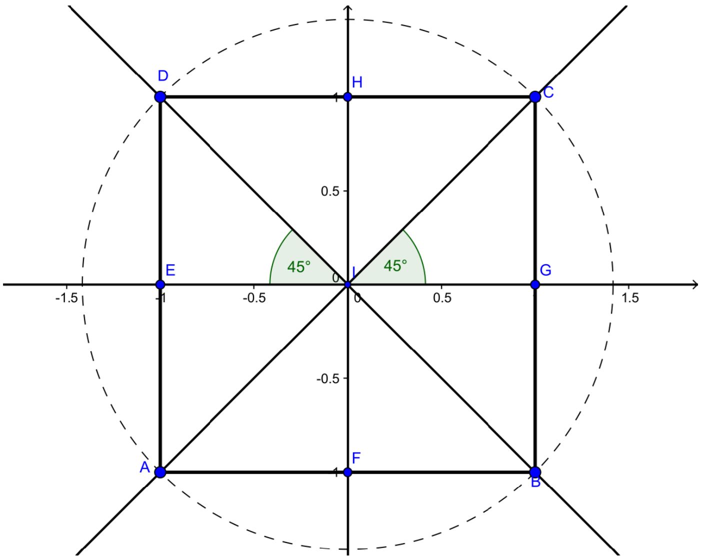
Präsenzübungen

Aufgabe P 1. *Lineare Abbildungen / Symmetrieoperationen eines Quadrats*

Im folgenden Diagramm ist ein Quadrat mit den Eckpunkten A, B, C und D sowie den Seitenmittelpunkten E, F, G und H dargestellt. Wir verwenden folgende Bezeichnungen:



- id: identische Abbildung (bei der alle Punkte festbleiben).
- σ_1: Spiegelung an der Geraden durch die Punkte A und C.
- σ_2: Spiegelung an der Geraden durch die Punkte B und D.
- S_1: Spiegelung an der (horizontalen) Geraden durch die Punkte E und G.
- S_2: Spiegelung an der (vertikalen) Geraden durch die Punkte F und H.
- D_1: Drehung um $90°$ (Vierteldrehung).
- D_2: Drehung um $180°$ (halbe Drehung).
- D_3: Drehung um $270°$ (Dreivierteldrehung).

Bestimmen Sie die Abbildung $\sigma_1 \circ D_1$, **stellen Sie** also **fest**, welche der acht angegebenen Abbildungen sich ergibt, wenn zuerst D_1 und dann σ_1 ausgeführt wird.

Hinweis: Es bleibt Ihnen überlassen, ob Sie mit Abbildungsmatrizen arbeiten oder die geometrische Wirkung der Abbildungen auf die Standard-Basisvektoren bzw. auf die Eckpunkte des Quadrats untersuchen wollen.

Aufgabe P 2. *Symmetrieoperationen eines verschobenen Quadrats*

Betrachten Sie nun das Quadrat Q', das entsteht, wenn Sie das Quadrat Q aus Aufgabe P 1 mit dem Translationsvektor $(3, 2)$ verschieben. Der Mittelpunkt von Q' liegt im Punkte $Z = (3, 2)$, die Kanten von Q' sind parallel zu den Koordinatenachsen und haben jeweils die Länge 2. Die acht Symmetrietransformationen dieses Quadrats werden in Analogie zur Aufgabe P 1 wie folgt bezeichnet: id, σ_1', σ_2', S_1', S_2', D_1', D_2', D_3'.

(a) **Zeichnen Sie** das Quadrat Q' und alle relevanten Spiegelachsen.

(b) Es ist $S_1'(x, y) = (x, -y + 4)$ und $D_1'(x, y) = (-y + 5, x - 1)$. **Verifizieren Sie** diese Abbildungsvorschriften, indem Sie jeweils eine Probe mit den Punkten $Z = (3, 2)$, $G' = (4, 2)$ und $C' = (4, 3)$ durchführen.

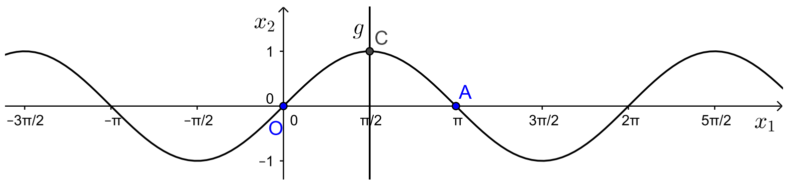
(c) **Bestimmen Sie** die Abbildungsvorschrift von σ_1'. Verwenden Sie für die Durchführung des Dreischrittverfahrens wahlweise gewöhnliche oder homogene Koordinaten.

(d) **Führen Sie** für die von Ihnen bestimmte Abbildungsvorschrift von σ_1' eine Probe (mit mindestens drei nicht kollinearen Punkten) **durch**.

(e) **Bestimmen Sie** $\sigma_1' \circ D_1'$ mit einer Methode Ihrer Wahl.

