Hinweise zu verwendeten Symbolen und zu trigonometrischen Funktionen (Winkelfunktionen)

- Das Symbol $\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, \ldots$ steht für die Menge aller natürlichen Zahlen (einschließlich der Null), das Symbol $\mathbb{Z}$ bezeichnet die Menge aller ganzen Zahlen, das Symbol $\mathbb{R}$ bezeichnet die Menge aller reellen Zahlen.
- Es gilt $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos(x) \neq 0$.
- Für alle x, $y \in \mathbb{R}$ gelten folgende Identitäten **(Additionstheoreme)**:

$$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y), \tag{AT1}$$
$$\cos(x-y) = \cos(x) \cdot \cos(y) + \sin(x) \cdot \sin(y), \tag{AT2}$$
$$\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y), \tag{AT3}$$
$$\sin(x-y) = \sin(x) \cdot \cos(y) - \cos(x) \cdot \sin(y). \tag{AT4}$$

- In der folgenden Tabelle sind einige Werte von Winkelfunktionen für Winkel im Gradmaß und im Bogenmaß aufgeführt. Weitere Werte erhalten Sie mit Hilfe der Additionstheoreme, zum Beispiel gilt $\cos(135°) = \cos(90° + 45°) = \ldots$

Winkel		Funktionswerte trigonometrischer Funktionen		
Gradmaß	Bogenmaß x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	nicht definiert
$120°$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$180°$	π	0	-1	0
$240°$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	nicht definiert
$360°$	2π	0	1	0
$-45°$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$-90°$	$-\frac{\pi}{2}$	-1	0	nicht definiert
$-180°$	$-\pi$	0	-1	0

Präsenzübungen

Aufgabe P 1. *Winkelfunktionen*

Zeichnen Sie einen im Ursprung $O = (0,0)$ eines kartesischen Koordinatensystems zentrierten Einheitskreis (Kreis mit Radius 1). **Zeigen Sie** anhand einer geeigneten Figur im Einheitskreis mit geometrischen Argumenten, dass die Beziehungen

$$\cos(60°) = \frac{1}{2} \qquad \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

gelten. **Berechnen Sie** hieraus den Wert von $\tan(60°)$.

Hinweis: Wie in der Vorlesung dargelegt, folgt aus dem Satz des Pythagoras, dass für alle Winkel α die Beziehung $[\cos(\alpha)]^2 + [\sin(\alpha)]^2 = 1$ gilt.

Aufgabe P 2. *Kartesische Koordinaten und Polarkoordinaten*

(a) Es sei P ein Punkt im Abstand $d = 2$ vom Koordinatenursprung O. Die Strecke OP schließe einen Winkel von $30°$ mit der (positiven) x-Achse ein. **Berechnen Sie** die (kartesischen) Koordinaten (x, y) des Punktes P.

(b) Es sei s_Q der Strahl, der den Koordinatenursprung mit dem Punkt $Q = \left(-2, 2\sqrt{3}\right)$ verbindet. **Berechnen Sie** den Abstand r des Punktes Q vom Ursprung sowie den Winkel φ, den der Strahl s_Q mit der (positiven) x-Achse einschließt. Man nennt (r, φ) die **Polarkoordinaten** des Punktes Q.

*Hinweis: Wenn Sie die (kartesischen) Koordinaten (x, y) des gegebenen Punktes Q jeweils durch r dividieren, erhalten Sie einen Punkt $Q' = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$, der **auf dem Einheitskreis** sowie auf dem Strahl s_Q liegt. Also muss der gesuchte Winkel φ die Beziehungen $\cos(\varphi) = \frac{x}{r}$ und $\sin(\varphi) = \frac{y}{r}$ erfüllen.*

