Präsenzübungen

Aufgabe P 8. *Verschiedene Koordinatensysteme* $\rightsquigarrow$ *verschiedene Kooordinaten*

Die folgende Abbildung 1 zeigt, dass für den Punkt P die Gleichung $P = O_1 + 1\,\overrightarrow{b_1} + 3\,\overrightarrow{b_2}$ gilt. Somit ist die Koordinatendarstellung $(P)_{K_1}$ des Punktes P bezüglich des Koordinatensystems $K_1 = \left(O_1;\, \overrightarrow{b_1},\, \overrightarrow{b_2}\right)$ gegeben durch $(P)_{K_1} = (1, 3)$.

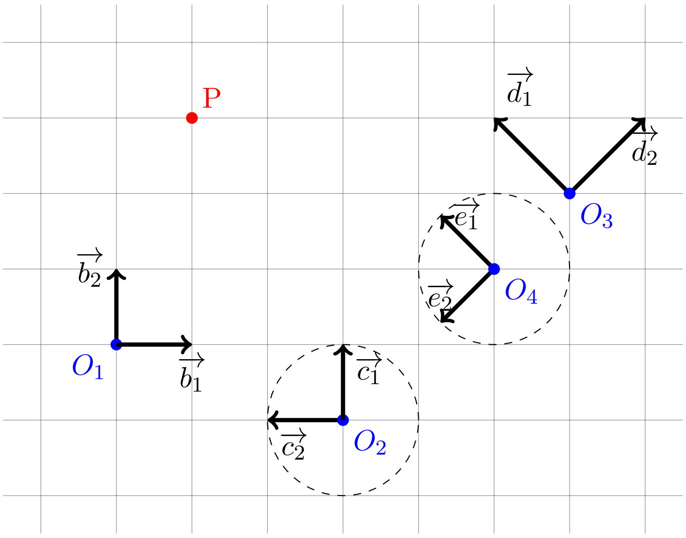

Abbildung 1: Vier Koordinatensysteme: K_1 bis K_4.

(a) **Bestimmen Sie** die Koordinatendarstellung $(P)_{K_2}$ des Punktes P bezüglich des Koordinatensystems $K_2 = \left(O_2; \overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}\right)$, das Sie der Abbildung 1 entnehmen können.

(i) **Lösen Sie** die Aufgabe zunachst grafisch.

(ii) Für die rechnerische Lösung verfahren Sie wie folgt:

- **Notieren Sie** zunächst die (sich aus der Abbildung ergebenden) Beziehungsgleichungen: $O_2 = O_1 + 3\,\overrightarrow{b_1} + (-1)\,\overrightarrow{b_2}, \quad \overrightarrow{c_1} = \ldots \quad \overrightarrow{c_2} = \ldots.$
- **Setzen Sie** die Beziehungsgleichungen in die Gleichung

$$O_1 + 1\,\overrightarrow{b_1} + 3\,\overrightarrow{b_2} = P = O_2 + p_1'\,\overrightarrow{c_1} + p_2'\,\overrightarrow{c_2} \qquad \text{ein.}$$

- **Bestimmen Sie** die Werte für p_1' und p_2', indem Sie das Gleichungssystem, das sich nach geeignetem Koeffizientenvergleich ergibt, aufstellen und lösen.

(b) Verfahren Sie analog zur Bestimmung von $(P)_{K_3}$ und $(P)_{K_4}$.

Ziel-Zeitmarke: 70 Minuten

Aufgabe P 9. *Koordinatensysteme am Computerbildschirm*

Für die Beschreibung der Lage von Punkten auf Bildschirmen (bzw. ganz generell in digitalen Bildern) sind u.a. die beiden in dieser Aufgabe betrachteten Koordinatensysteme üblich. Zur Erläuterung betrachten wir einen „Modellbildschirm" mit einer Höhe von 8 Pixeleinheiten:

