Lernziele lineare Abbildungen und Matrizen

Freitag, 8. Dezember 2023 10:25

- Zusammenhang zw. Matrizen und lin. Abb.
- wichtige lin. Abb. im $\mathbb{R}^2$ (Ebene) und ihre ~~zuge~~ zugehörigen Matrizen bspw. Drehung, Spiegelung, Skalierung, Scherung
- Matrixmultiplikation und ihre Interpretation als Verkettung lin. Abb.
- Rechenregeln für Matrizen

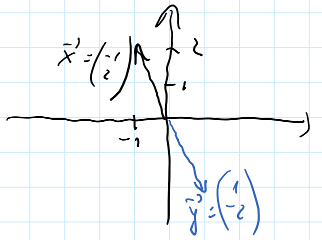
1. Lineare Abbildungen

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bilden ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ auf $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$

Bsp. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(\vec{x}) = -\vec{x}$

$$f(\vec{x}) = f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = -\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_1\\-x_2\end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$



Definition: Die Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt eine lineare Abb., wenn für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ u. $k \in \mathbb{R}$ gilt:

i. $f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$

ii. $f(k\vec{a}) = k f(\vec{a})$

Alternativ:
$f(k\vec{a} + l\vec{b}) = k f(\vec{a}) + l f(\vec{b})$
$k, l \in \mathbb{R}$

Bsp: a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\vec{x}) = -\vec{x}$ lin. Abb.?

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\vec{x}) = \vec{x} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ " ?

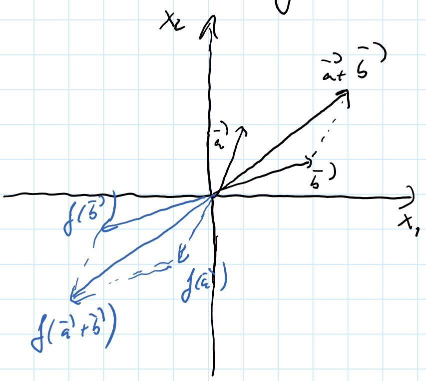
a) i. $f(\underbrace{\vec{a} + \vec{b}}_{\vec{x}}) = -(\underbrace{\vec{a} + \vec{b}}_{\vec{x}}) = -\vec{a} - \vec{b} = (-\vec{a}) + (-\vec{b})$

$= f(\vec{a}) + f(\vec{b})$

also $f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$ ✓

ii. $f(k\vec{a}) = -k\vec{a} = k(-\vec{a}) = k f(\vec{a})$

also $f(k\vec{a}) = k f(\vec{a})$ ✓



HA: ii Visualisieren $k = 2$

b) $f(\underbrace{\vec{a} + \vec{b}}_{\vec{x}}) = \underbrace{\vec{a} + \vec{b}}_{\vec{x}} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$f(\vec{a}) = \vec{a} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$f(\vec{b}) = \vec{b} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$f(\vec{a}) + f(\vec{b}) = \vec{a} + \vec{b} + \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \neq f(\vec{a}+\vec{b})$

Verschiebungen sind nicht linear! s. später affine Abb.

Matrixform einer lin. Abb.

Bsp: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(\vec{x}) = f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = -\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_1\\-x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)\,x_1 + 0\,x_2\\ 0\,x_1 + (-1)\,x_2\end{pmatrix}$$

Wir führen eine abkürzende Schreibweise ein: An Stelle von

$$\begin{pmatrix}(-1)\,x_1 + 0\cdot x_2\\ 0\,x_1 + (-1)\,x_2\end{pmatrix} \quad \text{schreiben wir} \quad \underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}_{\text{Matrix}} \underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}}_{\text{Vektor}}$$

Matrix · Vektor = Vektor

Allg.: Jede lin. Abb. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ hat die Form:

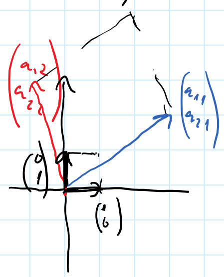
$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2\\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2\end{pmatrix}$$

Das kann man folgendermaßen sehen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\x_2\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = f\left(x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \overset{i.}{=} f\left(x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + f\left(x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\overset{ii.}{=} x_1 \underbrace{f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)}_{\text{Abbildung von }\binom{1}{0}} + x_2 \underbrace{f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)}_{\text{Abbildung von }\binom{0}{1}}$$



wobei

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix} \qquad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}a_{11}\,x_1\\a_{21}\,x_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_{12}\,x_2\\a_{22}\,x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2\\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2\end{pmatrix}$$

Anstelle von schreiben

$$\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}}_{\substack{\text{Matrix}\\ A}} \underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}}_{\substack{\text{Vektor}\\ \vec{x}}}$$

A hat 2 Zeilen

$A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 2 - Spalten

Spaltenvektoren von A: $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$

1. $\begin{pmatrix} | \\ \vec{a}_1 \\ | \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} | \\ \vec{a}_2 \\ | \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} | & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \\ | & | \end{pmatrix}$

Zeilenvektoren $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

a_{ij}: Element in der Matrix in der i-ten Zeile
j-ten Spalte

Rechenregeln für Matrizen

1) $A + B = B + A$ A, B gleiche Dimension

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$$

2) $l(kA) = (l \cdot k)A$ $l, k \in \mathbb{R}$

$$2(-3)A = -6A = -6\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -18 & -24 \end{pmatrix}$$

3) $(l + k)A = lA + kA$

4) $A + 0 = A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

5) $k(A + B) = kA + kB$ $k \in \mathbb{R}$

Wie multipliziert man 2 Matrizen?

s. Verkettung lin. Abb.

6) $AB \neq BA$ i.d. R.

7) $(AB)C = A(BC)$

8) $(A+B)C = AC + BC$

9) $A(B+C) = AB + AC$

Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ $\quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AE_2 = A = E_2 A$

Inverse Matrix A^{-1} : $A^{-1}A = AA^{-1} = E_2$ im $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Wie bestimmt man A^{-1}?

s. später Gauß-Verfahren

Verkettung lin. Abb.

<u>Gegeben</u>: $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f_1(\vec{x}) = A\vec{x}$

$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f_2(\vec{x}) = B\vec{x}$

<u>Gesucht</u>: $f_3 = f_2 \circ f_1 \quad f_3(\vec{x}) = C\vec{x}$

$f_3(\vec{x}) = (f_2 \circ f_1)(\vec{x}) = f_2(f_1(\vec{x})) = f_2(A\vec{x}) = B(A\vec{x})$

$= BA\vec{x} = C\vec{x}$

$C = BA$

$C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B\underbrace{A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Matrix Vek. Mult.}} = B\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} \end{pmatrix}$

1. Spaltenvektor von C

H.A

$C\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \quad \begin{pmatrix} b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$

2. Spaltenvektor von C

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} & \begin{matrix} b_{11} a_{11} + b_{12} a_{21} & b_{11} a_{12} + b_{12} a_{22} \\ & \end{matrix} \end{array}$$

$B \cdot A = C$