Mathematik in Medien und Informatik

Elemente der Analytischen Geometrie

6

Prof. Dr. Thomas Schneider

Stand: 05.10.2022

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Inhalt

Generelle Vereinbarung

Im Folgenden wird stets vorausgesetzt, dass eine physikalische oder mathematische Ebene (bezeichnet als „die Ebene“) betrachtet wird, in der ein **kartesisches Koordinatensystem** $\left(O; \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right)$ gegeben ist.

Bekannt aus der Schule ist die

Geradengleichung $y = m\,x + b$

Für gegebene Werte von m und b wird hierdurch die Menge

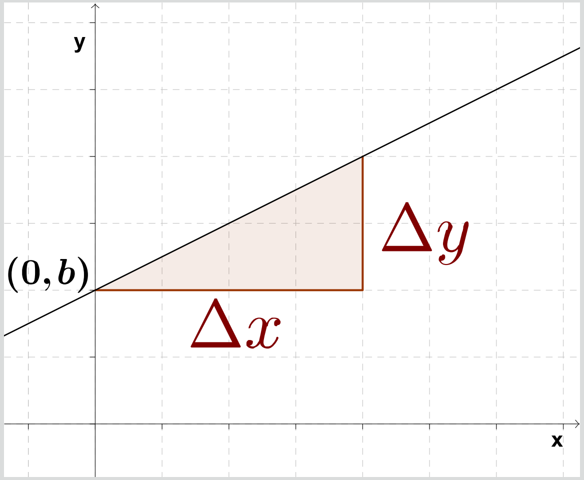
$$\left\{(x, y) \mid y = m\,x + b\right\}$$

beschrieben, d.h. die Menge aller Punkte P der Ebene mit Koordinaten $(P)_K = (x, y)$, für welche die Aussage $y = m\,x + b$ zutrifft.

Geraden in der Ebene

Einführung

Geradengleichung $y = m\,x + b$



$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist die **Steigung** der Geraden $g = \left\{(x, y) \mid y = m\,x + b\right\}$, b ist der sogenannte y-**Achsenabschnitt**.

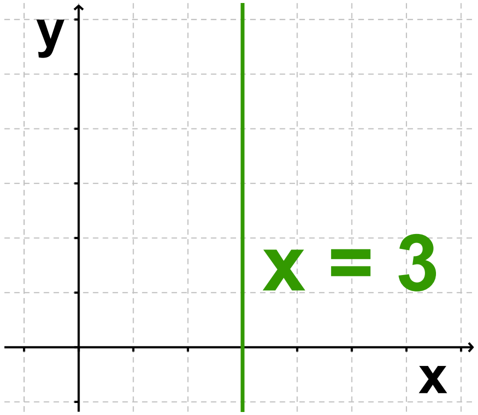
Geraden in der Ebene

Einführung

Feststellung

Vertikale Geraden lassen sich mit der Gleichung $y = mx + b$ **nicht** darstellen.

Betrachten Sie z. B. die Gerade $\{(x, y) \mid x = 3\}$:



Bei dieser Geraden ist weder eine Steigung noch ein y-Achsenabschnitt definiert.

Geraden in der Ebene

Ausblick:

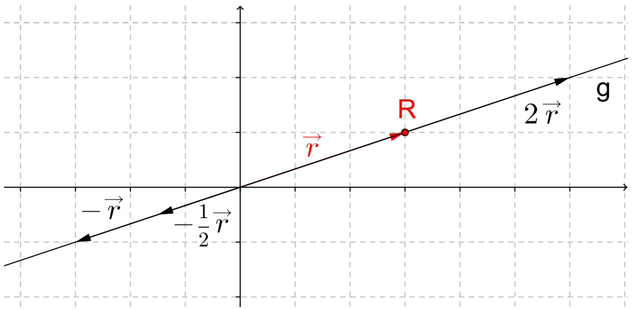
In dieser Lehreinheit betrachten wir drei Typen von Gleichungen, mit denen sich jeweils **alle** Geraden der Ebene beschreiben lassen.

Geraden in der Ebene

Parametergleichung (PG) für Geraden in der Ebene

Parametergleichung für Ursprungsgeraden

- Gegeben sei ein Punkt R in der Ebene. Die Gerade, welche durch R und den Ursprung O verläuft, heiße g.
- Ferner sei $\vec{r}$ der Verbindungsvektor $\overrightarrow{OR}$.
- Heftet man ein beliebiges Vielfaches $t\,\vec{r}$ von $\vec{r}$ am Ursprung an, so liegt der resultierende Punkt $O + t\,\vec{r}$ auf der Ursprungsgeraden g.
- **Anders ausgedrückt:**
  Jedes Vielfache $\vec{x} = t\,\vec{r}$ von $\vec{r}$ bildet den Ortsvektor eines Punktes, der auf der Ursprungsgeraden g liegt.
- Umgekehrt existiert zu jedem Punkt X auf der Ursprungsgeraden g ein Wert t derart, dass $X = O + t\vec{r}$ gilt. Für den Vektor $x := \overrightarrow{OX}$ gilt dann $x = t\,\vec{r}$.



Geraden in der Ebene

Parametergleichung (PG) für Geraden in der Ebene

Bezeichnungen

Ist ein R ein Punkt, g die Ursprungsgerade durch R und $\vec{r} = \overrightarrow{OR}$ der zu R gehörige (Orts-)Vektor, so beschreibt

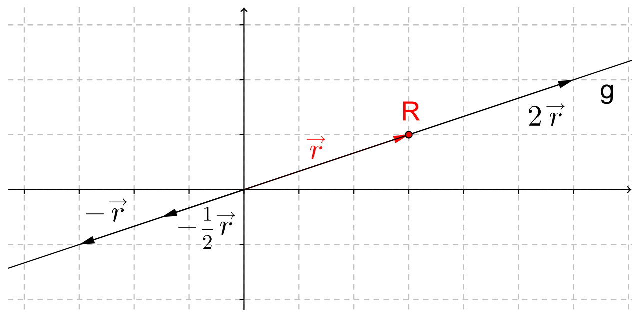
- die Gleichung $X = O + t\,\vec{r},\ t \in \mathbb{R}$ alle **Punkte** von g,
- die Gleichung $\vec{x} = t\,\vec{r},\ t \in \mathbb{R}$ alle **Ortsvektoren der Punkte** von g.

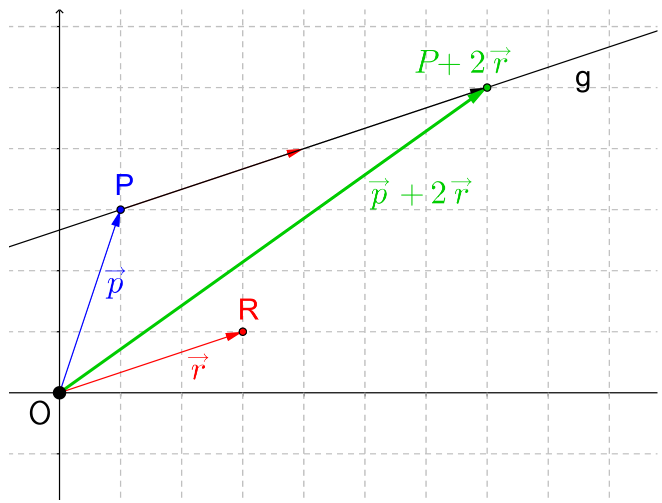
Wir nennen jede dieser Gleichungen eine **Parametergleichung** der Geraden g.

Zu Ursprungsgeraden parallele Geraden

Es sei R ein Punkt, u die Ursprungsgerade durch R und $\vec{r} = \overrightarrow{OR}$ der zu R gehörige (Orts-)Vektor.

- Die Ursprungsgerade u lässt sich an einen beliebigen Punkt P verschieben.
- Dies wird dadurch erreicht, dass der Vektor $\vec{r}$ und jedes Vielfache $t\,\vec{r}$ von $\vec{r}$ am Punkte P (anstatt, wie zuvor, am Ursprung) angeheftet werden.
- Die Punkte X auf der so konstruierten Geraden g lassen sich somit beschreiben durch die Gleichung $\boxed{X = P + t\,\vec{r}}$ mit $t \in \mathbb{R}$.
- Der (Orts-)Vektor $\vec{x} := \overrightarrow{OX}$ eines jeden Punktes X auf g lässt sich in der Form $\boxed{\vec{x} = \vec{p} + t\vec{r}}$ mit $t \in \mathbb{R}$ darstellen.

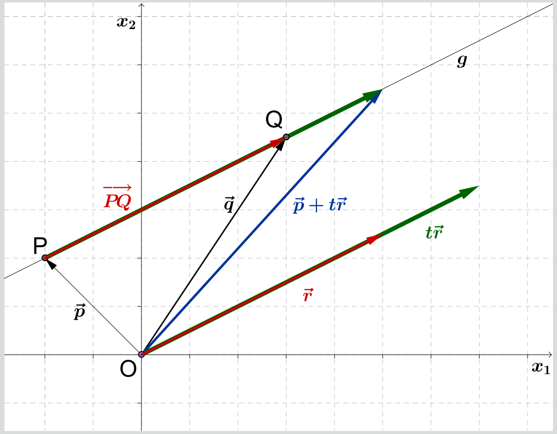




Geraden in der Ebene

Parametergleichung (PG) für Geraden in der Ebene

Parametergleichung der Verbindungsgeraden zweier Punkte.



- Wähle zwei Punkte P, Q, bezeichne deren Verbindungsgerade mit g. Setze ferner $\vec{p} := \overrightarrow{OP}$ und $\vec{q} := \overrightarrow{OQ}$
- Betrachte $\vec{r} := \overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$ sowie $t\,\vec{r}$ mit $t \in \mathbb{R}$.
- Hefte den Vektor $t\,\vec{r}$ am Punkt P an. Der resultierende **Punkt** $X = P + t\,\vec{r}$ liegt auf g.
- Alternativ hierzu: Bilde $\vec{x} := \vec{p} + t\,\vec{r}$. Dann ist $\vec{x}$ der **Ortsvektor** eines Punktes auf g.