Bislang haben wir bei der Bestimmung eines Winkels φ, der die Beziehungen $\cos(\varphi) = \frac{x}{r}$ und $\sin(\varphi) = \frac{y}{r}$ erfüllt, auf Werte der Sinus- bzw. Kosinusfunktion zurückgegriffen, die uns schon bekannt waren (z.B. aus der umseitigen Tabelle). Im Allgemeinen lässt sich der Winkel φ durch die Umkehrfunktion $\cos^{-1}$ der Kosinusfunktion* berechnen. Da $\cos^{-1}$ jedoch nur Werte zurückgibt, die im Intervall $[0°, 180°]$ bzw. $[0, \pi]$ liegen, liefert der Ausdruck $\cos^{-1}\left(\frac{x}{r}\right)$ **nur dann korrekte Ergebnisse** , wenn der Punkt (x, y) **oberhalb (oder auf) der x-Achse** liegt. Man muss also **eine Fallunterscheidung machen**, z.B. wie folgt:

$$\varphi = +\cos^{-1}\left(\tfrac{x}{r}\right), \text{ falls } y \geq 0;$$
$$\varphi = -\cos^{-1}\left(\tfrac{x}{r}\right), \text{ falls } y < 0.$$

Möchte man keine negativen Winkel, sondern Werte von φ, die im Intervall $[0°, 360°)$ liegen, lautet die Fallunterscheidung so:

$$\varphi = +\cos^{-1}\left(\tfrac{x}{r}\right), \text{ falls } y \geq 0;$$
$$\varphi = 360° - \cos^{-1}\left(\tfrac{x}{r}\right), \text{ falls } y < 0.$$

(c) **Bestimmen Sie** Polarkoordinaten der Punkte $U = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2},\right)$ und $V = \left(-\sqrt{3}, 1\right)$.

* Die Funktion $\cos^{-1}$ ist in vielen Taschenrechnern implementiert, in der Literatur wird sie auch mit dem Symbol arccos bezeichnet.

Wer schnell vorangekommen ist, bearbeitet noch in der Sitzung die nächste Aufgabe, alle anderen tun dies zuhause:

Aufgabe P 3. *Anwendungen der Additionstheoreme*

(a) Bestimmen Sie die folgenden Werte:
$\cos(-120°),\ \sin(-120°),\ \tan(-120°),\ \cos(150°),\ \sin(150°),\ \tan(150°).$

Hinweis: Sie können zum Beispiel mit der Beziehung $\cos(-120°) = \cos(0° - 120°)$ *starten und dann eines der Additionstheoreme verwenden.*

(b) **Verwenden Sie** geeignete Additionstheoreme, **um zu zeigen**, dass für beliebige Winkel φ die Gleichungen $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ und $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$ gelten.

Hinweis: Aufgrund dieser Eigenschaften nennt man $\cos$ *eine* ***gerade Funktion*** *und* $\sin$ *eine* ***ungerade Funktion****.*

(c) **Zeichnen Sie** die Graphen der Kosinusfunktion $\cos\colon [-3\pi,\ 3\pi] \to [-1,\ 1]$ sowie der Sinusfunktion $\sin\colon [-3\pi,\ 3\pi] \to [-1,\ 1]$ und veranschaulichen Sie anhand dieser Funktionsgraphen die Eigenschaften aus Teilaufgabe **(b)** . Anders gesagt: Wie kann man die dort formulierte Beziehung anhand der Funktionsgraphen „sehen“?

Bemerkung: Die in dieser Aufgabe thematisierten Beziehungen sind wichtig, sie werden im Laufe des Semesters an verschiedenen Stellen gebraucht.

Hausübungen

Aufgabe H 1. *Bogenmaß und Gradmaß – Umrechnungen*

Für die Umrechnung einer Winkelangabe φ_G im Gradmaß in einen Wert φ_B im Bogenmaß oder umgekehrt ist die folgende Beziehung grundlegend:

$$\frac{\varphi_G}{360^\circ} = \frac{\varphi_B}{2\pi}.$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$\varphi_G = 360^\circ \cdot \frac{\varphi_B}{2\pi} \qquad \text{bzw.} \qquad \varphi_B = \frac{\varphi_G}{360^\circ} \cdot 2\pi.$$

(a) Rechnen Sie den Winkel $\varphi_B = \frac{\pi}{15}$ ins Gradmaß um.