Aufgabe P 3. *Lineare und affine Transformationen (Klausuraufgabe vom WS 2014/15)*

In der folgenden Abbildung ist ein Ausschnitt des Graphen $\Gamma_{\sin}$ der Sinusfunktion dargestellt.



Die Punktspiegelung P_O am Ursprung O ist eine Symmetrietransformation von $\Gamma_{\sin}$. Die Achsenspiegelung an der vertikalen Geraden g mit der Gleichung $x_1 = \frac{\pi}{2}$ ist ebenfalls eine Symmetrietransformation von $\Gamma_{\sin}$. Wir bezeichnen diese mit S_g.

(a) Die affine Transformation $G := S_g \circ P_O$ wird in homogenen Koordinaten durch die 3×3-Matrix

$$\overline{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pi \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dargestellt. **Berechnen Sie** die Matrix-Vektorprodukte

$$\overline{G} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overline{G} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \overline{G} \cdot \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und **zeichnen Sie** die zugehörigen Bildpunkte (mit geeigneter Beschriftung) in die obige Abbildung **ein**.

(b) **Bestimmen Sie** die multiplikative Inverse $\overline{G}^{-1}$ der Matrix $\overline{G}$.

(c) Die Punktspiegelung am Punkt A ist eine weitere Symmetrietransformation von $\Gamma_{\sin}$. **Bestimmen Sie** mit einer Methode Ihrer Wahl **jeweils** den Linearanteil und den Verschiebungsanteil der affinen Transformationen P_A und $P_A \circ P_O$.

Hausübungen

Aufgabe H 1. *Affine Transformation: Drehung*

(a) Betrachten Sie die ebene Drehung $D_{O,\,90^\circ}$ mit Drehzentrum $O = (0,0)$ und Drehwinkel 90°. Schreiben Sie die Abbildungsmatrix $D := [D_{O,\,90^\circ}]$ dieser linearen Abbildung auf.

(b) Betrachten Sie die Drehung $D_{Z,\,90^\circ}$ mit Drehzentrum $Z = (2,1)$ und Drehwinkel 90°. Zeichnen Sie in ein kartesisches Koordinatensystem die Punkte $O = (0,0)$, $Z = (2,1)$, $E_1 = (1,0)$, $E_2 = (0,1)$ sowie deren Bilder unter der Drehung $D_{Z,\,90^\circ}$ ein.

(c) Machen Sie sich anhand Ihrer Skizze (geometrisch) klar, dass $D_{Z,\,90^\circ}$ gleich der affinen Transformation $\big(\, D_{O,\,90^\circ} \mid T_{(3,-1)} \,\big)$ ist.

(d) Weisen Sie die Beziehung $D_{Z,\,90^\circ} = \big(\, D_{O,\,90^\circ} \mid T_{(3,-1)} \,\big)$ bzw. $D_{Z,\,90^\circ} = (\, A \mid v \,)$ mit Abbildungsmatrix $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ und Verschiebevektor $v = \binom{3}{-1}$ rechnerisch nach.

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass $D_{Z,\,90^\circ} = T_{(2,1)} \circ D_{O,\,90^\circ} \circ T_{(-2,-1)}$ gilt. Bestimmen Sie diese Abbildung entweder mit gewöhnlichen Koordinaten (durch ihre Wirkung auf einen beliebigen Punkt mit Ortsvektor $(x_1, x_2)^\mathsf{T}$) oder mit homogenen Koordinaten durch Verwendung geeigneter 3×3-Matrizen.

Aufgabe H 2. *Affine Abbildung (Klausuraufgabe vom Wintersemester 2009/10)*

Die Punktspiegelung $P_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ am Punkt $p = (2,1)$ ist eine affine Abbildung, d.h. es gibt eine 2×2-Matrix M und einen Vektor v derart, dass für alle Punkte x der Ebene (bzw. deren Ortsvektoren) die Beziehung $P_p(x) = M \cdot x + v$ gilt.

Ermitteln Sie M und v. Verwenden Sie hierzu die Tatsache, dass sich P_p wie folgt zerlegen lässt:

$$P_p = T_p \circ P_{(0,0)} \circ T_{-p}.$$

Aufgabe H 3. *Beobachtungen zu Spiegelungen und Drehungen*

In dieser Aufgabe gelten die Bezeichnungen von Aufgabe **??** weiter.

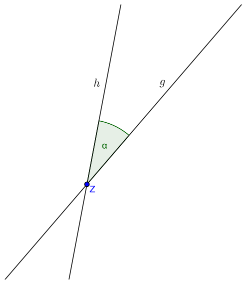
(a) Betrachten Sie nacheinander $\sigma_1 \circ S_1$, $S_2 \circ S_1$, $\sigma_2 \circ S_1$ und $\sigma_2 \circ \sigma_1$ sowie $S_1 \circ \sigma_2$ und beobachten Sie, welche Drehung sich jeweils ergibt.

(b) Betrachten Sie nacheinander $D_1 \circ S_1$, $D_2 \circ S_1$ und $D_3 \circ \sigma_2$ und beobachten Sie, welche Spiegelung sich jeweils ergibt.

