Lernziele Lineare Abbildungen und Matrizen

Freitag, 8. Dezember 2023 10:25

- Zusammenhang zw. Matrizen und lin. Abb.
- wichtige lin. Abb. in $\mathbb{R}^2$ (Ebene) und ihre zugehörigen Matrizen bspw. Drehung, Spiegelung, Skalierung, Scherung
- Matrixmultiplikation und ihre Interpretation als Verkettung lin. Abb.
- Rechenregeln für Matrizen

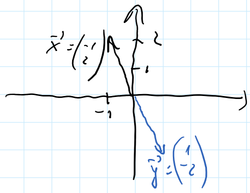
1. Lineare Abbildungen

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bilden ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ auf $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$

Bsp. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f(\vec{x}) = -\vec{x}$

$$f(\vec{x}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$



Definition: Die Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt eine lineare Abb., wenn für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ u. $k \in \mathbb{R}$ gilt:

i. $f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$

ii. $f(k\vec{a}) = k f(\vec{a})$

Alternativ: $f(k\vec{a} + l\vec{b}) = k f(\vec{a}) + l f(\vec{b})$, $k, l \in \mathbb{R}$

Bsp: a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\vec{x}) = -\vec{x}$ lin. Abb.?

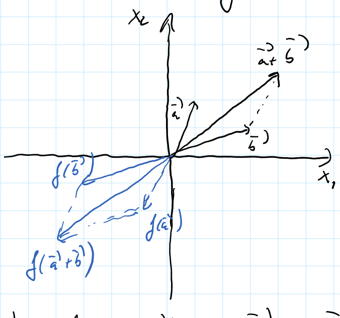
b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\vec{x}) = \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ " ?

a) i. $f(\underbrace{\vec{a} + \vec{b}}_{\vec{x}}) = -(\underbrace{\vec{a} + \vec{b}}_{\vec{x}}) = -\vec{a} - \vec{b} = \underbrace{(-\vec{a})}_{f(\vec{a})} + \underbrace{(-\vec{b})}_{f(\vec{b})}$

also $f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$ ✓

ii. $f(k\vec{a}) = -k\vec{a} = k(-\vec{a}) = k f(\vec{a})$

also $f(k\vec{a}) = k f(\vec{a})$ ✓



HA: ii visualisieren $k = 2$

b) $f(\underbrace{\vec{a} + \vec{b}}_{\vec{x}}) = \underbrace{\vec{a} + \vec{b}}_{\vec{x}} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(\vec{a}) = \vec{a} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(\vec{b}) = \vec{b} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(\vec{a}) + f(\vec{b}) = \vec{a} + \vec{b} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq f(\vec{a} + \vec{b})$

Verschiebungen sind nicht linear! später affine Abb.

Matrixform einer lin. Abb.

Bsp: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(\vec{x}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\,x_1 + 0\,x_2 \\ 0\,x_1 + (-1)\,x_2 \end{pmatrix}$$

Wir führen eine abkürzende Schreibweise ein: An Stelle von $\begin{pmatrix}(-1)\,x_1 + 0\cdot x_2\\ 0\,x_1 + (-1)\,x_2\end{pmatrix}$ schreiben wir $\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}_{\text{Matrix}}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}}_{\text{Vektor}}$

Matrix · Vektor = Vektor

Allg.: Jede lin. Abb. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ hat die Form:

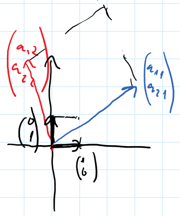
$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2\\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2\end{pmatrix}$$

Das kann man folgendermaßen sehen:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ x_2\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\right)=f\left(x_1\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right)\overset{i.}{=}f\left(x_1\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right)+f\left(x_2\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right)$$

$$\overset{ii.}{=}x_1\underbrace{f\left(\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right)}_{\text{Abbildung von }\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}}+x_2\underbrace{f\left(\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right)}_{\text{Abbildung von }\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}}$$



wobei

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right):=\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\end{pmatrix}\qquad f\left(\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right):=\begin{pmatrix}a_{12}\\ a_{22}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f\left(\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\right)=x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\ a_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}\,x_1\\ a_{21}\,x_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{12}\,x_2\\ a_{22}\,x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2\\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2\end{pmatrix}$$

Anstelle von ... schreiben

$$\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}}_{\text{Matrix } A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}}_{\text{Vektor } \vec{x}}$$

A hat 2 - Zeilen
2 - Spalten

$A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$

Spaltenvektoren von A: $\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}a_{12}\\ a_{22}\end{pmatrix}$

1. $\begin{pmatrix}|\\ \vec{a}_1\\ |\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}|\\ \vec{a}_2\\ |\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}| & |\\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2\\ | & |\end{pmatrix}$$

Zeilenvektoren $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$

a_{ij}: Element in der Matrix in der i-ten Zeile
j-ten Spalte

Rechenregeln für Matrizen

1) $A+B=B+A$ A, B gleiche Dimension

$\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-2 & 1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-1 & 3\end{pmatrix}$

1) $A + B \overset{!}{=} B + A$ $\quad A, B$ gleiche Dimension

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$$

2) $l(kA) = (l \cdot k) A \qquad l, k \in \mathbb{R}$

$$2(-3)A = -6A = -6\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -18 & -24 \end{pmatrix}$$

3) $(l + k)A = lA + kA$

4) $A + 0 = A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

5) $k(A + B) = kA + kB \qquad k \in \mathbb{R}$

Wie multipliziert man 2 Matrizen?

s. Verkettung lin. Abb.