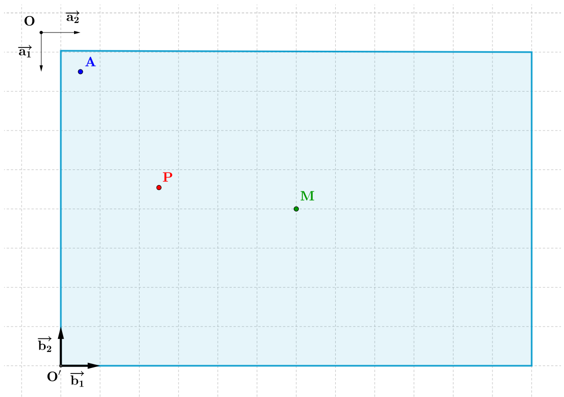

Abbildung 2: Bildschirmkoordinatensysteme.

Bezüglich des Koordinatensystems $K = (O; \vec{a_1}, \vec{a_2})$ hat der Punkt A die Koordinaten $(1, 1)$. Bezüglich des anderen Koordinatensystems $K' = \left(O'; \vec{b_1}, \vec{b_2}\right)$ besitzt der Punkt A die Koordinaten $(0.5, 7.5)$.

(a) Bestimmen Sie durch/nach Betrachten der Grafik die Koordinaten (i, j) der Punkte P und M (Bildschirmmittelpunkt) bzgl. des Koordinatensystems $K = (O; \vec{a_1}, \vec{a_2})$.

(b) Bestimmen Sie aus der Grafik die Koordinaten (x, y) der Punkte P und M bzgl. des Koordinatensystems $K' = \left(O'; \vec{b_1}, \vec{b_2}\right)$.

(c) Stellen Sie die Gleichungen für die Beziehung zwischen den beiden Koordinatensystemen auf:

$$\begin{aligned} O' &= O + \ldots \vec{a_1} + \ldots \vec{a_2} \\ \vec{b_1} &= \ldots \vec{a_1} + \ldots \vec{a_2} \\ \vec{b_2} &= \ldots \vec{a_1} + \ldots \vec{a_2} \end{aligned}$$

(d) Mitunter wird K als *Pixelkoordinatensystem* und K' als *Standardkoordinatensystem* bezeichnet. Nutzen Sie die Beziehungsgleichungen, um eine allgemeine Transformationsformel anzugeben, mit der man aus den Pixelkoordinaten (i, j) eines Punktes die zugehörigen Standardkoordinaten (x, y) dieses Punktes erhält. Testen Sie Ihre Formel anhand der Punkte A, M und P.

(e) Können Sie dies auch allgemein für ein Bild mit einer Breite von B Pixeleinheiten und einer Höhe von H Pixeleinheiten. Wenden Sie Ihre Transformationsformel für den Fall $B = 1920$, $H = 1080$ auf den Bildmittelpunkt an.

Bemerkungen: Die Pixelkoordinaten (i, j) werden auch Pixelindizes genannt. Man erhält das Seitenverhältnis für das „Full-HD"-Bildformat über die Beziehungen $1920 = 16 \cdot 120$ und $1080 = 9 \cdot 120$.

Hausübungen

Hinweis: Die Hausübungen zu dieser Übungseinheit enthalten einerseits Material zur theoretischen Fundierung, andererseits auch Aufgaben zum Einüben von Rechentechniken.

Aufgabe H 20. *Koordinatendarstellungen von Punkten der Ebene*

Die folgende Abbildung 3 zeigt, dass für den Punkt P die Gleichung $P = O + 1\,\vec{b_1} + 3\,\vec{b_2}$ gilt. Die Koordinatendarstellung $(P)_K$ des Punktes P bezüglich des Koordinatensystems $K = (O; \vec{b_1}, \vec{b_2})$ ist somit gegeben durch $(P)_K = (1, 3)$.

