Mathematik in Medien und Informatik

Koordinatensysteme und Vektorrechnung

5

Prof. Dr. Thomas Schneider

Stand: 05.10.2022

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Inhalt

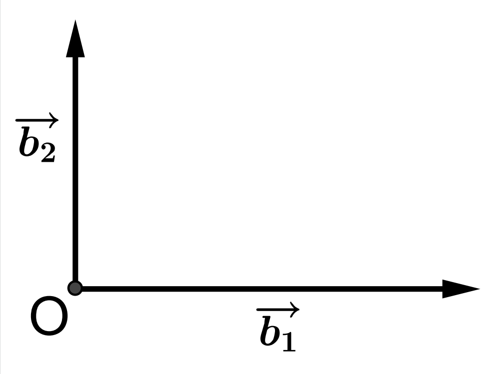
Koordinatensysteme

Koordinatensysteme der Ebene

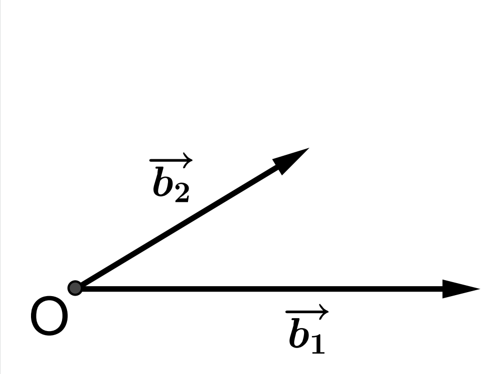
Definition:

Es sei O ein Punkt der Ebene, $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$ seien vom Nullvektor verschiedene Vektoren, die keine Vielfachen voneinander sind. Dann heißt $K = \left(O; \vec{b_1}, \vec{b_2}\right)$ **Koordinatensystem der Ebene** mit **Koordinatenursprung** O und **Vektorbasis** $\left(\vec{b_1}, \vec{b_2}\right)$

Beispiele



oder



Koordinatensysteme
Koordinatendarstellung von Punkten

Eindeutige Darstellung:

Wenn ein Koordinatensystem $K = \left(O; \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right)$ und ein Punkt P in der Ebene fest gewählt sind, so gibt es **eindeutig bestimmte** Skalare p_1 und p_2 so, dass

$$P = O + p_1 \overrightarrow{b_1} + p_2 \overrightarrow{b_2} \qquad \text{gilt.}$$

Koordinaten – Bezeichnungsweise

Wenn die Gleichung $P = O + p_1 \overrightarrow{b_1} + p_2 \overrightarrow{b_2}$ erfüllt ist,

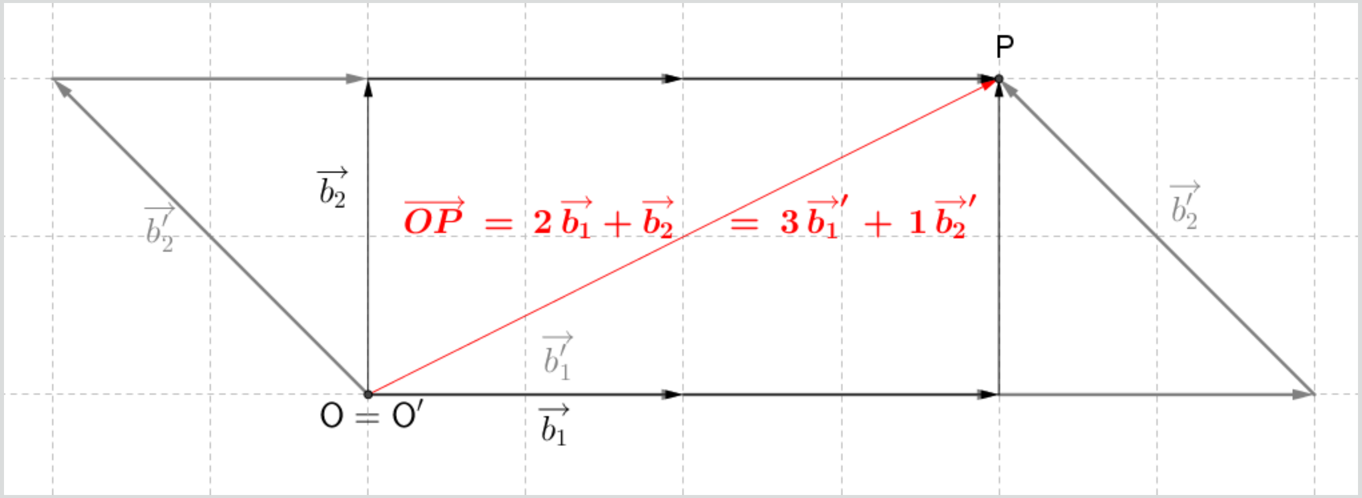
- so $\left\{ \begin{matrix} \text{heißt} \\ \text{heißen} \end{matrix} \right\}$ (p_1, p_2) $\left\{ \begin{matrix} \text{Koordinatenpaar} \\ \text{Koordinaten} \end{matrix} \right\}$

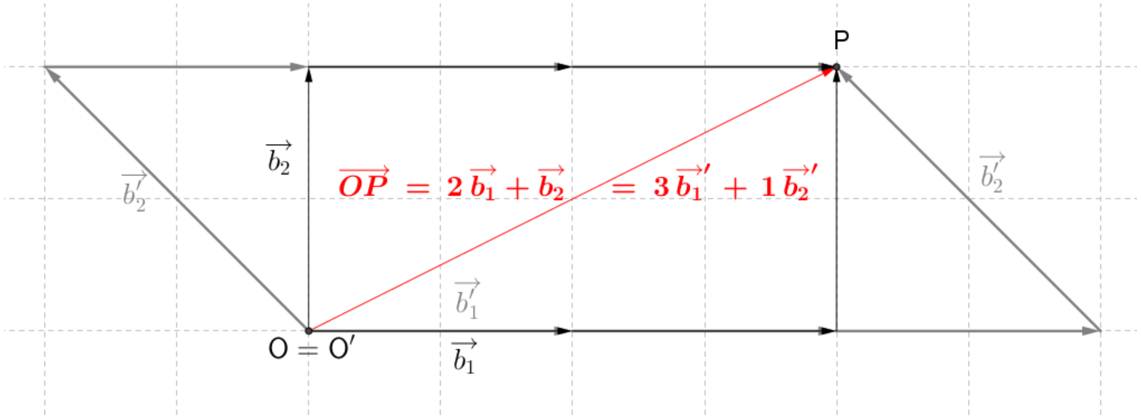
  des Punkts P bezüglich des Koordinatensystems $K = \left(O; \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right)$,
- und wir schreiben $(P)_K = (p_1, p_2)$.

Beispiel:

Hier gilt: $K = \left(O, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right)$, $P = O + 2\,\overrightarrow{b_1} + 1\,\overrightarrow{b_2}$,
$\rightsquigarrow (P)_K = (2, 1)$

Andererseits: $K' = \left(O, \overrightarrow{b_1}', \overrightarrow{b_2}'\right)$ $P = O + 3\,\overrightarrow{b_1}' + 1\,\overrightarrow{b_2}'$
$\rightsquigarrow (P)_{K'} = (3, 1)$





Rechnerisch:

Die Beziehung zwischen den Koordinatensystemen K und K' stellen wir durch sogenannte **Beziehungsgleichungen** dar:

$$O' = O, \quad \vec{b_1}' = \vec{b_1}, \quad \vec{b_2}' = -1\,\vec{b_1} + 1\,\vec{b_2}.$$

Beziehungsgleichungen (Bgln):

$$O' = O, \quad \vec{b_1}' = \vec{b_1}, \quad \vec{b_2}' = -1\vec{b_1} + 1\vec{b_2}.$$

Weiterer Rechenweg

Gegeben ist: $P = O + 2\,\vec{b_1} + 1\,\vec{b_2}$

Gesucht ist: $P = O' + p_1'\,\vec{b_1}' + p_2'\,\vec{b_2}'$ (gesucht sind insbesondere p_1', p_2')

Aus den Bgln. : $P = O + p_1'\left(\vec{b_1}\right) + p_2'\left(-1\vec{b_1} + 1\vec{b_2}\right)$

