Mathematik in Medien und Informatik

Matrizen und Matrixrechnung 8

Prof. Dr. Thomas Schneider

Stand: 20.12.2022

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Inhalt

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Matrizen

Notation

Bemerkungen:

- Das lateinische Wort *matrix* bedeutet ursprünglich *Muttertier*.
- Der lateinische Plural ist *matrices*.
- Im Deutschen heißt es im Singular *die Matrix*, im Plural *die Matrizen*.
- Die mitunter fälschlich verwendete Bildung *„eine Matrize"* ist zu vermeiden.

Definition:

- Eine Matrix ist eine rechteckige Anordnung von Elementen einer gegebenen Grundmenge.
- Typische Bezeichnungen für Matrizen verwenden Großbuchstaben, z.B. A oder M etc.
- Das Symbol $\mathbb{R}^{z \times s}$ bezeichnet die Menge aller $z \times s$-Matrizen (z Zeilen, s Spalten) mit reellwertigen Einträgen.

Merke:

Wenn $A \in \mathbb{R}^{z \times s}$ eine Matrix ist, so bezeichnet A_{ij} oder $(A)_{ij}$ oder a_{ij} den Eintrag in der Zeile Nr. i und in der Spalte Nr. j

Beispiel:

Für

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

gilt

$$A_{23} = 9$$

Matrizen

Einheitsmatrix

Bemerkung:

Eine Matrix mit ebenso vielen Zeilen wie Spalten heißt **quadratische Matrix**.

Definition:

Es sei $n > 0$ eine natürliche Zahl. Dann ist E_n die (quadratische) $n \times n$-Matrix mit Einsen auf der Diagonalen (von links oben nach rechts unten) und sonst Nullen. Die Matrix E_n heißt $n \times n$-**Einheitsmatrix**.

Beispiel:

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrixrechnung

Addition, Multiplikation mit Skalaren

a) Für $A, B \in \mathbb{R}^{z \times s}$ ist $A + B$ wie folgt definiert:

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, \qquad 1 \le i \le z\,,\ 1 \le j \le s\,.$$

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 3 & 9 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 8 & 16 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Für $k \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{z \times s}$ ist kA wie folgt definiert:

$$(kA)_{ij} = kA_{ij}, \qquad 1 \le i \le z\,,\ 1 \le j \le s\,.$$

Beispiel:

$$(-3)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -9 \\ -15 & -21 & -27 \end{bmatrix}$$

Bemerkung:

Die Menge $\mathbb{R}^{z \times s}$ mit den eben eingeführten Operationen und

$\mathbf{0} := \mathbf{0}_{z \times s} := \begin{bmatrix} 0 \dots 0 \\ \vdots \quad \vdots \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix}$ als Neutralelement bzgl. der Addition bildet einen

Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Erinnerung: Das bedeutet

1) $\mathbb{R}^{z \times s}$ mit der Addition ist eine **kommutative Gruppe**.
2) $k\,(A + B) = k\,A + k\,B$ für alle $k \in \mathbb{R}$ und alle $A, B \in \mathbb{R}^{z \times s}$.
3) $(k + \ell\,)\,A = k\,A + \ell\,A$ für alle $k, \ell \in \mathbb{R}$ und für alle $A \in \mathbb{R}^{z \times s}$.
4) $(k\,\ell\,)\,A = k\,(\ell\,A)$ für alle $k, \ell \in \mathbb{R}$ für alle $k, \ell \in \mathbb{R}$ und für alle $A \in \mathbb{R}^{z \times s}$.
5) $1 \cdot A = A$ für alle $A \in \mathbb{R}^{z \times s}$.

Definition:

Es sei $A \in \mathbb{R}^{z \times m}$ eine Matrix mit **z** Zeilen und **m** Spalten und $B \in \mathbb{R}^{m \times s}$ eine Matrix mit **m** Zeilen und **s** Spalten.

Dann ist $A \cdot B \ (= \ A\,B)$ eine Matrix mit **z** Zeilen und **s** Spalten, deren Einträge wie folgt berechnet werden:

$$(A\,B)_{ik} = \sum_{j=1}^{m} A_{ij}\,B_{jk} = A_{i1}\,B_{1k} + A_{i2}\,B_{2k} + \ldots + A_{im}\,B_{mk}$$

für $1 \leq i \leq z, \ 1 \leq k \leq s$.

Anmerkung: Σ (griechisch „Sigma“) ist das **Summensymbol**.

Merkregel:

- Bei der Matrixmultiplikation rechnen wir immer **„Zeile mal Spalte“**.
- Genauer: Zur Berechnung des Eintrags in Zeile Nr. j und Spalte Nr. k **der Produktmatrix** $A\dot{B}$ berechnen wir das **Skalarprodukt** der j**-ten Zeile** von A mit der k**-ten Spalte** von B.