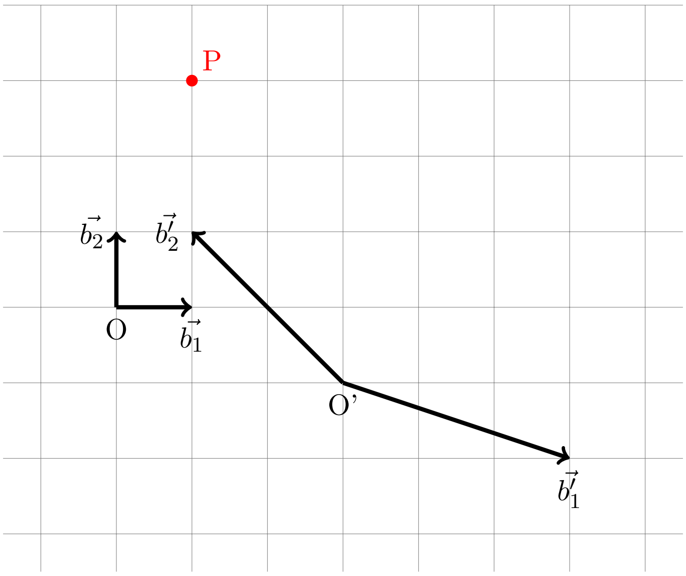

Abbildung 3: Zwei Koordinatensysteme K und K'.

Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung $(P)_{K'}$ des Punktes P bezüglich des Koordinatensystems $K' = (O'; \vec{b_1}', \vec{b_2}')$, das Sie der Abbildung entnehmen können.

(a) **Lösen Sie** die Aufgabe zunachst grafisch.

(b) Für die rechnerische Lösung verfahren Sie wie folgt:

- **Notieren Sie** zunächst die (sich aus der Abbildung ergebenden) Beziehungsgleichungen:

  $O' = O + 3\,\vec{b_1} + (-1)\,\vec{b_2}$ $\qquad \vec{b_1}' = \dots$ $\qquad \vec{b_2}' = \dots$

- **Setzen Sie** die Beziehungsgleichungen in die Gleichung

  $$O + 1\,\vec{b_1} + 3\,\vec{b_2} = P = O' + p_1'\,\vec{b_1}' + p_2'\,\vec{b_2}' \qquad \text{ein.}$$

- **Bestimmen Sie** die Werte für p_1' und p_2', indem Sie das Gleichungssystem, das sich nach geeignetem Koeffizientenvergleich ergibt, aufstellen und lösen.

Aufgabe H 21. *Eine Raute in der Ebene*

(a) **Wählen Sie** ein kartesisches Koordinatensystem $K = (O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ in Ihrer Zeichenebene. **Zeichnen Sie** den Ursprung O sowie die Basisvektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$.

Betrachten Sie eine Raute, von der zwei Eckpunkte gegeben sind, nämlich O und P mit Koordinatendarstellungen $(O)_K = (0, 0)$ und $(P)_K = (3, 0)$ Der linke obere Eckpunkt der Raute heiße Q, der Winkel zwischen den Seiten OP und OQ ist $60°$. Der Punkt Q besitzt bzgl. des Koordinatensystems K die folgenden Koordinaten:

$$(Q)_K = \left(\tfrac{3}{2}, 3\,\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

(b) **Zeichnen Sie** die Punkte O, P und Q in Ihre Zeichenebene ein. **Verwenden Sie** zur Konstruktion des Punktes Q einen Zirkel.

(c) Es sei $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ und $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$. **Bestimmen Sie** den Vektor $\vec{s} := \vec{p} + \vec{q}$ zeichnerisch.
Hinweis: $O + \vec{p} + \vec{q}$ ist der vierte Eckpunkt der Raute.

(d) **Berechnen Sie** die Koordinaten des Vektors $\vec{s} = \vec{p} + \vec{q}$ sowie dessen Länge $\| \vec{s} \|$.

(e) Wenn Sie ausgehend vom Punkt P das Lot auf die Gerade $g = O \vee Q$ (Verbindungsgerade von O und Q) fällen, erhalten Sie den Lotfußpunkt L.

- **Bestimmen Sie** den Punkt L zeichnerisch.
- **Berechnen Sie** den Vektor $\overrightarrow{OL}$ mit dem Skalarprodukt: $\overrightarrow{OL} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\vec{q} \cdot \vec{q}}\, \vec{q}$.
- **Bestimmen Sie** die Länge der Höhe $h = \overline{PL}$ mit dem Kreuzprodukt.

