Mathematik in Medien und Informatik

Motivation, Wiederholung
Skript: Prof. Dr. Th. Schneider

1

Prof. Dr. R. Lasowski

Stand: 18.10.2023

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Inhalt

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Ein paar Vorschläge

Ein paar Vorschläge

Ermutigung und Ansporn

Das Semester ist kurz, es gibt wahrlich viel zu tun, aber was von Ihnen verlangt wird, ist **definitiv machbar!**

Tipps:

- Fangen Sie früh (ja, am besten heute) mit der Arbeit an,
- seien Sie hellwach und bleiben Sie am Ball,
- Gegentypus: *„Hatte keine Ahnung, dass ich heute hätte kommen/vortragen/da sein sollen. Hab in letzter Zeit (seit Wochen?) auch nicht in meine HFU-Mails geschaut.“*
- arbeiten Sie den Vorlesungsstoff kontinuierlich nach,
- setzen Sie sich mit der Materie ernsthaft auseinander,
- isolieren Sie sich nicht, suchen Sie die Zusammenarbeit mit anderen!

Ein paar Vorschläge

Dann haben Sie gute Chancen,

- sich gut informiert und „auf der Höhe“ zu fühlen,
- von den jeweils nächsten Vorlesungen stärker zu profitieren, gezielt Fragen stellen zu können, usw.
- früh im Studium Kompetenzzuwachs zu verspüren,
- auch Ihr Leben außerhalb der Hochschule **ohne** Verdrängungsstress zu führen.

Ein paar Vorschläge

Tipps:

- Vermeiden Sie Ausweichstrategien und Ausflüchte. Etwa diese:
  - „Den Sch... brauch ich ja eh nie wieder.“
  - „Vier gewinnt.“
  - „**Dafür** bin ich ja sowieso zu blöd.“etc.
- Trauen Sie (es) sich (zu), Ihr Studium **richtig gut** zu machen!

Zum Umgang

Meine Vorstellungen:

- **Fragen sind grundsätzlich sehr willkommen.**
  Manche Antworten gibt es sofort (für alle), manches lässt sich besser nach der Vorlesung besprechen.
- **Disziplin hilft uns allen.**
  Im Klartext: Wer quatschen will, mag dies bitte außerhalb des Hörsaals tun.
- Das *Zauberwort* wird gern gehört und sehr geschätzt.
- Das Zauberwort ist **nicht** *„vielleicht“*.

Mathematik als Innovationstreiber

Statements

- Mathematik ist **der** Innovationstreiber auch im Bereich von Medien und Informatik.
- Wer später wahrhaft „coole“ Sachen kreieren (und nicht nur Routine-kram erledigen) möchte, kommt um eine vertiefte Beschäftigung mit Mathematik (und physikalischen Grundlagen) nicht herum.

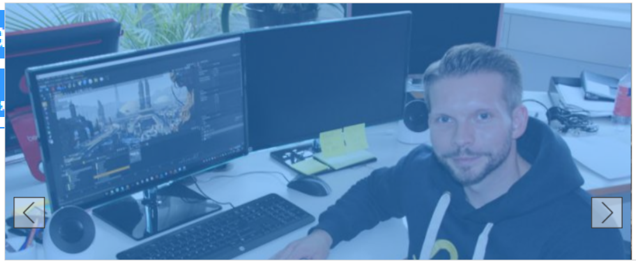
Vgl. Südkurier vom 27.09.2016:

Star Wars in der Bergstadt: Rainer Duda leistet digitale Hilfe für Hollywood

Rainer Duda erstellt Sequenzen für Kinofilme. Auch bei Star Wars sind einige Elemente in seiner Firma in St. Georgen entstanden.

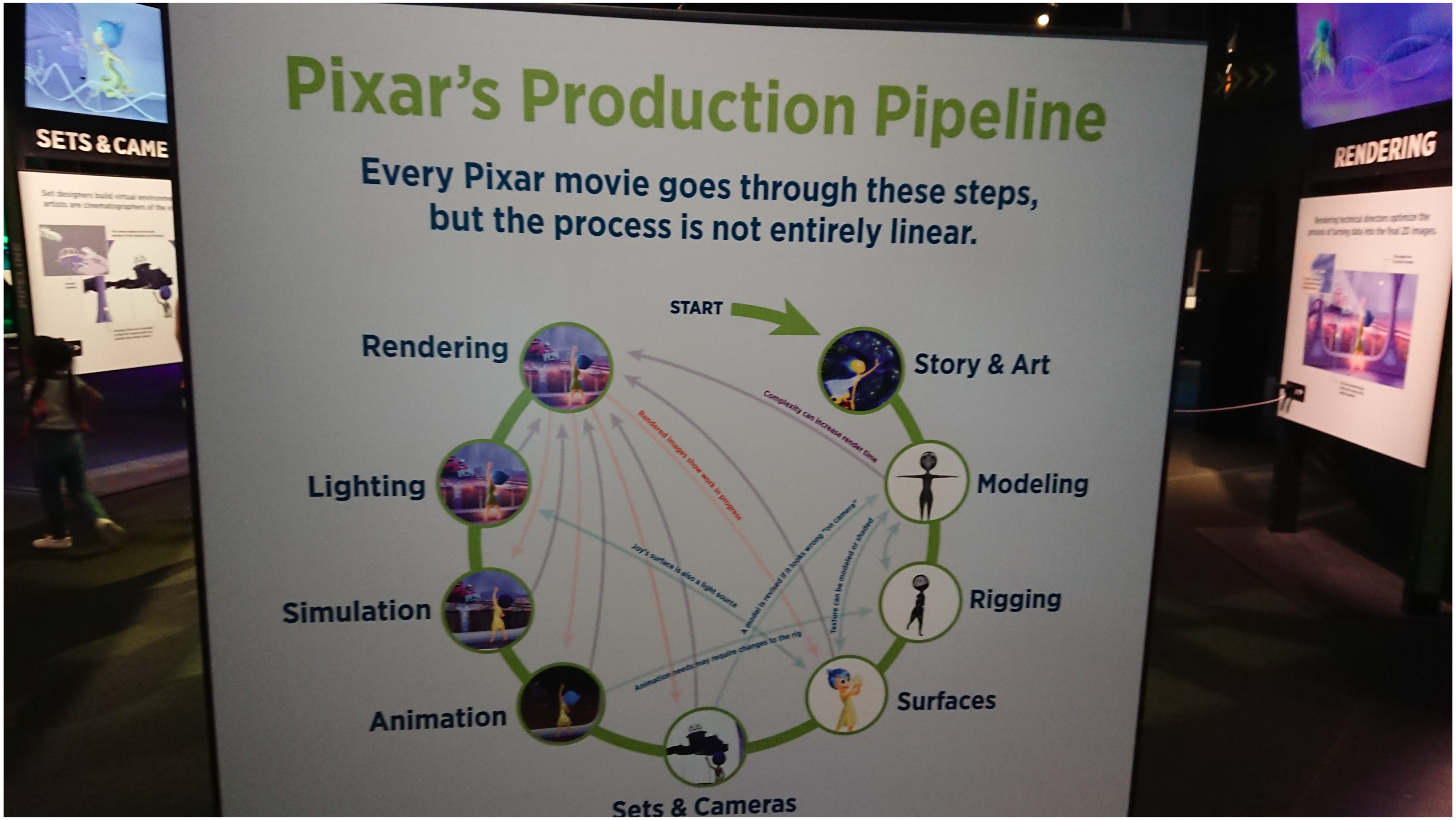
"Das ist pure Mathematik", beschreibt Duda … Städten,

Wäldern oder Ork-Armeen. Grundeinheiten, …

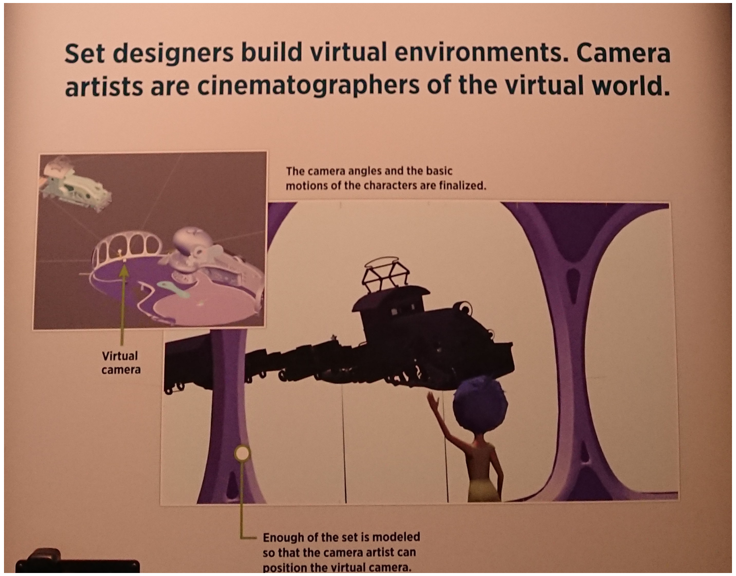


Bildschirm an einem rasenden Riesentruck. Der gefährlich schlingernde Lastwagen ist als mathematisches Berechnungsmodell in einen Realfilm eingebaut. Der Anhängeraufbau glänzt metallen und spiegelt während der Fahrt die sich verändernde Sonneneinstrahlung. Physikalisch korrekte Darstellung heißt das in der Branche. Ziel erreicht. "Früher wurden

