

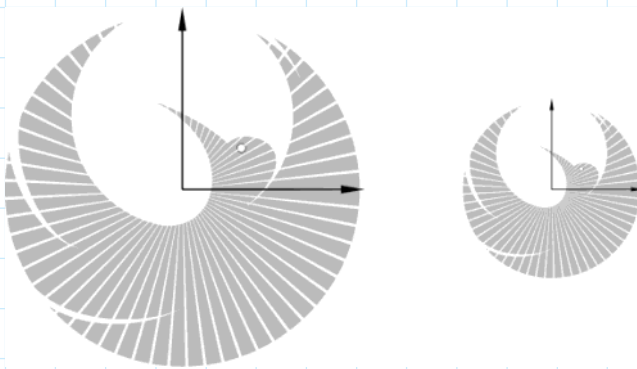
Lineare Abbildungen in Aktion

Montag, 8. Januar 2024 22:02

Bilderquelle: https://learning.oreilly.com/library/view/practical-linear-algebra/9781466579569/K16852_C004.xhtml#art_Dest_fig-C004_002



Drehung und Skalierung eines Quadrates.



Gleichmäßige Skalierung



Ungleichmäßige Skalierung



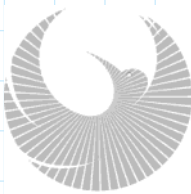
Spiegelung an der x-Achse



Drehung um 45 Grad



Scherung entlang der x-Achse



Drehen, spiegeln

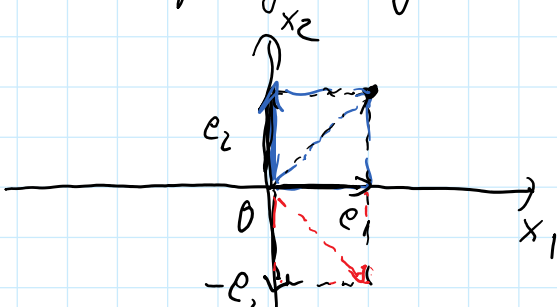


Spiegeln, drehen

Verkettung i.d.R. nicht kommutativ

Lineare Abbildungen

1) Spiegelung an der x_1 -Achse



$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

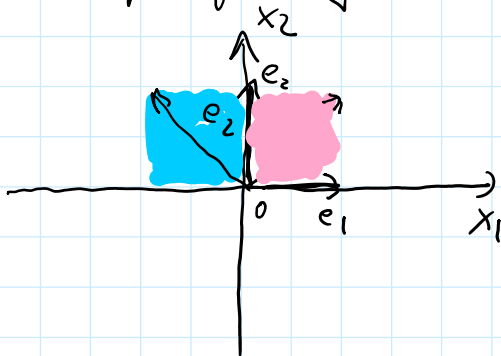
$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{s_1\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2) Spiegelung an der x_2 -Achse



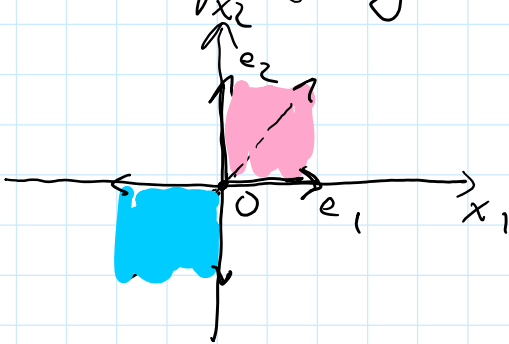
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\{s_2\} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) Punktspiegelung am Ursprung



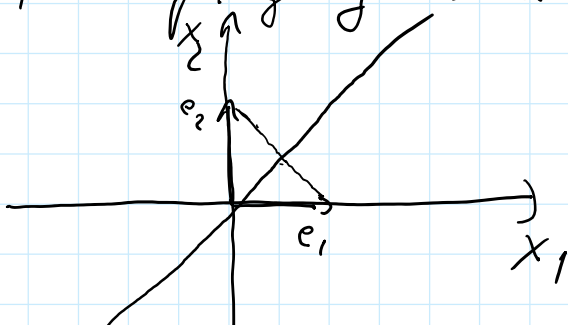
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$S_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden



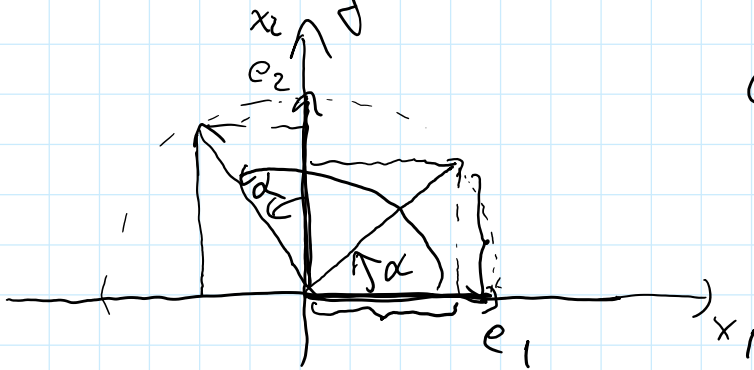
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

5. Drehung mit Winkel α um den Ursprung $D_{0,\alpha}$



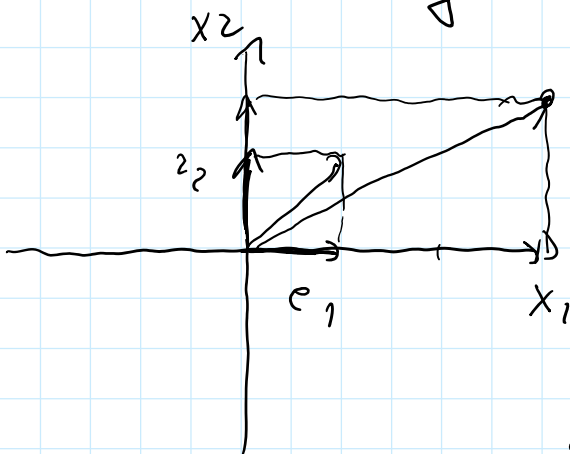
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(90^\circ + \alpha) \\ \sin(90^\circ + \alpha) \end{pmatrix}$$

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$D_{0,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

6. Skalierung



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

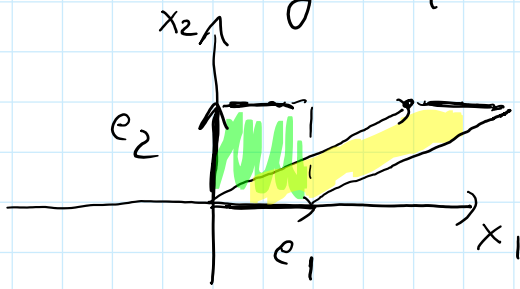
$$S_k = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

hier:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

$k_1 = k_2$ gleichmäßige Skalierung

7. Scherung entlang der x_1 -Achse



$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a = 2$$

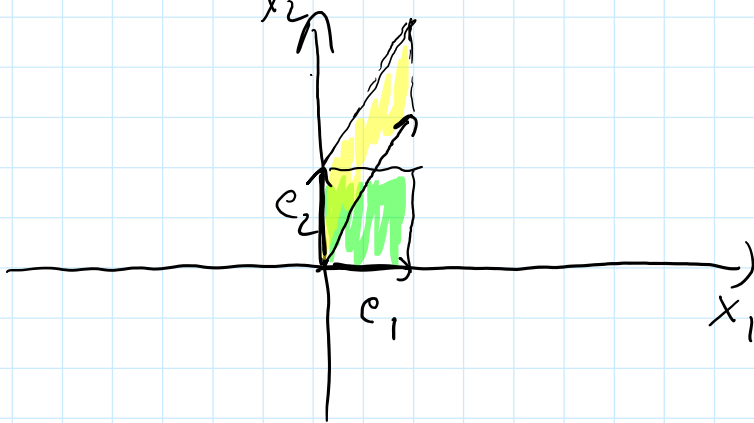
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + a x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

8. Scherung entlang der x_2 -Achse



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

$$b = 1.5$$

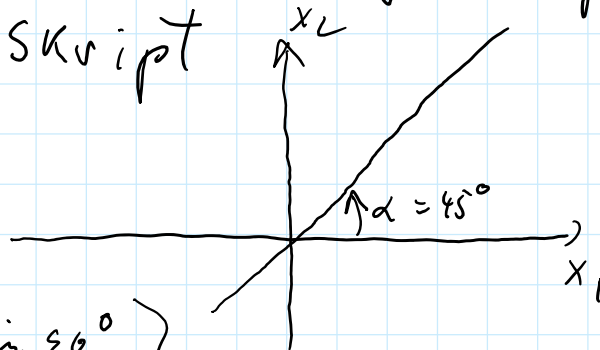
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

9. Spiegelung an einer beliebigen Ursprungsgeraden
s. Skript

$$S_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{bmatrix}$$



$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & -\cos 90^\circ \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$