(f) **Zeigen Sie** (z.B. unter Verwendung von Polarkoordinaten), dass der Punkt Q bzgl. des Koordinatensystems K die Koordinaten besitzt $(Q)_K = \left(\tfrac{3}{2}, 3\,\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ besitzt.

(g) **Zeichnen Sie** den Vektor $\vec{q} - \vec{p} = \vec{q} + (-\vec{p})$ in die Raute ein, **heften Sie** in hierzu am Punkte P **an**.

(h) **Berechnen Sie** den Abstand $d(P, Q)$ der Punkte P und Q.

(i) **Bestimmen Sie** die Koordinaten $(D)_K = (d_1, d_2)$ des Diagonalenschnittpunkts D der Raute.

Betrachten Sie nun das Koordinatensystem $K' = (O; \vec{p}, \vec{q})$.

(j) Welche Punkte haben bezüglich K' die Koordinaten $(1, 0)$ bzw. $(0, 1)$ bzw. $(1, 1)$?

(k) **Bestimmen Sie** die Koordinaten $(D)_{K'}$ des Diagonalenschnittpunkts D bezüglich K'.

Aufgabe H 22. *Bewegte Koordinatensysteme $\rightsquigarrow$ zeitabhängige Koordinaten*

Gegeben sei ein (festes) kartesisches Koordinatensystem $K = (O; \vec{a_1}, \vec{a_2})$ in der Ebene und ein Punkt

$$P \;=\; O + 3\,\vec{a_1} + 1\,\vec{a_2}.$$

(a) Der Koordinatenursprung O_2 eines zweiten Koordinatensystems $K_2 = (O_2; \vec{a_1}, \vec{a_2})$ bewege sich in $-\vec{a_1}$-Richtung, und zwar so, dass er in jeder Sekunde eine Wegstrecke zurücklegt, die halb so lang ist wie $\vec{a_1}$, d.h.

$$O_2 \;=\; O + \left(-\frac{t}{2\,\mathrm{s}}\right)\vec{a_1}.$$

i) Bestimmen Sie die Koordinaten $(P)_{K_2}$ des Punktes P zum Zeitpunkt $t = 7\,\mathrm{s}$.

ii) Geben Sie eine allgemeine Formel für die Koordinaten $(P)_{K_2(t)} = (x(t), y(t))$ des Punktes P zum Zeitpunkt t an.

(b) Ein drittes Koordinatensystem $K_3 = \left(O; \vec{b_1}, \vec{b_2}\right)$ habe die Eigenschaft, dass sich die Basisvektoren im Gegenuhrzeigersinn um den festen Koordinatenursprung O drehen, und zwar so, dass sie für je eine volle Umdrehung 4 Sekunden benötigen. Zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ gilt $\vec{b_1} = \vec{a_1}$ und $\vec{b_2} = \vec{a_2}$.

i) Bestimmen Sie die Koordinaten $(P)_{K_3}$ des Punktes P zum Zeitpunkt $t = 7\,\mathrm{s}$.

ii) Geben Sie eine allgemeine Formel für die Koordinaten $(P)_{K_3(t)} = (x(t), y(t))$ des Punktes P zum Zeitpunkt t an.

(c) Ein Koordinatensystem $K_4 = \left(O_4; \vec{b_1}, \vec{b_2}\right)$ habe die folgenden Eigenschaften:

- Der Koordinatenursprung O_4 bewege sich gemäß der Vorschrift

$$O_4(t) \;=\; O + \left(-\frac{t}{2\,\mathrm{s}}\right)\vec{a_1}.$$

- Die Basisvektoren drehen sich im Gegenuhrzeigersinn um den (seinerseits bewegten[1]) Koordinatenursprung O_4, und zwar so, dass sie für je eine volle Umdrehung 4 Sekunden benötigen. Zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ gilt $\vec{b_1} = \vec{a_1}$ und $\vec{b_2} = \vec{a_2}$.

i) Bestimmen Sie die Koordinaten $(P)_{K_4}$ des Punktes P zum Zeitpunkt $t = 7\,\mathrm{s}$.

ii) Geben Sie eine allgemeine Formel für die Koordinaten $(P)_{K_4(t)} = (x(t), y(t))$ des Punktes P zum Zeitpunkt t an.