Parametergleichung (Variante für Punkte):

$$\begin{aligned} X &= P + t\,\overrightarrow{PQ} \\ &= P + t\left(\vec{q} - \vec{p}\right), \; t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Parametergleichung (Variante für Ortsvektoren):

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{p} + t\,\overrightarrow{PQ} \\ &= \vec{p} + t\left(\vec{q} - \vec{p}\right), t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Parametergleichung – Bezeichnungen

Wird eine Gerade durch die Gleichung $\vec{x} = \vec{p} + t\,\vec{r}$ bzw. $X = P + t\,\vec{r}$ mit $t \in \mathbb{R}$ beschrieben, so

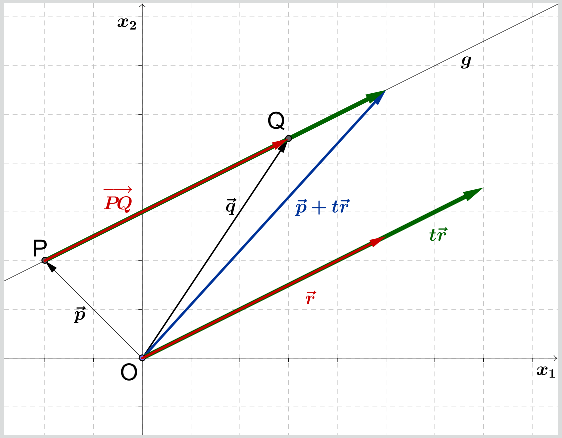
- heißt t **Parameter**,
- wird $\vec{r}$ **Richtungsvektor** genannt,
- heißt P **Aufpunkt**,
- bezeichnet man $\vec{p}$ als **Stützvektor** (oder als Ortsvektor eines Aufpunktes).

Merke

Für zwei gegebene Punkte P, Q mit Ortsvektoren $\vec{p}$ und $\vec{q}$ erhält man einen Richtungsvektor $\vec{r}$ der Verbindungsgeraden g durch P und Q wie folgt:

$$\vec{r} = \vec{q} - \vec{p}$$

Denn aus der Skizze folgt $\vec{p} + \vec{r} = \vec{q} \quad \rightsquigarrow \vec{r} = \vec{q} - \vec{p}.$



Hörsaalübung:

Es seien die Punkte $A = (2,0)$ und $B = (1,2)$ gegeben. Finden Sie eine Parametergleichung der Form

$$\vec{x} = \vec{p} + t\,\vec{r}$$

bzw.

$$X = P + t\,\vec{r}$$

mit $t \in \mathbb{R}$ für die Verbindungsgerade g von A und B.

Hörsaalübung – Lösung

Zu bestimmen ist eine Parametergleichung

$$\vec{x} = \vec{p} + t\,\vec{r}$$

bzw.

$$X = P + t\,\vec{r}$$

mit $t \in \mathbb{R}$ für die Verbindungsgerade g der Punkte $A = (2, 0)$ und $B = (1, 2)$:

Wähle z.B.

$$P = A, \quad \text{also} \quad \vec{p} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{r} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt die Parametergleichung

$$\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{r}$$

$$\rightsquigarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

Eine Gerade – viele Parametergleichungen

Es gibt viele Möglichkeiten, zu einer gegebenen Geraden eine Parametergleichung zu bestimmen. Dies sei am Beispiel der vorigen Hörsaalübung illustriert.

- $\vec{x_1}(t_1) = \binom{2}{0} + t_1 \binom{-1}{2}$, $t_1 \in \mathbb{R}$,
- $\vec{x_2}(t_2) = \binom{1}{2} + t_2 \binom{-1}{2}$, $t_2 \in \mathbb{R}$,
- $\vec{x_3}(t_3) = \binom{2}{0} + t_3 \binom{1}{-2}$, $t_3 \in \mathbb{R}$.
- $\vec{x_4}(t_4) = \binom{1}{2} + t_4 \binom{1}{-2}$, $t_4 \in \mathbb{R}$.

Jede der voranstehenden Parametrisierungen beschreibt dieselbe Gerade. Jedoch ist die Zuordnung von Parameterwerten zu Punkten unterschiedlich. So gilt beispielsweise

$$\vec{x_1}(1) = \vec{x_2}(0) = \vec{x_3}(-1) = \binom{1}{2}$$
$$\vec{x_1}(0) = \vec{x_2}(-1) = \vec{x_4}(+1) = \binom{2}{0}$$

Geraden in der Ebene

Parametergleichung (PG) für Geraden in der Ebene

Diskussion / Illustration

- Nutzen Sie eine der soeben gefundenen Parametergleichungen für die Gerade g, z.B.

$$\vec{x}(t) \;=\; \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\; t \in \mathbb{R}$$

bzw.

$$X(t) \;=\; (2,\,0) + t\left(\begin{smallmatrix}-1\\2\end{smallmatrix}\right),\; t \in \mathbb{R},$$

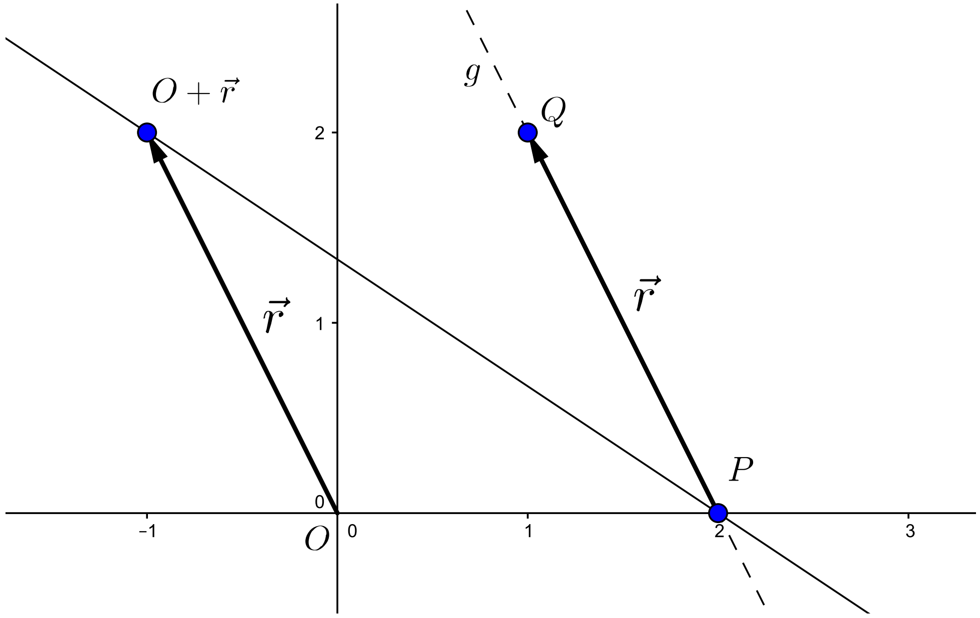
um mindestens drei verschiedene auf g liegende Punkte auszurechnen.

- Wir klären (durch Rechnung an der Tafel) mit der gegebenen Parametergleichung, ob der Punkt $C = (4, -5)$ auf der Geraden g liegt.

Hörsaalübung – typischer Fehler

Die Skizze zeigt einen typischen Fehler: Der Verbindungsvektor $\vec{r} = \overrightarrow{PQ}$ wurde zwar richtig bestimmt. Jedoch liegt der Punkt $O + \vec{r}$ **nicht** auf der Verbindungsgeraden g der Punkte P und Q. In der Skizze ist die fehlerhaft gezeichnete Gerade durchgezogen dargestellt, die Gerade g gestrichelt.

Anders ausgedrückt: $\vec{r}$ ist ein **Richtungsvektor** der Geraden, er kann **nicht als Ortsvektor** eines Punktes auf der Geraden verwendet werden.



Geraden in der Ebene

Allgemeine Koordinatengleichung (AKG)

Definition:

Es seien A, B, C reelle Zahlen, wobei A und B **nicht beide** Null sind. Dann heißt die Gleichung:

$$\boxed{A \cdot x_1 \;+\; B \cdot x_2 \;+\; C \;=\; 0}$$

Allgemeine Koordinatengleichung (AKG) in der Ebene.

Satz:

Für $(A, B) \neq (0, 0)$ ist die Lösungsmenge

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, A \cdot x_1 + B \cdot x_2 + C = 0 \text{ wahr}\right\}$$

der AKG immer eine Gerade in der Ebene.

Anstelle eines Beweises illustrieren wir anhand eines Beispieles, wie man zu einer gegebenen AKG eine PG findet.

Beispiel:

Es sei gegeben die AKG $2x_1 + x_2 - 4 = 0$.

Führe einen Parameter t ein: Setze z. B. $x_2 = t, t \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ Löse die resultierende Gleichung nach x_1 auf: $2x_1 + t - 4 = 0$

$\rightsquigarrow$ $x_1 = \frac{4-t}{2} = \frac{1}{2}(4 - t) = 2 - \frac{1}{2}t$

$\rightsquigarrow$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

Bemerkung:

Im Allgemeinen lassen sich im Falle $A \neq 0$ aus einer gegebenen AKG die folgenden Beziehungen ableiten:

$$x_1 = -\frac{B}{A}t - \frac{C}{A}, \quad x_2 = t \qquad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{C}{A} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{B}{A} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Geraden in der Ebene

Allgemeine Koordinatengleichung (AKG)

Satz:

Jede Gerade lässt sich mittels einer AKG darstellen.

Anstelle eines Beweises illustrieren wir anhand eines Beispieles, wie man zu einer gegebenen PG eine AKG findet.

Beispiel:

Es sei gegeben die Parametergleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ Schreibe $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ anstelle von $\vec{x}$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2}t \\ 0 + t \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ $x_1 = 2 - \frac{1}{2}t$ (Glg. 1) und $x_2 = t$ (Glg. 2)

$\rightsquigarrow$ Elimination des Parameters t:

(2) in (1): $x_1 = 2 - \frac{1}{2} x_2$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{1 \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 - 2 = 0}$ (AKG)

Geraden in der Ebene

Allgemeine Koordinatengleichung (AKG)

Diskussion:

Wie sieht die Lösungsmenge der Gleichung

$$A \cdot x_1 + B \cdot x_2 + C = 0$$

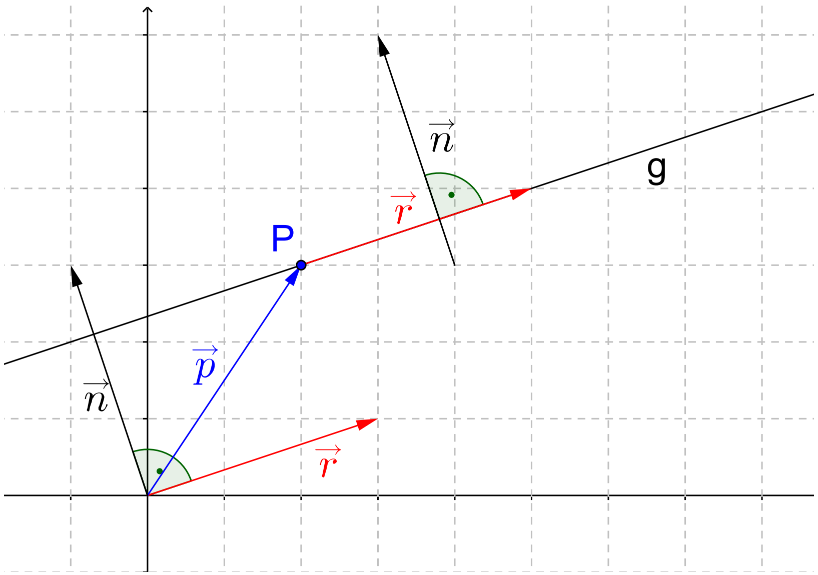
aus, wenn **sowohl** $A = 0$ **als auch** $B = 0$ gilt?

