Präsenzübungen

Aufgabe P 3. *Eine Gerade in der Ebene*

In einem kartesischen Koordinatensystem seien die Punkte $E = (-2, 1)$ und $F = (2, 4)$ gegeben.

(a) **Zeichnen Sie** die Punkte E und F in ein kartesisches Koordinatensystem ein und skizzieren Sie die Verbindungsgerade g, welche durch die beiden Punkte verläuft.

(b) **Stellen Sie** eine Parametergleichung der Form $\vec{x}(t) = \vec{p} + t\,\vec{r}$ für die Ortsvektoren der Punkte auf der Geraden g auf. Zeichnen Sie die vier Ortsvektoren (und die zugehörigen Punkte auf der Geraden g), die sich ergeben, wenn Sie dem Parameter t (nacheinander) die Werte $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ und $t = -1$ zuweisen.

(c) Liegt der Punkt G mit den Koordinaten $(-6, -2)$ auf der Geraden g? Um diese Frage zu beantworten, müssen Sie klären, ob es eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ derart gibt, dass die Gleichung $\binom{-6}{-2} = \vec{p} + t\,\vec{r}$ erfüllt ist. **Überzeugen Sie** sich ferner davon, dass der Punkt B mit den Koordinaten $(9, 3)$ **nicht** auf der Geraden g liegt.

(d) **Wählen Sie** einen Normalenvektor $\vec{n}$ für die Gerade g. Zeichnen Sie $\vec{n}$ in Ihr Diagramm ein.
*Hinweis: Der Vektor $\vec{n}$ muss senkrecht auf dem Vektor $\vec{r}$ stehen, den Sie in Teilaufgabe **(b)** gefunden haben, die Bedingung hierfür ist, dass $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$ gilt.*

(e) Stellen Sie eine Hesse'sche Normalengleichung (HNG) für die Gerade g auf. Diese ist von der Form $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$, wobei Sie für $\vec{p}$ den Ortsvektor eines beliebigen Punktes auf g wählen können. Prüfen Sie nach, ob die Punkte mit Koordinaten $(-6, -2)$ bzw. $(4, 3)$ die HNG erfüllen.

(f) Aus der Gleichung $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ erhalten Sie durch Ausmultiplizieren der linken Seite eine Allgemeine Koordinatengleichung (AKG) für die Gerade g. Führen Sie dies aus.

(g) **Berechnen Sie** den Abstand des Punktes B mit Koordinaten $(9, 3)$ von der Geraden g.
Eine mögliche Vorgehensweise hierfür ist, dass Sie die Komponente $\vec{u}_\parallel$ des Vektors $\vec{u} = \overrightarrow{FB}$ bestimmen, die parallel (bzw. antiparallel) zu $\vec{n}$ ist: $\vec{u}_\parallel = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\,\vec{n}$. **Machen Sie sich** dies anhand einer Skizze **klar**.
Alternativ hierzu könnten Sie für $\vec{u}$ auch $\overrightarrow{EB}$ oder $\overrightarrow{XB}$ mit einem beliebigen anderen Punkt $X \in g$ wählen.

Für Schnelle sogleich und für alle anderen zuhause:

(h) **Bestimmen Sie** denjenigen Punkt C auf der Verbindungsstrecke zwischen den Punkten $L = (6, 7)$ und $B = (9, 3)$, der den Abstand $d(C, g) = 1$ von der Geraden g besitzt.
Lösung: $C = (6.6,\ 6.2) = (\frac{33}{5}, \frac{31}{5})$.

(i) Können Sie analog hierzu auch den Punkt D auf der Strecke $\overline{LB}$ mit $d(D, g) = 2$ bestimmen?

(j) Stellen Sie sich vor, dass Sie die Bewegung zweier Leuchtpunkte auf Ihrem Bildschirm definieren wollen. Nehmen Sie hierzu an, dass die Länge der beiden Basisvektoren Ihres Koordinatensystems jeweils einem Zentimeter (cm) entspricht und dass die Parameterwerte in Sekunden gemessen werden.
Bestimmen Sie zwei Parametrierungen so, dass sich im Verlauf von 10 Sekunden der erste Leuchtpunkt geradlinig von E nach L bewegt und **gleichzeitig** der zweite Leuchtpunkt von L nach B. Wie groß sind jeweils die Geschwindigkeiten, gemessen in cm je Sekunde?

