Mathematik in Medien und Informatik

Lineare und affine Abbildungen (2D-Transformationen) 9

Prof. Dr. Thomas Schneider

Stand: 17.01.2023

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Inhalt

Lineare Abbildungen

Zur Motivation des Begriffs

Beispiele aus dem Alltag

- *Ich arbeite echt doppelt so viel wie Du, dann möchte ich bitte auch das Doppelte von Dir verdienen!*
- *Wenn aus einer Investition von 5000 Euro nach zwei Jahren ein Guthaben von 5500 und aus einer Einlage von 4000 Euro nach zwei Jahren ein Guthaben von 4400 wird, so wird aus der kombinierten Einlage von 9000 Euro nach zwei Jahren ein Guthaben . . . .*
- *Wenn zwanzig Kinder über entsprechend viele Zugseile und einen Flaschenzug ein Auto mit 1200 kg anheben können, dann schaffen 30 Kinder einen Van mit 1800 kg.*
- *Geteiltes Leid ist halbes Leid.*
- *Geteilte Freude ist doppelte Freude.*

Lineare Abbildungen

Definition

Definition:

Eine Abbildung $f : \underbrace{\mathbb{R}^d}_{\text{Def.-Bereich}} \to \underbrace{\mathbb{R}^w}_{\text{Wertebereich}}$ heißt **linear**, wenn Folgendes gilt:

(i)	$f(u+v) = f(u) + f(v)$	für alle $u, v \in \mathbb{R}^d$;
(ii)	$f(k\,u) = k\,f(u)$	für alle $k \in \mathbb{R}$ und für alle $u \in \mathbb{R}^d$.

9.1. Bemerkung.

Für jede lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^w$ gilt:

$$f(\underset{0\in\mathbb{R}^d}{\underset{\uparrow}{0}}) = \underset{0\in\mathbb{R}^w}{\underset{\uparrow}{0}}$$

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Lineare Abbildungen

Definition

Beispiele:

a) $f\colon\ \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1,\ \ f(x) = 5x$ ist linear, da die Gleichungen

(i) $f(u+v) = 5\,(u+v) = 5\cdot u + 5\cdot v = f(u) + f(v)$

(ii) $f(k\cdot u) = 5\,(k\,u) = k\cdot(5\,u) = k\cdot f(u)$

für beliebige $u, v, k \in \mathbb{R}$ gelten.

b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2$ ist nicht linear, denn:

$$g(u+v) = (u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 \neq u^2 + v^2 = g(u) + g(v)$$

c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = 5\,x + 2$ ist nicht linear, denn:

$$h(0) = 2 \neq 0 \text{ (vgl. Bemerkung 9.1)}$$

Lineare Abbildungen

Beispiele zur Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{z \times s}$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}$.

Betrachte die Abbildung $f_A : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^z$, $f_A(x) = A \cdot x$. mit

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{z1} & \dots & a_{zs} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1s}\, x_s \\ \vdots \\ a_{z1}\, x_1 + a_{z2}\, x_2 + \ldots + a_{zs}\, x_s \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis rechts ist eine Spaltenmatrix aus $\mathbb{R}^z$.

Lemma (Hilfssatz):

Die Abbildung f_A ist **linear**.

Lineare Abbildungen

Definition

Satz

a) Jede lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^z$ lässt sich mit einer **Abbildungsmatrix** $A \in \mathbb{R}^{z \times s}$ in der Form $f(x) = A \cdot x$ realisieren.

b) Es sei A die Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^z$.

In der $\left\{\begin{matrix} \text{ersten} \\ \text{zweiten} \\ \text{k-ten} \end{matrix}\right\}$ Spalte von A steht $\left\{\begin{matrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_k) \end{matrix}\right\}$,

d. h. das Bild des $\left\{\begin{matrix} \text{ersten} \\ \text{zweiten} \\ \text{k-ten} \end{matrix}\right\}$ (Standard-)Basisvektors.

Lineare Abbildungen
Definition

Bemerkung:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{k-te Stelle}, e_s = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildungen
Notation

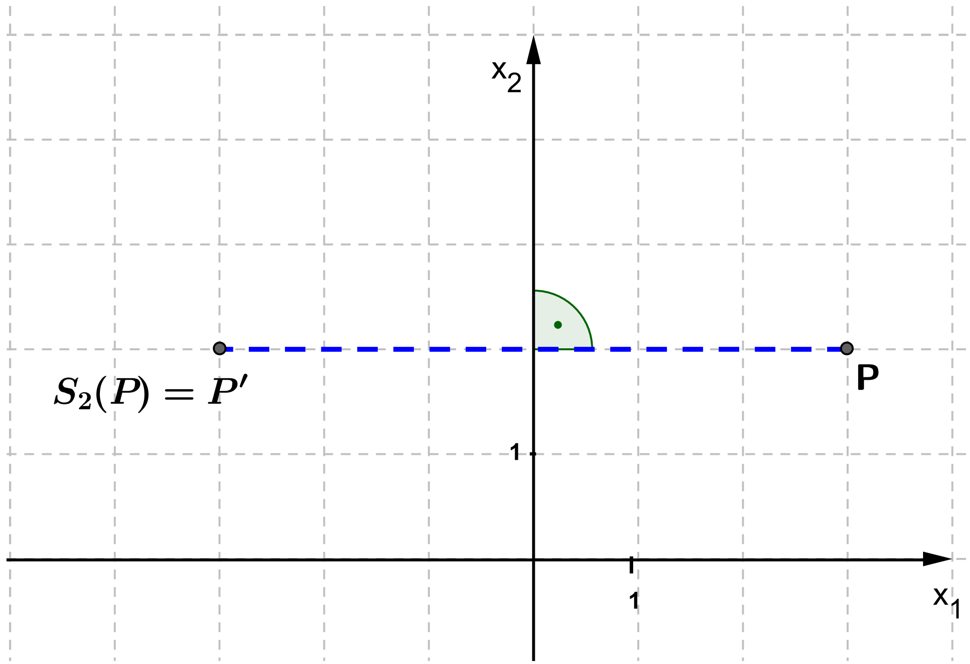
Vereinbarung

Wir vereinbaren, die folgenden Bezeichungsweisen für die Abbildungsmatrix einer gegebenen linearen Abbildung f:

- $[\,f\,]$
- A_f
- A

Die letztgenannte Bezeichnungsweise bietet sich an, wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind und / oder der Name der linearen Abbildung f nicht explizit erwähnt zu werden braucht.

a) Spiegelung S_2 an der x_2-Achse in der Ebene.