(b) Rechnen Sie den Winkel $\varphi_G = 72^\circ$ ins Bogenmaß um.

Aufgabe H 2. *Anwendungen der Additionstheoreme*

(a) Bestimmen Sie die folgenden Werte:
$\cos(-120^\circ)$, $\sin(-120^\circ)$, $\tan(-120^\circ)$.

Hinweis: Sie können zum Beispiel mit der Beziehung $\cos(-120^\circ) = \cos(0^\circ - 120^\circ)$ *starten und dann eines der Additionstheoreme verwenden.*

(b) **Verwenden Sie** geeignete Additionstheoreme, **um zu zeigen**, dass für beliebige Winkel φ die Gleichungen

$$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi) \qquad \text{und} \qquad \sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$$

gelten.

Hinweis: Aufgrund dieser Eigenschaften nennt man $\cos$ *eine* ***gerade Funktion*** *und* $\sin$ *eine* ***ungerade Funktion****.*

(c) **Zeichnen Sie** die Graphen der Kosinusfunktion $\cos\colon [-3\pi,\ 3\pi] \to [-1,\ 1]$ sowie der Sinusfunktion $\sin\colon [-3\pi,\ 3\pi] \to [-1,\ 1]$ und veranschaulichen Sie anhand dieser Funktionsgraphen die Eigenschaften aus Teilaufgabe **(b)** . Anders gesagt: Wie kann man die dort formulierte Beziehung anhand der Funktionsgraphen „sehen“?

Bemerkung: Die in dieser Aufgabe thematisierten Beziehungen sind wichtig, sie werden im Laufe des Semesters an verschiedenen Stellen gebraucht.

Aufgabe H 3. *Bestimmung einiger Werte der Winkelfunktionen*

Verwenden Sie die Tabelle und ggf. die Additionstheoreme vom Blatt „Hilfsmittel zu trigonometrischen Funktionen“ zur Bestimmung der folgenden Werte:

$\cos(150^\circ)$, $\sin(150^\circ)$, $\tan(150^\circ)$, $\cos(-150^\circ)$, $\sin(-150^\circ)$, $\tan(-150^\circ)$.

Aufgabe H 4. *Allgemeine Folgerungen aus den Additionstheoremen*

(a) Schließen Sie aus den Additionstheoremen auf die Beziehung $\sin(0) = 0$.

Hinweis: Verwenden Sie AT4.

(b) Leiten Sie die Beziehungen

$$\cos(2\alpha) \;=\; [\cos(\alpha)]^2 - [\sin(\alpha)]^2 \qquad \text{und} \qquad \sin(2\alpha) \;=\; 2\,\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)$$

aus den Additionstheoremen ab.

***Hinweis: Anstelle von** $[\cos(\alpha)]^2$ **bzw.** $[\sin(\alpha)]^2$ **schreibt man oft kürzer** $\cos^2(\alpha)$ **bzw.** $\sin^2(\alpha)$.*

(c) Verwenden Sie geeignete Additionstheoreme, um (noch einmal) zu zeigen, dass für beliebige Winkel φ die Gleichungen

$$\cos(90^\circ - \varphi) \;=\; \sin(\varphi) \qquad \text{und} \qquad \sin(90^\circ - \varphi) \;=\; \cos(\varphi)$$

gelten.

(d) Zeichnen Sie die Graphen der Kosinusfunktion $\cos\colon [-3\,\pi,\ 3\,\pi] \to [-1,\ 1]$ sowie der Sinusfunktion $\sin\colon [-3\,\pi,\ 3\,\pi] \to [-1,\ 1]$ und veranschaulichen Sie anhand dieser Funktionsgraphen die Eigenschaften aus Teilaufgabe **(c)**. Anders gesagt: Wie kann man die dort formulierte Beziehungen anhand der (Symmetrie-Eigenschaften der) Funktionsgraphen „sehen"?

Aufgabe H 5. *Aufeinander senkrechte Ursprungsgeraden*

Es sei g eine Ursprungsgerade mit (endlicher und von Null verschiedener) Steigung m_g und es sei φ der Winkel mit $\tan(\varphi) = m_g$.