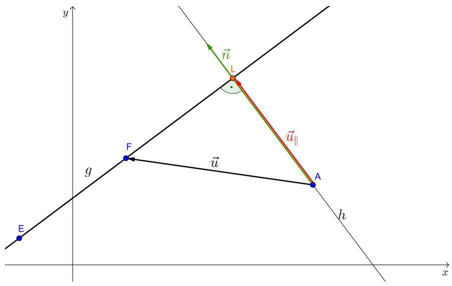
Hausübungen

Aufgabe H 8. *Geraden in der Ebene – Fortsetzung von Aufgabe P 3*

(a) **Bestimmen Sie** den Abstand d des Punktes $A = (7.5, 5)$ von der Geraden g sowie den zugehörigen Lotfußpunkt L. Betrachten Sie hierzu die Abbildung und wählen Sie aus mehreren Optionen eine Berechnungsmöglichkeit aus:

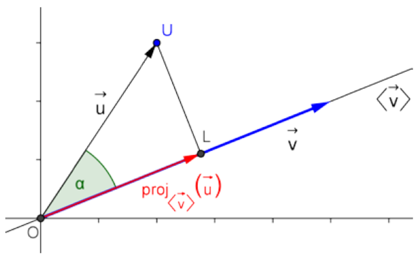
- Bestimmen Sie den Punkt L als Schnittpunkt der Geraden g und der dazu senkrechten Geraden $h = \{A + \tau\,\vec{n} \mid \tau \in \mathbb{R}\}$.
- Berechnen Sie die Komponente $\vec{u}_\parallel$ des Vektors $\vec{u} := \overrightarrow{AF}$ parallel zur Geraden h. Dann ist $\vec{u}_\parallel = \overrightarrow{AL}$ sowie $d = \|\vec{u}_\parallel\|$.

  Hinweis: Es gilt $\vec{u}_\parallel = \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,\vec{n}$, *vgl. Vorlesung.*



Aufgabe H 9. *Orthogonale Projektion*

In der folgenden Abbildung ist die orthogonale Projektion $\text{proj}_{\langle\vec{v}\rangle}(\vec{u})$ eines Vektors $\vec{u} \neq \vec{0}$ auf die von einem Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ erzeugte Gerade $g := \langle\vec{v}\rangle$ veranschaulicht. Anstelle von $\text{proj}_{\langle\vec{v}\rangle}(\vec{u})$ können Sie auch $\vec{u}_{\parallel g}$ schreiben.



(a) Machen Sie sich noch einmal klar, dass $\text{proj}_{\langle\vec{v}\rangle}(\vec{u})$ bzw. $\vec{u}_{\parallel g}$ durch die Beziehung

$$\vec{u}_{\parallel g} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,\vec{v}$$

gegeben ist. Verifizieren Sie hierzu, dass die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{u} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,\vec{v}$ aufeinander senkrecht stehen. *Hinweis: Nutzen Sie die in Aufgabe H 15 angegebenen Rechengesetze für das Skalarprodukt.*

Es sei $g = \langle \vec{v} \rangle$ die vom Vektor $\vec{v} = (2,1)^T$ erzeugte Ursprungsgerade.

(b) Berechnen Sie die orthogonale Projektion des Vektors $\vec{u} = (6,-2)^T$ auf die Gerade $g = \langle \vec{v} \rangle$.

(c) Bestimmen Sie den (orthogonalen) Abstand des Punktes $P = (6,-2)$ von g.

Aufgabe H 10. *Geraden in der Ebene – Bestimmung von Schnittpunkten*

Es sei g die Verbindungsgerade der Punkte $P = (-2,1)$ und $Q = (2,4)$. Es seien ferner Geraden h und f durch **Allgemeine Koordinatengleichungen (AKG)**

$$2\,x_1 \;+\; 2\,x_2 \;-\; 5 \;=\; 0 \qquad (\text{für } h)$$

bzw.

$$-6\,x_1 \;+\; 8\,x_2 \;-\; 12 \;=\; 0 \qquad (\text{für } f)$$

gegeben.

(a) **Zeichnen Sie** die beiden Punkte P und Q sowie die Gerade g.

