Präsenzübungen

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ stellt eine Erweiterung des Zahlenmaterials dar. Grundlegend neu ist das Element i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$. Dies kann keine reelle Zahl sein, denn für jede reelle Zahl x gilt stets $x^2 \geq 0$. Unter den 2×2-Matrizen finden wir jedoch Elemente mit dieser bzw. der entsprechenden[1] Eigenschaft, z.B. $I = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich in der Form $z = x \cdot 1 + y \cdot i$ bzw. $z = x + y\,i$ schreiben. Die entsprechenden 2×2-Matrixdarstellungen haben die Form $[z] = x \cdot E_2 + y \cdot I$ mit $E_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ und $I = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Also ist

$$[z] = x \cdot E_2 + y \cdot I = \left[\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right].$$

Aufgabe P 4. *Komplexe Zahlen*

Es sei gegeben die komplexe Zahl $z = -3 + 4\,i$ bzw. die entsprechende Matrix

$$[z] = -3\,E_2 + 4\,I = \left[\begin{smallmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{smallmatrix}\right].$$

(a) Stellen Sie die Zahl z in der sogenannten Gauß'schen Zahlenebene dar. Verwenden Sie 1 bzw. E_2 als „Einheitsvektor in horizontaler Richtung" und i bzw. I als „Einheitsvektor in vertikaler Richtung" und zeichnen Sie das entsprechende Koordinatensystem.

(b) Bestimmen Sie den Absolutbetrag $|z|$ von z. *Hinweis: Für $z = x + y\,i$ ist $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.* . Berechen Sie außerdem den Wert von $z \cdot \bar{z}$ und überzeugen Sie sich davon, dass $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ gilt.

(c) Berechnen Sie $z^2 = (-3 + 4\,i) \cdot (-3 + 4\,i)$. Berechnen Sie ferner das Matrixprodukt

$$[z]^2 = [z] \cdot [z] = \left[\begin{smallmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{smallmatrix}\right].$$

Stellen Sie Ihre Produktmatrix in der Form $x\,E_2 + y\,I$ dar und vergleichen Sie.

(d) Berechnen Sie $i \cdot z = i \cdot (-3 + 4\,i)$ sowie das Matrixprodukt $I \cdot [z] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{smallmatrix}\right]$.

Stellen Sie Ihre Produktmatrix in der Form $x\,E_2 + y\,I$ dar und vergleichen Sie.

(e) Berechnen Sie die Absolutbeträge $\left|z^2\right|$ und $|i \cdot z|$. Stellen Sie Zahlen $i \cdot z$ und $\frac{1}{5} \cdot z^2$ in der Gauß'schen Zahlenebene dar. Es ist nützlich, wenn Sie sich daran erinnern, dass $\frac{1}{5} = 0,2$ gilt. *Warum wurde nicht die (vielleicht) näherliegende Aufgabe gestellt, die Zahl z^2 darzustellen?*

> Wir wollen nun für eine gegebene komplexe Zahl $z = x + y\,i$ eine komplexe Zahl $\ell = \ell_1 + \ell_2\,i$ mit der Eigenschaft bestimmen, dass $z \cdot \ell = 1$ gilt. Eine solche Zahl ℓ heißt **multiplikative Inverse** von z, und wir schreiben daher z^{-1} oder $\frac{1}{z}$ für ℓ.
>
> Zur Berechnung von ℓ verwenden wir die sogenannte **zu** z **komplex konjugierte** Zahl $\bar{z} = x - y\,i$. Wegen $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ folgt $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, also ist $\ell = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\,i$.

(f) Berechnen Sie für die Zahl $z = -3 + 4\,i$ die Inverse ℓ und rechnen Sie nach, dass sich tatsächlich $z \cdot \ell = 1$ ergibt.

---

[1] $I^2 = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right] = -\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] = -E_2$, d.h. I^2 ist gleich „minus Eins" im Ring der 2×2-Matrizen.

Aufgabe P 5. *Multiplikation komplexer Zahlen*

Es sei gegeben die komplexe Zahl $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$.

(a) Bestimmen Sie den Absolutbetrag $|z|$ von z. *Hinweis: Für* $z = x + y\,i$ *ist* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(b) Stellen Sie die Zahl z als „Zeiger" (Ortsvektor) in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

(c) Schreiben Sie die Zahl z in Exponentialdarstellung: $z = r \cdot e^{i\,\varphi}$.

(d) Berechnen Sie z^2 einmal unter Verwendung der angegebenen kartesische Darstellung und einmal mithilfe der Exponentialdarstellung.