Aufgabe H 4. *Eigenschaften von Spiegelungen und Drehungen*

(a) Nehmen Sie den folgenden Satz zur Kenntnis:

Es seien g und h zwei Geraden in der Ebene mit Schnittpunkt Z und eingeschlossenem Winkel α; genauer erhalte man h durch Anwendung der Drehung $D_{Z,\alpha}$ auf g. Die zugehörigen Achsenspiegelungen seien mit S_g bzw. S_h bezeichnet:



Dann ist

- $S_h \circ S_g$ eine Drehung mit Drehwinkel $2\,\alpha$, genauer gilt $S_h \circ S_g = D_{Z,2\,\alpha}$,
- $S_g \circ S_h$ eine Drehung mit Drehwinkel $-2\,\alpha$, gilt $S_g \circ S_h = D_{Z,-2\,\alpha}$.

(b) Folgern Sie hieraus die Beziehung $S_h = D_{Z,2\,\alpha} \circ S_g$.

(c) Setzen Sie diese Ergebnisse zu den Beobachtungen der Aufgabe H 3 in Beziehung.

Aufgabe H 5. *Darstellung affiner Transformationen der Ebene in homogenen Koordinaten*

(a) Betrachten Sie die Matrix $\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ und den Koordinatenvektor $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie das Matrixprodukt $\bar{A} \cdot \bar{x}$ und überzeugen Sie sich davon, dass für den Ergebnisvektor $\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$ Folgendes gilt:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Der Vorteil der Verwendung von sogenannten homogenen Koordinaten liegt darin, dass auch affine Transformationen durch Matrizen dargestellt werden können:

- ***Reine Verschiebungen*** *mit Verschiebevektor* $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ *werden durch* 3×3*-Matrizen der Form* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *dargestellt,*
- ***rein lineare*** *Transformationen mit Abbildungsmatrix* $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *durch* 3×3*-Matrizen der Form* $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Stellen Sie die Verschiebung mit Verschiebevektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ durch eine 3×3-Matrix $\overline{T}$ dar und berechnen Sie zur Probe das Matrixprodukt $\overline{T} \cdot \bar{x} = \overline{T} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) Stellen Sie die Drehung um den Ursprung mit Drehwinkel 90° durch eine 3×3-Matrix $\overline{D}$ dar und berechnen Sie zur Probe das Matrixprodukt $\overline{D} \cdot \bar{x}$.

(d) Lösen Sie die Aufgaben H 1 und H 2 dieses Blattes unter Verwendung von homogenen Koordinaten.

Aufgabe H 6. *Ungleichmäßige Skalierung*

Es sei $s := s(k_1, k_2)$ eine Skalierung, bei der die Skalierungsfaktoren k_1 und k_2 bezüglich der ersten Winkelhalbierenden w_1 bzw. der zweiten Winkelhalbierenden w_2 gegeben sind. Es gilt also $s(x) = k_1\, x$ für jeden Punkt $x \in w_1$ bzw. $s(x) = k_2\, x$ für jeden Punkt $x \in w_2$.

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $M_s(k_1, k_2)$ von $s(k_1, k_2)$, indem Sie die Beziehung

$$M_s(k_1,k_2) = \begin{pmatrix} \cos(45°) & -\sin(45°) \\ \sin(45°) & \cos(45°) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-45°) & -\sin(-45°) \\ \sin(-45°) & \cos(-45°) \end{pmatrix}$$

zunächst begründen und dann verwenden.

(b) Wählen Sie nun die Werte $k_1 = 3$ und $k_2 = 2$ und schreiben Sie $M_s(3,2)$ auf.

(c) Bestimmen Sie zeichnerisch und/oder rechnerisch, wie $s(3,2)$ das Einheitsquadrat mit den Eckpunkten $O = (0,0)$, $P = (1,0)$, $Q = (1,1)$, $R = (0,1)$ abbildet.

(d) Wie bildet $s(3,2)$ das Viereck mit den Eckpunkten $A = (0,0)$, $B = (1,1)$, $C = (0,2)$, $D = (-1,1)$ ab?

(e) Nutzen Sie die folgenden Beziehungen sowie die Tatsache, dass $s(3,2)$ eine *lineare* Abbildung ist, zu einer alternativen Bestimmung der Abbildungsmatrix $M_s(3,2)$:

$$\begin{aligned} (1,0)^\mathsf{T} &= \frac{1}{2}\Big\{(1,1)^\mathsf{T} - (-1,1)^\mathsf{T}\Big\} \\ (0,1)^\mathsf{T} &= \frac{1}{2}\Big\{(1,1)^\mathsf{T} + (-1,1)^\mathsf{T}\Big\}. \end{aligned}$$

Aufgabe H 7. *Spiegelung an beliebigen Geraden (relativ aufwändig)*

Beschreiben Sie die affine Transformation S_g, welche die Spiegelung an der Geraden g mit der Geradengleichung $x_2 = mx_1 + b$ wiedergibt. Stellen Sie die Abbildungsgleichung in der Form $S_g(x) = A \cdot x + v$ auf und finden Sie hierzu die Transformationsmatrix A und den Verschiebevektor v.