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Koordinatensysteme

Wechsel des Koordinatensystems

Zwischenstand nach dem Einsetzen der Ausdrücke aus den BgIn.:

$$P = O + p'_1 \left(\vec{b_1}\right) + p'_2 \left(-1\vec{b_1} + 1\vec{b_2}\right)$$

Nutzung der Vektorraumgesetze

$$k\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = k\,\vec{u}+k\,\vec{v} \qquad \text{(V1)}$$

$$(k+l)\,\vec{u} = k\,\vec{u}+l\,\vec{u} \qquad \text{(V2)}$$

$$(k\cdot l)\,\vec{u} = k\left(l\,\vec{u}\right) \qquad \text{(V3)}$$

Aus : $P = O + p'_1 \left(\vec{b_1}\right) + p'_2 \left(-1\vec{b_1} + 1\vec{b_2}\right)$

folgt mit V1: $P = O + p'_1 \left(\vec{b_1}\right) + p'_2 \left(-1\vec{b_1}\right) + p'_2 \left(1\vec{b_2}\right)$

Anwendung von V3 ergibt: $P = O + p'_1 \left(\vec{b_1}\right) + \left(p'_2 \cdot (-1)\right) \vec{b_1} + \left(p'_2 \cdot 1\right) \vec{b_2}$

$= O + p'_1 \left(\vec{b_1}\right) + \left(-p'_2\right) \vec{b_1} + p'_2\,\vec{b_2}$

Anwendung von V2 ergibt: $P = O + \left(p'_1 + (-p'_2)\right) \vec{b_1} + p'_2\,\vec{b_2}$

$= O + \left(p'_1 - p'_2\right) \vec{b_1} + p'_2\,\vec{b_2}$

Schluss des Rechenwegs:

$$\begin{aligned} \text{Gegeben war:} \qquad & P = O + 2\,\vec{b_1} + 1\,\vec{b_2} \\ \text{Einsetzen der Bgln. ergab:} \qquad & P = O + \left(p_1' - p_2'\right)\,\vec{b_1} + p_2'\,\vec{b_2} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich $\rightsquigarrow$ Gleichungssystem:

Wegen der **Eindeutigkeit** der Darstellung des Punktes P bzgl. des Koordinatensystems K ist ein sogenannter **Koeffizientenvergleich** möglich.

Es muss gelten: $\left.\begin{aligned} p_1' - p_2' &= 2 \\ p_2' &= 1 \end{aligned}\right\} \to (p_1', p_2') = (3, 1).$

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

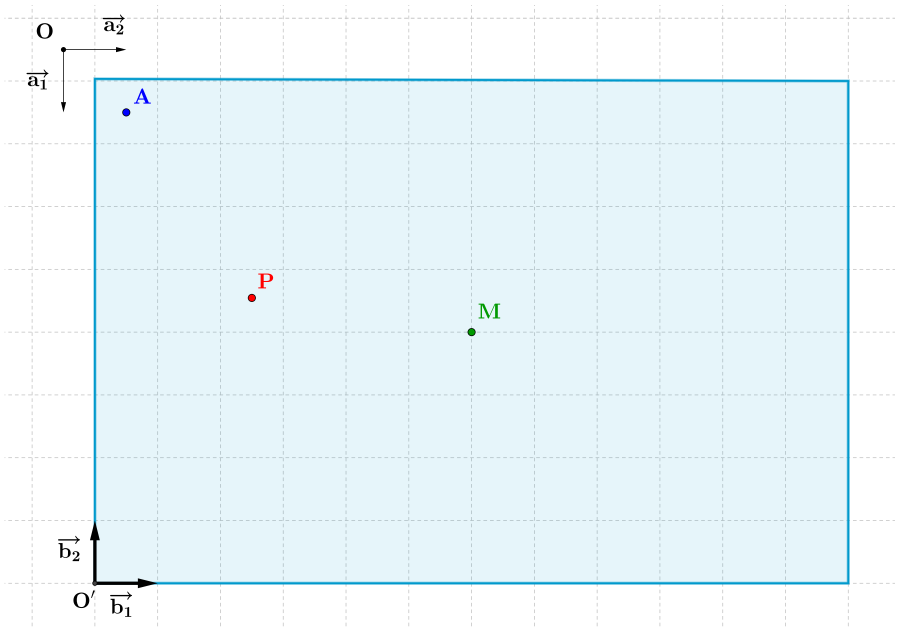
Koordinatensysteme

Beispiel: Koordinatensysteme am Bildschirm

Pixelkoordinaten und Standardkoordinaten

Für die Beschreibung der Lage von Punkten auf Bildschirmen sind zwei Koordinatensysteme üblich. Zur Erläuterung betrachten wir einen „Modellbildschirm“ mit einer Höhe von 8 Pixeleinheiten:

Bezüglich des Koordinatensystems $K = \left(O; \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right)$ hat der Punkt A die Koordinaten $(1, 1)$; bezüglich des anderen Koordinatensystems $K' = \left(O'; \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right)$ besitzt A die Koordinaten $(0.5, 7.5)$.

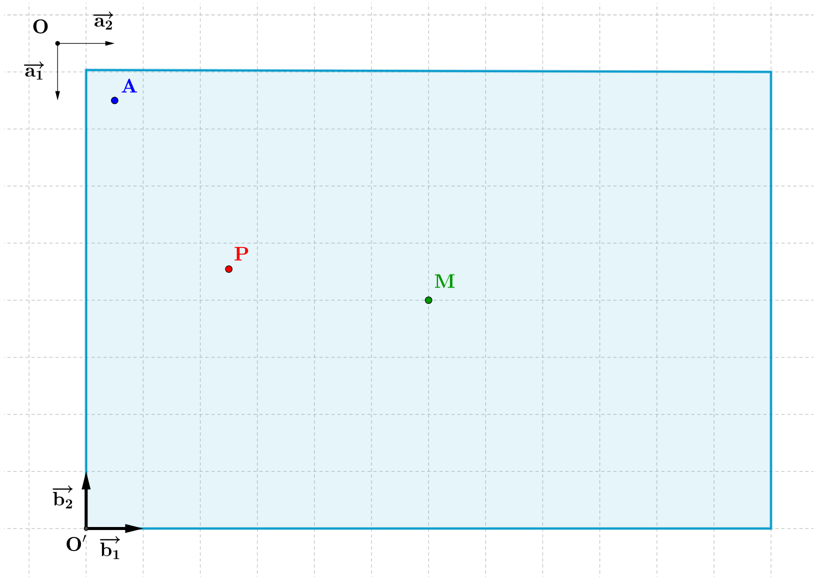


Koordinatensysteme

Beispiel: Koordinatensysteme am Bildschirm

Pixelkoordinaten und Standardkoordinaten

- Bestimmen Sie die Koordinaten (i, j) der Punkte P und M (Bildschirmmitelpunkt) bzgl. des Koordinatensystems $K = \left(O; \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right)$.
- Bestimmen Sie die Koordinaten (x, y) der Punkte P und M bzgl. des (Standard-)Koordinatensystems $K' = \left(O'; \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right)$.
- Geben Sie eine allgemeine Formel an, mit der man aus den Pixelkoordinaten (i, j) eines Punktes die zugehörigen Standardkoordinaten (x, y) dieses Punktes erhält.



Koordinatensysteme

Beispiel: Bewegte Koordinatensysteme

Hausübung, Teil 1:

- Gegeben sei ein (festes) kartesisches[1] Koordinatensystem $K = \left(O; \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right)$ in der Ebene und ein Punkt
$$P = O + 3\,\overrightarrow{a_1} + 1\,\overrightarrow{a_2}.$$
- Der Koordinatenursprung O_2 eines zweiten Koordinatensystems $K_2 = \left(O_2; \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right)$ bewege sich in $-\overrightarrow{a_1}$-Richtung, und zwar so, dass er in jeder Sekunde eine Wegstrecke zurücklegt, die halb so lang ist wie $\overrightarrow{a_1}$, d.h.
$$O_2 = O + \left(-\frac{t}{2\,\mathrm{s}}\right)\overrightarrow{a_1}.$$

1. Bestimmen Sie die Koordinaten $(P)_{K_2}$ des Punktes P zum Zeitpunkt $t = 7\,\mathrm{s}$.
2. Geben Sie eine allgemeine Formel für die Koordinaten $(P)_{K_2(t)} = \big(x(t), y(t)\big)$ des Punktes P zum Zeitpunkt t an.

[1] Vgl. die Definition im folgenden Abschnitt.