(b) **Stellen Sie** eine Parametergleichung für die Gerade g **auf**.

(c) **Bestimmen Sie** zwei Punkte, die auf der Geraden h liegen, wie folgt:

- Setzen Sie zunächst $x_1 = 0$ und lösen die AKG $2\,x_1 + 2\,x_2 - 5 = 0$ nach x_2 auf. Geben Sie dem so errechneten Punkt den Namen A.
- Setzen Sie dann $x_1 = 1$ und lösen die AKG $2\,x_1 + 2\,x_2 - 5 = 0$ nach x_2 auf. Bezeichnen Sie den so errechneten Punkt mit B.

(d) **Zeichnen Sie** die Gerade h.

(e) **Bestimmen Sie** den Schnittpunkt der Geraden g und h. Stellen Sie dazu zunächst eine Parametergleichung für die Gerade h auf. Setzen Sie die beiden Parametergleichungen für g und h dann gleich.

Hinweis: Um von der AKG in die Parameterform überzugehen können Sie so vorgehen: Führen Sie zunächst einen Parameter s ein und setzen z.B. $x_1 = s$. Setzen Sie dies in die AKG ein und lösen Sie nach x_2 auf. Sie haben nun eine Ausdruck $\vec{x} = (x_1, x_2)^T = (s, \ldots)^T$ erhalten, der die AKG der Geraden erfüllt. Daraus erhalten Sie ohne Weiteres die Parametergleichung der Geraden.

(f) Eine andere Möglichkeit für die Bestimmung des Schnittpunktes von g und h ist wie folgt: Der Parametergleichung $\vec{x} = \vec{p} + t\,\vec{r}$ der Geraden g entnehmen Sie die beiden Gleichungen für die erste bzw. zweite Komponente von $\vec{x} = \binom{x_1}{x_2}$. Die entsprechenden Ausdrücke setzen Sie in die AKG von h ein und lösen nach t auf.

(g) Eine dritte Möglichkeit besteht darin, sich eine AKG für die Gerade g zu beschaffen und die beiden AKGen der Geraden g und h zu einem linearem Gleichungssystem (LGS) zusammenzufassen. Lösen sie dieses und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Welches Verfahren sagt Ihnen mehr zu?

(h) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g und f (sofern vorhanden).

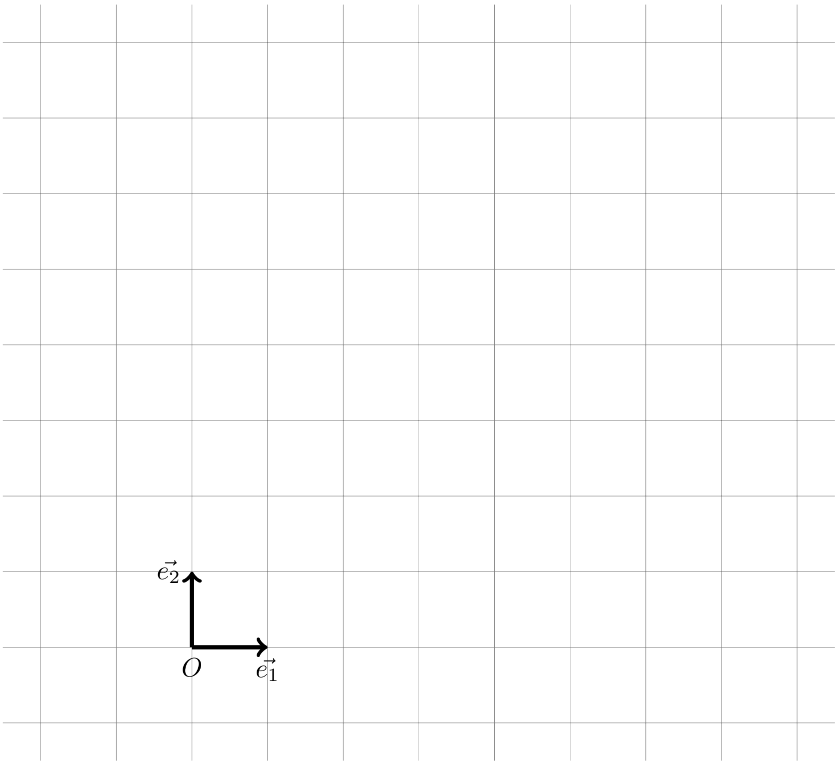
(i) Fügen Sie Ihrer Zeichnung noch die Gerade f hinzu.

