Mathematik und Simulation

Grundlagen der IT-Sicherheit / Kryptographische Verfahren

5

Prof. Dr. Thomas Schneider

Stand: 13.06.2023

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY | HFU

Inhalt

Etwas Zahlentheorie

Motivation

- Algorithmen der Kryptographie beruhen auf Ergebnissen der Zahlentheorie
- Suche von Datensätzen in großen Dateien (Hashing)
- Prüfziffern (ISBN, Barcodes)

Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen

Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen

Die Menge aller ganzen Zahlen mit der bekannten Addition und Multiplikation bildet einen sogenannten **Ring**, der mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet wird.

Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen

Erinnerung: Teilbarkeit und Division mit Rest für ganze Zahlen

Ein Beispiel:

Die Zahl 21 ist durch 7 teilbar, denn es gilt

$$21 = 3 \cdot 7.$$

Wir schreiben auch

$$21 : 7 = 3.$$

Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen

Erinnerung: Teilbarkeit und Division mit Rest für ganze Zahlen

Ein zweites Beispiel:

Die Zahl 26 ist *nicht* durch 7 teilbar, vielmehr gilt

$$26 = 3 \cdot 7 + 5.$$

Sprechweise: Bei der ganzzahligen Division von 21 durch 7 ergibt sich der **Rest** 5.

Satz

Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{Z}$ und jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $a = q \cdot n + r$, $0 \leq r < n$.

Wir nennen q den **Quotienten** und r den **Rest** der Division von a durch n. Die Zahl a heißt **Dividend**, n ist der **Divisor**.

Bezeichnungsweise

1. Gilt $a = q \cdot n + r$ mit $0 \leq r < n$, so heißt r der **Rest** von a bei ganzzahliger Disivion durch n.

   Wir schreiben schreiben hierfür $a \mod n = r$.

2. Im Falle $r = 0$ sagen wir:
   a ist durch n **teilbar** oder n ist ein Teiler von a.

Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen

Euklidische Eigenschaft der ganzen Zahlen

Bezeichnungsweise

1. Gilt $a = q \cdot n + r$ mit $0 \leq r < n$, so heißt r der **Rest** von a bei ganzzahliger Disivion durch n.

   Wir schreiben schreiben hierfür $a \mod n = r$.

2. Im Falle $r = 0$ sagen wir:
   a ist durch n **teilbar** oder n ist ein Teiler von a.

Beispiele

$$
\begin{aligned}
26 \mod 13 &= 0, && \text{denn } 26 = 2 \cdot 13 + 0 \\
29 \mod 13 &= 3, && \text{denn } 29 = 2 \cdot 13 + 3 \\
1003 \mod 13 &= 2, && \text{denn } 1003 = 77 \cdot 13 + 2 \\
-29 \mod 13 &= 10, && \text{denn } -29 = -3 \cdot 13 + 10
\end{aligned}
$$

Bemerkung zur Definition von Resten und mod :

Bemerkung zur Definition von Resten und $\mod$:

Unsere Definition

Wir haben **für unseren Kontext** festgelegt, dass für jede natürliche Zahl $n > 0$ und jede ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ das Ergebnis der Operation

$$a \mod n =: r$$

stets eine Zahl r mit $0 \leq r < 0$ ergibt. Dies gilt insbesondere auch für negative Zahlen. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} 29 \mod 13 &= 3, \quad \text{denn} \quad 29 = 2 \cdot 13 + 3, \\ -29 \mod 13 &= 10, \quad \text{denn} \quad -29 = -3 \cdot 13 + 10. \end{aligned}$$

Bemerkung zur Definition von Resten und $\mod$:

Unsere Definition

Wir haben **für unseren Kontext** festgelegt, dass für jede natürliche Zahl $n > 0$ und jede ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ das Ergebnis der Operation

$$a \mod n =: r$$

stets eine Zahl r mit $0 \leq r < 0$ ergibt. Dies gilt insbesondere auch für negative Zahlen. Zum Beispiel:

$$29 \mod 13 = 3, \quad \text{denn} \quad 29 = 2 \cdot 13 + 3,$$
$$-29 \mod 13 = 10, \quad \text{denn} \quad -29 = -3 \cdot 13 + 10.$$

Alternative Definition:

Andernorts (z.B. in der Informatik bzw. in manchen Programmiersprachen) wird eine andere Definition der Operation $\mod$ verwendet mit sogenannten *symmetrischen Resten*. Wir wollen diese Alternativdefinition an unserem Beispiel illustrieren:

$$29 \mod_{\text{alternativ}} 13 = 3, \quad \text{denn} \quad 29 = 2 \cdot 13 + 3,$$
$$-29 \mod_{\text{alternativ}} = -3, \quad \text{denn} \quad -29 = -2 \cdot 13 + (-3).$$

Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen

Kongruenz modulo n

Für jede natürliche Zahl n definieren wir eine Relation $\underset{n}{\equiv}$ auf der Menge der ganzen Zahlen:

Definition

Es sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl n.

- Für je zwei ganze Zahlen a, b sei

  $$a \underset{n}{\equiv} b$$

  genau dann, wenn

  $$a \mod n = b \mod n$$

  gilt.

- Die Relation $\underset{n}{\equiv}$ heißt **Kongruenzrelation modulo** n.

Hilfssatz (Lemma)

Für zwei ganze Zahlen x, y sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $x \underset{n}{\equiv} y$,
2. $(x - y) \mod n = 0$,
3. $(y - x) \mod n = 0$,
4. $x - y$ ist durch n teilbar.
5. $y - x$ ist durch n teilbar.

Hörsaalübung

- Gilt $17 \underset{5}{\equiv} 2$?
- Gilt $17 \underset{5}{\equiv} -3$?
- Gilt $18 \underset{6}{\equiv} 25$?
- Gilt $99 \underset{24}{\equiv} 123$?
- Welche Beziehung erfüllen die Jahreszahlen s derjenigen Jahre, in denen Olympische Sommerspiele (der Moderne) stattfanden bzw. stattfinden?
- Welche Beziehung erfüllen die Jahreszahlen w derjenigen Jahre, in denen Fußball-Weltmeisterschaften stattfanden bzw. stattfinden?
- Fanden im Jahr 1958 (im Jahr 1968) Olympische Sommerspiele statt?

Satz

Die Relation $\underset{n}{\equiv}$ ist eine **Äquivalenzrelation**.

Satz

Die Relation $\underset{n}{\equiv}$ ist eine **Äquivalenzrelation**.

Beweisskizze.

Reflexivität folgt aus $x - x = 0 = 0 \cdot n$, Symmetrie aus Lemma 9.
Transitivität: Falls $x \underset{n}{\equiv} y$ und $y \underset{n}{\equiv} z$ gilt, so existieren ganze Zahlen a bzw. a' mit $x - y = a \cdot n$ bzw. $y - z = a' \cdot n$. Daraus folgt

$$x - z = (x - y) - (y - z) = (a - a') \cdot n.$$

Da $a - a'$ ganzzahlig ist, gilt $x \underset{n}{\equiv} z$ (vgl. Lemma 9). □

Kongruenzrelationen

Kongruenzklassen bzw. Restklassen

Definition

1. Für jede Zahl $z \in \mathbb{Z}$ bezeichne

$$[z] := [z]_{\underset{n}{\equiv}} := \left\{ x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; x \underset{n}{\equiv} z \right\}$$

   die Äquivalenzklasse von z bezüglich $\underset{n}{\equiv}$.

2. Wir nennen $[z]_{\underset{n}{\equiv}}$ auch **Restklasse von** z **modulo** n **in** $\mathbb{Z}$.

3. Die Menge aller Restklassen modulo n in $\mathbb{Z}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}/_{\underset{n}{\equiv}}$ (sprich 'Restklassenmenge modulo n') oder mit $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ (sprich '$\mathbb{Z}$ modulo $n\mathbb{Z}$'). Das Zeichen $n\mathbb{Z}$ soll dabei symbolisieren, dass alle die Elemente äquivalent sind, die sich um ein Vielfaches von n voneinander unterscheiden, also um nz für ein $z \in \mathbb{Z}$.

Kongruenzrelationen

Beispiele von Restklassen

Beispiel: Kongruenz modulo 2

$$[0]_{\equiv_2} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\} \quad \text{(gerade Zahlen)}$$

$$[1]_{\equiv_2} = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\} \quad \text{(ungerade Zahlen)}$$

$$[0]_{\equiv_2} = [2]_{\equiv_2} = [4]_{\equiv_2} = [-2]_{\equiv_2} = [-4]_{\equiv_2}, \ldots$$

$$[1]_{\equiv_2} = [3]_{\equiv_2} = [5]_{\equiv_2} = [-1]_{\equiv_2} = [-3]_{\equiv_2}, \ldots$$

$$\mathbb{Z}/_{\equiv_2} = \left\{[0]_{\equiv_2}, [1]_{\equiv_2}\right\}$$

Kongruenzrelationen

Beispiele von Restklassen

Beispiel: Kongruenz modulo 4

$$[0]_{\underset{4}{\equiv}} = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$$
$$[1]_{\underset{4}{\equiv}} = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\}$$
$$\ldots$$
$$\mathbb{Z}/_{\underset{4}{\equiv}} = \left\{[0]_{\underset{4}{\equiv}}, [1]_{\underset{4}{\equiv}}, [2]_{\underset{4}{\equiv}}, [3]_{\underset{4}{\equiv}}\right\}$$

Modulare Arithmetik

Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}/\equiv_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Wir wollen mit Restklassen rechnen und erklären Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Z}/\equiv_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Modulare Arithmetik

Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}/\equiv_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Wir wollen mit Restklassen rechnen und erklären Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Z}/\equiv_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Definition

Sei $n \geq 2$ fest gewählt und seien $[x] := [x]_{\equiv_n}$, $[y] := [y]_{\equiv_n}$ Restklassen in $\mathbb{Z}/\equiv_n$. Dann sei

$$[x] + [y] := [x + y],$$

$$[x] \cdot [y] := [x \cdot y].$$

Bemerkungen

- Wir halten ohne Beweis fest, dass die so erklärten Verknüpfungen **nicht** davon abhängen, welche Elemente x bzw. y der Restklasse gewählt werden (Wohldefiniertheit).
- In der Praxis wird ein festes Vertretersystem gewählt, zum Beispiel das System der kleinsten nichtnegativen Reste

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Bemerkung

Wenn von „modularer Arithmetik“ die Rede ist, kann Unterschiedliches gemeint sein. Da die unterschiedlichen Konzepte jedoch zum einen „äquivalent“ sind und es zum andern bequem ist, die Unterschiede weder in Notation noch in Denk- und Sprechweise auszudrücken zu müssen, wird nicht immer in aller Schärfe unterschieden:

[a] Zur Überprüfung dieser recht überraschenden Aussage gibt es, wie wir noch sehen werden, auch andere Wege als $1\,000\,000 = 999\,999 + 1 = 142\,857 \cdot 7 + 1$ auszurechnen.

Bemerkung

Wenn von „modularer Arithmetik“ die Rede ist, kann Unterschiedliches gemeint sein. Da die unterschiedlichen Konzepte jedoch zum einen „äquivalent“ sind und es zum andern bequem ist, die Unterschiede weder in Notation noch in Denk- und Sprechweise auszudrücken zu müssen, wird nicht immer in aller Schärfe unterschieden:

- Addition und Multiplikation in der Menge $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$, unter Verwendung der Operation $\mod$.

  Beispiel in $\mathbb{Z}_8$: $\bar{3} \cdot \bar{7} = \overline{21 \mod 8} = \bar{5}$.

[a] Zur Überprüfung dieser recht überraschenden Aussage gibt es, wie wir noch sehen werden, auch andere Wege als $1\,000\,000 = 999\,999 + 1 = 142\,857 \cdot 7 + 1$ auszurechnen.

Bemerkung

Wenn von „modularer Arithmetik“ die Rede ist, kann Unterschiedliches gemeint sein. Da die unterschiedlichen Konzepte jedoch zum einen „äquivalent“ sind und es zum andern bequem ist, die Unterschiede weder in Notation noch in Denk- und Sprechweise auszudrücken zu müssen, wird nicht immer in aller Schärfe unterschieden:

- Addition und Multiplikation in der Menge $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$, unter Verwendung der Operation $\mod$.

  Beispiel in $\mathbb{Z}_8$: $\bar{3} \cdot \bar{7} = \overline{21 \mod 8} = \bar{5}$.

- Addition und Multiplikation in der Menge der Äquivalenzklassen (Quotientenmenge) $\mathbb{Z}/\equiv_n$, wobei, wie immer, wenn Repäsentanten zur Berechnung verwendet werden, die Frage der Wohldefiniertheit zu klären ist.

  Beispiel in $\mathbb{Z}/\equiv_4$: $[7]_{\equiv_4} + [10]_{\equiv_4} = [17]_{\equiv_4} = [1]_{\equiv_4}$ und auch $[3]_{\equiv_4} + [2]_{\equiv_4} = [5]_{\equiv_4} = [1]_{\equiv_4}$.

[a] Zur Überprüfung dieser recht überraschenden Aussage gibt es, wie wir noch sehen werden, auch andere Wege als $1\,000\,000 = 999\,999 + 1 = 142\,857 \cdot 7 + 1$ auszurechnen.

Modulare Arithmetik

Unterschiedliche Konzepte

Bemerkung

Wenn von „modularer Arithmetik“ die Rede ist, kann Unterschiedliches gemeint sein. Da die unterschiedlichen Konzepte jedoch zum einen „äquivalent“ sind und es zum andern bequem ist, die Unterschiede weder in Notation noch in Denk- und Sprechweise auszudrücken zu müssen, wird nicht immer in aller Schärfe unterschieden:

- Addition und Multiplikation in der Menge $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$, unter Verwendung der Operation $\mod$.

  Beispiel in $\mathbb{Z}_8$: $\bar{3} \cdot \bar{7} = \overline{21 \mod 8} = \bar{5}$.

- Addition und Multiplikation in der Menge der Äquivalenzklassen (Quotientenmenge) $\mathbb{Z}/\equiv_n$, wobei, wie immer, wenn Repäsentanten zur Berechnung verwendet werden, die Frage der Wohldefiniertheit zu klären ist.

  Beispiel in $\mathbb{Z}/\equiv_4$: $[7]_{\equiv_4} + [10]_{\equiv_4} = [17]_{\equiv_4} = [1]_{\equiv_4}$ und auch $[3]_{\equiv_4} + [2]_{\equiv_4} = [5]_{\equiv_4} = [1]_{\equiv_4}$.

- Addition und Multiplikation in der Menge Z mit Nachschalten der Operation $\mod$:

  Beispiel[a]: $10^6 \mod 7 = 1$.

[a] Zur Überprüfung dieser recht überraschenden Aussage gibt es, wie wir noch sehen werden, auch andere Wege als $1\,000\,000 = 999\,999 + 1 = 142\,857 \cdot 7 + 1$ auszurechnen.

Modulare Arithmetik

Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}/\equiv_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

Beispiel: Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}/\equiv_4$

$$[2] + [3] = [2 + 3] = [5] = [1]$$

$$[2] \cdot [3] = [2 \cdot 3] = [6] = [2]$$

Modulare Arithmetik

Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}/\underset{4}{\equiv} = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

Beispiel: Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}/\underset{4}{\equiv}$

$$[2] + [3] = [2+3] = [5] = [1]$$

$$[2] \cdot [3] = [2 \cdot 3] = [6] = [2]$$

Alternative Notationen:

$$2 + 3 \underset{4}{\equiv} 1 \quad \text{bzw.} \quad 2 + 3 \mod 4 = 1$$

$$2 \cdot 3 \underset{4}{\equiv} 2 \quad \text{bzw.} \quad 2 \cdot 3 \mod 4 = 2$$

Modulare Arithmetik

Verknüpfungstafeln für $\mathbb{Z}/_{\equiv_2}$ bzw. $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$

Die Verknüpfungstafeln für Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}/_{\equiv_2}$ bzw. $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ sind wie folgt:

$+$	$[0]$	$[1]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$
$[1]$	$[1]$	$[0]$

$\cdot$	$[0]$	$[1]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$

Modulare Arithmetik

Verknüpfungstafeln für $\mathbb{Z}/\equiv_6$ bzw. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Hörsaalübung

Wir stellen die Additions- und die Multiplikationstafel in $\mathbb{Z}/\equiv_6$ bzw. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ auf; zur Vereinfachung wählen wir die Reste als Repräsentanten der Restklassen, um die eckigen Klammern nicht mehr zu schreiben.

$+$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2			2	
3	0	3		3		
4	0	4		0		
5	0	5				1

Modulare Arithmetik

Multiplikation in $\mathbb{Z}/\underset{6}{\equiv} = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

Bemerkungen:

- Wir stellen fest, dass es Elemente in $\mathbb{Z}/\underset{6}{\equiv}$ bzw. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ gibt, die **keine** multiplikative Inverse besitzen bzw. **Nullteiler** sind.
- Dagegen besitzen die Elemente 1 und 5 jeweils multiplikative Inverse.
- Wir halten fest, dass 1 und 6 bzw. 5 und 6 jeweils **teilerfremd** sind, d.h. es gilt $\text{ggT}(1,6) = 1$ und $\text{ggT}(5,6) = 1$.

Modulare Arithmetik

Einheiten in $\mathbb{Z}/_{\equiv_n}$ bzw. $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$

Definition

Ein Element $x \neq 0$ in $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ heißt **Einheit** in $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$, wenn es eine multiplikative Inverse in $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ besitzt.

Modulare Arithmetik

Einheiten in $\mathbb{Z}/_{\equiv_n}$ bzw. $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$

Definition

Ein Element $x \neq 0$ in $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ heißt **Einheit** in $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$, wenn es eine multiplikative Inverse in $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ besitzt.

Satz

Ein Element $x \neq 0$ in $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ ist genau dann eine Einheit in $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$, wenn $\text{ggT}(x, n) = 1$ gilt.

Modulare Arithmetik

Eulersche Phi-Funktion

Definition

Es sei $n \geq 1$. Dann bezeichne $\varphi(n)$ die **Anzahl** der Einheiten in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Modulare Arithmetik

Eulersche Phi-Funktion

Definition

Es sei $n \geq 1$. Dann bezeichne $\varphi(n)$ die **Anzahl** der Einheiten in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Beispiel

Es gilt $\varphi(6) = 2$, denn die Einheiten in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sind, wie gesehen, die beiden Elemente 1 und 5.

Hörsaalübung

Wir bestimmen die Werte von $\varphi(n)$ für $1 \leq n \leq 12$. Hierzu listen wir jeweils die Menge $E(n)$ der (zu n **teilerfremden**) Zahlen x mit $1 \leq x \leq n$ und $\text{ggT}(x, n) = 1$ auf und bestimmen $\varphi(n) = |E(n)|$:

n	$E(n)$	$\varphi(n)$
1	$\{1\}$	1
2	$\{1\}$	1
3	$\{1, 2\}$	2
4	$\{1, 3\}$	2
5		
6	$\{1, 5\}$	2

n	$E(n)$	$\varphi(n)$
7		
8		
9	$\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$	6
10		
11		
12		

Ende RSA-Sitzung 1 am 01.06.2021

Primzahlen und eulersche Phi-Funktion

Wir formulieren drei wichtige Resultate über die eulersche Phi-Funktion. Hierzu sei daran erinnert, dass wir unter einer **Primzahl** eine ganze Zahl $p > 1$ verstehen, deren Teiler genau die Zahlen 1 und p sind.

Primzahlen und eulersche Phi-Funktion

Wir formulieren drei wichtige Resultate über die eulersche Phi-Funktion. Hierzu sei daran erinnert, dass wir unter einer **Primzahl** eine ganze Zahl $p > 1$ verstehen, deren Teiler genau die Zahlen 1 und p sind.

Satz

1. Es sei p eine Primzahl. Dann gilt $\varphi(p) = p - 1$.
2. Es seien p und q zwei voneinander verschiedene Primzahlen. Dann gilt
$$\varphi(p \cdot q) = (p-1) \cdot (q-1)\,.$$
3. Es seien p, q und r drei (paarweise) voneinander verschiedene Primzahlen. Dann gilt
$$\varphi(p \cdot q \cdot r) = (p-1) \cdot (q-1) \cdot (r-1)\,.$$

Vor dem Beweis des vorstehenden Satzes betrachten wir

Beispiele

$$
\begin{aligned}
\varphi(5) &= 5-1=4 && \text{(nach 1)}\\
\varphi(6) &= \varphi(2\cdot 3)=(2-1)\cdot(3-2)=1\cdot 2=2 && \text{(nach 2)}\\
\varphi(15) &= \varphi(3\cdot 5)=(3-1)\cdot(5-1)=2\cdot 4=8 && \text{(nach 2)}\\
\varphi(30) &= \varphi(2\cdot 3\cdot 5)=(2-1)\cdot(3-1)\cdot(5-1)=8 && \text{(nach 3)}
\end{aligned}
$$

Vor dem Beweis des vorstehenden Satzes betrachten wir

Beispiele

$$
\begin{aligned}
\varphi(5) &= 5-1=4 && \text{(nach 1)}\\
\varphi(6) &= \varphi(2\cdot 3)=(2-1)\cdot(3-2)=1\cdot 2=2 && \text{(nach 2)}\\
\varphi(15) &= \varphi(3\cdot 5)=(3-1)\cdot(5-1)=2\cdot 4=8 && \text{(nach 2)}\\
\varphi(30) &= \varphi(2\cdot 3\cdot 5)=(2-1)\cdot(3-1)\cdot(5-1)=8 && \text{(nach 3)}
\end{aligned}
$$

Warnung

Die Werte $\varphi(9)$ und $\varphi(12)$ etwa lassen sich **nicht** mit dem vorstehenden Satz bestimmen. Denn 9 und 12 sind weder Primzahlen noch besitzen sie Zerlegungen in zwei bzw. drei voneinander verschiedene Primzahlen:

$9=5\cdot 5, \quad 12=2\cdot 2\cdot 3, \qquad \varphi(9)=6\neq(3-1)\cdot(3-1), \quad \varphi(12)=4\neq(2-1)\cdot(2-1)\cdot(3-1).$

Beweis:

1. Wenn p eine Primzahl ist, so sind die Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$ sämtlich teilerfremd zu p. Damit gilt $\varphi(p) = p - 1$.
2. Es seien p und q zwei voneinander verschiedene Primzahlen. Wir zählen zunächst die natürlichen Zahlen x mit $1 \leq x \leq p \cdot q$, die **nicht** teilerfremd zu $p \cdot q$ sind: Es sind dies zum einen die Produkte

$$1 \cdot p,\ 2 \cdot p,\ \ldots,\ q \cdot p,$$

ferner die Produkte

$$1 \cdot q,\ 2 \cdot q,\ \ldots,\ (p-1) \cdot q,$$

insgesamt also $q + (p - 1)$ Zahlen.