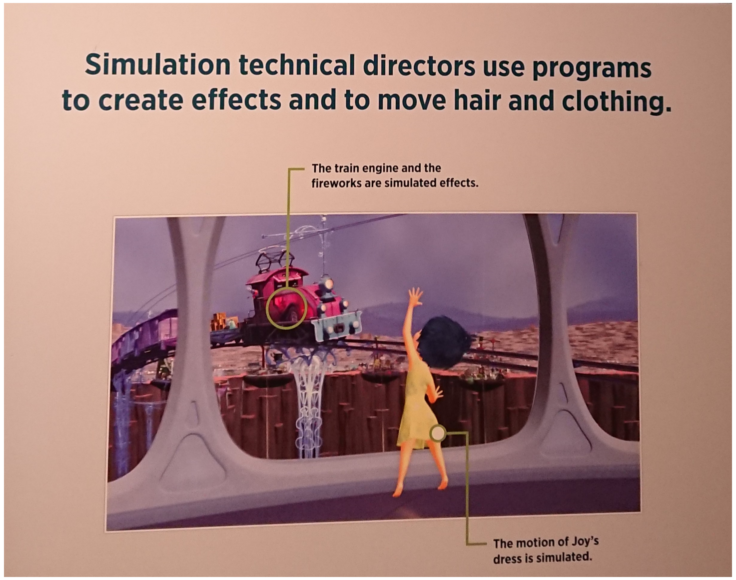
Mathematik im kreativen Umfeld



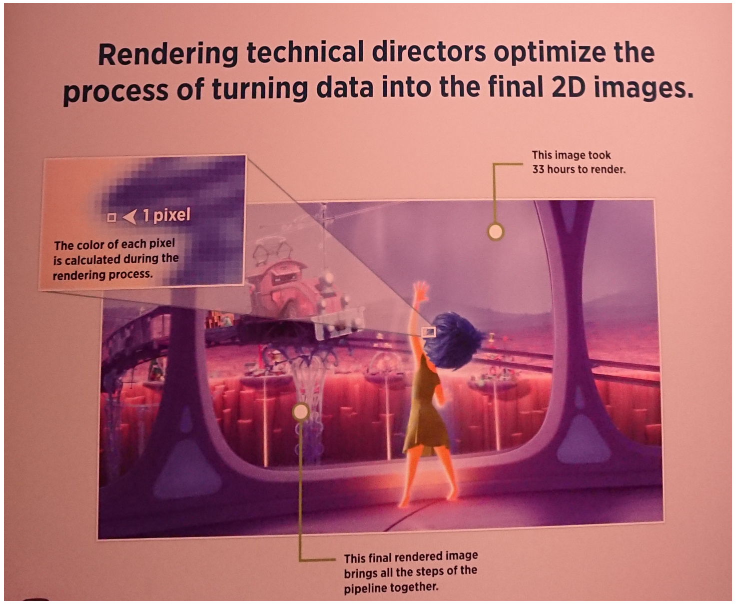
Mathematik im kreativen Umfeld



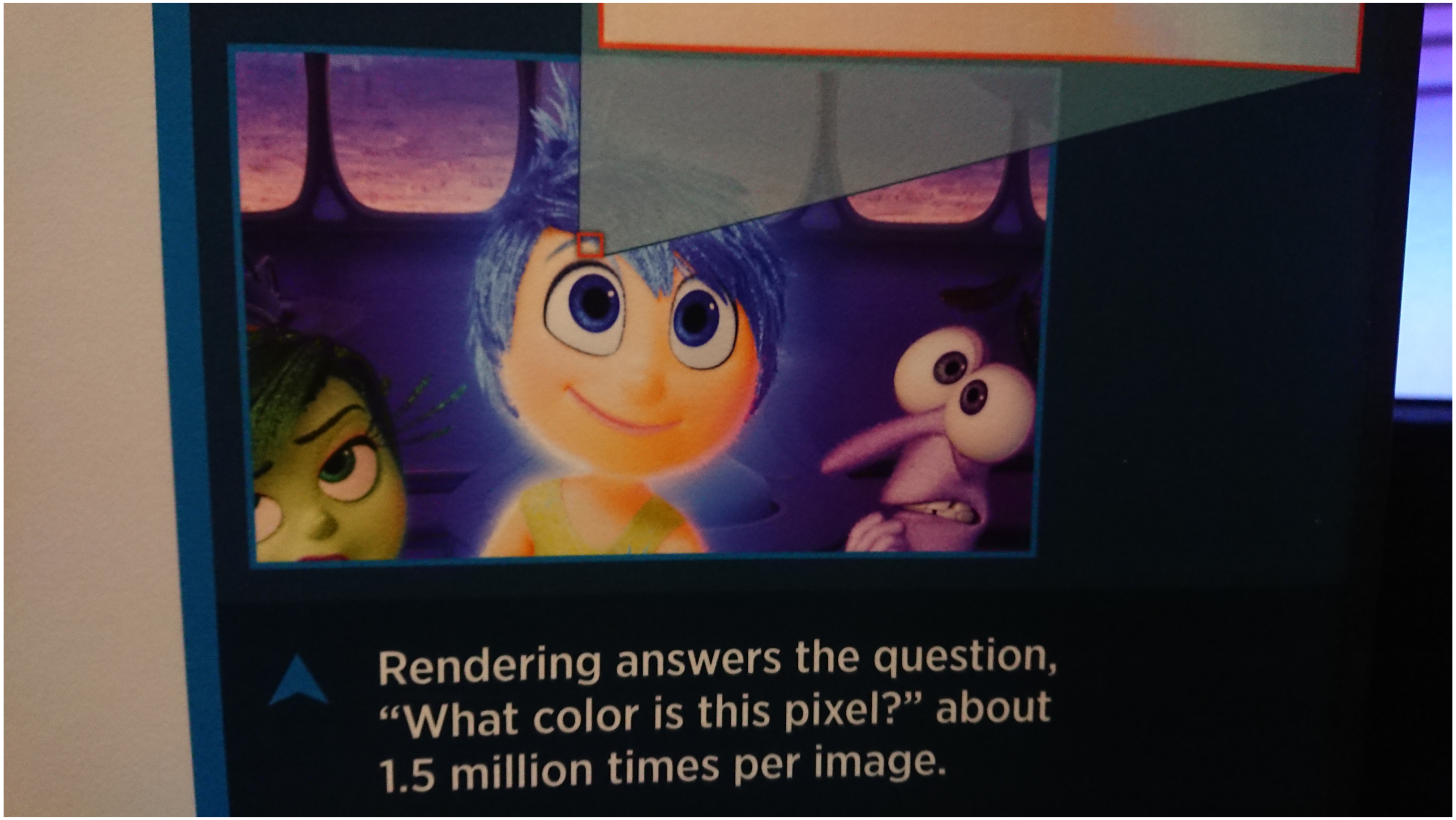
Mathematik im kreativen Umfeld



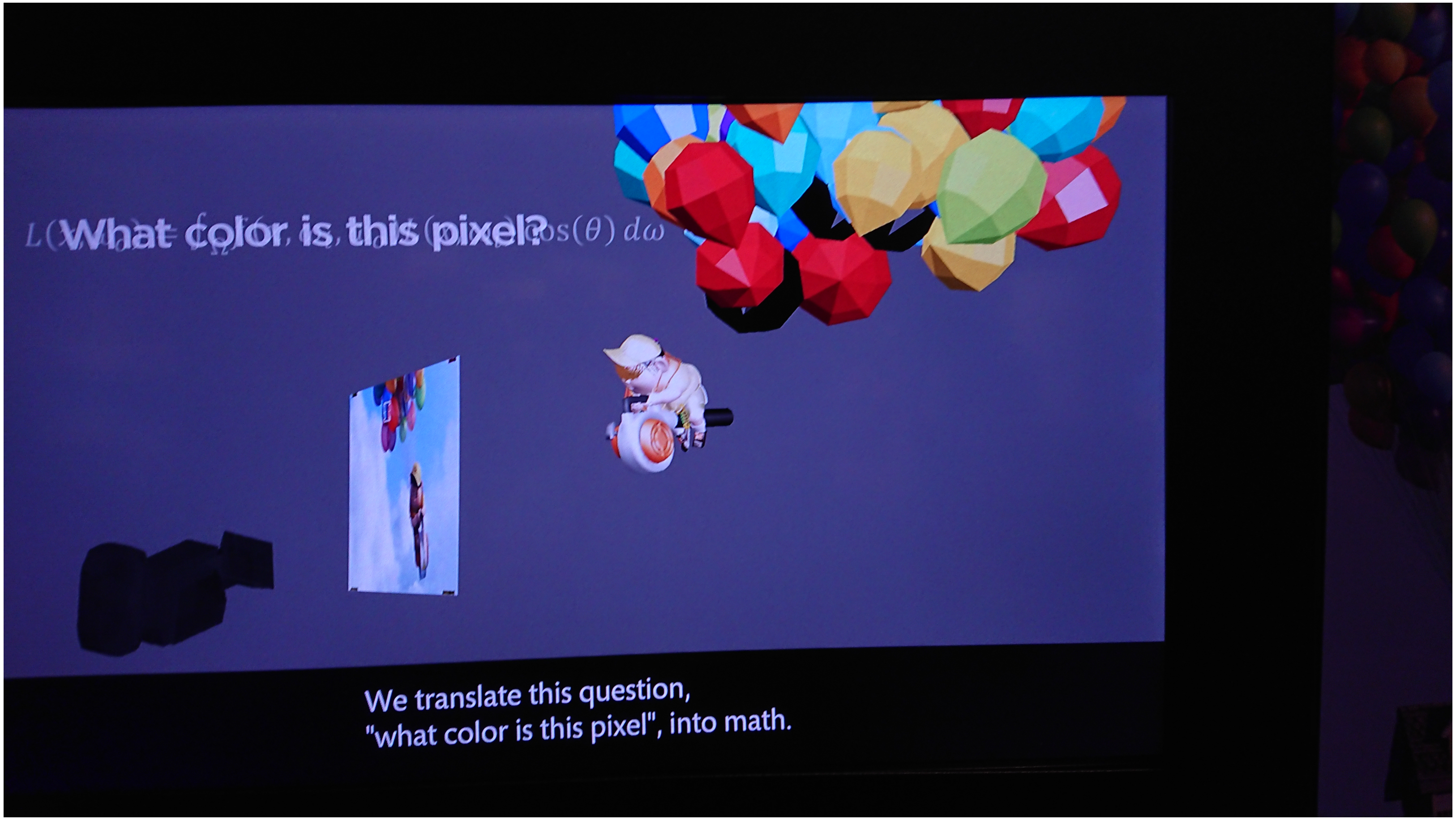
Mathematik im kreativen Umfeld



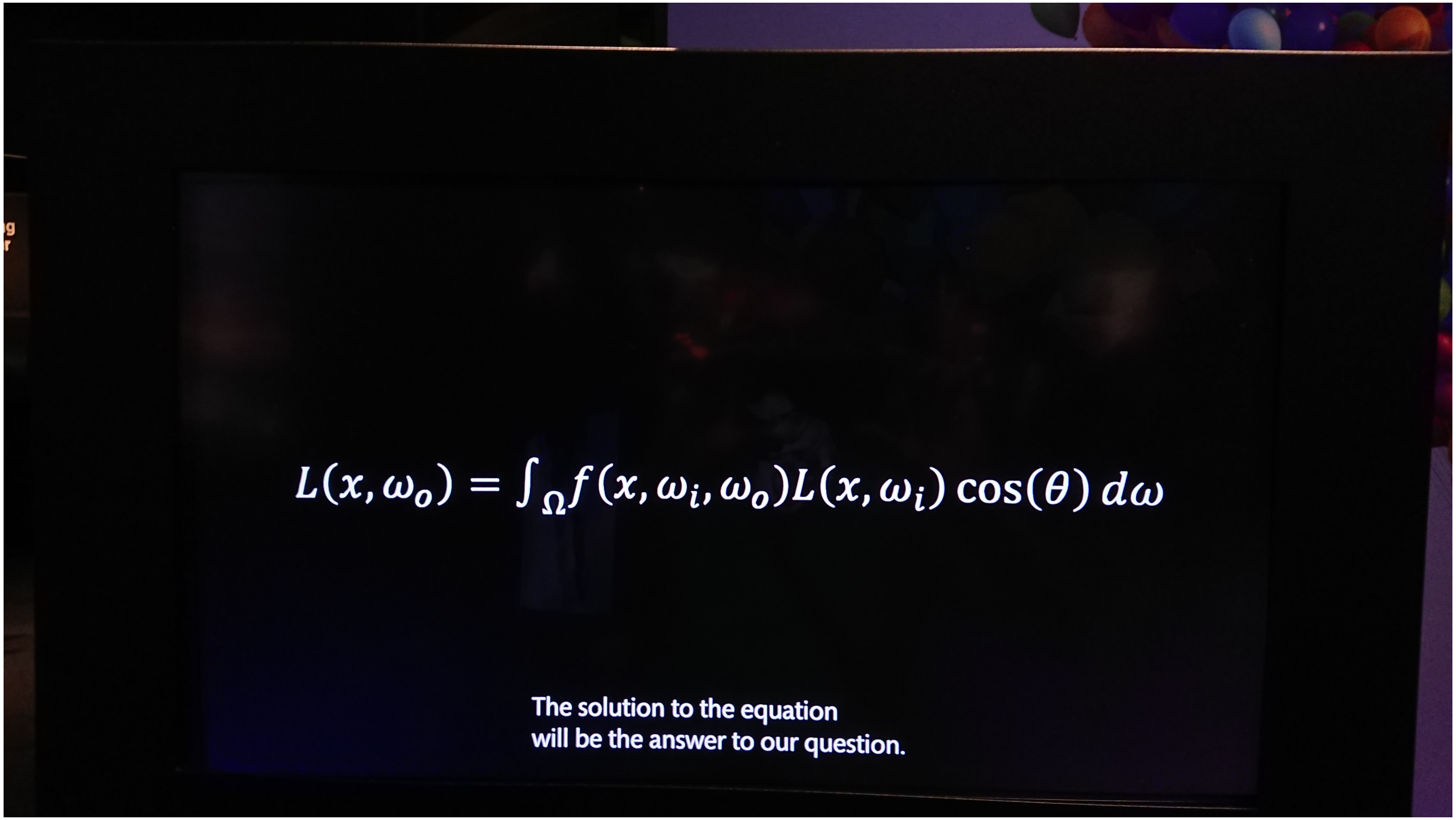
Mathematik im kreativen Umfeld



Mathematik im kreativen Umfeld



Mathematik im kreativen Umfeld



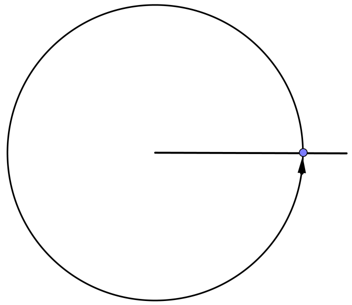
Übergang

Jetzt geht es los mit Mathe –
es muss ja so kommen ☺

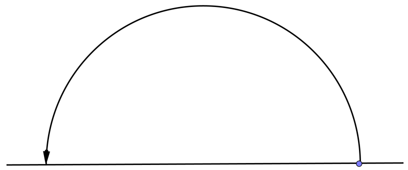
Winkelmaße

Gradmaß

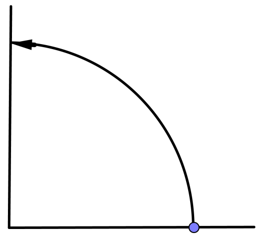
Die gängigste Art der Winkelmessung erfolgt im Gradmaß. Hierbei wird dem Vollwinkel ein Wert von 360° zugeordnet.