Hausübung, Teil 2:

- Bezüglich des festen kartesischen Koordinatensystem $K = \left(O;\, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right)$ hat der Punkt P die Darstellung
$$P = O + 3\,\overrightarrow{a_1} + 1\,\overrightarrow{a_2}.$$
- Ein Koordinatensystem $K_3 = \left(O;\, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right)$ habe die Eigenschaft, dass sich die Basisvektoren im Gegenuhrzeigersinn um den festen Koordinatenursprung O drehen, und zwar so, dass sie für je eine volle Umdrehung 4 Sekunden benötigen. Zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ gilt $\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{a_1}$ und $\overrightarrow{b_2} = \overrightarrow{a_2}$.
  1. Bestimmen Sie die Koordinaten $(P)_{K_3}$ des Punktes P zum Zeitpunkt $t = 7\,\text{s}$.
  2. Geben Sie eine allgemeine Formel für die Koordinaten $(P)_{K_3(t)} = \big(x(t), y(t)\big)$ des Punktes P zum Zeitpunkt t an.

Hausübung, Teil 3:

- Bezüglich des festen kartesischen Koordinatensystem $K = \left(O; \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right)$ hat der Punkt P die Darstellung
$$P = O + 3\,\overrightarrow{a_1} + 1\,\overrightarrow{a_2}.$$
- Ein Koordinatensystem $K_4 = \left(O_4; \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right)$ habe die folgenden Eigenschaften:
  - Der Koordinatenursprung O_4 bewege sich gemäß der Vorschrift
$$O_4(t) = O + \left(-\frac{t}{2\,\mathrm{s}}\right)\overrightarrow{a_1}.$$
  - Die Basisvektoren drehen sich im Gegenuhrzeigersinn um den (seinerseits bewegten[1]) Koordinatenursprung O_4, und zwar so, dass sie für je eine volle Umdrehung 4 Sekunden benötigen. Zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ gilt $\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{a_1}$ und $\overrightarrow{b_2} = \overrightarrow{a_2}$.

1. Bestimmen Sie die Koordinaten $(P)_{K_4}$ des Punktes P zum Zeitpunkt $t = 7\,\mathrm{s}$.
2. Geben Sie eine allgemeine Formel für die Koordinaten $(P)_{K_4(t)} = \big(x(t), y(t)\big)$ des Punktes P zum Zeitpunkt t an.

[1] Da wir Vektoren an jedem beliebigen Punkt anheften dürfen, wäre es ebenso richtig zu sagen, dass sich die Basisvektoren um den festen Koordinatenursprung O drehen.

Koordinatensysteme

Kartesische Koordinatensysteme

Definition:

Bei einem **kartesischen Koordinatensystem** $K = \left(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$ **in der Ebene** haben die Basisvektoren beide die **Länge** 1 und stehen **senkrecht** aufeinander.

Definition:

Bei einem **kartesischen Koordinatensystem** $K = \left(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ **im Raum** haben alle drei Basisvektoren die **Länge** 1 und stehen paarweise **senkrecht** aufeinander.

Bemerkung

Für metrische Fragen (Berechnung von Längen und Winkeln) sind kartesische Koordinatensysteme besonders günstig. Daher wollen wir im Folgenden kartesische Koordinatensysteme verwenden bzw. voraussetzen.

Vereinbarung zur Notation von Objekten der Ebene

Im Folgenden nehmen wir stets an, dass in der Ebene jeweils **ein festes kartesisches Koordinatensystem** $K = \left(O; \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ gegeben ist. Anstelle der Notation

$$(P)_K = (p_1, p_2) \quad \text{bzw.} \quad \left(\vec{v}\right)_K = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

gestatten wir uns ab jetzt auch die vereinfachte Darstellung

$$P = (p_1, p_2) \quad \text{bzw.} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Vereinbarung zur Notation von Objekten im Raum

Im Folgenden nehmen wir stets an, dass im Raum jeweils **ein festes kartesisches Koordinatensystem** $K = \left(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ gegeben ist. Anstelle der Notation

$$(P)_K = (p_1, p_2, p_3) \quad \text{bzw.} \quad \left(\vec{v}\right)_K = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

gestatten wir uns ab jetzt auch die vereinfachte Darstellung

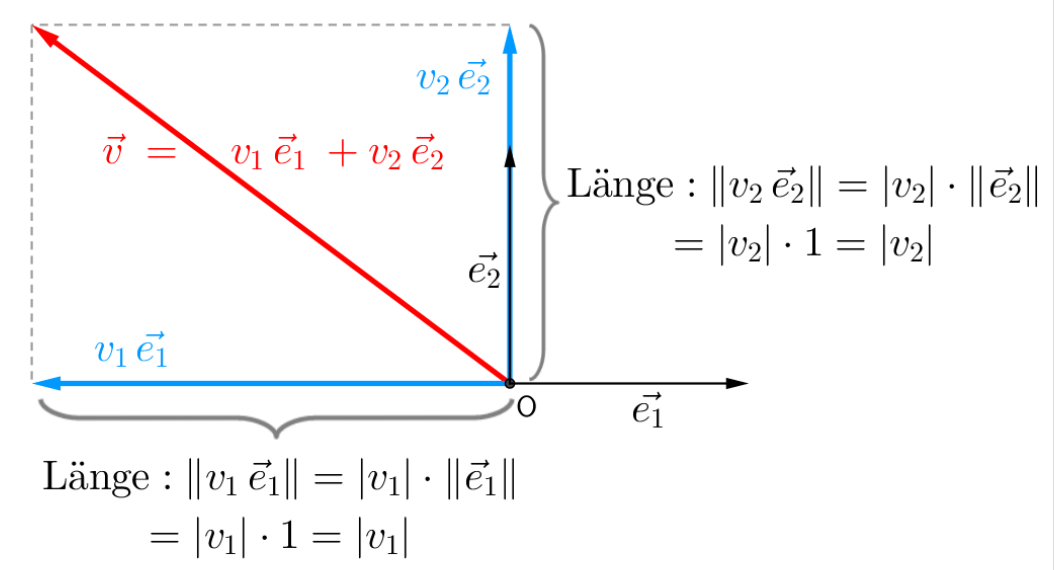
$$P = (p_1, p_2, p_3) \quad \text{bzw.} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Vektorrechnung

Länge von Vektoren, Abstand von Punkten

Länge von Vektoren

- Sei $K = \left(0; \vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$ ein kartesisches Koordinatensystem (s. Folie 13).
- Für den Vektor $\vec{v}$ gelte $\vec{v} = v_1\,\vec{e}_1 + v_2\,\vec{e}_2$, d.h. $\left(\vec{v}\right)_K = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.



- Dann ist die Länge (Norm) $\|\vec{v}\|$ von $\vec{v}$ nach dem Satz von Pythagoras (vgl. Skizze) gegeben durch

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Merke

- Es sei $K = \left(0; \vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$ ein kartesisches Koordinatensystem der Ebene und $\left(\vec{v}\right)$ ein Vektor der Ebene mit $\left(\vec{v}\right)_K = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Dann gilt:
- $\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$ bzw. $\boxed{\|\vec{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2}$.
- Es sei $K = \left(0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ ein kartesisches Koordinatensystem des (dreidimensionalen) Raums und $\left(\vec{v}\right)$ ein Vektor im Raum mit $\left(\vec{v}\right)_K = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Dann gilt:
- $\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$ bzw. $\boxed{\|\vec{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

Vektorrechnung

Länge von Vektoren

Sätzchen

Es sei $\vec{v}$ ein Vektor der Ebene oder des Raums und k ein Skalar.
Dann gilt

$$\|k\,\vec{v}\| = |k|\;\|\vec{v}\|\,.$$

Begründung für den ebenen Fall:

Mit $(k\,\vec{v})_K = \begin{pmatrix} k\,v_1 \\ k\,v_2 \end{pmatrix}$ folgt

$$\begin{aligned}
\|k\vec{v}\| &= \sqrt{(k\,v_1)^2 + (k\,v_2)^2} \\
&= \sqrt{k^2\,\left(v_1^2 + v_2^2\right)} \\
&= \sqrt{k^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \\
&= |k|\;\|\vec{v}\|
\end{aligned}$$

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Einheitsvektoren und Normierung

Ein **Einheitsvektor** ist ein Vektor mit Länge 1.