(a) Bestimmen Sie die Steigung m_h der Ursprungsgeraden h, die senkrecht auf g steht.

Hinweis: Formen Sie hierzu den Ausdruck $\tan(\varphi + 90^\circ) = \frac{\sin(\varphi+90^\circ)}{\cos(\varphi+90^\circ)}$ *geeignet um.*

(b) Schreiben Sie die Beziehung zwischen m_g und m_h in Form einer Gleichung auf.

(c) Es sei $(a,b) \neq (0,0)$ ein Punkt der Ebene und es sei l die Ursprungsgerade durch (a,b). Ferner sei (c,d) ein beliebiger Punkt auf der zu l senkrechten Ursprungsgeraden. Zeigen Sie, dass dann die Gleichung $ac + bd = 0$ erfullt ist.

Hinweise: Betrachten Sie zunächst den Fall $a = 0,\ b \neq 0$ *(in diesem Fall ist* l *vertikal), dann den Fall* $a \neq 0,\ b = 0$ *(in diesem Fall ist* l *horizontal) und danach den Fall* $a \neq 0,\ b \neq 0$*. Verwenden Sie hier noch kein ggf. vorhandenes Wissen uber Skalarprodukte von Vektoren.*

(d) **Zusatzfrage:** Ist die folgende Modifikation der in **(c)** getroffenen Aussage richtig?

Es sei (a,b) ein beliebiger Punkt auf einer beliebigen Ursprungsgeraden l, und es sei (c,d) ein beliebiger Punkt auf der zu l senkrechten Ursprungsgeraden. Dann ist die Gleichung $ac+bd = 0$ erfüllt.

Aufgabe H 6. *Zusatzaufgabe (etwas anspruchsvoller – für ambitionierte Studierende)*

Ziel der ersten fünf Teilaufgaben ist die Bestimmung von Funktionswerten der trigonometrischen Funktionen an den Stellen $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{3}$ auf analytischem Wege. Dies bedeutet, dass (anders als in Aufgabe P 1) nicht geometrische Überlegungen sondern die Additionstheoreme als Grundlage dienen sollen. In dieser Aufgabe ist also „der Weg das Ziel".

(a) Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen x die Beziehung $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ gilt.

(b) Folgern Sie aus **(a)** die Gleichung $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und hieraus die Gleichung $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(c) Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen x die folgende Beziehung gilt:

$$\cos(3x) = \cos(x) \cdot (4\cos^2(x) - 3).$$

(d) Verwenden Sie **(c)**, um die Gleichung $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ abzuleiten.

(e) Bestimmen Sie unter Verwendung des Resultats aus **(d)** und geeigneter Additionstheoreme die Werte $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ und $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

(f) Verwenden Sie geeignete Additionstheoreme, um zu zeigen, dass für beliebige Winkel α und β die Gleichungen $\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha-\beta) = \sin^2(\alpha) - \sin^2(\beta) = \cos^2(\beta) - \cos^2(\alpha)$ gelten.

Aufgabe H 7. *Pythagoreische Tripel und Quadrupel*

Ein Pythagoreisches (Zahlen-)Tripel (a, b, c) ist eine Kombination dreier ganzer Zahlen a, b und c, welche die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen. So sind zum Beispiel $(3, 4, 5)$ und $(12, 5, 13)$ Pythagoreische Zahlentripel. Finden Sie mindestens vier (bzw. möglichst viele) Pythagoreische Tripel, welche keine Vielfachen voneinander sind.

Können Sie ferner Kombinationen (a, b, c, d) ganzer Zahlen finden, so dass $a^2+b^2+c^2 = d^2$ gilt?

Aufgabe H 8. *Sammlung von Klausuraufgaben zu Trigonometrie und Polarkoordinaten*

(a) Bestimmen Sie die Polarkoordinaten des Punktes $P = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ und zeichnen Sie diesen in einem kartesischen Koordinatensystem.