Aufgabe H 11. *Teil einer Klausuraufgabe aus dem WS 2017/18*

Alle Koordinatenangaben dieser Aufgabe beziehen sich auf das Koordinatensystem $K = (O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, vgl. die Abbildung.

(a) Betrachten Sie die Gerade g, welche die Punkte P und Q mit Ortsvektoren $\vec{p} = \binom{3}{1}$ bzw. $\vec{q} = \binom{2}{4}$ enthält. **Skizzieren** bzw. **zeichnen Sie**

- die Punkte P und Q,
- die Gerade $O \vee P$, die den Ursprung und den Punkt P enthält,
- die Gerade $O \vee Q$, die den Ursprung und den Punkt Q enthält,
- die Gerade g,
- den Winkel α zwischen $\vec{e_1}$ und $\vec{p}$,
- den Winkel β zwischen e_1 und $\vec{q}$.



(b) **Berechnen Sie** den Winkel δ, den die Vektoren $\vec{p}$ und $\vec{q}$ einschließen.

(c) **Stellen Sie** eine Allgemeine Koordinatengleichung der Form $A\,x_1 + B\,x_2 + C = 0$ für die Gerade g **auf**.

Die Spiegelung an der Geraden $O \vee P$ (die den Ursprung und den Punkt P enthält) heiße σ („sigma"), die Spiegelung an der Geraden $O \vee Q$ (die den Ursprung und den Punkt Q enthält) heiße τ („tau").

(d) **Konstruieren Sie** den Punkt P', der sich ergibt, wenn Sie die Abbildung $\tau \circ \sigma$ auf P anwenden.

Hinweis: Hier ist eine zeichnerisch-konstruktive Lösung verlangt.

Aufgabe H 12. *Noch eine Gerade in der Ebene*

In einem kartesischen Koordinatensystem seien die Punkte $E = (-4, -2)$ und $F = (0, 1)$ gegeben.

(a) **Zeichnen Sie** die Punkte E und F in ein kartesisches Koordinatensystem ein und skizzieren Sie die Verbindungsgerade g, welche durch die beiden Punkte verläuft.

(b) **Stellen Sie** eine Parametergleichung der Form $\vec{x} = \vec{p} + t\,\vec{r}$ für die Ortsvektoren der Punkte auf der Geraden g auf. **Zeichnen Sie** die vier Ortsvektoren (und die zugehörigen Punkte auf der Geraden g), die sich ergeben, wenn Sie dem Parameter t (nacheinander) die Werte $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ bzw. $t = -1$ zuweisen.

(c) Liegt der Punkt G mit den Koordinaten $(-8, -5)$ auf der Geraden g? Um diese Frage zu beantworten, müssen Sie klären, ob es eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ derart gibt, dass die Gleichung $\binom{-8}{-5} = \vec{p} + t\,\vec{r}$ erfüllt ist.
Zeigen Sie ferner, dass der Punkt B mit den Koordinaten $(7, 0)$ **nicht** auf der Geraden g liegt.

(d) **Wählen Sie** einen Normalenvektor $\vec{n}$ für die Gerade g.
Hinweis: Der Vektor $\vec{n}$ muss senkrecht auf dem Vektor $\vec{r}$ stehen, den Sie in Teilaufgabe (b) gefunden haben, die Bedingung hierfür ist, dass $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$ gilt.

(e) **Stellen Sie** eine Hesse'sche Normalengleichung (HNG) für die Gerade g auf. Diese ist von der Form $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$, wobei Sie für $\vec{p}$ den Ortsvektor eines beliebigen Punktes auf g wählen können. Prüfen Sie nach, ob die Punkte mit Koordinaten $(-8, -5)$ bzw. $(4, 3)$ die HNG erfüllen.

(f) Aus der Gleichung $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ erhalten Sie durch Ausmultiplizieren der linken Seite eine Allgemeine Koordinatengleichung (AKG) für die Gerade g. **Führen Sie** dies **aus**.