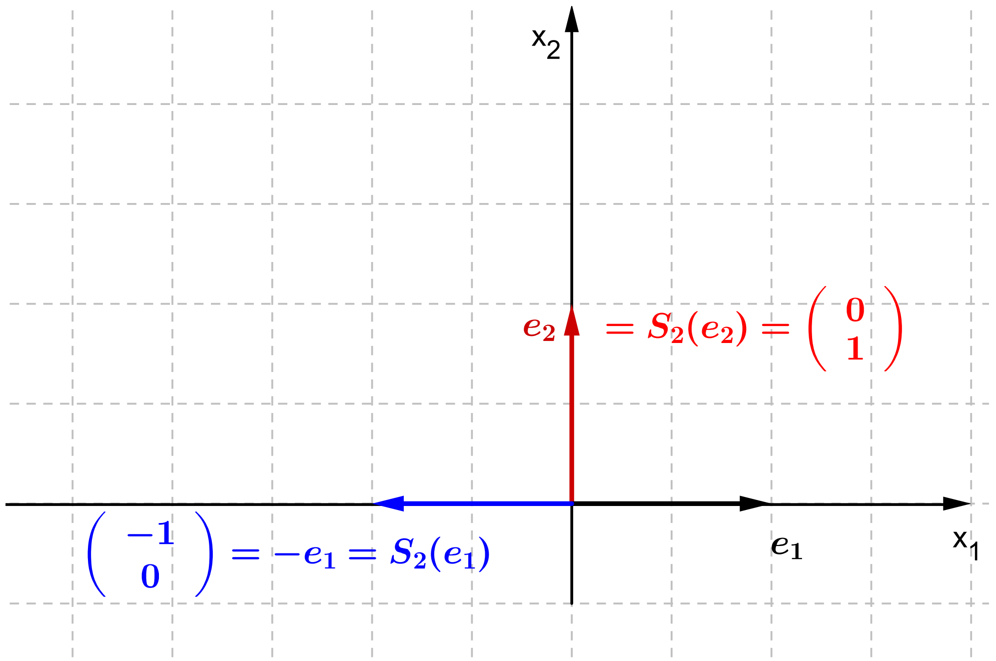


$S_2(P)$: Bild des Punktes P unter der Abbildung S_2.

S_2 ist eine lineare Abbildung. Gesucht ist die Abbildungsmatrix $[\,S_2\,]$ für S_2.

Herleitung:

Betrachte $S_2\,(e_1)$ sowie $S_2\,(e_2)$.



$\rightsquigarrow$ Abbildungsmatrix

$$[\,S_2\,] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Spiegelungen in der Ebene

Spiegelung S_2 an der x_2-Achse

<u>Probe:</u>

Wird der Punkte $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ an der x_2-Achse gespiegelt, so muss sich

$$\boxed{S_2(P) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

ergeben (siehe Bild auf Folie 8).

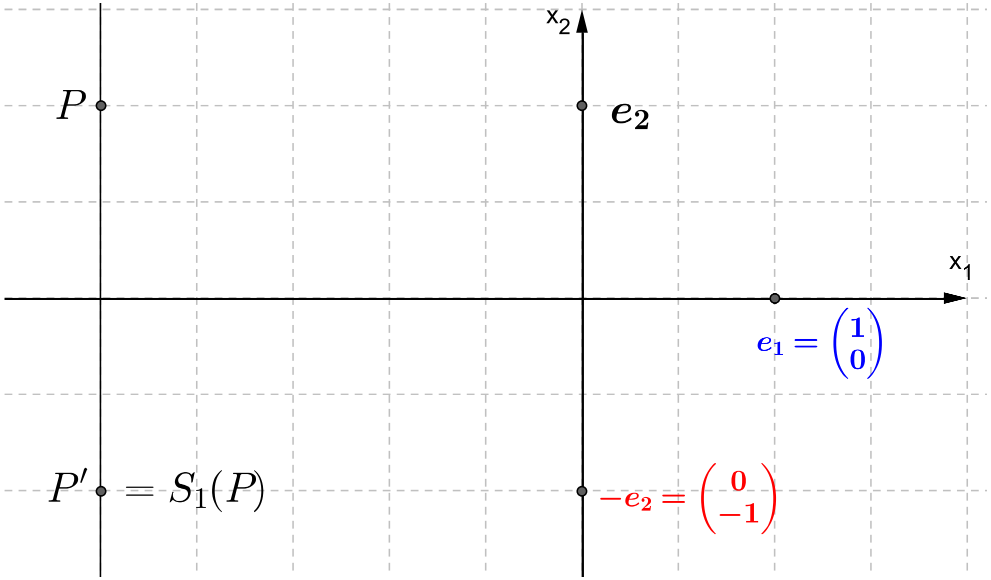
In der Tat liefert die Multiplikation mit der gefundenen Matrix:

$$[\,S_2\,] \cdot P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = S_2(P)$$

Spiegelung in der Ebene

Spiegelung S_1 an der x_1-Achse

b) Spiegelung S_1 an der x_1-Achse in der Ebene.



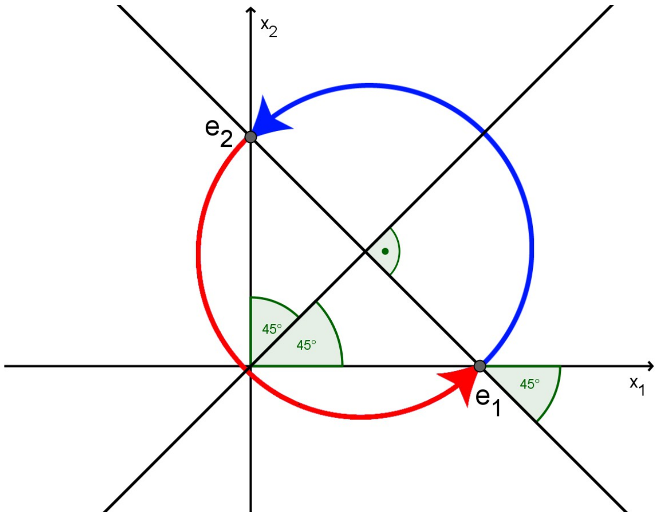
Betrachte $S_1(e_1)$ und $S_1(e_2)$.

$$S_1(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_1(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Abbildungsmatrix von S_1: $[\,S_1\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

c) Spiegelung S_w an der 1. Winkelhalbierenden (d. h. an der durch die Gleichung $x_2 = x_1$ bestimmten Geraden).



$$e_2 = S_w\left(e_1\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = S_w\left(e_2\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Abbildungsmatrix für S_w:

$$\left[\, S_w \,\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bemerkung:

$$S_w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

d) Spiegelung S_u an einer beliebigen Ursprungsgeraden u.

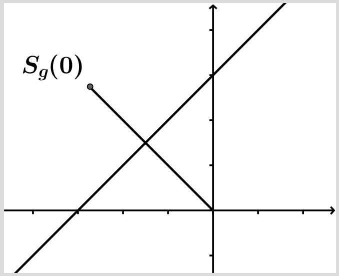
$\rightsquigarrow$ später

e) Spiegelung S_g an einer beliebigen Geraden.