Fortsetzung des Beweises

Da $q + (p - 1)$ Zahlen gemeinsame Teiler mit $p \cdot q$ besitzen, verbleiben

$$p \cdot q - (q + p - 1)$$

Zahlen, die **teilerfremd** zu $p \cdot q$ sind.
Wegen

$$p \cdot q - (q + p - 1) = p \cdot q - p - q + 1 = (p - 1) \cdot (q - 1)$$

folgt insgesamt $\varphi(p \cdot q) = (p - 1) \cdot (q - 1)$.

Ende Sitzung 06.06.23

Modulare Arithmetik

Beweis von Satz 25

Fortsetzung des Beweises

Da $q + (p - 1)$ Zahlen gemeinsame Teiler mit $p \cdot q$ besitzen, verbleiben

$$p \cdot q - (q + p - 1)$$

Zahlen, die **teilerfremd** zu $p \cdot q$ sind.
Wegen

$$p \cdot q - (q + p - 1) = p \cdot q - p - q + 1 = (p - 1) \cdot (q - 1)$$

folgt insgesamt $\varphi(p \cdot q) = (p - 1) \cdot (q - 1)$.

Hausübung

Verwenden Sie ähnliche Abzählungen, um Teil 3 des Satzes zu beweisen.

Ende Sitzung 06.06.23

Primzahlen und eulersche Phi-Funktion – allgemeiner Fall

Um den Wert der eulerschen Phi-Funktion für jede beliebige natürliche Zahl auszurechnen, macht man sich die folgenden Resultate[a] zunutze:

[a] Siehe etwa *Elementare und algebraische Zahlentheorie* von S. Müller-Stach und J. Piontkowski, vieweg.

Primzahlen und eulersche Phi-Funktion – allgemeiner Fall

Um den Wert der eulerschen Phi-Funktion für jede beliebige natürliche Zahl auszurechnen, macht man sich die folgenden Resultate[a] zunutze:

1. Wenn $n = p^r$ eine **Primzahlpotenz** ist, so gilt $\varphi(n) = p^{r-1} \cdot (p-1)$

[a] Siehe etwa *Elementare und algebraische Zahlentheorie* von S. Müller-Stach und J. Piontkowski, vieweg.

Primzahlen und eulersche Phi-Funktion – allgemeiner Fall

Um den Wert der eulerschen Phi-Funktion für jede beliebige natürliche Zahl auszurechnen, macht man sich die folgenden Resultate[a] zunutze:

1. Wenn $n = p^r$ eine **Primzahlpotenz** ist, so gilt $\varphi(n) = p^{r-1} \cdot (p-1)$
2. Wenn n die **Primzfaktorzerlegung** $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_N^{r_N}$ besitzt, so gilt

$$\varphi(n) = p_1^{r_1-1} \cdot (p_1 - 1) \cdot p_2^{r_2-1} \cdot (p_2 - 1) \cdot \ldots \cdot p_N^{r_N-1} \cdot (p_N - 1)\,.$$

[a] Siehe etwa *Elementare und algebraische Zahlentheorie* von S. Müller-Stach und J. Piontkowski, vieweg.

Primzahlen und eulersche Phi-Funktion – allgemeiner Fall

Um den Wert der eulerschen Phi-Funktion für jede beliebige natürliche Zahl auszurechnen, macht man sich die folgenden Resultate[a] zunutze:

1. Wenn $n = p^r$ eine **Primzahlpotenz** ist, so gilt $\varphi(n) = p^{r-1} \cdot (p-1)$
2. Wenn n die **Primzfaktorzerlegung** $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_N^{r_N}$ besitzt, so gilt

$$\varphi(n) = p_1^{r_1-1} \cdot (p_1 - 1) \cdot p_2^{r_2-1} \cdot (p_2 - 1) \cdot \ldots \cdot p_N^{r_N-1} \cdot (p_N - 1)\,.$$

[a] Siehe etwa *Elementare und algebraische Zahlentheorie* von S. Müller-Stach und J. Piontkowski, vieweg.

Beispiele

1. Für $n = 9 = 3^2$ gilt nach der ersten der obigen Formeln $\varphi(9) = 3^{2-1} \cdot (3-1) = 6$

Primzahlen und eulersche Phi-Funktion – allgemeiner Fall

Um den Wert der eulerschen Phi-Funktion für jede beliebige natürliche Zahl auszurechnen, macht man sich die folgenden Resultate[a] zunutze:

1. Wenn $n = p^r$ eine **Primzahlpotenz** ist, so gilt $\varphi(n) = p^{r-1} \cdot (p-1)$
2. Wenn n die **Primzfaktorzerlegung** $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_N^{r_N}$ besitzt, so gilt

$$\varphi(n) = p_1^{r_1-1} \cdot (p_1 - 1) \cdot p_2^{r_2-1} \cdot (p_2 - 1) \cdot \ldots \cdot p_N^{r_N-1} \cdot (p_N - 1)\,.$$

[a] Siehe etwa *Elementare und algebraische Zahlentheorie* von S. Müller-Stach und J. Piontkowski, vieweg.

Beispiele

1. Für $n = 9 = 3^2$ gilt nach der ersten der obigen Formeln $\varphi(9) = 3^{2-1} \cdot (3-1) = 6$
2. Die Zahl $n = 12$ hat die Primfaktorzerlegung $12 = 2^2 \cdot 3^1$. Nach der zweiten Formel ist $\varphi(12) = 2^{2-1} \cdot (2-1) \cdot 3^{1-1} \cdot (3-1) = 4$.

Primzahlen und eulersche Phi-Funktion – allgemeiner Fall

Um den Wert der eulerschen Phi-Funktion für jede beliebige natürliche Zahl auszurechnen, macht man sich die folgenden Resultate[a] zunutze:

1. Wenn $n = p^r$ eine **Primzahlpotenz** ist, so gilt $\varphi(n) = p^{r-1} \cdot (p-1)$
2. Wenn n die **Primzfaktorzerlegung** $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_N^{r_N}$ besitzt, so gilt

$$\varphi(n) = p_1^{r_1-1} \cdot (p_1 - 1) \cdot p_2^{r_2-1} \cdot (p_2 - 1) \cdot \ldots \cdot p_N^{r_N-1} \cdot (p_N - 1)\,.$$

[a] Siehe etwa *Elementare und algebraische Zahlentheorie* von S. Müller-Stach und J. Piontkowski, vieweg.

Beispiele

1. Für $n = 9 = 3^2$ gilt nach der ersten der obigen Formeln $\varphi(9) = 3^{2-1} \cdot (3-1) = 6$
2. Die Zahl $n = 12$ hat die Primfaktorzerlegung $12 = 2^2 \cdot 3^1$. Nach der zweiten Formel ist $\varphi(12) = 2^{2-1} \cdot (2-1) \cdot 3^{1-1} \cdot (3-1) = 4$.

Tatsächlich sind es genau die sechs Zahlen 1, 2, 4, 5, 7 und 8, die mit 9 nur den Teiler 1 gemein haben; und es sind genau die vier Zahlen 1, 5, 7 und 11 zu 12 teilerfremd.

Hausübung:

Bestimmen Sie die Werte von $\varphi(81) = \varphi\left(3^4\right)$ und $\varphi(72) = \varphi\left(2^3 \cdot 3^2\right)$

- mit den angegebenen Formeln,
- (zur Kontrolle) durch Abzählung der zur jeweiligen Zahl *n* teilerfremden Zahlen.

Hausübung:

Bestimmen Sie die Werte von $\varphi(81) = \varphi\left(3^4\right)$ und $\varphi(72) = \varphi\left(2^3 \cdot 3^2\right)$

- mit den angegebenen Formeln,
- (zur Kontrolle) durch Abzählung der zur jeweiligen Zahl *n* teilerfremden Zahlen.

Bemerkung

Keine Angst vor dem Abzählen! Zum Beispiel lässt sich die Liste der natürlichen Zahlen kleiner 72, die mit 72 nur den Teiler 1 gemein haben, also weder durch 2 noch durch 3 teilbar sind, sehr schön übersichtlich darstellen:

1, 5, 7, 11, 13, 17,
19, 23, 25, 29, 31, 35,
37, 41, 43, 47, 49, 53,
55, 59, 61, 65, 67, 71.

Seien Sie

KHUCOLFK ZLOONRPPHQ

bei den mathematischen Grundlagen von Systemen zur Daten-, Kommunikations- und Transaktionssicherheit.

Na, alles klar?

Sicherheitsaspekte bei Kommunikation

Bei jeder Art von Kommunikation besteht die Möglichkeit der Verletzung

Sicherheitsaspekte bei Kommunikation

Bei jeder Art von Kommunikation besteht die Möglichkeit der Verletzung

1. der Vertraulichkeit / Geheimhaltung,

Sicherheitsaspekte bei Kommunikation

Bei jeder Art von Kommunikation besteht die Möglichkeit der Verletzung

1. der Vertraulichkeit / Geheimhaltung,
2. der Nachrichtenintegrität bzw. Nachrichtenechtheit,

Sicherheitsaspekte bei Kommunikation

Bei jeder Art von Kommunikation besteht die Möglichkeit der Verletzung

1. der Vertraulichkeit / Geheimhaltung,
2. der Nachrichtenintegrität bzw. Nachrichtenechtheit,
3. der Authentizität des Absenders.

_A_ sendet _B_ eine (Klartext-)Nachricht _m_:

„Rendez-vous morgen um 11.00 Uhr. Gruß, Alice.“

_A_ sendet _B_ eine (Klartext-)Nachricht _m_:

„Rendez-vous morgen um 11.00 Uhr. Gruß, Alice.“

Verletzung der Vertraulichkeit

_E_ hört / liest mit.

A sendet B eine (Klartext-)Nachricht m:

„Rendez-vous morgen um 11.00 Uhr. Gruß, Alice.“

Verletzung der Vertraulichkeit

E hört / liest mit.

Verletzung der Nachrichtenintegrität

E fängt m ab und schickt m' an B weiter:

„Rendez-vous morgen um 13.00 Uhr. Gruß, Alice.“

A sendet B eine (Klartext-)Nachricht m:

„Rendez-vous morgen um 11.00 Uhr. Gruß, Alice.“

Verletzung der Vertraulichkeit

E hört / liest mit.

Verletzung der Nachrichtenintegrität

E fängt m ab und schickt m' an B weiter:

„Rendez-vous morgen um 13.00 Uhr. Gruß, Alice.“

Verletzung der Authentizität

E schickt die folgende Nachricht mit der Unterschrift von Alice an B:

„Ich will dich nie wieder sehen, Alice.“

Abhilfe: Verschlüsselung (Chiffrierung)

Es gibt viele verschiedene Methoden zur Verschlüsselung (Chiffrierung) von Nachrichten.

Abhilfe: Verschlüsselung (Chiffrierung)

Es gibt viele verschiedene Methoden zur Verschlüsselung (Chiffrierung) von Nachrichten.

Bemerkung

Vom **Chiffrieren** zu unterscheiden ist das **Codieren**, letzteres wird nicht zur Sicherung vor Angriffen, sondern aus anderen Gründen vorgenommen (z.B. Konversion von Text in Zahlen, Nutzung technischer Übertragungskanäle, die Störungen ausgesetzt sind, usw.).

Verschiebechiffren

Ein sehr einfacher (und daher auch sehr unsicherer) Typ von Chiffren sind die sogenannten **Verschiebechiffren**. Schon Julius Cäsar soll die zyklische Verschiebung um 3 Buchstaben im Alphabet verwendet haben:

Verschiebechiffren

Ein sehr einfacher (und daher auch sehr unsicherer) Typ von Chiffren sind die sogenannten **Verschiebechiffren**. Schon Julius Cäsar soll die zyklische Verschiebung um 3 Buchstaben im Alphabet verwendet haben:

Cäsars Chiffre

Verschiebechiffren

Ein sehr einfacher (und daher auch sehr unsicherer) Typ von Chiffren sind die sogenannten **Verschiebechiffren**. Schon Julius Cäsar soll die zyklische Verschiebung um 3 Buchstaben im Alphabet verwendet haben:

Cäsars Chiffre

- Beim Verschlüsseln (Chiffrieren) wird jeder Buchstabe des Klartextalphabets durch den entsprechenden Buchstaben des Geheimtextalphabets ersetzt ($a \to D$, $b \to E$, $\ldots$, $z \to C$).

Verschiebechiffren

Ein sehr einfacher (und daher auch sehr unsicherer) Typ von Chiffren sind die sogenannten **Verschiebechiffren**. Schon Julius Cäsar soll die zyklische Verschiebung um 3 Buchstaben im Alphabet verwendet haben:

Cäsars Chiffre

- Beim Verschlüsseln (Chiffrieren) wird jeder Buchstabe des Klartextalphabets durch den entsprechenden Buchstaben des Geheimtextalphabets ersetzt ($a \to D$, $b \to E$, $\ldots$, $z \to C$).
- Beim Entschlüsseln (Dechiffrieren) wird genau umgekehrt verfahren: $A \to x$, $B \to y$, $\ldots$, $Z \to w$.

Cäsars Chiffre

Klartextalphabet	a	b	c	d	e	...	w	x	y	z
Geheimtextalphabet	D	E	F	G	H	...	Z	A	B	C

Cäsars Chiffre

Klartextalphabet	a	b	c	d	e	...	w	x	y	z
Geheimtextalphabet	D	E	F	G	H	...	Z	A	B	C

Hörsaalübung

[Entschlüsselung des eingangs verschlüsselten Grußes] Der Geheimtext KHUCOLFK ZLOONRPPHQ wird (durch Rückverschiebung um drei Buchstaben) dechiffriert zu ....

Kategorien kryptographischer Verfahren

Kategorien kryptographischer Verfahren

Verschlüsselungs- bzw. Entschlüsselungsverfahren (Chiffren, Kryptosysteme) werden unterschieden in

Kategorien kryptographischer Verfahren

Kategorien kryptographischer Verfahren

Verschlüsselungs- bzw. Entschlüsselungsverfahren (Chiffren, Kryptosysteme) werden unterschieden in

- **symmetrische** Verfahren (engl. **private-key cryptosystems**) und

Kategorien kryptographischer Verfahren

Kategorien kryptographischer Verfahren

Verschlüsselungs- bzw. Entschlüsselungsverfahren (Chiffren, Kryptosysteme) werden unterschieden in

- **symmetrische** Verfahren (engl. **private-key cryptosystems**) und
- **asymmetrische** Verfahren (engl. **public-key cryptosystems**).

Symmetrische Verfahren

Sender A und Empfänger B vereinbaren einen Schlüssel k. Eine Klartextnachricht m wird mithilfe einer Funktion f_k, die vom Schlüssel k abhängt, verschlüsselt, es entsteht die Geheimnachricht c:

$$c = f_k(m).$$

Symmetrische Verfahren

Sender A und Empfänger B vereinbaren einen Schlüssel k. Eine Klartextnachricht m wird mithilfe einer Funktion f_k, die vom Schlüssel k abhängt, verschlüsselt, es entsteht die Geheimnachricht c:

$$c = f_k(m).$$

Die Entschlüsselung erfolgt mit der Umkehrfunktion f_k^{-1} von f_k. Aus der Geheimnachricht c entsteht wieder die Klartextnachricht m:

$$m = f_k^{-1}\big(f_k(m)\big) = f_k^{-1}(c).$$

Beispiele symmetrischer Verfahren

Kategorien kryptographischer Verfahren

Symmetrische Verfahren

Beispiele symmetrischer Verfahren

- Advanced Encryption Standard (AES):
  aktuelles, sehr sicheres Verfahren

Kategorien kryptographischer Verfahren

Symmetrische Verfahren

Beispiele symmetrischer Verfahren

- Advanced Encryption Standard (AES):
  aktuelles, sehr sicheres Verfahren
- Data Encryption Standard (DES):
  Vorgänger des AES, heute obsolet, weil durch **brute-force attacks** bzw. **exhaustive key searches** mit heutigen Rechnerleistungen angreifbar.

Nachteil symmetrischer Verfahren

Vor Beginn der eigentlichen Kommunikations muss ein Schlüssel vereinbart und kommuniziert werden. Dieser Schlüselaustausch erfolgt notwendigerweise über irgend einen Kommunikationskanal und ist somit prinzipiell gefährdet (durch Mithören, Abhören, Mitschneiden, etc.).

Kategorien kryptographischer Verfahren

Asymmetrische Verfahren - public-key systems

Asymmetrische Verfahren

Kategorien kryptographischer Verfahren

Asymmetrische Verfahren - public-key systems

Asymmetrische Verfahren

- Jede/r Teilnehmer/in hat einen öffentlichen Schlüssel *e* und einen geheimen („privaten“) Schlüssel *d*. Der öffentliche Schlüssel wird in einem Verzeichnis ähnlich wie in einem Telefonbuch veröffentlicht.

Asymmetrische Verfahren

- Jede/r Teilnehmer/in hat einen öffentlichen Schlüssel e und einen geheimen („privaten“) Schlüssel d. Der öffentliche Schlüssel wird in einem Verzeichnis ähnlich wie in einem Telefonbuch veröffentlicht.
- Möchte A eine Nachricht m verschlüsselt an B senden, so verwendet A den öffentlichen Schlüssel e von B und das vereinbarte Verfahren f_e zum Chiffrieren:

$$c = f_e(m).$$

Asymmetrische Verfahren - Fortsetzung

Asymmetrische Verfahren - Fortsetzung

- Der Empfänger B verwendet seinen privaten Schlüssel d und eine davon abhängige Funktion g_d zum Dechiffrieren:

$$m = g_d(c).$$

Asymmetrische Verfahren - Fortsetzung

- Der Empfänger B verwendet seinen privaten Schlüssel d und eine davon abhängige Funktion g_d zum Dechiffrieren:

$$m = g_d(c).$$

- Jeder Teilnehmer errechnet seinen privaten Schlüssel mithilfe einer (nur ihm bekannten) sogenannten **Einwegfunktion** aus dem öffentlichen Schlüssel. Natürlich muss es sehr schwierig bis unmöglich sein, allein aus der Kenntnis des öffentlichen Schlüssels den privaten Schlüssel zu bestimmen.

Kategorien kryptographischer Verfahren

Asymmetrische Verfahren - public-key systems

Asymmetrische Verfahren

Kategorien kryptographischer Verfahren

Asymmetrische Verfahren - public-key systems

Asymmetrische Verfahren

- Es gibt *tatsächlich* Einwegfunktionen, mit denen man (mit geeigneter Zusatzinformation) aus einem gegebenen Chiffrierschlüssel e einen (funktionierenden) Dechiffrierschlüssel d relativ problemlos errechnen kann, während diese Berechnung ohne Zusatzinformation nur mit extrem hohem Aufwand möglich ist.

Kategorien kryptographischer Verfahren

Asymmetrische Verfahren - public-key systems

Asymmetrische Verfahren

- Es gibt *tatsächlich* Einwegfunktionen, mit denen man (mit geeigneter Zusatzinformation) aus einem gegebenen Chiffrierschlüssel e einen (funktionierenden) Dechiffrierschlüssel d relativ problemlos errechnen kann, während diese Berechnung ohne Zusatzinformation nur mit extrem hohem Aufwand möglich ist.
- Das RSA-Verfahren (benannt nach Rivest, Shamir und Adleman, 1977) ist ein Beispiel für ein asymmetrisches Verfahren, das (mit gewissen Modifikationen) auch in der Praxis angewandt wird.

Das RSA-Verfahren

Überblick

Darstellung des RSA-Verfahrens – Überblick:

Das RSA-Verfahren

Überblick

Darstellung des RSA-Verfahrens – Überblick:

- Grundlage der Sicherheit des RSA-Verfahrens

Das RSA-Verfahren

Überblick

Darstellung des RSA-Verfahrens – Überblick:

- Grundlage der Sicherheit des RSA-Verfahrens
- Schlüsselerzeugung: Öffentlicher und privater Schlüssel

Das RSA-Verfahren

Überblick

Darstellung des RSA-Verfahrens – Überblick:

- Grundlage der Sicherheit des RSA-Verfahrens
- Schlüsselerzeugung: Öffentlicher und privater Schlüssel
- Verschlüsselung und Entschlüsselung von Zahlen bzw. Nachrichten

Grundlage der Sicherheit des RSA-Verfahrens

Grundlage der Sicherheit des RSA-Verfahrens

- Mit heute bekannten (echten oder stochastischen) Primzahltests lässt sich auch bei großen Stellenzahlen herausfinden, ob eine Zahl (mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit) eine Primzahl ist oder nicht.

Grundlage der Sicherheit des RSA-Verfahrens

- Mit heute bekannten (echten oder stochastischen) Primzahltests lässt sich auch bei großen Stellenzahlen herausfinden, ob eine Zahl (mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit) eine Primzahl ist oder nicht.
- Dagegen ist die Faktorisierung großer Zahlen, also ihre Zerlegung in ihre Primfaktoren mit den heute bekannten Verfahren im Allgemeinen praktisch nicht durchführbar.

Das RSA-Verfahren

Schlüsselerzeugung

Schlüsselerzeugung beim RSA-Verfahren

Ein öffentlicher Schlüssel ist ein Paar natürlicher Zahlen (n, e), der zugehörige private Schlüssel ein Paar (n, d). Hierbei heißt n **RSA-Modul**, e **Verschlüsselungsexponent** und d **Entschlüsselungsexponent.**

Das RSA-Verfahren

Schlüsselerzeugung

Schlüsselerzeugung beim RSA-Verfahren

Ein öffentlicher Schlüssel ist ein Paar natürlicher Zahlen (n, e), der zugehörige private Schlüssel ein Paar (n, d). Hierbei heißt n **RSA-Modul**, e **Verschlüsselungsexponent** und d **Entschlüsselungsexponent.**

- Wähle zwei (große) voneinander verschiedene Primzahlen p und q, berechne den **RSA-Modul** $n := p \cdot q$

Schlüsselerzeugung beim RSA-Verfahren

Ein öffentlicher Schlüssel ist ein Paar natürlicher Zahlen (n, e), der zugehörige private Schlüssel ein Paar (n, d). Hierbei heißt n **RSA-Modul**, e **Verschlüsselungsexponent** und d **Entschlüsselungsexponent.**

- Wähle zwei (große) voneinander verschiedene Primzahlen p und q, berechne den **RSA-Modul** $n := p \cdot q$
- Berechne $\varphi(n) = (p-1) \cdot (q-1)$, vgl. Satz 25.

Schlüsselerzeugung beim RSA-Verfahren

Ein öffentlicher Schlüssel ist ein Paar natürlicher Zahlen (n, e), der zugehörige private Schlüssel ein Paar (n, d). Hierbei heißt n **RSA-Modul**, e **Verschlüsselungsexponent** und d **Entschlüsselungsexponent.**

- Wähle zwei (große) voneinander verschiedene Primzahlen p und q, berechne den **RSA-Modul** $n := p \cdot q$
- Berechne $\varphi(n) = (p-1) \cdot (q-1)$, vgl. Satz 25.
- Wähle eine Zahl e mit $\text{ggT}\big(e, \varphi(n)\big) = 1$ und $1 < e < \varphi(n)$.

