Mathematik und Simulation

Ebene und räumliche Kurven zur Modellierung von Objektgrenzen

2

Prof. Dr. Thomas Schneider

Stand: 25.04.2023

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Inhalt

Bemerkung

zum Foliensatz

Bemerkung zum Foliensatz

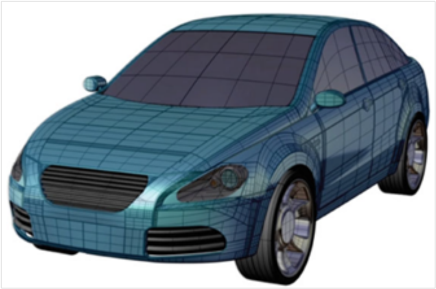
Der Foliensatz zu diesem Kapitel wurde in Zusammenarbeit zwischen Prof. Dr. R. Lasowski und Prof. Dr. T. Schneider erstellt.

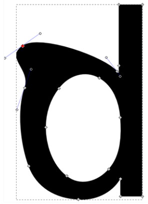
Kurven

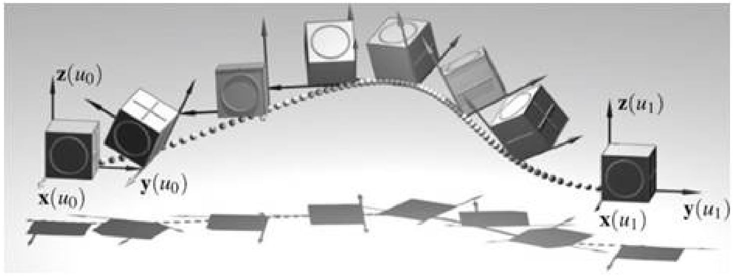
Motivation – warum Kurven- (und Flächen-)Design?

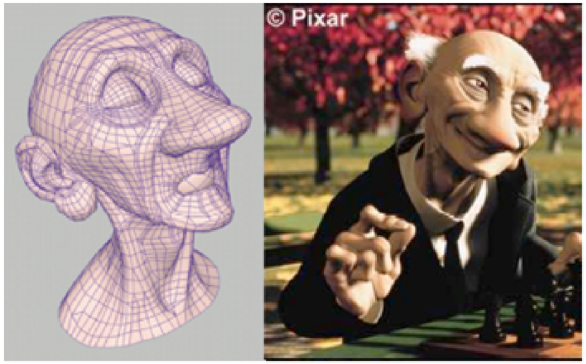
Anwendungsfelder

- Produktdesign
- Autoindustrie
- Schriftdesign
- Pfadberechnung für Roboter
- Kamerapfad für Animationen
- Animationsfilme









Erinnerung
an Funktionen und Ableitungen

Wir erinnern uns im Folgenden an einige Grundlagen aus der reellen Analysis und Differenzialrechnung.

Reellwertige Funktionen

Definition

Definition

- Eine **Abbildung** $f\colon D \to W$ weist **jedem** Element des Definitionsbereichs D **genau ein** Element des Wertebereichs W zu.
- Oft geschieht dies über eine sogenannte **Abbildungsvorschrift**

$$x \mapsto f(x).$$

Bemerkung

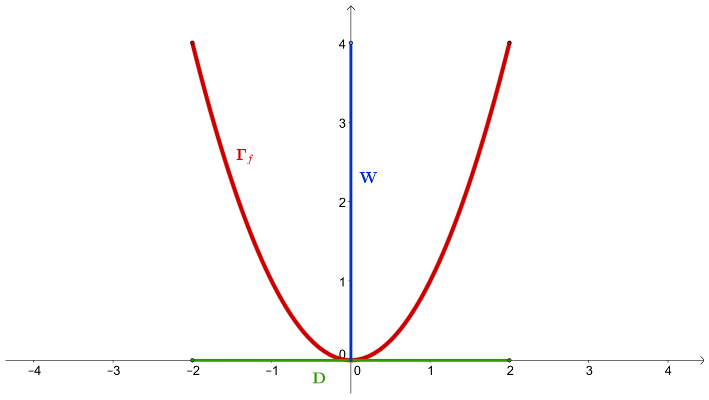
Wenn D und W Teilmengen der reellen Zahlen sind, dann nennt man eine Abbildung $f\colon D \to W$ auch (reellwertige) **Funktion**. Im Falle $D \subseteq \mathbb{R}$ und $W \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt $f\colon D \to W$ auch **vektorwertige Funktion**.

Definition

Die Menge $\Gamma_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2\}$ heißt **Graph** von f.

Beispiel

Wir betrachten die Funktion $f\colon [-2,2] \to [0,4]$, $x \mapsto x^2$ bzw. $f(x) = x^2$. Der Funktionsgraph Γ_f ist im folgenden Diagramm dargestellt:



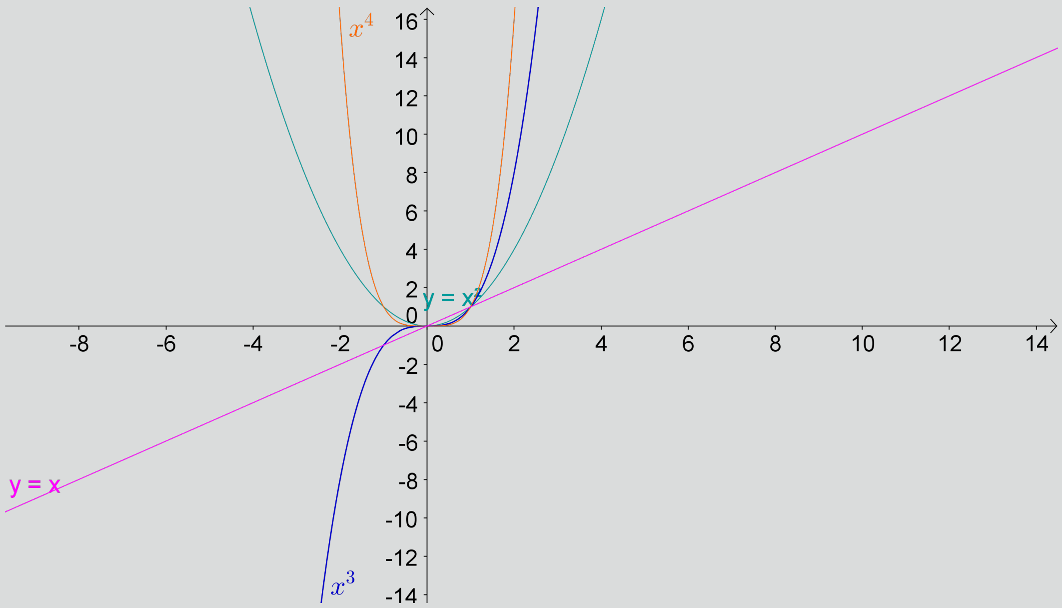
Reellwertige Funktionen

Potenzfunktionen

Vereinbarung

Wir betrachten **Potenzfunktionen** mit der Abbildungsvorschrift $x \mapsto x^n$. Vorerst sei stets $n \in \mathbb{N}$. Für **alle** $x \in \mathbb{R}$ definiert man $x^0 = 1$.

Beispiele von Funktionsgraphen



Reellwertige Funktionen

Polynome und Polynomfunktionen

Polynome

Es seien $a_0,\ a_1, \dots, a_n$ reelle Zahlen. Ein Ausdruck der Form

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \dots a_n\,x^n$$

heißt reelles **Polynom** (in der Unbestimmten x). Falls $a_n \neq 0$ gilt, ist n der **Grad** des Polynoms.

Beispiel

$f(x) = 1 + 2\,x + 3\,x^2 + 7\,x^3$ und $g(x) = 3\,x^3 - 5x$ sind Polynome vom Grad 3.

Ausblick

In diesem Kapitel verwenden wir Funktionen $f\colon D \to W,\ x \mapsto f(x)$, bei denen $f(x)$ jeweils ein Polynom ist. Solche Funktionen heißen **Polynomfunktionen**.

Ableitung von Funktionen

Motivation

In der Differenzialrechnung

- untersucht man die Graphen von Funktionen auf Glattheit bzw. auf Ecken,
- beschreibt man, wie Funktionen ansteigen bzw. abfallen,
- beschreibt man, wie stark Funktionsgraphen gekrümmt sind.

Bemerkung

Ende des 17. Jahrhunderts entwickelten Sir Isaac Newton und Gottfried W. Leibniz unabhängig voneinander den Differenzialkalkül. Newton erhielt die **Geschwindigkeit** als Ableitung der Bewegung nach der Zeit und die **Beschleunigung** als Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit.