[1] Da wir Vektoren an jedem beliebigen Punkt anheften dürfen, wäre es ebenso richtig zu sagen, dass sich die Basisvektoren um den festen Koordinatenursprung O drehen.

Aufgabe H 23. *Eigenschaften der Länge (Norm) von Vektoren*

Wir schreiben im Folgenden aus Gründen der Platzersparnis mitunter $(v_1, v_2)^T$ anstelle von $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ bzw. $(v_1, v_2, v_3)^T$ anstelle von $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ wobei der hochgestellte Buchstabe „T" für „transponiert" steht. Transponieren bedeutet, Zeilen(vektoren) zu Spalten(vektoren) zu machen und umgekehrt.

(a) Es seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Vektoren mit $\vec{u} = (u_1, u_2)^T$ und $\vec{v} = (v_1, v_2)^T$ bzw. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ und $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, und es sei k eine reelle Zahl. Nehmen Sie die folgenden drei Eigenschaften der Länge (Norm) von Vektoren zur Kenntnis:

i) $\|k\,\vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$

ii) $\|\vec{v}\| \geq 0$, wobei $\|\vec{v}\| = 0$ genau für $\vec{v} = \vec{0}$ gilt, d.h. wenn $\vec{v}$ der Nullvektor ist;

iii) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (Dreiecksungleichung)

(b) Beweisen Sie für $\vec{v} = (v_1, v_2)^T$, dass die Identität $\|k\vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$ gilt.

Aufgabe H 24. *Einheitsvektoren – Normierte Vektoren*

Ein Vektor der Länge 1 heißt **Einheitsvektor**. Wir untersuchen nun, wie man zu einem gegebenen Vektor $\vec{v} \neq 0$ einen Einheitsvektor $\hat{v}$ bestimmt, der dieselbe Richtung wie $\vec{v}$ besitzt.

(a) Verifizieren Sie die folgende Behauptung: Für jeden Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist der zugehörige „normierte Vektor" $\hat{v}$, welcher durch $\hat{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\,\vec{v}$ gegeben ist, ein Einheitsvektor, besitzt also die Länge 1.

Hinweis: Beginnen Sie so: $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, *also gilt* $\hat{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\,\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

(b) Bestimmen Sie zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} -30 \\ 40 \end{pmatrix}$ den Einheitsvektor $\hat{v}$, der dieselbe Richtung wie $\vec{v}$ besitzt.

(c) Rechnen Sie nach (oder überlegen Sie sich auf elegantere Weise), dass der Vektor $\frac{5}{\sqrt{30^2+40^2}} \begin{pmatrix} -30 \\ 40 \end{pmatrix}$ die Länge 5 besitzt.

(d) Es sei $\vec{v} \neq 0$ ein beliebiger Vektor und k ein beliebiger Skalar. Zeigen Sie mit den Informationen aus Aufgabe H 23, dass der Vektor $k\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ die Länge $|k|$ besitzt.

Aufgabe H 25. *Diagonalen im Rechteck*

Es seien P und Q Punkte mit Ortsvektoren $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ und $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$. Betrachten Sie das Rechteck, das als Ecken die Punkte O, P, Q sowie den Punkt mit Ortsvektor $\vec{p}+\vec{q}$ besitzt.

Zeigen Sie, dass die Gleichung $\|\vec{p}+\vec{q}\| = \|\vec{p}-\vec{q}\|$ gilt, indem Sie $\|\vec{p}+\vec{q}\|^2 = (\vec{p}+\vec{q}) \cdot (\vec{p}+\vec{q})$ und $\|\vec{p}-\vec{q}\|^2 = (\vec{p}-\vec{q}) \cdot (\vec{p}-\vec{q})$ auswerten.

Aufgabe H 26. *Punkte und Vektoren in der Ebene*

(a) Wählen Sie ein kartesisches Koordinatensystem $K = (O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ in Ihrer Zeichenebene. Zeichnen Sie den Ursprung O sowie die Basisvektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$.