Geraden in der Ebene

Normalenvektor

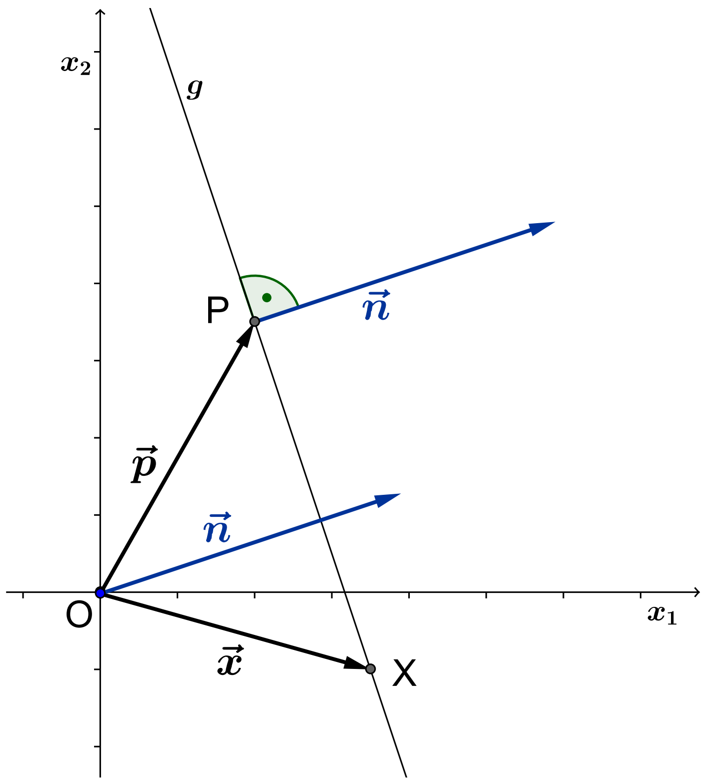
Definition:

Es sei eine Gerade g gegeben. Ein Vektor $\vec{n}$ heißt **Normalenvektor** von g, wenn $\vec{n}$ senkrecht auf jedem (beliebig gewählten) Richtungsvektor von g steht.



Über diese Beziehung zwischen Normalenvektoren und Richtungsvektoren erhält man eine weitere Darstellungsform von Geraden.

Idee: Lege eine Gerade g durch einen Aufpunkt P mit Ortsvektor $\vec{p}$ und einen sogenannten Normalenvektor $\vec{n}$ von g fest.



Für den Ortsvektor $\vec{x}$ eines beliebigen Punktes X auf g gilt:

$$\overrightarrow{PX} \perp \vec{n}$$

$$\rightsquigarrow \vec{x} - \vec{p} \perp \vec{n}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \vec{p}\right) = 0}.$$

Eine Gleichung dieser Form heißt **Hesse'sche Normalengleichung (HNG)**.

Geraden in der Ebene

Hesse'sche Normalengleichung (HNG)

Hörsaalübung:

Es sei die Gerade g durch die PG $\vec{x} = \binom{2}{0} + t\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben. **Bestimmen Sie** eine HNG der Form $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ für g.

- Wählen Sie z. B. $\vec{p} = \binom{2}{0}$
- Suchen Sie $\vec{n} = \binom{n_1}{n_2}$ mit $\vec{n} \perp \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$,

  d. h. $\quad \binom{n_1}{n_2} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$

  $\rightsquigarrow \quad -\frac{1}{2}\, n_1 + n_2 = 0,\qquad$ wähle z. B. $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

- Eine mögliche HNG für g ist somit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0.$$

Geraden in der Ebene
Hesse'sche Normalengleichung (HNG)

Bemerkung:

Falls allgemein ein Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ zu einem gegebenen Richtungsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ gesucht ist, wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} -r_2 \\ r_1 \end{pmatrix}$ oder $\vec{n} = \begin{pmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{pmatrix}$ oder Vielfache hiervon.

Beispiel:

Gesucht ist $\vec{n} \perp \vec{r}$ mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \underset{\text{umdrehen}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{ein} \\ \text{Vorzeichen} \\ \text{ändern}}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 \\ -\left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} := \vec{n}.$

Geraden in der Ebene

Zusammenfassung Geradengleichungen

Geradengleichungen in der Ebene:

$$
\begin{aligned}
\text{PG:}\quad X &= P + t\,\vec{r}, t \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.}\\
\vec{x} &= \vec{p} + t\,\vec{r}, t \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$$\text{AKG:}\quad A\,x_1 + B\,x_2 + C = 0$$

$$\text{HNG:}\quad \vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \vec{p}\right) = 0$$

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Geraden im Raum
Parametergleichung

Aussage:

Jede Gerade g im Raum lässt sich (wie in der Ebene) mit einer Parametergleichung darstellen.

Das heißt: Ist P ein Punkt auf der Geraden (mit Ortsvektor $\vec{p}$) und ist $\vec{r}$ ein Richtungsvektor von g, so lässt sich jeder beliebige Punkt X auf der Geraden in der Form

$$\begin{aligned} X &= P + t\,\vec{r},\ t \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \\ \vec{x} &= \vec{p} + t\,\vec{r},\ t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

darstellen.

Bei Verwendung der Koordinatendarstellungen ergibt sich

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung:

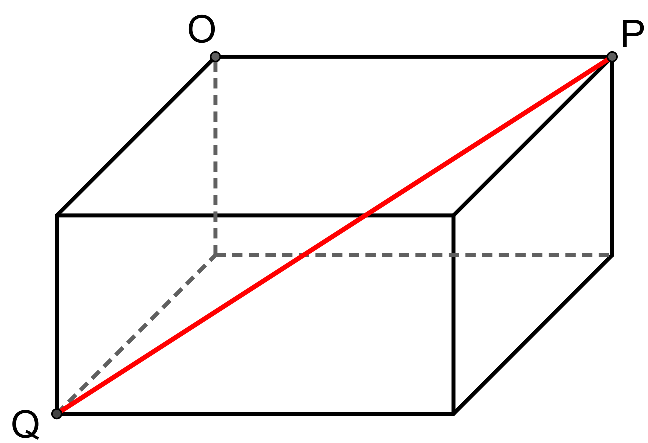
AKG und HNG gibt es für Geraden im Raum nicht.

Geraden im Raum

Beispiel: Gerade im Hörsaal

Hörsaalübung:

- Wählen Sie ein Koordinatensystem im Hörsaal und schätzen Sie die Koordinaten der Punkte P (Eckpunkt vorne rechts oben) und Q (hinten links unten).
- Stellen Sie eine Parametergleichung für die Gerade g auf, welche durch die Punkte P und Q verläuft.
- Was müssen Sie ändern, wenn Sie nur die Punkte der **Verbindungsstrecke** $\overline{PQ}$ parametrisieren wollen?



Geraden im Raum

Daten aus dem Wintersemester 2016/17

- Der Ursprung des Koordinatensystem liegt im Hörsaal in der Ecke vorne links oben. Die x-Achse weise nach unten, die y-Achse nach rechts, die z-Achse auf die Studierenden zu. Die Einheitsvektoren haben jeweils die Länge 1 m.
- Mit $P = (0, 8, 0)$ und $Q = (4, 0, 12)$ ergibt sich der Richtungsvektor
$$\vec{r} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$
- Die Gerade $g = P \vee Q$ (Verbindungsgerade der Punkte P und Q) hat die Parametergleichung
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$
- Möchte man nur **die Strecke** PQ parametrisieren, so ist
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,\ 1].$$

Geraden im Raum

Beispiel: Interpretation als Bewegung

Interpretation als Bewegung:

- Wir können die gegebene Gleichung $\vec{x} = P + t\,\vec{r}$ so interpretieren, dass Sie die **Bewegung** einer Modell-Drahtseilbahn beschreibt, die sich entlang der Strecke PQ bewegt.
- Dann stellt der Parameter t die Zeit dar. Wir wählen als Einheit die Sekunde s.
- Wenn t den Wert $t = 0\,\mathrm{s}$ annimmt, so befindet sich die Seilbahn am Startpunkt $\vec{x} = P + 0\,\vec{r} = P$.
- Für $t = 1\,\mathrm{s}$ ergibt sich $\vec{x} = P + 1\,\vec{r} = P + \overrightarrow{PQ} = Q$.
- Somit legt die Seilbahn in einer Sekunde die Wegstrecke ℓ zurück, die der Länge der Vektors $\overrightarrow{PQ}$ entspricht: $\ell = d(P,Q) = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$.
- Wir haben als Längeneinheit das Meter m gewählt, also gilt

$$\ell = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \sqrt{4^2 + (-8)^2 + 12^2}\,\mathrm{m} = \sqrt{224}\,\mathrm{m} \approx 15\,\mathrm{m}.$$

- Die **Geschwindigkeit** der Seilbahn beträgt also rund $15\,\mathrm{m/s}$.