$\rightsquigarrow$ noch später

Bemerkung:

Da $S_g(O) \neq O$, für $O \notin g$ gilt, ist S_g im Falle e) keine lineare Abbildung.



Drehungen in der Ebene

Notation und Linearität

Feststellung und Bezeichnungsweise

Jede Drehung in der Ebene lässt genau einen Punkt fest, diesen nennen wir das **Drehzentrum**. Wir notieren wie folgt:

$D_{Z,\alpha}$: Drehung um das Drehzentrum Z mit Drehwinkel α.

$D_{O,\alpha}$: Drehung um den Ursprung O mit Drehwinkel α.

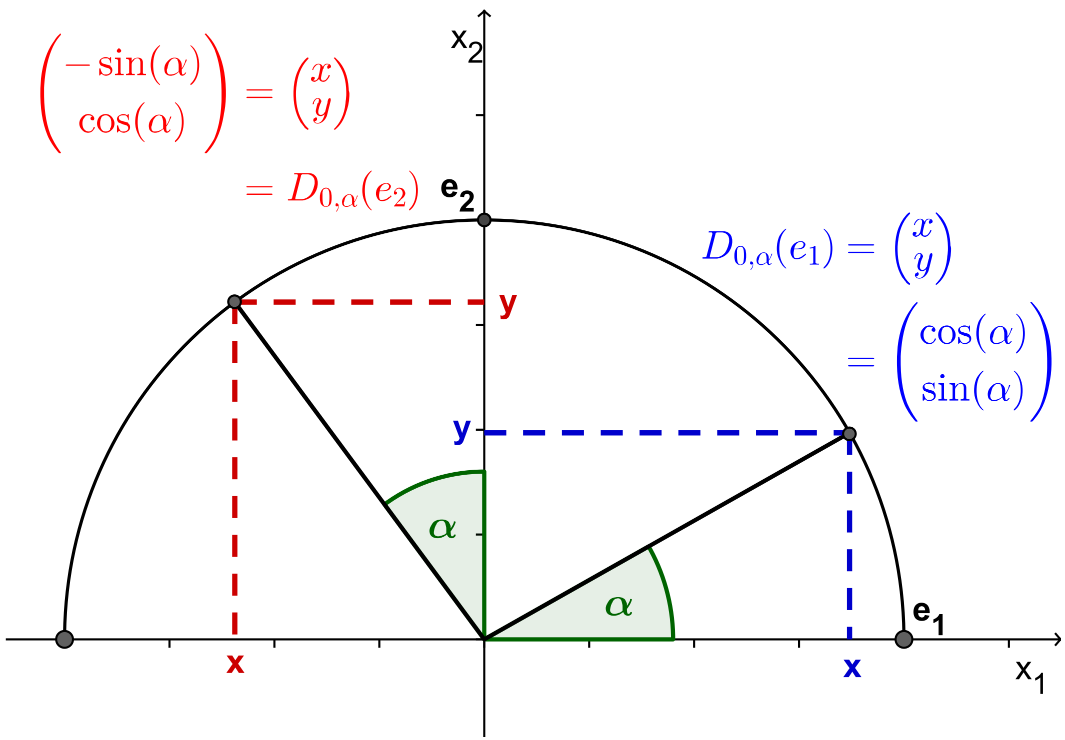
Bemerkungen:

- Für jeden beliebigen Drehwinkel α ist $D_{O,\alpha}$ eine **lineare Abbildung**.
- Im Falle $Z \neq O$ ist $D_{Z,\alpha}$ im Allgemeinen **nicht** linear.

Drehung in der Ebene

Abbildungsmatrix

Gesucht wird die Abbildungsmatrix $\left[D_{O,\alpha}\right]$ der Drehung $D_{O,\alpha}$.



$$\cos(\alpha) = \frac{x}{1} = x$$

$$\sin(\alpha) = \frac{y}{1} = y$$

Nach Satz 5 gilt: $\left[D_{O,\alpha}\right] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$.

Drehung in der Ebene
Abbildungsmatrix

Diskussion: Drehmatrizen für einige Winkel

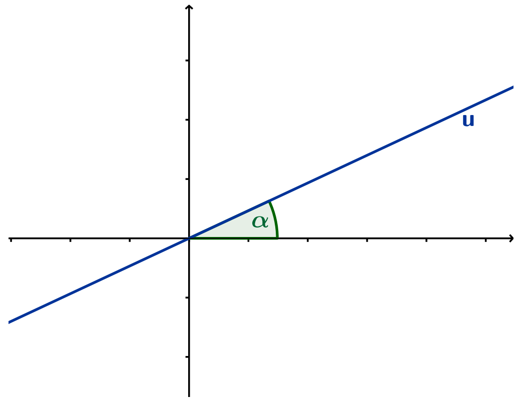
Wir bestimmen die Drehmatrizen $\left[\, D_{O,\alpha} \,\right] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$ für einige konkrete Werte von α:

- $\left[\, D_{O,0^\circ} \,\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\left[\, D_{O,90^\circ} \,\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $\left[\, D_{O,180^\circ} \,\right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- $\left[\, D_{O,45^\circ} \,\right] = \begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$

Erweiterung: Dreischrittverfahren

Spiegelung S_u an einer Ursprungsgeraden

Spiegelung S_u an einer Ursprungsgeraden.



Vorgehensweise:

Zerlegung von S_u nach dem „Dreischrittverfahren“:

1) Drehung $D_{O,-\alpha}$ (blaue Gerade wird auf die x_1-Achse abgebildet.)
2) Spiegelung S_1 an der x_1-Achse
3) Drehung $D_{O,\alpha}$ (bringt blaue Gerade in die Ausgangslage)

Es gilt: $S_u = D_{O,\alpha} \circ S_1 \circ D_{O,-\alpha}$

$\circ$: Symbol für Hintereinanderausführung von Abbildungen.

Wir erhalten die Abbildungsmatrix $[\,S_u\,]$ von $S_u = D_{O,\,\alpha} \circ S_1 \circ D_{O,\,-\alpha}$ durch Matrixmultiplikation:

$$[\,S_u\,] = \left[\,D_{O,\,\alpha}\right] \cdot [\,S_1\,] \cdot \left[\,D_{O,\,-\alpha}\right]$$