gestrecker Winkel: 180°



rechter Winkel: 90°



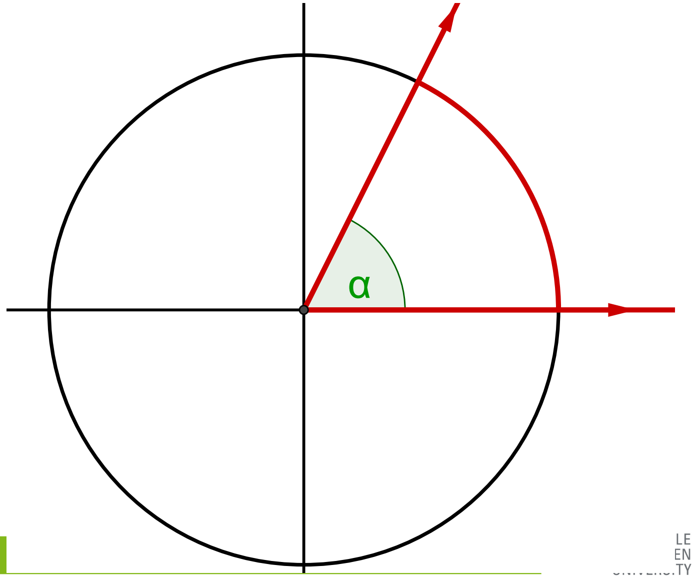
Winkelmaße
Bogenmaß

Erinnerung:

- Ein Kreis mit Radius r hat den Umfang $U = 2 \cdot \pi \cdot r$.
- Der sogenannte **Einheitskreis** mit Radius $r = 1$ hat den Umfang

$$U = 2 \cdot \pi \cdot 1 = 2\pi.$$

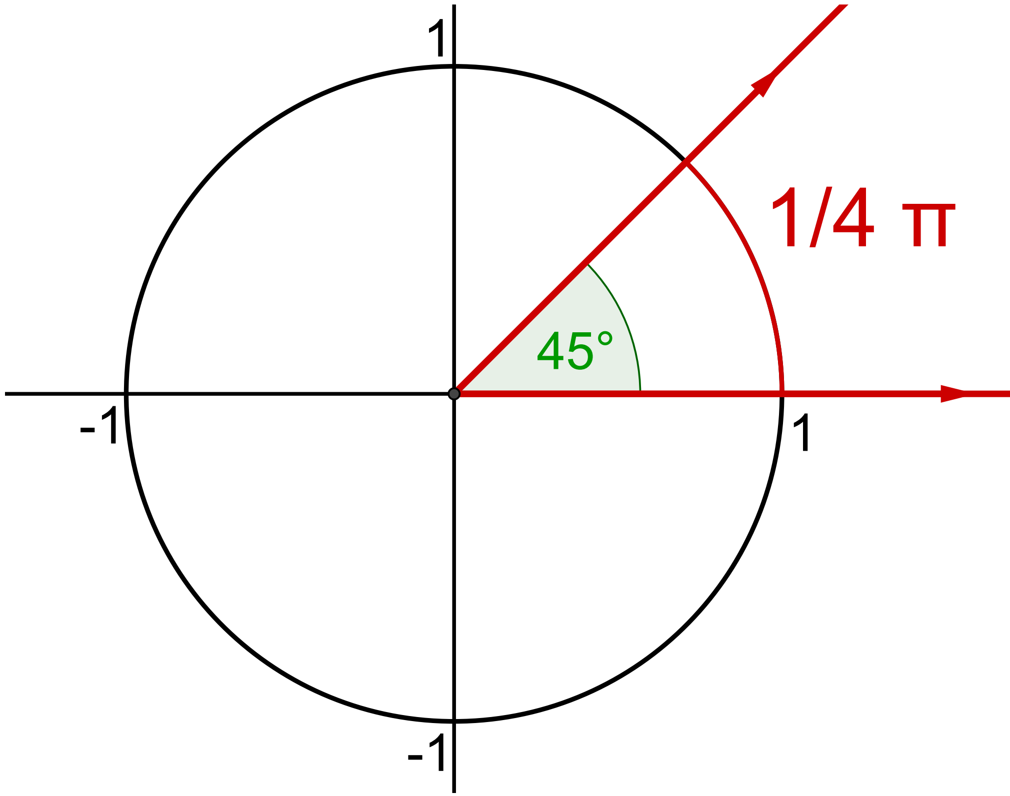
Gehen nun zwei Strahlen vom Mittelpunkt des Einheitskreises aus, so lässt sich der Winkel, den die beiden Strahlen einschließen, durch die Länge des eingeschlossenen Kreisbogens ausdrücken.



Winkelmaße

Gegenüberstellung von Gradmaß und Bogenmaß

Gradmaß	Bogenmaß
$360°$	2π
$180°$	π
$90°$	$\frac{1}{2}\pi$
$60°$	$\frac{1}{3}\pi$
$45°$	$\frac{1}{4}\pi$
$30°$	$\frac{1}{6}\pi$



Winkelmaße

Gegenüberstellung von Gradmaß und Bogenmaß

Umrechnung von Gradmaßangaben ins Bogenmaß und umgekehrt:

Für die Umrechnung einer Winkelangabe φ_G im Gradmaß in einen Wert φ_B im Bogenmaß oder umgekehrt ist die folgende Beziehung grundlegend:

$$\frac{\varphi_G}{360^\circ} = \frac{\varphi_B}{2\,\pi}.$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$\varphi_G = 360^\circ \cdot \frac{\varphi_B}{2\,\pi} \qquad \text{bzw.} \qquad \varphi_B = \frac{\varphi_G}{360^\circ} \cdot 2\,\pi.$$

Beispiel:

Wir rechnen die Bogenmaßangabe $\varphi_B = \frac{\pi}{8}$ ins Gradmaß um:

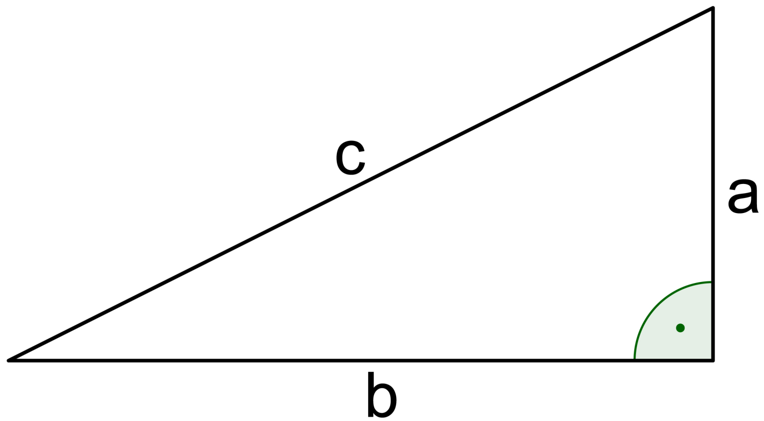
$$\begin{aligned}
\varphi_G &= 360^\circ \cdot \frac{\frac{\pi}{8}}{2\,\pi} = 360^\circ \cdot \frac{\pi}{8 \cdot 2\,\pi} \\
&= 360^\circ \cdot \frac{\pi}{16\,\pi} \\
&= \frac{360^\circ}{16} = 22.5^\circ
\end{aligned}$$

Satz des Pythagoras

Satz:

Für ein **rechtwinkliges Dreieck** mit Kathetenlängen a und b und Hypotenusenlänge c gilt

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Pythagoreische Tripel

Bemerkung:

Es gibt rechtwinklige Dreiecke, bei denen alle drei Seiten **ganzzahlige** Längen besitzen.

Das bedeutet, es gibt Tripel (a, b, c) ganzer Zahlen mit $a^2 + b^2 = c^2$.

Beispiel:

$(a, b, c) = (3, 4, 5)$, denn $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$

oder $(a, b, c) = (12, 5, 13)$, denn .... oder $(a, b, c) = (24, -7, 0)$, denn ....

Lektüre

Lesen Sie zu diesem Thema den sehr informativ und verständlich geschriebenen Artikel `https://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoreisches_Tripel`

Satz von Fermat

Jahrhundertelang war die folgende durch Pierre Fermat (1607 - 1665) berühmt gewordene Frage offen:

Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras?

Hat die Gleichung $a^3 + b^3 = c^3$ oder allgemeiner haben die Gleichungen der Form

$$a^n + b^n = c^n \text{ für } n > 2$$

ganzzahlige Lösungen?

Die Antwort gibt der folgende, von dem englischen Mathematiker Andrew Wiles in den Jahren 1993/94 veröffentlichte

Satz:

Ist n eine natürliche Zahl und gilt $n > 2$, so hat die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ **keine** ganzzahligen Lösungen (a, b, c) mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$ und $c \neq 0$.

