Mathematik in Medien und Informatik

Darstellungen ganzer Zahlen

3

Prof. Dr. Thomas Schneider

Stand: 05.10.2022

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Inhalt

Der Körper $\mathbb{F}_2$

Additive Struktur

Der Körper $\mathbb{F}_2$ enthält die Elemente 0 und 1. Seine additive Struktur ist eine Gruppe mit 2 Elementen (vgl. Kapitel 2):

$$\begin{array}{c|cc} * & e & z \\ \hline e & e & z \\ z & z & e \end{array} \qquad \xleftrightarrow[z \to 1 \atop * \to +]{e \to 0} \qquad \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Der Körper $\mathbb{F}_2$

Additive Struktur von $\mathbb{F}_2$:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

Die multiplikative Struktur ist wie folgt:

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\mathbb{F}_2 = \{\{0, 1\}, +, 0, \cdot, 1\}$

Binärdarstellungen ganzer Zahlen

Einführung

- In digitalen Rechenanlagen werden ganze Zahlen durch Folgen von Nullen u. Einsen dargestellt.
- Jede Stelle einer solchen *Null-Eins-Folge* heißt *Bit* (binary digit).
- In jeder Rechnerarchitektur ist die Bit-Anzahl in den sog. Registern festgelegt (z. B. $n = 64$).
- Mit n Bits kann man 2^n verschiedene Null-Eins-Folgen bilden, d.h. es lassen sich 2^n Zahlen darstellen.

Bsp: Im Falle $n = 4$ gibt es $2^4 = 16$ Folgen:

$$0000, \quad 0001, \quad 0010, \quad 0011, \quad 0100, \quad \ldots, \quad 1110, \quad 1111.$$

Binärdarstellungen ganzer Zahlen

Definition:

- Für jede natürliche Zahl $n > 1$ bezeichne B_n die Menge aller Null-Eins-Folgen der Länge n.
- Auf B_n wird als Verknüpfung $+$ die *stellenweise Addition mit Übertrag* definiert.

Beispiel: Sukzessive Addition von 0001 in B_4:

$$
\begin{array}{r} 0000 \\ +\ 0001 \\ \hline 0001 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} 0001 \\ +\ 0001 \\ {\scriptstyle 1} \\ \hline 0010 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} 0010 \\ +\ 0001 \\ \hline 0011 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} 0011 \\ +\ 0001 \\ {\scriptstyle 11} \\ \hline 0100 \end{array}
\quad \cdots \quad
\begin{array}{r} 1111 \\ +\ 0001 \\ {\scriptstyle 1111} \\ \hline 0000 \end{array}
$$

Da eine feste Stellenzahl vorgegeben ist, kann bei der Addition ganz rechts der Übertrag vom vordersten Bit *(MSB - most significant bit)* nicht berücksichtigt werden.

Binärdarstellungen ganzer Zahlen

Beobachtungen

- 0000 ist das Neutralelement in $(B_4, +)$, allgemein ist $0 \dots 0$ das Neutralelement in $(B_n, +)$.
- Zu jedem Element in $(B_n, +)$ existiert ein inverses Element.

Beispiele

Das inverse Element von

$$\left\{ \begin{array}{c} 0000 \\ 1000 \\ 0001 \\ 1011 \\ 1111 \end{array} \right\} \text{ ist } \left\{ \begin{array}{c} 0000 \\ 1000 \\ 1111 \\ 0101 \\ 0001 \end{array} \right\}$$

Binärdarstellungen ganzer Zahlen

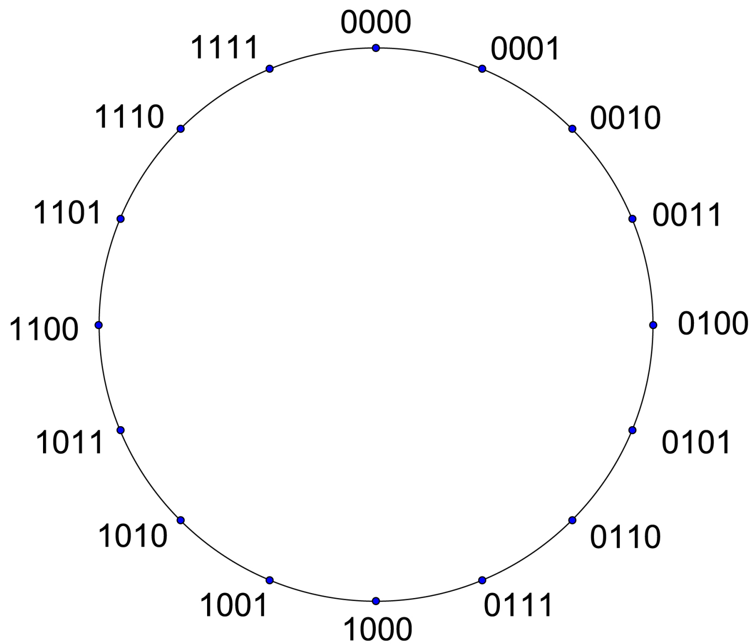
$(B_n, +, 0)$ ist eine kommutative Gruppe

Für jede Bitanzahl n gilt.