Interpretation als Bewegung:

- Die Geschwindigkeit von rund 15 m/s ist sehr hoch.
- Möchte man eine neue Parametrisierung erhalten, bei der die Geschwindigkeit nur 1 m/s beträgt, so muss man den Richtungsvektor **normieren:**

$$\hat{r} = \frac{1}{\|\vec{r}\|}\,\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{224}}\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

- Die neue Parametrisierung sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= P + \bar{t}\,\hat{r} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{224}} \\ \frac{-8}{\sqrt{224}} \\ \frac{12}{\sqrt{224}} \end{pmatrix}, \quad t \in \left[0, \sqrt{224}\right]. \end{aligned}$$

Ebenen im Raum

Parametergleichung

Hinführung:

- Wähle drei **nicht** kollineare Punkte P, Q, R im Raum.[1]
- Bezeichne die Verbindungsebene dieser drei Punkte mit E.
- Bilde die Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{PR}$.
- Wähle $s, t \in \mathbb{R}$ und bilde

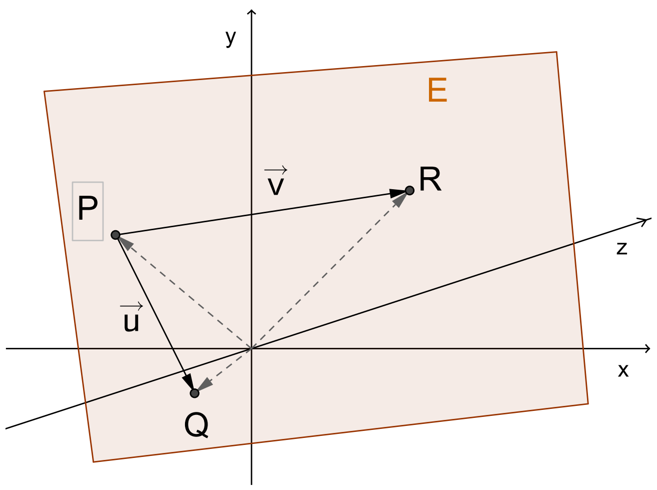
$$X = P + s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$$

bzw.

$$\vec{x} = \vec{p} + s\,\vec{u} + t\,\vec{v}.$$

- Dann ist X ein Punkt auf der Ebene E mit Ortsvektor $\vec{x}$.

[1] Eine Menge von Punkten heißt **kollinear**, wenn die Punkte **auf einer Geraden** liegen.



Ebenen im Raum

Parametergleichung

Aussage:

Es sei E eine Ebene im Raum und X ein Punkt auf E, dessen Ortsvektor sei $\vec{x}$. Ferner seien $\vec{u} \neq O$ und $\vec{v} \neq 0$ Richtungsvektoren der Ebene, die **linear unabhängig**, insbesondere nicht parallel oder antiparallel sind.
Dann existieren Werte $s, t \in \mathbb{R}$ mit

$$X = P + s\,\vec{u} + t\,\vec{v} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} = \vec{p} + s\vec{u} + t\vec{v}.$$

Bezeichnungsweise:

P : Aufpunkt
$\vec{p}$: Stützvektor
s, t : Parameter
$\vec{u}, \vec{v}$: Richtungsvektoren

Bemerkung:

Falls drei nicht kollineare Punkte P, Q, R im Raum gegeben sind, so erhält man zwei linear unabhängige Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ für die Verbindungsebene dieser drei Punkte wie folgt:

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{PR}.$$

Ebenen im Raum

Parametergleichung

Hörsaalübung:

Beschreiben Sie eine Ebene E im Hörsaal, die die linke obere Ecke der Tafel enthält und parallel zur Fensterebene ist. Hinweis: Wählen Sie zunächst ein Koordinatensystem im Hörsaal.

Hörsaalübung – Beispiellösung aus einem früheren Semester:

Beschreiben Sie eine Ebene E im Hörsaal, die die linke obere Ecke der Tafel enthält und parallel zur Fensterebene ist. Wählen Sie zunächst ein Koordinatensystem im Hörsaal.

Tafelecke: $P(2; 0,3; 1)$

weitere Punkte auf E: $Q = (2, 0, 1)$, $R = (2, 6, 5)$

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 0-0{,}3 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 6-0{,}3 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5{,}7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich eine Parametergleichung:

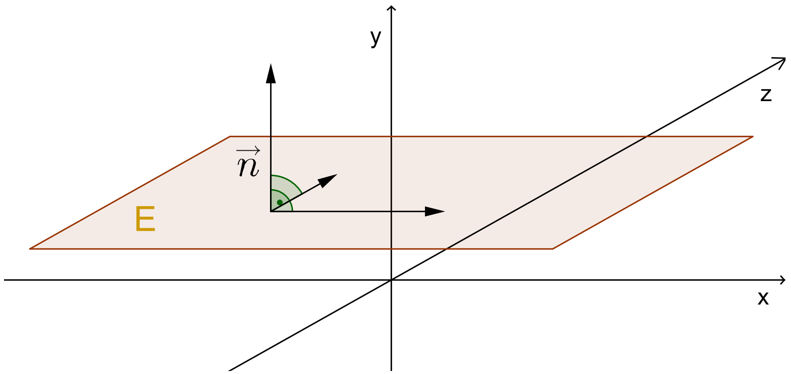
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5{,}7 \\ 4 \end{pmatrix}; s, t \in \mathbb{R}$$

Ebenen im Raum

Normalenvektor einer Ebene

Definition:

Ein Vektor $\vec{n}$ heißt **Normalenvektor** einer Ebene E, wenn $\vec{n}$ senkrecht auf allen Richtungsvektoren von E steht.



Bemerkung:

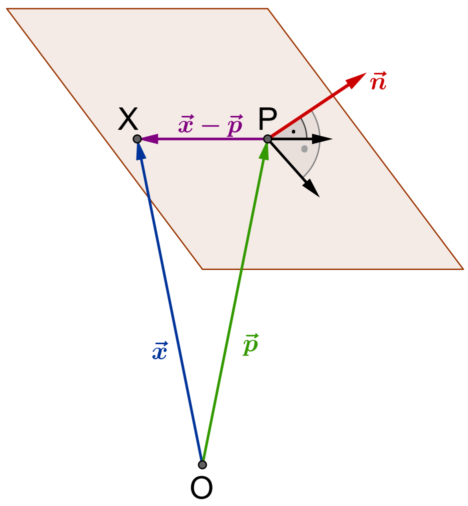
Falls eine Ebene E durch eine Parametergleichung $X = P + s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$ bzw. $\vec{x} = \vec{p} + s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$ gegeben ist, erhält man einen Normalenvektor $\vec{n}$ von E durch Kreuzproduktbildung:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

Ebenen im Raum

Hesse'sche Normalengleichung

<u>Idee:</u> Lege eine Ebene fest durch Angabe eines Aufpunktes P mit Ortsvektor $\vec{p}$ und eines Normalenvektors $\vec{n}$.



Für den Ortsvektor $\vec{x}$ eines beliebigen Punktes X auf E gilt:

$$\overrightarrow{PX} \perp \vec{n}$$
$$\rightsquigarrow \vec{x} - \vec{p} \perp \vec{n}$$
$$\rightsquigarrow \boxed{\vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \vec{p}\right) = 0}$$

Im Raum definiert die HNG eine Ebene. Denn alle Vektoren, die senkrecht zum Normalenvektor stehen, liegen in einer Ebene (sind also Verbindungsvektoren zweier Punkte in dieser Ebene).

Diskussion:

Wir stellen eine Hesse'sche Normalengleichung für die zuvor diskutierte (im Hörsaal gedachte) Ebene auf.

Definition:

Seien A, B, C, D reelle Zahlen, wobei $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ gelten soll. Dann heißt die Gleichung

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$$

Allgemeine Koordinatengleichung (AKG) im Raum.

Bemerkungen:

a) Die Lösungsmenge einer jeden AKG im Raum ist eine Ebene.
b) Jede Ebene lässt sich durch eine AKG im Raum darstellen.

Ebenen im Raum

Allgemeine Koordinatengleichung

Diskussion:

Wir stellen eine Allgemeine Koordinatengleichung für die zuvor diskutierte (im Hörsaal gedachte) Ebene auf. Dies geschieht dadurch, dass man die Gleichung

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \vec{p}\right) = 0$$

mit Koordinaten schreibt und dann ausmultipliziert.

Abstandsprobleme

Erinnerung: Abstandsprobleme und orthogonale Projektionen

Zusammenhang:

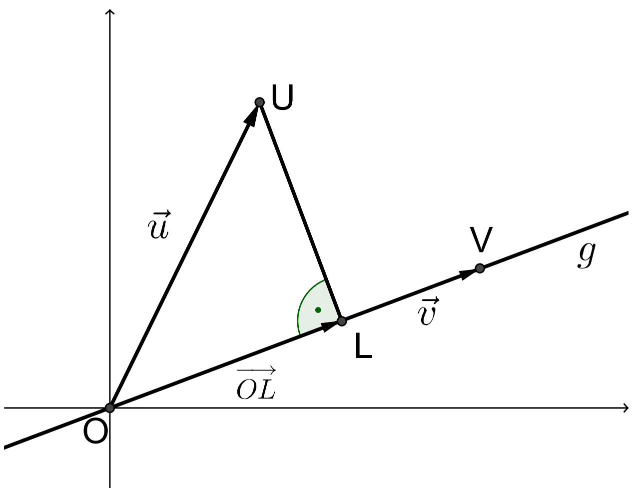
Wir stellen den Zusammenhang her zu dem Abstandsproblem, das wir im vorigen Kapitel diskutiert haben:

a) Wir haben gesehen, dass $\vec{OL} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,\vec{v}$ gilt.

b) Da der Vektor $\vec{OL}$ **parallel** zur Geraden g ist, schreiben wir $\vec{u}_{\|}$ oder auch $\vec{u}_{\|g}$ für $\vec{OL}$.

c) Da der Vektor $\overrightarrow{LU} = \vec{u} - \overrightarrow{OL}$ **senkrecht** auf $\vec{v}$ bzw. auf auf g steht, schreiben wir auch $\vec{u}_{\perp}$ oder $\vec{u}_{\perp g}$ für $\overrightarrow{LU}$.

d) Mit $\vec{u} = \vec{u}_{\|} + \vec{u}_{\perp}$ liegt nun eine Zerlegung von $\vec{u}$ in orthogonale Komponenten vor.