(e) Berechnen Sie weitere Potenzen $z^3,\ z^4,\ z^5, \ldots$ und stellen Sie auch diese in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

(f) Beschreiben Sie Ihre Befunde geometrisch. Was macht die Abbildung $w \mapsto z \cdot w$? Schreiben Sie zur Diskussion w in Exponentialdarstellung: $w = |w| \cdot e^{i\,\alpha}$.

(g) Bestimmen Sie die multiplikative Inverse von z, also diejenige komplexe Zahl $\ell = \ell_1 + \ell_2\,i$ mit der Eigenschaft, dass $\ell \cdot z = 1$ gilt.

Für Schnelle sogleich – für alle anderen zuhause

Aufgabe P 6. *Allgemeinerer Blickwinkel und Weiterführung*

Es seien die komplexen Zahlen $u = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i$ und $v = 1 - i$ gegeben.

(a) Stellen Sie die Zahlen u und v als „Zeiger" (Ortsvektoren) in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

(b) Bestimmen Sie zu den Zeigern u und v jeweils die Polarkoordinaten (r, φ).

Wir werden nun auch die folgende Sprechweise verwenden: Die komplexen Zahlen u und v haben die Absolutbeträge $|u| = r_u$ und $|v| = r_v$ sowie die Polarwinkel φ_u und φ_v.

(c) Schreiben Sie die Zahlen u und v in Exponentialdarstellung:

$$u = |u| \cdot e^{i\varphi_u}, \qquad v = |v| \cdot e^{i\varphi_v}$$

und verwenden Sie diese zur Berechnung der Produkte $u \cdot u$, $u \cdot v$ und $v \cdot v$ sowie des Quotienten $\frac{v}{u}$.

(d) Berechnen Sie das Produkt $u \cdot v$ und den Quotienten $\frac{v}{u}$ noch einmal unter Verwendung der (oben gegebenen) kartesischen Darstellungen und vergleichen Sie mit der vorigen Teilaufgabe.

Hausübungen

Aufgabe H 6. *Komplexen Zahlen – Ergänzung und Vertiefung*

(a) Prüfen Sie nach, dass für das Produkt zweier komplexer Zahlen $z_1 = x_1 + y_1\, i$ und $z_2 = x_2 + y_2\, i$ die Gleichung $z_1 \cdot z_2 = (x_1\, x_2 - y_1\, y_2) + (x_1\, y_2 + x_2\, y_1)\; i$ gilt.

Berechnen Sie hierzu (auch) das Matrixprodukt $\left[\begin{smallmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{smallmatrix}\right]$ und stellen Sie es in der Form $a\, E_2 + b\, I$ dar.

(b) Wir haben zuvor eine Formel für die **multiplikative Inverse** ℓ einer komplexen Zahl z, angegeben. Wir wollen zur Bestimmung von ℓ nun den Umweg über die Matrixdarstellung $[z]$ von z wählen und eine Matrix $[\ell]$ mit der Eigenschaft $[z] \cdot [\ell] = E_2$ suchen.

Rufen Sie sich die für invertierbare 2×2-Matrizen gültige Formel $\left[\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right]^{-1} = \frac{1}{a\,d - b\,c} \left[\begin{smallmatrix} d & -c \\ -b & a \end{smallmatrix}\right]$ in Erinnerung und berechnen Sie hiermit die Matrix $[\ell]$.

Stellen Sie $[\ell]$ in der Form $\ell_1\, E_2 + \ell_2\, I$ dar und bestimmen Sie hieraus die Zahl $\ell = \ell_1 + \ell_2\, i$. Führen Sie am Ende eine Probe durch: Gilt tatsächlich $z \cdot \ell = 1$?

(c) Es sei z eine komplexe Zahl mit Matrixdarstellung $[z] = x \cdot E_2 + y \cdot I = \left[\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right]$ und es sei $\bar{z}$ die zu z **komplex konjugierte Zahl** mit Matrixdarstellung $[\bar{z}] = x \cdot E_2 - y \cdot I = \left[\begin{smallmatrix} x & y \\ -y & x \end{smallmatrix}\right]$. Berechnen Sie das Produkt $[z] \cdot [\bar{z}]$ und stellen Sie es in kartesischer Form dar.

(d) Leiten Sie aus Ihren Beobachtungen ein allgemeines Gesetz zur Berechnung von $z^{-1} = \frac{1}{z}$ für gegebene komplexe Zahlen $z = x + y\, i$ ab.

Aufgabe H 7. *Multiplikation mit komplexen Zahlen – geometrische Deutung*

(a) Geben Sie die Exponentialform der komplexen Zahl $i = 0 + 1 \cdot i$ an.