Ableitung von Funktionen
Grundidee

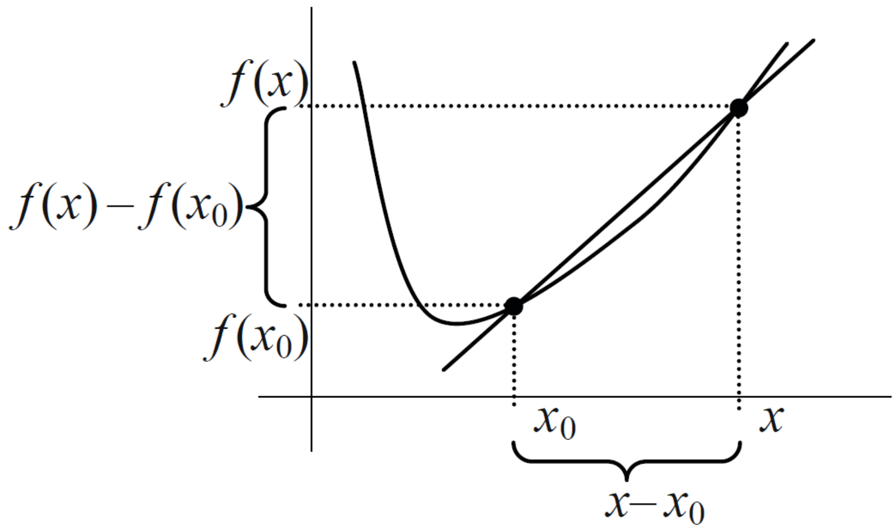


Abbildung: Sekantensteigung und Differenzenquotient

Sekantensteigung

Betrachten wir die Gerade (Sekante) durch die Punkte $\big(x, f(x)\big)$ und $\big(x_0, f(x_0)\big)$, so gibt der **Differenzenquotient** $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $x \neq x_0$ die Steigung dieser Geraden.

Ableitung von Funktionen

Definition von Differenzierbarkeit und Ableitung

Definition der Ableitung

- Sei $f\colon D \to W$ eine reellwertige Funktion (mit offenem Definitionsbereich) und sei $x_0 \in D$.
- Dann heißt f heißt **differenzierbar an der Stelle** x_0, falls der Grenzwert:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
existiert.
- In diesem Fall nennen wir diesen Grenzwert **Ableitung von f an der Stelle** x_0 und bezeichnen ihn mit den Symbolen $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$.

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Ableitung von Funktionen

Definition von Differenzierbarkeit und Ableitung

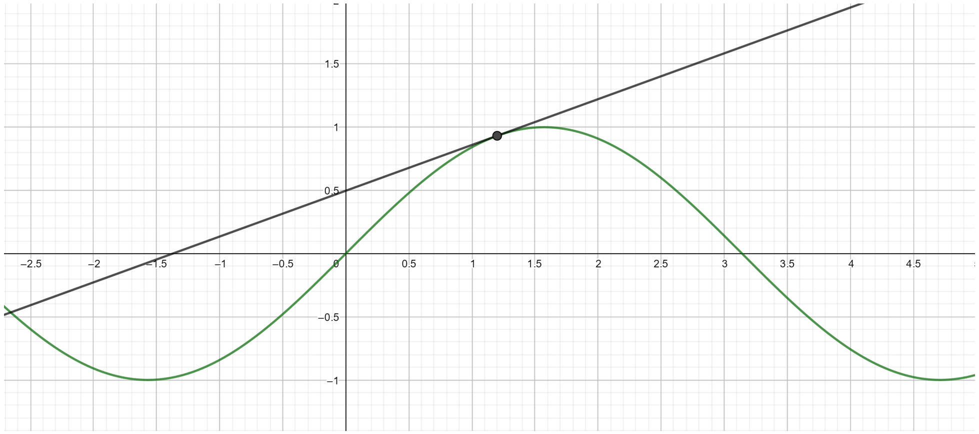
Bemerkung:

- Für $x \to x_0$ geht die **Sekantensteigung** in die **Tangentensteigung** im Punkt $(x_0, f(x_0))$ über:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Gleichung der Tangenten an den Graphen Γ_f der Funktion f im Punkte $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$



Ableitung von Funktionen

Definition von Differenzierbarkeit und Ableitung

Beispiele:

- Sei $f(x) = c$ und sei x_0 ein beliebiger Wert:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0$$

- Sei $f(x) = \frac{1}{2}x$ und sei x_0 ein beliebiger Wert:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{2}(x - x_0)}{(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ableitung von Funktionen

Definition von Differenzierbarkeit und Ableitung

Beispiele:

- Sei $f(x) = x^2$ und sei x_0 ein beliebiger Wert:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{(x + x_0) \cdot (x - x_0)}{(x - x_0)} \\ &= \lim_{x \to x_0} (x + x_0) \\ &= 2\, x_0 \end{aligned}$$

Ableitung von Funktionen

Potenzfunktionen

Wichtiges Resultat:

Sei $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f überall in $\mathbb{R}$ differenzierbar und für jeden Punkt x_0 gilt

$$f'(x_0) = n\, x_0^{n-1}.$$

Ableitungsfunktion

Für $f(x) = x^n$ definieren wir die sogenannte **Ableitungsfunktion** über die Abbildungsvorschrift

$$f'(x) = n\, x^{n-1}.$$

Ableitung von Funktionen

Weitere Beispiele

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
$x^a, \; x > 0, \; a \in \mathbb{R}$	$a \cdot x^{a-1}$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x, \; x \neq \pi/2 + k\pi, \; k \in \mathbb{N}$	$1/\cos^2 x$
$\ln x, \; x > 0$	$1/x$

Um aus diesen Ableitungen die vieler weiterer Funktionen „zusammensetzen“ zu können, benötigt man Ableitungsregeln.

Ableitungsregeln

Seien f und g Funktionen, die an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind. Dann sind für $k \in \mathbb{R}$ auch die Funktionen $k \cdot f$ und $f + g$ sowie $f \cdot g$ differenzierbar und es gilt:

(a) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(b) $(k \cdot f)'(x_0) = k \cdot f'(x_0)$

(c) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) \; + \; f(x_0) \cdot g'(x_0)$ **(Produktregel)**

Ableitung von Funktionen

Ableitungsregeln: Kettenregel

Kettenregel

- Zwei differenzierbaren Funktionen f und g (mit zueinander passenden Definitions- und Wertebereichen) können „verkettet" werden, indem die Funktion $f \circ g$ mit der Abbildungsvorschrift $x \mapsto f\big(g(x)\big)$ gebildet wird.
- Deren Ableitung erhält man gemäß der sogenannten **Kettenregel**:

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x).$$

- Kurzsprechweise: „äußere Ableitung mal innere Ableitung".

Ableitung von Funktionen

Ableitungsregeln

Ableitungsregeln: Beispiele

- Es sei $g(x) = x^7 + 25\,x^4$. Bestimmen Sie $g'(x)$.
- Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $x \mapsto \left(x^7 + 25\,x^4\right)^2$ mit der Kettenregel oder mit der Produktregel.

Ableitung von Funktionen

Höhere (n-te) Ableitungen

Höhere (n-te) Ableitungen

Sei f differenzierbar mit Ableitung f'. Ist f' wieder differenzierbar, dann kann man f'', die zweite Ableitung von f bilden. Analog definiert man höhere Ableitungen $f^{(n)}$.

Beispiel

$f(x) = x^4 + 10\,x^3 + 2$
$f'(x) = 4\,x^3 + 30\,x^2$
$f''(x) = 12\,x^2 + 60\,x$
$f'''(x) = 24\,x + 60$
$f^{(4)}(x) = 24$
$f^{(5)}(x) = 0$
$f^{(n)}(x) = 0$ für alle $n \geq 5$.

Ableitung von Funktionen

Differenzierbarkeitsklassen

Bezeichnungen

Ist f n-mal differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und ist die n-te Ableitung $f^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n} f$ stetig, so heißt f n**-mal stetig differenzierbar**. Man schreibt $f \in C^n(\mathbb{R})$. Gilt dies für alle $n \in \mathbb{N}$, so schreibt man $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

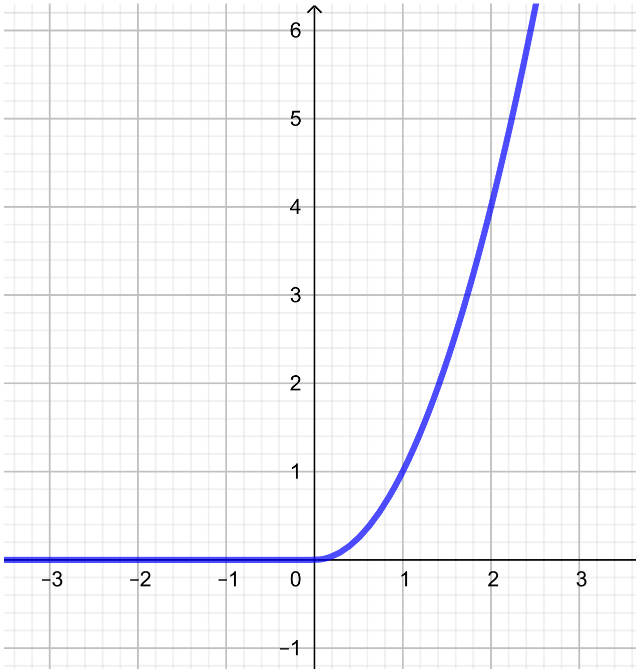
Ableitung von Funktionen
Differenzierbarkeitsklassen – Beispiel

Beispiel einer stückweise definierten Funktion:

- Für $x \leq 0$ sei $f(x) = 0$, für $x > 0$ sei $f(x) = x^2$.
- Die Funktion ist stetig im Punkte $x = 0$.
- Die Funktion hat im Punkte $x = 0$ den **linksseitigen** Ableitungswert 0 und die **rechtsseitige** Ableitung 0.
- Also ist f an der Stelle $x = 0$ differenzierbar. Für die Ableitungsfunktion gilt $f'(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $f'(x) = 2\,x$ für $x > 0$.
- Die Ableitung ist stetig. Insbesondere gilt für die Stelle $x = 0$ Folgendes:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} 2\,x = \lim_{x \to 0^+} f'(x).$$

- Die Funktion gehört somit zur Klasse C^1.
- An der Stelle $x = 0$ ist der Wert der linksseitigen zweiten Ableitung gleich 0, rechts jedoch gleich 2.
- Die zweite Ableitung existiert somit nicht, die Funktion gehört **nicht** zur Klasse C^2.