Erinnerung: Kartesische Koordinatensysteme zeichnen sich dadurch aus, dass alle Basisvektoren die Länge 1 besitzen und paarweise aufeinander senkrecht stehen.

(b) Bezüglich dieses Koordinatensystems sollen die Punkte P, Q und R die Koordinatendarstellungen $(P)_K = (-2, 1)$, $(Q)_K = (3, 3)$ und $(R)_K = (-4, 2)$ besitzen.

(c) Zeichnen Sie den Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ der Punkte P und Q sowie den Verbindungsvektor $\overrightarrow{PR}$ der Punkte P und R. Berechnen Sie die Koordinaten dieser Vektoren. *Hinweis: Die Koordinaten ergeben sich als Differenzen der Punktkoordinaten.*

(d) Konstruieren Sie den Summenvektor $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$ mithilfe einer geeigneten Parallelogrammkonstruktion und bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$.

(e) Bestimmen Sie graphisch die Koordinatendarstellungen der Punkte $(P)_{K'}$, $(Q)_{K'}$ und $(R)_{K'}$ bezüglich des Koordinatensystems $K' = (O'; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, wobei $(O')_K = (-1, 4)$ gelten soll.

(f) Bestimmen Sie noch einmal die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{PQ}$ unter Verwendung von $(P)_{K'}$ und $(Q)_{K'}$.

(g) Bestimmen Sie noch einmal die Koordinaten des Punktes $(Q)_{K'}$ indem Sie $(P)_{K'} + \left(\overrightarrow{PQ}\right)_{K'}$ berechnen.

(h) Machen Sie sich klar, dass die Addition von Punkten keinen Sinn hat, da diese nicht koordinatenunabhängig ist. Addieren Sie z.B. $(P)_K + (Q)_K$ und $(P)_{K'} + (Q)_{K'}$. Sie werden feststellen, dass sich zwei unterschiedliche Punkte ergeben.

(i) Machen Sie sich klar, dass die Skalierung von Punkten keinen Sinn hat, da diese nicht koordinatenunabhängig ist. Skalieren Sie z.B. $(P)_K$ bzw. $(P)_{K'}$ auf die Hälfte. Sie werden feststellen, dass sich zwei unterschiedliche physikalische Punkte ergeben.

(j) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PQ}$.

Tutoriumsübungen

Aufgabe T 12. *Koordinatendarstellungen von Punkten der Ebene*

Der folgenden Abbildung können Sie entnehmen, dass der Punkt P bezüglich des Koordinatensystems $K = (O; \vec{b_1}, \vec{b_2})$ die Koordinaten $(P)_K = (1, 3)$ besitzt.

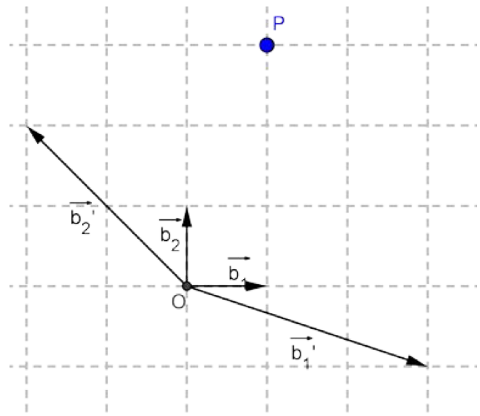

Abbildung 4: Koordinatensysteme K und K'.

(a) Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung $(P)_{K'}$ des Punktes P bezüglich des Koordinatensystems $K' = (O'; \vec{b_1}', \vec{b_2}')$, das Sie der Abbildung entnehmen können. Gesucht sind also Zahlen p_1' und p_2' so, dass die Gleichung $P = O + p_1' \vec{b_1}' + p_2' \vec{b_2}'$ erfüllt ist.

(i) **Lösen Sie** die Aufgabe zunachst grafisch.