- Die Verknüpfung $+$ auf B_n ist assoziativ.
- Die Folge $0 \ldots 0$ ist das Neutralelement bzgl. $+$ auf B_n.
- Zu jedem Element in $+$ auf B_n existiert ein inverses Element.
- Also ist $(B_n, +, 0)$ eine Gruppe.
- Diese ist zyklisch mit Erzeuger $00 \ldots 01$ und damit kommutativ.

Binärdarstellungen ganzer Zahlen

Beispiel: $n = 4$



Welche ganze Zahl durch eine bestimmte Folge dargestellt wird, hängt von der jeweils gewählten Spezifikation ab.

Binärdarstellungen ganzer Zahlen

Erinnerung an Dezimaldarstellungen

- Bei der gewohnten Rechnung mit Dezimaldarstellungen natürlicher Zahlen verwenden wir soviele Stellen wie gerade notwendig.
- Bsp. 1: $723 = 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$
- Bsp. 2: $5703 = 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$.

Binärdarstellung mit fester Stellenanzahl

Beispiel: BDN mit $n = 4$

$$[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{MSB}}}{b_3}\ b_2\ b_1\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{LSB}}}{b_0}]_2 \mathrel{\widehat{=}} b_3 \cdot 2^3 + b_2 \cdot 2^2 + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0$$

Binärdarstellungen ganzer Zahlen

A) Binärdarstellung natürlicher Zahlen (BDN)

In 4-Bit-BDN lassen sich die Zahlen von 0 bis 15 darstellen.

z. B.

$$
\begin{aligned}
[1011]_2 \widehat{=} &1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\
&= 8 + 0 + 2 + 1 \\
&= 11_{10}
\end{aligned}
$$

Binärdarstellungen ganzer Zahlen

A) Binärdarstellung natürlicher Zahlen (BDN)

Hörsaal-Aufgabe:

- Bestimmen Sie für die Dezimalzahl 14_{10} die 4-Bit-Binärdarstellung.
- Bestimmen Sie eine Binärdarstellung der Dezimalzahl 77_{10}.

Binärdarstellungen ganzer Zahlen

A) Binärdarstellung natürlicher Zahlen (BDN)

Aufgabe

- Bestimmen Sie für die Dezimalzahl 14_{10} die 4-Bit-Binärdarstellung.
- Bestimmen Sie eine Binärdarstellung der Dezimalzahl 77_{10}.

Lösung

$$\begin{aligned}14 &= 8 + 4 + 2\\ &= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0\\ &\widehat{=} [1110]_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}77 &= 64 + 8 + 4 + 1\\ &= 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0\\ &\widehat{=} [100\,1101]_2\end{aligned}$$

Binärdarstellungen ganzer Zahlen

A) Binärdarstellung natürlicher Zahlen (BDN)

Systematische Vorgehensweise: Sukzessive Division mit Rest

Bsp: Stellen Sie 77_{10} als Dualzahl dar.

$$
\begin{array}{rcll}
77 : 2 &=& 38 & \text{Rest } 1 \\
38 : 2 &=& 19 & \text{Rest } 0 \\
19 : 2 &=& 9 & \text{Rest } 1 \\
9 : 2 &=& 4 & \text{Rest } 1 \\
4 : 2 &=& 2 & \text{Rest } 0 \\
2 : 2 &=& 1 & \text{Rest } 0 \\
1 : 2 &=& 0 & \text{Rest } 1 \\
\hline
0 : 2 &=& 0 & \text{Rest } 0 \\
\vdots & & & \vdots \\
0 : 2 &=& 0 & \text{Rest } 0
\end{array}
$$

von unten nach oben lesen

Die Folge der Reste wird von unten nach oben gelesen, hier ergibt sich

1001101.