Begründung

Für jeden Punkt x mit Koordinatenvektor (x) gilt:

$$\left(\,D_{O,\,-\alpha}(x)\,\right) = \left[\,D_{O,\,-\alpha}\right] \cdot (x),$$

$$\rightsquigarrow \quad \Big(\big(S_1 \circ D_{O,\,-\alpha}\big)(x)\Big) = \Big(S_1\big(D_{O,\,-\alpha}(x)\big)\Big) = [\,S_1\,] \cdot \big(\left[\,D_{O,\,-\alpha}\right] \cdot (x)\big) = \big([\,S_1\,] \cdot \left[\,D_{O,-\alpha}\right]\big) \cdot (x)$$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \quad \Big(\big(D_{O,\,\alpha} \circ S_1 \circ D_{O,\,-\alpha}\big)(x)\Big) &= \Big(D_{O,\,\alpha}\big(S_1\big(D_{O,\,-\alpha}(x)\big)\big)\Big) \\
&= \left[\,D_{O,\,\alpha}\right] \Big(\big([\,S_1\,] \cdot \left[\,D_{O,-\alpha}\right]\big) \cdot (x)\Big) = \Big(\left[\,D_{O,\,\alpha}\right] \cdot \big([\,S_1\,] \cdot \left[\,D_{O,-\alpha}\right]\big)\Big) \cdot (x) \\
&= \Big(\left[\,D_{O,\,\alpha}\right] \cdot [\,S_1\,] \cdot \left[\,D_{O,-\alpha}\right]\Big) \cdot (x).
\end{aligned}$$

Erweiterung: Dreischrittverfahren

Spiegelung S_u an einer Ursprungsgeraden

Das Matrixprodukt $[\,S_u\,] = \left[\,D_{O,\alpha}\,\right] \cdot [\,S_1\,] \cdot \left[\,D_{O,-\alpha}\,\right]$ wird sukzessive ausgerechnet:

$$[\,S_u\,] = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

wegen $\boxed{\begin{array}{l} \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \\ \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \end{array}}$

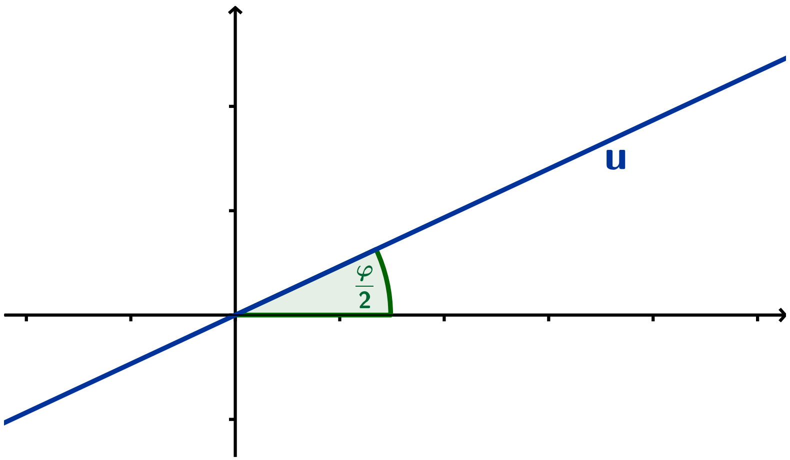
$$= \begin{bmatrix} (\cos(\alpha))^2 - (\sin(\alpha))^2 & 2\,\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ 2\,\cos(\alpha)\sin(\alpha) & (\sin(\alpha))^2 - (\cos(\alpha))^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(2\,\alpha) & \sin(2\,\alpha) \\ \sin(2\,\alpha) & -\cos(2\,\alpha) \end{bmatrix}$$

mit den Additionstheoremen.

Erweiterung: Dreischrittverfahren

Spiegelung S_u an einer Ursprungsgeraden



Für $\frac{\varphi}{2} = \alpha \rightsquigarrow \varphi = 2\,\alpha$

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

Vergleiche Drehmatrix: $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$

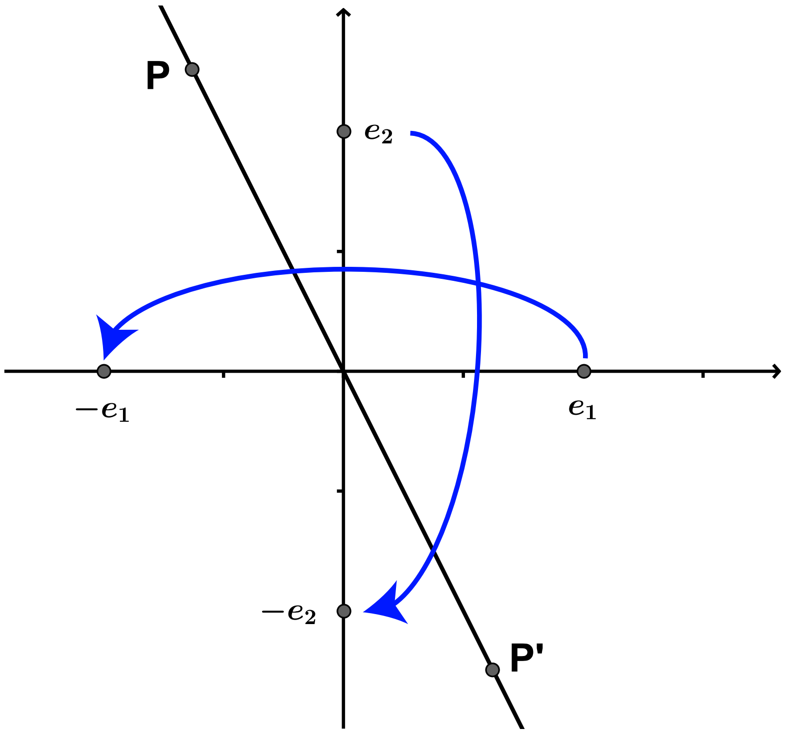
Erweiterung: Dreischrittverfahren

Spiegelung S_u an einer Ursprungsgeraden

Diskussion: Matrizen von Drehungen und Spiegelungen

- Jede Drehmatrix $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$ ist orthogonal
- Begründung: ...
- Die Inverse von $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$ ist somit $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$, und wir haben vorhin gesehen, dass
$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = [\, D_{O\,-\alpha} \,]$$
gilt.
- Dies ist plausibel, denn um die Drehung $D_{O,\,\alpha}$ rückgängig zu machen, benötigt man die Drehung $D_{O,\,(-\alpha)}$ mit Drehwinkel $-\alpha$.
- Jede Spiegelungsmatrix $\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{bmatrix}$ ist orthogonal.
- Begründung: ...
- Die Inverse von $\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{bmatrix}$ ist somit ... . $\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{bmatrix}$.
- Dies ist plausibel, denn um eine (Achsen-)Spiegelung rückgängig zu machen, muss man just jene Spiegelung noch einmal anwenden.