Bemerkung:

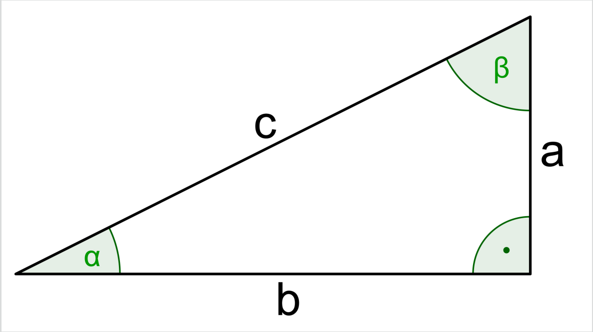
Nicht von Interesse sind die „offensichtlichen“ und daher „langweiligen“ Lösungen vom Typ $(0, 0, 0)$, $(a, 0, a)$, $(0, b, b)$, $(0, -b, b)$, ...

Winkelfunktionen/Trigonometrische Funktionen

Definition im rechtwinkligen Dreieck

Definition:

$$\sin(\alpha) =$$
$$\cos(\alpha) =$$
$$\tan(\alpha) =$$

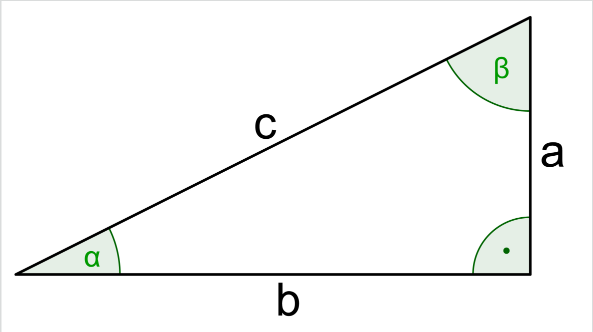


Winkelfunktionen/Trigonometrische Funktionen

Definition im rechtwinkligen Dreieck

Definition:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \left(= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \right)$$
$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \left(= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \right)$$
$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} \left(= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \right)$$



Bemerkung:

Es gilt

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Wir können uns anhand der Definitionen im rechtwinkligen Dreieck klarmachen, dass jedenfalls für $0 < \alpha < 90^\circ$ die folgenden Beziehungen gelten:

1. $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$
2. $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$

Wir begründen die Identität 1: $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$.

Die Summe aller Innenwinkel eines Dreieck beträgt 180°. Damit gilt die folgende Gleichung:

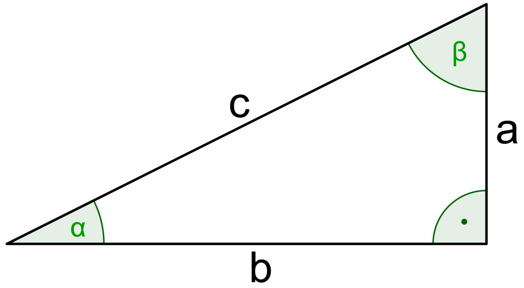
$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$$

Löst man die Gleichung nach β auf, ergibt sich:

$$\beta = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$$

Und damit auch die Beziehung:

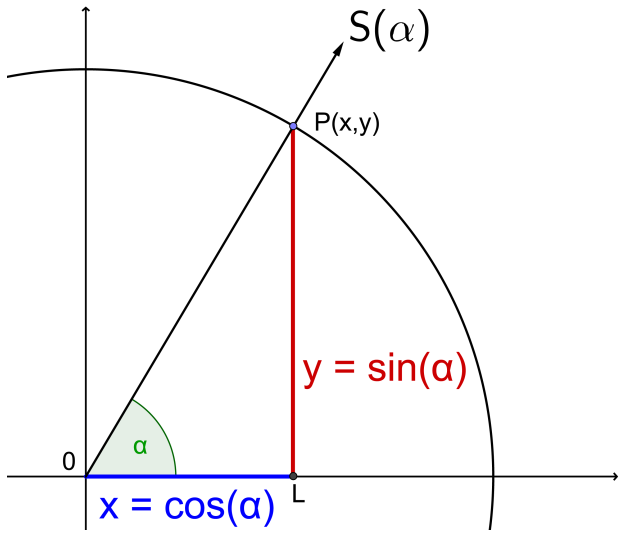
$$\sin(90^\circ - \alpha) = \sin(\beta) = \frac{b}{c} = \cos(\alpha)$$



Betrachten Sie den Einheitskreis und einen Mittelpunktstrahl $S(\alpha)$, der mit der x-Achse einen Winkel α einschließt. Der Schnittpunkt von Einheitskreis und $S(\alpha)$ habe die Koordinaten (x, y). Liegt der Punkt $P = (x, y)$ im ersten Quadranten, so betrachten wir das rechtwinklige Dreieck OLP und erhalten die Beziehungen:

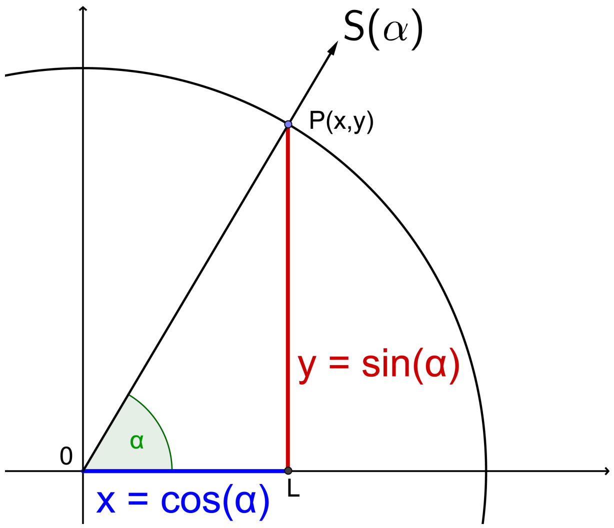
$$\cos(\alpha) = \frac{x}{1} = x \qquad (1)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{y}{1} = y \qquad (2)$$



Nach dem Satz des Pythogoras gilt außerdem:

$$x^2 + y^2 = 1$$



Folgerung aus dem Satz von Pythagoras für Sinus und Kosinus:

Setzt man die Beziehungen $\cos(\alpha) = x$ und $\sin(\alpha) = y$ in diese Gleichung ein, so ergibt sich:

$$[\cos(\alpha)]^2 + [\sin(\alpha)]^2 = 1$$

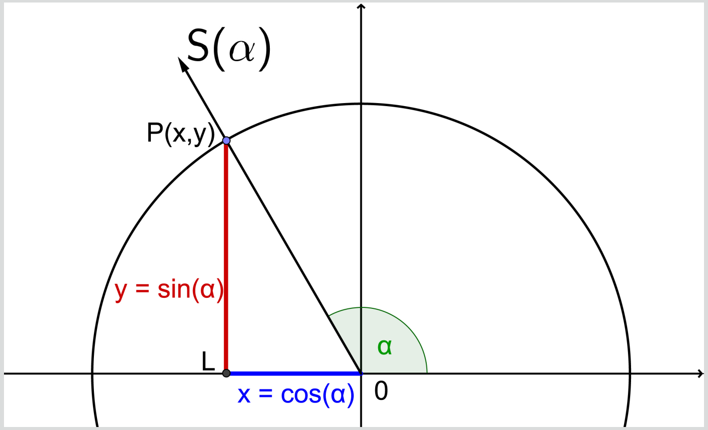
Winkelfunktionen / Trigonometrische Funktionen
Definition am Einheitskreis

Wir erweitern nun die bislang gemachte Definition für beliebige Werte des Winkels α:

Definition:

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Winkel. Der Mittelpunktstrahl $S(\alpha)$ schließe mit der x-Achse den Winkel α ein, und schneide den Einheitskreis im Punkte (x, y). Dann setzen wir

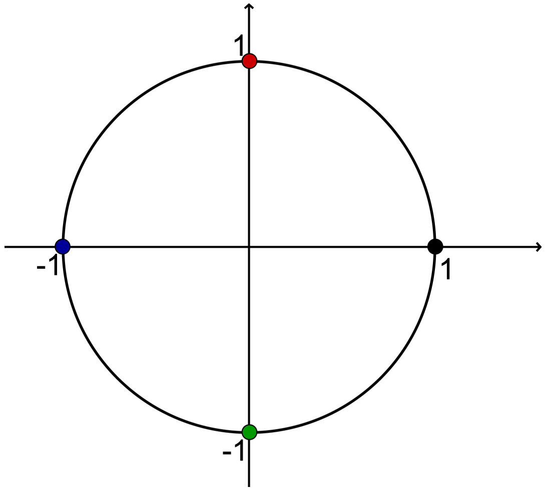
$$\cos(\alpha) := x,$$
$$\sin(\alpha) := y,$$
$$\tan(\alpha) := \frac{y}{x}, \text{ falls } x \neq 0$$



Unter Verwendung dieser Definitionen lassen sich manche Werte der Winkelfunktionen einfach ablesen.