(b) Bestimmen Sie die kartesischen Koordinaten des Punktes Q mit Polarkoordinaten $(r, \varphi) = (2, -60°)$. Bestimmen Sie anhand einer Skizze im Einheitskreis den Wert von $\sin(-60°)$ **näherungsweise mit einer Nachkommastelle**.

(c) Begründen Sie mit Hilfe eines geeigneten Additionstheorems, dass die folgende Beziehung gilt:

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad \text{für alle Werte von } \alpha.$$

Hinweis/Ansatz: $\sin(-\alpha) = \sin(0 - \alpha)$.

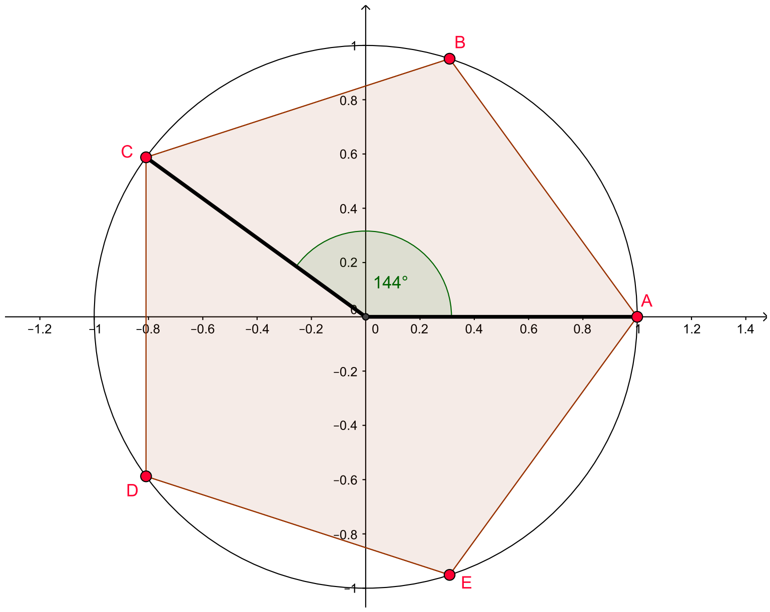
(d) **Rechnen Sie** den im Bogenmaß gegebenen Winkel $\frac{9}{4} \cdot 2\pi$ ins Gradmaß um.

(e) **Bestimmen Sie** die Werte von $\cos\left(\frac{9}{4} \cdot 2\pi\right)$ und $\sin\left(\frac{9}{4} \cdot 2\pi\right)$ z.B. anhand einer Skizze am Einheitskreis oder mithilfe geeigneter Additionstheoreme.

Tutoriumsübungen

Aufgabe T 1. *Winkelfunktionen*

(a) In der folgenden Abbildung ist ein regelmäßiges Fünfeck im Einheitskreis dargestellt:



Bestimmen Sie anhand dieser Figur mithilfe eines Lineals oder Geodreiecks numerische Näherungswerte für $\cos(144°)$ und $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, jeweils **gerundet auf zwei Nachkommastellen**.

(b) Bestimmen Sie das Vorzeichen von $\cos(72°)$ und das Vorzeichen von $\sin(-72°)$.

(c) Welcher der beiden folgenden Werte hat größeren Betrag: $\cos(150°)$ oder $\sin(150°)$.

(d) Für welche Winkel α zwischen $0°$ und $360°$ gilt $|\cos(\alpha)| = |\sin(\alpha)|$.

(e) Können Sie ohne weitere Hilfsmittel und ohne zu zögern die folgenden Werte exakt angeben:

$$\cos(90°),\ \sin(0°),\ \cos(180°),\ \sin(180°),\ \cos(0°),\ \sin(90°)$$

Aufgabe T 2. *Winkelfunktionen*

Zeichnen sie einen im Ursprung $O = (0, 0)$ eines kartesischen Koordinatensystems zentrierten Einheitskreis (Kreis mit Radius 1):

(a) Zeigen Sie anhand einer geeigneten Figur im Einheitskreis und mithilfe des Satzes von Pythagoras, dass die Beziehungen $\cos(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $\sin(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ gelten. Berechnen sie hieraus den Wert von $\tan(45°)$.

