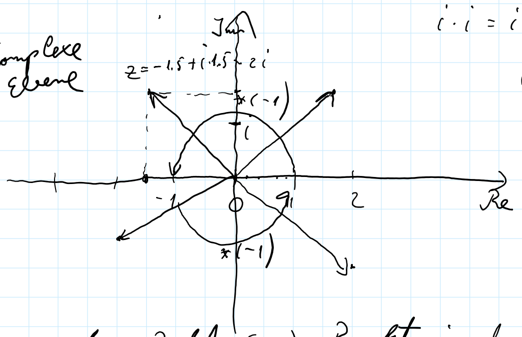
Komplexe Zahlen

Dienstag, 7. Mai 2024 08:08

Komplexe Ebene

$i \cdot i = i^2 = -1$

$i = \sqrt{-1}$



Komplexe Zahl $\Longleftrightarrow$ Punkt in der komplexe Ebene

$\mathbb{C} = \{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

x: Realanteil , y: Imaginäranteil

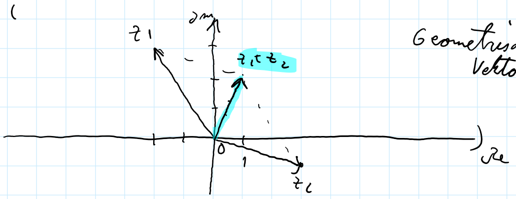
Rechnen mit komplexen Zahlen

Addition: $z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2$
$= x_1 + x_2 + (y_1 + y_2) i$

i: wie eine Variable behandeln

$z_1 = -2 + 3i$
$z_2 = 3 - i$

$z_1 + z_2 = -2 + 3i + 3 - i = 1 + 2i$



Geometrisch: Vektoraddition

Multiplikation

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + y_1 y_2 i^2$

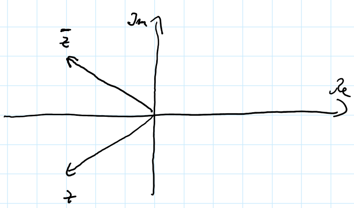
$= \underbrace{(x_1 x_2 - y_1 y_2)}_{Re} + \underbrace{(x_1 y_2 + x_2 y_1)}_{Im.} i$

$z_1 = -2 + 3i$
$z_2 = 3 - i$

$z_1 z_2 = (-2) \cdot 3 - 3 \cdot (-1) + [(-2)(-1) + 3 \cdot 3] i$
$= -3 + 11 i$

Komplex konjugierte Zahl $\bar{z}$

$z = x + iy$
$\bar{z} = x - iy$



Betrag einer komplexen Zahl $|z|$: Abstand zum Ursprung

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|z| = |\bar{z}|$

$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - \underbrace{i^2}_{i^2 = -1} y^2 = x^2 + y^2$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Multiplikative Inverse z^{-1} für alle $z \neq 0$

Umstellung von : $\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z} = z^{-1}$

$$z^{-1} = \frac{\bar z}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} i$$

$z \cdot z^{-1} = 1$

$z = 3 - i \qquad z^{-1} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} i$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = z_1 \frac{\bar z_2}{|z_2|^2}$$

$$= (-2+3i)\cdot\left(\frac{3}{10} + \frac{1}{10} i\right)$$

$$= \underbrace{\left(-2\cdot\frac{3}{10} - 3\cdot\frac{1}{10}\right)}_{x_1 x_2 - y_1 y_2} + \underbrace{\left((-2)\cdot\frac{1}{10} + 3\cdot\frac{3}{10}\right)}_{x_1 y_2 + x_2 y_1} i$$

$$= -\frac{9}{10} + \frac{7}{10} i$$

$z_1 = -2+3i$ Als Matrix

$z_2 = 3 - i$

$$\{z_1\} = \begin{pmatrix}-2 & -3\\ 3 & -2\end{pmatrix}, \quad \{z_2\} = \begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\{z_1\}+\{z_2\} = \begin{pmatrix}-2+3 & -3+1\\ 3-1 & -2+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

kartesisch: $1+2i$

$$\{z_1\}\cdot\{z_2\} = \begin{pmatrix}-2 & -3\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-6+3 & -2-9\\ 9+2 & 3-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & -11\\ 11 & -3\end{pmatrix}$$