Wenn ein Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ der Ebene oder des Raums gegeben ist, so erhält man einen Einheitsvektor $\hat{v}$, der in die gleiche Richtung zeigt wie $\vec{v}$, durch die sogenannte **Normierung**:

$$\hat{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\,\vec{v}.$$

Begründung (mit dem Ergebnis der vorigen Folie):

$$\begin{aligned} \|\hat{v}\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{v}\|}\,\vec{v} \right\| &= \left| \frac{1}{\|\vec{v}\|} \right| \cdot \|\vec{v}\| \\ &= \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \|\vec{v}\| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Vektorrechnung

Länge von Vektoren

Hörsaalübung:

Es sei $\vec{v} = -\frac{1}{2}\binom{4}{-3}$. Bestimmen Sie die Länge $\|\vec{v}\|$ dieses Vektors sowie die beiden Einheitsvektoren

$$\hat{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\,\vec{v} \quad \text{und} \quad \hat{v}' = -\frac{1}{\|\vec{v}\|}\,\vec{v}.$$

Vektorrechnung

Länge von Vektoren

Hörsaalübung – Lösung:

Für $\vec{v} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist

$$\|\vec{v}\| = \left|-\tfrac{1}{2}\right| \cdot \left\|\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right\| = \tfrac{1}{2}\sqrt{4^2 + (-3)^2} = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{25} = \tfrac{5}{2} = 2.5.$$

Somit ist

$$\hat{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\,\vec{v} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\hat{v}' = -\frac{1}{\|\vec{v}\|}\,\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Probe:

$$\|\hat{v}\| = \sqrt{\left(\tfrac{4}{5}\right)^2 + \left(-\tfrac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{16+9}{25}} = 1,$$

$$\|\hat{v}'\| = \sqrt{\left(-\tfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{16+9}{25}} = 1.$$

Abstand zweier Punkte

Seien P, Q Punkte in der Ebene mit $(P)_K = (p_1, p_2)$, $(Q)_K = (q_1, q_2)$ bzw. im Raum mit $(P)_K = (p_1, p_2, p_3)$, $(Q)_K = (q_1, q_2, q_3)$ Dann gilt für den Abstand $d(P, Q)$ der beiden Punkte die Beziehung

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \left\| \overrightarrow{PQ} \right\| \\ &= \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} \quad \text{bzw.} \end{aligned}$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

Begründung anhand der Skizze:

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$$

$$\leadsto \quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} + \left(-\overrightarrow{OP}\right)$$

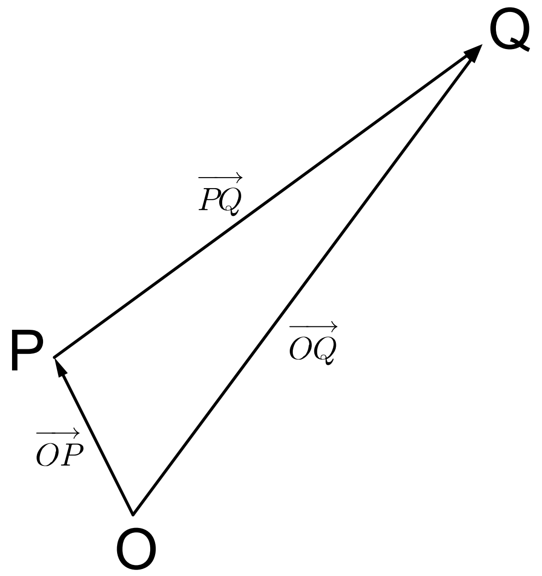
$$\leadsto \quad \left(\overrightarrow{PQ}\right)_K = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p_1 \\ -p_2 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \quad \boxed{\left(\vec{PQ}\right)_K = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}}$$

bzw.

$$\left(\overrightarrow{PQ}\right)_K = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p_1 \\ -p_2 \\ -p_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\left(\vec{PQ}\right)_K = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}}$$



Hörsaalübung

Berechnen Sie den Abstand $d(P, Q)$ der Punkte

$$P = (5, 1, 3) \quad \text{und} \quad Q = (-3, -3, 2)$$

im Raum.

Hörsaalübung – Lösung

- Der Vektor
$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
hat die Länge
$$\left\| \overrightarrow{QP} \right\| = \sqrt{8^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{81} = 9,$$
- also gilt $d(Q, P) = 9$.
- Da für je zwei Punkte P und Q **immer** $d(P, Q) = d(Q, P)$ gilt, liefert die oben durchgeführten Rechnung auch $d(P, Q) = 9$.

HOCHSCHULE FURTWANGEN UNIVERSITY HFU

Definition:

Es sei K ein kartesisches Koordinatensystem der Ebene bzw. des Raums, vgl. Folie 13.

- Für Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ **der Ebene** mit $(\vec{u})_K = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ und $(\vec{v})_K = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ sei der Ausdruck $\vec{u} \cdot \vec{v}$ wie folgt erklärt:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} \;:=\; u_1 \cdot v_1 \,+\, u_2 \cdot v_2\,.}$$

- Für Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ **im Raum** mit $(\vec{u})_K = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $(\vec{v})_K = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ soll gelten:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} \;:=\; u_1 \cdot v_1 \,+\, u_2 \cdot v_2 \,+\, u_3 \cdot v_3\,.}$$

In beiden Fällen heißt $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **Skalarprodukt** der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Vektorrechnung

Skalarprodukt von Vektoren

Kleine Hörsaalübung:

Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Achtung

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ ist eine Zahl, kein Vektor!

Vektorrechnung

Skalarprodukt von Vektoren

Kleine Hörsaalübung – Lösung:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + (-4) \cdot (-2) + 0 \cdot 5 = 10$$

Achtung

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ ist eine Zahl, kein Vektor!

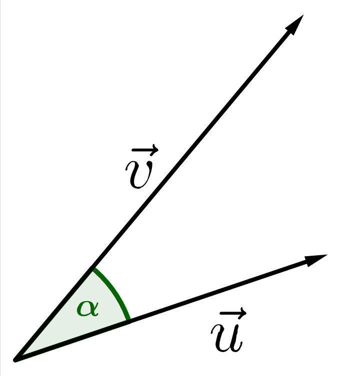
Anwendungen des Skalarprodukts:

(i) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \left\{ \begin{matrix} u_1^2 + u_2^2 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \end{matrix} \right\} = \|\vec{u}\|^2$, vgl. Folie 17.

(ii) Für $\vec{u} \neq \vec{0}$ und $\vec{v} \neq \vec{0}$ gilt

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha).$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}}.$$



(iii) Genau dann, wenn die Vektoren $\vec{u} \neq \vec{0}$ und $\vec{v} \neq \vec{0}$ **aufeinander senkrecht stehen**, gilt $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Wir schreiben in diesem Fall zur Abkürzung auch $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Ende der Sitzung am 10.11.2020

Hörsaalübung:

Es seien Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ im (dreidimensionalen) Raum gegeben. Berechnen Sie den von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eingeschlossenen Winkel α.

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Vektorrechnung

Skalarprodukt von Vektoren

Hörsaalübung – Lösung:

Es seien Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ im (dreidimensionalen) Raum gegeben. Berechnen Sie den von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eingeschlossenen Winkel α.

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

$$\rightsquigarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{(2 \cdot 1) + (-1 \cdot 1) + (1 \cdot 2)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{2 - 1 + 2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\rightsquigarrow \quad \alpha = 60^\circ$$

Eigenschaften des Skalarprodukts:

(i) Für alle Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gilt
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$
Man nennt dies die **Symmetrie-**Eigenschaft des Skalarprodukts.

(ii) Für alle Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gilt
$$\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$
sowie
$$\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

(iii) Für alle Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ und alle Skalare k gilt
$$\left(k\,\vec{u}\right) \cdot \vec{v} = k\,\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) = \vec{u} \cdot \left(k\,\vec{v}\right)$$

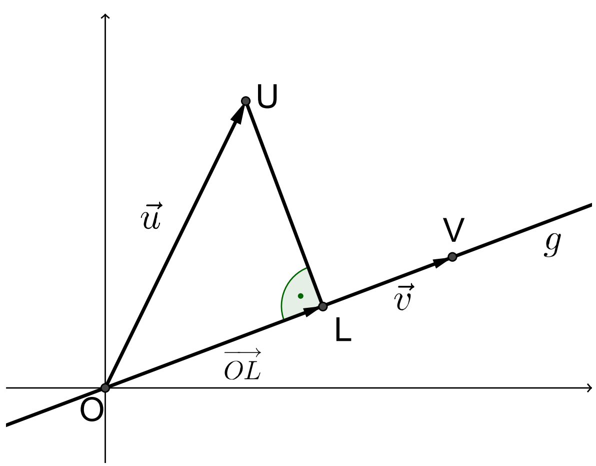
(iv) Für alle $\vec{u}$ gilt $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$, und es ist $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ genau dann, wenn $\vec{u} = \vec{0}$ gilt.