Hinweise: Übertragen Sie das in der Vorlesung vorgestellte Verfahren: Finden Sie zunächst eine (affine) Transformation T, welche die Gerade g auf die x_1-Achse abbildet. Bestimmen Sie dann deren Umkehrung T^{-1}. Es gilt $S_g = T^{-1} \circ S_1 \circ T$ wobei S_1 die Spiegelung an der horizontalen x_1-Achse ist. Für den Winkel φ, den die Gerade g mit der x_1-Achse einschließt, gilt v$\sin(\varphi) = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ sowie $\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$.

Aufgabe H 8. *Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks (vgl. Übungseinheit 2)*

Zeichnen Sie ein gleichseitiges Dreieck so, dass eine Seite zur x-Achse parallel ist und sich die drei Winkelhalbierenden im Koordinatenursprung der Ebene schneiden. Markieren Sie die linke untere Ecke mit der Ziffer 1, die rechte untere Ecke mit der Ziffer 2 und die obere Ecke mit der Ziffer 3. Betrachten Sie nun die folgenden Abbildungen:

σ_1: Spiegelung an der Winkelhalbierenden durch den Punkt 1;

σ_2: Spiegelung an der Winkelhalbierenden durch den Punkt 2;

σ_3: Spiegelung an der Winkelhalbierenden durch den Punkt 3;

D_1: Drehung um $120°$ (Drehzentrum ist der Koordinatenursprung);

D_2: Drehung um $240°$ (Drehzentrum ist der Koordinatenursprung);

id: Identische Abbildung (alle Punkte bleiben fest).

(a) Stellen Sie zu jeder dieser sechs Abbildungen die entsprechende Abbildungsmatrix auf. Die Hintereinanderausführung (oder Verknüpfung) zweier Abbildungen f und g lässt sich ausdrücken durch das Produkt der entsprechenden Abbildungsmatrizen $[f]$ und $[g]$. Genauer gesagt ist die Abbildungsmatrix $[f \circ g]$ der Abbildung $f \circ g$ gleich dem Matrixprodukt $[f] \cdot [g]$, es gilt also $[f \circ g] = [f] \cdot [g]$.

(b) Berechnen Sie die Matrixprodukte $[\sigma_3] \cdot [\sigma_1]$, $[\sigma_1] \cdot [D_1]$ sowie $[D_1] \cdot [\sigma_1]$ und sehen Sie in Ihrer Liste von Teilaufgabe **(a)** nach, welcher der sechs Abbildungen die Produktmatrix jeweils entspricht.

(c) Stellen Sie die Gruppentafel der Gruppe mit den sechs Elementen E, D_1, D_2, σ_1, σ_2 und σ_3 auf. Gehen Sie hierbei für jede der 36 Verknüpfung von Abbildungen so vor wie in Teilaufgabe **(b)** und tragen Sie die jeweiligen Ergebnisse in die Gruppentafel ein.

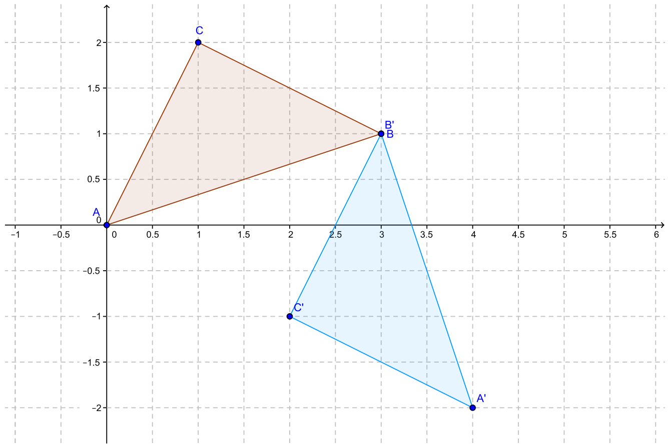
Hinweise: Wir sind nun also in der Lage, das in Übungseinheit 2 aufgeworfene Problem der Aufstellung einer Gruppentafel, das Ihnen vielleicht zunächst unübersichtlich und schwierig erschien, durch Rechnungen (nämlich Matrixmultiplikationen) zu lösen. Diese Rechnungen könnten Sie grundsätzlich auch (z.B. mithilfe eines Computeralgebrasystems) auf einem Rechner ausführen lassen.

*Die Darstellung einer Gruppe bzw. ihrer Gruppenelemente durch Matrizen nennt man eine **lineare Darstellung der Gruppe**. Lineare Darstellungen sind aus verschiedenen Gründen und auf verschiedene Weisen Gegenstand der mathematischen Forschung.*

Sie können sich überlegen, dass Sie nicht wirklich 36 Verknüpfungen untersuchen müssen. Zum Beispiel ist das Ergebnis jeder der elf Verknüpfungen, an denen das Neutralelement E beteiligt ist, von vorneherein klar. Außerdem können Sie sich überlegen, dass die Drehungen D_1 und D_2 miteinander vertauschen, was Ihnen zusätzliche Arbeit beim Rechnen spart. Allerdings haben die Vereinfachungen irgendwo auch ein Ende, zum Beispiel ist die Gruppe als ganze durchaus nicht kommutativ.