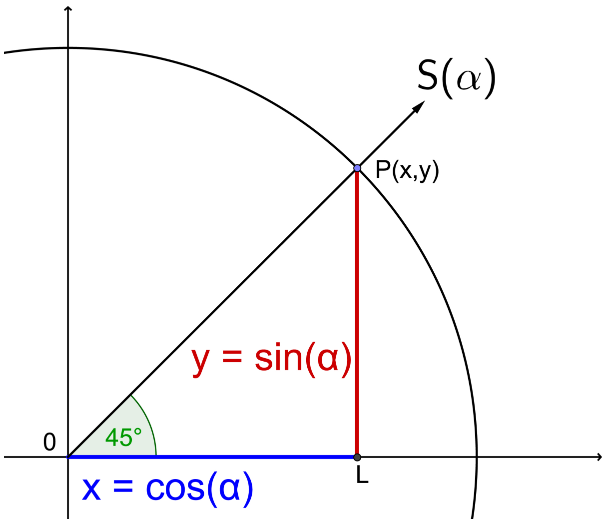
Wertetabelle:

α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
0°	1	0	$\frac{0}{1} = 0$
90°	0	1	nicht definiert
180°	-1	0	0
270°	0	-1	nicht definiert



Bestimmen Sie die Werte von $\cos(45°)$ und $\sin(45°)$. Zur Lösung orientieren wir uns am nebenstehenden Bild. Gesucht ist

$$x = \cos(45°)$$
$$y = \sin(45°)$$



Im Einheitskreis ist die Länge der Hypothenuse 1 und bei einem Winkel von 45° sind die Schenkel des Dreiecks, also Ankathete und Gegenkathete, gleich lang. Das bedeutet

$$x = y \tag{1}$$

Mit dem Satz von Pythagoras gilt ferner

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{2}$$

Setzt man (1) in (2) ein ergibt sich:

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 &= 1 \\ 2x^2 &= 1 \\ x^2 &= \frac{1}{2} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Aus der Skizze ist erkenntlich, dass $\cos(45^\circ) > 0$, also positiv ist, und damit

$$\cos(45^\circ) = x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ende Sitzung 1 vom 07.10.2019

Winkelfunktionen / Trigonometrische Funktionen

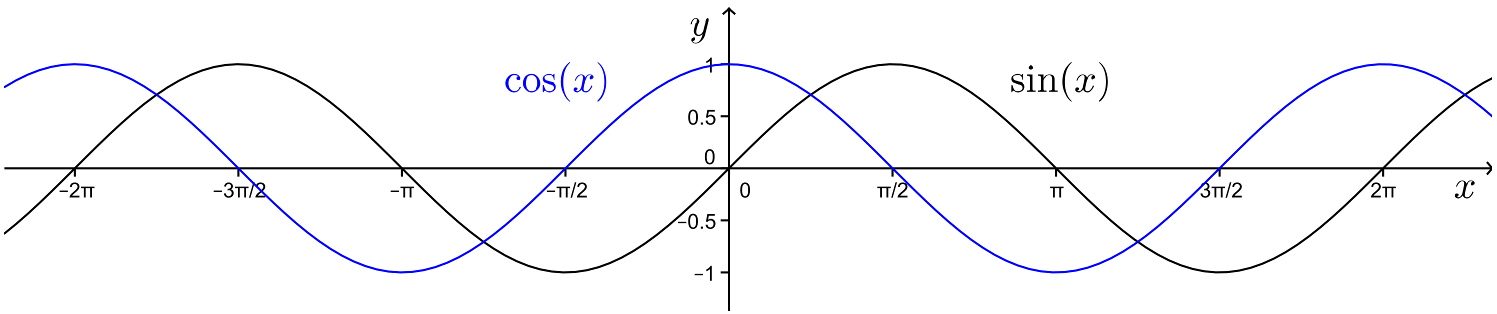
Wertetabelle

Winkel		**Funktionswerte trig. Funkt.**		
Gradmaß	Bogenmaß x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	nicht definiert
$120°$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$180°$	π	0	-1	0
$240°$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	nicht definiert
$360°$	2π	0	1	0

Winkelfunktionen / Trigonometrische Funktionen

Wertetabelle und Funktionsgraphen

Winkel		**Funktionswerte trig. Funkt.**		
Gradmaß	Bogenmaß x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
-45°	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
-90°	$-\frac{\pi}{2}$	-1	0	nicht definiert
-180°	$-\pi$	0	-1	0



Satz:

Für alle (möglichen) Winkel α, β gilt:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \qquad \text{(AT 1)}$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \qquad \text{(AT 2)}$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \qquad \text{(AT 3)}$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \qquad \text{(AT 4)}$$

(Der Beweis kann sehr elegant mit *komplexen Zahlen* geführt werden. Ein geometrisch basierter Beweis, vorgeführt für das dritte Addtions-theorem, findet sich auf den Folien 37 bis 39.)

Anhand der Additionstheoreme können noch einmal die folgenden Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus hergeleitet werden.

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \alpha) &= \sin(90^\circ) \cdot \cos(\alpha) - \cos(90^\circ) \cdot \sin(\alpha) \\ &= 1 \cdot \cos(\alpha) - 0 \cdot \sin(\alpha) \\ &= \cos(\alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ - \alpha) &= \cos(90^\circ) \cdot \cos(\alpha) + \sin(90^\circ) \cdot \sin(\alpha) \\ &= 0 \cdot \cos(\alpha) + 1 \cdot \sin(\alpha) \\ &= \sin(\alpha)\end{aligned}$$

Winkelfunktionen / Trigonometrische Funktionen

Additionstheoreme – Anwendungsbeispiel 2

Wir zeigen mit Hilfe der Additionstheoreme, dass die Gleichungen $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ und $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ gelten:

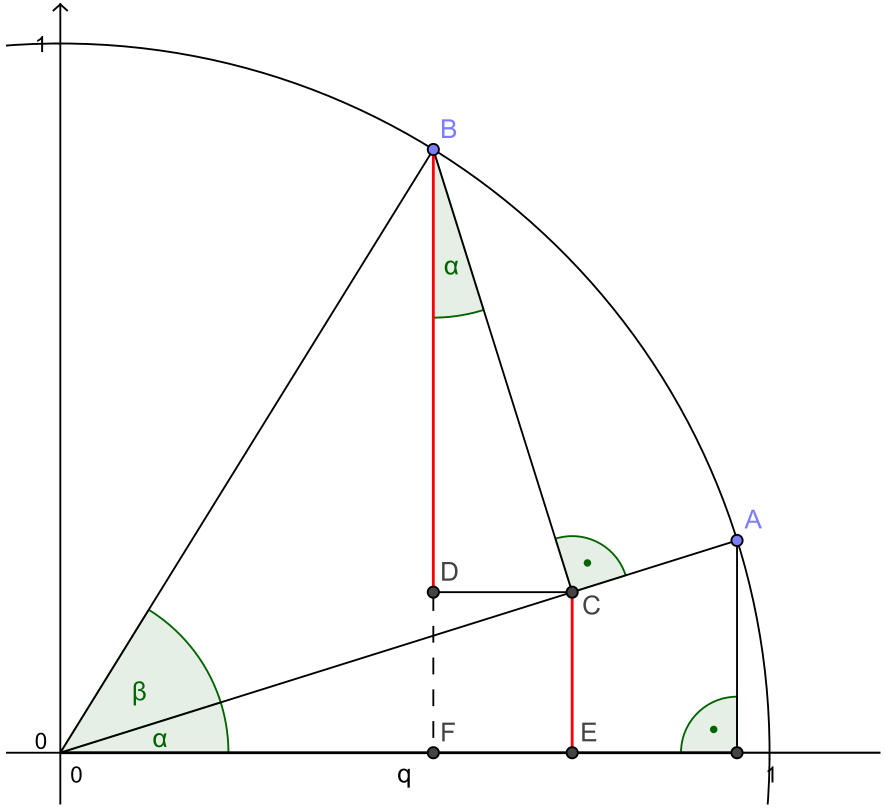
$$\begin{aligned}
\cos(-\alpha) = \cos(0 - \alpha) &= \cos(0) \cdot \cos(\alpha) + \sin(0) \cdot \sin(\alpha) \\
&= 1 \cdot \cos(\alpha) + 0 \cdot \sin(\alpha) \\
&= \cos(\alpha).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(-\alpha) = \sin(0 - \alpha) &= \sin(0) \cdot \cos(\alpha) - \cos(0) \cdot \sin(\alpha) \\
&= 0 \cdot \cos(\alpha) - 1 \cdot \sin(\alpha) \\
&= -\sin(\alpha).
\end{aligned}$$