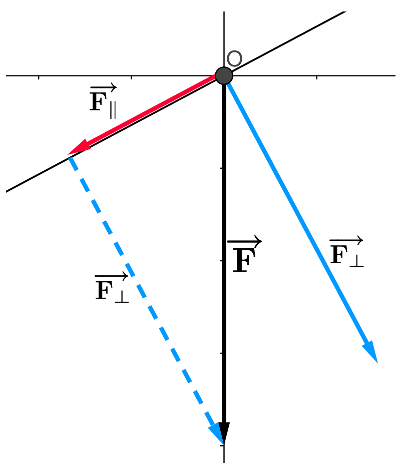
Die Eigenschaften (ii) und (iii) fasst man unter dem Begriff **Bilinearität** des Skalarprodukts zusammen.

Problemstellungen

Wir betrachten im Folgenden drei miteinander verwandte Problemstellungen:

- Bestimmung des **Abstands eines Punktes** U von einer Ursprungsgeraden g.
- **Zerlegung eines Vektors** $\vec{F}$ in zwei Anteile **(orthogonale Komponenten)**: $\vec{F} = \overrightarrow{F_{\|}} + \overrightarrow{F_{\perp}}$, wobei $\overrightarrow{F_{\|}}$ parallel zu einer vorgegebenen Richtung sein soll und $\overrightarrow{F_{\perp}}$ senkrecht dazu.
- Bestimmung der **orthogonalen Projektion** eines Vektors $\vec{u}$ auf eine (Ursprungs)-gerade g.





Vektorrechnung

Zerlegung von Vektoren in orthogonale Komponenten

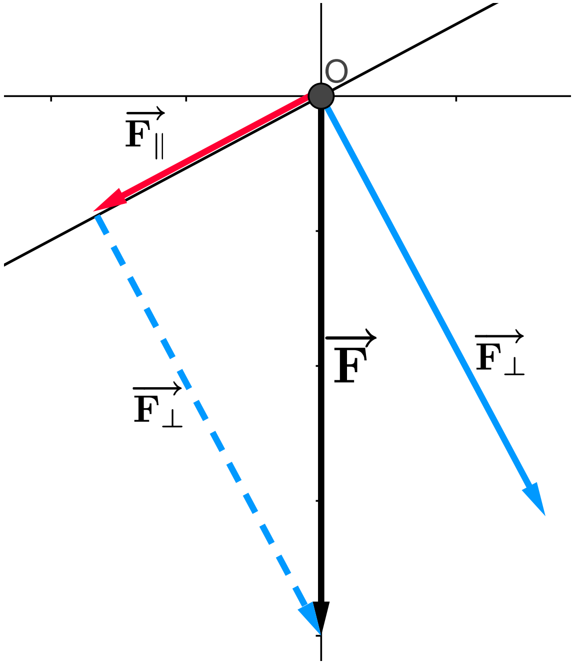
Anwendungsbeispiel: Masse auf schiefer Ebene

Eine schiefe Ebene werde dargestellt durch eine Ursprungsgerade g. Ein Massenpunkt befindet sich im Koordinatenursprung O, dort sei der Vektor $\vec{F}$ der Gewichtskraft angeheftet.

Wir suchen eine **Zerlegung** dieses Vektors in

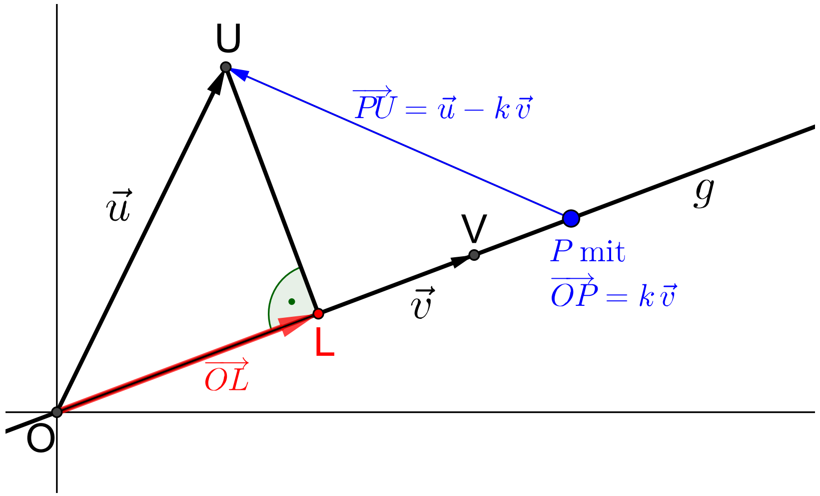
- eine Komponente $\overrightarrow{F_{\|}}$ **parallel** zur Geraden g und
- eine zweite Komponente $\overrightarrow{F_{\perp}}$ **senkrecht** zur Geraden g.

In diesem Beispiel ist $\overrightarrow{F_{\|}}$ die *Hangabtriebskraft*, durch sie wird die Masse beschleunigt, während die Komponente $\overrightarrow{F_{\perp}}$ durch eine Normalkraft der Ebene ausgeglichen wird.



Problemstellung:

Es sei V ein Punkt mit Ortsvektor $\vec{v}$, und es sei g die Ursprungsgerade durch V. Es sei ferner U einer (weiterer) Punkt mit Ortsvektor $\vec{u}$. Gesucht ist der Abstand $d := d(U, g)$ des Punktes U von der Geraden g:

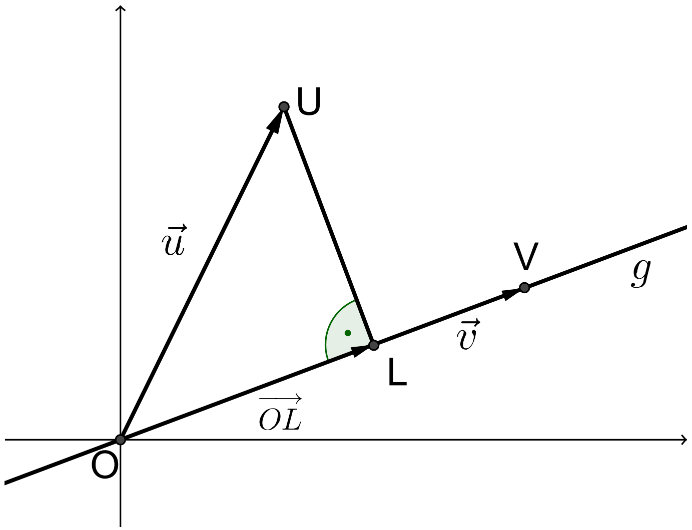


Zur Definition des Abstands:

- Unter allen Punkten P auf der Geraden mit Ortsvektoren $\overrightarrow{OP} = k\,\vec{v}$ wird derjenige verwendet, für den der Differenzvektor

$$\overrightarrow{PU} = u - k\,\vec{v}$$

  senkrecht auf der Geraden g steht. Dieser Punkt heißt **Lotfußpunkt**.
- Der **Abstand** des Punktes U von der Geraden g ist erklärt als der Abstand von U zum Lotfußpunkt L.
- Man kann beweisen, dass die Entfernung $d = \left\|\overrightarrow{LU}\right\|$ unter allen Entfernungen $\left\|\overrightarrow{PU}\right\|$ **minimal** ist, vgl. Folie 40.



Der Abstand $d(U, g)$ ist erklärt als Abstand von U zum Lotfußpunkt L.