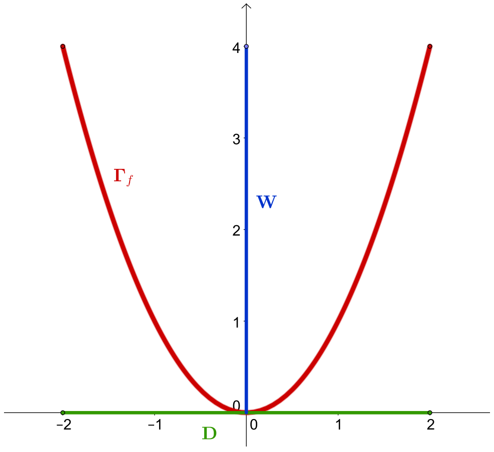
Ebene Kurven

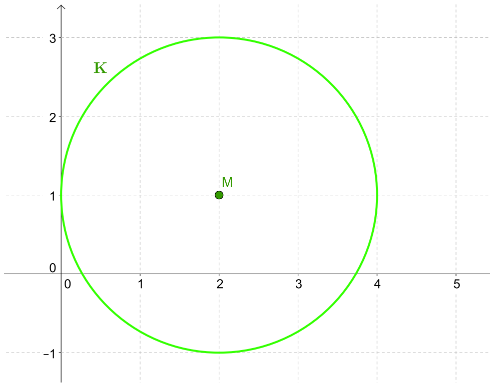
Mathematische Darstellungen von Kurven

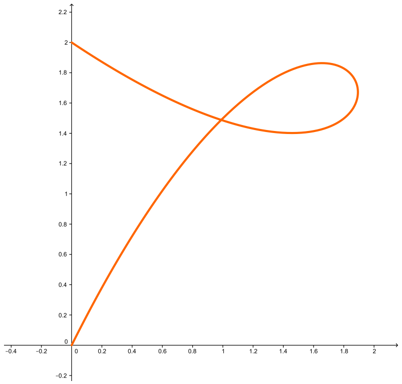
Beschreibungen von Kurven in der Ebene

Ebene Kurven lassen sich auf verschiedene Weisen beschreiben:

- **als Graph einer Funktion**
- **als Lösungsmenge einer Gleichung**
- **mit einer Parametrisierung**







Ebene Kurven

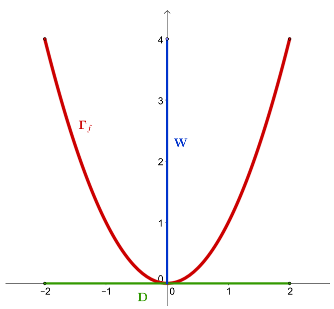
Mathematische Darstellungen von Kurven

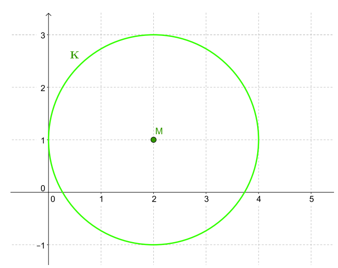
Darstellungsarten

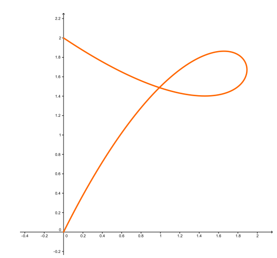
- **Explizite Darstellung als Funktionsgraph:** $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, y=f(x),\ x\in D\right\}$
- **Implizite Darstellung als Lösungsmenge einer Gleichung:** $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, F(x,y)=0\right\}$
- **Parametrisierung:** $\left\{\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, t\in I\right\}$

Beispiele

- $\left\{(x,x^2) \,\middle|\, x\in[-2,2]\right\}$
- $F(x,y) = (x-2)^2+(y-1)^2-4 \rightsquigarrow \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-2)^2+(y-1)^2=4\right\}$
- $\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\,t-3\,t^2-3\,t^3\\ 12\,t-24\,t^2+14\,t^3\end{pmatrix}, \ t\in[0,\ 1].$







Bemerkung

Auch Parameterdarstellungen von Geraden oder Geradenstücken, wie wir sie aus dem ersten Semester kennen, sind Kurvenparametrisierungen im Sinne der Definition.

Beispiel

$$\begin{aligned} p(t) &= \begin{pmatrix} 2+t \\ -3+2\,t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in I, \end{aligned}$$

wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall ist.

Anschlussfragen:

- Es sei weiterhin $p(t) = \binom{2}{-3} + t\binom{1}{2}$.
- Welche Punkte erhält man, wenn man $p(0)$ bzw. $p(1)$ berechnet?
- Welche „Kurve“ ergibt sich mit der Parametrisierung

$$p(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in [0, 1]$$

Begriffe:

- Eine **Parametrisierung** gibt für jeden Wert t eines Definitionsintervalls den **Positionsvektor** $p(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$ an.
- Durch **Ableiten** gewinnt man hieraus den **Geschwindigkeitsvektor** oder **Tangentialvektor**

$$v(t) = p'(t) = \binom{x'(t)}{y'(t)}$$

.

- Die **Momentangeschwindigkeit** $s(t)$, die am Tachometer angezeigt werden könnte, ist gegeben durch
$s(t) = \|v(t)\| = \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}$.
- Den **Beschleunigungsvektor** $a(t)$ erhält man über
$a(t) = v'(t) = p''(t) = \binom{x''(t)}{y''(t)}$.

Hörsaalübung:

Wir stellen einen Teil der Normalparabel als parametrisierte Kurve dar:

$$p\colon [-2,2] \to \mathbb{R}^2,\ p(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie $v(t) = p'(t)$ und $a(t) = v'(t)$.
- Berechnen Sie $p(0)$, $p(1)$, $v(0)$ und $v(1)$.
- Zeichnen Sie $v(0)$ und $v(1)$ an die entsprechenden Punkte der Kurve.

Ebene Kurven

Mathematische Darstellungen von Kurven

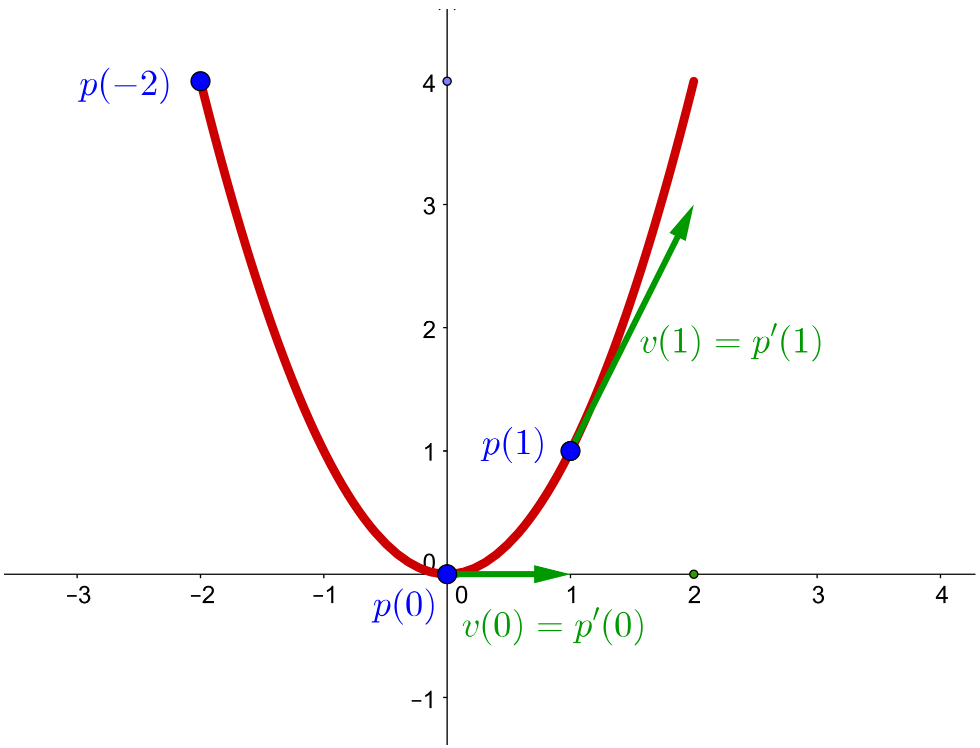
Hörsaalübung – Lösung

Parametrisierte Kurve:

$$p\colon [-2,2] \to \mathbb{R}^2,\ p(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

- Es ist $v(t) = p'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\,t \end{pmatrix}$ und $a(t) = v'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- Einsetzen der Werte $t = 0$ bzw. $t = 1$ ergibt

$$p(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad p(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad v(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad v(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



Anwendungen von Kurven
Anforderungen an das Design

Anwendungsfelder

- Es muss möglich sein, möglichst freie Formen zu zeichen zeichnen
- Kurven sollen gezielt veränderbar sein, das Editieren soll
  - intuitiv für Benutzer sein,
  - nur lokale Auswirkungen haben.
- Kurven sollen möglichst glatt sein (d.h. ohne Knicke) sein.