Schlüsselerzeugung beim RSA-Verfahren

Ein öffentlicher Schlüssel ist ein Paar natürlicher Zahlen (n, e), der zugehörige private Schlüssel ein Paar (n, d). Hierbei heißt n **RSA-Modul**, e **Verschlüsselungsexponent** und d **Entschlüsselungsexponent.**

- Wähle zwei (große) voneinander verschiedene Primzahlen p und q, berechne den **RSA-Modul** $n := p \cdot q$
- Berechne $\varphi(n) = (p-1) \cdot (q-1)$, vgl. Satz 25.
- Wähle eine Zahl e mit $\text{ggT}\big(e, \varphi(n)\big) = 1$ und $1 < e < \varphi(n)$.
- Bestimme die multiplikative Inverse d von e modulo $\varphi(n)$, löse also die Gleichung

$$e \cdot d \mod \varphi(n) = 1 \quad \text{bzw.} \quad e \cdot d \underset{\varphi(n)}{\equiv} 1.$$

Das RSA-Verfahren

Schlüsselerzeugung

Schlüsselerzeugung beim RSA-Verfahren:

Das RSA-Verfahren

Schlüsselerzeugung

Schlüsselerzeugung beim RSA-Verfahren:

- In der Praxis werden zwei hinreichend große natürliche Zahlen ausgewählt und durch Primzahltests geprüft, dies solange, bis zwei Primzahlen p und q der gewünschten Länge gefunden sind.

Das RSA-Verfahren

Schlüsselerzeugung

Schlüsselerzeugung beim RSA-Verfahren:

- In der Praxis werden zwei hinreichend große natürliche Zahlen ausgewählt und durch Primzahltests geprüft, dies solange, bis zwei Primzahlen p und q der gewünschten Länge gefunden sind.
- Für den Verschlüsselungsexponenten e wird in der Praxis oft die Fermat-Zahl $F_4 = 2^{(2^4)} + 1 = 65537$ verwendet.

Das RSA-Verfahren

Schlüsselerzeugung

Schlüsselerzeugung beim RSA-Verfahren:

- In der Praxis werden zwei hinreichend große natürliche Zahlen ausgewählt und durch Primzahltests geprüft, dies solange, bis zwei Primzahlen p und q der gewünschten Länge gefunden sind.
- Für den Verschlüsselungsexponenten e wird in der Praxis oft die Fermat-Zahl $F_4 = 2^{(2^4)} + 1 = 65537$ verwendet.
- Die Bestimmung des Entschlüsselungsexponenten d vermöge der Kongruenz

$$e \cdot d \underset{\varphi(n)}{\equiv} 1$$

erfolgt mit dem **erweiterten euklidischen Algorithmus**.

Das RSA-Verfahren

Verschlüsselung

Verschlüsselung beim RSA-Verfahren

Verschlüsselung beim RSA-Verfahren

- Wenn eine Zahl m gegeben ist, so wird das Chiffrat c mithilfe des öffentlichen Schlüssels (n, e) wie folgt berechnet:

$$c = m^e \mod n.$$

Das RSA-Verfahren

Verschlüsselung

Verschlüsselung beim RSA-Verfahren

- Wenn eine Zahl m gegeben ist, so wird das Chiffrat c mithilfe des öffentlichen Schlüssels (n, e) wie folgt berechnet:

$$c = m^e \mod n.$$

- Die Berechnung von c erfolgt in der Praxis mit der sogenannten *binären Exponentiation* bzw. *sukzessivem Quadrieren*.

Das RSA-Verfahren

Entschlüsselung

Entschlüsselung beim RSA-Verfahren

Das RSA-Verfahren

Entschlüsselung

Entschlüsselung beim RSA-Verfahren

- Wenn das Chiffrat c gegeben ist, so erfolgt die Entschlüsselung mithilfe des privaten Schlüssels (n, d) wie folgt:

$$m' = c^d \mod n.$$

Das RSA-Verfahren

Entschlüsselung

Entschlüsselung beim RSA-Verfahren

- Wenn das Chiffrat c gegeben ist, so erfolgt die Entschlüsselung mithilfe des privaten Schlüssels (n, d) wie folgt:

$$m' = c^d \mod n.$$

- Auch die Berechnung von m' erfolgt in der Praxis mit **binärer Exponentiation**.

Das RSA-Verfahren

Entschlüsselung

Entschlüsselung beim RSA-Verfahren

- Wenn das Chiffrat c gegeben ist, so erfolgt die Entschlüsselung mithilfe des privaten Schlüssels (n, d) wie folgt:

$$m' = c^d \mod n.$$

- Auch die Berechnung von m' erfolgt in der Praxis mit **binärer Exponentiation**.
- Natürlich hat dies nur einen Sinn, wenn m' gleich der ursprünglichen Nachricht m ist.
- Die Tatsache, dass tatsächlich $m' = m$ gilt, wird als **Satz vom korrekten Dechiffrieren** in der Literatur bewiesen (z.B. in A. Beutelsbacher: Kryptologie, Vieweg), vgl. auch Folien 74 ff.

Das RSA-Verfahren

Verschlüsselung von Textnachrichten

Textnachrichten: *Codierung* vor Verschlüsselung

Soll eine Textnachricht verschlüsselt werden, so muss diese zunächst mit einem geeigneten Code als Zahl dargestellt werden. Bei englischen Texten kann dies z.B. mit dem *ASCII (American Standard Code for Information Interchange)* bewerkstelligt werden.

Das RSA-Verfahren

Demonstrationsbeispiel

Darstellung des RSA-Verfahrens – Demonstrationsbeispiel

Wir werden nun anhand eines Demonstrationsbeispiels (mit sehr kleinen Zahlen) die einzelnen Schritte des RSA-Verfahrens vorführen, zunächst die Schlüsselerzeugung.

Darstellung des RSA-Verfahrens – Demonstrationsbeispiel

Wir werden nun anhand eines Demonstrationsbeispiels (mit sehr kleinen Zahlen) die einzelnen Schritte des RSA-Verfahrens vorführen, zunächst die Schlüsselerzeugung.

- Wähle $p = 13,\ q = 17.$ Dann gilt

$$n = p \cdot q = 13 \cdot 17 = 221$$

und

$$\varphi(n) = 12 \cdot 16 = 192\,.$$

Darstellung des RSA-Verfahrens – Demonstrationsbeispiel

Wir werden nun anhand eines Demonstrationsbeispiels (mit sehr kleinen Zahlen) die einzelnen Schritte des RSA-Verfahrens vorführen, zunächst die Schlüsselerzeugung.

- Wähle $p = 13,\ q = 17.$ Dann gilt

$$n = p \cdot q = 13 \cdot 17 = 221$$

und

$$\varphi(n) = 12 \cdot 16 = 192\,.$$

- Wähle weiterhin $e = 5,$ dann ist sicherlich $\mathrm{ggT}(5, 192) = 1.$

Darstellung des RSA-Verfahrens – Demonstrationsbeispiel

Wir werden nun anhand eines Demonstrationsbeispiels (mit sehr kleinen Zahlen) die einzelnen Schritte des RSA-Verfahrens vorführen, zunächst die Schlüsselerzeugung.

- Wähle $p = 13,\ q = 17.$ Dann gilt

$$n = p \cdot q = 13 \cdot 17 = 221$$

und

$$\varphi(n) = 12 \cdot 16 = 192\,.$$

- Wähle weiterhin $e = 5,$ dann ist sicherlich $\mathrm{ggT}(5, 192) = 1.$

Hörsaalübung

Bestimme d so, dass $5 \cdot d \underset{192}{\equiv} 1$ gilt.

Versuchen Sie dies zunächst durch geschicktes „Raten“; ein systematisches Verfahren (erweiterter euklidischer Algorithmus) wird später vorgestellt.

Demonstrationsbeispiel – Verschlüsselung

Mit unserem öffentlichen Schlüssel $(n, e) = (221, 5)$ werden wir nun die „Nachricht“ $m = 10$ verschlüsseln:

$$c = m^e \mod n = 10^5 \mod 221.$$

Wir führen an diesem Beispiel das Verfahren der binären Exponentiation vor.

Demonstrationsbeispiel – Verschlüsselung

Wir stellen $e = 5$ als Summe von Zweierpotenzen dar: $5 = 1 + 4 = 2^0 + 2^2$ Daraus folgt

$$\begin{aligned} m^e \mod 221 &= 10^5 \mod 221 = 10^{(1+4)} \mod 221 \\ &= 10 \cdot 10^4 \mod 221. \end{aligned}$$

Demonstrationsbeispiel – Verschlüsselung

Wir stellen $e = 5$ als Summe von Zweierpotenzen dar: $5 = 1 + 4 = 2^0 + 2^2$ Daraus folgt

$$\begin{aligned} m^e \mod 221 &= 10^5 \mod 221 = 10^{(1+4)} \mod 221 \\ &= 10 \cdot 10^4 \mod 221. \end{aligned}$$

Wir berechnen $m^e = 10^5 \mod 221$ durch sukzessives Quadrieren und Multiplizieren:

$$10^2 = 100 \underset{221}{\equiv} 100$$

$$10^4 = \left(10^2\right)^2 = 100 \cdot 100 = 45 \cdot 221 + 55 \underset{221}{\equiv} 55$$

$$10^5 = 10 \cdot 10^4 \underset{221}{\equiv} 10 \cdot 55 = 550 = 2 \cdot 221 + 108 \underset{221}{\equiv} 108$$

Demonstrationsbeispiel – Chiffrat

Wir haben somit das Chiffrat

$$c = m^e \mod n = 10^5 \mod 221 = 108$$

erhalten. Dieses wird an den Empfänger bzw. die Empfängerin gesandt

Ende Sitzung 2 zu RSA (08.6.2021)

Das RSA-Verfahren

Demonstrationsbeispiel

Demonstrationsbeispiel – Chiffrat

Wir haben somit das Chiffrat

$$c = m^e \mod n = 10^5 \mod 221 = 108$$

erhalten. Dieses wird an den Empfänger bzw. die Empfängerin gesandt

Hörsaalübung: Demonstrationsbeispiel – Entschlüsselung

Mit dem privaten Schlüssel $(n, d) = (221, 77)$ **entschlüsseln** wir das Chiffrat $c = 108$:

$$m' = c^d \mod n = 108^{77} \mod 221.$$

Hinweis: Zur Bearbeitung dieser Aufgabe ist ein Taschenrechner von Nutzen.

Ende Sitzung 2 zu RSA (08.6.2021)

Demonstrationsbeispiel – Entschlüsselung

Mit $77 = 64 + 8 + 4 + 1 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0$ folgt $c^d = c^{77} = c^{64} \cdot c^8 \cdot c^4 \cdot c$. Sukzessives Quadrieren:

$$
\begin{aligned}
c^2 &= 108^2 \underset{221}{\equiv} 172 \underset{221}{\equiv} -49 \\
c^4 &= \left(c^2\right)^2 \underset{221}{\equiv} (-49)^2 \underset{221}{\equiv} 191 \underset{221}{\equiv} -30 \\
c^8 &= \left(c^4\right)^2 \underset{221}{\equiv} (-30)^2 = 900 \underset{221}{\equiv} 16 \\
c^{16} &= \left(c^8\right)^2 \underset{221}{\equiv} (16)^2 = 256 \underset{221}{\equiv} 35 \\
c^{32} &= \left(c^{16}\right)^2 \underset{221}{\equiv} (35)^2 = 1225 = 1105 + 120 \underset{221}{\equiv} 120 \\
c^{64} &= \left(c^{32}\right)^2 \underset{221}{\equiv} (120)^2 \underset{221}{\equiv} 35
\end{aligned}
$$

Demonstrationsbeispiel – Entschlüsselung

Damit folgt

$$m' = c^d = c^{77} \underset{221}{\equiv} 35 \cdot 16 \cdot (-30) \cdot 108.$$

Ausreduktion modulo 221:

$$35 \cdot 16 = 560 = 2 \cdot 221 + 118 \underset{221}{\equiv} 118$$
$$(-30) \cdot 108 \underset{221}{\equiv} (-30) \cdot (-113) = 3390 = 15 \cdot 221 + 75 \underset{221}{\equiv} 75$$
$$118 \cdot 75 = 8850 = 40 \cdot 221 + 10 \underset{221}{\equiv} 10.$$

Somit ist $m' = 10$, also ist $m' = m$, d.h. bei der Dechiffrierung von m hat sich in der Tat wieder unsere ursprüngliche Nachricht m ergeben.

Das RSA-Verfahren

Berechnung des Entschlüsselungsexponenten

Erinnerung

Wenn $\varphi(n)$ berechnet und ein Verschlüsselungsexponent e mit $\mathrm{ggT}(e, \varphi(n)) = 1$ gewählt wurde, so muss ein Entschlüsselungsexponent d bestimmt werden, der die Gleichung

$$e \cdot d \underset{\varphi(n)}{\equiv} 1$$

erfüllt.

Das RSA-Verfahren

Berechnung des Entschlüsselungsexponenten

Erinnerung

Wenn $\varphi(n)$ berechnet und ein Verschlüsselungsexponent e mit $\mathrm{ggT}(e, \varphi(n)) = 1$ gewählt wurde, so muss ein Entschlüsselungsexponent d bestimmt werden, der die Gleichung

$$e \cdot d \underset{\varphi(n)}{\equiv} 1$$

erfüllt.

Hierzu dient der erweiterte euklidische Algorithmus, den wir im Folgenden besprechen.

Das RSA-Verfahren

Berechnung des Entschlüsselungsexponenten

Erweiterter euklidischer Algorithmus (EEA)

Es seien zwei ganze Zahlen x und y gegeben. Mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus können wir

Das RSA-Verfahren

Berechnung des Entschlüsselungsexponenten

Erweiterter euklidischer Algorithmus (EEA)

Es seien zwei ganze Zahlen x und y gegeben. Mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus können wir

- den **größten gemeinsamen Teiler** $\mathrm{ggT}(x, y)$ von x und y bestimmen,

Das RSA-Verfahren

Berechnung des Entschlüsselungsexponenten

Erweiterter euklidischer Algorithmus (EEA)

Es seien zwei ganze Zahlen x und y gegeben. Mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus können wir

- den **größten gemeinsamen Teiler** $\mathrm{ggT}(x, y)$ von x und y bestimmen,
- die Zahl $\mathrm{ggT}(x, y)$ als sogenannte **Vielfachsumme** darstellen, d.h. ganze Zahlen a und b derart bestimmen, dass

$$\mathrm{ggT}(x, y) = a \cdot x + b \cdot y \qquad \text{gilt.}$$

Das RSA-Verfahren

Berechnung des Entschlüsselungsexponenten

Erweiterter euklidischer Algorithmus (EEA)

Es seien zwei ganze Zahlen x und y gegeben. Mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus können wir

- den **größten gemeinsamen Teiler** $\mathrm{ggT}(x, y)$ von x und y bestimmen,
- die Zahl $\mathrm{ggT}(x, y)$ als sogenannte **Vielfachsumme** darstellen, d.h. ganze Zahlen a und b derart bestimmen, dass

$$\mathrm{ggT}(x, y) = a \cdot x + b \cdot y \qquad \text{gilt.}$$

Anwendung

Zur Bestimung des Entchlüsselungsexponenten d bei gegegeben Werten $\varphi(n)$ und e ergibt sich speziell

Das RSA-Verfahren

Berechnung des Entschlüsselungsexponenten

Erweiterter euklidischer Algorithmus (EEA)

Es seien zwei ganze Zahlen x und y gegeben. Mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus können wir

- den **größten gemeinsamen Teiler** $\mathrm{ggT}(x, y)$ von x und y bestimmen,
- die Zahl $\mathrm{ggT}(x, y)$ als sogenannte **Vielfachsumme** darstellen, d.h. ganze Zahlen a und b derart bestimmen, dass

$$\mathrm{ggT}(x, y) = a \cdot x + b \cdot y \qquad \text{gilt.}$$

Anwendung

Zur Bestimung des Entchlüsselungsexponenten d bei gegegeben Werten $\varphi(n)$ und e ergibt sich speziell

- eine Vielfachsummendarstellung von $1 = \mathrm{ggT}\,(e, \varphi(n))$ in der Form

$$1 = a \cdot e + b \cdot \varphi(n);$$

Das RSA-Verfahren

Berechnung des Entschlüsselungsexponenten

Erweiterter euklidischer Algorithmus (EEA)

Es seien zwei ganze Zahlen x und y gegeben. Mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus können wir

- den **größten gemeinsamen Teiler** $\mathrm{ggT}(x, y)$ von x und y bestimmen,
- die Zahl $\mathrm{ggT}(x, y)$ als sogenannte **Vielfachsumme** darstellen, d.h. ganze Zahlen a und b derart bestimmen, dass

$$\mathrm{ggT}(x, y) = a \cdot x + b \cdot y \qquad \text{gilt.}$$

Anwendung

Zur Bestimung des Entchlüsselungsexponenten d bei gegegeben Werten $\varphi(n)$ und e ergibt sich speziell

- eine Vielfachsummendarstellung von $1 = \mathrm{ggT}\,(e, \varphi(n))$ in der Form

$$1 = a \cdot e + b \cdot \varphi(n);$$

- Hieraus ergibt sich

$$a \cdot e = -b \cdot \varphi(n) + 1 \underset{\varphi(n)}{\equiv} 1,$$

wir setzen dann $d = a$.

Das RSA-Verfahren

Erweiterter euklidischer Algorithmus (EEA)

Beispiel

Es seien die Zahlen 93 und 39 gegeben.

Das RSA-Verfahren

Erweiterter euklidischer Algorithmus (EEA)

Beispiel

Es seien die Zahlen 93 und 39 gegeben. Wir demonstrieren den erweiterten euklidischen Algorithmus und bestimmen zunächst $\mathrm{ggT}\,(93, 39)$:

Beispiel

Es seien die Zahlen 93 und 39 gegeben. Wir demonstrieren den erweiterten euklidischen Algorithmus und bestimmen zunächst $\mathrm{ggT}(93, 39)$:

$$93 = 2 \cdot 39 + 15$$

Beispiel

Es seien die Zahlen 93 und 39 gegeben. Wir demonstrieren den erweiterten euklidischen Algorithmus und bestimmen zunächst $\mathrm{ggT}(93, 39)$:

$$93 = 2 \cdot 39 + 15$$

$$39 = 2 \cdot 15 + 9$$

Beispiel

Es seien die Zahlen 93 und 39 gegeben. Wir demonstrieren den erweiterten euklidischen Algorithmus und bestimmen zunächst $\mathrm{ggT}\,(93, 39)$:

$$93 = 2 \cdot 39 + 15$$

$$39 = 2 \cdot 15 + 9$$

$$15 = 1 \cdot 9 + 6$$

Das RSA-Verfahren

Erweiterter euklidischer Algorithmus (EEA)

Beispiel

Es seien die Zahlen 93 und 39 gegeben. Wir demonstrieren den erweiterten euklidischen Algorithmus und bestimmen zunächst $\mathrm{ggT}(93, 39)$:

$$93 = 2 \cdot 39 + 15$$

$$39 = 2 \cdot 15 + 9$$

$$15 = 1 \cdot 9 + 6$$

$$9 = 1 \cdot 6 + 3$$

Das RSA-Verfahren

Erweiterter euklidischer Algorithmus (EEA)

Beispiel

Es seien die Zahlen 93 und 39 gegeben. Wir demonstrieren den erweiterten euklidischen Algorithmus und bestimmen zunächst $\mathrm{ggT}(93, 39)$:

$$93 = 2 \cdot 39 + 15$$
$$39 = 2 \cdot 15 + 9$$
$$15 = 1 \cdot 9 + 6$$
$$9 = 1 \cdot 6 + 3$$
$$6 = 2 \cdot 3 + 0$$

Beispiel

Es seien die Zahlen 93 und 39 gegeben. Wir demonstrieren den erweiterten euklidischen Algorithmus und bestimmen zunächst $\mathrm{ggT}(93, 39)$:

$$
\begin{aligned}
93 &= 2 \cdot 39 + 15 \\
39 &= 2 \cdot 15 + 9 \\
15 &= 1 \cdot 9 + 6 \\
9 &= 1 \cdot 6 + 3 \\
6 &= 2 \cdot 3 + \boxed{0}
\end{aligned}
$$

Wir erkennen in der letzten Zeile die Abbruchbedingung „Division geht auf“:

Beispiel

Es seien die Zahlen 93 und 39 gegeben. Wir demonstrieren den erweiterten euklidischen Algorithmus und bestimmen zunächst $\mathrm{ggT}\,(93, 39)$:

$$
\begin{aligned}
93 &= 2 \cdot 39 + 15 \\
39 &= 2 \cdot 15 + 9 \\
15 &= 1 \cdot 9 + 6 \\
9 &= 1 \cdot 6 + 3 \\
6 &= 2 \cdot 3 + \boxed{0}
\end{aligned}
$$

Wir erkennen in der letzten Zeile die Abbruchbedingung „Division geht auf“:

$$6 = 2 \cdot 3 + \boxed{0}.$$

Das RSA-Verfahren

Erweiterter euklidischer Algorithmus (EEA)

Beispiel

Es seien die Zahlen 93 und 39 gegeben. Wir demonstrieren den erweiterten euklidischen Algorithmus und bestimmen zunächst $\mathrm{ggT}(93, 39)$:

$$93 = 2 \cdot 39 + 15 \quad \text{-> gT(93,39) = gT(39,15)}$$

$$39 = 2 \cdot 15 + 9 \quad \text{-> gT(39,15) = gT(15,9)}$$

$$15 = 1 \cdot 9 + 6 \quad \text{-> gT(15,9) = gT(9,6)}$$

$$9 = 1 \cdot 6 + \boxed{3} \quad \text{-> gT(9,6) = gT(6,3)}$$

$$6 = 2 \cdot \boxed{3} + 0 \quad \text{-> ggT(6,3) = 3}$$

=> ggT(93,39) = 3

In den beiden letzten Zeilen sehen wir den größten gemeinsamen Teiler von 93 und 39.

$$\mathrm{ggT}(93, 39) = \boxed{3}.$$

Beispiel

Es seien die Zahlen 93 und 39 gegeben. Wir demonstrieren den erweiterten euklidischen Algorithmus und bestimmen zunächst $\mathrm{ggT}\,(93, 39)$:

$$
\begin{aligned}
93 &= 2 \cdot 39 + 15 \\
39 &= 2 \cdot 15 + 9 \\
15 &= 1 \cdot 9 + 6 \\
9 &= 1 \cdot 6 + \boxed{3} \\
6 &= 2 \cdot \boxed{3} + \boxed{0}
\end{aligned}
$$

Wir erkennen in der letzten Zeile die Abbruchbedingung „Division geht auf“:

$$6 = 2 \cdot 3 + \boxed{0}.$$

In den beiden letzten Zeilen sehen wir den größten gemeinsamen Teiler von 93 und 39.

$$\mathrm{ggT}\,(93, 39) = \boxed{3}.$$

Beispiel – Probe

Wir prüfen von Hand nach, dass das Ergebnis $\mathrm{ggT}\,(93, 39) = 3$, das uns der euklidische Algorithmus geliefert hat, richtig ist:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 93 &= 93 = 3 \cdot 31 \\ 1 \cdot 39 &= 39 = 3 \cdot 13. \end{aligned}$$

Die gemeinsamen Teiler von 93 und 39 sind 1 und 3, der größte gemeinsame Teiler ist somit 3.