Lösung mit dem Skalarprodukt:

Wir bestimmen zunächst den Lotfußpunkt L und behaupten, dass der Ortsvektor $\vec{OL}$ durch die Gleichung

$$\vec{OL} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\right) \vec{v}$$

gegeben ist. Dann folgt $d = \left\|\vec{LU}\right\| = \left\|\vec{u} - \vec{OL}\right\|$

Vektorrechnung

Abstandsproblem und Zerlegung von Vektoren in orthogonale Komponenten

Hörsaalübung

Es seien gegeben ein kartesisches Koordinatensystem $(O; b_1, b_2)$, die Punkte U und V mit Koordinaten $(U)_K = (5,5)$ und $(V)_K = (2,1)$ sowie die Vektoren $\vec{u} := \overrightarrow{OU}$ und $\vec{v} := \overrightarrow{OV}$

- **Zeichnen Sie** die Punkte U und V, die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sowie die Gerade g, welche die Punkte O und V verbindet.
- **Fällen Sie** das Lot vom Punkt U auf die Gerade g, den zugehörigen Lotfußpunkt nennen Sie L.
- **Zeichnen Sie** den Verbindungspfeil $\overrightarrow{OL}$.
- **Berechnen Sie** den Vektor $\vec{u}_{\parallel} := \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,\vec{v}$ und **überzeugen Sie sich** durch Vergleich mit Ihrer Zeichnung, dass $\vec{u}_{\parallel} = \overrightarrow{OL}$ gilt.
- **Berechnen Sie** den Vektor $\vec{u}_{\perp} := \overrightarrow{LU} = \vec{u} - \vec{u}_{\parallel}$ und **prüfen Sie** nach, dass $\vec{u}_{\perp}$ tatsächlich senkrecht zu $\vec{v}$ und damit zu g ist.
- **Berechnen Sie** den Abstand $d(U, g) = \|\vec{u}_{\perp}\|$, runden Sie diesen (möglichst im Kopf) auf eine Nachkommastelle und vergleichen Sie den Wert mit Ihrer Skizze.

Vektorrechnung

Abstandsproblem und Zerlegung von Vektoren in orthogonale Komponenten

Begründung

a) Um sicher zu sein, dass die auf Folie 36 vorgestellte Formel stimmt, müssen wir uns davon überzeugen, dass der Vektor $\vec{OL} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\vec{v}$ tatächlich den **Lotfußpunkt** beschreibt. Das heißt ja nichts anderes als dass der Differenzvektor

$$\overrightarrow{LU} = \vec{u} - \overrightarrow{OL} = \vec{u} - \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\vec{v}$$

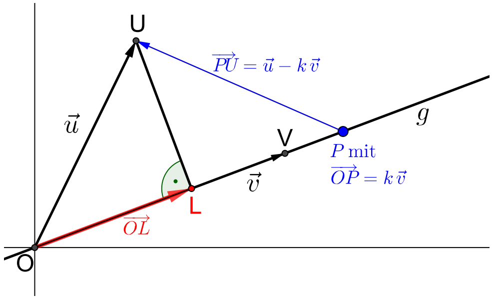
senkrecht auf $\vec{v}$ steht.

b) Wir rechnen dies nach unter Verwendung der Eigenschaften des Skalarproduktes, vgl. Folien 29 und 32:

c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{LU}\cdot\vec{v} &= \left(\vec{u} - \overrightarrow{OL}\right)\cdot\vec{v} = \left(\vec{u} - \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\vec{v}\right)\cdot\vec{v} \\
&= \vec{u}\cdot\vec{v} - \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}\right)\cdot\vec{v} \\
&= \vec{u}\cdot\vec{v} - \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right) \\
&= \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\vec{v}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right) = \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\vec{v} \\
&= 0
\end{aligned}$$

d) Bemerkung: Wegen $\vec{v}\cdot\vec{v} = \|\vec{v}\|^2$ gilt auch $\vec{OL} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v}$.



Schlussfolgerungen:

a) Wir haben also gesehen, dass $\vec{OL} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,\vec{v}$ der Ortsvektors des Punktes L ist, den man erhält, wenn man von U aus *„das Lot auf die Gerade g fällt“*. Diese Sprechweise bedeutet: Man bestimmt den Schnittpunkt von g mit derjenigen Geraden durch U, die senkrecht (orthogonal) auf g steht.

b) Wir nennen den Vektor $\vec{OL}$ die **orthogonale Projektion** von $\vec{u}$ auf g. Da $\vec{OL}$ **parallel** zur Geraden g ist, schreiben wir auch $\vec{u}_{\|}$ oder $\vec{u}_{\|g}$ für $\vec{OL}$.

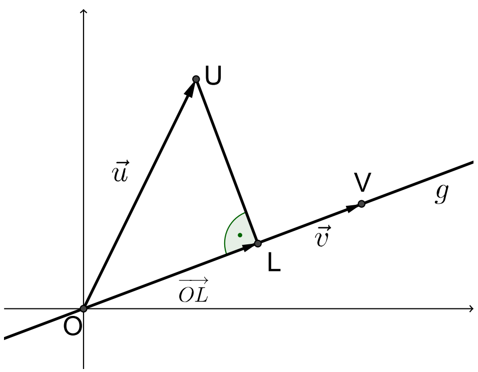
c) Gleichzeitig haben wir gesehen, dass

$$\overrightarrow{LU} = \vec{u} - \overrightarrow{OL}$$

senkrecht auf $\vec{v}$ bzw. auf g steht. Wir schreiben daher auch

$$\vec{u}_{\perp} := \vec{u}_{\perp g} := \vec{u} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,\vec{v}.$$

e) Mit $\vec{u} = \vec{u}_{\|} + \vec{u}_{\perp}$ liegt nun eine Zerlegung von $\vec{u}$ in orthogonale Komponenten vor.



Vektorrechnung

Abstandsproblem und Zerlegung von Vektoren in orthogonale Komponenten

Weiterführende Hausübung – Minimimaleigenschaft des orthogonalen Abstands:

Es seien zwei (voneinander linear unabhängige) Vektoren $\vec{u} = \binom{u_1}{u_2}$ und $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ gegeben. Beweisen Sie (zum Beispiel mit den Mitteln der Differentialrechnung, die Sie in der Schule gelernt haben), dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit

$$f(k) = \|\vec{u} - k\,\vec{v}\|^2$$

ein globales Minimum bei demjenigen Wert k^* annimmt, für den $\vec{u} - k^*\,\vec{v}$ **senkrecht** auf $\vec{v}$ steht.

Hinweis: Nutzen Sie die Beziehung

$$f(k) = \|\vec{u} - k\,\vec{v}\|^2 = \left(\vec{u} - k\,\vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} - k\,\vec{v}\right)$$

und multiplizieren Sie deren rechte Seite aus, bevor Sie die Funktion f ableiten.

Definition:

Es sei K ein kartesisches Koordinatensystem des Raumes und es seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Vektoren im Raum mit

$$\left(\vec{u}\right)_K = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \left(\vec{v}\right)_K = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Dann setzen wir

$$\vec{u} \times \vec{v} := \begin{pmatrix} u_2\,v_3 - u_3\,v_2 \\ u_3\,v_1 - u_1\,v_3 \\ u_1\,v_2 - u_2\,v_1 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ heißt **Kreuzprodukt** oder **Vektorprodukt** von $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Vektorrechnung

Kreuzprodukt von Vektoren im Raum

Merkhilfe:

$$\begin{array}{cc} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} +{\color{blue}u_2 v_3 - u_3 v_2} \\ +{\color{red}u_3 v_1 - u_1 v_3} \\ +{\color{olive}u_1 v_2 - u_2 v_1} \end{pmatrix}$$

Eigenschaften des Kreuzprodukts:

(i) $\vec{v} \times \vec{u} = -\left(\vec{u} \times \vec{v}\right)$.

(ii) Für $\vec{u} \neq \vec{0}$ und $\vec{v} \neq \vec{0}$ ist $\vec{u} \times \vec{v}$ ein Vektor, der sowohl auf $\vec{u}$ als auch auf $\vec{v}$ **senkrecht steht**.

Das heißt: $\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \cdot \vec{u} = 0$ und $\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \cdot \vec{v} = 0$.
(vgl. Punkt (iii) auf Folie 29).

(iii) Rechte-Hand-Regel[1]:

Daumen in $\vec{u}$-Richtung
Zeigefinger in $\vec{v}$-Richtung $\rightsquigarrow$ Mittelfinger in $\vec{u} \times \vec{v}$-Richtung.

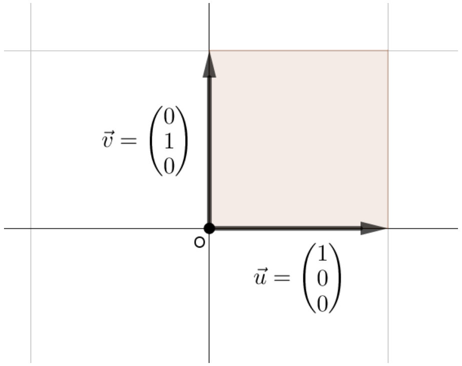
(iv) $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ entspricht dem **Flächeninhalt** des von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten **Parallelogramms**.