Anwendungen von Kurven

Modellierung einer glatten Kurve

Splines

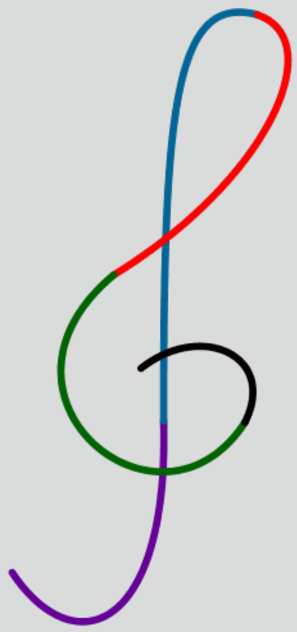
- Modellierung einer glatten Kurve erfolgt durch sogenannte Splines
- Splines = biegsame Latten (Schiffbau)
  - siehe Link http://pages.cs.wisc.edu/ deboor/draftspline.html

Anwendungen von Kurven

Beschreibung komplizierter Formen

Divide et Impera (Teile und Herrsche)

- Kurve wird in einzelne Segmente unterteilt, und jedes Segment hat eine einfache Darstellung



Ebene Kurven

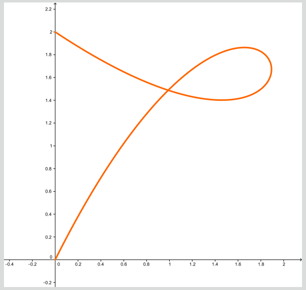
Parametrische Standardform von Polynomkurven

Parametrische Standardform

- $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{0x} + a_{1x}\, t + a_{2x}\, t^2 + \ldots a_{nx} t^n \\ a_{0y} + a_{1y}\, t + a_{2y}\, t^2 + \ldots a_{ny} t^n \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{a}_i t^i \in \mathbb{R}^2,\ t \in I$

Beispiel

- $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\,t - 3\,t^2 - 3\,t^3 \\ 12\,t - 24\,t^2 + 14\,t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 \\ -24 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \end{pmatrix} t^3,\ t \in [0,\ 1].$



- Standardform **nicht intuitiv** (Veränderung eines Koeffizienten $\mathbf{a}_i$ hat keine unmittelbar einsichtige geometrische Bedeutung)
- Demo Geogebra

Kontrollpunkte als Koeffizienten

- Wünschenswert sind **Kontrollpunkte**, die manipuliert werden anstatt der Koeffizienten $\mathbf{a}_i$
- $\rightsquigarrow$ neue Kurvendarstellung, in die die Kontrollpunkte C_i eingehen:

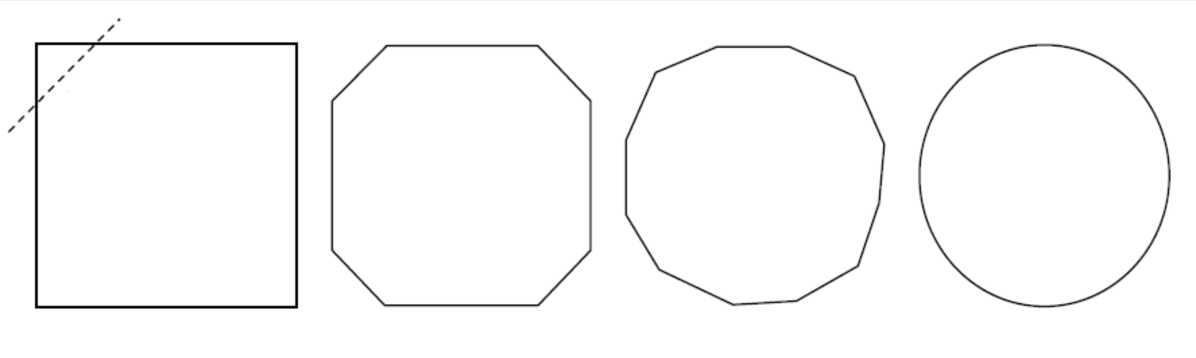
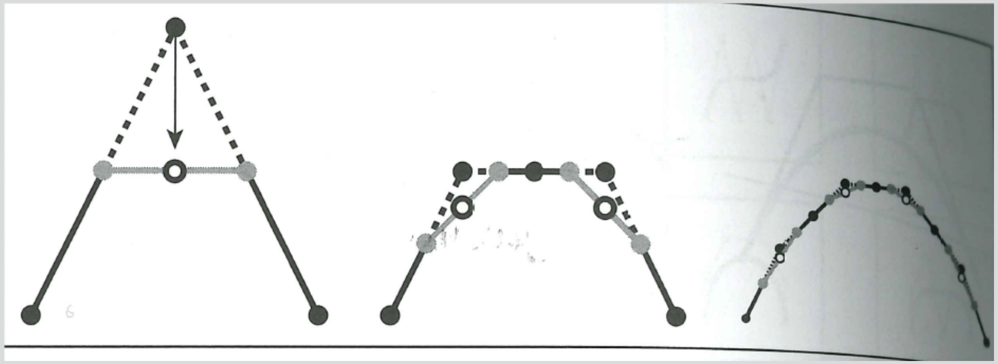
$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=0}^{n} C_i\, b_i(t) \\
&= C_0\, b_0(t) + C_1\, b_1(t) + \ldots + C_n\, b_n(t) \\
&= \begin{pmatrix} C_{0x} \\ C_{0y} \end{pmatrix} b_0(t) + \begin{pmatrix} C_{1x} \\ C_{1y} \end{pmatrix} b_1(t) + \ldots + \begin{pmatrix} C_{nx} \\ C_{ny} \end{pmatrix} b_n(t) \\
&= \begin{pmatrix} C_{0x}\, b_0(t) + C_{1x}\, b_1(t) + \ldots + C_{nx}\, b_n(t) \\ C_{0y}\, b_0(t) + C_{1y}\, b_1(t) + \ldots + C_{ny}\, b_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\; t \in I
\end{aligned}$$

- Hierin sind $b_i(t)$ Basisfunktionen (Computer Graphik: Blending Functions), die noch zu bestimmen sind.

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Ebene Kurven
Unterteilungs-Algorithmus (Subdivision)

Intuitive geometrische Konstruktion

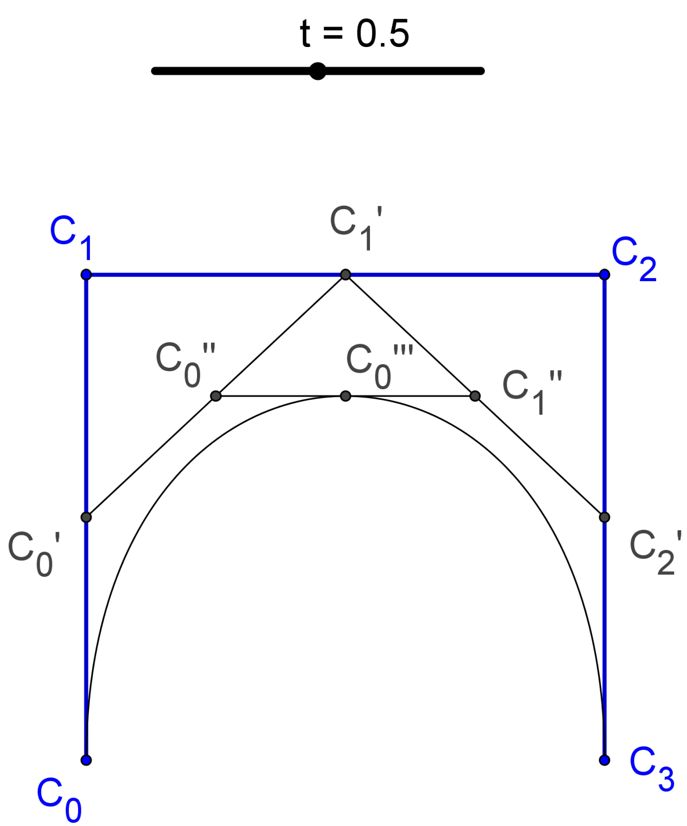
- Prinzip: Wiederholend Ecken eines Kontrollpolygons abschneiden
- 
- 

Vom Polygon zu einer glatten Kurve

Intuitive geometrische Konstruktion („Ecken abschneiden“)

De-Casteljau-Algorithmus

- Kontrollpunkte (C_0, C_1, C_2, C_3) werden verbunden: Kontrollpolygon.
- Wählen Sie ein $t \in [0, 1]$.
- Lineare Interpolation zwischen den Kontrollpunkten entsprechend dem Parameterwert t ergibt auf jeder Polygonseite einen neuen Punkt.
- Die 3 neuen Punkte (C_0^1, C_1^1, C_2^1) werden zu einem neuen Polygon verbunden.
- Erneute lineare Interpolation ergibt 2 neue Punkte (C_0^2, C_1^2)
- Erneute lineare Interpolation ergibt 1 neuen Punkt (C_0^3), der auf einer kubischen glatten Kurve liegt (s.Bézier-Kurve)



Vom Polygon zu einer glatten Kurve

Intuitive geometrische Konstruktion („Ecken abschneiden“)