Punktspiegelung am Ursprung

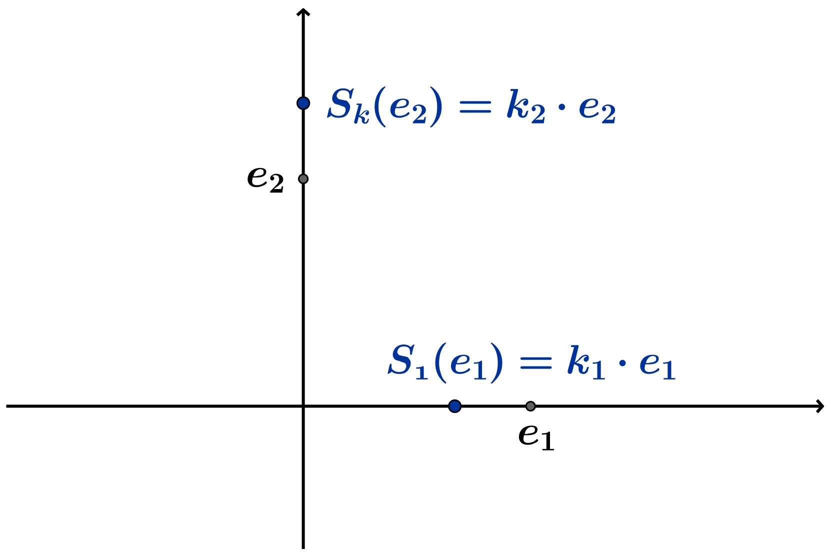


Abbildungsmatrix:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Skalierungen
entlang der Koordinatenachsen

Skalieren entlang der Koordinatenachsen.



Abbildungsmatrix:

$$A = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix},$$

$k_1 > 0, k_2 > 0.$

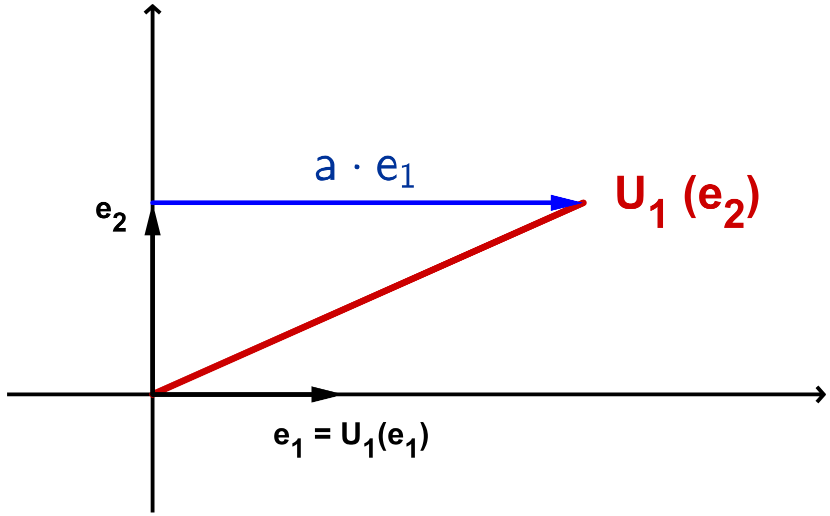
9.2. Bemerkung.

Im Falle $k_1 = k_2$ spricht man von einer **gleichmäßigen Skalierung**.

Im Fall $k_1 \neq k_2$ liegt eine **ungleichmäßige Skalierung** vor.

Scherungen

a) Scherung U_1 mit der x_1-Achse als Scherachse (Fixpunktgerade):



Abbildungsmatrix:

$$[\,U_1\,] = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Scherung U_2 mit der x_2-Achse als Scherachse:

Abbildungsmatrix: $[\,U_2\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$.

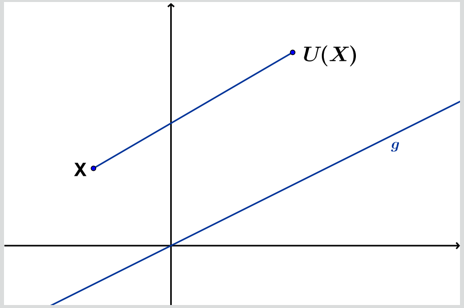
Scherungen

Definition:

Eine lineare Abbildung $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt **Scherung**, wenn gilt:

(i) Es gibt eine Ursprungsgerade g, deren Punkte von U nicht bewegt werden (d. h. g ist Fixpunktgerade, man nennt g die Scherachse).

(ii) Für alle Punkte $x \in \mathbb{R}^2$ gilt $U(x) - x \in g$.



Bemerkungen:

Scherungen

- verwandeln Rechtecke in flächengleiche Parallelogramme.
- treten zum Beispiel bei Parallelprojektionen auf.

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Zusammenfassung: Lineare Transformationen

Wir haben nun einen Katalog von linearen Transformationen kennengelernt, welche (auch in Kombination) auf Objektve der Ebene angewendet werden können. Wir stellen die bislang behandelten Abbildungsmatrizen noch einmal zusammen:

Spiegelung:

an x_1-Achse: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, an x_2-Achse: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, an 1. Winkelh.: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Punktspiegelung am Ursprung: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Drehung um Ursprung mit Winkel α: $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$

Skalierung entlang der Koord.-Achsen: $\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$ $k_1, k_2 > 0$

Scherung

mit x_1-Achse als Scherachse: $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

mit x_2-Achse als Scherachse: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$

Affine Transformationen
Einführung

Wir wenden uns nun den sogenannten **affinen Transformationen** zu.

Affine Transformationen

- Die affinen Transformationen der Ebene sind genau diejenigen umkehrbaren Abbildungen der Ebene, welche **Geraden auf Geraden** und **parallele Geraden auf parallele Geraden** abbilden.
- Dies ist insbesondere für umkehrbare **lineare Abbildungen** der Ebene erfüllt, somit ist jede lineare Abbildungen eine affine Abbildung.
- Auch **Verschiebungen** gehören zur Kategorie der affinen Transformationen.
- Im Gegensatz zum Abbildungsverhalten linearer Transformationen braucht der Ursprung bei affinen Transformationen **nicht** fest zu bleiben.

Affine Transformationen

Verschiebungen / Translationen

Notationsvereinbarung: Zur Vereinfachung der Notation lassen wir in diesem Kapitel die Vektorpfeile über den Vektorsymbolen weg.

Definition:

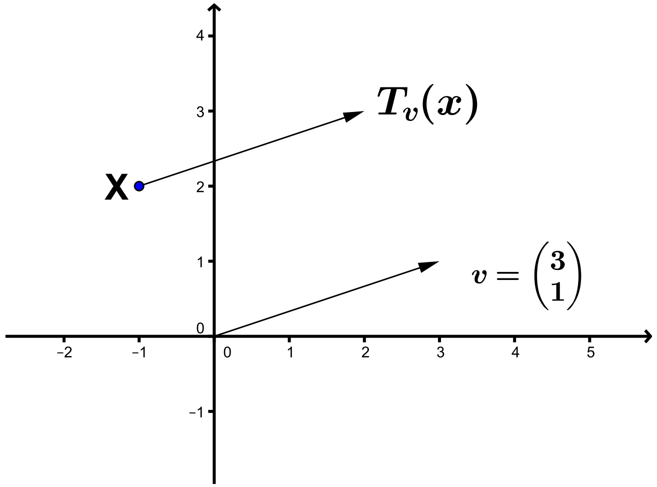
Es sei $v \in \mathbb{R}^n$ (ein Vektor).