(ii) Für die rechnerische Lösung verfahren Sie wie folgt:

– **Notieren Sie** zunächst die (sich aus der Abbildung ergebenden) Beziehungsgleichungen: $O' = O, \quad \overrightarrow{b_1}' = \ldots \quad \overrightarrow{b_2}' = \ldots.$

– **Setzen Sie** die Beziehungsgleichungen in die Gleichung

$$O + 1\,\overrightarrow{b_1} + 3\,\overrightarrow{b_2} = P = O' + p_1'\,\overrightarrow{b_1}' + p_2'\,\overrightarrow{b_2}' \qquad \text{ein.}$$

– **Bestimmen Sie** die Werte für p_1' und p_2', indem Sie das Gleichungssystem, das sich nach geeignetem Koeffizientenvergleich ergibt, aufstellen und lösen.

(b) Es sei $Q = P + 2\vec{b_1} + (-1)\vec{b_2}$. Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung $\vec{v} = \left(\overrightarrow{PQ}\right)_{K'}$ des Vektors $\overrightarrow{PQ}$ bezüglich des Koordinatensystems $K' = (O; \vec{b_1}', \vec{b_2}')$. Gesucht sind also Zahlen v_1' und v_2' so, dass die Gleichung $\vec{v} = v_1' \vec{b_1}' + v_2' \vec{b_2}'$ erfüllt ist. *Hinweis: Lösen Sie die Aufgabe zunächst rechnerisch und dann grafisch.*

(c) Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung $(P)_{K''}$ des Punktes P bezüglich des Koordinatensystems $K'' = (O''; \vec{b_1}'', \vec{b_2}'')$, das in Abbildung 5 dargestellt ist.

(d) Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung $\vec{v} = \left(\overrightarrow{PQ}\right)_{K''}$ des Vektors $\overrightarrow{PQ}$ bezüglich des Koordinatensystems K''

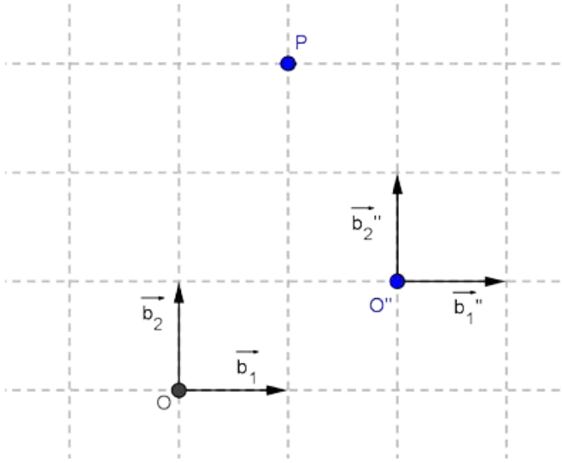

Abbildung 5: Koordinatensysteme K und K''.

Aufgabe T 13. *Länge von Vektoren und Abstand von Punkten, Winkel*

(a) Wählen Sie ein kartesisches Koordinatensystem $K = \big(O; \vec{e_1}, \vec{e_2}\big)$ in Ihrer Zeichenebene. Zeichnen Sie den Ursprung O sowie die Basisvektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$.

Erinnerung: Kartesische Koordinatensysteme zeichnen sich dadurch aus, dass alle Basisvektoren die Länge 1 besitzen und paarweise aufeinander senkrecht stehen.

Bezüglich dieses Koordinatensystems sollen die Punkte P und Q die Koordinatendarstellungen $(P)_K = (-2, 1)$ und $(Q)_K = (3, 3)$ besitzen.

(b) Zeichnen Sie die Punkte P und Q, den Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ sowie die Ortsvektoren $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ und $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$.

(c) Berechnen Sie die Länge $\|\vec{p}\|$ des Vektors $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ (und damit den Abstand $d(O, P)$ des Punktes P vom Ursprung O).

(d) Berechnen Sie den Winkel α zwischen den Vektoren $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ und $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$. Verwenden Sie hierzu die Formel

$$\cos(\alpha) \;=\; \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\|\vec{p}\| \, \|\vec{q}\|}.$$

Messen Sie den Winkel mit Ihrem Geodreieck und vergleichen Sie die Werte.

Hinweis: $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \;\approx\; 108^\circ.$

(e) Berechnen Sie den Abstand $d(P, Q)$ der Punkte P und Q (und damit die Länge $\|\overrightarrow{PQ}\|$ des Vektors $\overrightarrow{PQ}$.