6) $AB \neq BA$ i.d. R.

7) $(AB)C = A(BC)$

8) $(A+B)C = AC + BC$

9) $A(B + C) = AB + AC$

Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ $\quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$AE_2 = A = E_2 A$$

Inverse Matrix A^{-1}: $A^{-1}A = AA^{-1} = E_2$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Wie bestimmt man A^{-1}?

s. später Gauß-Verfahren

Verkettung lin. Abb.

<u>Gegeben:</u> $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad f_1(\vec{x}) = A\vec{x}$

$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad f_2(\vec{x}) = B\vec{x}$

<u>Gesucht:</u> $f_3 = f_2 \circ f_1 \qquad f_3(x) = C\vec{x}$

$$f_3(\vec{x}) = (f_2 \circ f_1)(\vec{x}) = f_2\left(f_1(\vec{x})\right) = f_2\left(A\vec{x}\right) = B(A\vec{x})$$

$$= BA\vec{x} = C\vec{x}$$

$$C = BA$$

$$C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{BA\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Matrix Vek}} = B\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$C\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \underbrace{BA\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\text{Matrix Vek. Mult.}} = B\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}\\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21}\end{pmatrix}$$

↑ 1. Spaltenvektor von C

H.1

$$C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \qquad \begin{pmatrix}b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22}\\ b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22}\end{pmatrix}$$

↑ 2. Spaltenvektor von C

$$\begin{array}{c|cc} & \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix} & \begin{matrix}b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}\\ b_{21}\cdot a_{11}+b_{22}a_{21}\end{matrix} & \begin{matrix}b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22}\\ b_{21}a_{12}+b_{22}\cdot a_{22}\end{matrix}\end{array}$$

$$B\cdot A = C$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 7 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underset{(1,1)}{-3+14} & \underset{(1,2)}{4-4}\\ \underset{(2,1)}{-9+28} & \underset{(2,2)}{12-8}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11 & 0\\ 19 & 4\end{pmatrix}$$

1 Zeile linke Matrix · 2 Zeile rechte Matrix

Inverse Matrix

- gibt es nur für quadratische Matrizen (und nicht für alle)

gegeben $A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ gesucht $A^{-1} = \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$

$\boxed{A\cdot A^{-1} = E_2}$ { analog $2\cdot 2^{-1} = 1$ }

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}}_{\text{Bsp. für } A}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2b_{11} + 4b_{21} & 2b_{12} + 4b_{22}\\ -b_{11} + 3b_{21} & -b_{12} + 3b_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$2b_{11} + 4b_{21} = 1$
$-b_{11} + 3b_{21} = 0$

$2b_{12} + 4b_{22} = 0$
$-b_{12} + 3b_{22} = 1$

$$\boxed{\begin{aligned}2b_{11} + 4b_{21} &= 1\\ -b_{11} + 3b_{21} &= 0\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}2b_{12} + 4b_{22} &= 0\\ -b_{12} + 3b_{22} &= 1\end{aligned}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Gaußverfahren um inverse Matrix zu bestimmen

1. $\frac{1}{2} z_1 \to z_1$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2. $? z_1 + z_2 \to z_2$ (x_1 aus z_2 eliminieren)
$1 z_1 + z_2 \to z_2$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 5 & 1/2 & 1 \end{array}\right)$$

3. $\frac{1}{5} z_2 \to z_2$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/10 & 1/5 \end{array}\right)$$

4. $? z_2 + z_1 \to z_1$
$-2 z_2 + z_1 \to z_1$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \boxed{\begin{matrix}3/10 \\ 1/10\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-2/5 \\ 1/5\end{matrix}} \\ 0 & 1 & & \end{array}\right) \qquad -\frac{2}{10} + \frac{1}{2} = \frac{-2+5}{10} = \frac{3}{10}$$

$$\underbrace{\begin{matrix}3/10 & -2/5 \\ 1/10 & 1/5\end{matrix}}_{A^{-1}}$$

Probe: $A A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/10 & -2/5 \\ 1/10 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{10} + \frac{4}{10} & -\frac{4}{5} + \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{10} + \frac{3}{10} & \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

LGS mithilfe von Matrizen

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 &= 3 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \cdots \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cdots \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad | \, A^{-1}$$

$$\underbrace{A^{-1}A}\,\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$E_2\,\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$\boxed{\vec{x} = A^{-1}\vec{b}}$$

$$\left\{ \begin{aligned} 3x &= 5 \quad | \, 3^{-1} \\ 3^{-1}\cdot 3x &= 3^{-1}\cdot 5 \\ x &= \frac{5}{3} \end{aligned} \right\}$$

Orthogonale Matrix

$n \times n$ Matrix n-Zeilen, n-Spalten

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | & & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \\ | & | & | & & | \end{bmatrix} \qquad v_1 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

Spaltenvektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ paarweise orthogonal
Länge jedes einzelnen Spaltenvektors ist 1

$$v_i \circ v_j = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

$$v_1 \circ v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} = v_{11}^2 + v_{21}^2 + \ldots v_{n1}^2 = \|v_1\|^2 = 1^2 = 1$$

$$A^T = A^{-1}$$

A^T : zu A transponierte Matrix
– vertausche Zeilen und Spalten

Bsp.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \rightsquigarrow A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

orthogonal

$$A^T A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ist folgende Matrix orthogonal?

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$= 1 \checkmark$$

Länge $\vec{v}_2 \neq 1$

Nicht orthogonal