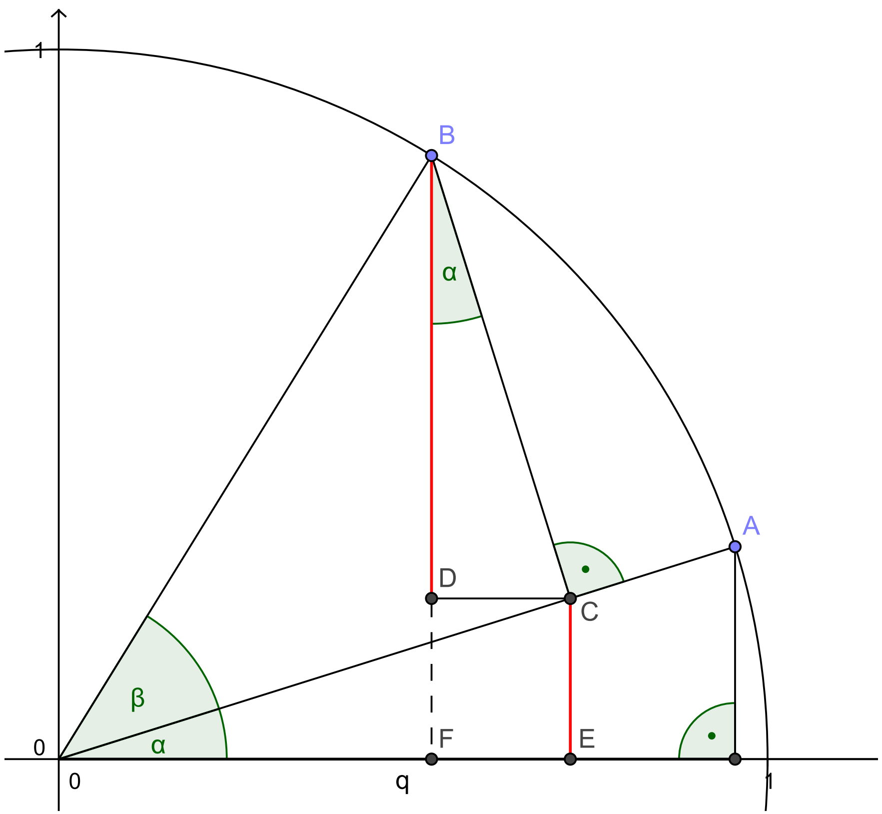
Wir führen einen geometrischen Beweis der Beziehung

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

für den ersten Quadranten anhand einer Figur im Einheitskreis:



An der Skizze lesen wir die folgenden Beziehungen ab:



$$\sin(\alpha+\beta) = \overline{BD} + \overline{CE} \qquad (1)$$

$$\sin(\beta) = \frac{\overline{BC}}{1} \qquad (2)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \qquad (3)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{CE}}{\overline{OC}} \qquad (4)$$

$$\cos(\beta) = \frac{\overline{OC}}{1} \qquad (5)$$

Wir verarbeiten die eben ermittelten Gleichungen weiter:

$$\sin(\alpha+\beta) = \overline{CE} + \overline{BD} \tag{1}$$

$$\sin(\beta) = \frac{\overline{BC}}{1} \tag{2}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \tag{3}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{CE}}{\overline{OC}} \tag{4}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\overline{OC}}{1} \tag{5}$$

Aus den Gleichungen 2 und 3 folgt

$$\overline{BD} = \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

Aus den Gleichungen 4 und 5 folgt

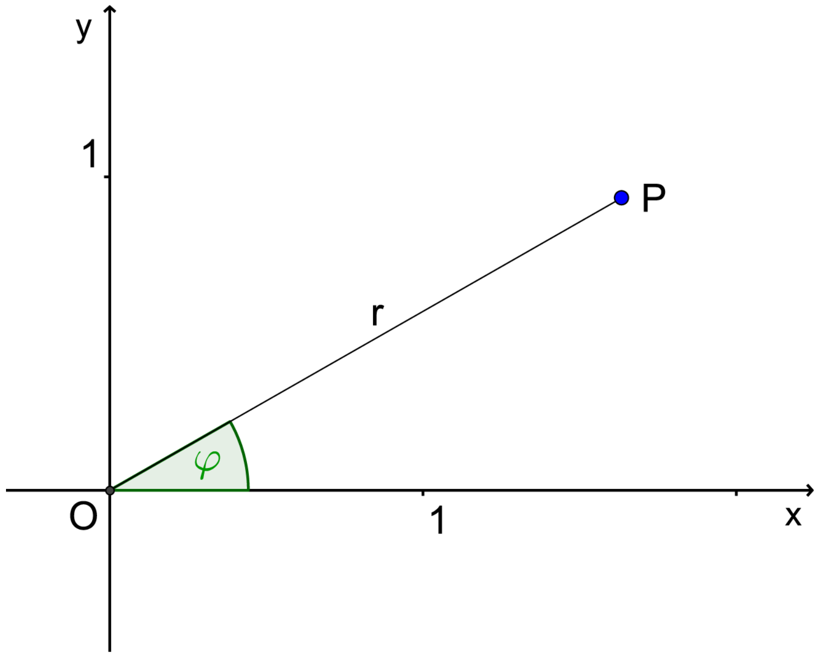
$$\overline{CE} = \sin\alpha \cdot \cos\beta.$$

Einsetzen der Ausdrücke für $\overline{CE}$ und $\overline{BD}$ in Gleichung 1 ergibt

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

Polarkoordinaten

Anstelle der üblichen (kartesischen) Koordinaten (x, y) können wir auch sogenannte Polarkoordinaten (r, φ) zur Festlegung von Punkten in der Ebene verwenden.



Es ist r der Abstand des Punktes P vom Ursprung, φ ist der Winkel, der von der Strecke OP und der (positiven) x-Achse eingeschlossen wird.

Polarkoordinaten

Zusammenhang zwischen Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten

Abstand vom Ursprung

Der Punkt P habe die kartesischen Koordinaten (x, y). Dann gilt für den Abstand r des Punktes P vom Ursprung:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Behauptung

Dividiert man die Koordinaten (x, y) des Punktes P jeweils durch r, so erhält man einen Punkt P' mit Koordinaten $\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$, der auf dem Einheitskreis liegt.

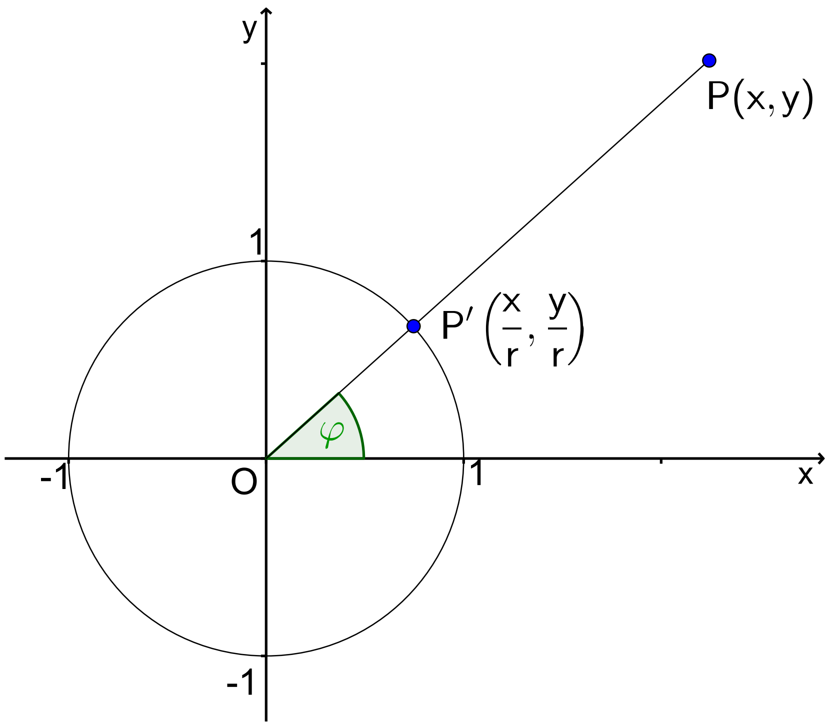
Begründung

Es gilt $\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{(x^2+y^2)}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$