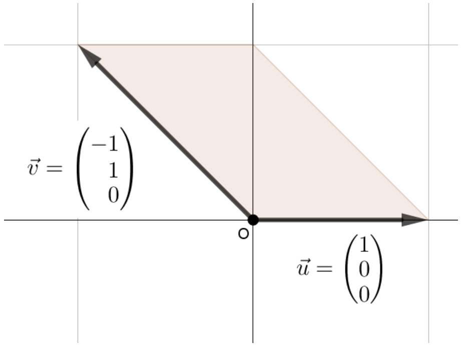
[1] Die Rechte-Hand-Regel gilt (nur) unter der Voraussetzung, dass das verwendete Koordinatensystem **rechtshändig** ist.

Zur Interpretation von $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ als Flächeninhalt:

1. Für
$$\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$
ist
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \|\vec{u} \times \vec{v}\| = 1\,.$$

2. Für
$$\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$
ist
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \|\vec{u} \times \vec{v}\| = 1\,.$$





Bemerkungen zur Interpretation von $||\vec{u} \times \vec{v}||$ als Flächeninhalt:

Für die Länge des Vektors $\vec{u} \times \vec{v}$ gilt:

$$\begin{aligned}
||\vec{u} \times \vec{v}||^2 &= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 - \big(\vec{u} \cdot \vec{v}\big)^2 \text{ (siehe Übungen)} \\
&= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 - \big(||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos(\alpha)\big)^2 \text{ (siehe Folie 29)} \\
&= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 \cdot \underbrace{\big(1 - \cos^2(\alpha)\big)}_{\sin^2(\alpha)} \\
&= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 \cdot \sin^2(\alpha).
\end{aligned}$$

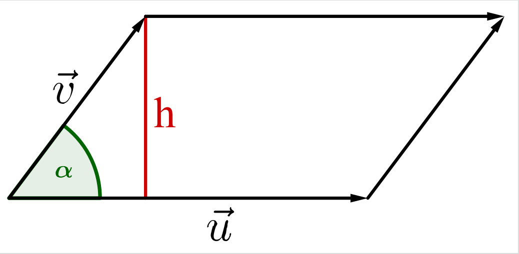
Bemerkungen zur Interpretation von $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ als Flächeninhalt:

Für $0 \leqslant \alpha \leqslant 180°$ ist $\sin(\alpha) \geqslant 0$.

$$\Rightarrow \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\alpha).$$

Veranschaulichung:

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{||\vec{v}||}$$

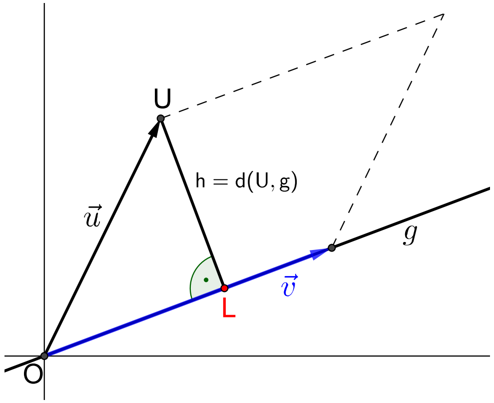


$$\begin{aligned}\Rightarrow A = \|\vec{u}\| \cdot h &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\alpha)\\ &= \|\vec{u} \times \vec{v}\|\end{aligned}$$

Hörsaalübung:

Sei $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, und sei α der von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eingeschlossene Winkel.

- Berechnen Sie den Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$, und dessen Länge $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$.
- Verwenden Sie die Beziehung $\boxed{\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\alpha)}$, um den Wert von $\sin(\alpha)$ zu bestimmen. Können Sie hieraus den Winkel α (eindeutig) ermitteln?
- Betrachten Sie die Skizze und berechnen Sie den Abstand $d(U, g)$ unter Verwendung des Kreuzproduktes.



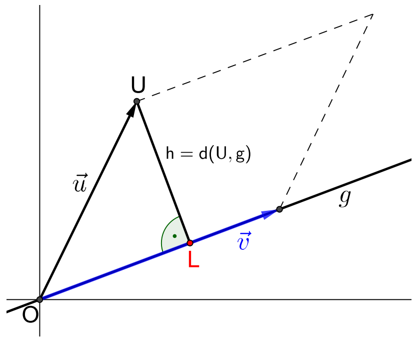
Hörsaalübung – Lösung:

- Es ist $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.
- Aus der geg. Gleichung folgt

$$\sin(\alpha) = \frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

  Der Wert des Winkels α ist nicht eindeutig festgelegt, denn für $\alpha = 60°$ und für $\alpha = 120°$ ergeben sich Parallelogramme gleichen Flächeninhalts.
- Für den Flächeninhalt A des Parallelogramms gilt $A = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{v}\| \cdot h$, also ist

$$h = \frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}.$$



Bemerkungen

- Wir haben das Skalarprodukt zweier Vektoren über deren Koordinatendarstellungen bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems $K = \left(O;\, \widehat{e_1},\, \widehat{e_2} \right)$ eingeführt:
- Falls $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die Darstellungen $\vec{u} = u_1\,\widehat{e_1} + u_2\,\widehat{e_2}$ bzw. $\vec{v} = v_1\,\widehat{e_1} + v_2\,\widehat{e_2}$ besitzen, ergeben sich die Koordinatenvektoren $\left(\vec{u}\right)_K = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ und $\left(\vec{v}\right)_K = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.
- Wir haben dann $\vec{u} \cdot \vec{v}$ durch die Gleichung

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

  definiert.
- Hieraus folgen die Bilinearitätseigenschaften des Skalarprodukts und die Gleichung $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$.
- Das Problem mit der obigen Definition ist, dass sie von einer speziellen Wahl des Koordinatensystems abhängt. Vektoren (in dem von uns definierten Sinne) können aber auch dann vorliegen, wenn noch gar kein Koordinatensystem erklärt ist.
- Man muss sich überlegen, wie das Skalarprodukt auszurechnen ist, wenn man die Koordinaten noch nicht kennt oder wenn man ein nicht kartesisches Koordinatensystem verwendet.

Alternative Definition des Skalarprodukts:

- Man kann das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ über die Gleichung

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$$

definieren, wobei α der von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eingeschlossene Winkel mit $0 \leq \alpha \leq 360^\circ$ ist; im Falle $\vec{u} = \vec{0}$ oder $\vec{v} = \vec{0}$ setzen wir $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

- Ganz offensichtlich ist dieses Produkt **symmetrisch**, d.h. für je zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gilt

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

- Man kann ferner (mit etwas Mühe) zeigen, dass die Bilinearitätseigenschaften[1] erfüllt sind. D.h.,

  (i) für alle Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gilt

  $$\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

  sowie

  $$\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w};$$

  (ii) für alle Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ und alle Skalare k gilt

  $$\left(k\,\vec{u}\right) \cdot \vec{v} = k\,\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) = \vec{u} \cdot \left(k\,\vec{v}\right).$$

[1] Vgl. Folie 32.