Unterteilung/Subdivision

- Das ursprüngliche Kontrollpolygon durch C_0, C_1, C_2, C_3 wurde ersetzt durch einen neuen Polygonzog, der sich in 2 Kontrollpolygone unterteilt:
  - C_0, C_0^1, C_0^2, C_0^3. (rot)
  - C_0^3, C_1^2, C_2^1, C_3. (grün)
- Wiederholt man den Algorithmus für die jeweiligen 2 Kontrollpolygone, so unterteilt man weiter
- Die Kurve wird immer mehr angenähert

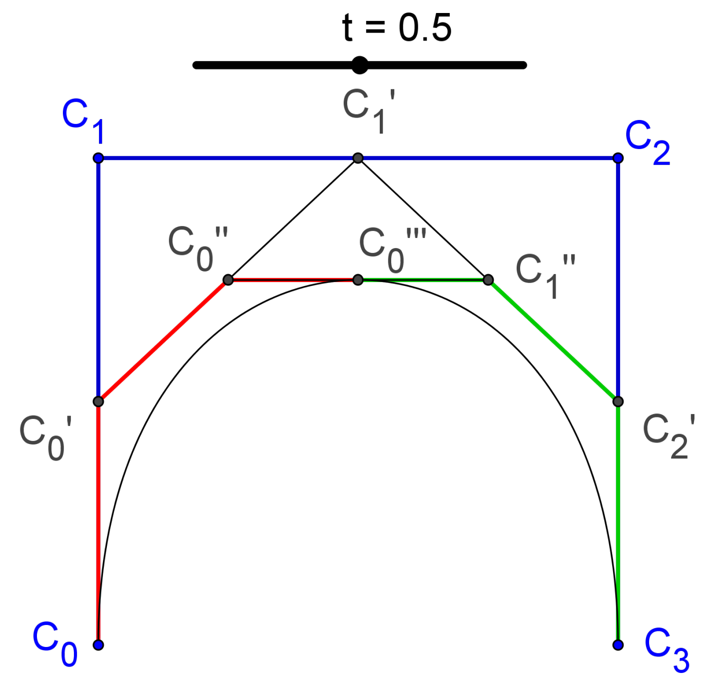


Abbildung: Unterteilung des Kontrollpolygons in 2 Kontrollpolygone: rot und grün.

De-Casteljau-Algorithmus: Schritt für Schritt

Vorbereitung: Lineare Interpolation

Verbindungstrecke zweier Punkte

Wenn Punkte A und B gegeben sind, so erhält man deren Verbindungsstrecke wie folgt:

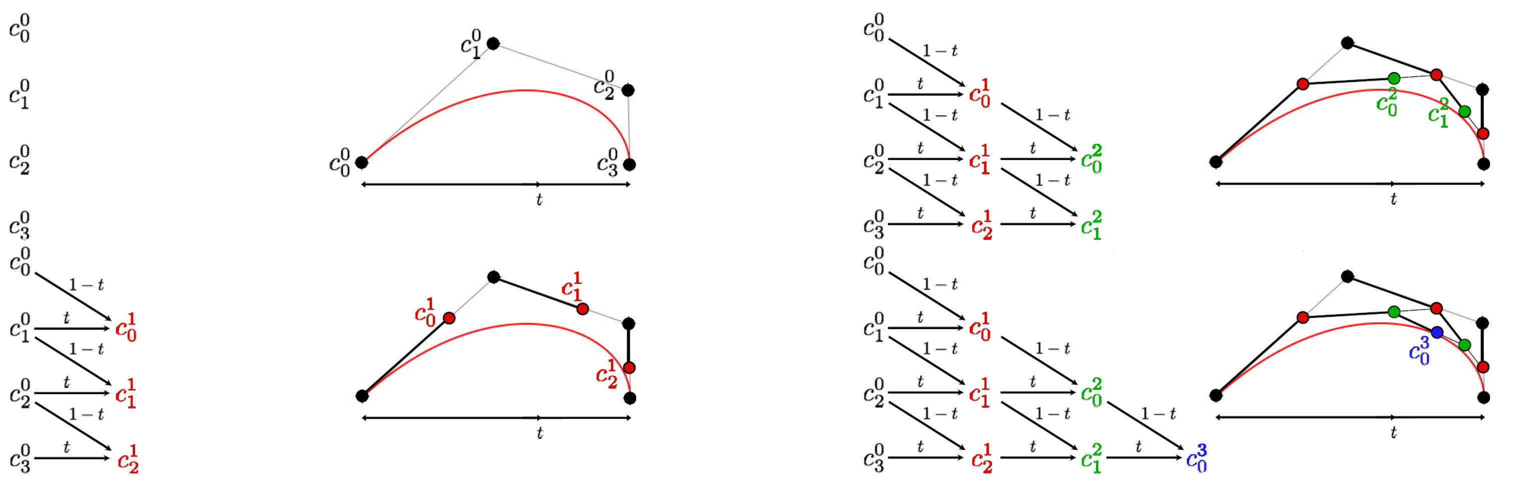
- Stützvektor: A
- Richtungsvektor: $B - A$
- Parametergleichung: $X(t) = A + t\,(B - A),\ t \in ?$
- $t = 0 \rightsquigarrow X(0) = A, \quad t = 1 \rightsquigarrow X(1) = A + B - A = B$
- $\rightsquigarrow X(t) \;=\; A + t\,(B - A),\ t \in [0, 1]$
- Umformung:

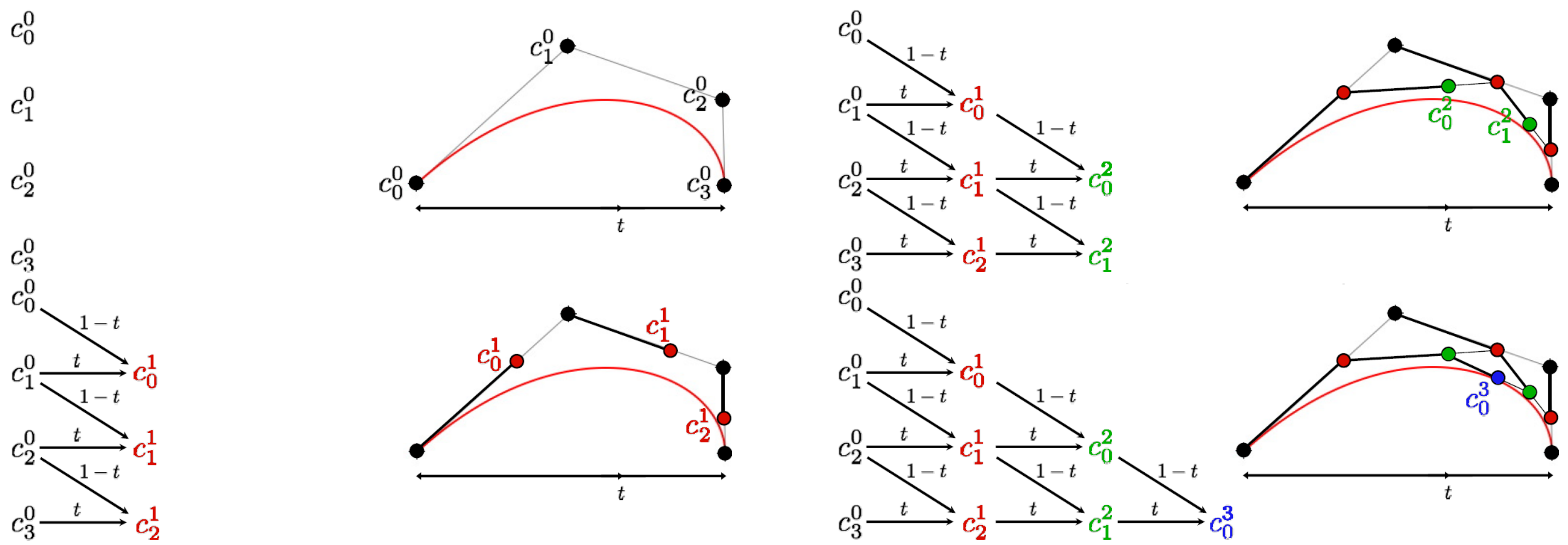
$$X(t) \;=\; A - t\,A + t\,B \;=\; (1 - t)\,A + t\,B.$$

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

De-Casteljau-Algorithmus: Schritt für Schritt

$$
\begin{array}{l}
C_0^0 \\ C_1^0 \\ C_2^0 \\ C_3^0
\end{array}
\begin{array}{l}
\longrightarrow C_0^1 = C_0^0 + t(C_1^0 - C_0^0) \\
\longrightarrow C_1^1 = C_1^0 + t(C_2^0 - C_1^0) \\
\longrightarrow C_2^1 = C_2^0 + t(C_3^0 - C_2^0)
\end{array}
\begin{array}{l}
\longrightarrow C_0^1 = (1-t)C_0^0 + tC_1^0 \\
\longrightarrow C_1^1 = (1-t)C_1^0 + tC_2^0 \\
\longrightarrow C_2^1 = (1-t)C_2^0 + tC_3^0
\end{array}
\begin{array}{l}
\longrightarrow C_0^2 = (1-t)C_0^1 + tC_1^1 \\
\longrightarrow C_1^2 = (1-t)C_1^1 + tC_2^1
\end{array}
\longrightarrow C_0^3 = (1-t)C_0^2 + tC_1^2
$$