Abstandsprobleme

Erinnerung: Abstandsprobleme und orthogonale Projektionen

Alternative Notation:

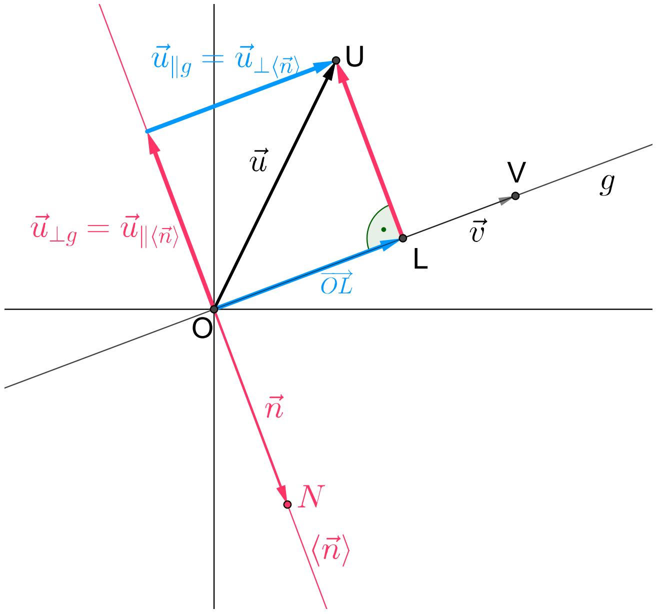
Wenn $\vec{n} = \overrightarrow{ON}$ ein Normalenvektor für die Ursprungsgerade g ist, so können wir die Zerlegung des Vektors $\vec{u}$ auch bezüglich der Normalgeraden $\langle\vec{n}\rangle = O \vee N$ notieren:

a) Der Vektor $\vec{OL}$ steht **senkrecht** zur Geraden $\langle\vec{n}\rangle$, wir können daher $\vec{u}_{\perp\langle\vec{n}\rangle}$ für $\vec{OL}$ schreiben.

b) Da der Vektor $\overrightarrow{LU}$ **parallel** zur Geraden $\langle\vec{n}\rangle$ ist, schreiben wir auch $\vec{u}_{\|\langle\vec{n}\rangle}$ für $\overrightarrow{LU}$, und es ist $\vec{u}_{\|\langle\vec{n}\rangle} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\,\vec{n}$.

c) Somit ist

$$\overrightarrow{OL} = \vec{u}_{\|g} = \vec{u}_{\perp\langle\vec{n}\rangle} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,\vec{v}$$
$$\overrightarrow{LU} = \vec{u}_{\perp g} = \vec{u}_{\|\langle\vec{n}\rangle} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\,\vec{n}$$



Abstandsprobleme

HNG in der Ebene – Abstand Punkt-Gerade

Problemstellung und Lösungsansatz

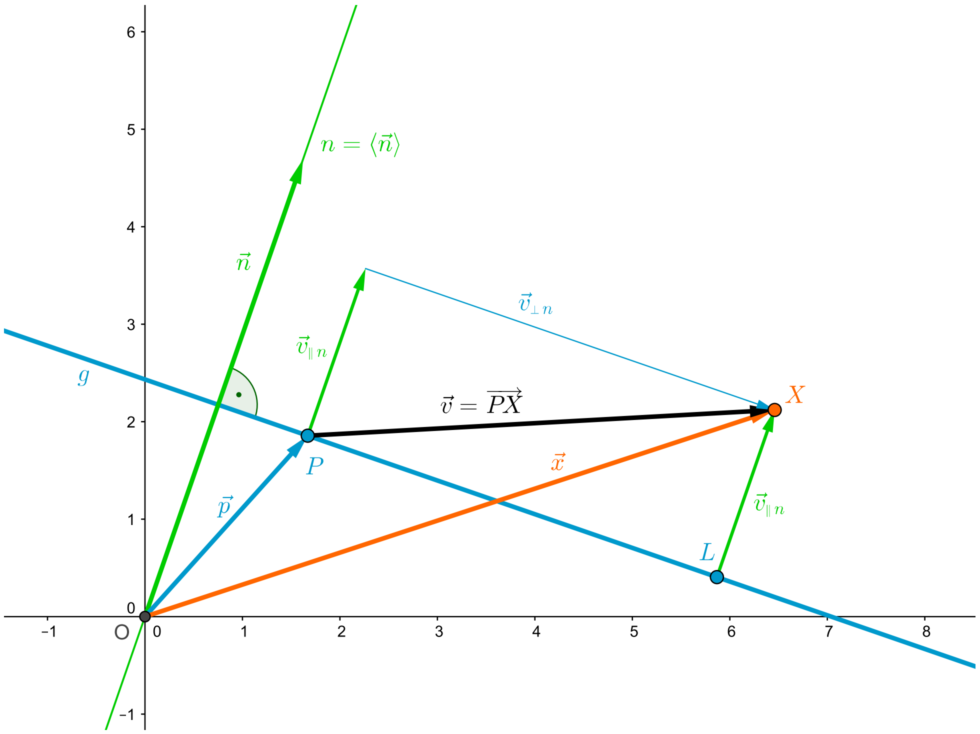
Eine Gerade g in der Ebene sei gegeben durch eine HNG

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \vec{p}\right) = 0.$$

Gesucht ist der (orthogonale) Abstand eines Punktes X von der Geraden g.

Der Skizze entnehmen wir den Lösungsansatz, den wir verfolgen werden. Wir verwenden den durch die HNG gegebenen Punkt P (mit Ortsvektor $\vec{p}$) und zerlegen den Verbindungsvektor $\vec{v} := \overrightarrow{PX}$ in eine Komponente $\vec{v}_{\parallel n}$ parallel zur Normalgeraden n und eine dazu senkrechte Komponente.

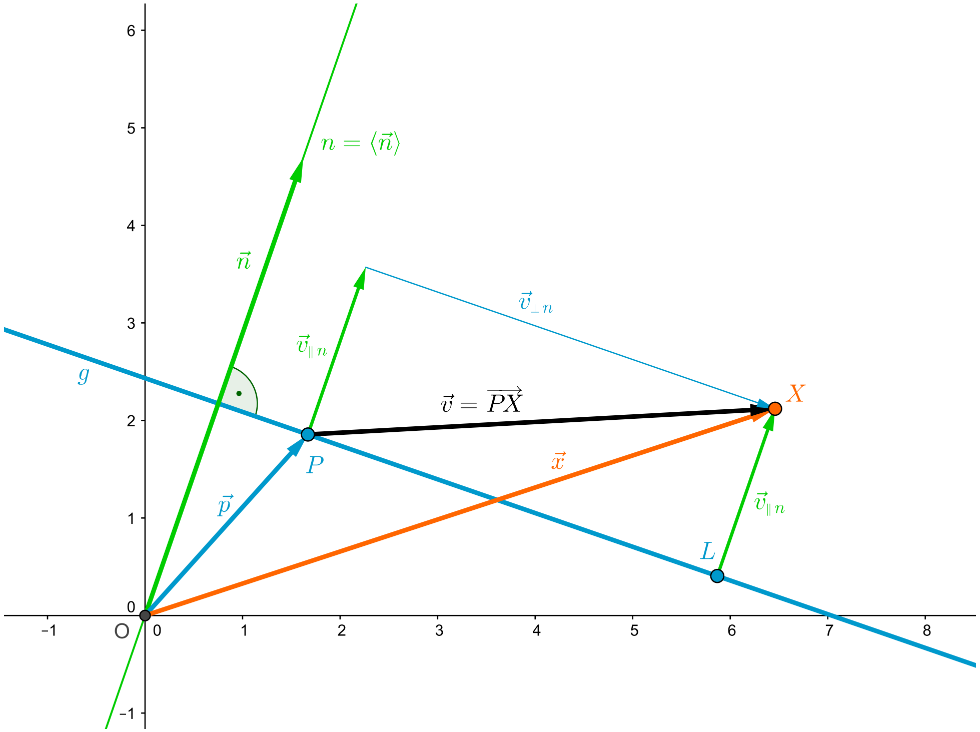
Die Länge des Vektors $\vec{v}_{\parallel n}$ entspricht dem gesuchten Abstand.



Durchführung (1):

Mit den Bezeichnungen der Abbildung gilt für den Abstand $d := d(X, g)$ des Punktes X von der Geraden g die Beziehung

$$
\begin{aligned}
d &= \left\| \overrightarrow{LX} \right\| = \left\| \vec{v}_{\|n} \right\| \\
&= \left\| \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \right) \vec{n} \right\| \\
&= \left\| \left(\frac{(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \right) \vec{n} \right\| .
\end{aligned}
$$

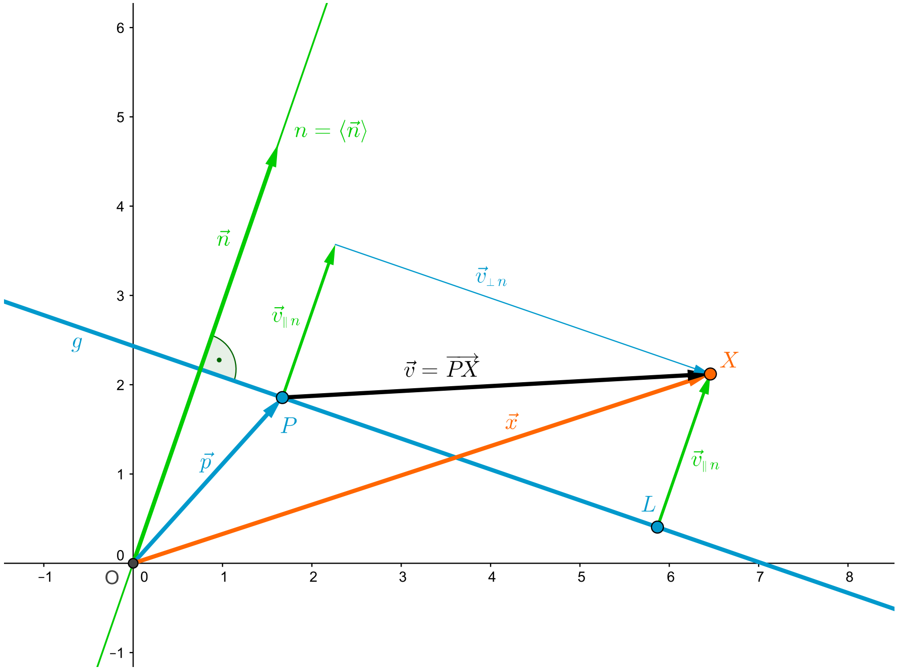


Abstandsprobleme

Durchführung (2):