Vektorrechnung

Skalarprodukt und Koordinatenwechsel

Darstellung des Skalarprodukts in Koordinaten:

Es sei eine Vektorbasis $B = \left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right)$ gegeben, und es gelte

$$\vec{u} \;=\; u_1\,\overrightarrow{b_1} + u_2\,\overrightarrow{b_2} \quad \text{und} \quad \vec{v} = v_1\,\overrightarrow{b_1} + v_2\,\overrightarrow{b_2}.$$

Mit den Bilinearitäts- und Symmetrieeigenschaften folgt

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= \left(u_1\,\overrightarrow{b_1} + u_2\,\overrightarrow{b_2}\right)\cdot\left(v_1\,\overrightarrow{b_1} + v_2\,\overrightarrow{b_2}\right)\\
&= \left(u_1\,\overrightarrow{b_1}\right)\cdot\left(v_1\,\overrightarrow{b_1} + v_2\,\overrightarrow{b_2}\right) + \left(u_2\,\overrightarrow{b_2}\right)\cdot\left(v_1\,\overrightarrow{b_1} + v_2\,\overrightarrow{b_2}\right)\\
&= \left(u_1\,\overrightarrow{b_1}\right)\cdot\left(v_1\,\overrightarrow{b_1}\right) + \left(u_1\,\overrightarrow{b_1}\right)\cdot\left(v_2\,\overrightarrow{b_2}\right)\left(u_2\,\overrightarrow{b_2}\right)\cdot\left(v_1\,\overrightarrow{b_1}\right) + \left(u_2\,\overrightarrow{b_2}\right)\cdot\left(v_2\,\overrightarrow{b_2}\right)\\
&= (u_1\,v_1)\left(\overrightarrow{b_1}\cdot\overrightarrow{b_1}\right) + (u_1\,v_2)\left(\overrightarrow{b_1}\cdot\overrightarrow{b_2}\right) + (u_2\,v_1)\left(\overrightarrow{b_2}\cdot\overrightarrow{b_1}\right) + (u_2\,v_2)\left(\overrightarrow{b_2}\cdot\overrightarrow{b_2}\right)\\
&= (u_1\,v_1)\left(\overrightarrow{b_1}\cdot\overrightarrow{b_1}\right) + (u_1\,v_2 + u_2\,v_1)\left(\overrightarrow{b_1}\cdot\overrightarrow{b_2}\right) + (u_2\,v_2)\left(\overrightarrow{b_2}\cdot\overrightarrow{b_2}\right)
\end{aligned}$$

Wir verwenden die folgenden Abkürzungen:

$$E := \overrightarrow{b_1}\cdot\overrightarrow{b_1}, \quad F := \overrightarrow{b_1}\cdot\overrightarrow{b_2}, \quad G := \overrightarrow{b_2}\cdot\overrightarrow{b_2}.$$

Darstellung des Skalarprodukts in Koordinaten – Zusammenfassung:

Wenn ein Koordinatensystem mit Vektorbasis $B = \left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right)$ vorliegt und die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ bezüglich B die Darstellungen $\vec{u} = u_1\,\overrightarrow{b_1} + u_2\,\overrightarrow{b_2}$ bzw. $\vec{v} = v_1\,\overrightarrow{b_1} + v_2\,\overrightarrow{b_2}$ haben, so gilt:

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= (u_1\,v_1)\left(\overrightarrow{b_1}\cdot\overrightarrow{b_1}\right) + (u_1\,v_2 + u_2\,v_1)\left(\overrightarrow{b_1}\cdot\overrightarrow{b_2}\right) + (u_2\,v_2)\left(\overrightarrow{b_2}\cdot\overrightarrow{b_2}\right)\\ &= (u_1\,v_1)\,E + (u_1\,v_2 + u_2\,v_1)\,F + (u_2\,v_2)\,G.\end{aligned}$$

mit

$$E = \overrightarrow{b_1}\cdot\overrightarrow{b_1}, \quad F = \overrightarrow{b_1}\cdot\overrightarrow{b_2}, \quad G = \overrightarrow{b_2}\cdot\overrightarrow{b_2}.$$

Vorgriff: Matrixnotation – Gram-Matrix

Im Vorgriff auf ein späteres Kapitel[1] bemerken wir, dass man die Elemente E, F und G in der sogenannten Gram-Matrix $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ zusammenfassen und das Skalarprodukt mithilfe von Matrixmultiplikation wie folgt notieren kann:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_1, u_2)\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (u_1, u_2)\begin{pmatrix} E\,v_1 + F\,v_2 \\ F\,v_1 + G\,v_2 \end{pmatrix} = u_1\,(E\,v_1 + F\,v_2) + u_2\,(F\,v_1 + G\,v_2)\,.$$

[1] Solange Sie hiermit noch nichts anfangen können, dürfen Sie Sie diesen Textblock überspringen.

Konsequenz:

Bei einem kartesischen Koordinatensystem ist

$$\begin{aligned} E &= \overrightarrow{b_1} \cdot \overrightarrow{b_1} = \left\|\overrightarrow{b_1}\right\|^2 \cdot \cos(0^\circ) \cdot 1 = 1, \\ F &= \overrightarrow{b_1} \cdot \overrightarrow{b_2} = \left\|\overrightarrow{b_1}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{b_2}\right\| \cdot \cos(90^\circ) = 0, \\ G &= \overrightarrow{b_2} \cdot \overrightarrow{b_2} = \left\|\overrightarrow{b_2}\right\|^2 \cdot \cos(0^\circ) \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Darum ergibt sich für das Skalarprodukt im Falle eines kartesischen Koordinatensystems der Ausdruck

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (u_1\, v_1)\, E + (u_1\, v_2 + u_2\, v_1)\, F + (u_2\, v_2)\, G \\ &= (u_1\, v_1) \cdot 1 + (u_1\, v_2 + u_2\, v_1) \cdot 0 + (u_2\, v_2) \cdot 1 \\ &= u_1\, v_1 + u_2\, v_2 \end{aligned}$$

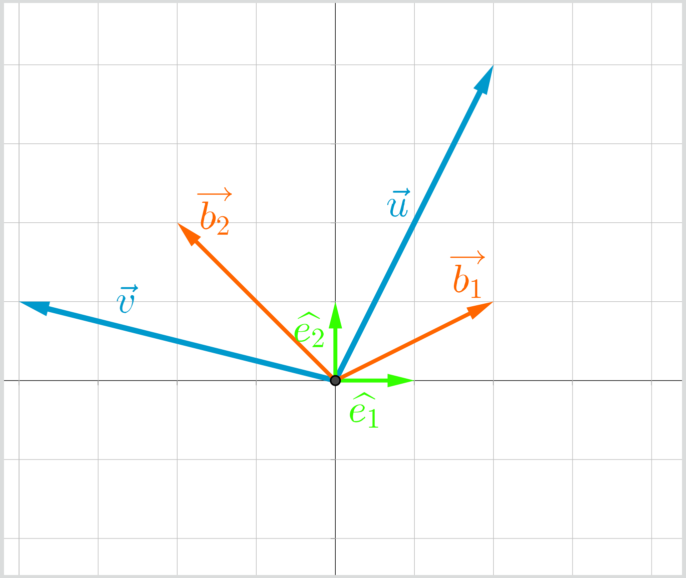
Vektorrechnung

Skalarprodukt und Koordinatenwechsel

Skalarprodukt und Koordinatenwechsel – Beispiel

Wir betrachten die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, die bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems mit Vektorbasis $B_1 = \left(\widehat{e_1}, \widehat{e_2}\right)$ die Darstellungen $\left(\vec{u}\right)_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\left(\vec{v}\right)_{B_1} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ haben sollen.

Ein zweites Koordinatensystem habe die Vektorbasis $B_2 = \left(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}\right)$ mit $\left(\overrightarrow{b_1}\right)_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\left(\overrightarrow{b_2}\right)_{B_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dann gilt $\vec{u} = 2\,\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2}$ und $\vec{v} = (-1)\,\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2}$, d.h. $\left(\vec{u}\right)_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\left(\vec{v}\right)_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Vektorrechnung

Skalarprodukt und Koordinatenwechsel

Skalarprodukt und Koordinatenwechsel – Beispiel

Unter Verwendung der kartesischen Koordinaten $\left(\vec{u}\right)_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\left(\vec{v}\right)_{B_1} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich für das Skalarprodukt $\vec{u} \cdot \vec{v}$ der Wert

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-4) + 4 \cdot 1 = -4.$$

Um die bzgl. B_2 gültigen Koordinatenvektoren $\left(\vec{u}\right)_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\left(\vec{v}\right)_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ verwenden zu können, müssen wir die Elemente

$$E = \overrightarrow{b_1} \cdot \overrightarrow{b_1} = 5, \quad F = \overrightarrow{b_1} \cdot \overrightarrow{b_2} = -2, \quad G = \overrightarrow{b_2} \cdot \overrightarrow{b_2} = 8$$

berechnen oder durch Messung bestimmen. Als Ergebnis erhalten wir mit den Formeln von Folie 52

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (u_1\, v_1)\, E + (u_1\, v_2 + u_2\, v_1)\, F + (u_2\, v_2)\, G \\ &= \big(2 \cdot (-1)\big) \cdot 5 + \big(2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1\big) \cdot (-2) + \big(1 \cdot 1\big) \cdot 8 \\ &= -10 + (-2) + 8 = -4 \quad \checkmark \end{aligned}$$