(g) **Berechnen Sie** den Abstand des Punktes B mit Koordinaten $(7, 0)$ von der Geraden g.
Eine mögliche Vorgehensweise hierfür ist, dass Sie die Komponente $\vec{v}_{\|}$ des Vektors $\vec{v} = \overrightarrow{FB}$ bestimmen, die parallel (bzw. antiparallel) zu $\vec{n}$ ist: $\vec{v}_{\|} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\,\vec{n}$. **Machen Sie sich** dies anhand einer Skizze **klar**.
Alternativ hierzu könnten Sie für $\vec{v}$ auch $\overrightarrow{EB}$ oder $\overrightarrow{XB}$ mit einem beliebigen anderen Punkt $X \in g$ wählen.

Aufgabe H 13. *Geraden in der Ebene – Schnittpunkte*

Für die Bestimmung des Schnittpunkts zweier Geraden gibt es viele Möglichkeiten. Eine Variante soll anhand eines Beispiels illustriert werden: Es sei die Gerade ℓ gegeben durch eine Allgemeine Koordinatengleichung (AKG) $2\,x_1 + 4\,x_2 - 24 = 0$. Die Gerade g sei wie in Aufgabe H 12, vgl. die Abbildung 6. Wir bestimmen den Schnittpunkt der Geraden g und ℓ wie folgt:

(a) Der Parametergleichung $\vec{x} = \vec{p} + t\,\vec{r}$ der Geraden g (vgl. Aufgabe H 12) entnehmen Sie die beiden Gleichungen für die erste bzw. zweite Komponente von $\vec{x} = \binom{x_1}{x_2}$. Die entsprechenden Ausdrücke setzen Sie in die AKG von ℓ ein und lösen nach t auf.

(b) **Bestimmen Sie** den Schnittpunkt nun auch zeichnerisch. Um die Gerade ℓ zu zeichnen, können Sie zunächst zwei auf ℓ liegende Punkte bestimmen: Wenn Sie $x_1 = 0$ setzen und die AKG nach x_2 auflösen, erhalten Sie eine ersten Punkt $(0, x_2)$. Setzen Sie danach $x_2 = 0$ und lösen die AKG nach x_1 auf, so erhalten Sie eine zweiten Punkt $(x_1, 0)$.

Aufgabe H 14. *Geraden in der Ebene – Fortsetzung von Aufgabe H 12*

(a) **Bestimmen Sie** den Abstand d des Punktes $A = (9.5, 5)$ von der Geraden g sowie den zugehörigen Lotfußpunkt L. Betrachten Sie hierzu die Abbildung und wählen Sie aus mehreren Optionen eine Berechnungsmöglichkeit aus:

- Bestimmen Sie den Punkt L als Schnittpunkt der Geraden g und der dazu senkrechten Geraden $h = \{A + \tau\,\vec{n}\,|\ \tau \in \mathbb{R}\}$.
- Berechnen Sie die Komponente $\vec{u}_\parallel$ des Vektors $\vec{u} := \overrightarrow{AF}$ parallel zur Geraden h. Dann ist $\vec{u}_\parallel = \overrightarrow{AL}$ sowie $d = \|\vec{u}_\parallel\|$. *Hinweis: Es gilt* $\vec{u}_\parallel = \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,\vec{n}$, *vgl. Vorlesung.*