Polarkoordinaten

Zusammenhang zwischen Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten

Die Verbindungsstrecken *OP* bzw. *OP'* schließen den gleichen Winkel φ mit der x-Achse ein: Mit den zuvor am Einheitskreis getroffenen Vereinbarungen lesen wir ab:



$$\cos(\varphi) = \frac{x}{r},$$

$$\sin(\varphi) = \frac{y}{r},$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x}.$$

Polarkoordinaten

Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesischen Koordinaten

Sind die Polarkoordinaten (r, φ) eines Punkte P gegeben, so erhält man die kartesischen Koordinaten (x, y) wie folgt:

$$x = r \cdot \cos(\varphi),$$
$$y = r \cdot \sin(\varphi).$$

Beispiel:

Für $r = 3, \varphi = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$ ergibt sich

$$x = 3 \cdot \cos(30^\circ) = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$y = 3 \cdot \sin(30^\circ) = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Polarkoordinaten

Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten

Bei der Bestimmung der Polarkoordinaten eines Punktes P mit gegebenen kartesischen Koordinaten (x, y) stellt sich das Problem, einen Polarwinkel φ zu finden, der die Bedingungen $\cos(\varphi) = \frac{x}{r}$ und $\sin(\varphi) = \frac{y}{r}$ erfüllllt.

Da $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ gilt, müssen wir bei der Bestimmung des Polarwinkels eine Fallunterscheidung vornehmen:

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right), & \text{falls } y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right), & \text{falls } y < 0 \end{cases} \tag{3}$$

Polarkoordinaten

Beispiel 1

Es ist gegeben der Punkt A mit den kartesischen Koordinaten

$$x = -\frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Wir bestimmen die Polarkoordinaten des Punktes A.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1.$$

Da $y > 0$ gilt, verwenden wir den oberen Fall in Gleichung 3:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) = \arccos\left(\frac{-\frac{1}{2}}{1}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Die Polarkoordinaten des Punktes A sind somit $(r, \varphi) = \left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Polarkoordinaten

Beispiel 2

Es ist gegeben der Punkt B mit den kartesischen Koordinaten

$$x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Wir bestimmen die Polarkoordinaten des Punktes B.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1.$$

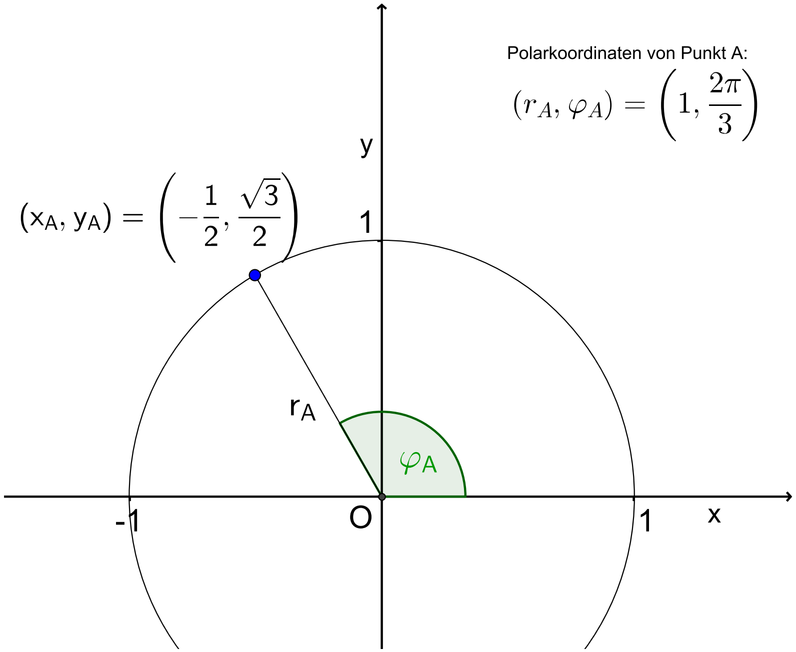
Da $y < 0$ gilt, verwenden wir den unteren Fall in Gleichung 3:

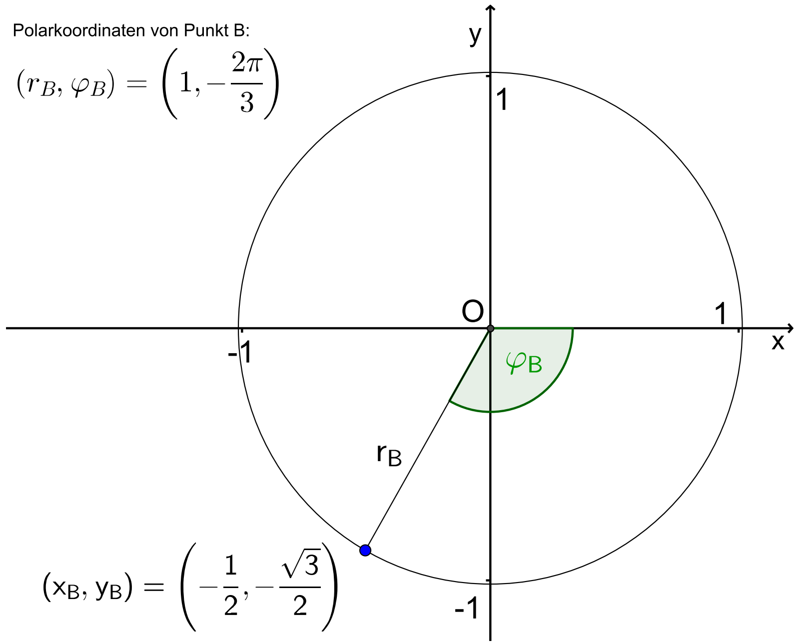
$$\varphi = -\arccos\left(\frac{x}{r}\right) = -\arccos\left(\frac{-\frac{1}{2}}{1}\right) = -\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2\pi}{3}$$

Die Polarkoordinaten des Punktes B sind somit $(r, \varphi) = \left(1, -\frac{2\pi}{3}\right)$

Polarkoordinaten

Beispiele 1 und 2





Polarkoordinaten

Berechnung des Polarwinkels – Zusammenfassung und Erweiterung

Berechnung des Polarwinkels – erste Variante:

- Zur Bestimmung eines Winkels φ, der die Beziehungen $\cos(\varphi) = \frac{x}{r}$ und $\sin(\varphi) = \frac{y}{r}$ erfüllt, verwenden wir durch die Umkehrfunktion $\cos^{-1}$ der Kosinusfunktion.
- Die Funktion $\cos^{-1}$ ist in vielen Taschenrechnern implementiert, in der Literatur wird sie auch mit dem Symbol $\arccos$ bezeichnet.
- Da $\cos^{-1}$ jedoch nur Werte zurückgibt, die im Intervall $[0°, 180°]$ bzw. $[0, \pi]$ liegen, liefert der Ausdruck $\cos^{-1}\left(\frac{x}{r}\right)$ **nur dann korrekte Ergebnisse**, wenn der Punkt (x, y) **oberhalb (oder auf) der x-Achse** liegt. Man muss also **eine Fallunterscheidung machen**, z.B. wie folgt:

$$\begin{aligned} \varphi &= +\cos^{-1}\left(\frac{x}{r}\right), \text{ falls } y \geq 0; \\ \varphi &= -\cos^{-1}\left(\frac{x}{r}\right), \text{ falls } y < 0. \end{aligned}$$

Polarkoordinaten

Berechnung des Polarwinkels – Zusammenfassung und Erweiterung

Berechnung des Polarwinkels – zweite Variante:

Möchte man **keine negativen** Winkel, sondern Werte von φ, die im Intervall $[0°, 360°)$ liegen, lautet die Fallunterscheidung so:

$$\begin{aligned} \varphi &= +\cos^{-1}\left(\tfrac{x}{r}\right), \text{ falls } y \geq 0; \\ \varphi &= 360° - \cos^{-1}\left(\tfrac{x}{r}\right), \text{ falls } y < 0. \end{aligned}$$

Anwendung auf unser Beispiel 2:

Für den Punkt B mit den kartesischen Koordinaten $x = -\frac{1}{2}$ und $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ergibt sich

- mit der ersten Formel der Wert $-\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -120°$,
- mit der zweiten Formel der Wert $360° - \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 240°$.