Aufgabe H 9. *Affine und lineare Abbildungen – in Anlehnung an eine Klausuraufgabe aus dem Sommersemester 2015*

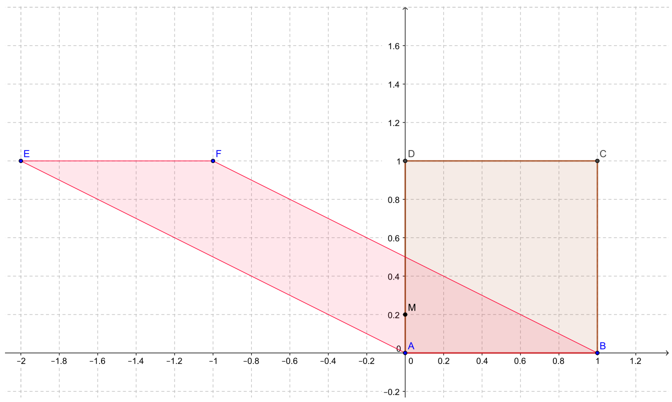
a) Gegeben sei das Dreieck ABC, welches durch eine affine Abbildung $F = (f \mid T_v)$ auf das Dreieck $A'B'C'$ abgebildet wird. Um welche Abbildung handelt es sich?



b) Bestimmen Sie die zu F gehörige homogene Abbildungsmatrix $\left[\overline{(f \mid T_v)}\right]$.

c) Wenden Sie diese Abbildungsmatrix auf den homogenen Koordinatenvektor des Punktes A an.

d) Gegeben sei das Quadrat $ABCD$, welches durch eine Scherung U auf das Parallelogramm $ABEF$ abgebildet wird.



Affine Abbildungen sind teilverhältnistreu und bilden kollineare Punkte wie etwa A, M, D auf kollineare Punkte A, M', E ab. Wo muss sich M' dann befinden? Lösen Sie die Aufgabe graphisch und erläutern Sie Ihren Lösungsansatz.

e) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[\,U\,]$ der linearen Abbildung U und wenden Sie diese auf den Koordinatenvektor $(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ an.

Aufgabe H 10. *Analytische Geometrie – Klausuraufgabe aus dem Wintersemester 2016/17*

Betrachten Sie die Ursprungsgerade g mit Richtungsvektor $\vec{u} = \binom{4}{2}$ und den Punkt P mit Ortsvektor $\vec{p} = \binom{7}{1}$.

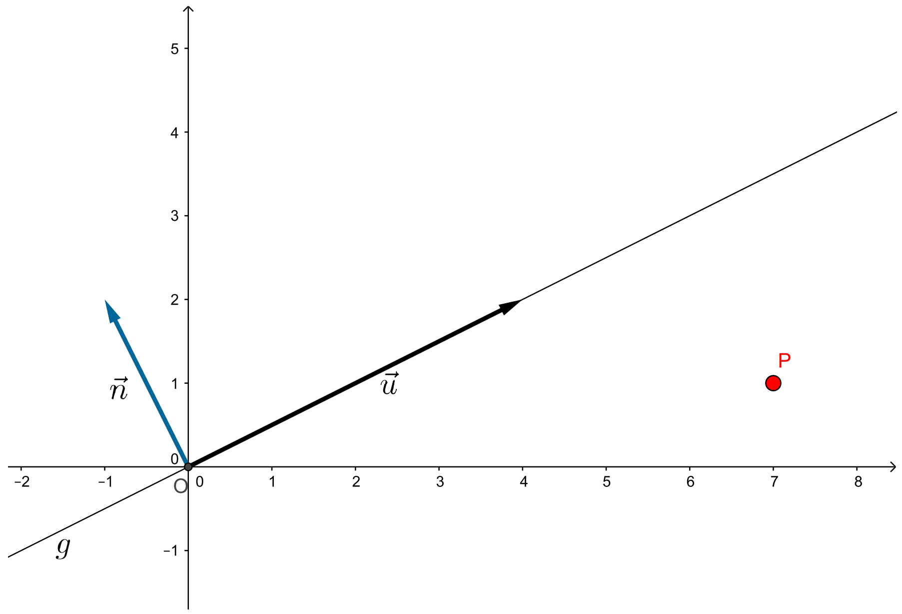


Abbildung 1: Achsenspiegelung an einer Ursprungsgeraden.

(a) **Zeigen Sie** rechnerisch, dass der Vektor $\vec{n} = \binom{-1}{2}$ **senkrecht** auf dem Vektor $\vec{u}$ steht.

(b) Es sei h die Gerade, welche durch die Parametergleichung $\vec{x} = \vec{p} + t\,\vec{n}$ gegeben ist. **Skizzieren Sie** die Gerade h im obigen Diagramm.