Wir formen den für den Abstand $d := d(X, g)$ gefundenen Ausdruck weiter um und verwenden hierfür Eigenschaften der Länge und des Skalarprodukts von Vektoren sowie des Betrags reeller Zahlen:

$$
\begin{aligned}
d &= \left\| \left(\frac{(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \right) \vec{n} \right\| \\
&= \left| \frac{(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \right| \, \|\vec{n}\| \\
&= \frac{\left| (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} \right|}{\|\vec{n}\|^2} \, \|\vec{n}\| \\
&= \frac{\left| \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) \right|}{\|\vec{n}\|}
\end{aligned}
$$



HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Bemerkungen:

- Für den Abstand $d\,(X, g)$ des Punktes X von der Geraden g ergibt sich also
$$d\,(X,g) \;=\; \frac{\left|\,\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{p})\,\right|}{\left\|\,\vec{n}\,\right\|}.$$
Wir erkennen auf der rechten Seite den Betrag des Ausdrucks, der in der HNG auftritt, dividiert durch die Norm (Länge) des Normalenvektors.
- Man erhält den Abstand $d\,(O, g)$ des **Ursprungs** von der Geraden g, wenn man für $\vec{x}$ den Nullvektor einsetzt. Dann ergibt sich
$$\begin{aligned} d\,(O,g) &= \frac{\left|\,\vec{n}\cdot\left(\vec{0}-\vec{p}\right)\right|}{\left\|\,\vec{n}\,\right\|} \\ &= \frac{\left|\,\vec{n}\cdot\vec{p}\,\right|}{\left\|\,\vec{n}\,\right\|} \end{aligned}$$

Abstandsprobleme

HNG in der Ebene – Abstand Punkt-Gerade

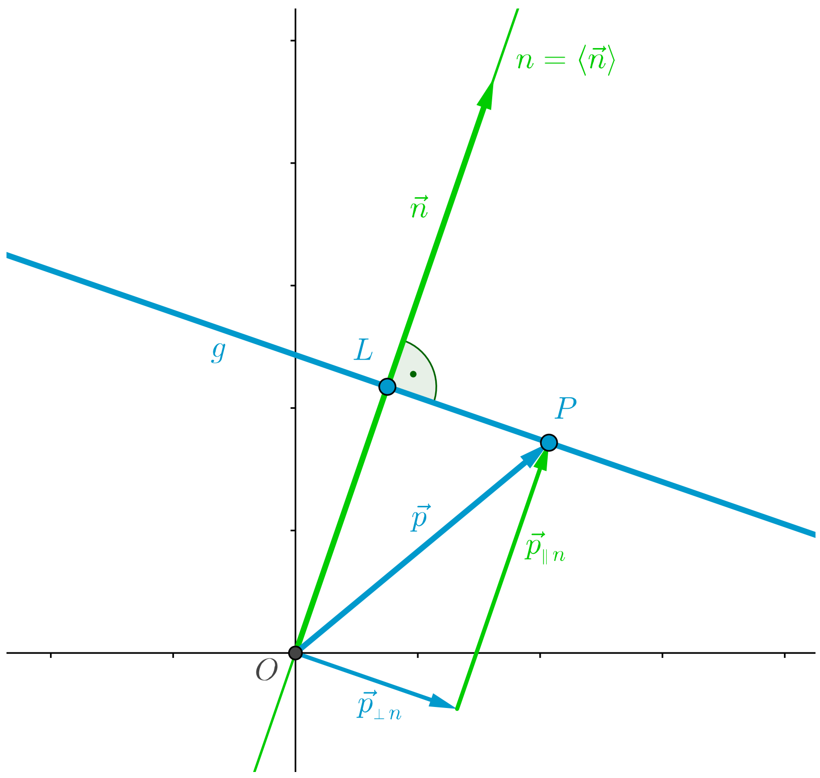
Abstand Ursprung-Gerade:

Wie eben gesehen, gilt für den Abstand $d(O, g)$ des **Ursprungs** von der Geraden g die Gleichung

$$d(O, g) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{p}|}{\|\vec{n}\|} .$$

Wir zeigen, dass dies genau der Länge der Komponente $\vec{p}_{\|n}$ des Vektors $\vec{p}$ parallel zur Normalgeraden n entspricht. Mit den Bezeichnungen des Diagramms gilt

$$\begin{aligned} d(O, g) &= \left\| \overrightarrow{OL} \right\| = \left\| \vec{p}_{\| n} \right\| \\ &= \left\| \frac{\vec{p} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} \right\| = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|^2} \|\vec{n}\| \\ &= \frac{|\vec{n} \cdot \vec{p}|}{\|\vec{n}\|} . \end{aligned}$$



Analogie:

Ist eine Ebene E im Raum durch eine HNG $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ gegeben, so erhalten wir völlig analoge Resultate:

- Für den Abstand $d\,(X, E)$ des Punktes X von der Ebene E gilt

$$d\,(X, E) = \frac{\left|\, \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) \,\right|}{\left\| \,\vec{n}\, \right\|}.$$

- Für den Abstand $d\,(O, E)$ des **Ursprungs** von der Geraden E gilt

$$d\,(O, E) = \frac{\left|\, \vec{n} \cdot \vec{p} \,\right|}{\left\| \,\vec{n}\, \right\|}$$

Bemerkungen:

Eine Gerade g in der Ebene durch eine Allgemeine Koordinatengleichung gegeben:

$$A\,x_1 + B\,x_2 + C = 0, \qquad (A, B) \neq (0, 0).$$

Für den Abstand $d\,(X, g)$ des Punktes X mit Koordinaten $(\,x_1,\, x_2\,)$ von der Geraden g gilt

$$d\,(X, g) = \frac{|\,A\,x_1 + B\,x_2 + C\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Dies folgt aus der Formel $d\,(X, g) = \frac{|\,\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p})\,|}{\|\,\vec{n}\,\|}$, die wir mit der HNG ermittelt hatten, wie folgt:

- Wenn der Punkt P auf g liegt, so gilt $A\,p_1 + B\,p_2 + C = 0$, also $C = -\,(A\,p_1 + B\,p_2)$.
- Der Vektor $\binom{A}{B}$ ist ein Normalenvektor[1] für die Gerade g, wir setzen also $\vec{n} = \binom{A}{B}$ und erhalten $\vec{n} \cdot \vec{x} = A\,x_1 + B\,x_2$ und $-\vec{n} \cdot \vec{p} = -\,(A\,p_1 + B\,p_2) = C$ sowie $\left\|\,\vec{n}\,\right\| = \sqrt{A^2 + B^2}$.
- Somit gilt

$$\begin{aligned} d\,(X, g) &= \frac{\left|\,\vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \vec{p}\right)\,\right|}{\left\|\,\vec{n}\,\right\|} = \frac{\left|\,\vec{n} \cdot \vec{x} - \vec{n} \cdot \vec{p}\,\right|}{\left\|\,\vec{n}\,\right\|} \\ &= \frac{|\,A\,x_1 + B\,x_2 + C\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned}$$

[1] Vgl. Folie 53 im folgenden Kapitel.

Abstandsprobleme

AKG in der Raum – Abstand Punkt-Ebene

Abstand Punkt-Ebene bei gegebener AKG:

Eine Ebene E in der Ebene durch eine Allgemeine Koordinatengleichung gegeben:

$$A\,x_1 \;+\; B\,x_2 \;+\; C\,x_3 \;+\; D \;=\; 0, \qquad (A, B, C) \neq (0, 0, 0).$$

Dann gilt für den Abstand $d\,(X, E)$ des Punktes X mit Koordinaten $(\,x_1,\,x_2,\,x_3\,)$ von der Ebene E die Beziehung

$$d\,(X, E) \;=\; \frac{|\,A\,x_1 \;+\; B\,x_2 \;+\; C\,x_2 \;+\; D\,|}{\sqrt{A^2 \;+\; B^2 \;+\; C^2}}.$$

Dies folgt völlig analog zur vorigen Folie aus der Formel

$$d\,(X, E) \;=\; \frac{\left|\,\vec{n}\cdot\left(\vec{x}-\vec{p}\right)\right|}{\left\|\,\vec{n}\,\right\|},$$

die wir mit der HNG ermittelt hatten.

Abstandsprobleme

Zusammenfassung

Abstandsformeln für Geraden in der Ebene bzw. für Ebenen im Raum:

	Bei gegebener HNG $\vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \vec{p}\right) = 0$	Bei gegebener AKG $A\,x_1 + B\,x_2 + C = 0$ bzw. $A\,x_1 + B\,x_2 + C\,x_2 + D = 0$
Abstand Punkt-Gerade in der Ebene	$d\,(X,g) = \frac{\left\lvert \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) \right\rvert}{\lVert \vec{n} \rVert}$	$d\,(X,g) = \frac{\lvert A\,x_1 + B\,x_2 + C \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
Abstand Punkt-Ebene im Raum	$d\,(X,E) = \frac{\left\lvert \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) \right\rvert}{\lVert \vec{n} \rVert}$	$d\,(X,E) = \frac{\lvert A\,x_1 + B\,x_2 + C\,x_2 + D \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Abstandsformeln für Geraden im Raum:

	Für Ursprungsgerade g mit Parametergleichung $\vec{x} = t\,\vec{v},\ t \in \mathbb{R}$	Für (affine) Gerade g mit Parametergleichung $\vec{x} = \vec{p} + t\,\vec{v},\ t \in \mathbb{R}$
Abstand des Punktes U mit Ortsvektor $\vec{u}$ von der Geraden	$d\,(U,g) = \left\lVert \vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\,\vec{v} \right\rVert$	$d\,(U,g) = \left\lVert \vec{u} - \vec{p} - \frac{(\vec{u} - \vec{p}) \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\,\vec{v} \right\rVert$
Abstand des Punktes U mit Ortsvektor $\vec{u}$ von der Geraden	$d\,(U,g) = \frac{\lVert \vec{u} \times \vec{v} \rVert}{\lVert \vec{v} \rVert}$	$d\,(U,g) = \frac{\left\lVert (\vec{u} - \vec{p}) \times \vec{v} \right\rVert}{\lVert \vec{v} \rVert}$

Allgemeine Koordinatengleichung

Diskussion: Geraden in der Ebene

Problemstellung und Lösungsansatz

Es seien A, B und C reelle Zahlen mit $(A, B) \neq (0, 0)$. Wir betrachten die Gleichung

$$A \cdot x_1 + B \cdot x_2 + C = 0$$

und diskutieren die Bedeutung der Konstanten A, B und C.