(b) Welcher geometrischen Operation entspricht die Multiplikation einer beliebigen komplexen Zahl z mit i, also die Abbildung $z \mapsto i \cdot z$?

(c) Welcher geometrischen Operation entspricht die Abbildung $z \mapsto \frac{z}{i} = \frac{1}{i} \cdot z$?

(d) Welcher geometrischen Operation entspricht die Abbildung $z \mapsto i \cdot \bar{z}$?
Hinweis: Für diese Abbildung ist die kartesische Darstellung von Vorteil.

(e) Es sei $u = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, i$. Welcher geometrischen Operation entspricht die Multiplikation einer beliebigen komplexen Zahl z mit u, also die Abbildung $z \longmapsto u \cdot z$?

Es sei w eine komplexe Zahl auf dem Einheitskreis, d.h. $|w| = 1$. Dann gilt $w = e^{i\,\alpha}$ mit einem Polarwinkel α.

(f) Welcher geometrischen Operation entspricht die Abbildung $z \mapsto w \cdot z$?

(g) Welcher geometrischen Operation entspricht die Abbildung $z \mapsto \frac{z}{w} = \frac{1}{w} \cdot z$?

Tutoriumsübungen

Aufgabe T 5. *Elementares Rechnen mit komplexen Zahlen*

Es sei gegeben die komplexe Zahl $w = 12 + 5\,i$.

(a) Bilden Sie die komplex Konjugierte $\overline{w}$ von w und berechnen Sie das Produkt $w \cdot \overline{w}$.

(b) Berechnen Sie den Absolutbetrag $|w|$ von w und den Absolutbetrag $|\overline{w}|$ von $\overline{w}$.

(c) Stellen Sie die komplexe Zahl $\frac{1}{w}$ in der Form $x + y\,i$ dar (kartesische Darstellung).

(d) Bestimmen Sie die kartesische Darstellung der komplexen Zahl $\frac{\overline{w}}{w}$.

Aufgabe T 6. *Darstellung komplexer Zahlen als Matrizen*

Man kann den Körper der komplexen Zahlen als Menge von 2×2-Matrizen der Form $x \cdot E_2 + y \cdot I$ mit $E_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ und $I = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ darstellen. Natürlich ist $x \cdot E_2 + y \cdot I = \left[\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right]$.

Betrachten Sie im Folgenden zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 \cdot E_2 + y_1 \cdot I$ und $x_2 \cdot E_2 + y_2 \cdot I$

(a) Berechnen Sie die (Matrix-)Summe $z_1 + z_2$.

(b) Berechnen Sie das (Matrix-)Produkt $z_1 \cdot z_2$.

(c) Es sei $w = 12 \cdot E_2 + 5 \cdot I$. Berechnen Sie die zu w inverse Matrix und vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem von Aufgabe T 5 **(c)**.

Aufgabe T 7. *Multiplikation komplexer Zahlen, vgl. die Aufgaben P 5 und P 6*

Es sei gegeben die komplexe Zahl $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$.

(a) Bestimmen Sie den Absolutbetrag $|z|$ von z.
Hinweis: Für $z = x + y\,i$ ist $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(b) Berechnen Sie z^2, z^3, z^4, z^5 und stellen Sie diese Zahlen sowie z in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

(c) Beschreiben Sie Ihre Befunde geometrisch.

(d) Bestimmen Sie die multiplikative Inverse von z, also die komplexe Zahl $k = k_1 + k_2\,i$ mit der Eigenschaft, dass $k \cdot z = 1$ gilt.

Es seien die komplexen Zahlen $u = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i$ und $v = 1 - i$ gegeben.

(e) Stellen Sie die Zahlen u und v als Punkte U bzw. V in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

(f) Bestimmen Sie zu den Punkten U und V jeweils die Polarkoordinaten (r, φ).

Wir werden nun auch die folgende Sprechweise verwenden: Die komplexen Zahlen u und $|v|$ haben die Absolutbeträge $|u| = r_u$ und $|v| = r_v$ sowie die Polarwinkel φ_u und φ_v.

(g) Schreiben Sie die Zahlen u und v in Exponentialdarstellung:

$$u = |u| \cdot e^{i\varphi_u}, \qquad v = |v| \cdot e^{i\varphi_v}$$

und verwenden Sie diese zur Berechnung der Produkte $u \cdot u$, $u \cdot v$ und $v \cdot v$.

(h) Berechnen Sie das Produkt $u \cdot v$ noch einmal unter Verwendung der (oben gegebenen) kartesischen Darstellungen und vergleichen Sie mit der vorigen Teilaufgabe.