Bézier-Kurve

Über den De-Casteljau-Algorithmus zur Bézier-Form

Rückwärts-Einsetzen:

- $$\begin{aligned}
C_0^3(t) &= (1-t)\,C_0^2 + t\,C_1^2 \\
&= (1-t)\,\underbrace{\left[(1-t)\,C_0^1 + t\,C_1^1\right]}_{C_0^2} + t\,\underbrace{\left[(1-t)\,C_1^1 + t\,C_2^1\right]}_{C_1^2} \\
&= (1-t)\,\underbrace{\left[(1-t)\,\underbrace{\left[(1-t)\,C_0^0 + t\,C_1^0\right]}_{C_0^1} + t\,\underbrace{\left[(1-t)\,C_1^0 + t\,C_2^0\right]}_{C_1^1}\right]}_{C_0^2} + \\
&\quad + t\,\underbrace{\left[(1-t)\,\underbrace{\left[(1-t)\,C_1^0 + t\,C_2^0\right]}_{C_1^1} + t\,\underbrace{\left[(1-t)\,C_2^0 + t\,C_3^0\right]}_{C_2^1}\right]}_{C_1^2} \\
&= \ldots (1-t)^3\,C_0^0 \;+\; 3\,(1-t)^2\,t\,C_1^0 \;+\; 3\,(1-t)\,t^2\,C_2^0 \;+\; t^3\,C_3^0.
\end{aligned}$$

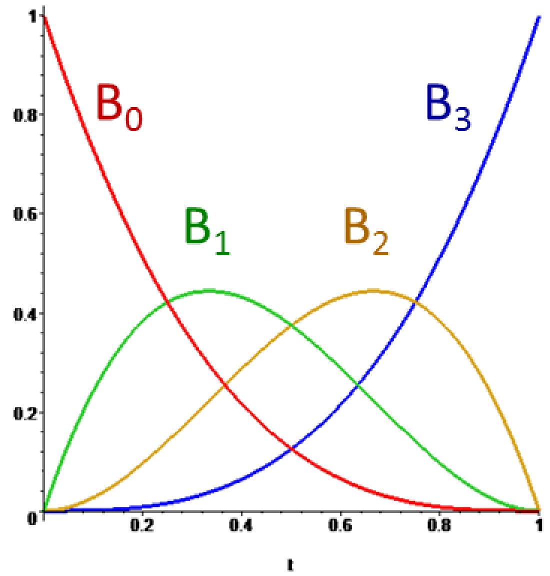
Bézier-Kurven

Allgemeine Form einer kubischen Bézier-Kurve

$$\mathbf{f}(t) = (1-t)^3 C_0 + 3(1-t)^2 t C_1 + 3(1-t) t^2 C_2 + t^3 C_3$$
$$= B_0(t) C_0 + B_1(t) C_1 + B_2(t) C_2 + B_3(t) C_3$$

Bézier-Basisfunktionen

- $B_0(t) = (1-t)^3$
- $B_1(t) = 3t(1-t)^2$
- $B_2(t) = 3t^2(1-t)$
- $B_3(t) = t^3$



Bézier-Kurve

Matrixform

Bézierkurven können unter Verwendung von Matrizen dargestellt werden. Im Folgenden ist die Parametrisierung einer kubischen Bézierform mit Matrixnotation angegeben:

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

Bedeutung der 4×4 Matrix

- Spalten der Matrix: Koeffizienten der Bézier - Basisfunktionen
- Bequeme Umformung zwischen Standard- und Bézier-Form und umgekehrt.

Bézier-Kurve
Matrixform

Matrixform einer kubischen Bézierkurve:

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

Multiplikation des links stehenden Zeilenvektors und der Matrix ergibt ...

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} (1 - 3t + 3t^2 - t^3) & (3t - 6t^2 + 3t^3) & (3t^2 - 3t^3) & t^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

$$= (1 - 3t + 3t^2 - t^3)\, C_0 + (3t - 6t^2 + 3t^3)\, C_1 + (3t^2 - 3t^3)\, C_2 + t^3\, C_3.$$

...die Bézierform.

Multiplikation der Matrix und des rechts stehenden Spaltenvektors ergibt ...

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \cdot C_0 \\ -3\, C_0 + 3\, C_1 \\ 3\, C_0 - 6\, C_1 + 3\, C_2 \\ -1\, C_0 - 3\, C_1 + 3\, C_1 - 1\, C_3 \end{pmatrix}$$

$$= C_0 + (-3\, C_0 + 3\, C_1)\, t + (3\, C_0 - 6\, C_1 + 3\, C_2)\, t^2 + (-C_0 - 3\, C_1 + 3\, C_1 - 1\, C_3) t^3.$$

...die Standardform.

Bézier-Kurve
Matrixform

Berechnung von Kontrollpunkten aus Koeffizienten der Standarform:

Wir setzen $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ und betrachten die Parametrisierung einer kubischen Kurve in Standardform

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}.$$

Durch Vergleich mit der Bézierform

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \cdot \mathcal{B} \cdot \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

erhalten wir die Gleichung

$$\mathcal{B} \cdot \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \mathcal{B}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}.$$

Fazit:

Wir können die Bézierkontrollpunkte C_k durch Anwendung der Matrix $\mathcal{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ auf die Standardkontroll-punkte A_k erhalten.

Bézier-Kurve

Matrixform

Beispiel zur Berechnung von Kontrollpunkten:

Wir wenden den Ausdruck

$$\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \mathcal{B}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

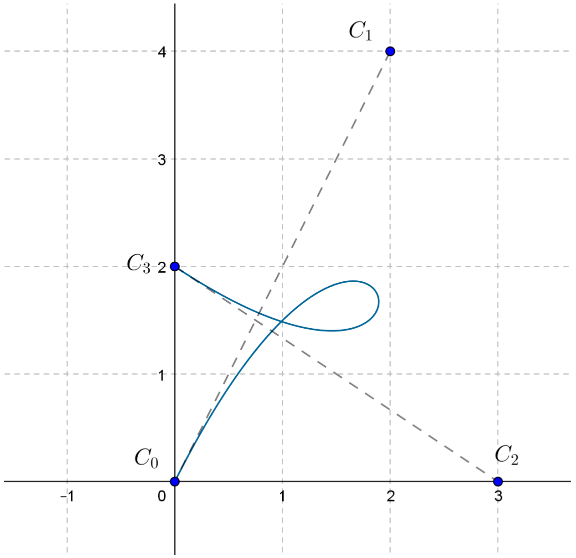
$$= \begin{pmatrix} A_0 \\ A_0 + \frac{1}{3} A_1 \\ A_0 + \frac{2}{3} A_1 + \frac{1}{3} A_2 \\ A_0 + A_1 + A_2 + A_3 \end{pmatrix}$$

auf das Beispiel von Folie 32 mit

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 6\,t - 3\,t^2 - 3\,t^3 \\ 12\,t - 24\,t^2 + 14\,t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} 1 + \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 \\ -24 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \end{pmatrix} t^3$$

und somit $A_0 = \binom{0}{0}$, $A_1 = \binom{6}{12}$, $A_2 = \binom{-3}{-24}$ und $A_3 = \binom{-3}{14}$ an:

$$C_0 = \binom{0}{0},\ C_1 = \binom{2}{4},\ C_2 = \binom{3}{0},\ C_3 = \binom{0}{2}.$$



Bézier-Kurven
Erste Ableitung

$$\mathbf{f}(t) = (1 - 3t + 3t^2 - t^3)C_0 + (3t - 6t^2 + 3t^3)C_1 + (3t^2 - 3t^3)C_2 + t^3 C_3$$
$$\mathbf{f}'(t) = (-3 + 6t - 3t^2)C_0 + (3 - 12t + 9t^2)C_1 + (6t - 9t^2)C_2 + 3t^2 C_3$$

Hörsaalübung

- Berechnen Sie $\mathbf{f}'(0)$ (d.h. die erste Ableitung am Anfang der Kurve)
- Berechnen Sie $\mathbf{f}'(1)$ (d.h. die erste Ableitung am Ende der Kurve)
- Was bedeutet das Ergebnis?

Bézier-Kurven

Erste Ableitung

Zusammenfassung:

- Die erste Ableitung ist ein **Vektor**.
- Dieser Vektor ist tangential zur Kurve.
- Interpretation als Geschwindigkeitsvektor, vgl. Folie 26.
- Die Länge des Ableitungsvektors ist umso größer je schneller die Bewegung entlang der Kurve ist.
- $\mathbf{f}'(0) = 3\,(C_1 - C_0) = 3\,\overrightarrow{C_0C_1}$ und $\mathbf{f}'(1) = 3\,(C_3 - C_2) = \overrightarrow{C_2C_3}$ bedeuten, dass die Kurve in ihren Endpunkten tangential zum Kontrollpolygon verläuft.