Beispiel – Vielfachsummendarstellung von $\mathrm{ggT}\,(93, 39)$:

Mit der **Erweiterung** des euklidischen Algorithmus' verschaffen wir uns nun eine Darstellung der Form

$$\mathrm{ggT}\,(93, 39) = 3 \;=\; a \cdot 93 + b \cdot 39 :$$

Beispiel – Vielfachsummendarstellung von $\mathrm{ggT}\,(93, 39)$:

Mit der **Erweiterung** des euklidischen Algorithmus' verschaffen wir uns nun eine Darstellung der Form

$$\mathrm{ggT}\,(93, 39) = 3 \;=\; a \cdot 93 + b \cdot 39 :$$

Wir stellen hierzu zunächst die vorletzte Zeile $9 = 1{\cdot}6{+}3$ unserer vorherigen Rechnung um:

$$3 = 9 - 1 \cdot 6 \tag{1}$$

Beispiel – Vielfachsummendarstellung von $\mathrm{ggT}\,(93, 39)$:

Mit der **Erweiterung** des euklidischen Algorithmus' verschaffen wir uns nun eine Darstellung der Form

$$\mathrm{ggT}\,(93, 39) = 3 \;=\; a \cdot 93 + b \cdot 39\,:$$

Wir stellen hierzu zunächst die vorletzte Zeile $9 = 1{\cdot}6{+}3$ unserer vorherigen Rechnung um:

$$3 = 9 - 1 \cdot 6 \tag{1}$$

Dies ist bereits eine Vielfachsummendarstellung von 3, allerdings nicht in Abhängigkeit von 93 und 39, sondern in Abhängigkeit von 9 und 6. Wir gehen nun schrittweise rückwärts vor:

Beispiel – Vielfachsummendarstellung von $\mathrm{ggT}\,(93, 39)$:

Mit der **Erweiterung** des euklidischen Algorithmus' verschaffen wir uns nun eine Darstellung der Form

$$\mathrm{ggT}\,(93, 39) = 3 \;=\; a \cdot 93 + b \cdot 39 :$$

Wir stellen hierzu zunächst die vorletzte Zeile $9 = 1{\cdot}6{+}3$ unserer vorherigen Rechnung um:

$$3 = 9 - 1 \cdot 6 \tag{1}$$

Dies ist bereits eine Vielfachsummendarstellung von 3, allerdings nicht in Abhängigkeit von 93 und 39, sondern in Abhängigkeit von 9 und 6. Wir gehen nun schrittweise rückwärts vor: Aus der **drittletzten** Zeile $15 = 1 \cdot 9 + 6$ erhalten wir eine Darstellung für 6, nämlich $6 = 15 - 1 \cdot 9$, die wir in Gleichung (1) einsetzen:

$$3 = 9 - 1 \cdot \underbrace{(15 - 1 \cdot 9)}_{6} = -1 \cdot 15 + 2 \cdot 9 \tag{2}$$

Beispiel – Vielfachsummendarstellung von $\mathrm{ggT}\,(93, 39)$:

Mit der **Erweiterung** des euklidischen Algorithmus' verschaffen wir uns nun eine Darstellung der Form

$$\mathrm{ggT}\,(93, 39) = 3 \;=\; a \cdot 93 + b \cdot 39 :$$

Wir stellen hierzu zunächst die vorletzte Zeile $9 = 1{\cdot}6{+}3$ unserer vorherigen Rechnung um:

$$3 = 9 - 1 \cdot 6 \tag{1}$$

Dies ist bereits eine Vielfachsummendarstellung von 3, allerdings nicht in Abhängigkeit von 93 und 39, sondern in Abhängigkeit von 9 und 6. Wir gehen nun schrittweise rückwärts vor: Aus der **drittletzten** Zeile $15 = 1 \cdot 9 + 6$ erhalten wir eine Darstellung für 6, nämlich $6 = 15 - 1 \cdot 9$, die wir in Gleichung (1) einsetzen:

$$3 = 9 - 1 \cdot \underbrace{(15 - 1 \cdot 9)}_{6} = -1 \cdot 15 + 2 \cdot 9 \tag{2}$$

Aus der **viertletzten** Zeile $39 = 2 \cdot 15 + 9$ erhalten wir eine Darstellung für 9, nämlich $9 = 39 - 2 \cdot 15$, die wir in Gleichung (2) einsetzen:

$$3 = -1 \cdot 15 + 2 \cdot \underbrace{(39 - 2 \cdot 15)}_{9} = -5 \cdot 15 + 2 \cdot 39 \tag{3}$$

Das RSA-Verfahren

Erweiterter euklidischer Algorithmus (EEA)

Beispiel – Vielfachsummendarstellung von $\mathrm{ggT}\,(93, 39)$:

Zwischenergebnis:

$$3 = -5 \cdot 15 + 2 \cdot 39 \tag{3}$$

Beispiel – Vielfachsummendarstellung von $\mathrm{ggT}\,(93, 39)$:

Zwischenergebnis:

$$3 = -5 \cdot 15 + 2 \cdot 39 \tag{3}$$

Auch dies ist eine Vielfachsummendarstellung von 3, allerdings noch immer nicht in Abhängigkeit von 93 und 39, sondern in Abhängigkeit von 15 und 39. Wir müssen also die Zahl 15 noch ersetzen.

Beispiel – Vielfachsummendarstellung von $\mathrm{ggT}\,(93, 39)$:

Zwischenergebnis:

$$3 = -5 \cdot 15 + 2 \cdot 39 \tag{3}$$

Auch dies ist eine Vielfachsummendarstellung von 3, allerdings noch immer nicht in Abhängigkeit von 93 und 39, sondern in Abhängigkeit von 15 und 39. Wir müssen also die Zahl 15 noch ersetzen.

Aus der **fünftletzten** Zeile $93 = 2 \cdot 39 + 15$ erhalten wir eine Darstellung für 15, nämlich $15 = 93 - 2 \cdot 39$, die wir in Gleichung (3) einsetzen:

$$3 = -5 \cdot 15 + 2 \cdot 39 = -5 \cdot \underbrace{(93 - 2 \cdot 39)}_{15} + 2 \cdot 39 = -5 \cdot 93 + 12 \cdot 39 \tag{4}$$

Beispiel – Vielfachsummendarstellung von $\mathrm{ggT}\,(93, 39)$:

Zwischenergebnis:

$$3 = -5 \cdot 15 + 2 \cdot 39 \tag{3}$$

Auch dies ist eine Vielfachsummendarstellung von 3, allerdings noch immer nicht in Abhängigkeit von 93 und 39, sondern in Abhängigkeit von 15 und 39. Wir müssen also die Zahl 15 noch ersetzen.

Aus der **fünftletzten** Zeile $93 = 2 \cdot 39 + 15$ erhalten wir eine Darstellung für 15, nämlich $15 = 93 - 2 \cdot 39$, die wir in Gleichung (3) einsetzen:

$$3 = -5 \cdot 15 + 2 \cdot 39 = -5 \cdot \underbrace{(93 - 2 \cdot 39)}_{15} + 2 \cdot 39 = -5 \cdot 93 + 12 \cdot 39 \tag{4}$$

Auf der rechten Seite der Gleichung $3 = -5 \cdot 93 + 12 \cdot 39$ steht nun die gesuchte Vielfachsummendarstellung von $3 = \mathrm{ggT}\,(93, 39)$ in Abhängigkeit von 93 und 39.

Beispiel – Vielfachsummendarstellung von $\mathrm{ggT}\,(93, 39)$:

Zwischenergebnis:

$$3 = -5 \cdot 15 + 2 \cdot 39 \tag{3}$$

Auch dies ist eine Vielfachsummendarstellung von 3, allerdings noch immer nicht in Abhängigkeit von 93 und 39, sondern in Abhängigkeit von 15 und 39. Wir müssen also die Zahl 15 noch ersetzen.

Aus der **fünftletzten** Zeile $93 = 2 \cdot 39 + 15$ erhalten wir eine Darstellung für 15, nämlich $15 = 93 - 2 \cdot 39$, die wir in Gleichung (3) einsetzen:

$$3 = -5 \cdot 15 + 2 \cdot 39 = -5 \cdot \underbrace{(93 - 2 \cdot 39)}_{15} + 2 \cdot 39 = -5 \cdot 93 + 12 \cdot 39 \tag{4}$$

Auf der rechten Seite der Gleichung $3 = -5 \cdot 93 + 12 \cdot 39$ steht nun die gesuchte Vielfachsummendarstellung von $3 = \mathrm{ggT}\,(93, 39)$ in Abhängigkeit von 93 und 39.

Probe

$$-5 \cdot 93 + 12 \cdot 39 = -465 + 468 = 3$$

Beispiel – Vielfachsummendarstellung von $\mathrm{ggT}(93, 39)$:

Zwischenergebnis:

$$3 = -5 \cdot 15 + 2 \cdot 39 \tag{3}$$

Auch dies ist eine Vielfachsummendarstellung von 3, allerdings noch immer nicht in Abhängigkeit von 93 und 39, sondern in Abhängigkeit von 15 und 39. Wir müssen also die Zahl 15 noch ersetzen.

Aus der **fünftletzten** Zeile $93 = 2 \cdot 39 + 15$ erhalten wir eine Darstellung für 15, nämlich $15 = 93 - 2 \cdot 39$, die wir in Gleichung (3) einsetzen:

$$3 = -5 \cdot 15 + 2 \cdot 39 = -5 \cdot \underbrace{(93 - 2 \cdot 39)}_{15} + 2 \cdot 39 = -5 \cdot 93 + 12 \cdot 39 \tag{4}$$

Auf der rechten Seite der Gleichung $3 = -5 \cdot 93 + 12 \cdot 39$ steht nun die gesuchte Vielfachsummendarstellung von $3 = \mathrm{ggT}(93, 39)$ in Abhängigkeit von 93 und 39.

Probe

$$-5 \cdot 93 + 12 \cdot 39 = -465 + 468 = 3 \quad \checkmark$$

RSA-Demonstrationsbeispiel – Fortsetzung und Schluss

Wir verwenden nun den EEA zur Bestimmung des Entschlüsselungsexponenten d in unserem Demo-Beispiel mit

$$n = 13 \cdot 17,\ \varphi(n) = 12 \cdot 16 = 192,\ e = 5 :$$

RSA-Demonstrationsbeispiel – Fortsetzung und Schluss

Wir verwenden nun den EEA zur Bestimmung des Entschlüsselungsexponenten d in unserem Demo-Beispiel mit

$$n = 13 \cdot 17,\ \varphi(n) = 12 \cdot 16 = 192,\ e = 5:$$

- Schritt 1: Euklidischer Algorithmus

$$\begin{aligned} 192 &= 38 \cdot 5 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0. \end{aligned}$$

RSA-Demonstrationsbeispiel – Fortsetzung und Schluss

Wir verwenden nun den EEA zur Bestimmung des Entschlüsselungsexponenten d in unserem Demo-Beispiel mit

$$n = 13 \cdot 17,\ \varphi(n) = 12 \cdot 16 = 192,\ e = 5:$$

- Schritt 1: Euklidischer Algorithmus

$$\begin{aligned} 192 &= 38 \cdot 5 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + \boxed{1} \\ 2 &= 2 \cdot \boxed{1} + 0. \end{aligned}$$

RSA-Demonstrationsbeispiel – Fortsetzung und Schluss

Wir verwenden nun den EEA zur Bestimmung des Entschlüsselungsexponenten d in unserem Demo-Beispiel mit

$$n = 13 \cdot 17,\ \varphi(n) = 12 \cdot 16 = 192,\ e = 5:$$

- Schritt 1: Euklidischer Algorithmus

$$\begin{aligned} 192 &= 38 \cdot 5 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + \boxed{1} \\ 2 &= 2 \cdot \boxed{1} + 0. \end{aligned}$$

- Schritt 2: Erweiterung zur Bestimmung der Vielfachsummendarstellung von $\boxed{1 = \mathrm{ggT}\,(192, 5)}$:

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 2 \cdot 2 \\ \rightsquigarrow 1 &= 5 - 2 \cdot \underbrace{(192 - 38 \cdot 5)}_{2} \\ \rightsquigarrow 1 &= -2 \cdot 192 + 77 \cdot 5 \end{aligned}$$

RSA-Demonstrationsbeispiel – Fortsetzung und Schluss

Wir verwenden nun den EEA zur Bestimmung des Entschlüsselungsexponenten d in unserem Demo-Beispiel mit

$$n = 13 \cdot 17,\ \varphi(n) = 12 \cdot 16 = 192,\ e = 5:$$

- Schritt 1: Euklidischer Algorithmus

$$\begin{aligned} 192 &= 38 \cdot 5 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + \boxed{1} \\ 2 &= 2 \cdot \boxed{1} + 0. \end{aligned}$$

- Schritt 2: Erweiterung zur Bestimmung der Vielfachsummendarstellung von $\boxed{1 = \mathrm{ggT}\,(192, 5)}$:

$$\begin{aligned} & 1 = 5 - 2 \cdot 2 \\ \rightsquigarrow\ & 1 = 5 - 2 \cdot \underbrace{(192 - 38 \cdot 5)}_{2} \\ \rightsquigarrow\ & 1 = -2 \cdot 192 + 77 \cdot 5 \end{aligned}$$

Hieraus folgt $77 \cdot 5 = 2 \cdot 192 + 1$ bzw. $77 \cdot 5 \underset{192}{\equiv} 1$. Somit ist $d = 77$ die gesuchte modulare Inverse von $e = 5$.

Das RSA-Verfahren

Berechnung des Entschlüsselungsexponenten

Hörsaalübung

Nehmen Sie an, dass für den öffentlichen RSA-Schüssel $(n, e) = (247, 7)$ gewählt wurde. Bestimmen Sie

- die Faktorisierung $247 = p \cdot q$,
- den Wert $\varphi(247)$,
- den Entschlüsselungsexponenten d mithilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus.

Faktorisierung von Restklassenringen

Einführung:

- In unserem Demonstrationsbeispiel mussten wir u.a.

$$c = 10^5 \mod 221 \quad \text{und} \quad m' = 108^{77} \mod 221 \quad \text{berechnen.}$$

Faktorisierung von Restklassenringen

Einführung:

- In unserem Demonstrationsbeispiel mussten wir u.a.

$$c = 10^5 \mod 221 \quad \text{und} \quad m' = 108^{77} \mod 221 \quad \text{berechnen.}$$

- Wir nutzen hierzu nun die folgende Korrespondenz:

$$10^2 \leftrightarrow \Big([100 \mod 13]_{13}, [100 \mod 17]_{17}\Big) = \Big([9]_{13}, [15]_{17}\Big) \equiv \Big([9]_{13}, [-2]_{17}\Big)$$

Faktorisierung von Restklassenringen

Einführung:

- In unserem Demonstrationsbeispiel mussten wir u.a.

$$c = 10^5 \mod 221 \quad \text{und} \quad m' = 108^{77} \mod 221 \quad \text{berechnen.}$$

- Wir nutzen hierzu nun die folgende Korrespondenz:

$$10^2 \leftrightarrow \Big([100 \mod 13]_{13}, [100 \mod 17]_{17}\Big) = \Big([9]_{13}, [15]_{17}\Big) \equiv \Big([9]_{13}, [-2]_{17}\Big)$$

- und rechnen hiermit weiter:

$$10^4 = \left(10^2\right)^2 \leftrightarrow \Big([9^2 \mod 13]_{13}, [(-2)^2 \mod 17]_{17}\Big) = \Big([3]_{13}, [4]_{17}\Big).$$

Faktorisierung von Restklassenringen

Einführung:

- In unserem Demonstrationsbeispiel mussten wir u.a.

$$c = 10^5 \mod 221 \quad \text{und} \quad m' = 108^{77} \mod 221 \quad \text{berechnen.}$$

- Wir nutzen hierzu nun die folgende Korrespondenz:

$$10^2 \leftrightarrow \Big([100 \mod 13]_{13}, [100 \mod 17]_{17}\Big) = \Big([9]_{13}, [15]_{17}\Big) \equiv \Big([9]_{13}, [-2]_{17}\Big)$$

- und rechnen hiermit weiter:

$$10^4 = \left(10^2\right)^2 \leftrightarrow \Big([9^2 \mod 13]_{13}, [(-2)^2 \mod 17]_{17}\Big) = \Big([3]_{13}, [4]_{17}\Big).$$

- Somit gilt

$$10^5 = 10^4 \cdot 10 \leftrightarrow \Big([3 \cdot 10 \mod 13]_{13}, [4 \cdot 10 \mod 17]_{17}\Big) = \Big([30]_{13}, [40]_{17}\Big) \equiv \Big([4]_{13}, [6]_{17}\Big).$$

Faktorisierung von Restklassenringen

Einführung:

- In unserem Demonstrationsbeispiel mussten wir u.a.

$$c = 10^5 \mod 221 \quad \text{und} \quad m' = 108^{77} \mod 221 \quad \text{berechnen.}$$

- Wir nutzen hierzu nun die folgende Korrespondenz:

$$10^2 \leftrightarrow \Big([100 \mod 13]_{13}, [100 \mod 17]_{17}\Big) = \Big([9]_{13}, [15]_{17}\Big) \equiv \Big([9]_{13}, [-2]_{17}\Big)$$

- und rechnen hiermit weiter:

$$10^4 = \left(10^2\right)^2 \leftrightarrow \Big([9^2 \mod 13]_{13}, [(-2)^2 \mod 17]_{17}\Big) = \Big([3]_{13}, [4]_{17}\Big).$$

- Somit gilt

$$10^5 = 10^4 \cdot 10 \leftrightarrow \Big([3 \cdot 10 \mod 13]_{13}, [4 \cdot 10 \mod 17]_{17}\Big) = \Big([30]_{13}, [40]_{17}\Big) \equiv \Big([4]_{13}, [6]_{17}\Big).$$

- Wir müssen nun noch die Zahl x bestimmen, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$x \underset{13}{\equiv} 4 \qquad \text{und} \qquad x \underset{17}{\equiv} 6.$$

Faktorisierung von Restklassenringen

Einführung:

- In unserem Demonstrationsbeispiel mussten wir u.a.

$$c = 10^5 \mod 221 \quad \text{und} \quad m' = 108^{77} \mod 221 \quad \text{berechnen.}$$

- Wir nutzen hierzu nun die folgende Korrespondenz:

$$10^2 \leftrightarrow \Big([100 \mod 13]_{13}, [100 \mod 17]_{17}\Big) = \Big([9]_{13}, [15]_{17}\Big) \equiv \Big([9]_{13}, [-2]_{17}\Big)$$

- und rechnen hiermit weiter:

$$10^4 = \left(10^2\right)^2 \leftrightarrow \Big([9^2 \mod 13]_{13}, [(-2)^2 \mod 17]_{17}\Big) = \Big([3]_{13}, [4]_{17}\Big).$$

- Somit gilt

$$10^5 = 10^4 \cdot 10 \leftrightarrow \Big([3 \cdot 10 \mod 13]_{13}, [4 \cdot 10 \mod 17]_{17}\Big) = \Big([30]_{13}, [40]_{17}\Big) \equiv \Big([4]_{13}, [6]_{17}\Big).$$

- Wir müssen nun noch die Zahl x bestimmen, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$x \underset{13}{\equiv} 4 \qquad \text{und} \qquad x \underset{17}{\equiv} 6.$$

- Hierzu kann man ganz „bodenständig“ Listen von Elementen in den beiden Restklassen $[4]_{13}$ bzw. $[6]_{17}$ vergleichen und das gemeinsame Element identifizieren.

Faktorisierung von Restklassenringen

Isomorphie

1. Der Ring $\mathbb{Z}_n$ ist ismorph zum Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Falls die natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ paarweise teilerfremd sind, ist der Ring $\mathbb{Z}/(n_1 \cdot n_2 \ldots n_r)\,\mathbb{Z}$ isomorph zum Ring

$$\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \cdots \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}.$$

Faktorisierung von Restklassenringen

Isomorphie

1. Der Ring $\mathbb{Z}_n$ ist ismorph zum Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Falls die natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ paarweise teilerfremd sind, ist der Ring $\mathbb{Z}/(n_1 \cdot n_2 \ldots n_r)\,\mathbb{Z}$ isomorph zum Ring

$$\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \cdots \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}.$$

Beispiele

Der Ring $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/(2 \cdot 3)\,\mathbb{Z}$ ist isomorph zum Ring $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Wir werden dies auf der folgenden Beispiele ausführlich diskutieren.