(f) Zeichnen Sie den Vektor $\vec{s} := \vec{p} + \vec{q}$.

(g) Berechnen Sie den Diagonalenschnittpunkt D in dem Parallelogramm mit den Eckpunkten O, Q, $Q + \vec{p}$ und P.

(h) Verifizieren Sie, dass die Gleichung $\|\vec{p} + \vec{q}\| = \|\vec{p}\| + \|\vec{q}\|$ nicht gilt.

Bemerkung: Für alle Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gilt vielmehr die sogenannte Dreiecksungleichung:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \;\leq\; \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \,.$$

Aufgabe T 14. *Einheitsvektoren und normierte Vektoren*

Ein Vektor der Länge 1 heißt **Einheitsvektor**. Zu einem gegebenen Vektor $\vec{v} \neq 0$ erhält man einen Einheitsvektor $\hat{v}$, der in dieselbe Richtung wie $\vec{v}$ zeigt, durch die sogenannte „Normierung“:

$$\hat{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\,\vec{v}.$$

(a) Ist der Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ein Einheitsvektor?

(b) **Normieren Sie** den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$, bestimmen Sie also den Einheitsvektor $\hat{v}$, der in die gleiche Richtung wie $\vec{v}$ zeigt.

Aufgabe T 15. *Eine Raute in der Ebene*

(a) **Wählen Sie** ein kartesisches Koordinatensystem $K = \left(O; \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ in Ihrer Zeichenebene. **Zeichnen Sie** den Ursprung O sowie die Basisvektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$.

Betrachten Sie eine Raute, von der zwei Eckpunkte gegeben sind, nämlich O und P mit Koordinatendarstellungen $(O)_K = (0, 0)$ und $(P)_K = (3, 0)$ Der linke obere Eckpunkt der Raute heiße Q, der Winkel zwischen den Seiten OP und OQ ist $60°$. Der Punkt Q besitzt bzgl. des Koordinatensystems K die folgenden Koordinaten:

$$(Q)_K = \left(\tfrac{3}{2}, 3\,\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

(b) **Zeichnen Sie** die Punkte O, P und Q in Ihre Zeichenebene ein. **Verwenden Sie** zur Konstruktion des Punktes Q einen Zirkel.

(c) Es sei $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ und $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$. **Bestimmen Sie** den Vektor $\vec{s} := \vec{p} + \vec{q}$ zeichnerisch.

Hinweis: $O + \vec{p} + \vec{q}$ ist der vierte Eckpunkt der Raute.

(d) Wenn Sie ausgehend vom Punkt P das Lot auf die Gerade $g = O \vee Q$ (Verbindungsgerade von O und Q) fällen, erhalten Sie den Lotfußpunkt L.

- **Bestimmen Sie** den Punkt L zeichnerisch.
- **Berechnen Sie** den Vektor $\overrightarrow{OL}$ mit dem Skalarprodukt: $\overrightarrow{OL} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{\vec{q}\cdot\vec{q}}\,\vec{q}$.
- **Bestimmen Sie** die Länge der Höhe $h = \overline{PL}$ mit dem Kreuzprodukt.

(e) **Zeichnen Sie** den Vektor $\vec{q} - \vec{p} = \vec{q} + (-\vec{p})$ in die Raute ein, **heften Sie** ihn hierzu am Punkte P **an**.

(f) **Berechnen Sie** den Abstand $d(P, Q)$ der Punkte P und Q.

(g) **Bestimmen Sie** die Koordinaten $(D)_K = (d_1, d_2)$ des Diagonalenschnittpunkts D der Raute.

Betrachten Sie nun das Koordinatensystem $K' = (O; \vec{p}, \vec{q})$.

(h) Welche Punkte haben bezüglich K' die Koordinaten $(1, 0)$ bzw. $(0, 1)$ bzw. $(1, 1)$?

(i) **Bestimmen Sie** die Koordinaten $(D)_{K'}$ des Diagonalenschnittpunkts D bezüglich K'.