Hierzu betrachten wir zwei Punkte $P = (p_1, p_2)$ und $Q = (q_1, q_2)$, welche diese Gleichung erfüllen. Mithin gilt

$$\begin{aligned} A \cdot q_1 + B \cdot q_2 + C &= 0 \quad \text{und} \\ A \cdot p_1 + B \cdot p_2 + C &= 0 \end{aligned}$$

Allgemeine Koordinatengleichung

Diskussion: Geraden in der Ebene

Fortsetzung

Subtraktion der Gleichungen

$$\begin{aligned} A \cdot q_1 + B \cdot q_2 + C &= 0 \quad \text{und} \\ A \cdot p_1 + B \cdot p_2 + C &= 0 \end{aligned}$$

ergibt

$$A \cdot (q_1 - p_1) + B \cdot (q_2 - p_2) = 0.$$

Mit der Notation als Spaltenvektoren:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Allgemeine Koordinatengleichung

Diskussion: Geraden in der Ebene

Fortsetzung

- Wir stellen also fest, dass $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ senkrecht auf dem Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$ steht.
- Die Punkte P und Q sind wie alle Lösungen der gegebenen AKG Elemente einer Geraden g, der Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ ist ein Richtungsvektor dieser Geraden.
- Damit ist $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ ein *Normalenvektor* der Geraden g.

Wir verwenden im Folgenden stets die Abkürzungen

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \|\vec{n}\| = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Allgemeine Koordinatengleichung

Geraden in der Ebene – Bedeutung der Konstanten C

AKG und normierte AKG – Bedeutung der Konstanten C

- Falls $C < 0$ gilt, so liegt die Gerade g vom Ursprung aus gesehen in $\vec{n}$-Richtung.
- Falls $C > 0$ gilt, so liegt die Gerade g vom Ursprung aus gesehen in der zu in $\vec{n}$ entgegengesetzten Richtung.
- Für $C = 0$ ist die Gerade g eine Ursprungsgerade.

Allgemeine Koordinatengleichung

Geraden in der Ebene – Bedeutung der Konstanten C

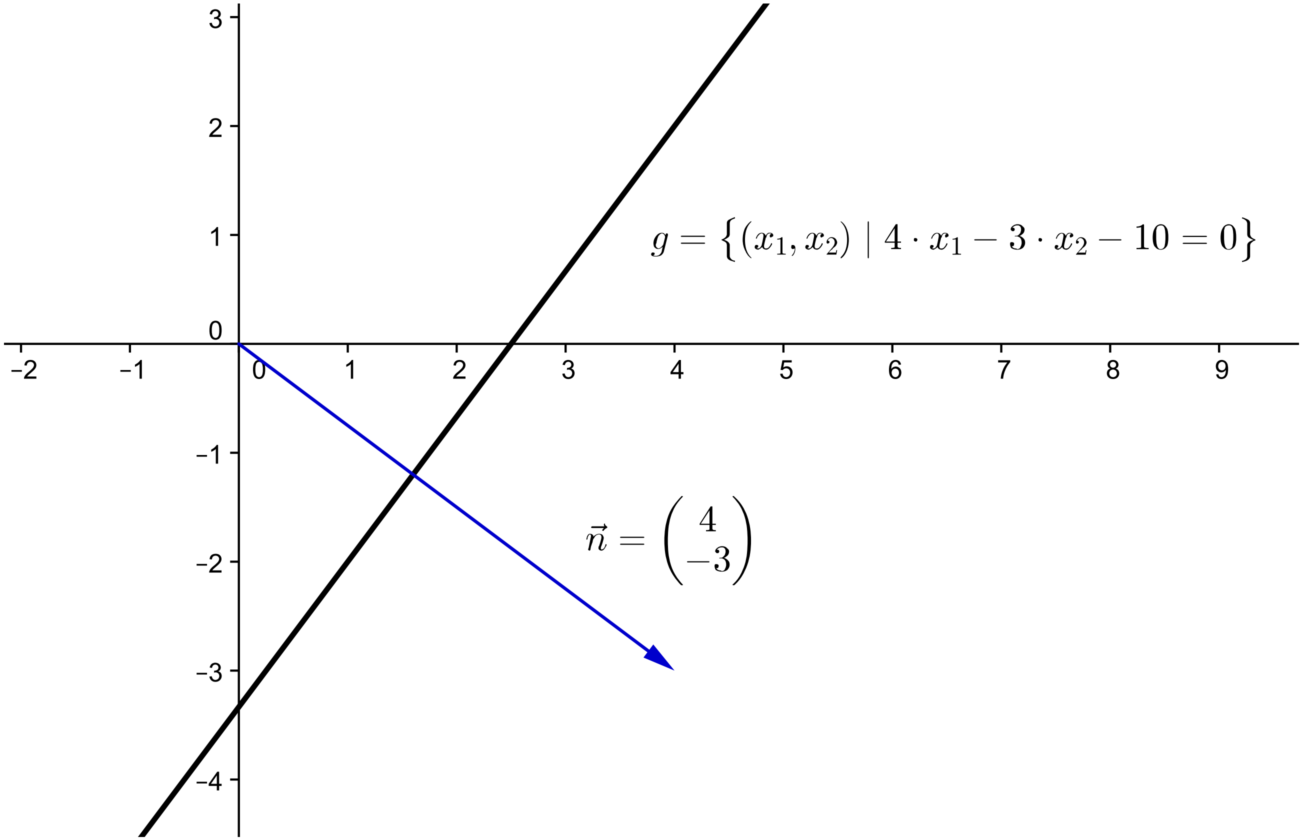


Abbildung: Beispiel mit $C < 0$: Gerade liegt vom Ursprung aus gesehen in $\vec{n}$-Richtung.

Allgemeine Koordinatengleichung

Geraden in der Ebene – Bedeutung der Konstanten C

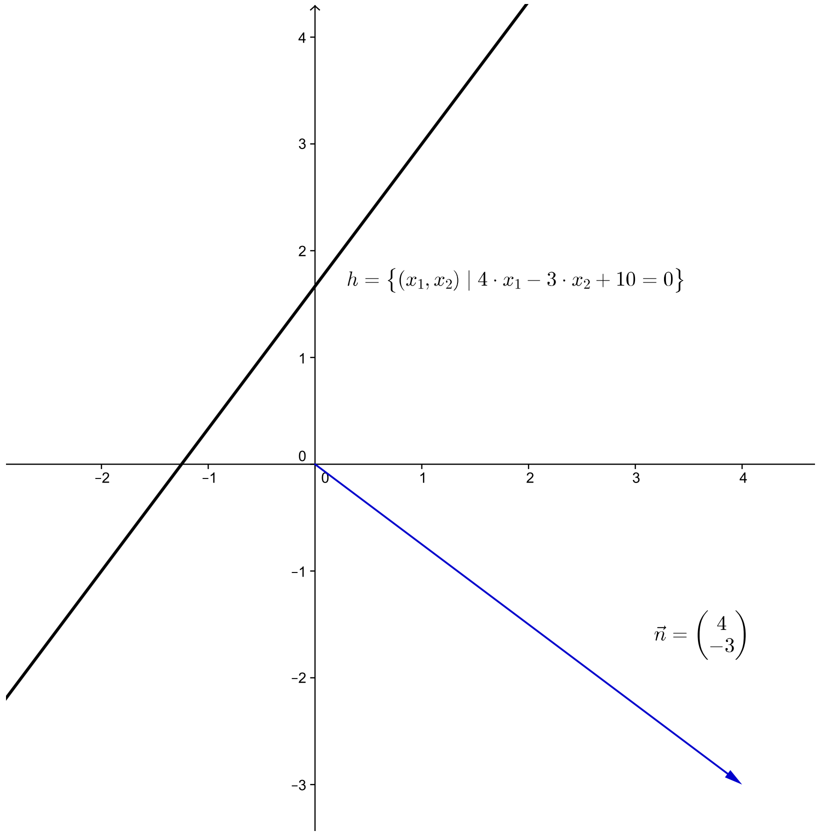


Abbildung: Beispiel mit $C > 0$, Gerade liegt vom Ursprung aus entgegengesetzt zur $\vec{n}$-Richtung.

Allgemeine Koordinatengleichung

Geraden in der Ebene – Bedeutung der Konstanten C

Begründung:

Liegt ein Punkt X mit Ortsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ auf der Geraden, die durch die AKG $\boxed{A \cdot x_1 + B \cdot x_2 + C = 0}$ beschrieben wird, so folgt:

$$C = -A \cdot x_1 + B \cdot x_2 = -\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\vec{n} \cdot \vec{x}.$$

Dieser Ausdruck findet sich in dem Ausdruck wieder, welcher den Anteil $\vec{x}_{\parallel \langle \vec{n} \rangle}$ des Ortsvektors $\vec{x}$ beschreibt, der **parallel** zu der von $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ erzeugten Ursprungsgerade $\langle \vec{n} \rangle$ ist. Genauer gilt (vergleiche Folie 41):

$$\vec{x}_{\parallel \langle \vec{n} \rangle} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\, \vec{n} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\, \vec{n} = \frac{-C}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\, \vec{n}$$

Falls also $C < 0$ gilt, so zeigt der Projektionsvektor $\vec{x}_{\parallel \langle \vec{n} \rangle}$ in $\vec{n}$-Richtung, für $C > 0$ ist $\vec{x}_{\parallel \langle \vec{n} \rangle}$ entgegengesetzt zu $\vec{n}$ gerichtet.