Faktorisierung von Restklassenringen

Isomorphie

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 : \bar{x} \mapsto (x \mod 2, x \mod 3):$$

$$\begin{aligned}
\bar{0} &\mapsto (0, 0)\\
\bar{1} &\mapsto (1, 1)\\
\bar{2} &\mapsto (0, 2)\\
\bar{3} &\mapsto (1, 0)\\
\bar{4} &\mapsto (0, 1)\\
\bar{5} &\mapsto (1, 2)
\end{aligned}$$

Faktorisierung von Restklassenringen

Isomorphie

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 : \bar{x} \mapsto (x \mod 2, x \mod 3):$$

$$\begin{aligned}
\bar{0} &\mapsto (0, 0)\\
\bar{1} &\mapsto (1, 1)\\
\bar{2} &\mapsto (0, 2)\\
\bar{3} &\mapsto (1, 0)\\
\bar{4} &\mapsto (0, 1)\\
\bar{5} &\mapsto (1, 2)
\end{aligned}$$

Umkehrabbildung

Um zu einem gegebenen Element $(a, b) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ das Element $\bar{x} \in \mathbb{Z}_6$ mit $f(\bar{x}) = (a, b)$ zu finden, ist jeweils ein System simultaner Kongruenzen zu lösen:

$$x \mod 2 = a \quad x \mod 3 = b.$$

Faktorisierung von Restklassenringen

Umkehrabbildung

Wir präsentieren zu jedem Element $(a, b) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ die Zahl x mit $\bar{x} \in \mathbb{Z}_6$, welche Lösung des entsprechenden Systems simultaner Kongruenzen $x \mod 2 = a \wedge x \mod 3 = b$ ist:

Faktorisierung von Restklassenringen

Umkehrabbildung

Wir präsentieren zu jedem Element $(a, b) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ die Zahl x mit $\bar{x} \in \mathbb{Z}_6$, welche Lösung des entsprechenden Systems simultaner Kongruenzen $x \mod 2 = a \wedge x \mod 3 = b$ ist:

$$
\begin{aligned}
(0,0): &\quad x \mod 2 = 0 \wedge x \mod 3 = 0 &&\rightsquigarrow x = 0 \\
(0,1): &\quad x \mod 2 = 0 \wedge x \mod 3 = 1 &&\rightsquigarrow x = 4 \\
(0,2): &\quad x \mod 2 = 0 \wedge x \mod 3 = 2 &&\rightsquigarrow x = 2 \\
(1,0): &\quad x \mod 2 = 1 \wedge x \mod 3 = 0 &&\rightsquigarrow x = 3 \\
(1,1): &\quad x \mod 2 = 1 \wedge x \mod 3 = 1 &&\rightsquigarrow x = 1 \\
(1,2): &\quad x \mod 2 = 1 \wedge x \mod 3 = 2 &&\rightsquigarrow x = 5
\end{aligned}
$$

Faktorisierung von Restklassenringen

Umkehrabbildung

Wir präsentieren zu jedem Element $(a, b) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ die Zahl x mit $\bar{x} \in \mathbb{Z}_6$, welche Lösung des entsprechenden Systems simultaner Kongruenzen $x \mod 2 = a \wedge x \mod 3 = b$ ist:

$$
\begin{aligned}
(0, 0): &\quad x \mod 2 = 0 \wedge x \mod 3 = 0 &&\rightsquigarrow x = 0 \\
(0, 1): &\quad x \mod 2 = 0 \wedge x \mod 3 = 1 &&\rightsquigarrow x = 4 \\
(0, 2): &\quad x \mod 2 = 0 \wedge x \mod 3 = 2 &&\rightsquigarrow x = 2 \\
(1, 0): &\quad x \mod 2 = 1 \wedge x \mod 3 = 0 &&\rightsquigarrow x = 3 \\
(1, 1): &\quad x \mod 2 = 1 \wedge x \mod 3 = 1 &&\rightsquigarrow x = 1 \\
(1, 2): &\quad x \mod 2 = 1 \wedge x \mod 3 = 2 &&\rightsquigarrow x = 5
\end{aligned}
$$

Bemerkung zur Lösbarkeit simultaner Kongruenzen

Falls zwei Zahlen n_1 und n_2 teilerfremd sind, ist jede simultane Kongruenz der Form $x \mod n_1 = a \wedge x \mod n_2 = b$ lösbar, und die Lösung[a] ist wie folgt gegeben:

[a] Eine ausfürliche Diskussion der Theorie simultaner Kongruenzen findet sich etwa in *Elementare und algebraische Zahlentheorie* von S. Müller-Stach und J. Piontkowski, vieweg.

Faktorisierung von Restklassenringen

Umkehrabbildung

Wir präsentieren zu jedem Element $(a, b) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ die Zahl x mit $\bar{x} \in \mathbb{Z}_6$, welche Lösung des entsprechenden Systems simultaner Kongruenzen $x \mod 2 = a \wedge x \mod 3 = b$ ist:

$$
\begin{aligned}
(0,0): &\quad x \mod 2 = 0 \wedge x \mod 3 = 0 &&\rightsquigarrow x = 0\\
(0,1): &\quad x \mod 2 = 0 \wedge x \mod 3 = 1 &&\rightsquigarrow x = 4\\
(0,2): &\quad x \mod 2 = 0 \wedge x \mod 3 = 2 &&\rightsquigarrow x = 2\\
(1,0): &\quad x \mod 2 = 1 \wedge x \mod 3 = 0 &&\rightsquigarrow x = 3\\
(1,1): &\quad x \mod 2 = 1 \wedge x \mod 3 = 1 &&\rightsquigarrow x = 1\\
(1,2): &\quad x \mod 2 = 1 \wedge x \mod 3 = 2 &&\rightsquigarrow x = 5
\end{aligned}
$$

Bemerkung zur Lösbarkeit simultaner Kongruenzen

Falls zwei Zahlen n_1 und n_2 teilerfremd sind, ist jede simultane Kongruenz der Form $x \mod n_1 = a \wedge x \mod n_2 = b$ lösbar, und die Lösung[a] ist wie folgt gegeben: Seien y_1 und y_2 (etwa mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus) so bestimmt, dass $y_1 \cdot n_1 + y_2 \cdot n_2 = 1$ gilt. Dann ist $x = [a - y_1 \cdot n_1 \cdot (a - b)] \mod (n_1 \cdot n_2)$.

[a] Eine ausfürliche Diskussion der Theorie simultaner Kongruenzen findet sich etwa in *Elementare und algebraische Zahlentheorie* von S. Müller-Stach und J. Piontkowski, vieweg.

Chinesischer Restsatz – allgemeine Fassung

Falls die natürliche Zahlen m und n den größten gemeinsamen Teiler $d := \mathrm{ggT}(m, n)$ besitzen, so ergeben sich mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus Zahlen y und z mit $d = y\,m + z\,n$.

Chinesischer Restsatz – allgemeine Fassung

Falls die natürliche Zahlen m und n den größten gemeinsamen Teiler $d := \mathrm{ggT}(m, n)$ besitzen, so ergeben sich mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus Zahlen y und z mit $d = y\,m + z\,n$. Das System simultaner Kongruenzen

$$x \underset{m}{\equiv} a, \quad x \underset{n}{\equiv} b$$

ist genau dann lösbar, wenn

$$a \underset{d}{\equiv} b$$

gilt. In diesem Fall[a] erfüllt jede Lösung $x \in \mathbb{Z}$ des Systems die einfache Kongruenz

$$x \underset{\frac{m \cdot n}{d}}{\equiv} b - z \cdot n \cdot \tfrac{b-a}{d}.$$

[a] Vgl. z.B. *Elementare und algebraische Zahlentheorie* von S. Müller-Stach und J. Piontkowski, vieweg.

Chinesischer Restsatz – speziellere Fassung

Falls zwei natürliche Zahlen m und n teilerfremd sind (d.h. $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$), so ist das System simultaner Kongruenzen

$$x \underset{m}{\equiv} a, \quad x \underset{n}{\equiv} b$$

für beliebige Werte $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}$ lösbar.

Chinesischer Restsatz – speziellere Fassung

Falls zwei natürliche Zahlen m und n teilerfremd sind (d.h. $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$), so ist das System simultaner Kongruenzen

$$x \underset{m}{\equiv} a, \quad x \underset{n}{\equiv} b$$

für beliebige Werte $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}$ lösbar. Seien $y \in \mathbb{Z}$ und $z \in \mathbb{Z}$ (etwa mit dem EEA) so bestimmt, dass $y \cdot m + z \cdot n = 1$ gilt. Dann erfüllt jede Lösung x des Systems die einfache Kongruenz

$$x \underset{m \cdot n}{\equiv} b - z \cdot n \cdot (b - a)$$

bzw.

$$x \underset{m \cdot n}{\equiv} a - y \cdot m \cdot (a - b)$$

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf die modulare Berechnung von Potenzen

Rückkehr zum RSA-Demonstrationsbeispiel: Vereinfachte Verschlüsselung

Wir hatten auf Folie 53 im Rahmen unseres RSA-Demonstrationsbeispiels für die Verschlüsselung den Wert des Ausdrucks $10^5 \mod 221$ zu berechnen. Derlei Rechnungen lassen sich unter Verwendung von Faktorisierungen stark vereinfachen.

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf die modulare Berechnung von Potenzen

Rückkehr zum RSA-Demonstrationsbeispiel: Vereinfachte Verschlüsselung

Wir hatten auf Folie 53 im Rahmen unseres RSA-Demonstrationsbeispiels für die Verschlüsselung den Wert des Ausdrucks $10^5 \mod 221$ zu berechnen. Derlei Rechnungen lassen sich unter Verwendung von Faktorisierungen stark vereinfachen.

Aus $221 = 13 \cdot 17$ folgt

$$\mathbb{Z}/221\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/17\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{17}.$$

Zur Bestimmung des Wertes von $10^5 \mod 221$ rechnen wir im Ring $\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{17}$ wie folgt:

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf die modulare Berechnung von Potenzen

Rückkehr zum RSA-Demonstrationsbeispiel: Vereinfachte Verschlüsselung

Wir hatten auf Folie 53 im Rahmen unseres RSA-Demonstrationsbeispiels für die Verschlüsselung den Wert des Ausdrucks $10^5 \mod 221$ zu berechnen. Derlei Rechnungen lassen sich unter Verwendung von Faktorisierungen stark vereinfachen.

Aus $221 = 13 \cdot 17$ folgt

$$\mathbb{Z}/221\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/17\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{17}.$$

Zur Bestimmung des Wertes von $10^5 \mod 221$ rechnen wir im Ring $\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{17}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
10^2 &= 100 \mapsto (100 \mod 13,\ 100 \mod 17) && = (9, 15)\\
10^4 &= \left(10^2\right)^2 \mapsto (9^2 \mod 13,\ 15^2 \mod 17) = (81 \mod 13,\ 225^2 \mod 17) && = (3, 4)\\
10^5 &= 10 \cdot 10^4 \mapsto (10 \cdot 3 \mod 13,\ 10 \cdot 4 \mod 17) = (30 \mod 13,\ 40 \mod 17) && = (4, 6)
\end{aligned}$$

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf die modulare Berechnung von Potenzen

Rückkehr zum RSA-Demonstrationsbeispiel: Vereinfachte Verschlüsselung

Wir hatten auf Folie 53 im Rahmen unseres RSA-Demonstrationsbeispiels für die Verschlüsselung den Wert des Ausdrucks $10^5 \mod 221$ zu berechnen. Derlei Rechnungen lassen sich unter Verwendung von Faktorisierungen stark vereinfachen.

Aus $221 = 13 \cdot 17$ folgt

$$\mathbb{Z}/221\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/17\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{17}.$$

Zur Bestimmung des Wertes von $10^5 \mod 221$ rechnen wir im Ring $\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{17}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
10^2 &= 100 \mapsto (100 \mod 13,\ 100 \mod 17) && = (9, 15)\\
10^4 &= \left(10^2\right)^2 \mapsto (9^2 \mod 13,\ 15^2 \mod 17) = (81 \mod 13,\ 225^2 \mod 17) && = (3, 4)\\
10^5 &= 10 \cdot 10^4 \mapsto (10 \cdot 3 \mod 13,\ 10 \cdot 4 \mod 17) = (30 \mod 13,\ 40 \mod 17) && = (4, 6)
\end{aligned}$$

Es verbleibt nun noch das Problem, diejenige ganze Zahl $x < 221$ zu finden, für die $x \mod 13 = 4$ und $x \mod 17 = 6$ gilt.

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf die modulare Berechnung von Potenzen

Rückkehr zum RSA-Demonstrationsbeispiel: Vereinfachte Verschlüsselung

Wir hatten auf Folie 53 im Rahmen unseres RSA-Demonstrationsbeispiels für die Verschlüsselung den Wert des Ausdrucks $10^5 \mod 221$ zu berechnen. Derlei Rechnungen lassen sich unter Verwendung von Faktorisierungen stark vereinfachen.

Aus $221 = 13 \cdot 17$ folgt

$$\mathbb{Z}/221\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/17\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{17}.$$

Zur Bestimmung des Wertes von $10^5 \mod 221$ rechnen wir im Ring $\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{17}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
10^2 &= 100 \mapsto (100 \mod 13,\ 100 \mod 17) && = (9, 15)\\
10^4 &= \left(10^2\right)^2 \mapsto (9^2 \mod 13,\ 15^2 \mod 17) = (81 \mod 13,\ 225^2 \mod 17) && = (3, 4)\\
10^5 &= 10 \cdot 10^4 \mapsto (10 \cdot 3 \mod 13,\ 10 \cdot 4 \mod 17) = (30 \mod 13,\ 40 \mod 17) && = (4, 6)
\end{aligned}$$

Es verbleibt nun noch das Problem, diejenige ganze Zahl $x < 221$ zu finden, für die $x \mod 13 = 4$ und $x \mod 17 = 6$ gilt.

Vergleich der Zahlenreihen 4, 17, 30, 43, 56, 69, 82, 95, 108, ... und 6, 23,40,57,74, 91, 108, ... ergibt als Ergebnis $x = 108$.

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf die modulare Berechnung von Potenzen

Rückkehr zum RSA-Demonstrationsbeispiel: Vereinfachte Verschlüsselung

Wir hatten auf Folie 53 im Rahmen unseres RSA-Demonstrationsbeispiels für die Verschlüsselung den Wert des Ausdrucks $10^5 \mod 221$ zu berechnen. Derlei Rechnungen lassen sich unter Verwendung von Faktorisierungen stark vereinfachen.

Aus $221 = 13 \cdot 17$ folgt

$$\mathbb{Z}/221\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/17\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{17}.$$

Zur Bestimmung des Wertes von $10^5 \mod 221$ rechnen wir im Ring $\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{17}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
10^2 &= 100 \mapsto (100 \mod 13,\ 100 \mod 17) && = (9, 15)\\
10^4 &= \left(10^2\right)^2 \mapsto (9^2 \mod 13,\ 15^2 \mod 17) = (81 \mod 13,\ 225^2 \mod 17) && = (3, 4)\\
10^5 &= 10 \cdot 10^4 \mapsto (10 \cdot 3 \mod 13,\ 10 \cdot 4 \mod 17) = (30 \mod 13,\ 40 \mod 17) && = (4, 6)
\end{aligned}$$

Es verbleibt nun noch das Problem, diejenige ganze Zahl $x < 221$ zu finden, für die $x \mod 13 = 4$ und $x \mod 17 = 6$ gilt.

Vergleich der Zahlenreihen 4, 17, 30, 43, 56, 69, 82, 95, 108, ... und 6, 23,40,57,74, 91, 108, ... ergibt als Ergebnis $x = 108$.

Alternativ hierzu verwenden wir die Lösungsformel von Folie 68 sowie die Darstellung $1 = 4 \cdot 13 - 3 \cdot 17$:

$$x = [4 - 4 \cdot 13 \cdot (-2)] \mod 221 = 108.$$

Hausübung

Auf unseren Folien 54 bis 56 wurde im Rahmen unseres RSA-Demonstrationsbeispiels zur Entschlüsselung die (recht aufwändige) Auswertung des Ausdrucks $108^{77} \mod 221$ vorgeführt. Nutzen Sie den Ring $\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{17}$, um diesen Wert möglichst durch Kopfrechnung zu bestimmen.

Hausübung

Auf unseren Folien 54 bis 56 wurde im Rahmen unseres RSA-Demonstrationsbeispiels zur Entschlüsselung die (recht aufwändige) Auswertung des Ausdrucks $108^{77} \mod 221$ vorgeführt. Nutzen Sie den Ring $\mathbb{Z}_{13} \times \mathbb{Z}_{17}$, um diesen Wert möglichst durch Kopfrechnung zu bestimmen.

Starthilfe

$$108 = 8 \cdot 13 + 4 \rightsquigarrow 108 \mod 13 = 4$$
$$108 = 6 \cdot 17 + 6 \rightsquigarrow 108 \mod 17 = 6$$

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf die modulare Berechnung von Potenzen

Fazit

Die Rechnungen bei der Verschlüsselung und auch Entschlüsselung $\bmod (p \cdot q)$ vereinfachen sich durch die Faktorisierung und Rechnung im Ring $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$, weil dadurch mit weitaus kleineren Zahlen hantiert werden kann.

Der Preis hierfür ist, dass man am Ende eine simultane Kongruenz lösen und hierzu u.U. zunächst mit dem EEA eine Darstellung der 1 als Linearkombination der beiden Primzahlen p und q bestimmen muss.

Was ist noch zu tun?

Wir weisen nach, dass bei Verwendung der korrekten RSA-Schlüssel das Dechiffrieren eines Chiffrats $c := m^e \mod n$ durch die Operation $m' = c^d \mod n$ immer die ursprüngliche Nachricht $m' = m$ ergibt.

Das heißt: Wenn p und q voneinander verschiedene Primzahlen sind und $n = p \cdot q$ gilt und wenn die ganzen Zahlen e und d die Gleichung $e \cdot d \underset{\varphi(n)}{\equiv} 1$ erfüllen, so gilt für jede ganze Zahl m die Beziehung

$$(m^e)^d = m^{e \cdot d} \underset{n}{\equiv} m.$$

Was ist noch zu tun?

Wir weisen nach, dass bei Verwendung der korrekten RSA-Schlüssel das Dechiffrieren eines Chiffrats $c := m^e \mod n$ durch die Operation $m' = c^d \mod n$ immer die ursprüngliche Nachricht $m' = m$ ergibt.

Das heißt: Wenn p und q voneinander verschiedene Primzahlen sind und $n = p \cdot q$ gilt und wenn die ganzen Zahlen e und d die Gleichung $e \cdot d \underset{\varphi(n)}{\equiv} 1$ erfüllen, so gilt für jede ganze Zahl m die Beziehung

$$(m^e)^d = m^{e \cdot d} \underset{n}{\equiv} m.$$

Folgerung

Aus $e \cdot d \underset{\varphi(n)}{\equiv} 1$ folgt $e \cdot d = k \cdot \varphi(n) + 1$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Die Gleichung $m^{e \cdot d} \underset{n}{\equiv} m$ ist somit erfüllt, wenn

$$m^{k \cdot \varphi(n)+1} = m^{\varphi(n) \cdot k} \cdot m = \left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m \underset{n}{\equiv} m \quad \text{für beliebige } k \in \mathbb{Z} \text{ gilt.}$$

Das RSA-Verfahren

Satz vom korrekten Dechiffrieren

Was haben wir zu erwarten?

Zu erfüllen ist die Bedingung

$$m^{k\cdot\varphi(n)+1} = m^{\varphi(n)\cdot k}\cdot m = \left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m \underset{n}{\equiv} m \quad \text{für beliebige } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Das RSA-Verfahren

Satz vom korrekten Dechiffrieren

Was haben wir zu erwarten?

Zu erfüllen ist die Bedingung

$$m^{k\cdot\varphi(n)+1} = m^{\varphi(n)\cdot k}\cdot m = \left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m \underset{n}{\equiv} m \quad \text{für beliebige } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Möglichkeit 1:

Dies jedenfalls dann der Fall, wenn $m^{\varphi(n)} \underset{n}{\equiv} 1$ ist, denn dann folgt

$$m^{k\cdot\varphi(n)+1} = \left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m \underset{n}{\equiv} 1^k \cdot m = m.$$

Das RSA-Verfahren

Satz vom korrekten Dechiffrieren

Was haben wir zu erwarten?

Zu erfüllen ist die Bedingung

$$m^{k\cdot\varphi(n)+1} = m^{\varphi(n)\cdot k}\cdot m = \left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m \underset{n}{\equiv} m \quad \text{für beliebige } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Möglichkeit 1:

Dies jedenfalls dann der Fall, wenn $m^{\varphi(n)} \underset{n}{\equiv} 1$ ist, denn dann folgt

$$m^{k\cdot\varphi(n)+1} = \left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m \underset{n}{\equiv} 1^k \cdot m = m.$$

Möglichkeit 2:

Angenommen, es gilt zwar **nicht** $m^{\varphi(n)} \underset{n}{\equiv} 1$, aber für alle $k \in \mathbb{Z}$ sind die Potenzen $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k$ identisch, also $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k = m^{\varphi(n)} =: f \quad$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Wir werden (noch einmal) feststellen, dass auch im Fall $f \neq 1$ die Gleichung $f \cdot m \underset{n}{\equiv} m$ gelten kann. Dann ist $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m \underset{n}{\equiv} m$ ebenfalls erfüllt.

Vorgehensweise

Wir untersuchen für verschiedene Moduli n Potenzen der Form $a^{\varphi(n)}$ sowie Ausdrücke der Form $a^{\varphi(n)\cdot k+1} = \left(a^{\varphi(n)}\right)^k \cdot a$.

Da stets $0^k = 0 \underset{n}{\equiv} 0$ sowie $a^k \underset{n}{\equiv} 0$, falls n gleich a oder ein Teiler von a ist, werden diese Fälle im Folgenden nicht gesondert aufgeführt

Das RSA-Verfahren

Satz vom korrekten Dechiffrieren

Vorgehensweise

Wir untersuchen für verschiedene Moduli n Potenzen der Form $a^{\varphi(n)}$ sowie Ausdrücke der Form $a^{\varphi(n)\cdot k+1} = \left(a^{\varphi(n)}\right)^k \cdot a$.

Da stets $0^k = 0 \underset{n}{\equiv} 0$ sowie $a^k \underset{n}{\equiv} 0$, falls n gleich a oder ein Teiler von a ist, werden diese Fälle im Folgenden nicht gesondert aufgeführt

Vorausschau:

Es wird sich herausstellen, dass die folgenden drei Fälle unterschiedliche Situationen ergeben:

1. n Primzahl,
2. n ist Produkt von (paarweise verschiedenen) Primzahlen,
3. n ist Produkt von Primzahlpotenzen.

Das RSA-Verfahren

Satz vom korrekten Dechiffrieren

Vorgehensweise

Wir beginnen mit dem Beispiel, bei dem n eine **Primzahl** ist, nämlich $n = 5$.

Vorgehensweise

Wir beginnen mit dem Beispiel, bei dem n eine **Primzahl** ist, nämlich $n = 5$.