$-3+11i$

$$\{z\}^{-1} = \underbrace{\frac{1}{x^2+y^2}}_{\frac{1}{|z|^2}} \underbrace{\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}}_{\{\bar z\}}$$

kartesisch $z^{-1} = \frac{\bar z}{|z|^2}$

$$\{z\} = \begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}, \quad \{z\}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3/10 & -\frac{1}{10}\\ \frac{1}{10} & 3/10\end{pmatrix}$$

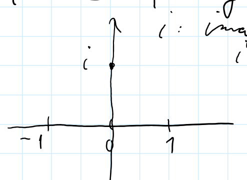
$$\{z\} = \begin{pmatrix}x & -y\\ y & x\end{pmatrix}$$

$\frac{3}{10} + \frac{1}{10} i$

Wdh. Komplexe Zahlen $\mathbb{C} = \{x+iy \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

i: imaginäre Einheit

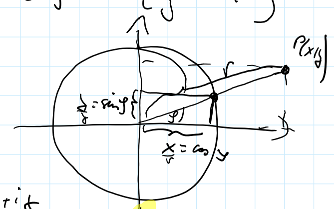
$i = \sqrt{-1}$



Kart. Darst.: $z = x+iy = 1\cdot x + i\,y$

Matrix Darst. $\{z\} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}y = \begin{pmatrix}x & -y\\ y & x\end{pmatrix}$

Polardarst. $z = r(\underbrace{\cos\varphi}_{x} + i\underbrace{\sin\varphi}_{y})$



Komplexe e-Funktion: $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$

Wir betrachten die komplexen Zahlen der Form $e^{i\varphi}$

$z = e^{i\varphi} \qquad \bar{z} = e^{-i\varphi}$

$z\bar{z} = |z|^2$

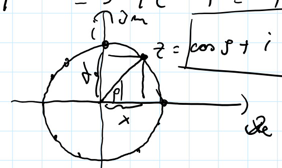
$e^{i\varphi} \cdot e^{-i\varphi} = |e^{i\varphi}|^2$

$e^0 = |e^{i\varphi}|^2$

$1 = |e^{i\varphi}|^2 \quad \Rightarrow |e^{i\varphi}| = 1$

$z = \boxed{\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}}$

Euler Identität



$z = x + iy = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$\varphi = \alpha + \beta$

$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$

$e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = \quad // \quad //$

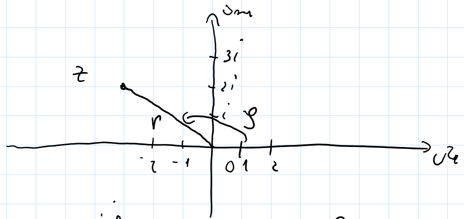
$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i(\sin(\alpha+\beta))$

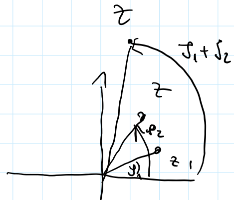
$\cos\alpha\cos\beta + \underbrace{i^2}_{-1}\sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$

$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$

Exponentialform

$z = r(\underbrace{\cos\varphi + i\sin\varphi}_{\text{Euleridentität}}) = r \cdot e^{i\varphi}$





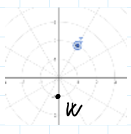
$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

- Bestimmen Sie die Exponentialdarstellungen der komplexen Zahlen $z = 1 + \sqrt{3}\,i$ und $w = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}i}}$ und zeichnen Sie diese in der Gauß'schen Zahlenebene. $1 + 1{,}73\ldots i$

$z = 1 + \sqrt{3}\,i \qquad r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$$\varphi = \begin{cases} +\operatorname{acos}\left(\frac{x}{r}\right), & y \geq 0 \\ -\operatorname{acos}\left(\frac{x}{r}\right) & y < 0 \end{cases}$$