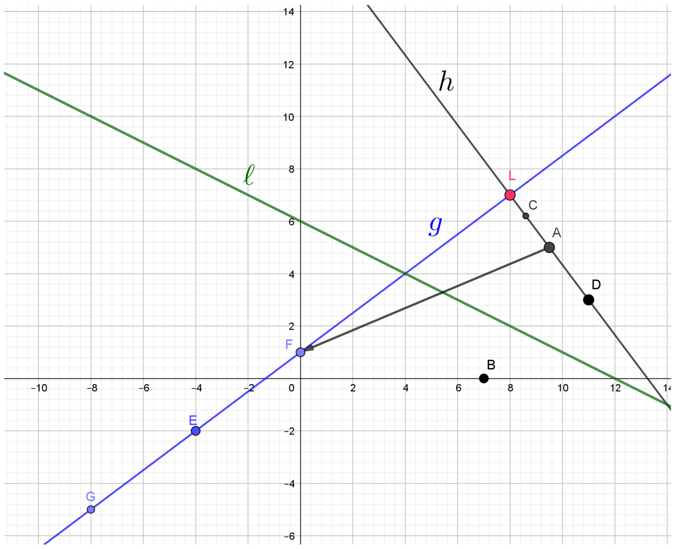


Abbildung 6: Darstellung der Geraden und Punkte

(b) **Bestimmen Sie** denjenigen Punkt C, der auf der Verbindungsstrecke zwischen den Punkten $L = (8, 7)$ und $D = (11, 3)$, liegt und den Abstand $d(C, g) = 1$ von der Geraden g besitzt. *Lösung:* $C = (8.6, 6.2) = \left(\frac{33}{5}, \frac{31}{5}\right)$.

(c) Stellen Sie sich vor, dass Sie die Bewegung zweier Leuchtpunkte auf Ihrem Bildschirm definieren wollen. Nehmen Sie hierzu an, dass die Länge der beiden Basisvektoren Ihres Koordinatensystems jeweils einem Zentimeter (cm) entspricht und dass die Parameterwerte in Sekunden gemessen werden.

Bestimmen Sie zwei Parametrierungen so, dass sich im Verlauf von 10 Sekunden der erste Leuchtpunkt geradlinig von E nach L bewegt und **gleichzeitig** der zweite Leuchtpunkt von L nach D. Wie groß sind jeweils die Geschwindigkeiten, gemessen in cm je Sekunde?

Aufgabe H 15. *Eigenschaften des Skalarprodukts*

Nehmen Sie die folgenden Eigenschaften des Skalarprodukts zur Kenntnis:

Für alle Vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2)^T$, $\vec{b} = (b_1, b_2)^T$, $\vec{c} = (c_1, c_2)^T$ und alle Skalare k gilt:

(a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ $\quad$ (Symmetrie)

(b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}, \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

$\vec{a} \cdot (k\,\vec{b}) = k\,(\vec{a} \cdot \vec{b}), \quad (k\,\vec{a}) \cdot \vec{b} = k\,(\vec{a} \cdot \vec{b})$ $\quad$ (Bilinearität)

(c) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 \geq 0$ und $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ genau dann, wenn $\vec{a} = 0$ $\quad$ (positive Definitheit)

Aufgabe H 16. *Skalarprodukt und Winkel*

Es seien $\vec{u} = (u_1, u_2)^T \neq \vec{0}$ und $\vec{v} = (v_1, v_2)^T \neq \vec{0}$ zwei Vektoren. Es sei α der Winkel zwischen (positiver) x-Achse und $\vec{u}$, es sei β der Winkel zwischen (positiver) x-Achse und $\vec{v}$, und es sei γ der von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eingeschlossene Winkel.

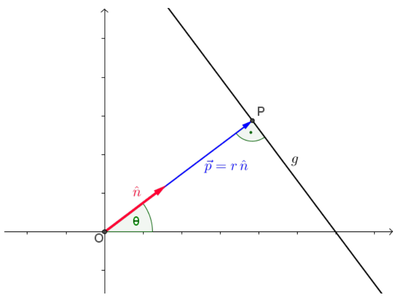
(a) Zeichnen Sie die gegebenen Vektoren und die Winkel, um sich klarzumachen, dass die Beziehungen $\cos(\alpha) = \frac{u_1}{\|\vec{u}\|}$, $\sin(\alpha) = \frac{u_2}{\|\vec{u}\|}$, $\cos(\beta) = \frac{v_1}{\|\vec{v}\|}$ und $\sin(\beta) = \frac{v_2}{\|\vec{v}\|}$ gelten.

Hinweis: Die Polarkoordinaten von $\vec{u}$ sind $(\|\vec{u}\|, \alpha)$, die Polarkoordinaten von $\vec{v}$ sind $(\|\vec{v}\|, \beta)$.

(b) Verwenden Sie ein passendes Additionstheorem und Teilaufgabe **(a)**, um die in der Vorlesung behauptete Beziehung $\cos(\gamma) = \frac{u_1\,v_1 + u_2\,v_2}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$ abzuleiten.