(c) **Berechnen Sie** den Schnittpunkt L der Geraden g und der Geraden h. **Lösen Sie** hierzu zunächst das Gleichungssystem $s\,\vec{u} = \vec{p} + t\,\vec{n}$ mit einer Methode Ihrer Wahl. Ausgeschrieben sieht dieses Gleichungssystem wie folgt aus:

$$\begin{aligned} 4\,s + t &= 7 \\ 2\,s - 2\,t &= 1 \end{aligned}$$

(d) **Berechnen Sie** den Vektor

$$\vec{p}_{\|g} := \frac{\vec{p}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\,\vec{u}$$

und **erläutern Sie kurz** die Beziehung zwischen $\vec{p}_{\|g}$ und dem Punkt L (der in der vorigen Teilaufgabe definiert wurde).

(e) **Berechnen Sie** den (orthogonalen) Abstand $d(P, g)$ des Punktes P von der Geraden g mit einer Methode Ihrer Wahl.

Wir wollen im Folgenden die Abbildungsvorschrift für die Spiegelung S_g an der Geraden g angeben und zerlegen hierzu S_g wie folgt nach dem Dreischrittverfahren:

$$S_g = D \circ S_1 \circ D^{-1}.$$

Hierbei ist S_1 die Spiegelung an der (horizontalen) x_1-Achse, und die Drehung D ist durch die Abbildungsmatrix

$$\left[D \right] \;=\; \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{gegeben.}$$

(f) **Geben Sie** eine kurze Begründung dafür **an**, dass

$$\left[D^{-1} \right] \;=\; \left[D \right]^{-1} \;=\; \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{gilt.}$$

(g) Die Abbildung S_g ist linear und kann somit durch eine 2×2-Abbildungsmatrix $\left[S_g \right]$ beschrieben werden. Rechnen Sie das Matrixprodukt

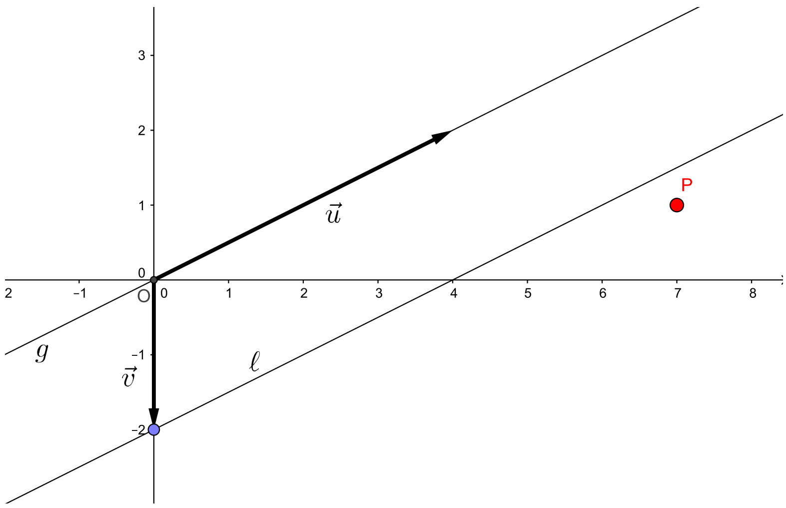
$$\left[S_g \right] \;=\; \left[D \right] \cdot \left[S_1 \right] \cdot \left[D \right]^{-1}$$

auf nachvollziehbare Weise aus.

Hinweis: Sie machen sich Ihre Rechnung einfacher, wenn Sie bei den Matrizen $\left[D \right]$ *und* $\left[D \right]^{-1}$ *jeweils den Faktor* $\frac{1}{\sqrt{5}}$ *herausziehen (siehe oben).*

(h) **Bestimmen Sie** die Koordinaten des Punktes $S_g(P)$, indem Sie das Matrix-Vektor-Produkt $\left[S_g \right] \cdot \binom{7}{1}$ ausrechnen. **Überprüfen Sie** Ihr Ergebnis anhand der Abbildung1 und dokumentieren Sie das Ergebnis Ihrer Überprüfung.

(i) Betrachten Sie nun den Vektor $\vec{v} = \binom{0}{-2}$ und die Gerade ℓ, die durch die Parametergleichung $\vec{x} = \vec{v} + t\,\vec{u}$ gegeben ist.



Die Spiegelung S_ℓ an der Geraden ℓ ist eine affine Transformation. **Bestimmen Sie** mit einer Methode Ihrer Wahl die Abbildungsvorschrift von S_ℓ bzw. den linearen Anteil L und den Verschiebungsanteil T von S_ℓ.

Tutoriumsübungen

Aufgabe T 1. *Ebene Drehungen*

Drehen Sie das Dreieck mit den Eckpunkten $O = (0, 0)$, $P = (5, 0)$ und $Q = (5, 3)$ um $90°$ im **Uhrzeigersinn**.

(a) mit dem Koordinatenursprung O als Drehzentrum,

(b) mit dem Punkt P als Drehzentrum.