Potenzen modulo 5

Für alle ganzen Zahlen a mit $1 \leq a < 5$ gilt $\mathrm{ggT}(5, a) = 1$, d.h. $\varphi(5) = 4$:

$$1^4 = 1 \underset{5}{\equiv} 1 \quad \rightsquigarrow 1^5 \underset{5}{\equiv} 1 \cdot 1 = 1, \quad \text{und } \left(1^4\right)^k \cdot 1 \underset{5}{\equiv} 1 \cdot 1 = 1$$

$$2^4 = 16 = 1 \underset{5}{\equiv} 1 \quad \rightsquigarrow 2^5 \underset{5}{\equiv} 1 \cdot 2 = 2, \quad \text{und } \left(2^4\right)^k \cdot 2 \underset{5}{\equiv} 1 \cdot 2 = 2,$$

$$3^4 = 16 = 1 \underset{5}{\equiv} 1 \quad \rightsquigarrow 3^5 \underset{5}{\equiv} 1 \cdot 3 = 3, \quad \text{und } \left(3^4\right)^k \cdot 3 \underset{5}{\equiv} 1 \cdot 3 = 3,$$

$$4^4 = 256 = 1 \underset{5}{\equiv} 1 \quad \rightsquigarrow 4^5 \underset{5}{\equiv} 1 \cdot 4 = 4 \quad \text{und } \left(4^4\right)^k \cdot 4 \underset{5}{\equiv} 1 \cdot 4 = 4.$$

Potenzen modulo $6 = 2 \cdot 3$

Nur für $a = 1$ und $a = 5$ gilt $1 \leq a < 6$ und $\mathrm{ggT}\,(6, a) = 1$, also ist $\varphi(6) = 2$.

$$
\begin{array}{lll}
1^2 = 1 \underset{6}{\equiv} 1 & \text{und} & 1^2 \cdot 1 = 1 \underset{6}{\equiv} 1 \\
2^2 = 4 \underset{6}{\equiv} 4 \neq 1 & \text{aber} & 2^2 \cdot 2 = 8 \underset{6}{\equiv} 2 \\
3^2 = 9 \underset{6}{\equiv} 3 \neq 1 & \text{aber} & 3^2 \cdot 3 = 27 \underset{6}{\equiv} 3 \\
4^2 = 16 \underset{6}{\equiv} 4 \neq 1 & \text{aber} & 4^2 \cdot 4 = 64 \underset{6}{\equiv} 4 \\
5^2 = 25 \underset{6}{\equiv} 1 & \text{und} & 5^2 \cdot 5 = 125 \underset{6}{\equiv} 5.
\end{array}
$$

Das RSA-Verfahren

Satz vom korrekten Dechiffrieren

Potenzen modulo $6 = 2 \cdot 3$

Nur für $a = 1$ und $a = 5$ gilt $1 \leq a < 6$ und $\mathrm{ggT}\,(6, a) = 1$, also ist $\varphi(6) = 2$.

$$
\begin{array}{lll}
1^2 = 1 \underset{6}{\equiv} 1 & \text{und} & 1^2 \cdot 1 = 1 \underset{6}{\equiv} 1 \\
2^2 = 4 \underset{6}{\equiv} 4 \neq 1 & \text{aber} & 2^2 \cdot 2 = 8 \underset{6}{\equiv} 2 \\
3^2 = 9 \underset{6}{\equiv} 3 \neq 1 & \text{aber} & 3^2 \cdot 3 = 27 \underset{6}{\equiv} 3 \\
4^2 = 16 \underset{6}{\equiv} 4 \neq 1 & \text{aber} & 4^2 \cdot 4 = 64 \underset{6}{\equiv} 4 \\
5^2 = 25 \underset{6}{\equiv} 1 & \text{und} & 5^2 \cdot 5 = 125 \underset{6}{\equiv} 5.
\end{array}
$$

Höhere Potenzen von $a^{\varphi(6)} \mod 6$:

Wir betrachten nun höhere Potenzen von $a^{\varphi(6)} \mod 6$, also Ausdrücke der Form $\left(a^{\varphi(6)}\right)^k \mod 6$. Als Hilfsmittel verwenden wir (informell) die Beweistechnik der **vollständigen Induktion**. Bitte recherchieren und studieren Sie diese selbständig, falls sie Ihnen noch nicht vertraut sein sollte.

Das RSA-Verfahren

Satz vom korrekten Dechiffrieren

Höhere Potenzen von $a^{\varphi(6)} \mod 6$ – Beispiele und Induktion:

Das RSA-Verfahren

Satz vom korrekten Dechiffrieren

Höhere Potenzen von $a^{\varphi(6)} \mod 6$ – Beispiele und Induktion:

Beispiele: $\left(2^2\right)^2 = 16 \underset{6}{\equiv} 4, \quad \left(2^2\right)^3 = 4^3 = 64 \underset{6}{\equiv} 4,$

Höhere Potenzen von $a^{\varphi(6)} \mod 6$ – Beispiele und Induktion:

Beispiele: $\left(2^2\right)^2 = 16 \underset{6}{\equiv} 4, \quad \left(2^2\right)^3 = 4^3 = 64 \underset{6}{\equiv} 4,$

Induktionsschritt: $\left(2^2\right)^{k+1} = 4^k \cdot 4 \underset{6}{\equiv} 4 \cdot 4 = 16 \underset{6}{\equiv} 4,$

Das RSA-Verfahren

Satz vom korrekten Dechiffrieren

Höhere Potenzen von $a^{\varphi(6)} \mod 6$ – Beispiele und Induktion:

$$\text{Beispiele: } \left(2^2\right)^2 = 16 \underset{6}{\equiv} 4, \quad \left(2^2\right)^3 = 4^3 = 64 \underset{6}{\equiv} 4,$$

$$\text{Induktionsschritt: } \left(2^2\right)^{k+1} = 4^k \cdot 4 \underset{6}{\equiv} 4 \cdot 4 = 16 \underset{6}{\equiv} 4,$$

$$\text{Beispiele: } \left(3^2\right)^2 = 9^2 = 81 = 13 \cdot 6 + 3 \underset{6}{\equiv} 3, \quad \left(3^2\right)^3 = 729 \underset{6}{\equiv} 3,$$

Das RSA-Verfahren

Satz vom korrekten Dechiffrieren

Höhere Potenzen von $a^{\varphi(6)} \mod 6$ – Beispiele und Induktion:

$$\text{Beispiele: } \left(2^2\right)^2 = 16 \underset{6}{\equiv} 4, \quad \left(2^2\right)^3 = 4^3 = 64 \underset{6}{\equiv} 4,$$

$$\text{Induktionsschritt: } \left(2^2\right)^{k+1} = 4^k \cdot 4 \underset{6}{\equiv} 4 \cdot 4 = 16 \underset{6}{\equiv} 4,$$

$$\text{Beispiele: } \left(3^2\right)^2 = 9^2 = 81 = 13 \cdot 6 + 3 \underset{6}{\equiv} 3, \quad \left(3^2\right)^3 = 729 \underset{6}{\equiv} 3,$$

$$\text{Induktionsschritt: } \left(3^2\right)^{k+1} = 9^k \cdot 9 \underset{6}{\equiv} 3 \cdot 9 = 27 \underset{6}{\equiv} 3,$$

Das RSA-Verfahren

Satz vom korrekten Dechiffrieren

Höhere Potenzen von $a^{\varphi(6)} \mod 6$ – Beispiele und Induktion:

$$\text{Beispiele: } \left(2^2\right)^2 = 16 \underset{6}{\equiv} 4, \quad \left(2^2\right)^3 = 4^3 = 64 \underset{6}{\equiv} 4,$$

$$\text{Induktionsschritt: } \left(2^2\right)^{k+1} = 4^k \cdot 4 \underset{6}{\equiv} 4 \cdot 4 = 16 \underset{6}{\equiv} 4,$$

$$\text{Beispiele: } \left(3^2\right)^2 = 9^2 = 81 = 13 \cdot 6 + 3 \underset{6}{\equiv} 3, \quad \left(3^2\right)^3 = 729 \underset{6}{\equiv} 3,$$

$$\text{Induktionsschritt: } \left(3^2\right)^{k+1} = 9^k \cdot 9 \underset{6}{\equiv} 3 \cdot 9 = 27 \underset{6}{\equiv} 3,$$

$$\text{Beispiel: } \left(4^2\right)^2 = 16^2 = 256 \underset{6}{\equiv} 4,$$

Das RSA-Verfahren

Satz vom korrekten Dechiffrieren

Höhere Potenzen von $a^{\varphi(6)} \mod 6$ – Beispiele und Induktion:

$$\text{Beispiele: } \left(2^2\right)^2 = 16 \underset{6}{\equiv} 4, \quad \left(2^2\right)^3 = 4^3 = 64 \underset{6}{\equiv} 4,$$

$$\text{Induktionsschritt: } \left(2^2\right)^{k+1} = 4^k \cdot 4 \underset{6}{\equiv} 4 \cdot 4 = 16 \underset{6}{\equiv} 4,$$

$$\text{Beispiele: } \left(3^2\right)^2 = 9^2 = 81 = 13 \cdot 6 + 3 \underset{6}{\equiv} 3, \quad \left(3^2\right)^3 = 729 \underset{6}{\equiv} 3,$$

$$\text{Induktionsschritt: } \left(3^2\right)^{k+1} = 9^k \cdot 9 \underset{6}{\equiv} 3 \cdot 9 = 27 \underset{6}{\equiv} 3,$$

$$\text{Beispiel: } \left(4^2\right)^2 = 16^2 = 256 \underset{6}{\equiv} 4,$$

$$\text{Induktionsschritt: } \left(4^2\right)^{k+1} = 16^k \cdot 16 \underset{6}{\equiv} 4 \cdot 16 = 64 \underset{6}{\equiv} 4,$$

Das RSA-Verfahren

Satz vom korrekten Dechiffrieren

Höhere Potenzen von $a^{\varphi(6)} \mod 6$ – Beispiele und Induktion:

$$\text{Beispiele: } \left(2^2\right)^2 = 16 \underset{6}{\equiv} 4, \quad \left(2^2\right)^3 = 4^3 = 64 \underset{6}{\equiv} 4,$$

$$\text{Induktionsschritt: } \left(2^2\right)^{k+1} = 4^k \cdot 4 \underset{6}{\equiv} 4 \cdot 4 = 16 \underset{6}{\equiv} 4,$$

$$\text{Beispiele: } \left(3^2\right)^2 = 9^2 = 81 = 13 \cdot 6 + 3 \underset{6}{\equiv} 3, \quad \left(3^2\right)^3 = 729 \underset{6}{\equiv} 3,$$

$$\text{Induktionsschritt: } \left(3^2\right)^{k+1} = 9^k \cdot 9 \underset{6}{\equiv} 3 \cdot 9 = 27 \underset{6}{\equiv} 3,$$

$$\text{Beispiel: } \left(4^2\right)^2 = 16^2 = 256 \underset{6}{\equiv} 4,$$

$$\text{Induktionsschritt: } \left(4^2\right)^{k+1} = 16^k \cdot 16 \underset{6}{\equiv} 4 \cdot 16 = 64 \underset{6}{\equiv} 4,$$

$$\text{Beispiel: } \left(5^2\right)^2 = 25^2 = 625 \underset{6}{\equiv} 1,$$

Das RSA-Verfahren

Satz vom korrekten Dechiffrieren

Höhere Potenzen von $a^{\varphi(6)} \mod 6$ – Beispiele und Induktion:

$$\text{Beispiele: } \left(2^2\right)^2 = 16 \underset{6}{\equiv} 4, \quad \left(2^2\right)^3 = 4^3 = 64 \underset{6}{\equiv} 4,$$

$$\text{Induktionsschritt: } \left(2^2\right)^{k+1} = 4^k \cdot 4 \underset{6}{\equiv} 4 \cdot 4 = 16 \underset{6}{\equiv} 4,$$

$$\text{Beispiele: } \left(3^2\right)^2 = 9^2 = 81 = 13 \cdot 6 + 3 \underset{6}{\equiv} 3, \quad \left(3^2\right)^3 = 729 \underset{6}{\equiv} 3,$$

$$\text{Induktionsschritt: } \left(3^2\right)^{k+1} = 9^k \cdot 9 \underset{6}{\equiv} 3 \cdot 9 = 27 \underset{6}{\equiv} 3,$$

$$\text{Beispiel: } \left(4^2\right)^2 = 16^2 = 256 \underset{6}{\equiv} 4,$$

$$\text{Induktionsschritt: } \left(4^2\right)^{k+1} = 16^k \cdot 16 \underset{6}{\equiv} 4 \cdot 16 = 64 \underset{6}{\equiv} 4,$$

$$\text{Beispiel: } \left(5^2\right)^2 = 25^2 = 625 \underset{6}{\equiv} 1,$$

$$\text{Induktionsschritt: } \left(5^2\right)^{k+1} = 25^k \cdot 25 \underset{6}{\equiv} 1 \cdot 1 \underset{6}{\equiv} 1.$$

Annäherung an unser Ziel für $n = 6 = 2 \cdot 3$

Wir zeigen nun, dass für alle a mit $1 \leq a < 6$ und für beliebige $k \in \mathbb{N}$ stets die Beziehung $\left(a^{\varphi(6)}\right)^k \cdot a = a$ gilt. Hierzu verwenden wir unsere Ergebnisse der vorigen Folie.

Annäherung an unser Ziel für $n = 6 = 2 \cdot 3$

Wir zeigen nun, dass für alle a mit $1 \leq a < 6$ und für beliebige $k \in \mathbb{N}$ stets die Beziehung $\left(a^{\varphi(6)}\right)^k \cdot a = a$ gilt. Hierzu verwenden wir unsere Ergebnisse der vorigen Folie.

Berechne $\left(a^{\varphi(6)}\right)^k \cdot a$ für beliebige $k \in \mathbb{N}$, vgl. Folie 79:

$$\begin{aligned}
\left(1^2\right)^k \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1 &\underset{6}{\equiv} 1,\\
\left(2^2\right)^k \cdot 2 = 4^k \cdot 2 &\underset{6}{\equiv} 4 \cdot 2 = 8 \underset{6}{\equiv} 2,\\
\left(3^2\right)^k \cdot 3 = 9^k \cdot 3 &\underset{6}{\equiv} 3 \cdot 3 = 9 \underset{6}{\equiv} 3,\\
\left(4^2\right)^k \cdot 4 = 16^k \cdot 4 &\underset{6}{\equiv} 4 \cdot 4 = 16 \underset{6}{\equiv} 4,\\
\left(5^2\right)^k \cdot 5 = 25^k \cdot 5 &\underset{6}{\equiv} 1 \cdot 5 = 5 \underset{6}{\equiv} 5.
\end{aligned}$$

Beispiel für Fall 3: $n = 8 = 2^3$

Nur für $a = 1$, $a = 3$, $a = 5$ und $a = 7$ gilt $1 \leq a < 8$ und $\mathrm{ggT}(8, a) = 1$, d.h. $\varphi(8) = 4$.

$$
\begin{aligned}
1^4 &= 1 \underset{8}{\equiv} 1 && \text{und} && 1^4 \cdot 1 = 1 \underset{8}{\equiv} 1 \\
2^4 &= 16 \underset{8}{\equiv} 0 \neq 1 && \text{und} && 2^4 \cdot 2 = 32 \underset{8}{\equiv} 0 \neq 2 \\
3^4 &= 81 \underset{8}{\equiv} 1 && \text{und} && 3^4 \cdot 3 = 243 \underset{8}{\equiv} 3 \\
4^4 &= 256 \underset{8}{\equiv} 0 \neq 1 && \text{und} && 4^4 \cdot 4 = 1024 \underset{8}{\equiv} 0 \neq 4 \\
5^4 &= 625 \underset{8}{\equiv} 1 && \text{und} && 5^4 \cdot 5 = 3125 \underset{8}{\equiv} 5 \\
6^4 &= 1096 \underset{8}{\equiv} 0 \neq 1 && \text{und} && 6^4 \cdot 6 = \ldots \underset{8}{\equiv} 0 \neq 6 \\
7^4 &= 2401 \underset{8}{\equiv} 1 && \text{und} && 7^4 \cdot 7 = \ldots \underset{8}{\equiv} 7.
\end{aligned}
$$

Beispiel für Fall 3: $n = 8 = 2^3$

Nur für $a = 1$, $a = 3$, $a = 5$ und $a = 7$ gilt $1 \leq a < 8$ und $\mathrm{ggT}(8, a) = 1$, d.h. $\varphi(8) = 4$.

$$
\begin{aligned}
1^4 &= 1 \underset{8}{\equiv} 1 && \text{und} && 1^4 \cdot 1 = 1 \underset{8}{\equiv} 1 \\
2^4 &= 16 \underset{8}{\equiv} 0 \neq 1 && \text{und} && 2^4 \cdot 2 = 32 \underset{8}{\equiv} 0 \neq 2 \\
3^4 &= 81 \underset{8}{\equiv} 1 && \text{und} && 3^4 \cdot 3 = 243 \underset{8}{\equiv} 3 \\
4^4 &= 256 \underset{8}{\equiv} 0 \neq 1 && \text{und} && 4^4 \cdot 4 = 1024 \underset{8}{\equiv} 0 \neq 4 \\
5^4 &= 625 \underset{8}{\equiv} 1 && \text{und} && 5^4 \cdot 5 = 3125 \underset{8}{\equiv} 5 \\
6^4 &= 1096 \underset{8}{\equiv} 0 \neq 1 && \text{und} && 6^4 \cdot 6 = \ldots \underset{8}{\equiv} 0 \neq 6 \\
7^4 &= 2401 \underset{8}{\equiv} 1 && \text{und} && 7^4 \cdot 7 = \ldots \underset{8}{\equiv} 7.
\end{aligned}
$$

Bemerkung

Wir stellen fest, dass die Beziehung $\left(a^{\varphi(n)}\right)^k \cdot a \underset{n}{\equiv} a$ in diesem Fall **nicht** universell gilt. Dies liegt daran, dass 8 weder eine Primzahl noch ein Produkt von (unterschiedlichen) Primzahlen, sondern eine Primzahlpotenz ist.

Das RSA-Verfahren

Satz vom korrekten Dechiffrieren

Weiteres Beispiel für Fall 3: $n = 18 = 2^1 \cdot 3^2$

Nur für $a = 1$, $a = 5$, $a = 7$, $a = 11$, $a = 13$ und $a = 17$ gilt $1 \leq a < 18$ und $\mathrm{ggT}(a, 18) = 1$, d.h. $\varphi(18) = 6$.

$$
\begin{array}{lll}
1^6 = 1 \underset{18}{\equiv} 1 & \text{und} & 1^6 \cdot 1 = 1 \underset{18}{\equiv} 1 \\
2^6 = 64 \underset{18}{\equiv} 10 \neq 1 & \text{und} & 2^6 \cdot 2 = 128 = 7 \cdot 18 + 2 \underset{18}{\equiv} 2 \\
3^6 = 27^2 \underset{18}{\equiv} 9 \neq 1 & \text{und} & 3^6 \cdot 3 \underset{18}{\equiv} 9 \cdot 3 \underset{18}{\equiv} 9 \neq 3 \\
4^6 = 64^2 \underset{18}{\equiv} 10^2 \underset{18}{\equiv} 10 \neq 1 & \text{und} & 4^6 \cdot 4 \underset{18}{\equiv} 10 \cdot 4 = 40 \underset{18}{\equiv} 4 \\
5^6 = 125^2 \underset{18}{\equiv} (-1)^2 = 1 & \text{und} & 5^6 \cdot 5 \underset{18}{\equiv} 1 \cdot 5 = 5 \\
6^6 = 216^2 \underset{18}{\equiv} 0 \neq 1 & \text{und} & 6^6 \cdot 6 \underset{18}{\equiv} 0 \cdot 6 = 0 \neq 6 \\
7^6 = 343^2 \underset{18}{\equiv} 1 & \text{und} & 7^6 \cdot 7 \underset{18}{\equiv} 1 \cdot 7 = 7 \\
8^6 = 512^2 \underset{18}{\equiv} 8^2 \underset{18}{\equiv} 10 & \text{und} & 8^6 \cdot 8 = 80 \underset{18}{\equiv} 8 \\
9^6 = 729^2 \underset{18}{\equiv} 9^2 \underset{18}{\equiv} 9 & \text{und} & 9^6 \cdot 9 = \ldots \underset{18}{\equiv} 9 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Das RSA-Verfahren

Satz vom korrekten Dechiffrieren

Weiteres Beispiel für Fall 3: $n = 18 = 2^1 \cdot 3^2$

Nur für $a = 1$, $a = 5$, $a = 7$, $a = 11$, $a = 13$ und $a = 17$ gilt $1 \leq a < 18$ und $\mathrm{ggT}(a, 18) = 1$, d.h. $\varphi(18) = 6$.

$$
\begin{array}{lcl}
1^6 = 1 \underset{18}{\equiv} 1 & \text{und} & 1^6 \cdot 1 = 1 \underset{18}{\equiv} 1 \\
2^6 = 64 \underset{18}{\equiv} 10 \neq 1 & \text{und} & 2^6 \cdot 2 = 128 = 7 \cdot 18 + 2 \underset{18}{\equiv} 2 \\
3^6 = 27^2 \underset{18}{\equiv} 9 \neq 1 & \text{und} & 3^6 \cdot 3 \underset{18}{\equiv} 9 \cdot 3 \underset{18}{\equiv} 9 \neq 3 \\
4^6 = 64^2 \underset{18}{\equiv} 10^2 \underset{18}{\equiv} 10 \neq 1 & \text{und} & 4^6 \cdot 4 \underset{18}{\equiv} 10 \cdot 4 = 40 \underset{18}{\equiv} 4 \\
5^6 = 125^2 \underset{18}{\equiv} (-1)^2 = 1 & \text{und} & 5^6 \cdot 5 \underset{18}{\equiv} 1 \cdot 5 = 5 \\
6^6 = 216^2 \underset{18}{\equiv} 0 \neq 1 & \text{und} & 6^6 \cdot 6 \underset{18}{\equiv} 0 \cdot 6 = 0 \neq 6 \\
7^6 = 343^2 \underset{18}{\equiv} 1 & \text{und} & 7^6 \cdot 7 \underset{18}{\equiv} 1 \cdot 7 = 7 \\
8^6 = 512^2 \underset{18}{\equiv} 8^2 \underset{18}{\equiv} 10 & \text{und} & 8^6 \cdot 8 = 80 \underset{18}{\equiv} 8 \\
9^6 = 729^2 \underset{18}{\equiv} 9^2 \underset{18}{\equiv} 9 & \text{und} & 9^6 \cdot 9 = \ldots \underset{18}{\equiv} 9 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Bemerkung

Wir stellen fest, dass die Beziehung $\left(a^{\varphi(n)}\right)^k \cdot a \underset{n}{\equiv} a$ auch hier **nicht** universell gilt. Dies liegt daran, dass 18 weder eine Primzahl noch ein Produkt von (unterschiedlichen) Primzahlen, sondern ein Produkt von Primzahlpotenzen ist.

Das RSA-Verfahren

Satz vom korrekten Dechiffrieren

Werkzeuge aus der Algebra:

Aus der Theorie der Gruppen und Ringe (Algebra) sind einige Theoreme bekannt, die uns bzgl. des Dechiffrierproblems Klärung bringen.

Das RSA-Verfahren

Satz vom korrekten Dechiffrieren

Werkzeuge aus der Algebra:

Aus der Theorie der Gruppen und Ringe (Algebra) sind einige Theoreme bekannt, die uns bzgl. des Dechiffrierproblems Klärung bringen.

Der kleine Satz von Fermat

Ist p eine Primzahl, und ist a eine ganze Zahl mit $1 \leq a < p$, so gilt

$$a^{p-1} \underset{p}{\equiv} 1.$$

Das RSA-Verfahren

Satz vom korrekten Dechiffrieren

Werkzeuge aus der Algebra:

Aus der Theorie der Gruppen und Ringe (Algebra) sind einige Theoreme bekannt, die uns bzgl. des Dechiffrierproblems Klärung bringen.

Der kleine Satz von Fermat

Ist p eine Primzahl, und ist a eine ganze Zahl mit $1 \leq a < p$, so gilt

$$a^{p-1} \underset{p}{\equiv} 1.$$

Skizze einer Begründung

Da p eine Primzahl ist, sind alle ganzen Zahlen a mit $1 \leq a < p$ teilerfremd zu p und somit **Einheiten** im Ring Z_p. Die Menge (Gruppe) der Einheiten in Z_p hat somit die Mächtigkeit $p - 1$. Nach dem *Satz von Lagrange*[a] gilt in jeder endlichen Gruppe G mit Neutralelement e und Mächtigkeit $|G|$ für jedes Element $g \in G$ die Gleichung $g^{|G|} = e$.