Hörsaalübung:

Für $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\mathbf{4}\times 3}$ und $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times\mathbf{2}}$

ist das Produkt $A \cdot B$ eine **4** $\times$ **2** - Matrix.

Berechnen Sie die Einträge von $A \cdot B$.

$$\begin{aligned}(A\,B)_{21} &= \sum_{j=1}^{3} A_{2j} \cdot B_{j1} \\ &= A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} + A_{23} \cdot B_{31} \\ &= 5 \cdot 1 + 7 \cdot 0 + 9 \cdot (-2) \\ &= 5 + 0 - 18 = -13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A\,B)_{32} &= \sum_{j=1}^{3} A_{3j} \cdot B_{j2} \\ &= A_{31} \cdot B_{12} + A_{32} \cdot B_{22} + A_{33} \cdot B_{32} \\ &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \\ &= 0 + 0 + 5 = 5\end{aligned}$$

Matrixrechnung

Matrixmultiplikation – Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

$$A\,B = \begin{bmatrix} -6 & 16 \\ -13 & 52 \\ -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 2}$$

Das Schema $\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & A\,B \end{array}$ kann hilfreich sein:

$$\begin{array}{c|cc}
 & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}} \\
\hline
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} &
\begin{array}{c} 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 3\cdot(-2) \\ = -6 \\ 5\cdot 1 + 7\cdot 0 + 9\cdot(-2) \\ = -13 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot(-2) \\ = -1 \\ 0\cdot 1 + 2\cdot 0 + (-1)\cdot(-2) \\ = 2 \end{array} &
\begin{array}{c} 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 3\cdot 5 \\ = 16 \\ 5\cdot 0 + 7\cdot 1 + 9\cdot 5 \\ = 52 \\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 5 \\ = 5 \\ 0\cdot 0 + 2\cdot 1 + (-1)\cdot 5 \\ = -3 \end{array}
\end{array}$$

Matrixrechnung

Matrixmultiplikation – Bemerkungen

Bemerkung:

a) Es seien Matrizen $A \in \mathbb{R}^{\overset{\text{Zeilen}}{\ell} \times \overset{\text{Spalten}}{m}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\overset{\text{Zeilen}}{n} \times \overset{\text{Spalten}}{p}}$ gegeben.

Falls $m = n$ gilt, so ist $A \cdot B$ definiert.

Falls $p = \ell$ gilt, so ist $B \cdot A$ definiert.

b) ⚠ Selbst wenn $A \cdot B$ **und** $B \cdot A$ beide definiert sind, braucht $A \cdot B$ **nicht** gleich $B \cdot A$ zu sein.

Wenn etwa A eine 3×2-Matrix und B eine 2×3-Matrix ist, so ist $A \cdot B \in \mathbb{R}^{3\times3}$ und $B \cdot A \in \mathbb{R}^{2\times2}$, die Formate stimmen also nicht überein.

Und auch wenn A und B quadratische Matrizen gleicher Größe sind, braucht $A \cdot B$ **nicht** gleich $B \cdot A$ zu sein.

Hörsaalübung

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

Und falls Sie hiermit vor den anderen fertig sind:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie $C \cdot D$ und $D \cdot C$.

Hörsaalübung – Ergebnis

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 10 & 14 \end{bmatrix} \\ B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 18 \end{bmatrix} \end{array}\right) \text{nicht gleich!}$$

Folgerung

Matrixmultiplikation ist **nicht kommutativ.**

Matrixrechnung

Matrixmultiplikation – Bemerkungen

Bemerkung 1:

Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt:

$$A \cdot E_n = A = E_n \cdot A.$$

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Bemerkung 2 :

Die Menge der $n \times n$ - Matrizen bildet einen **Ring**, d.h.

1) $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit der Addition ist eine **kommutative Gruppe** (vgl. Kapitel 2).
2) $(\mathbb{R}^{n \times n}, \cdot, E_n)$ ist ein **Monoid.**
3) Es gelten die **Distributivgesetze**, d.h. für alle $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \qquad \text{und}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

Definition:

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Falls $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ derart existiert, dass

$$A \cdot B = E_n$$

gilt, so heißt B **(multiplikative) Inverse** von A.

In diesem Fall heißt A **invertierbar** (invb.) und wir schreiben A^{-1} anstelle von B.

Bemerkung:

Es seien Matrizen A und B in $\mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben und es gelte $A \cdot B = E_n$.