(c) mit dem Punkt Q als Drehzentrum.

Hinweise:

- *Lösen Sie die drei Aufgaben zunächst zeichnerisch.*
- *Berechnen Sie die Abbildungsmatrix A der in Teilaufgabe **(a)** gegebenen linearen Abbildung.*
- *Berechnen Sie die Abbildungsmatrizen des linearen Anteils und die Verschiebungsvektoren der in den Teilaufgaben **(b)** und **(c)** angegebenen affinen Transformationen $D_{Z,\alpha}$. Verwenden Sie hierzu die jeweils passende Zerlegung der Form*

$$D_{Z,\alpha} = T_Z \circ D_{O,\alpha} \circ T_{-Z}.$$

Aufgabe T 2. *Beispiel einer affinen Transformation*

Es sei g eine Gerade mit der Gleichung $x_2 = 2$, also eine Parallele zur x_1-Achse. Wir betrachten die Spiegelung S_g an dieser Geraden. Diese besitzt die folgenden Eigenschaften:

(i) Die Gerade g ist Fixpunktgerade von S_g, d.h. es gilt $S_g(x) = x$ für alle $x \in g$.

(ii) Es gilt $S_g = T_{(0,2)} \circ S_1 \circ T_{(0,-2)}$

(a) Es sei ein beliebiger Punkt $x = (x_1, x_2)^T$ gegeben. Bestimmen Sie die Abbildungsvorschrift

$$x \mapsto (T_{(0,2)} \circ S_1 \circ T_{(0,-2)})(x),$$

also das, was herauskommt, wenn man $T_{(0,2)} \circ S_1 \circ T_{(0,-2)}$ auf x anwendet.

Hinweis: Um hier den Überblick zu bewahren, empfiehlt sich das folgende Vorgehen: Rechnen Sie nach, dass $T_{(0,-2)}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 2 \end{pmatrix}$ gilt. Wenden Sie auf $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 2 \end{pmatrix}$ die Abbildung S_1 an, so erhalten Sie $S_1\big(T_{(0,-2)})(x)\big)$ bzw. $\big(S_1 \circ T_{(0,-2)}\big)(x)$. Addieren Sie hierzu noch den Vektor $(0, 2)^T$, so haben Sie $\big(T_{(0,2)} \circ S_1 \circ T_{(0,-2)}\big)(x)$ berechnet.

(b) Es gibt eine lineare Abbildung L (linearer Anteil von S_g) und eine Verschiebung T_v (Verschiebungsanteil von S_g genannt) derart, dass $S_g = T_v \circ L$ gilt (in der Vorlesung haben wir hierfür auch die Notation $(\, L \mid T_v \,)$ eingeführt). Lesen Sie aus Ihren Ergebnissen von Teilaufgabe **(a)** den linearen Anteil L und den Verschiebungsanteil T_v der affinen Abbildung S_g ab.

(c) Wenden Sie die Abbildung $S_g = (\, L \mid T_v \,)$ auf die Punkte $(0, 2)$, $(1, 1)$ und $(0, 0)$ an und überzeugen Sie sich von der Plausibilität Ihrer Ergebnisse.

Aufgabe T 3. *Geradenspiegelungen*

Spiegeln Sie das Viereck mit den Ecken $A = (-1, 0)$, $B = (0, -2)$, $C = (1, 0)$ und $D = (0, 2)$

(a) an der vertikalen Geraden g_a mit der Gleichung $x_1 = 2$,

(b) an der Geraden g_b mit der Gleichung $x_2 = x_1$,

(c) an der Geraden g_c mit der Gleichung $x_2 = x_1 + 2$.

Hinweise:

- *Lösen Sie die Aufgaben zunächst zeichnerisch.*
- *Berechnen Sie für jede der drei Teilaufgaben den linearen Anteil A und den Verschiebungsanteil v der jeweils angegebenen affinen Abbildung. Verwenden Sie jeweils eine geeignete Zerlegung der Abbildungen. Zum Beispiel bietet sich für Teilaufgabe **(a)** die Zerlegung $S_{g_a} = T_{(2,0)} \circ S_2 \circ T_{(-2,0)}$ an.*

(d) Welche Transformationen bilden das Viereck $ABCD$ auf sich selbst ab?

Aufgabe T 4. *Affine Abbildung (Drehung)*

Die Drehung $D_{z,90^\circ} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit Drehwinkel $+90^\circ$ um das Drehzentrum Z mit Ortsvektor $z = (1, 1)^\mathsf{T}$ ist eine affine Abbildung, d.h. es gibt eine 2×2-Matrix M und einen Vektor $\vec{v}$ derart, dass für alle Punkte x der Ebene die Beziehung $D_{Z,90^\circ}(x) = M \cdot x + \vec{v}$ gilt.