(b) Bestimmen Sie $\sin(120°)$ und $\cos(120°)$ anhand einer Figur im Einheitskreis.

Hinweis: Wie in der Vorlesung dargelegt, folgt aus dem Satz des Pythagoras, dass für alle Winkel α die Beziehung $[\cos(\alpha)]^2 + [\sin(\alpha)]^2 = 1$ gilt.

Aufgabe T 3. *Mehr zu Winkelfunktionen*

(a) Machen Sie sich anhand einer geeigneten Skizze im Einheitskreis klar, dass die Beziehungen $\cos(90^\circ - \varphi) = \sin(\varphi)$ und $\sin(90^\circ - \varphi) = \cos(\varphi)$ jedenfalls für $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ gelten.

Hinweis: Wählen Sie einen beliebigen Winkel φ zwischen 0° und 90° und zeichnen Sie die Ursprungsgerade, die mit der (positiven) x-Achse den Winkel φ einschließt. Wo finden Sie den Winkel $90^\circ - \varphi$?

(b) Verwenden sie die Gleichung $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ und ein der Identitäten aus T 3(**a**) zur Bestimmung der Wertes $\sin(30^\circ)$.

(c) Nutzen Sie ein geeignetes Additionstheorem, um zu zeigen, dass $\cos(\varphi) = \sin(\varphi + 90^\circ)$ gilt.

(d) Bestimmen Sie nun $\cos(30^\circ)$ unter Verwendung der Aufgaben T 2(**b**) und T 3(**c**).

Aufgabe T 4. *Bestimmung einiger Werte der Winkelfunktionen*

Verwenden Sie die Tabelle und ggf. die Additionstheoreme vom Blatt „Hilfsmittel zu trigonometrischen Funktionen" zur Bestimmung der folgenden Werte:

(a) $\cos(60^\circ)$, $\sin(60^\circ)$, $\tan(60^\circ)$ **(b)** $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

(c) $\cos(-30^\circ)$, $\sin(-30^\circ)$, $\tan(-30^\circ)$ **(d)** $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

(e) $\cos(405^\circ)$, $\sin(405^\circ)$, $\tan(405^\circ)$ **(f)** $\cos(150^\circ)$, $\sin(150^\circ)$, $\tan(150^\circ)$

Aufgabe T 5. *Kartesische Koordinaten und Polarkoordinaten*

(a) Es sei P ein Punkt im Abstand $d = 2$ vom Koordinatenursprung O. Die Strecke OP schließe einen Winkel von -30° mit der (positiven) x-Achse ein. Berechnen Sie die (kartesischen) Koordinaten (x, y) des Punktes P.

(b) Es sei s der Strahl, der den Koordinatenursprung mit dem Punkt $Q = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ verbindet. Berechnen Sie den Winkel φ, welchen der Strahl s mit der (positiven) x-Achse einschließt sowie den Abstand r des Punktes Q vom Ursprung. Man nennt (r, φ) die **Polarkoordinaten** des Punktes Q.

Aufgabe T 6. *Geraden und ihre Steigungen*

(a) Überzeugen Sie sich, dass eine Straße mit 100% Steigung einen Winkel von 45° gegenüber der Horizontalen hat.

(b) Geben Sie die allgemeine Beziehung zwischen der Steigung m der Straße und dem zugehörigen Winkel φ zur Horizontalen an.

(c) Welchen Winkel gegenüber der Horizontalen hat eine Straße mit $\sqrt{3} \cdot 100\%$ Steigung.

(d) Aus Teilaufgabe (**a**) folgt nicht, dass eine Straße mit 200% Steigung den Winkel von 90° gegenüber der Horizontalen hat. Erläutern Sie dies anhand einer Skizze.

(e) Wie wir in Teilaufgabe **(d)** gesehen haben, gilt die Beziehung $\tan(2\varphi) = 2\tan(\varphi)$ nicht allgemein. Kennen Sie im Gegensatz hierzu Funktionen f mit der Eigenschaft, dass $f(2x) = 2f(x)$ für jeden beliebigen Wert von x erfüllt ist?