Bézier-Kurven
Zweite Ableitung

$$\mathbf{f}(t) = (1-3t+3t^2-t^3)C_0 + (3t-6t^2+3t^3)C_1 + (3t^2-3t^3)C_2 + t^3C_3$$
$$\mathbf{f}'(t) = (-3+6t-3t^2)C_0 + (3-12t+9t^2)C_1 + (6t-9t^2)C_2 + 3t^2C_3$$
$$\mathbf{f}''(t) = (6-6t)C_0 + (-12+18t)C_1 + (6-18t)C_2 + 6tC_3$$

Hörsaalübung

- Berechnen Sie $\mathbf{f}''(0)$ (d.h. die zweite Ableitung am Anfang der Kurve)
- Berechnen Sie $\mathbf{f}''(1)$ (d.h. die zweite Ableitung am Ende der Kurve)
- Was bedeutet das Ergebnis?

Bézier-Kurven
Zweite Ableitung

Zusammenfassung

- Die zweite Ableitung kann man als Beschleunigung beim Durchlauf der Kurve interpretieren, vgl. Folie 26.
- $\mathbf{f}''(0) = 6\,(C_0 - 2C_1 + C_2)$: zweite Ableitung am Anfang ist bestimmt durch die ersten 3 Kontrollpunkte
- $\mathbf{f}''(1) = 6\,(C_3 - 2C_2 + C_1)$: zweite Ableitung am Ende ist bestimmt durch die letzten 3 Kontrollpunkte
- Die zweite Ableitung ist auch ein **Vektor**:
  $\mathbf{f}''(0) = 6\,(C_0 - C_1 - C_1 + C_2) = 6\,(C_0 - C_1 + C_2 - C_1) = 6\,(\overrightarrow{C_1C_0} + \overrightarrow{C_1C_2})$
- Sie spielt bei der Krümmung der Kurve eine Rolle:
  - Die zweite Ableitung repräsentiert die Änderungsrate der Geschwindigkeitsvektoren
  - Ist eine Kurve stark gekrümmt so weichen die aufeinanderfolgende Tangentenvektoren stark voneinander ab.

Bézier-Splines: zusammengesetzte Kurven

Stetigkeitsbedingungen

Beschreibung realer Formen

- Eine einzige Bézier-Kurve reicht für die Beschreibung komlexer Formen nicht aus.
- Bezierkurven werden aneinandergehängt, so daß ein glatter Übergang entsteht.
- Mathematisch wird die Glattheit über die Stetigkeit (engl.: continuity) definiert:
  - C^0-Stetigkeit bzgl. des Ortes
  - C^1-Stetigkeit bzgl. der ersten Ableitung (Geschwindigkeitsvektoren sind gleich)
  - C^2-Stetigkeit bzgl. der zweiten Ableitung (Beschleunigungsvektoren sind gleich)
- Besonders wenn die Kurve eine Bewegung darstellen soll, ist C^1- und C^2-Stetigkeit wichtig.

Bézier-Splines: zusammengesetzte Kurven

Beispiel: C^0-Stetigkeit

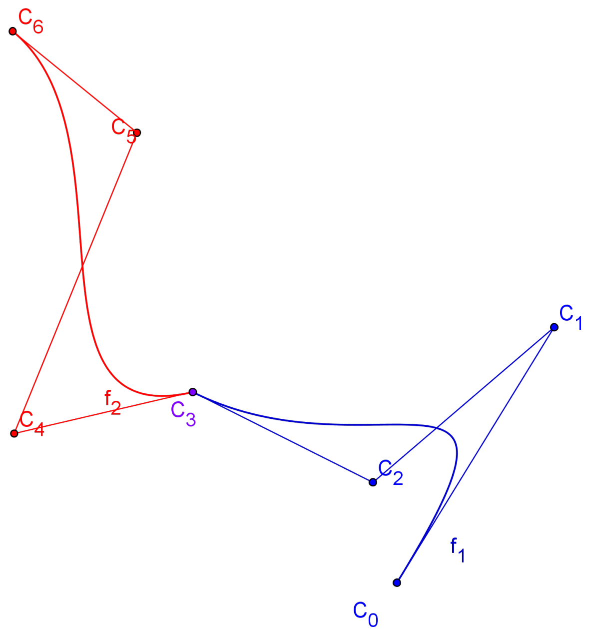


Abbildung: Die zwei Bézier-Kurven f_1 (blau) und f_2 (rot) sind C^0-stetig: der letzte Kontrollpunkt C_3 (lila = rot + blau) von f_1 ist zugleich erster Kontrollpunkt von f_2, der Übergang weist aber einen Knick auf. Das heißt, das keine C_1-Stetigkeit vorliegt.

Bézier-Splines: zusammengesetzte Kurven

Beispiel: C^1-Stetigkeit

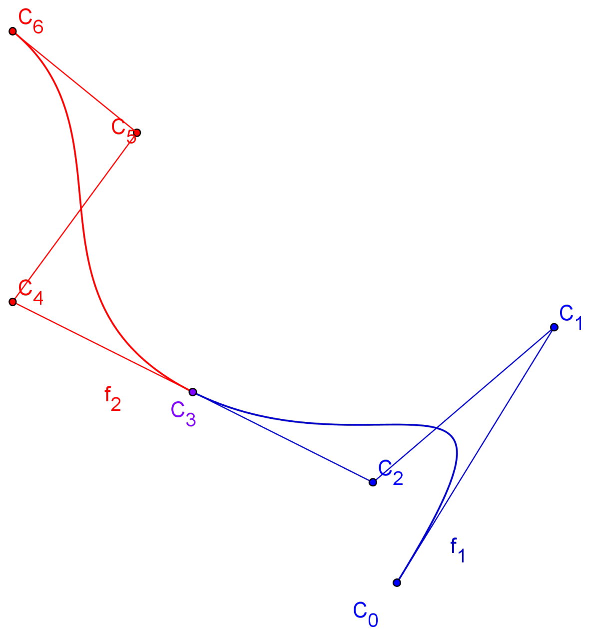


Abbildung: Die zwei Bézier-Kurven f_1 (blau) und f_2 (rot) sind C^1-stetig: Tangentenvektor am Ende von f_1 ist im Betrag und Richtung gleich dem Tangentenvektor am Anfang von f_2: $\overrightarrow{C_2C_3} = \overrightarrow{C_3C_4}$. ($C^2$ -Stetigkeit besteht nicht, s. nächste Folie)

Beispiel: C^1-Stetigkeit mit eingezeichneten Beschleunigungsvektoren

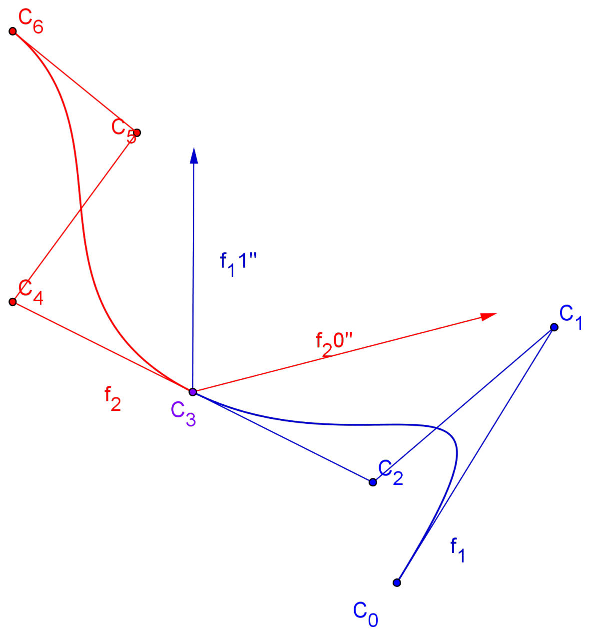


Abbildung: Die zwei Bézier-Kurven f_1 (blau) und f_2 (rot) sind C^1-stetig: Tangentenvektor am Ende von f_1 ist im Betrag und Richtung gleich dem Tangentenvektor am Anfang von f_2: $\overrightarrow{C_2C_3} = \overrightarrow{C_3C_4}$.

Dagegen besteht keine C^2-Stetigkeit , da die Beschleunigungsvektoren an der Nahtstelle nicht übereinstimmen: $f_1''(1) \neq f_2''(0)$.

Bézier-Splines: zusammengesetzte Kurven

Beispiel: C^2-Stetigkeit mit eingezeichneten Beschleunigungsvektoren

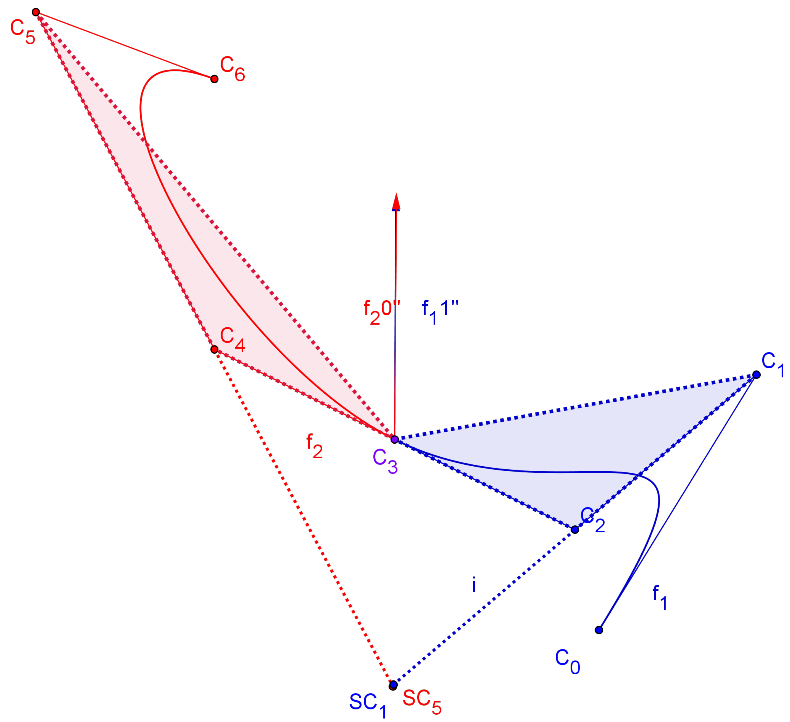


Abbildung: Die zwei Bézier-Kurven f_1 (blau) und f_2 (rot) sind C^1-stetig: Tangentenvektor am Ende von f_1 ist im Betrag und Richtung gleich dem Tangentenvektor am Anfang von f_2: $\overrightarrow{C_2C_3} = \overrightarrow{C_3C_4}$.