Die Abbildung $T_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ T_v(x) = x + v$ heißt **Verschiebung** oder **Translation** mit Verschiebevektor v.

Beispiel:

$$T_{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}} = T_{(3,1)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+3\\x_2+1\end{pmatrix}$$



Affine Transformationen

Definition

Definition:

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit invertierbarer Abbildungsmatrix A, und es sei $v \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{lll} \text{Dann heißt:} & (\, f \mid T_v \,) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, & x \mapsto f(x) + v \\ \text{bzw.} & (\, A \mid v \,) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, & x \mapsto A\,x + v \end{array}$$

affine Transformation mit **linearem Anteil** f (bzw. A) und **Verschiebungsanteil** T_v (bzw. **Verschiebevektor** v).

Affine Transformationen

Beispiel

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(\, A \mid v \,) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 2 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkungen:

Affine Transformationen umfassen lineare Transformationen und Translationen.

- Für $v = 0$ ergibt sich eine **rein lineare** Transformation $(\, f \mid T_0 \,)$.
- Falls $f = \mathrm{id}$, d.h. $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, so ergibt sich eine **reine Translation** $(\, \mathrm{id} \mid T_v \,)$.
- Der Fall $f = \mathrm{id}$ tritt genau dann ein, wenn die Abbildungsmatrix von f gleich der Einheitsmatrix ist, wenn also $A = E_n$ gilt.

Affine Transformationen

Beispiel: Spiegelung an Geraden

Zum Vorgehen

Wir untersuchen nun Situationen, in denen affine Transformationen „ganz von selbst“ auftreten.

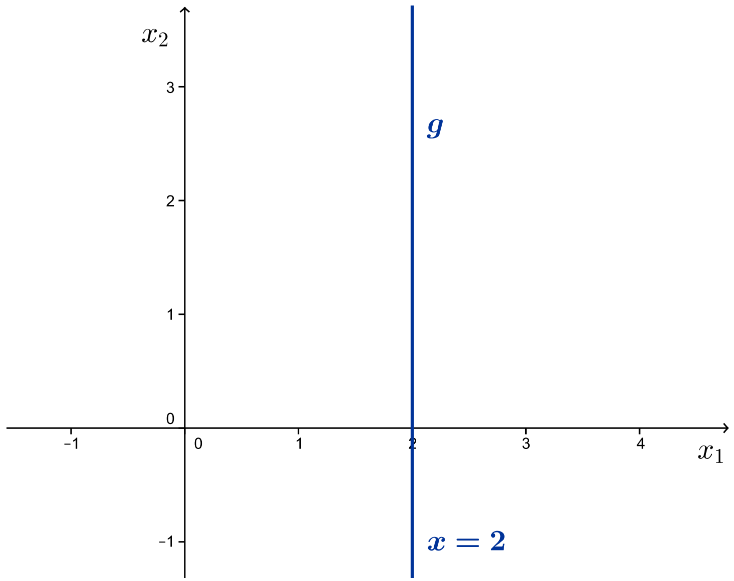
Auf Folie 13 wurde z.B. das Problem aufgeworfen, wie eine Achsenspiegelung an einer beliebigen Geraden zu beschreiben sei.

Wir zeigen zunächst für einen Spezialfall, dass sich hierbei eine affine Transformation ergibt.

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Affine Transformationen

Beispiel: Spiegelung an Geraden



Spezialfall des Problems aus Folie 13

Wir zeigen, dass die Spiegelung S_g an der Geraden $g = \{(2, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$ eine affine Transformation ergibt.

Vorgehensweise:

Zerlegung von S_g nach dem Dreischrittverfahren:

$S_g = T_{(2,0)} \circ S_2 \circ T_{(-2,0)}$

Affine Transformationen

Beispiel: Spiegelung an Geraden

Vorgehensweise:

Zerlegung von S_g nach dem Dreischrittverfahren:

$S_g = T_{(2,0)} \circ S_2 \circ T_{(-2,0)}$

Durchführung:

Wir beschreiben die Wirkung $S_g = T_{(2,0)} \circ S_2 \circ T_{(-2,0)}$ auf einen Punkt $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xmapsto{T_{(-2,0)}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow S_g \qquad\qquad\qquad\qquad \Big\downarrow S_2$$

$$\begin{pmatrix} -x_1 + 2 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{T_{(2,0)}}{\longleftarrow\!\shortmid} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x_1 + 4 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Affine Transformationen

Beispiel: Spiegelung an Geraden

Auswertung des Ergebnisses:

- Wir haben gesehen, dass $S_g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 4 \\ x_2 \end{pmatrix}$ herausgekommen ist.
- Wir suchen nun eine Matrix A und einen Vektor v so, dass $S_g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + v$ gilt.
- Ersichtlich ist $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Damit $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ herauskommt, muss $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ gelten.

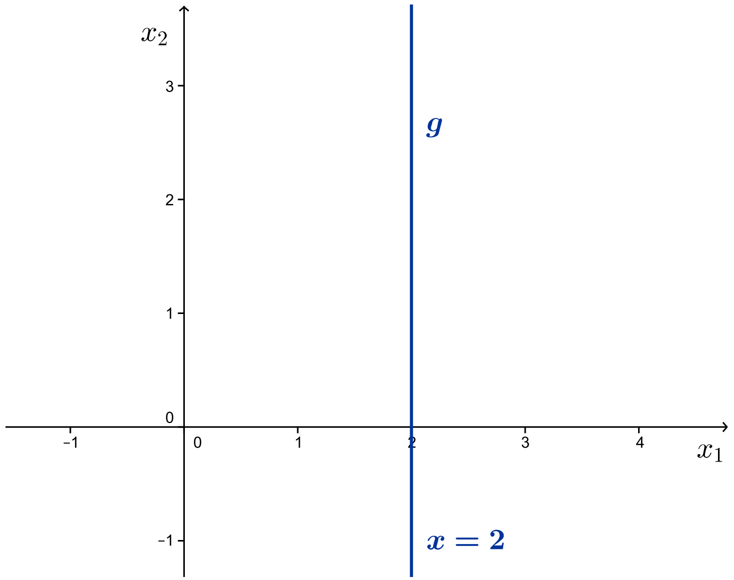
Affine Transformationen

Beispiel: Spiegelung an Geraden

Auswertung des Ergebnisses:

Es ist also $S_g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 4 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\rightsquigarrow$ S_g ist affine Transformation mit lin. Anteil S_2 und Verschiebungsanteil $T_{(4,0)}$, d.h. $S_g = \big(S_2 \mid T_{(4,0)} \big)$.



Probe

$$S_g \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark \text{ Fixpunkt}$$

$$S_g \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+4 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix} \checkmark \text{ Fixpunkt}$$

$$S_g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

Bemerkung:

Die vollständige Lösung des auf Folie 13 aufgeworfenen Problems der Beschreibung einer Achsenspiegelung an einer beliebigen Geraden erfolgt in den Übungen.

