüfung der linearen Unabhängigkeit

Um präzise zu überprüfen, dass die Menge $\{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}\}$ linear unabhängig ist, löst man das Gleichungssystem

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ 3\,y \\ 7\,z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und sieht, dass $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ die einzige Lösung ist.

# Gauß-Jordan-Algorithmus

Simultane Lösung mehrerer Gleichungssysteme

## Problemstellung

Es sei eine Koeffizientenmatrix $A$ und mehrere Spaltenvektoren $b_1, b_2, \ldots, b_n$ gegeben. Dann lassen sich die Gleichungssysteme $[A \mid b_1]$, $[A \mid b_2]$, ..., $[A \mid b_n]$ simultan lösen.

## Lösungsweg

Aufstellen der mehrfach erweiterten Koeffizientenmatrix $[A \mid b_1 \;\; b_2 \;\; \ldots \;\; b_n]$ und Anwendung des Gauß-Jordan-Algorithmus.

# Gauß-Jordan-Algorithmus

## Simultane Lösung mehrerer Gleichungssysteme

### Beispiel

Es $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ sowie $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösen Sie die Gleichungssysteme $[A \mid b_1]$ und $[A \mid b_2]$ simultan

### Lösungsweg

Aufstellen der zweifach erweiterten Koeffizientenmatrix $[A \mid b_1\ b_2]$ und Anwendung des Gauß-Jordan-Algorithmus:

$$[A \mid b_1\ b_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Elementare Zeilenumformungen führen auf die RSF $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$