Binärdarstellungen ganzer Zahlen
Beispielaufgaben

Probe:

$$\begin{aligned}[1001101]_2 &\mathrel{\widehat{=}} 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 64 + 8 + 4 + 1 \\ &= 77\end{aligned}$$

Darstellung von 77_{10} als 8-Bit-Dualzahl:

$$[0100\,1101] \quad \rightarrow \text{Null voran gestellt}$$

Hinweis: Vorne mit so vielen Nullen auffüllen wie nötig, um geforderte Bit-Anzahl (Stellenanzahl) zu erreichen.

77_{10} als 16-Bit-Dualzahl:

$$[0000\,0000\,0100\,1101]_2$$

Binärdarstellungen ganzer Zahlen

B) Binärdarstellung ganzer Zahlen (positive, negative und 0

Für die Darstellung ganzer Zahlen gibt es mehrere Alternativen, z. B.:

1. $\underset{\text{Vorzeichen-Bit}}{\square}$ $\underbrace{\square\square\square\square\ldots\ldots\square}_{\text{Betrag}}$
2. sog. Zweierkomplement-Darstellung (ZKD):

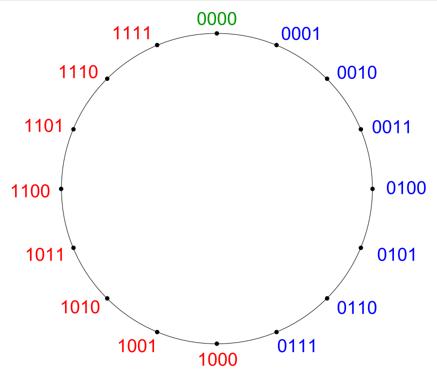
Binärdarstellungen ganzer Zahlen

Zweierkomplement-Darstellung (ZKD)

n-Bit-Zweierkomplement-Darstellung:

- Bei negativen Zahlen steht ganz vorne eine Eins, bei nicht negativen Zahlen enthält die Darstellung vorne eine Null, gefolgt von der $n-1$-Bit-BDN.
- Die Folge $[1\ 0 \ldots 0]$ stellt die Zahl -2^{n-1} dar.
- Die ZKD einer negativen Zahl $-Z$ mit $-2^{n-1} < -Z < 0$ erhält man aus der ZKD z der positiven Zahl Z wie folgt:

$$\begin{array}{ll} z \mapsto \overline{z} & \text{(bitweise invertieren: } \begin{smallmatrix} 0 \to 1 \\ 1 \to 0 \end{smallmatrix}) \\ \overline{z} \mapsto \overline{z}+1 & \text{(Addition von 1)} \end{array}$$



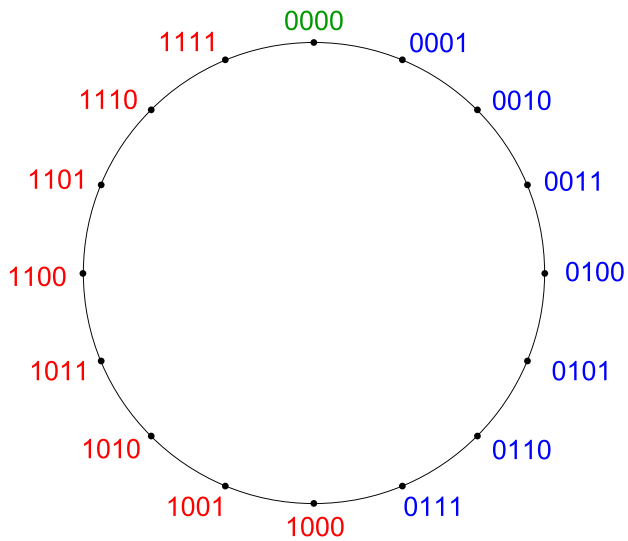
HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Binärdarstellungen ganzer Zahlen

Zweierkomplement-Darstellung

Bemerkung:

Die Darstellungen der Zahlen $-z$ und $+z$ liegen im Kreis auf gleicher Höhe.



Binärdarstellungen ganzer Zahlen

Zweierkomplement-Darstellung

Welche Zahlen lassen sich in n-Bit-ZKD darstellen?

In n-Bit-ZKD lassen sich die Zahlen

$$-2^{n-1} \ldots\ldots 0 \ldots\ldots 2^{n-1} - 1$$

darstellen. Hierbei entspricht $[1000...0000]$ der Zahl -2^{n-1}.

Beispiel:

Bsp: In 4-Bit-ZKD lassen sich die Zahlen -8 bis 7 darstellen. $[1000]$ entspricht der Zahl $-2^{4-1} = -2^3 = -8$.