- Dann ist auch $B \cdot A = E_n$.
- Das heißt, jede *Rechtsinverse* von A ist auch eine *Linksinverse* von A.
- Es ist B die einzige Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$, welche die Gleichungen $A \cdot B = E_n$ und $B \cdot A = E_n$ erfüllt.
- Das heißt, eine quadratische Matrix A hat **entweder genau eine** Inverse **oder keine** Inverse.

Multiplikative Inverse
Einführung

Beispiele:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ ist invertierbar, denn } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ist nicht invertierbar,}$$

$$\text{denn } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplikative Inverse

Prüfung der Invertierbarkeit / Bestimmung der Inversen

Verfahren zur Prüfung der Invertierbarkeit und ggf. Bestimmung der Inversen

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, für welche die Inverse bestimmt werden soll, sofern diese existiert.

Vorgehen:

Bilde $[A \mid E_n]$ und starte den Gauß-Algorithmus.

Möglichkeit 1: Irgendwann taucht eine Nullzeile links des Striches auf
$\rightarrow$ ABBRUCH
$\rightarrow$ ***A* ist nicht invertierbar**

Möglichkeit 2: Ansonsten in ZSF überführen.
$\rightarrow [E_n \mid B]$
$\rightarrow$ Dann gilt $B = A^{-1}$

Multiplikative Inverse

Bestimmung der Inversen, Beispiel

Hörsaalübung

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 14 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \to [A \,|\, E_n] = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 14 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$z_1 \leftrightarrow z_2 : \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 14 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$(-3)z_1 + z_2 \to z_2 : \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$z_2 \cdot (-1) \to z_2 : \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$(-5)\, z_2 + z_1 \to z_1 : \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -14 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \to B = \begin{bmatrix} 5 & -14 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

Probe:

$$(A \cdot B) = \begin{bmatrix} 3 & 14 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -14 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(B \cdot A) = \begin{bmatrix} 5 & -14 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 14 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplikative Inverse

Spezialfall: 2×2-Matrizen

Satz über Invertierbarkeit und Inverse von 2×2-Matrizen

Es sei A eine 2×2-Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

1. Dann ist A genau dann invertierbar, wenn $a\,d - b\,c \neq 0$ gilt.
2. Falls A invertierbar ist, so gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{a\,d - b\,c} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Beispiel

Für $A = \begin{bmatrix} 3 & 14 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ gilt $A^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 5 - 1 \cdot 14} \begin{bmatrix} 5 & -14 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -14 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, vgl. Folie 18.

Transposition von Matrizen

Definition:

Für $A \in \mathbb{R}^{z \times s}$ ist die **Transponierte** A^T von A gegeben durch

$$\left(A^T\right)_{ij} = A_{ji}, \quad 1 \leq i \leq z\,, \; 1 \leq j \leq s\,.$$

D. h. man erhält die Transponierte aus einer Matrix A, indem man Zeilen und Spalten vertauscht.

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 14 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 14 & 5 \end{bmatrix}$$

Orthogonale Matrizen

Definition:

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **orthogonal**, wenn für die Spaltenvektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ der Matrix A die Beziehung

$$v_i \cdot v_j = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

gilt.
Das bedeutet, dass **jeder der Spaltenvektoren die Länge** 1 hat und dass **je zwei voneinander verschiedene Spaltenvektoren aufeinander senkrecht** stehen. Man sagt in diesem Fall, dass die Spaltenvektoren der Matrix A ein **Orthonormalsystem** bilden.

Orthogonale Matrizen

Satz:

Die Inverse einer orthogonalen Matrix ist gleich ihrer Transponierten, d.h. **für eine orthogonale** Matrix A gilt $A^{-1} = A^T$.

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad \rightsquigarrow A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\left(A \cdot A^T\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow A^T = A^{-1}.$$

Matrixinversion

Nutzung der Inversen der Koeffizintenmatrix zur Lösung eines LGS

Anwendung – Hörsaalübung

Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4\,x_1 + 2\,x_2 &= 5 \\ 3\,x_1 - 1\,x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Die Koeffizientenmatrix $A = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ dieses LGS ist nach Folie 19 invertierbar, denn $4 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 = -10 \neq 0$.

Lösungsstrategie

Wir schreiben das LGS in Matrix-Vektor-Form $A \cdot x = b$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nach Bestimmung der Inversen A^{-1} von A ergibt sich die Lösung des LGS wie folgt:

$$x = A^{-1} \cdot b.$$

Matrixinversion

Nutzung der Inversen der Koeffizintenmatrix zur Lösung eines LGS

Hörsaalübung – Lösung

Nach Folie 19 ist die Inverse A^{-1} von $A = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ gegeben durch den Ausdruck

$$A^{-1} = \frac{1}{4 \cdot (-1) - 3 \cdot 2} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{(-10)} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{4}{10} \end{bmatrix}$$

Wir multiplizieren die Matrix A^{-1} (von links) mit beiden Seiten der Gleichung $\left[\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{smallmatrix}\right] \cdot \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{4}{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{4}{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{4}{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{4}{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{10} \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

Führen Sie eine Probe durch!