[a] Dieser Satz ist ein wichtiges Resultat aus der Theorie der endlichen Gruppen.

Das RSA-Verfahren

Satz vom korrekten Dechiffrieren

Folgerung aus dem kleinen Fermat'schen Satz:

Ist p eine Primzahl, und ist a eine ganze Zahl, die kein Vielfaches von p ist, so gilt

$$a^p \underset{p}{\equiv} a.$$

Das RSA-Verfahren

Satz vom korrekten Dechiffrieren

Folgerung aus dem kleinen Fermat'schen Satz:

Ist p eine Primzahl, und ist a eine ganze Zahl, die kein Vielfaches von p ist, so gilt

$$a^p \underset{p}{\equiv} a.$$

Begründung

Da a kein Vielfaches von p ist, gilt $a \mod p \neq 0$. Somit folgt $a^{p-1} \underset{p}{\equiv} 1$ (Fermat) und hieraus $a^p = a^{p-1} \cdot a \underset{p}{\equiv} 1 \cdot a = a$.

Folgerung aus dem kleinen Fermat'schen Satz:

Ist p eine Primzahl, und ist a eine ganze Zahl, die kein Vielfaches von p ist, so gilt

$$a^p \underset{p}{\equiv} a.$$

Begründung

Da a kein Vielfaches von p ist, gilt $a \mod p \neq 0$. Somit folgt $a^{p-1} \underset{p}{\equiv} 1$ (Fermat) und hieraus $a^p = a^{p-1} \cdot a \underset{p}{\equiv} 1 \cdot a = a$.

Bemerkung:

Der kleine Satz von Fermat liefert Aussagen über Ringe mit Primzahlordnung. Beim RSA-Verfahren arbeiten wir jedoch mit Ringen $\mathbb{Z}_n$, bei denen n jeweils **keine** Primzahl, sondern ein Produkt von Primzahlen ist. Die nächste Folie beginnt die Klärung der allgemeineren Situation.

Verallgemeinerung: Satz von Euler

Ist $n > 1$ eine natürliche Zahl und ist a eine ganze Zahl mit $\mathrm{ggT}(n, a) = 1$, so gilt

$$a^{\varphi(n)} \underset{n}{\equiv} 1.$$

Verallgemeinerung: Satz von Euler

Ist $n > 1$ eine natürliche Zahl und ist a eine ganze Zahl mit $\mathrm{ggT}(n, a) = 1$, so gilt

$$a^{\varphi(n)} \equiv_n 1.$$

Skizze einer Begründung

Wegen der Voraussetzung $\mathrm{ggT}(n, a) = 1$ ist $a \mod n$ eine **Einheit** im Ring $\mathbb{Z}_n$. Die Gruppe der Einheiten in $\mathbb{Z}_n$ hat die Mächtigkeit $\varphi(n)$. Wiederum aus dem *Satz von Lagrange* folgt die Gleichung $a^{\varphi(n)} = 1$.

Das RSA-Verfahren

Satz vom korrekten Dechiffrieren

Verallgemeinerung: Satz von Euler

Ist $n > 1$ eine natürliche Zahl und ist a eine ganze Zahl mit $\mathrm{ggT}(n, a) = 1$, so gilt

$$a^{\varphi(n)} \underset{n}{\equiv} 1.$$

Skizze einer Begründung

Wegen der Voraussetzung $\mathrm{ggT}(n, a) = 1$ ist $a \mod n$ eine **Einheit** im Ring $\mathbb{Z}_n$. Die Gruppe der Einheiten in $\mathbb{Z}_n$ hat die Mächtigkeit $\varphi(n)$. Wiederum aus dem *Satz von Lagrange* folgt die Gleichung $a^{\varphi(n)} = 1$.

Bemerkung

Für jede natürliche Zahl $n > 1$ ist somit klar, dass die Gleichung $\left(a^{\varphi(n)}\right)^k \cdot a \underset{n}{\equiv} 1^k \cdot a = a$ für Einheiten (also für Zahlen a mit $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$) richtig ist. Für **Nichteinheiten** ist dies im Allgemeinen **nicht** der Fall, wie wir auf Folie 81 gesehen haben. Wir wollen nun (hinreichende) Bedingungen benennen, die sicherstellen, dass $\left(a^{\varphi(n)}\right)^k \cdot a \underset{n}{\equiv} a = a$ für alle ganzen Zahlen a mit $0 \leq a < n$ gilt.

Wiederholung der Formulierung des Satzes

Es seien p und q voneinander verschiedene Primzahlen und es sei $n = p \cdot q$. Ferner erfüllen die ganzen Zahlen e und d die Gleichung $e \cdot d \underset{\varphi(n)}{\equiv} 1$, d.h. es gibt eine ganze Zahl k mit $e \cdot d = k \cdot \varphi(n) = k \cdot (p-1) \cdot (q-1)$. Dann gilt für jede ganze Zahl $m < n$ die Beziehung

$$\left(m^e\right)^d \mod n = \left(m^{(p-1)\cdot(q-1)}\right)^k \cdot m \mod n = m.$$

Das RSA-Verfahren

Satz vom korrekten Dechiffrieren

Wiederholung der Formulierung des Satzes

Es seien p und q voneinander verschiedene Primzahlen und es sei $n = p \cdot q$. Ferner erfüllen die ganzen Zahlen e und d die Gleichung $e \cdot d \underset{\varphi(n)}{\equiv} 1$, d.h. es gibt eine ganze Zahl k mit $e \cdot d = k \cdot \varphi(n) = k \cdot (p-1) \cdot (q-1)$. Dann gilt für jede ganze Zahl $m < n$ die Beziehung

$$\left(m^e\right)^d \mod n = \left(m^{(p-1)\cdot(q-1)}\right)^k \cdot m \mod n = m.$$

Beweis später

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf das Dechiffrierproblem

Ausblick auf den Rest der Wegstrecke:

Auf den folgenden Folien sehen wir uns das Dechiffrierproblem noch einmal unter Zuhilfenahme geeigneter Faktorisierungen an. Wir werden anhand von Beispielen noch einmal sehen, warum Ringe der Form $\mathbb{Z}_n$ mit $n = p$ oder $n = p \cdot q$ oder auch $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$ geeignet sind, während das Auftreten von **Primzahlpotenzen** in der Primfaktorzerlegung von n ein Hindernis darstellt.

Ausblick auf den Rest der Wegstrecke:

Auf den folgenden Folien sehen wir uns das Dechiffrierproblem noch einmal unter Zuhilfenahme geeigneter Faktorisierungen an. Wir werden anhand von Beispielen noch einmal sehen, warum Ringe der Form $\mathbb{Z}_n$ mit $n = p$ oder $n = p \cdot q$ oder auch $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$ geeignet sind, während das Auftreten von **Primzahlpotenzen** in der Primfaktorzerlegung von n ein Hindernis darstellt.

Erinnerung:

Wir haben zu prüfen, ob für alle $m \in \mathbb{Z}_n$ und alle $k \in N$ die Gleichung

$$(m^{\varphi} n)^k \cdot m \mod n = m$$

gilt.

Einheiten

Seien p und q Primzahlen. Wir halten ohne Beweis fest, dass die Einheiten im Ring $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ genau diejenigen Elemente (a, b) sind, für die $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt.

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf das Dechiffrierproblem ...

... im Ring $\mathbb{Z}_6$ mit $\varphi(6) = 2$:

Wir betrachten $\left(m^2\right)^k \cdot m$.

$$\left(\bar{0}^2\right)^2 \cdot \bar{0} \mapsto \left(\left(0^2\right)^k \mod 2, \left(0^2\right)^k \mod 3\right) \cdot (0,0) = (0 \cdot 0 \mod 2, 0 \cdot 0 \mod 3) = (0,0) \rightsquigarrow \bar{0}$$

$$\left(\bar{1}^2\right)^2 \cdot \bar{1} \mapsto \left(\left(1^2\right)^k \mod 2, \left(1^2\right)^k \mod 3\right) \cdot (1,1) = (1 \cdot 1 \mod 2, 1 \cdot 1 \mod 3) = (1,1) \rightsquigarrow \bar{1}$$

$$\left(\bar{2}^2\right)^2 \cdot \bar{2} \mapsto \left(\left(0^2\right)^k \mod 2, \left(2^2\right)^k \mod 3\right) \cdot (0,2) = (0 \cdot 0 \mod 2, 1 \cdot 2 \mod 3) = (0,2) = \rightsquigarrow \bar{2}$$

$$\left(\bar{3}^2\right)^2 \cdot \bar{3} \mapsto \left(\left(1^2\right)^k \mod 2, \left(0^2\right)^k \mod 3\right) \cdot (1,0) = (1 \cdot 1 \mod 2, 0 \cdot 0 \mod 3) = (1,0) \rightsquigarrow \bar{3}$$

$$\left(\bar{4}^2\right)^2 \cdot \bar{4} \mapsto \left(\left(0^2\right)^k \mod 2, \left(1^2\right)^k \mod 3\right) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 \mod 2, 1 \cdot 1 \mod 3) = (0,1) \rightsquigarrow \bar{4}$$

$$\left(\bar{5}^2\right)^2 \cdot \bar{5} \mapsto \left(\left(1^2\right)^k \mod 2, \left(2^2\right)^k \mod 3\right) \cdot (1,2) = (1 \cdot 1 \mod 2, 1 \cdot 2 \mod 3) = (1,2) \rightsquigarrow \bar{5}$$

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf das Dechiffrierproblem

Analyse für Ringe der Form $\mathbb{Z}_{p \cdot q} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ mit Primzahlen p und q:

Wir erinnern an die Abbildung $f\colon \mathbb{Z}_{p \cdot q} \to \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q,\ x \mapsto (x \mod p\ x \mod q)$, welche die Korrepondenz zwischen dem Ring $\mathbb{Z}_{p \cdot q}$ und dem Ring $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ herstellt.

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf das Dechiffrierproblem

Analyse für Ringe der Form $\mathbb{Z}_{p\cdot q} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ mit Primzahlen p und q:

Wir erinnern an die Abbildung[a] $f\colon \mathbb{Z}_{p\cdot q} \to \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$, $x \mapsto (x \mod p\ x \mod q)$, welche die Korrepondenz zwischen dem Ring $\mathbb{Z}_{p\cdot q}$ und dem Ring $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ herstellt.

[a] Diese Abbildung ist bijektiv und übersetzt die Ringoperationen richtig. Man sagt auch f ist ein *Ring-Isomorphismus* und kennzeichnet zueinander isomorphe Ringe durch das Zeichen $\cong$.

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf das Dechiffrierproblem

Analyse für Ringe der Form $\mathbb{Z}_{p\cdot q} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ mit Primzahlen p und q:

Wir erinnern an die Abbildung $f\colon \mathbb{Z}_{p\cdot q} \to \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q,\ x \mapsto (x \mod p\ x \mod q)$, welche die Korrepondenz zwischen dem Ring $\mathbb{Z}_{p\cdot q}$ und dem Ring $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ herstellt.

Einheiten und Nichteinheiten:

Die Einheiten im Ring $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ sind genau diejenigen Elemente (a, b), für die $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt.

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf das Dechiffrierproblem

Analyse für Ringe der Form $\mathbb{Z}_{p\cdot q} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ mit Primzahlen p und q:

Wir erinnern an die Abbildung $f\colon \mathbb{Z}_{p\cdot q} \to \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q,\ x \mapsto (x \mod p\ x \mod q)$, welche die Korrepondenz zwischen dem Ring $\mathbb{Z}_{p\cdot q}$ und dem Ring $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ herstellt.

Einheiten und Nichteinheiten:

Die Einheiten im Ring $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ sind genau diejenigen Elemente (a, b), für die $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt.

Begründung:

Ist x **keine** Einheit in $\mathbb{Z}_{p\cdot q}$, gilt also $\mathrm{ggT}(x, p \cdot p) \neq 1$, so ist x durch p oder durch q teilbar, d.h. es gilt $x \mod p = 0$ oder $x \mod q = 0$. Somit ist $f(x) = (a, 0)$ oder $f(x) = (0, b)$.

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf das Dechiffrierproblem

Analyse für Ringe der Form $\mathbb{Z}_{p\cdot q} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ mit Primzahlen p und q:

Wir erinnern an die Abbildung[a] $f\colon \mathbb{Z}_{p\cdot q} \to \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$, $x \mapsto (x \mod p\ x \mod q)$, welche die Korrepondenz zwischen dem Ring $\mathbb{Z}_{p\cdot q}$ und dem Ring $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ herstellt.

Einheiten und Nichteinheiten:

Die Einheiten im Ring $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ sind genau diejenigen Elemente (a, b), für die $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt.

Begründung:

Ist x **keine** Einheit in $\mathbb{Z}_{p\cdot q}$, gilt also $\mathrm{ggT}(x, p \cdot p) \neq 1$, so ist x durch p oder durch q teilbar, d.h. es gilt $x \mod p = 0$ oder $x \mod q = 0$. Somit ist $f(x) = (a, 0)$ oder $f(x) = (0, b)$.

[a] Diese Abbildung ist bijektiv und übersetzt die Ringoperationen richtig. Man sagt auch f ist ein *Ring-Isomorphismus* und kennzeichnet zueinander isomorphe Ringe durch das Zeichen $\cong$.

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf das Dechiffrierproblem

Analyse für Ringe der Form $\mathbb{Z}_{p\cdot q} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ mit Primzahlen p und q, Teil 2:

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf das Dechiffrierproblem

Analyse für Ringe der Form $\mathbb{Z}_{p \cdot q} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ mit Primzahlen p und q, Teil 2:

Auswertung des Ausdrucks $m^{\varphi(n)}$:

Analyse für Ringe der Form $\mathbb{Z}_{p\cdot q} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ mit Primzahlen p und q, Teil 2:

Auswertung des Ausdrucks $m^{\varphi(n)}$:

Für Einheiten

Falls m eine Einheit in $\mathbb{Z}_{p\cdot q}$ ist, so gilt $m^{\varphi(p\cdot q)} \mod n = 1$ nach dem Satz von Euler. Wir sehen uns an, wie sich dies im Korrespondenzring $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ äußert:

Analyse für Ringe der Form $\mathbb{Z}_{p\cdot q} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ mit Primzahlen p und q, Teil 2:

Auswertung des Ausdrucks $m^{\varphi(n)}$:

Für Einheiten

Falls m eine Einheit in $\mathbb{Z}_{p\cdot q}$ ist, so gilt $m^{\varphi(p\cdot q)} \mod n = 1$ nach dem Satz von Euler. Wir sehen uns an, wie sich dies im Korrespondenzring $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ äußert:

- Der Ausdruck $m^{\varphi(n)} \mod n$ übersetzt sich durch f in den Ausdruck $f\left(m^{\varphi(n)}\right) = \left(\left(a^{p-1}\right)^{q-1} \mod p,\ \left(b^{q-1}\right)^{p-1} \mod q\right)$

Analyse für Ringe der Form $\mathbb{Z}_{p\cdot q} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ mit Primzahlen p und q, Teil 2:

Auswertung des Ausdrucks $m^{\varphi(n)}$:

Für Einheiten

Falls m eine Einheit in $\mathbb{Z}_{p\cdot q}$ ist, so gilt $m^{\varphi(p\cdot q)} \mod n = 1$ nach dem Satz von Euler. Wir sehen uns an, wie sich dies im Korrespondenzring $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ äußert:

- Der Ausdruck $m^{\varphi(n)} \mod n$ übersetzt sich durch f in den Ausdruck $f\left(m^{\varphi(n)}\right) = \left(\left(a^{p-1}\right)^{q-1} \mod p,\ \left(b^{q-1}\right)^{p-1} \mod q\right)$
- Falls m Einheit ist, sind beide Komponenten von $f(m) = (a, b)$ ungleich Null. Nach dem kleinen Satz von Fermat ist dann

$$\begin{aligned}&\left(\left(a^{p-1}\right)^{q-1} \mod p,\ \left(b^{q-1}\right)^{p-1} \mod q\right)\\ =&\left((1)^{q-1} \mod p,\ (1)^{p-1} \mod q\right)\\ =&(1, 1).\end{aligned}$$

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf das Dechiffrierproblem

Analyse für Ringe der Form $\mathbb{Z}_{p \cdot q} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ mit Primzahlen p und q, Teil 3:

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf das Dechiffrierproblem

Analyse für Ringe der Form $\mathbb{Z}_{p\cdot q} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ mit Primzahlen p und q, Teil 3:

Auswertung des Ausdrucks $m^{\varphi(n)}$:

Analyse für Ringe der Form $\mathbb{Z}_{p \cdot q} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ mit Primzahlen p und q, Teil 3:

Auswertung des Ausdrucks $m^{\varphi(n)}$:

Für Nicht-Einheiten:

Analyse für Ringe der Form $\mathbb{Z}_{p \cdot q} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ mit Primzahlen p und q, Teil 3:

Auswertung des Ausdrucks $m^{\varphi(n)}$:

Für Nicht-Einheiten:

- Ist m **keine** Einheit, so ist die erste oder die zweite Komponente von $f(m) = (a, b)$ gleich Null. Wir betrachten den Fall, dass $m \neq 0$ durch p teilbar ist, dann gilt $a = 0$ und $b \neq 0$:

Analyse für Ringe der Form $\mathbb{Z}_{p\cdot q} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ mit Primzahlen p und q, Teil 3:

Auswertung des Ausdrucks $m^{\varphi(n)}$:

Für Nicht-Einheiten:

- Ist m **keine** Einheit, so ist die erste oder die zweite Komponente von $f(m) = (a, b)$ gleich Null. Wir betrachten den Fall, dass $m \neq 0$ durch p teilbar ist, dann gilt $a = 0$ und $b \neq 0$:
- Der Ausdruck $m^{\varphi(n)} \mod n$ übersetzt sich in diesem Fall durch f in den Ausdruck

$$\begin{aligned} &\left(\left(a^{p-1}\right)^{q-1} \mod p,\ \left(b^{q-1}\right)^{p-1} \mod q \right) \\ =&\left(0,\ (1)^{p-1} \mod q\right) \\ =&(0, 1). \end{aligned}$$

Analyse für Ringe der Form $\mathbb{Z}_{p\cdot q} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ mit Primzahlen p und q, Teil 3:

Auswertung des Ausdrucks $m^{\varphi(n)}$:

Für Nicht-Einheiten:

- Ist m **keine** Einheit, so ist die erste oder die zweite Komponente von $f(m) = (a, b)$ gleich Null. Wir betrachten den Fall, dass $m \neq 0$ durch p teilbar ist, dann gilt $a = 0$ und $b \neq 0$:
- Der Ausdruck $m^{\varphi(n)} \mod n$ übersetzt sich in diesem Fall durch f in den Ausdruck

$$\begin{aligned} &\left(\left(a^{p-1}\right)^{q-1} \mod p,\ \left(b^{q-1}\right)^{p-1} \mod q \right) \\ &= \left(0,\ (1)^{p-1} \mod q\right) \\ &= (0, 1). \end{aligned}$$

- Falls $m \neq 0$ durch q teilbar ist, ergibt sich entsprechend $(1, 0)$ und für $m = 0$ ist natürlich $f\left(m^{\varphi(n)}\right) = (0, 0)$.

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf das Dechiffrierproblem

Analyse für Ringe der Form $\mathbb{Z}_{p\cdot q} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ mit Primzahlen p und q, Teil 4:

Es sei im Folgenden stets $m \in \mathbb{Z}_{p\cdot q}$. Wir überzeugen uns davon, dass $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m = m$ gilt, wie es korrekte Dechiffrieren notwendig ist. Hierzu verwenden wir die Korrespondenz $f(m) = (a, b) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$.

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf das Dechiffrierproblem

Analyse für Ringe der Form $\mathbb{Z}_{p\cdot q} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ mit Primzahlen p und q, Teil 4:

Es sei im Folgenden stets $m \in \mathbb{Z}_{p\cdot q}$. Wir überzeugen uns davon, dass $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m = m$ gilt, wie es korrekte Dechiffrieren notwendig ist. Hierzu verwenden wir die Korrespondenz $f(m) = (a, b) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$.

Auswertung des Ausdrucks $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m$:

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf das Dechiffrierproblem

Analyse für Ringe der Form $\mathbb{Z}_{p\cdot q} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ mit Primzahlen p und q, Teil 4:

Es sei im Folgenden stets $m \in \mathbb{Z}_{p\cdot q}$. Wir überzeugen uns davon, dass $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m = m$ gilt, wie es korrekte Dechiffrieren notwendig ist. Hierzu verwenden wir die Korrespondenz $f(m) = (a, b) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$.

Auswertung des Ausdrucks $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m$:

Für Einheiten:

Ist m eine Einheit, so übersetzt sich der Ausdruck $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m$ durch f in den Ausdruck $\left(1^k \cdot a \mod p,\ 1^k \cdot b \mod q\right) = (a, b) \rightsquigarrow m$.

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf das Dechiffrierproblem

Analyse für Ringe der Form $\mathbb{Z}_{p\cdot q} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ mit Primzahlen p und q, Teil 4:

Es sei im Folgenden stets $m \in \mathbb{Z}_{p\cdot q}$. Wir überzeugen uns davon, dass $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m = m$ gilt, wie es korrekte Dechiffrieren notwendig ist. Hierzu verwenden wir die Korrespondenz $f(m) = (a, b) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$.

Auswertung des Ausdrucks $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m$:

Für Einheiten:

Ist m eine Einheit, so übersetzt sich der Ausdruck $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m$ durch f in den Ausdruck $\left(1^k \cdot a \mod p,\ 1^k \cdot b \mod q\right) = (a, b) \rightsquigarrow m$.

Für Nicht-Einheiten:

Wir betrachten zunächst den Fall, dass $m \neq 0$ durch p teilbar ist. Wie gesehen, gilt dann $f(m) = (0, b)$ mit $b \neq 0$ und

$$f\left(\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m\right) = \left(0^k \cdot a \mod p,\ 1^k \cdot b \mod q\right) = (0, b) \rightsquigarrow m.$$

Fall andererseits $m \neq 0$ durch q teilbar ist, so ist $f(m) = (a, 0)$ mit $a \neq 0$ und

$$f\left(\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m\right) = \left(1^k \cdot a \mod p,\ 0^k \cdot b \mod q\right) = (a, 0) \rightsquigarrow m.$$

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf das Dechiffrierproblem

Exemplarische Analyse für den Ring $\mathbb{Z}_{18} = \mathbb{Z}_{2\cdot 3^2} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$

Wir werden sehen, dass in diesem Ring die Gleichung $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m = m$ **nicht** für alle Elemente m gilt. Dies liegt daran, dass schon der Ring $\mathbb{Z}_9$ Nullteiler besitzt. Die Einheiten in $\mathbb{Z}_{18}$ sind 1, 5, 7, 11, 13 und 17, und es ist $\varphi(18) = 6$.