Aufgabe H 17. *Noch einmal AKG und HNG – Vorschau auf Hough-Transformation*

Betrachten Sie die folgenden Grafik:



Wir können den Winkel θ so wählen, dass der Normaleneinheitsvektor $\hat{n} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ zur Geraden g hinzeigt. Wir wählen ferner als Aufpunkt P den Schnittpunkt der Geraden g und $\langle \hat{n} \rangle$. Der Abstand des Ursprungs vom Punkt P sei r.

(a) Durch jede HNG werden diejenigen Punkte $X = (x_1, x_2)$ mit Ortsvektoren $\vec{x} = \binom{x_1}{x_2}$ spezifiziert, die auf der Geraden g liegen. Zeigen Sie, dass sich in dem oben skizzierten Kontext aus der HNG $\quad \hat{n} \cdot \left(\overrightarrow{PX}\right) = 0$ bzw. $\quad \hat{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ die AKG

$$x_1 \cdot \cos(\theta) + x_2 \cdot \sin(\theta) - r = 0$$

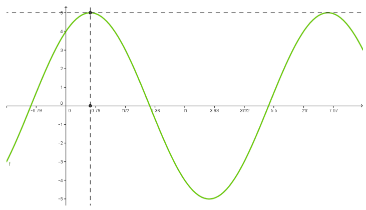
bzw. die Gleichung

$$x_1 \cdot \cos(\theta) + x_2 \cdot \sin(\theta) = r$$

ergibt.

(b) Bestimmen Sie den Abstand r, den Vektor $\hat{n}$ sowie den Winkel θ für den Fall $P = (4, 3)$.

(c) Für welche Kombinationen von θ und r ist die Gleichung $4 \cdot \cos(\theta) + 3 \cdot \sin(\theta) = r$ erfüllt? Finden Sie in der folgenden Grafik den Fall aus Teilaufgabe **(b)** wieder?



Aufgabe H 18. *Zusatzaufgabe (anspruchsvoll)*

Betrachten Sie ein regelmäßiges Tetraeder (alle vier Flächen sind gleichseitige Dreiecke) mit den Eckpunkten $A = (1, 0, 0)$, $B = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $C = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und $D = (0, 0, \sqrt{2})$.

(a) Versuchen Sie eine Projektionszeichnung des Tetraeders.

(b) In welchem Winkel stehen die Vektoren $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{BC}$ zueinander?

(c) Stellen Sie eine Parametergleichung der Ebene E auf, welche die Punkte B, C und D enthält.

(d) Bestimmen Sie den Abstand d der Ebene E vom Ursprung (z.B. indem Sie eine normierte AKG für die Ebene E aufstellen und auswerten).

(e) Bestimmen Sie den Punkt L auf E, der sich im Abstand d vom Ursprung befindet.

(f) Berechnen Sie den Mittelpunkt des Dreiecks $\triangle(BCD)$.

Tutoriumsübungen

Aufgabe T 5. *AKG und HNG von Geraden der Ebene*

Betrachten Sie die Allgemeine Koordinatengleichung (AKG) $3\,x_1 - 4\,x_2 - 10 = 0$.

(a) Überzeugen Sie sich (durch Einsetzen), dass die Punkte $P = (2, -1)$ und $Q = (0, -\frac{5}{2})$ auf der Geraden g liegen, die durch diese AKG beschrieben wird.

(b) Überzeugen Sie sich davon, dass die Koordinaten des Punktes $Z = (1, 2)$ die AKG **nicht** erfüllen.

(c) Skizzieren Sie die Gerade g in einem kartesischen Koordinatensystem.

(d) Bestimmen Sie eine Parametergleichung für die Gerade g.

(e) Zeichnen Sie den Vektor $\vec{n} = (3, -4)^T$ in das Koordinatensystem ein und überzeugen Sie sich davon, dass dieser Vektor senkrecht auf der Geraden g steht.

(f) Zeichnen Sie die Gerade $h := \langle\vec{n}\rangle$, d.h. die Ursprungsgerade, die durch den Punkt $(3, -4)$ verläuft.

(g) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $\mathrm{proj}_{\langle\vec{n}\rangle}(\vec{p})$ des Vektors $\vec{p} = (2, -1)^T$ auf die Gerade $h = \langle\vec{n}\rangle$. Anstelle von „orthogonale Projektion" können Sie auch die Bezeichnung „die zur Geraden $h = \langle\vec{n}\rangle$ **parallele** Komponente $\vec{p}_{\parallel\langle\vec{n}\rangle}$ des Vektors $\vec{p}$" verwenden, vgl. Aufgabe H 9.