Matrixinversion

Nutzung der Inversen der Koeffizintenmatrix zur Lösung eines LGS

Beobachtung

Falls die Koeffizientenmatrix $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ eines Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

invertierbar ist, so hat das System **genau eine Lösung**, die gegeben ist durch die Formel

$$x = A^{-1} \cdot b.$$

Bemerkung

Die obige Beobachtung trifft für jede beliebige Wahl der rechten Seite $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ zu.

Anders gesagt: Die Tatsache, **dass** die Lösungsmenge des Gleichungssystem bei invertierbarer Koeffizientenmatrix **genau ein Element** enthält, ist unabhängig davon, welcher Vektor b auf der rechten Seite steht. Aber natürlich **ändert sich** der Lösungsvektor **je nachdem, welche** rechte Seite b vorliegt, dies sieht man ja an der Lösungsformel $x = A^{-1} \cdot b$.

Matrixinversion

Nutzung der Inversen der Koeffizintenmatrix zur Lösung eines LGS

Verallgemeinerung

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Falls A invertierbar ist, hat das Gleichungssystem $[\, A \mid b \,]$ **genau eine** Lösung, und diese Lösung ist gegeben durch die Formel

$$x = A^{-1} \cdot b.$$

Beweis

Wenn x eine Lösung der Gleichung

$$A \cdot x = b$$

ist, so folgt nacheinander

$$\begin{aligned}
& A^{-1} \cdot (A \cdot x) = b \\
\rightsquigarrow \quad & A^{-1} \cdot (A \cdot x) = A^{-1} \cdot b \\
\rightsquigarrow \quad & \left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot x = A^{-1} \cdot b \\
\rightsquigarrow \quad & E_n \cdot x = A^{-1} \cdot b \\
\rightsquigarrow \quad & x = A^{-1} \cdot b
\end{aligned}$$

Wir führen die Probe durch, indem wir den soeben ermittelten Lösungskandidaten $x = A^{-1} \cdot b$ in die ursprüngliche Gleichung $A \cdot x = b$ einsetzen und uns davon überzeugen, dass eine wahre Aussage resultiert:

$$\begin{aligned}
& A \cdot \left(A^{-1} \cdot b\right) = b \\
\rightsquigarrow \quad & \left(A \cdot A^{-1}\right) \cdot b = b \\
\rightsquigarrow \quad & E_n \cdot b = b \\
\rightsquigarrow \quad & b = b \\
\rightsquigarrow \quad & \text{Wahr}
\end{aligned}$$

Matrixinversion

Simultane Bestimmung von LGS-Lösung und Matrix-Inverse

Matrixinversion – Hörsaalübung

- Bestimmen Sie die Inverse der Matrix $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.
- Wenden Sie hierzu geeignete elementare Zeilenumformungen auf die folgende erweiterte Matrix $[A \mid E_3]$ an:

$$[A \mid E_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Wenn Sie gleichzeitig die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -2\,x_1 - 2\,x_2 &= -6 \\ 2\,x_2 - 2\,x_3 &= 6 \end{aligned}$$

bestimmen möchten, wenden Sie das Gauß-Verfahren auf die folgende siebenspaltige Matrix an:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Matrixinversion

Simultane Bestimmung von LGS-Lösung und Matrix-Inverse

Hörsaalübung – Lösung

Anwendung des Gauß-Verfahren auf die siebenspaltige Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

führt auf die Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{6} & -\frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \end{array}\right]$$

Matrixinversion

Simultane Bestimmung von LGS-Lösung und Matrix-Inverse

Hörsaalübung – Interpretation der Lösung:

Wir interpretieren unser Resultat

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{6} & -\frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \end{array}\right]$$

wie folgt:

Die Lösung des LGS

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -2\,x_1 - 2\,x_2 &= -6 \\ 2\,x_2 - 2\,x_3 &= 6 \end{aligned}$$

ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

.

Die multiplikative Inverse der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

ist die Matrix

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{6} & -\frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Hörsaalübung – Probe (Konsistenzprüfung)

Zur Probe[1] vergleichen wir den Wert des Ausdrucks

$$A^{-1} \cdot b$$

mit der soeben ermittelten Lösung $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot b &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \checkmark \end{aligned}$$

[1] Siehe Folie 26.