Dienstag, 5. Dezember 2023 09:47

2 Gleichungen, 2 Unbekannte: $\mathbb{R}^2$

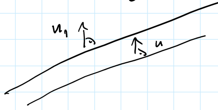
$$\begin{aligned} g_1&: \; 2x_1 - x_2 = 1 \\ g_2&: \; x_1 + x_2 = 5 \end{aligned}$$

Lösung Schnittpunkt der beiden Geraden

$\mathbb{L} = \{(2,3)\}$

Wann gibt es keine Lösung oder ∞ viele Lösungen?

Keine Lösung: Geraden sind ∥



$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + c &= 0 \qquad c_1 \neq c \\ ax_1 + bx_2 + c_1 &= 0 \end{aligned}$$

∞ viele Lösungen

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + c &= 0 \\ kax_1 + kbx_2 + kc &= 0 \end{aligned}$$

LGS mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten

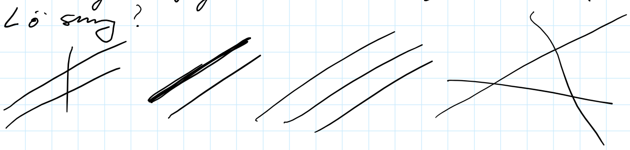
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - 6x_2 = -2 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

Geometrische Bedeutung der Zeilen: Ebenen im Raum

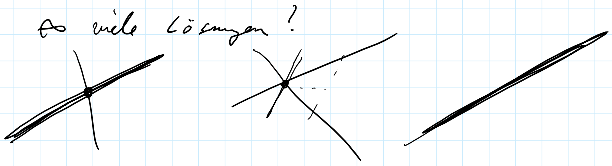
$\mathbb{L} = \{(1,1,2)\}$

Bei diesem Fall schneiden sich alle 3 Ebenen im einem Punkt $(1,1,2)$

Wann gibt es für 3 Gl. und 3 Unbekannte keine Lösung?



∞ viele Lösungen?



Gauß-Algorithmus

Fall mit eindeutiger Lösung

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - 6x_2 = -2 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauß-Algo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Koeffizientenmatrix (KM)

erweiterte KM (EKM)

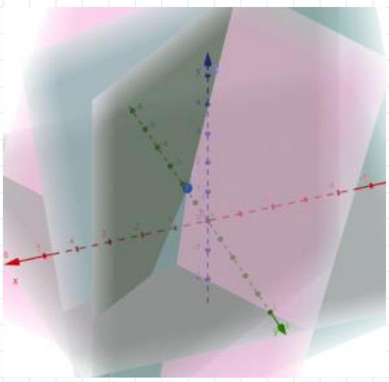
$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases} \qquad \mathbb{L} = \{(1,1,2)\}$$

1. Schritt: Führende 1 für x_1

$\frac{1}{2} z_1 \to z_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 5/2 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right)$$



2. Elimination von x_1 aus z_2 und z_3 mithilfe von Vielfachen der Zeile 1.

$?\,z_1 + z_2 \to z_2$

$?\,z_1 + z_3 \to z_3$

$-4 z_1 + z_2 \to z_2$

$2 z_1 + z_3 \to z_3$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{array}\right)$$

-4	-2	-2	-10	$-4z_1$ +
4	-6	0	-2	z_2
0	-8	-2	-12	

3. Führende 1 für x_2

$? z_2 \rightarrow z_2 \qquad -\frac{1}{8} z_2 \rightarrow z_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/4 & 3/2 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{array}\right)$$

4. Schritt
Elimination von x_2 mithilfe von Vielfachen der Zeile 2

$? z_2 + z_1 \rightarrow z_1 \qquad -1/2\, z_2 + z_1 \rightarrow z_1$

$? z_2 + z_3 \rightarrow z_3 \qquad -8\, z_2 + z_3 \rightarrow z_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/8 & 7/4 \\ 0 & 1 & 1/4 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$

$-\frac{3}{4} + \frac{5}{2} = -\frac{3}{4} + \frac{10}{4} = \frac{7}{4}$

5. Schritt: Führende 1 für x_3
(hier nichts zu tun ✓)

6. Elimination von x_3 aus z_1 und z_2 mithilfe von Vielfachen von z_3

$? z_3 + z_2 \rightarrow z_2 \qquad -\frac{1}{4} z_3 + z_2 \rightarrow z_2$

$? z_3 + z_1 \rightarrow z_1 \qquad -\frac{3}{8} z_3 + z_1 \rightarrow z_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$-\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{4}{4} = 1$

Fall: alle Ebenen schneiden sich in einer Geraden

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 13 & 2 \end{array}\right)$$

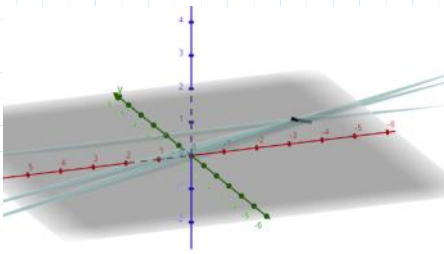
Wir vertauschen z_1 und z_2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 13 & 2 \end{array}\right)$$

1. ✓
2. $-2z_1 + z_3 \rightarrow z_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

3. ✓
4. $-2 z_2 + z_1 \rightarrow z_1$
$-z_2 + z_3 \rightarrow z_3$



$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -4 \\ x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = t \qquad t \in \mathbb{R} \\ x_2 = 2 - 3t \\ x_1 = -4 + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -4 + t \\ x_2 = 2 - 3t \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + t \\ 2 - 3t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ X(t) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

$r = 2$

$3 - 2 = 1$ Freiheitsgrad

$n - r$ frei wählbare Unbekannte

Fall: keine Lösungen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 7 & 6 \\ -1 & 4 & -13 & 3 \\ 2 & 1 & 8 & 17 \end{array}\right)$$

1. ✓

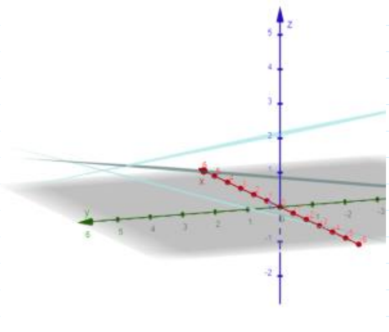
2. $z_1 + z_2 \to z_2$

$-2z_1 + z_3 \to z_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & +3 & -6 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 5 \end{array}\right)$$

3. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 5 \end{array}\right)$$

4. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \ ↯$$



Rang eines LGS

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & \tilde b_r \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & \tilde b_{r+1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \tilde b_m \end{array}\right)$$

↑ Gauß-Alg.

$m \times n$ Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

m Zeilen, n Spalten

r = Rang eines LGS

LGS mit Rang r

- unlösbar, wenn eine der Zahlen $\tilde b_{r+1} \dots \tilde b_m \neq 0$
- lösbar, wenn $\tilde b_{r+1} = \dots = \tilde b_m = 0$

oder, wenn $m-r$ Zeilen gar nicht auftreten $r = m$

dann gilt:

- ist $r = n$ (gl. Anzahl Unbekannte wie Bedingungen (1. Fall)
- $r < n$ (weniger Bedingungen als Unbekannte) dann können wir $n-r$ Unbekannte frei wählen

[s. Bsp Lösungsgerade]