Affine Transformationen

Eigenschaften

Bemerkungen:

- Punkte, die auf einer Geraden liegen, heißen **kollinear**.
- Eine Menge von Punkte, die **nicht** alle auf ein und derselben Geraden liegen, heißt **nicht kollinear**.
- Sind drei nicht kollineare Punkte P, Q, R und ihre (nicht kollinearen) Bildpunkte P', Q' , R' gegegen, so ist durch die Festlegung

  $$(\, f \mid T_v \,)(P) = P' \text{ und } (\, f \mid T_v \,)(Q) = Q' \text{ und } (\, f \mid T_v \,)(R) = R'$$

  eine affine Transformation $(\, f \mid T_v \,)$ **eindeutig bestimmt**.
- Konsequenz: Zur Überprüfung der Abbildungsvorschrift einer affinen Transformation („Probe“) reicht es somit aus, deren Wirkung auf drei nicht kollineare Punkte zu untersuchungen bzw. zu verifizieren (vgl. Folie 35).

Affine Transformationen

Eigenschaften

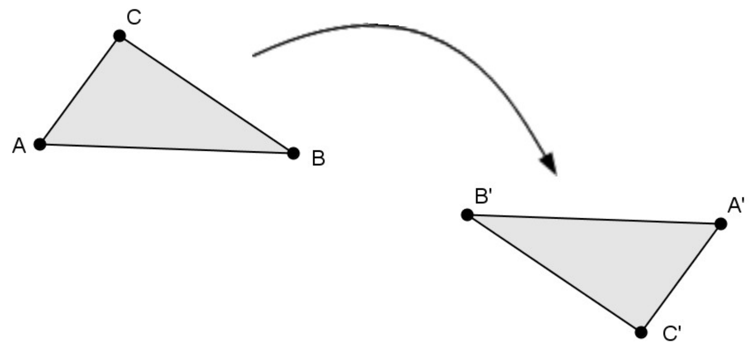
Satz:

Jede affine Transformation $(\, f \mid T_v \,)$ ist

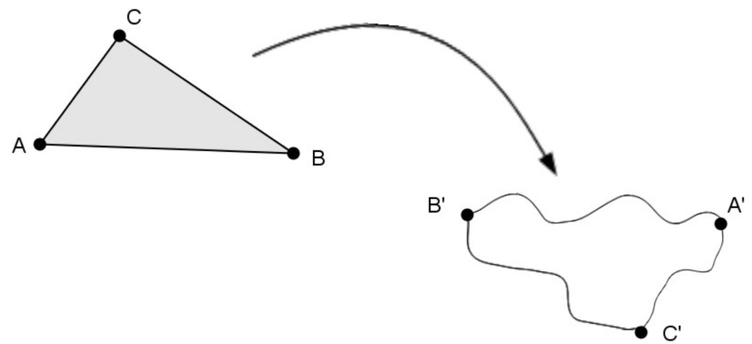
- geradentreu
- parallelentreu
- teilverhältnistreu

Affine Transformationen
Anwendung

Abbildung von Dreiecken in der Computergrafik:



Es genügt die Bilder der Eckpunkte zu berechnen und diese dann neu zu verbinden. Dagegegen muss bei einer beliebigen Abbildung jeder Bildpunkt einzeln berechnet werden:



Affine Transformationen der Ebene

Darstellung in homogenen Koordinaten

Einführung

- Wir haben affine Transformationen bislang in der Form
$$x \mapsto A \cdot x + v$$
kennengelernt. Hierbei wird eine Vektoraddition im Anschluss an eine Matrix-Vektor-Multiplikation ausgeführt.
- Es ist jedoch etwa mit Blick auf Anwendungen in der Computergrafik bzw. auf die Fähigkeiten von Computergrafikkarten günstig, Transformationen durch **reine** Matrix-Vektor-Multiplikationen zu realisieren.
- Dies ist im Falle affiner Tranformationen möglich, wenn man in Kauf nimmt, dass alle Koordinatenobjekte an Länge zunehmen.
- In der Mathematik spricht man davon, dass die Ebene oder der Raum **projektiv erweitert** wird, die Punkte der Ebene werden dann durch Objekte in $\mathbb{R}^3$ beschrieben.
- In diesem Kontext werden die Punkte der Ebene (bzw. die Objekte, welche in der projektiven Erweiterung den Punkten der Ebene entsprechen) mit sogenannten **homogenen Koordinaten** beschrieben.

Affine Transformationen der Ebene

Darstellung in homogenen Koordinaten

Darstellung von Punkten

Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ der Koordinatenvektor eines Punktes der Ebene. Wir definieren $[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Darstellung affiner Transformationen

Sei $(\,A \mid v\,) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine affine Transformation mit Matrix $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ für den linearen Anteil und Verschiebevektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Wir definieren $[\,A \mid v\,] := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\quad A \quad} & \boxed{v} \\ \boxed{\quad 0 \quad} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Affine Transformationen der Ebene

Darstellung in homogenen Koordinaten

Korrespondenz der Abbildungen

Der Abbildung $x \mapsto (A \mid v)(x) = A \cdot x + v$ für Punkte der Ebene (dargestellt mit gewöhnlichen Koordinaten) entspricht die Abbildung

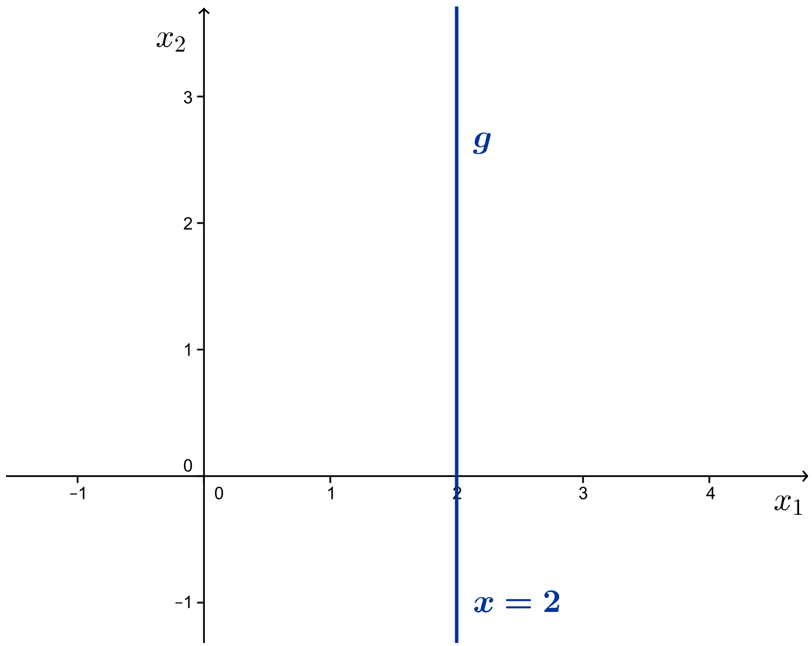
$$[x] \mapsto [A \mid v] \cdot [x] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + v_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + v_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Korrespondenz der Ergebnisvektoren

Für den Ergebnisvektor $[y] = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + v_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + v_2 \\ 1 \end{bmatrix}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = A\,x + v.$$

Wir betrachten noch einmal die Spiegelung S_g an der Geraden g mit der Gleichung $x_1 = 2$.