Bsp: 4-Bit-ZKD

$5_{10} \widehat{=} [0101]_2$

$(-5)_{10} \widehat{=}$ Schritt 1: Betrachte $z = 0101$

Bitweise Inversion $\overline{z} = 1010$

Schritt 2: Addiere 0001 $\quad + \underline{0001}$

$1011 = \overline{z} + 1$

Probe: $5 + (-5) = 0 \rightsquigarrow$ Frage: $z + (\overline{z} + 1) \stackrel{?}{=} 0$

$$\begin{array}{r} 0101 \\ +\underline{1011} \\ 1\,\boxed{0000} \end{array}$$

$\uparrow$

wird ignoriert/abgeschnitten

Probe erfolgreich

Binärdarstellungen ganzer Zahlen

Zweierkomplement-Darstellung

Bemerkung:

In der Programmiersprache C++ erfolgt die Spezifikation a) bzw. b):

signed int – wie in b)
unsigned int – wie in a)

Binärdarstellungen ganzer Zahlen

Zweierkomplement-Darstellung

Hörsaalübung zu 8-Bit-ZKD

a) 4 und -4

77 und -77

100 und -100

b) Erkennen Sie die durch $x = 1011\,0110$ dargestellte Zahl?
Hinweis: Es gibt mindestens vier Lösungswege

Hörsaalübung: Lösungen zu a)

a) 4 und -4 $\quad [0000\,0100]_{\text{ZKD}};\ [1111\,1100]_{\text{ZKD}}$

77 und -77 $\quad [0100\,1101]_{\text{ZKD}};\ [1011\,0011]_{\text{ZKD}}$

100 und -100 $\quad [\qquad\qquad]_{\text{ZKD}};\ [\qquad\qquad]_{\text{ZKD}}$

Binärdarstellungen ganzer Zahlen

Zweierkomplement-Darstellung

Hörsaalübung: Lösungen zu b)

Die Folge $x = 1011\,0110$ stellt eine negative Zahl X dar. Wir wollen X bestimmen.

Lösung 1

x ist aus der Darstellung y der positiven Zahl Y durch die Operation $x = \bar{y} + 1$ entstanden. Wir machen diese Operation rückgängig, um y zu finden: $y = \overline{x - 1}$.

$$
\begin{array}{lr}
x - 1: & 1011\,0110 \\
 & -0000\,0001 \\
\hline
 & 1011\,0101
\end{array}
$$

Dieses Zwischenergebnis wird bitweise invertiert:
$y = \overline{1011\,0101} = 0100\,1010 \mathrel{\widehat{=}} 74$. Somit gilt $Y = 74$ und $X = -74$.

Binärdarstellungen ganzer Zahlen

Zweierkomplement-Darstellung

Hörsaalübung: Lösungen zu b)

Die Folge $x = 1011\,0110$ stellt eine negative Zahl X dar. Wir wollen X bestimmen.

Lösung 2

Es sei y die Darstellung der positiven Zahl Y mit $-Y = X$. Wir nutzen aus, dass $\bar{x} + 1 = y$ gilt, denn x und y sind inverse Elemente voneinander.

$\bar{x} = 0100\,1001$

$$\bar{x} + 1 : \quad \begin{array}{r} 0100\,1001 \\ +0000\,0001 \\ \hline 0100\,1010 \end{array}$$

Somit gilt $y = 0100\,1010$, d.h. $Y = 74$ und somit $X = -74$.

Binärdarstellungen ganzer Zahlen

Zweierkomplement-Darstellung

Hörsaalübung: Lösungen zu b)

Die Folge $x = 1011\,0110$ stellt eine negative Zahl X dar. Wir wollen X bestimmen.

Lösung 3

Wir zerlegen x auf geeignete Weise:

$$x = 1011\,0110 = \begin{array}{r} 1000\,0000 \\ +0011\,0110 \end{array}$$

Wegen $1000\,0000 \mathrel{\widehat{=}} -128$ und $0011\,0110 \mathrel{\widehat{=}} 54$ folgt

$$X = -128 + 54 = -74.$$

Binärdarstellungen ganzer Zahlen

Zweierkomplement-Darstellung

Hörsaalübung: Lösungen zu b)

Die Folge $x = 1011\,0110$ stellt eine negative Zahl X dar.