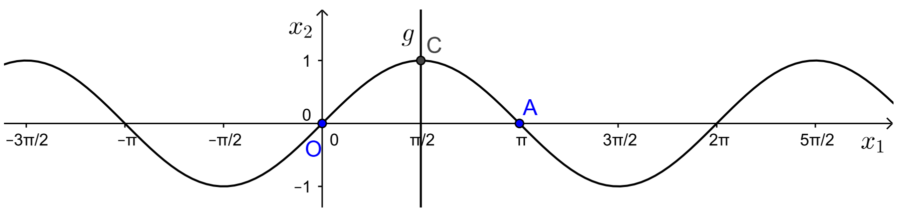
Ermitteln Sie M und $\vec{v}$. Verwenden Sie hierzu die Tatsache, dass sich $D_{Z,90^\circ}$ wie folgt zerlegen lässt: $D_{Z,90^\circ} = T_z \circ D_{O,90^\circ} \circ T_{(-z)}$.

Hinweis: Die Abbildungsmatrix von $D_{O,90^\circ}$ ist $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Führen Sie eine Probe durch, z.B. für die Punkte $O = (0, 0)$, $E_1 = (1, 0)$ und $E_2 = (0, 1)$.

Aufgabe T 5. *Lineare und affine Transformationen (Klausuraufgabe vom WS 2014/15)*

In der folgenden Abbildung ist ein Ausschnitt des Graphen $\Gamma_{\sin}$ der Sinusfunktion dargestellt.



Die Punktspiegelung P_O am Ursprung O ist eine Symmetrietransformation von $\Gamma_{\sin}$. Die Achsenspiegelung an der vertikalen Geraden g mit der Gleichung $x_1 = \frac{\pi}{2}$ ist ebenfalls eine Symmetrietransformation von $\Gamma_{\sin}$. Wir bezeichnen diese mit S_g.

(a) Die affine Transformation $G := S_g \circ P_O$ wird in homogenen Koordinaten durch die 3×3-Matrix

$$\overline{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pi \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dargestellt. **Berechnen Sie** die Matrix-Vektorprodukte

$$\overline{G} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overline{G} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \overline{G} \cdot \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und **zeichnen Sie** die zugehörigen Bildpunkte (mit geeigneter Beschriftung) in die obige Abbildung **ein**.

(b) **Bestimmen Sie** die multiplikative Inverse $\overline{G}^{-1}$ der Matrix $\overline{G}$.

(c) Die Punktspiegelung am Punkt A ist eine weitere Symmetrietransformation von $\Gamma_{\sin}$. **Bestimmen Sie** mit einer Methode Ihrer Wahl **jeweils** den Linearanteil und den Verschiebungsanteil der affinen Transformationen P_A und $P_A \circ P_O$.

Aufgabe T 6. *Analytische Geometrie (Klausuraufgabe vom Wintersemester 2015/16)*

(a) **Berechnen Sie** das Kreuzprodukt $\vec{n} := \vec{p} \times \vec{q}$ der Vektoren $\vec{p} = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\vec{q} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Es sei g die Gerade, die durch die Punkte $P = (4, 3, 1)$ und $Q = (1, 2, 1)$ verläuft. **Geben Sie** für diese Gerade eine Parametergleichung **an**.

(c) Betrachten Sie die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; a \in \mathbb{R}.$$

Auswertung der zweiten Komponenten ergibt die Gleichung $x_2 = 2 + a$. **Lösen Sie** diese Gleichung nach a auf und **setzen Sie** den zugehörigen Ausdruck in die Gleichung

$$x_1 = 1 + 3a \textbf{ ein}.$$

Stellen Sie die resultierende Gleichung in die Form

$$A x_1 + B x_2 + C = 0 \textbf{ um}.$$

(d) **Stellen Sie** die 3×3-Matrizen $\left[\overline{T_{(-1,-2)}}\right]$ und $\left[\overline{D_{O,\,90^\circ}}\right]$ **auf**, die zur Verschiebung $T_{(-1,-2)}$ bzw. zur Drehung $D_{O,\,90^\circ}$ gehören und **berechnen Sie** das Matrixprodukt

$$\left[\overline{D_{O,\,90^\circ}}\right] \cdot \left[\overline{T_{(-1,-2)}}\right].$$

(e) Wenden Sie die Matrix $M := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ nacheinander auf die Vektoren $\vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ an.

(f) **Bestimmen Sie** die Inverse M^{-1} der Matrix M. Führen Sie hierzu das Gauß-Verfahren mit der erweiterten Matrix $[\, M \mid E_3 \,]$ durch.

(g) Berechnen Sie das Matrixprodukt $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Das Ergebnis ist eine Zeilenmatrix (ein Zeilenvektor).

(h) Bestimmen Sie eine Allgemeine Koordinatengleichung der Geraden g', welche die Punkte $P' = (\,-1,\, 3\,)$ und $Q' = (\,0,\, 0\,)$ enthält.

(i) **Zeichnen Sie** die Geraden g und g' in der x_1-x_2-Ebene.

(j) Können Sie im Überblick erläutern, wie die Ergebnisse der Teilaufgaben (e) bis (h) mit denen der Teilaufgaben (a), (b) und (c) zusammenhängen?