Zerlegung von S_g nach dem Dreischrittverfahren: $S_g \;=\; T_{(2,0)} \circ S_2 \circ T_{(-2,0)}$

Affine Transformationen in homogenen Koordinaten

Beispiel

Dreischrittverfahrens in homogenen Koordinaten:

Wir schreiben alle Abbildungen der Zerlegung $S_g = T_{(2,0)} \circ S_2 \circ T_{(-2,0)}$ in homogenen Koordinaten:

$$\left[T_{(2,0)}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [S_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left[T_{(-2,0)}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} &\left(\left[T_{(2,0)}\right] \cdot [S_2]\right) \cdot \left[T_{(-2,0)}\right] \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Affine Transformationen in homogenen Koordinaten
Beispiel

Auswertung des Ergebnisses

An der Ergebnismatrix $\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix}$ lesen wir ab, dass sich die affine Transformation $\left(\boxed{S_2} \mid \boxed{T_{(4,0)}} \right)$ ergeben hat.

Affine Transformationen

Zusammenfassendes Beispiel

Diskussion: Drehung um ein Drehzentrum, das nicht im Ursprung liegt.

Wir betrachten die Drehung um den Punkt $Z = (-2, 1)$ mit Drehwinkel 180°.

- Zerlegen Sie die Abbildung $D_{Z,180^\circ}$ nach dem Dreischrittverfahren.
- Stellen Sie die Abbildungsvorschrift $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \ldots$ für die Abbildung $D_{Z,180^\circ}$ auf.
- Bestimmen Sie den linearen Anteil L und den Verschiebungsanteil T_v der affinen Abbildung $D_{Z,180^\circ}$, finden Sie also die Darstellung $D_{Z,180^\circ} = T_v \circ L$.
- Bestimmen Sie die 3×3-Matrix $\left[D_{Z,180^\circ}\right]$ für die Darstellung von $D_{Z,180^\circ}$ in homogenen Koordinaten.
- Führen Sie eine Probe mit mindestens drei nicht kollinearen Punkten durch, und zwar einmal mit gewöhnlichen Koordinaten und einmal mit homogenen Koordinaten.
- Erklären Sie die Darstellung $D_{Z,180^\circ} = T_v \circ L$ anschaulich bzw. geometrisch.

Affine Transformationen

Zusammenfassendes Beispiel – Alternative Vorgehensweise

Drehung mit Drehzentrum $Z = (-2, 1)$ und Drehwinkel 180°.

Eine Alternative zum Dreischrittverfahren besteht im Aufstellen und Lösen eines LGS:

- Bestimmen Sie für drei nicht kollineare Punkte P_1, P_2, P_3, geometrisch die zugehörigen Bildpunkte

$$P_k' := D_{Z,180^\circ}(P_k), \quad k \in \{1, 2, 3\}.$$

- Verwenden Sie die Koordinaten der Punkt-Bildpunkt-Paare zum Aufstellen von Gleichungen der Form

$$\begin{pmatrix} (P_k')_1 \\ (P_k')_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (P_k)_1 \\ (P_k)_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad k \in \{1, 2, 3\}$$

.

- Es ergeben sich insgesamt 3 Vektorgleichungen bzw. 6 Skalargleichungen mit den Unbekannten a, b, c, d, v_1, v_2.
- Lösen Sie dieses linearer Gleichungssystem mit dem Verfahren nach Gauss-Jordan.
- Vergleichen Sie Ihr Resultat mit den zuvor erzielten Ergebnissen.

Homogene Koordinaten

Projektive Erweiterung der affinen Ebene

Homogene Koordinaten sind mehr als ein Rechentrick

Wir haben zu Punkten mit Ortsvektoren $x = \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$ die erweiterten Vektoren $[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ betrachtet. Zur Illustration der sogenannten *projektiven Erweiterung* der gewöhnlichen affinen Ebene betrachten wir noch einmal zwei Standardprobleme.

Beispiele

(1) Bestimmung der Verbindungsgerade zweier Punkte

(2) Bestimmung des Schnittpunkts zweier Geraden

Homogene Koordinaten

Bestimmung der Verbindungsgerade zweier Punkte

Es seien die Punkte $P = (4, 3)$ und $Q = (1, 2)$ gegeben. Zur Beschreibung der Verbindungsgeraden $g := P \vee Q$ gibt es viele Ansätze:

- Gleichung vom Typ $y = m\,x + b$
- Parametergleichung: $\vec{x}(t) = \vec{p} + t\,\vec{r}$
- Allgemeine Koordinatengleichung: $A\,x_1 + B\,x_2 + C = 0$.

Neuer Ansatz mit projektiver Erweiterung:

Wir

- bilden $[p] = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $[q] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,
- berechnen $[n] := [p] \times [q] = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$,
- verwenden die Komponenten von $[n]$ für die Konstanten in der AKG $A\,x_1 + B\,x_2 + C = 0$ und erhalten die Gleichung

$$1 \cdot x_1 + (-3) \cdot x_2 + 5 = 0.$$

Homogene Koordinaten

Neuer Ansatz mit projektiver Erweiterung

Einsetzen der Koordinaten der Punkte P und Q in die Gleichung

$$1 \cdot x_1 + (-3) \cdot x_2 + 5 = 0$$

ergibt zwei wahre Aussagen:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 + 5 &= 0 \quad \checkmark \\ 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 5 &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Homogene Koordinaten

Projektive Erweiterung der affinen Ebene

Erläuterung

- Die Punkte O, $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ legen eine (Ursprungs-)Ebene E fest.
- Der Vektor $[n] := [p] \times [q]$ ist Normalenvektor der Ebene E.
- Eine HNG für diese Ebene ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \,,$$

- daraus folgt die AKG $1 \cdot x_1 - 3\,x_2 + 5\,x_3 = 0$.
- Alle Punkte der Form $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ liegen in der Ebene

$$E_1 := \left\{ (x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_3 = 1 \right\}.$$

- Die Schnittmenge $\overline{g} = E \cap E_1$, also die Schnittgerade der Ebenen E und E_1 besteht aus all denjenigen Punkten, deren Ortsvektoren die Gleichungen

$$1 \cdot x_1 - 3\,x_2 + 5\,x_3 = 0 \quad \text{und} \quad x_3 = 1$$

erfüllen.
- Es ergibt sich somit die Geradengleichung

$$1 \cdot x_1 - 3\,x_2 + 5 \cdot 1 = 0 \,.$$