Lösung 4

Wir wollen die positive Zahl Y mit $X = -Y$ bestimmen. Hierzu bilden wir das Zweierkomplement y von x mit einem „Trick“:

Wir gehen die Stellen von x von vorne her durch und suchen die letzte (niedrigstwertig) Stelle, an der eine Eins steht. **Diese** Stelle (der wir eine Nummer k geben können), und **alle Stellen mit Nummern kleiner** k bleiben bei der Bildung von y unverändert, die Stellen mit Nummern größer k werden bitweise invertiert.

$$x = 1011\,0110 \quad \rightsquigarrow \quad y = 0100\,1010$$

Wir erkennen durch Auswertung der Binärstellen, dass y die positive Dezimalzahl $Y = 74$ darstellt. Also stellt x die negative Zahl $X = -74$ dar.

Anhang: Verfahren zur Subtraktion

Abzieh- und Ergänzungsverfahren

Subtraktion im Dezimalsystem

Wenn man eine Subtraktion „von Hand“ ausführt, z.B. $195 - 72$ kann man wie folgt vorgehen:

- Man berechnet an jeder Stelle die Differenz d zwischen der oberen Ziffer und der unteren Ziffer (**Abziehen**).
- Anders ausgedrückt, man überlegt, welche Zahl d zur unteren Ziffer addiert werden muss, damit sich die obere Ziffer ergibt **(Ergänzung)**.
- In unserem Beispiel ist (bei Abarbeitung der Stellen von rechts nach links)

$$5 - 2 = \mathbf{3}, \quad 9 - 7 = \mathbf{2} \quad \text{sowie} \quad 1 - 1 = \mathbf{0}$$

  bzw.

$$2 + \mathbf{3} = 5, \quad 7 + \mathbf{2} = 9 \quad \text{sowie} \quad 1 + \mathbf{0} = 1$$

- Die übliche Notation hierfür:

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 9 & 5 \\ - & 1 & 7 & 2 \\ \hline & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{array}$$

- Natürlich funktioniert das Abziehen bzw. die Ergänzung so nur, wenn jede Ziffer der oberen Zahl größer oder gleich der entsprechenden Ziffer der unteren Zahl ist.

Anhang: Verfahren zur Subtraktion

Abzieh- und Ergänzungsverfahren

Subtraktion im Dezimalsystem – Behandlung von Überträgen

Wenn man z.B. die Subtraktion $235 - 172$ ausführen möchte, muss man das Verfahren etwas modifizieren:

- Bei Stelle ganz rechts (der Einer-Stelle) gibt es noch keine Schwierigkeit: $2 + \mathbf{3} = 5$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{rrrr} & 2 & 3 & 5 \\ - & 1 & 7 & 2 \\ \hline & ? & ? & \mathbf{3} \end{array}$$

- Bei der nächsten Stelle (der Zehner-Stelle) gibt es jedoch ein Problem. Es gibt keine Ziffer (positive Zahl) d so, dass sich $7 + \mathbf{d} = 3$ ergäbe.

- Wir wenden in dieser Situation einen kleinen Trick an und bestimmen d so, dass $7 + d = \mathbf{1}3$ gilt. Dies ergibt natürlich $d = 6$, denn $7 + \mathbf{6} = 13$.

- Wir erhalten somit: $\begin{array}{rrrr} & 2 & \mathbf{1}3 & 5 \\ - & 1 & 7 & 2 \\ \hline & ? & 6 & 3 \end{array}$

Anhang: Verfahren zur Subtraktion

Abzieh- und Ergänzungsverfahren

Subtraktion im Dezimalsystem – Behandlung von Überträgen

Das Ersetzen der Ziffer 1 an der zweiten Stelle (Zehnerstelle) durch **1**3 bedeutet jedoch, dass wir (in Gedanken) zur oberen Zahl eine Ziffer 1 mit dem Stellenwert **1**00 hinzuaddiert haben. Wenn wir nichts weiter tun, ergibt sich ein **falsches** Ergebnis:

$$\begin{array}{cccc} & 2 & \mathbf{1}3 & 5 \\ - & 1 & 7 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{cccc} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ + & 2 & 3 & 5 \\ - & 1 & 7 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{100} + 235 + -172 = 335 - 172.$$

Anhang: Verfahren zur Subtraktion

Abzieh- und Ergänzungsverfahren

Subtraktion im Dezimalsystem – Behandlung von Überträgen

- Um den Fehler auszugleichen, müssen wir die von uns hinzugefügte **Zahl** wieder abziehen: $\mathbf{100} + 235 - 172 - \mathbf{100} = 235 - 172$.
- In unserem Subtraktionsschema heißt das, dass wir die von uns hinzugefügte **Ziffer** wieder (an der richtigen Stelle) abziehen müssen:

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 3 & 5 \\ - & 1 & 7 & 2 \\ \hline & ? & ? & 3 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cccc} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ + & 2 & 3 & 5 \\ - & 1 & 7 & 2 \\ - & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \hline & ? & ? & 3 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cccc} & 2 & \mathbf{1}3 & 5 \\ - & 1 & 7 & 2 \\ - & \mathbf{1} & & \\ \hline & ? & 6 & 3 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cccc} & 2 & \mathbf{1}3 & 5 \\ - & 1 & 7 & 2 \\ - & \mathbf{1} & & \\ \hline & ? & 6 & 3 \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\begin{array}{cccc} & 2 & \mathbf{1}3 & 5 \\ - & 1 & 7 & 2 \\ - & \mathbf{1} & & \\ \hline & 0 & 6 & 3 \end{array} \rightsquigarrow \quad 235 - 172 = 63$$

- Bemerkung: Die „geborgte “ Eins wird üblicherweise nicht geschrieben sondern nur gedacht, notiert wird nur die Kompensations-Eins unten.

Anhang: Verfahren zur Subtraktion

Abzieh- und Ergänzungsverfahren im Binärsystem

Subtraktion im Binärsystem – Behandlung von Überträgen

Bei der Subtraktion zweier Zahlen, die im Binärsystem dargestellt sind, verfährt man analog.

Subtraktion im Binärsystem – Behandlung von Überträgen

- Wir subtrahieren die beiden Binärzahlen 111 0011 und 101 1101 und achten hierbei auf korrekte Behandlung der Überträge.
- An den beiden letzten Stellen gibt es keinerlei Schwierigkeiten, denn $1 - 1 = {\color{red}0}$ (Abziehen) bzw. $1 + {\color{red}0} = 1$ (Ergänzung) und $1 - 0 = {\color{blue}1}$ bzw. $0 + {\color{blue}1} = 1$.
- Somit ergibt sich als Zwischenstand

$$\begin{array}{rccccccc} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ - & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & ? & ? & ? & ? & ? & {\color{blue}1} & {\color{red}0} \end{array}$$

Anhang: Verfahren zur Subtraktion

Abzieh- und Ergänzungsverfahren im Binärsystem

Subtraktion im Binärsystem – Behandlung von Überträgen

- Ausgehend von diesem Zwischenstand

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ - & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & ? & ? & ? & ? & ? & 1 & 0 \end{array}$$

  stellen wir fest, dass an der drittletzten Stelle eine Schwierigkeit auftritt. Es gibt keine Binärziffer d mit $1 + d = 0$.

- Analog zum Vorgehen im Dezimalsystem „borgen wir uns eine Eins von der nächsthöheren Stelle und rechnen $10 - 1 = 1$ bzw. $1 + 1 = 10$. $\rightsquigarrow$

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 1 & 0 & 10 & 1 & 1 \\ - & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & ? & ? & ? & ? & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

- Wenn wir nichts weiter unternähmen, ergäbe sich wieder ein falsches (nämlich um $[1000]_2 \equiv 8_{10}$) zu großes Ergebnis. Wir müssen das Borgen der Eins kompensieren, indem wir eine Eins an der richtigen Stelle wieder abziehen.

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 1 & 0 & 10 & 1 & 1 \\ - & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ - & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & ? & ? & ? & ? & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Anhang: Verfahren zur Subtraktion

Abzieh- und Ergänzungsverfahren im Binärsystem

Subtraktion im Binärsystem – Behandlung von Überträgen

- Wir haben nun den nun erreichten Stand weiterzuverarbeiten, den wir auf dieser Folie ohne Farbkennzeichnung darstellen, damit die farbige Kennzeichnung für den nächsten Schritt frei wird.

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 1 & 0 & \mathbf{1}0 & 1 & 1 \\ - & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ - & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & ? & ? & ? & ? & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

- An der vierletzten Stelle ist nun die Subtraktion $0 - 1 - 1$ auszuführen. Da es keine Ziffer d mit $d + 1 + 1 = 0$ gibt, borgen wir uns wiederum eine Eins von der nächsthöheren Stelle und rechnen $10 - 1 - 1 = 1 - 1 = 0$ bzw. $1 + 1 + 0 = 10$. Zur Kompensation ziehen wir eine Eins an der fünftletzten Stelle ab. $\rightsquigarrow$

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 1 & 10 & \mathbf{1}0 & 1 & 1 \\ - & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ - & 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & ? & ? & ? & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Anhang: Verfahren zur Subtraktion