Allgemeine Koordinatengleichung

Geraden in der Ebene – Bedeutung der Konstanten C

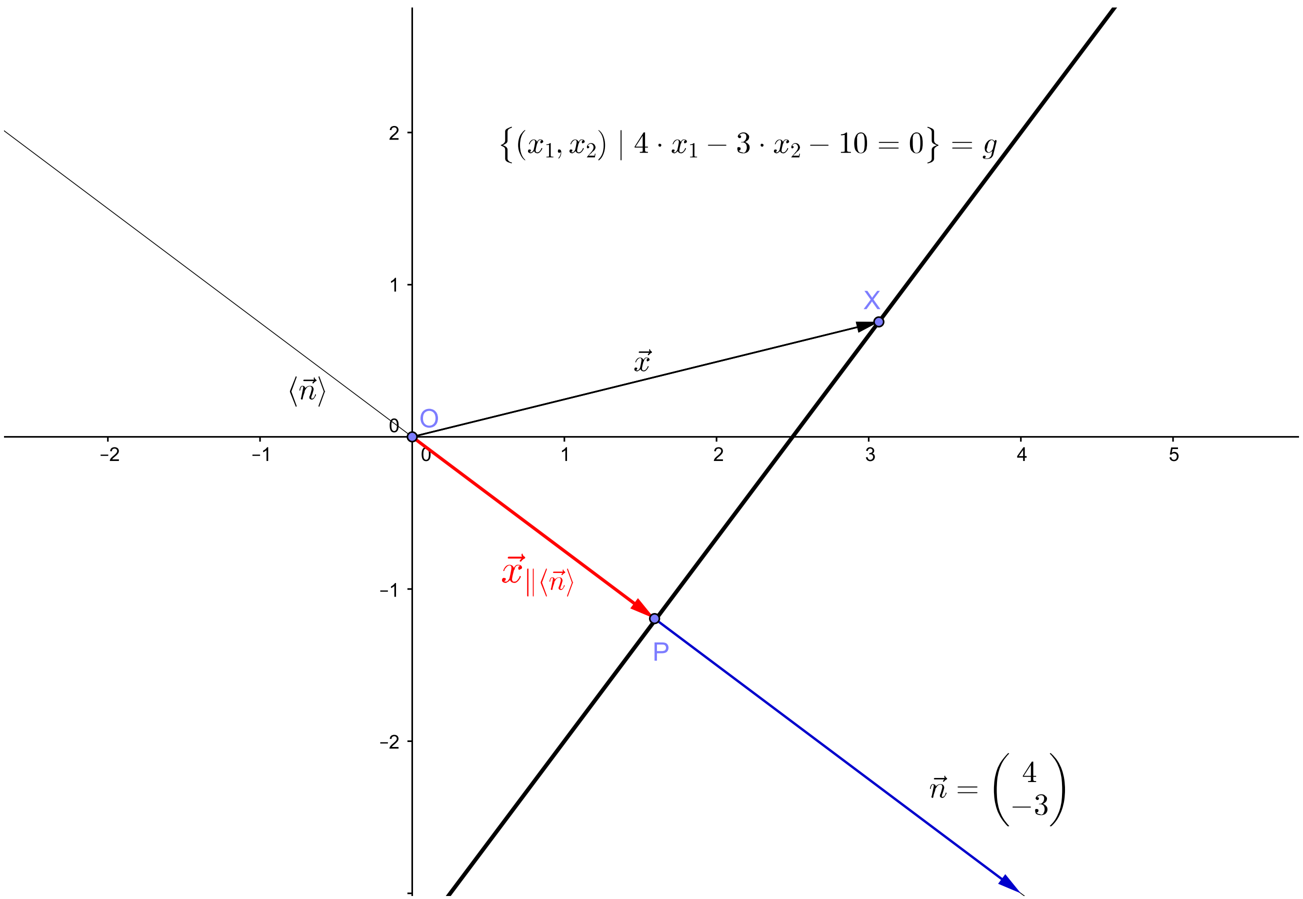


Abbildung: Beispiel mit $C < 0$. Für jeden Punkt X auf der Geraden zeigt der Vektor $\vec{x}_{\| \langle \vec{n} \rangle}$ in die $\vec{n}$-Richtung.

Allgemeine Koordinatengleichung

Geraden in der Ebene – Bedeutung der Konstanten C

Satz:

Wird eine Gerade g durch die AKG

$$A \cdot x_1 + B \cdot x_2 + C = 0$$

beschrieben, so gilt für den Abstand $d(O, g)$ des Ursprungs von der Geraden die Beziehung

$$d(O, g) = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Allgemeine Koordinatengleichung

Geraden in der Ebene – Bedeutung der Konstanten C

Begründung:

Liegt ein Punkt X mit Ortsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ auf der Geraden g, die durch die AKG $\boxed{A \cdot x_1 + B \cdot x_2 + C = 0}$ beschrieben wird, so gilt

$$C = -A \cdot x_1 + B \cdot x_2 = -\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\vec{n} \cdot \vec{x}.$$

Der Abstand $d(O, g)$ des Ursprungs von der Geraden g ist gleich der **Länge** des Projektionsvektors $\vec{x}_{\| \langle \vec{n} \rangle}$. Mit $\vec{x}_{\| \langle \vec{n} \rangle} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n}$ folgt

$$\begin{aligned} \left\| \vec{x}_{\| \langle \vec{n} \rangle} \right\| &= \left\| \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} \right\| = \left\| \frac{-C}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} \right\| \\ &= \left| \frac{-C}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \right| \|\vec{n}\| = \frac{|-C|}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \|\vec{n}\| = \frac{|C|}{\|\vec{n}\|^2} \|\vec{n}\| = \frac{|C|}{\|\vec{n}\|} \\ &= \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned}$$

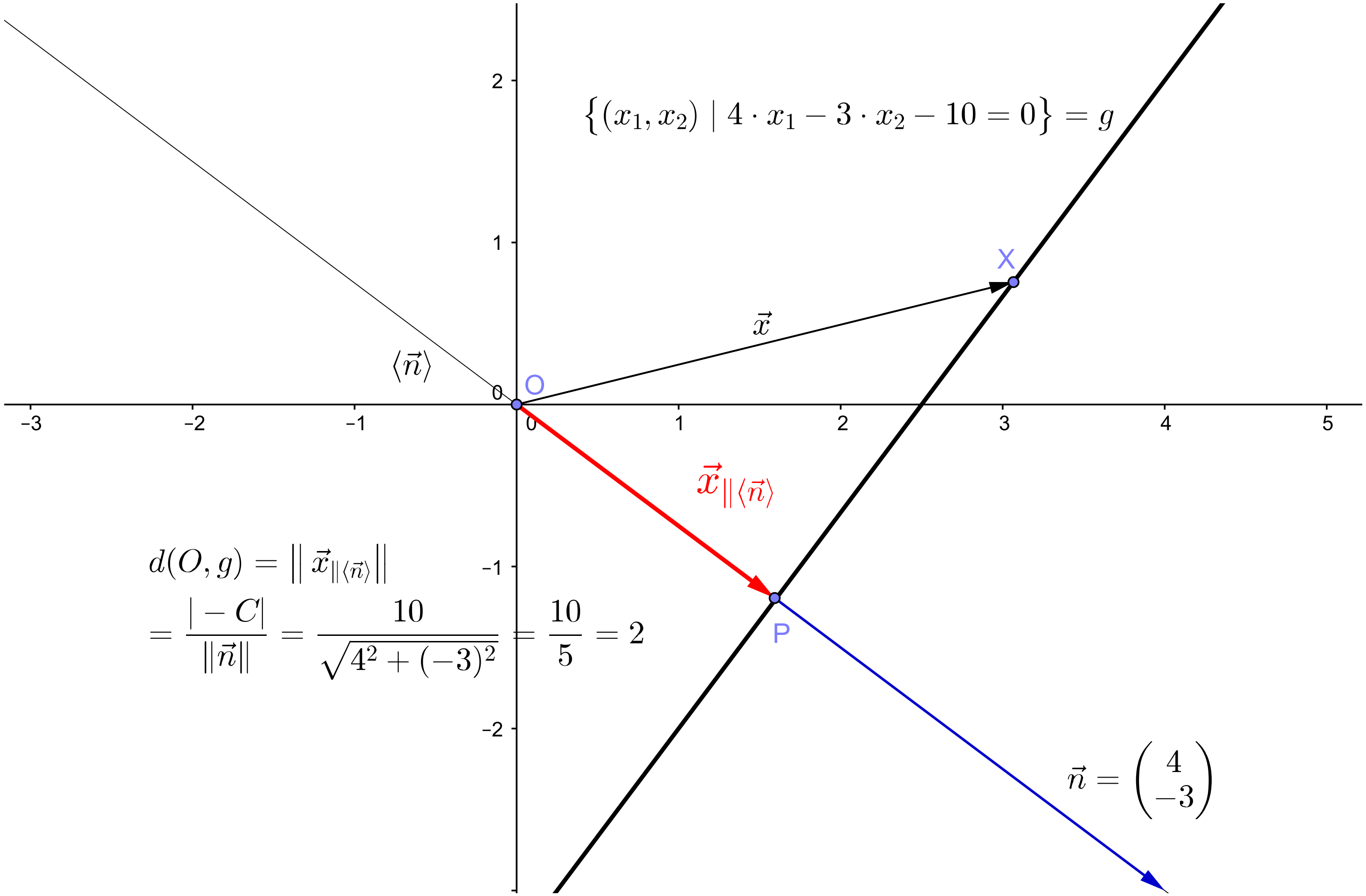


Abbildung: Der Abstand $d(O, g$ ist gegeben durch den Ausdruck $\frac{|C|}{\|\vec{n}\|}$.

Allgemeine Koordinatengleichung

Geraden in der Ebene – Bedeutung der Konstanten C

Normierte AKG – Bedeutung der Konstanten C

- Wird eine Gerade g durch die AKG $\boxed{A \cdot x_1 + B \cdot x_2 + C = 0}$ beschrieben und gilt $A^2 + B^2 = 1$, so sprechen wir davon, dass eine **normierte AKG** vorliegt.
- In diesem Fall ist $|C|$ gleich dem Abstand $d(O, g)$ des Ursprungs von der Geraden.
- Denn aus Satz 59 folgt dann unmittelbar

$$d(O, g) = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C|}{1} = |C|.$$

Allgemeine Koordinatengleichung

Geraden in der Ebene – Bedeutung der Konstanten C

Normierung einer AKG

Wird eine Gerade g durch die AKG $\boxed{A \cdot x_1 + B \cdot x_2 + C = 0}$ beschrieben so erhalten wir eine *normierte AKG*, indem wir die gegebene AKG auf beiden Seiten mit dem Faktor $\frac{1}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ durchmultiplizieren.

Begründung: Wir betrachten die resultierende Gleichung

$$\frac{A \cdot x_1 + B \cdot x_2 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

und setzen $A' = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ und $B' = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Dann gilt:

$$\left(A'\right)^2 + \left(B'\right)^2 = \frac{A^2 + B^2}{\left(\sqrt{A^2 + B^2}\right)^2} = 1.$$

Allgemeine Koordinatengleichung

Geraden in der Ebene – Bedeutung der Konstanten C

Bemerkung:

Wurde eine gegebene AKG wie beschrieben normiert, so hat die resultierende Gleichung

$$\frac{A \cdot x_1 + B \cdot x_2 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

den konstanten Term $C' = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Natürlich gilt

$$|C'| = \left| \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = d(O, g).$$