Berechnen Sie hierzu

$$\vec{p}_{\parallel\langle\vec{n}\rangle} = \mathrm{proj}_{\langle\vec{n}\rangle}(\vec{p}) = \left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\right)\vec{n}.$$

Berechnen Sie ferner die Länge $\|\vec{p}_{\parallel\langle\vec{n}\rangle}\|$ des Vektors $\vec{p}_{\parallel\langle\vec{n}\rangle}$.

(h) Messen Sie in der Skizze, die Sie in den Teilaufgaben **(c)**, **(e)** und **(f)** erstellt haben, den Abstand des Ursprungs von der Geraden g ab.

Man kann die sogenannte Hesse'sche Normalengleichung (HNG) einer Geraden in zwei Varianten formulieren. Ist ein Punkt P sowie ein Normalenvektor $\vec{n}$ vorgelegt, so erfüllt jeder andere Punkt X auf der Geraden die Gleichung $\vec{n}\cdot\overrightarrow{PX} = 0$. Stellt man den Vektor $\overrightarrow{PX}$ in Koordinaten dar, so ergibt sich $\overrightarrow{PX} = X - P = \binom{x_1-p_1}{x_2-p_2}$, und die HNG nimmt die folgende Form an:

$$\vec{n}\cdot(X-P) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \binom{n_1}{n_2}\cdot\binom{x_1-p_1}{x_2-p_2} = 0.$$

Verwendet man alternativ hierzu die Vektoren $\vec{x} := \overrightarrow{OX}$ und $\vec{p} := \overrightarrow{OP}$, so hat die HNG die Form

$$\boxed{\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{p}) = 0}$$

(i) Stellen Sie die Hesse'sche Normalengleichung für die Gerade g auf, wenn

$$\vec{n} = \binom{3}{-4} \quad \text{und} \quad \vec{p} = \binom{2}{-1} \quad \text{gegeben sind.}$$

(j) Setzen Sie die Ortsvektoren der Punkte $Z = (1, 2)$ und $F = (6, 2)$ jeweils anstelle von $\vec{x}$ in die HNG ein und beobachten Sie, ob sich jeweils eine wahre oder eine falsche Aussage ergibt.

(k) Multiplizieren Sie die Skalarprodukte aus und erhalten Sie eine AKG für die Gerade g.

(l) Stellen Sie die Hesse'sche Normalengleichung $\hat{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ für die Gerade g auf mit

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wenn Sie die Skalarprodukte ausmultiplizieren, so erhalten Sie eine **normierte AKG** für die Gerade g.

(m) Berechnen Sie den Wert von $|\hat{n} \cdot \vec{p}|$. Stellen Sie den Zusammenhang zur Teilaufgabe **(g)** her.

Aufgabe T 6. *Weitere Übungen zur Vektorrechnung*

Es sei $\vec{u} = (0, -\frac{1}{2}, 1)^T$ und $\vec{v} = (-1, -1, 1)^T$.

(a) Berechnen Sie die Länge $\|\vec{v}\|$, das Skalarprodukt $\vec{u} \cdot \vec{v}$, das Kreuzprodukt $\vec{u} \times \vec{v}$ sowie die Zahl $\frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$.

(b) Berechnen Sie die orthogonale Projektion $\vec{u}_{\parallel \langle \vec{v} \rangle} := \mathrm{proj}_{\langle \vec{v} \rangle}(\vec{u})$ des Vektors $\vec{u}$ auf die von $\vec{v}$ erzeugte Gerade $\langle \vec{v} \rangle$.

Hinweis: In der Aufgabe H 9 finden Sie Erläuterungen zu orthogonalen Projektionen.

(c) Berechnen Sie den Vektor $\vec{u}_{\perp \langle \vec{v} \rangle} := \vec{u} - \vec{u}_{\parallel \langle \vec{v} \rangle}$ und dessen Länge.

(d) Berechnen Sie die Zahl $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Die Zahl $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ entspricht dem Rauminhalt des von den drei „beteiligten“ Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten „Parallelflachs“ („Spates“ oder „Parallelepipeds“).