Abzieh- und Ergänzungsverfahren im Binärsystem

Subtraktion im Binärsystem – Behandlung von Überträgen

- Der aktuelle Stand ohne Farbkennzeichnung:

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 1 & \mathbf{1}0 & \mathbf{1}0 & 1 & 1 \\ - & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ - & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & ? & ? & ? & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

- An der fünftletzten Stelle ist nun die Subtraktion $1 - 1 - 1$ auszuführen. Da es keine Ziffer d mit $d + 1 + 1 = 1$ gibt, borgen wir uns wiederum eine Eins von der nächsthöheren Stelle und rechnen $11 - 1 - 1 = 10 - 1 = 1$ bzw. $1 + 1 + 1 = 11$. Zur Kompensation ziehen wir eine Eins an der sechstletzten Stelle ab. $\rightsquigarrow$

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 11 & \mathbf{1}0 & \mathbf{1}0 & 1 & 1 \\ - & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ - & 0 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & ? & ? & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

- Die Ausführung der Subtraktionen an den vordersten beiden Stellen ist nun unproblematisch, wir erhalten als Ergebnis:

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & \mathbf{1}1 & \mathbf{1}0 & \mathbf{1}0 & 1 & 1 \\ - & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ - & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ - & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Anhang: Verfahren zur Subtraktion

Abzieh- und Ergänzungsverfahren im Binärsystem

Hausübung:

Als Probe

- rechnen Sie mit Binäraddition nach, dass

$$1011101 \; + \; 0010110 \; = \; 1110011 \qquad \text{gilt,}$$

- rechnen Sie den Minuenden 1110011, den Subtrahenden 1011101 sowie die ermittelte Differenz $d = 0010110$ in Dezimaldarstellung um und prüfen nach, ob die Differenz der Dezimalzahlen zu d passt.

Anhang: Verfahren zur Subtraktion

Entbündelungsverfahren

Subtraktion im Dezimalsystem – Entbündelungsverfahren

International wird handschriftliche Subtraktion oft mit dem sogenannten **Entbündelungsverfahren** gelehrt. Wir illustrieren dieses anhand eines Beispiels:

$$40235 - 17262 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{cccccc} & 4 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ - & 1 & 7 & 2 & 6 & 2 \\ \hline & ? & ? & ? & ? & ? \end{array}$$

- Von rechts beginnend wird an jeder Stelle geprüft, ob die untere Ziffer größer ist als die obere.
- Ist dies **nicht** der Fall, wird beim Entbündelungsprozess gar nichts unternommen.
- Trifft dies jedoch an einer Stelle zu, so wird an der nächsthöheren Stelle die obere Ziffer um Eins erniedrigt.
- Zum Vergleich: Beim Abzieh- oder Ergänzungsverfahren wurde in einer solchen Situation eine Kompensations-Eins zusätzlich abgezogen und „unten“notiert, beim Entbündelungsverfahren wird stattdessen die entsprechende Ziffer des Minuenden „oben“um Eins erniedrigt.
- Einen Sonderfall müssen wir hier separat diskutieren. Wenn die um Eins zu verringernde Ziffer eine **Null** ist, wird an der betreffenden Stelle eine 9 notiert und die nächsthöhere Stelle um 1 reduziert. Falls dort keine Null steht, ist dies unproblematisch. Steht dort jedoch eine Null, wird dort wieder eine 9 notiert und an die nächsthöhere Stelle um Eins verringert, usw.

Anhang: Verfahren zur Subtraktion

Entbündelungsverfahren

Subtraktion im Dezimalsystem – Entbündelungsverfahren

- Ausgangssituation:
$$\begin{array}{cccccc} & 4 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ - & 1 & 7 & 2 & 6 & 2 \\ \hline & ? & ? & ? & ? & ? \end{array}$$
- An der Stelle ganz rechts ist die unter Zahl kleiner als die obere, also ist beim Entbündeln nichts zu tun. An der zweitletzten Stelle jedoch ist die untere Zahl größer als die obere, also muss an der drittletzten Stelle die Ziffer 2 um eins erniedrigt werden.
$$\begin{array}{cccccc} & & & 1 & & \\ & 4 & 0 & \cancel{2} & 3 & 5 \\ - & 1 & 7 & 2 & 6 & 2 \\ \hline & ? & ? & ? & ? & ? \end{array}$$
- An der drittletzten Stelle ist nun die untere Zahl (2) größer als die obere Zahl (1), also muss die Ziffer an der viertletzten Stelle um eins erniedrigt werden. Dies ist jedoch eine Null, darum wird an der viertletzten Stelle eine Neun notiert und die fünftletzte um Eins verringert.
$$\begin{array}{cccccc} & 3 & 9 & 1 & & \\ & \cancel{4} & \cancel{0} & \cancel{2} & 3 & 5 \\ - & 1 & 7 & 2 & 6 & 2 \\ \hline & ? & ? & ? & ? & ? \end{array}$$