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf das Dechiffrierproblem

Exemplarische Analyse für den Ring $\mathbb{Z}_{18} = \mathbb{Z}_{2\cdot 3^2} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$

Wir werden sehen, dass in diesem Ring die Gleichung $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m = m$ **nicht** für alle Elemente m gilt. Dies liegt daran, dass schon der Ring $\mathbb{Z}_9$ Nullteiler besitzt. Die Einheiten in $\mathbb{Z}_{18}$ sind 1, 5, 7, 11, 13 und 17, und es ist $\varphi(18) = 6$.

Auswertung des Ausdrucks $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m = \left(m^6\right)^k \cdot m$:

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf das Dechiffrierproblem

Exemplarische Analyse für den Ring $\mathbb{Z}_{18} = \mathbb{Z}_{2\cdot 3^2} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$

Wir werden sehen, dass in diesem Ring die Gleichung $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m = m$ **nicht** für alle Elemente m gilt. Dies liegt daran, dass schon der Ring $\mathbb{Z}_9$ Nullteiler besitzt. Die Einheiten in $\mathbb{Z}_{18}$ sind 1, 5, 7, 11, 13 und 17, und es ist $\varphi(18) = 6$.

Auswertung des Ausdrucks $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m = \left(m^6\right)^k \cdot m$:

Für Einheiten:

Ist m eine Einheit, so gilt nach dem Satz von Euler $\left(m^6\right)^k \cdot m \mod 18 = (1)^k \cdot m \mod 18 = m$.

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf das Dechiffrierproblem

Exemplarische Analyse für den Ring $\mathbb{Z}_{18} = \mathbb{Z}_{2\cdot 3^2} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$

Wir werden sehen, dass in diesem Ring die Gleichung $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m = m$ **nicht** für alle Elemente m gilt. Dies liegt daran, dass schon der Ring $\mathbb{Z}_9$ Nullteiler besitzt. Die Einheiten in $\mathbb{Z}_{18}$ sind 1, 5, 7, 11, 13 und 17, und es ist $\varphi(18) = 6$.

Auswertung des Ausdrucks $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m = \left(m^6\right)^k \cdot m$:

Für Einheiten:

Ist m eine Einheit, so gilt nach dem Satz von Euler $\left(m^6\right)^k \cdot m \mod 18 = (1)^k \cdot m \mod 18 = m$.

Für Nicht-Einheiten:

Wir betrachten den Ring-Isomorphismus $f\colon \mathbb{Z}_{18} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9,\ x \mapsto (x \mod 2,\ x \mod 9)$.

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf das Dechiffrierproblem

Exemplarische Analyse für den Ring $\mathbb{Z}_{18} = \mathbb{Z}_{2\cdot 3^2} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$

Wir werden sehen, dass in diesem Ring die Gleichung $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m = m$ **nicht** für alle Elemente m gilt. Dies liegt daran, dass schon der Ring $\mathbb{Z}_9$ Nullteiler besitzt. Die Einheiten in $\mathbb{Z}_{18}$ sind 1, 5, 7, 11, 13 und 17, und es ist $\varphi(18) = 6$.

Auswertung des Ausdrucks $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m = (m^6)^k \cdot m$:

Für Einheiten:

Ist m eine Einheit, so gilt nach dem Satz von Euler $(m^6)^k \cdot m \mod 18 = (1)^k \cdot m \mod 18 = m$.

Für Nicht-Einheiten:

Wir betrachten den Ring-Isomorphismus $f\colon \mathbb{Z}_{18} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9,\ x \mapsto (x \mod 2,\ x \mod 9)$.

In $\mathbb{Z}_{18}$ gibt es, **anders** als in Ringen der Form $\mathbb{Z}_{p\cdot q}$ mit Primzahlen p und q, **Nicht-Einheiten** m, die durch f auf ein Paar (a, b) mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$ abgebildet werden. So ist

$$f(3) = (3 \mod 2,\ 3 \mod 9) = (1, 3)$$
$$f(15) = (15 \mod 2,\ 15 \mod 9) = (1, 6)$$

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf das Dechiffrierproblem

Exemplarische Analyse für den Ring $\mathbb{Z}_{18} = \mathbb{Z}_{2\cdot 3^2} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$

Wir werden sehen, dass in diesem Ring die Gleichung $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m = m$ **nicht** für alle Elemente m gilt. Dies liegt daran, dass schon der Ring $\mathbb{Z}_9$ Nullteiler besitzt. Die Einheiten in $\mathbb{Z}_{18}$ sind 1, 5, 7, 11, 13 und 17, und es ist $\varphi(18) = 6$.

Auswertung des Ausdrucks $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m = (m^6)^k \cdot m$:

Für Einheiten:

Ist m eine Einheit, so gilt nach dem Satz von Euler $(m^6)^k \cdot m \mod 18 = (1)^k \cdot m \mod 18 = m$.

Für Nicht-Einheiten:

Wir betrachten den Ring-Isomorphismus $f\colon \mathbb{Z}_{18} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9,\ x \mapsto (x \mod 2,\ x \mod 9)$.

In $\mathbb{Z}_{18}$ gibt es, **anders** als in Ringen der Form $\mathbb{Z}_{p\cdot q}$ mit Primzahlen p und q, **Nicht-Einheiten** m, die durch f auf ein Paar (a, b) mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$ abgebildet werden. So ist

$$f(3) = (3 \mod 2,\ 3 \mod 9) = (1, 3)$$
$$f(15) = (15 \mod 2,\ 15 \mod 9) = (1, 6)$$

und es gilt z.B. $f\left(3^6 \cdot 3 \mod 18\right) = \left(1^6 \cdot 1 \mod 2,\ 3^6 \cdot 3 \mod 9\right) = (1, 0) \neq (1, 3)$.

Man erkennt als Ursache die Tatsache, dass 3 ein Nullteiler in $\mathbb{Z}_9$ ist.

Faktorisierung von Restklassenringen

Anwendung auf das Dechiffrierproblem

Exemplarische Analyse für den Ring $\mathbb{Z}_{18} = \mathbb{Z}_{2\cdot 3^2} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$

Wir werden sehen, dass in diesem Ring die Gleichung $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m = m$ **nicht** für alle Elemente m gilt. Dies liegt daran, dass schon der Ring $\mathbb{Z}_9$ Nullteiler besitzt. Die Einheiten in $\mathbb{Z}_{18}$ sind 1, 5, 7, 11, 13 und 17, und es ist $\varphi(18) = 6$.

Auswertung des Ausdrucks $\left(m^{\varphi(n)}\right)^k \cdot m = (m^6)^k \cdot m$:

Für Einheiten:

Ist m eine Einheit, so gilt nach dem Satz von Euler $(m^6)^k \cdot m \mod 18 = (1)^k \cdot m \mod 18 = m$.

Für Nicht-Einheiten:

Wir betrachten den Ring-Isomorphismus $f\colon \mathbb{Z}_{18} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9,\ x \mapsto (x \mod 2,\ x \mod 9)$.

In $\mathbb{Z}_{18}$ gibt es, **anders** als in Ringen der Form $\mathbb{Z}_{p\cdot q}$ mit Primzahlen p und q, **Nicht-Einheiten** m, die durch f auf ein Paar (a, b) mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$ abgebildet werden. So ist

$$f(3) = (3 \mod 2,\ 3 \mod 9) = (1, 3)$$
$$f(15) = (15 \mod 2,\ 15 \mod 9) = (1, 6)$$

und es gilt z.B. $f\left(3^6 \cdot 3 \mod 18\right) = \left(1^6 \cdot 1 \mod 2,\ 3^6 \cdot 3 \mod 9\right) = (1, 0) \neq (1, 3)$.

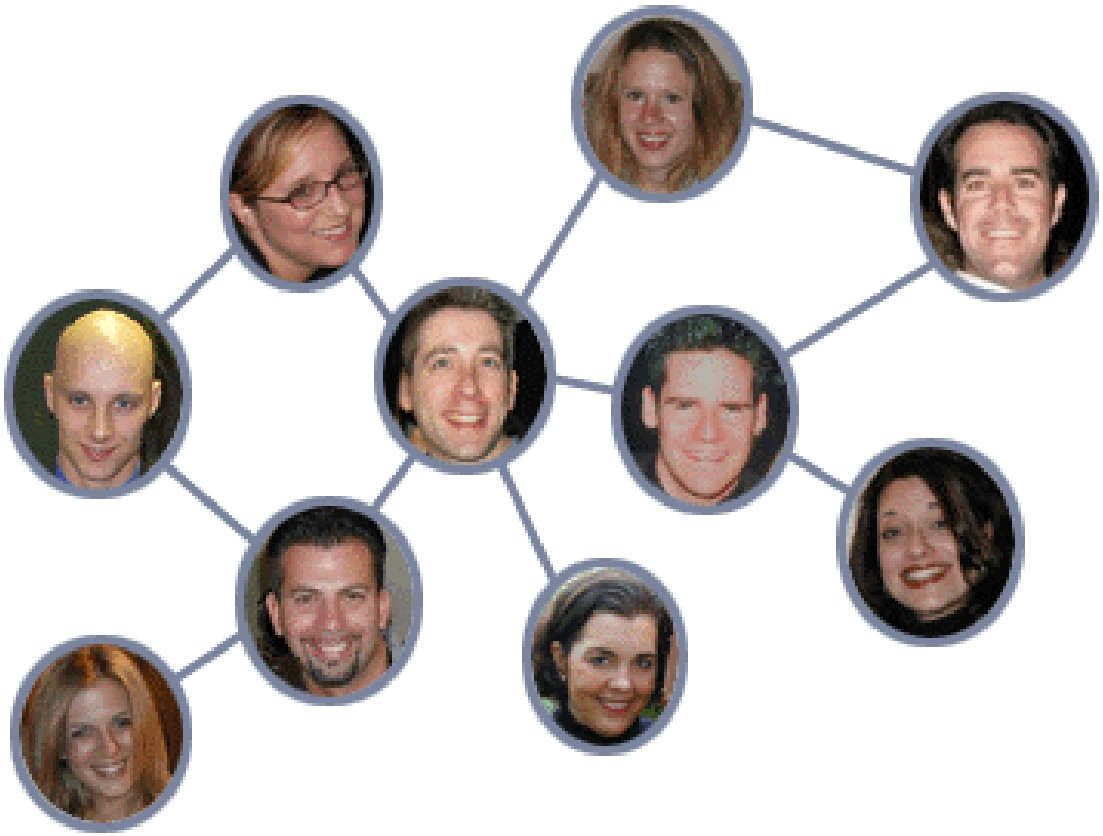
Man erkennt als Ursache die Tatsache, dass 3 ein Nullteiler in $\mathbb{Z}_9$ ist.

Rechnet man übrigens direkt in Z_{18}, so erhält man

$3^6 \cdot 3 \mod 18 = 27^2 \cdot 3 \mod 18 = 9^2 \cdot 3 \mod 18 = 3 \cdot 3 \mod 18 = 9 \neq 3$ und $f(9) = (1, 0)$ ✓

Relationen

Einführung



Relationen

- Elemente aus Mengen in Beziehung setzen (’Relation’ bedeutet Beziehung)
- Elemente mit ähnlichen Eigenschaften zusammenfassen oder anders ausgedrückt: eine Menge in Klassen ’ähnlicher’ Beziehungen zerlegen
- Elemente innerhalb einer Menge ordnen
  z.B. lexikographische Ordnung: Alphabet
  z.B. Ordnung von Objekten hinsichtlich ihrer Größe

Definition

Seien M_1, M_2 beliebige nichtleere Mengen. Eine **Relation** R auf $M_1 \times M_2$ ist eine Teilmenge von $M_1 \times M_2$.

$$R \subset M_1 \times M_2.$$

Bemerkung

- $M_1 \times M_2 := \{(x, y) | x \in M_1, y \in M_2\}$ ist das kartesische Produkt zwischen den Mengen M_1, M_2.
- Sind $M_1 = M_2 =: M$, so spricht man von einer **zweistelligen Relation** auf M.
- Falls $(x, y) \in R$ gilt, so sagt man „x steht in Relation R zu y“ und schreibt auch xRy.
- Eine n-stellige Relation R auf M ist eine Teilmenge von M^n: $R \subset M^n$.

Beispiele

1. Sei S die Menge der Studierenden an der HFU und F die Menge aller Studiengänge. So ist die Menge $B = \{(s, f) \,|\text{s belegt den Studiengang f}\}$ eine Relation auf $S \times F$

5. $M = \{1, 2\}$
   $R_{100} := \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$

Beispiele

1. Sei S die Menge der Studierenden an der HFU und F die Menge aller Studiengänge. So ist die Menge $B = \{(s, f) \,|\text{s belegt den Studiengang f}\}$ eine Relation auf $S \times F$
2. Alle Vergleichsoperationen $<, >, \leq, \geq, =, \neq$ sind Relationen auf $\mathbb{R}$

5. $M = \{1, 2\}$
   $R_{100} := \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$

Beispiele

1. Sei S die Menge der Studierenden an der HFU und F die Menge aller Studiengänge. So ist die Menge $B = \{(s, f) \,|\text{s belegt den Studiengang f}\}$ eine Relation auf $S \times F$
2. Alle Vergleichsoperationen $<, >, \leq, \geq, =, \neq$ sind Relationen auf $\mathbb{R}$
3. $R_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 = y\}$

5. $M = \{1, 2\}$
   $R_{100} := \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$

Beispiele

1. Sei S die Menge der Studierenden an der HFU und F die Menge aller Studiengänge. So ist die Menge $B = \{(s, f) \,|\text{s belegt den Studiengang f}\}$ eine Relation auf $S \times F$
2. Alle Vergleichsoperationen $<, >, \leq, \geq, =, \neq$ sind Relationen auf $\mathbb{R}$
3. $R_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 = y\}$
4. $R_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y\}$
5. $M = \{1, 2\}$
   $R_{100} := \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$

Relationen

Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie, Transitivität

Definition

Seien R eine Relation auf der Menge M. R heißt

- **reflexiv**, wenn für alle x aus M gilt : xRx bzw. $(x, x) \in R$

Relationen

Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie, Transitivität

Definition

Seien R eine Relation auf der Menge M. R heißt

- **reflexiv**, wenn für alle x aus M gilt : xRx bzw. $(x, x) \in R$
- **symmetrisch**, wenn für alle x, y aus M mit xRy gilt: yRx bzw. falls $(x, y) \in R$, so auch $(y, x) \in R$

Definition

Seien R eine Relation auf der Menge M. R heißt

- **reflexiv**, wenn für alle x aus M gilt : xRx bzw. $(x, x) \in R$
- **symmetrisch**, wenn für alle x, y aus M mit xRy gilt: yRx bzw. falls $(x, y) \in R$, so auch $(y, x) \in R$
- **antisymmetrisch**, wenn für alle x, y aus M mit xRy und yRx gilt: $x = y$ bzw. falls $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$, so folgt $x = y$

Relationen

Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie, Transitivität

Definition

Seien R eine Relation auf der Menge M. R heißt

- **reflexiv**, wenn für alle x aus M gilt : xRx bzw. $(x, x) \in R$
- **symmetrisch**, wenn für alle x, y aus M mit xRy gilt: yRx bzw. falls $(x, y) \in R$, so auch $(y, x) \in R$
- **antisymmetrisch**, wenn für alle x, y aus M mit xRy und yRx gilt: $x = y$ bzw. falls $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$, so folgt $x = y$
- **transitiv**, wenn $\forall x, y, z$ aus M mit xRy und yRz gilt: xRz bzw. falls $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$, so folgt $(x, z) \in R$

Äquivalenzrelation

Einführung

Man nennt Objekte äquivalent, wenn sie sich in irgendeiner Eigenschaft gleichen.

Beispiele:

- PC: Schalter die an sind und Schalter die aus sind.
- Natürliche Zahlen die nach Division durch 2 den gleichen Rest lassen.

Äquivalenzrelation
Definition

Definition

Eine Relation heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Bemerkung

Für eine Äquivalenzrelation schreibt man $\sim$. Es gilt laut Definition dann:

i) Für alle $x \in M$ gilt $x \sim x$ (reflexiv)

ii) Für alle $x, y \in M$ gilt: Ist $x \sim y$, so ist $y \sim x$ (symmetrisch)

iii) Für alle $x, y, z \in M$ gilt: $x \sim y$ und $y \sim z$, so ist $x \sim z$ (transitiv)

Äquivalenzrelation
Beispiel

Beipspiele

- Sei die Menge $M = \mathbb{Z}$,
  $R_5 := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 | (x - y)$ ist ohne Rest durch 5 teilbar$\}$. (Eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$ ist teilbar durch 5, wenn es eine ganze Zahl k derart gibt, daß $a = k \cdot 5$.)
  - Reflexivität
    xR_5x, denn $x - x = 0$ ist ohne Rest durch 5 teilbar.
  - Symmetrie
    Sei xR_5y, d.h. es existiert ein $k \in \mathbb{Z} : x - y = k \cdot 5$
    somit $-x + y = -(k \cdot 5)$
    also auch $y - x = (-k) \cdot 5$, da $(-k) \in \mathbb{Z}$ folgt schließlich yR_5x

Äquivalenzrelationen

Beispiel

- Transitivität
  Sei xR_5y und yR_5z, d.h. es existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ und es existiert ein $l \in \mathbb{Z}$, so dass $x - y = 5k$ und $y - z = 5l$ gilt.
  Wir schreiben $x - z$ als $x - y + y - z$:
  $x - y + y - z = 5k + 5l \Leftrightarrow x - z = 5(k + l) \Rightarrow xR_5z$, da $(k + l) \in \mathbb{Z}$

Äquivalenzrelationen

Äquivalenzklasse

Definition

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M und $x \in M$ ein beliebiges Element. Dann heißt die Menge
$[x] = \{y \in M | y \sim x\}$
die **Äquivalenzklasse** von x. Die Elemente von $[x]$ heißen die zu x **äquivalenten** Elemente.

Satz:

- Verschiedene Äquivalenzklassen sind disjunkt.
- Die Vereinigung aller Äquivalenzklassen ergibt die ganze Menge M.

Äquivalenzrelation

Äquivalenzklasse - Beispiel

Beispiel

Sei R_5 wie vorhin definiert und sei

$$[x] := \{y \in \mathbb{Z} | y - x \text{ ist ohne Rest durch 5 teilbar}\}.$$

$$\begin{aligned}
[0] :&= \{y \in \mathbb{Z} \mid y - 0 \text{ ist ohne Rest durch 5 teilbar}\} \\
&= \{\ldots, -15, -10, -5\} \cup \{0, 5, 10, \ldots\} \\
[1] :&= \{y \in \mathbb{Z} \mid y - 1 \text{ ist ohne Rest durch 5 teilbar}\} \\
&= \{\ldots, -14, -9, -4\} \cup \{1, 6, 11, \ldots\} \\
[2] :&= \{y \in \mathbb{Z} \mid y - 2 \text{ ist ohne Rest durch 5 teilbar}\} \\
&= \{\ldots, -13, -8, -3\} \cup \{2, 7, 12, \ldots\} \\
[3] :&= \{y \in \mathbb{Z} \mid y - 3 \text{ ist ohne Rest durch 5 teilbar}\} \\
&= \{\ldots, -12, -7, -2\} \cup \{3, 8, 13, \ldots\} \\
[4] :&= \{y \in \mathbb{Z} \mid y - 4 \text{ ist ohne Rest durch 5 teilbar}\} \\
&= \{\ldots, -11, -6, -1\} \cup \{4, 9, 15, \ldots\} \\
[5] :&= \{y \in \mathbb{Z} \mid y - 5 \text{ ist ohne Rest durch 5 teilbar}\} \\
&= \{\ldots, -15, -10, -5\} \cup \{0, 5, 10, \ldots\}
\end{aligned}$$

Äquivalenzrelationen

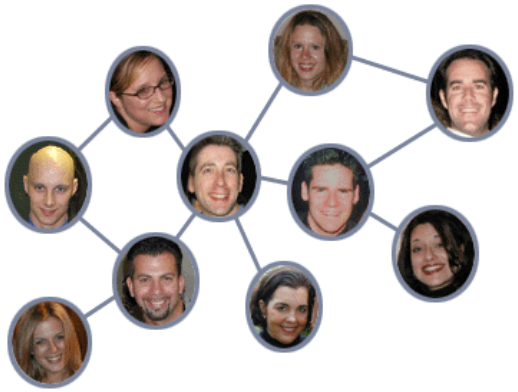
Äquivalenzklasse – Beispiel

Beispiel

- Offensichtlich gilt $[1] = [6] = ..$ und auch $[5] = [0] = ..$ usw.
- Durch die Relation R_5 wurden die ganzen Zahlen in 5 disjunkten Äquivalenzklassen zerlegt. Deren Vereinigung ergibt wieder $\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4]$

Äquivalenzrelationen

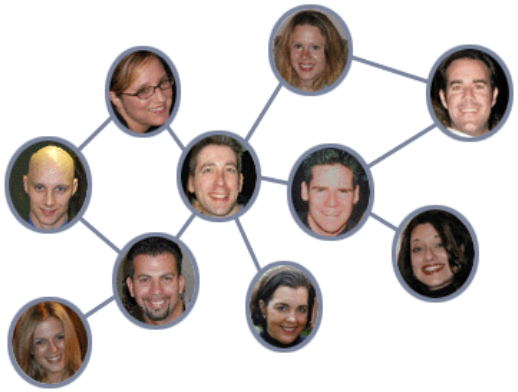
Beispiel



Es sei der oben abgebildete Freunschaftsgraph gegeben. Die Relation ’Freundschaft’ in diesem Graph ist folgendermaßen definiert: wird eine Linie zwischen zwei Personen gezogen, dann sind diese 2 Personen Freunde. Ist die Relation auf dem gesamten Graph:

- reflexiv? nein
- symmetrisch? ja
- transitiv? nein

Äquivalenzrelationen



Hausübung

Wie müßte man das Diagramm verändern, damit eine Äquivalenzrelation dargestellt wird?

- Um Reflexivität zu gewährleisten, muss man jede Person auch mit sich selbst verbinden (Schlaufe).
- Um Transitivität herzustellen, muss der Graph (ggf. iterativ) so ergänzt werden, dass zu jeder existierenden „Kette“ $A - B - C$ von drei Personen auch die Verbindung $A - C$ existiert (*transitive Hülle*).
- Skizzieren Sie die transitive Hülle der gegebenen Freundschaftsrelation.

Äquivalenzrelationen

- Äquivalenzrelation
  gruppiert
  abstrahiert: Elemente innerhalb dessen sind nicht mehr unterscheidbar
  dadurch vergröberte Gleichheit