C^2-Stetigkeit besteht ebenfalls, da die Beschleunigungsvektoren an der Nahtstelle übereinstimmen.

Beispiel: C^2-Stetigkeit mit eingezeichneten Beschleunigungsvektoren

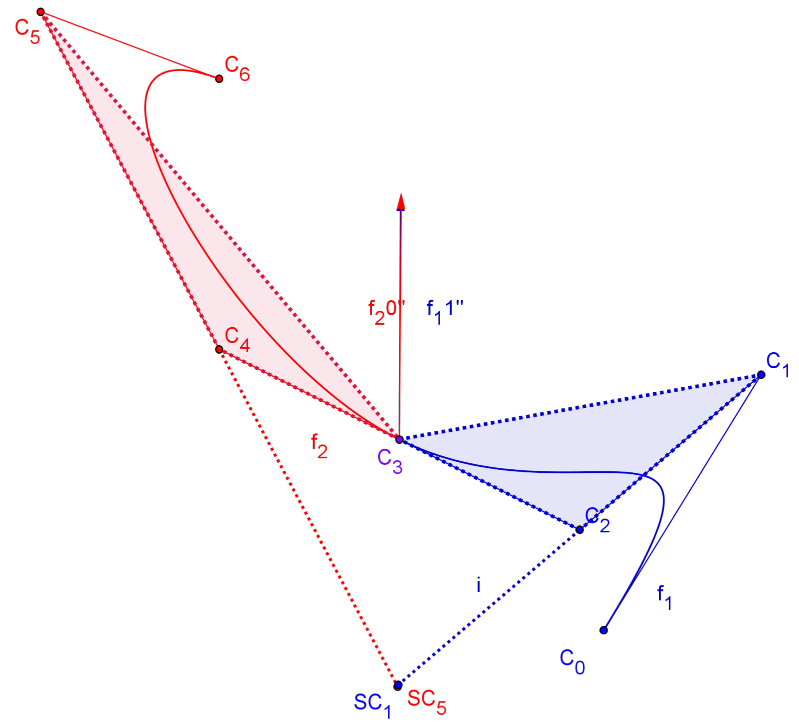


Abbildung: Um C^2-Stetigkeit zu erreichen, müssen die Spiegelpunkte übereinstimmen: $SC_1 = SC_5$:

SC_1 entsteht durch Spiegelung von C_1 am Punkt C_2. SC_5 ist der Spiegelpunkt von C_5 bzgl. C_4. (Beweis siehe Folie 57).

Demo: BezierSplinesStetigkeitAnimation.ggb

Bézier-Splines: zusammengesetzte Kurven

Beispiel: Geometrische Stetigkeit erster Ordnung: G^1-Stetigkeit

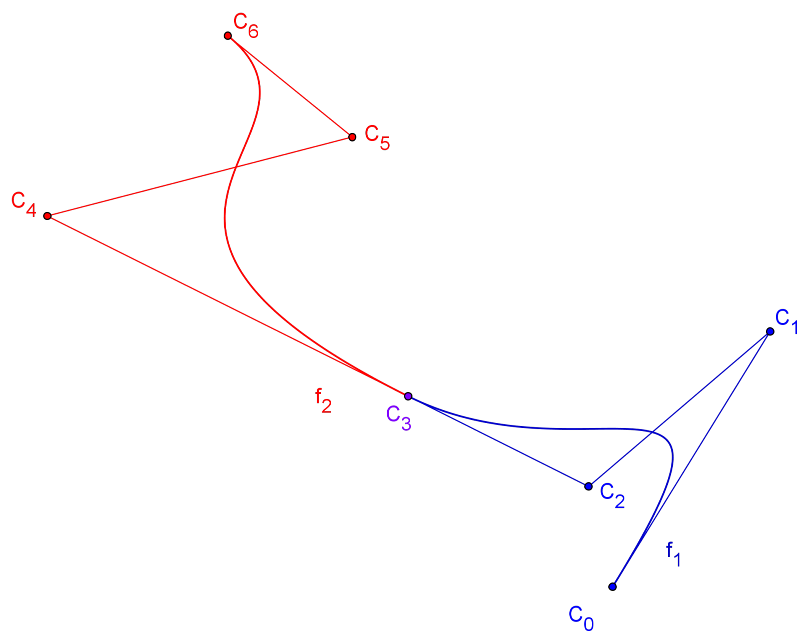


Abbildung: Die zwei Bézier-Kurven f_1 (blau) und f_2 (rot) sind G^1-stetig aber nicht C^1-stetig: Tangentenvektor am Ende von f_1 ist nur in der Richtung gleich dem Tangentenvektor am Anfang von f_2: $\overrightarrow{C_2C_3} = k\,\overrightarrow{C_3C_4}$. Diese Form der Stetigkeit reicht vollkommen aus, wenn die Kurve **geometrisch** glatt sein soll und nicht gefordert wird, dass eine glatte Bewegung zugrundeliegen soll.

Bézier-Splines: zusammengesetzte Kurven

Kriterium für Übereinstimmung der Beschleunigungsvektoren an der Anschluss-Stelle

Beweis

Wenn C_2-Stetigkeit vorliegt, so gilt $f_1''(1) = f_2''(1)$, d.h.

$$6\,(C_3 - 2\,C_2 + C_1) = 6\,(C_3 - 2\,C_4 + C_5)\,.$$

Nach Vereinfachung ergibt sich $-2\,C_2 + C_1 = -2\,C_4 + C_5$ und nach Multiplikation mit -1 haben wir

$$\begin{aligned} 2\,C_2 - C_1 &= 2\,C_4 - C_5 \\ \rightsquigarrow C_2 - (C_1 - C_2) &= C_4 - (C_5 - C_4)\,. \end{aligned}$$

Es ist nun aber $C_2 - (C_1 - C_2)$ der Punkt, der sich ergibt, wenn C_1 am Punkt C_2 gespiegelt wird. Andererseits ist $C_4 - (C_5 - C_4)$ der Punkt, der sich durch Spiegelung von C_5 am Punkt C_4 ergibt.

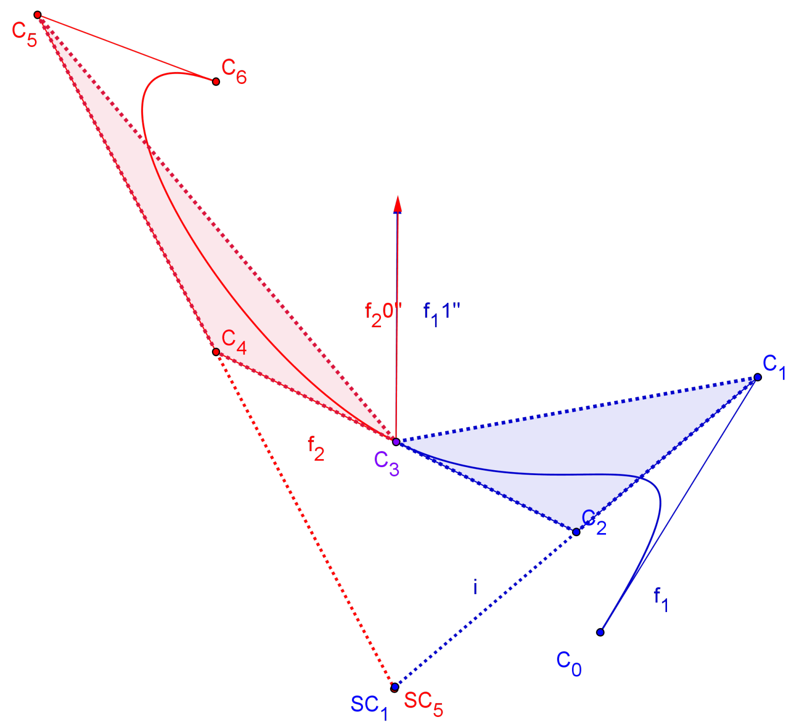


Abbildung: $SC_1 = SC_5$. SC_1 entsteht durch Spiegelung von C_1 am Punkt C_2. SC_5 ist der Spiegelpunkt von C_5 bzgl. C_4.

Bézier-Splines: zusammengesetzte Kurven

Kriterium für Übereinstimmung der Beschleunigungsvektoren an der Anschluss-Stelle

Bemerkung

Der Beweis zeigt, dass die Bedingung für Übereinstimmung der Beschleunigungsvektoren unabhängig von der Bedingung für die Übereinstimmung der Geschwindigkeitsvektoren ist.