Anhang: Verfahren zur Subtraktion

Entbündelungsverfahren

Subtraktion im Dezimalsystem – Entbündelungsverfahren

- Zwischenstand nach dem Entbündeln:

$$\begin{array}{cccccc} & 3 & 9 & 1 & & \\ & \cancel{4} & \cancel{0} & \cancel{2} & 3 & 5 \\ - & 1 & 7 & 2 & 6 & 2 \\ \hline & ? & ? & ? & ? & ? \end{array}$$

- Nun kann wieder stellenweise subtrahiert werden. An den Stellen, an denen die untere Ziffer größer als die obere ist, wird „oben“ 10 hinzuaddiert.[1]

$$\begin{array}{cccccc} & 3 & 9 & \mathbf{11} & & \\ & \cancel{4} & \cancel{0} & \cancel{2} & \mathbf{13} & 5 \\ - & 1 & 7 & 2 & 6 & 2 \\ \hline & ? & ? & ? & ? & ? \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{cccccc} & 3 & 9 & \mathbf{11} & & \\ & \cancel{4} & \cancel{0} & \cancel{2} & \mathbf{13} & 5 \\ - & 1 & 7 & 2 & 6 & 2 \\ \hline & 2 & 2 & 9 & 7 & 3 \end{array}$$

[1] Erinnerung: Die Entbündelung hat ja genau dafür gesorgt, dass die Erhöhung um 10 jeweils korrekt kompensiert wird.

Anhang: Verfahren zur Subtraktion

Entbündelungsverfahren im Binärsystem

Subtraktion im Binärsystem – Entbündelungsverfahren

- Wir subtrahieren die beiden Binärzahlen 111 0011 und 101 1101 nun mit dem Entbündelungsverfahren.
- Hierbei beachten wir, dass dort, wo eine Null um Eins verringert werden muss, (natürlich keine 9 sondern) eine 1 geschrieben und die nächsthöhere Stelle um Eins reduziert wird – selbstverständlich mit der Möglichkeit, dass dieses Vorgehen weiteriteriert werden muss.
- Ausgangssituation: $$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ - & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{array}$$
- Die beiden letzten Stellen erfordern keine Maßnahme, an der drittletzten Stelle jedoch ist die untere Ziffer größer als die obere. Entbündelung ergibt den folgenden Zwischenstand:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & \cancel{1} & \cancel{0} & 0 & 1 & 1 \\ - & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{array}$$

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Anhang: Verfahren zur Subtraktion

Entbündelungsverfahren im Binärsystem

Subtraktion im Binärsystem – Entbündelungsverfahren

- Der bislang erreichte Zwischenstand:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & 0 & 1 & & & \\
 & 1 & 1 & \cancel{1} & \cancel{0} & 0 & 1 & 1 \\
- & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ?
\end{array}
$$

- An der fünftletzten Stelle ist die untere Ziffer (1) größer als die obere (0). Wir müssen somit weiter entbündeln:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & 0 & 0 & 1 & & & \\
 & 1 & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} & 0 & 1 & 1 \\
- & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ?
\end{array}
$$

Anhang: Verfahren zur Subtraktion

Entbündelungsverfahren im Binärsystem

Subtraktion im Binärsystem – Entbündelungsverfahren

- Wir schreiben den komplett entbündelten Zustand auf:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & 0 & 0 & 1 & & & \\
 & 1 & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} & 0 & 1 & 1 \\
- & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ?
\end{array}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
- & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ?
\end{array}
$$

- An allen Stellen, an denen die untere Ziffer größer ist als die obere, wird 10 hinzu-addiert[1]:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 0 & \mathbf{1}0 & 1 & \mathbf{1}0 & 1 & 1 \\
- & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ?
\end{array}
$$

- Nun kann stellenweise subtrahiert werden[2]:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 0 & \mathbf{1}0 & 1 & \mathbf{1}0 & 1 & 1 \\
- & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

- Der Vergleich mit Folie 34 zeigt, dass das Ergebnis richtig ist.

[1] Auch hier die Erinnerung, dass die Entbündelung diese Manipulation korrekt kompensiert hat.
[2] unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $10 - 1 = 1$ gilt