$\varphi = \operatorname{acos}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$

$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$w = \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{2}}} \qquad \left\{ \frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \right\}$

$= \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\underbrace{|e^{i\frac{\pi}{2}}|^2}_{1^2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Berechnen oder bestimmen und zeichnen Sie für $z = 2 - 1i$ das Bild unter der Abbildung

a) $z \mapsto e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot z$, $= i(2-i) = 2i - \underbrace{i^2}_{-1} = 1 + 2i$

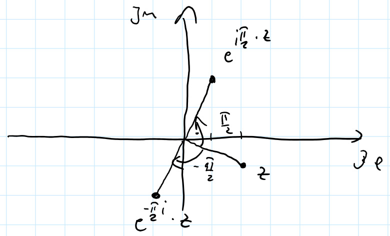
b) $z \mapsto -i \cdot z$. $= -i(2-i) = -2i + i^2 = -1 - 2i$

Im $\qquad e^{i\varphi}$

Abbildung

a) $z \mapsto e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot z$, $= i(2-i) = 2i - \underbrace{i^2}_{-1} = 1+2i$

b) $z \mapsto -i \cdot z$. $= -i(2-i) = -2i + i^2 = -1-2i$



Allg: $z = r \cdot e^{i\varphi}$

$e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot r e^{i\varphi} = r \cdot e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}$

Drehung 90°

$z_1 = 3 \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$z_2 = 2\, e^{i\frac{\pi}{3}}$

a) z_1, z_2 skizzieren

b) $z_1 \cdot z_2$ u. "

c) z_1, z_2 in Kart. Form.

d) $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} i$ in Polarform.

c) $z_1 = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{3}{2}$

Teilmenge der komplexen Zahlen, die die Gleichung $z^N = 1$ erfüllen.
Auf der Menge der komplexen Zahlen hat diese Gleichung genau N Lösungen.
Eine von Ihnen ist die N-te Haupteinheitswurzel
$W_N = \cos(\frac{2\pi}{N}) + i\sin(\frac{2\pi}{N}) = e^{i\frac{2\pi}{N}}$
Sie generiert alle N verschiedene Lösungen:
$W_N^0, W_N^1, W_N^2, \ldots, W_N^{N-1}$

$k = 0, 1, \ldots, N-1$

$$\left(W_N^{\,k}\right)^N = \left(\left(e^{i\frac{2\pi}{N}}\right)^k\right)^N = e^{i\frac{2\pi k \cancel{N}}{\cancel{N}}} = e^{i2\pi k} = 1$$

Vielfache von 360° / 2π

Komplexe Vektorräume

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4+2i \\ -2+i \\ 3-2i \\ i \end{pmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1+i \\ -1+i \\ -4-2i \\ -i \end{pmatrix}}_{y} = \begin{pmatrix} 5+3i \\ -3+2i \\ -1-4i \\ 0 \end{pmatrix}$$

SKP $\langle x | y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \ldots + x_N \bar{y}_N$

$x \bullet y$

$$\begin{pmatrix} 4+2i \\ -2+i \\ 3-2i \\ i \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1-i \\ -1-i \\ -4+2i \\ i \end{pmatrix} = (4+2i)(1-i) + (-2+i)(-1-i) + (3-2i)(-4+2i) + i^2$$

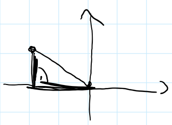
$= 4 - 4i + 2i - 2i^2 + 2 + 2i - i - i^2 + (-12) + 6i + 8i - 4i^2 - 1$

$= -7 + 13i + 2 + 1 + 4$

$= 13i$ (Skalar = komplexe Zahl)

$\langle x | x \rangle = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \ldots + x_N \bar{x}_N$

$= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_N|^2 =$



$$\begin{pmatrix} 4+2i \\ -2+i \\ 3-2i \\ i \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4-2i \\ -2-i \\ 3+2i \\ -i \end{pmatrix} = 16+4+4+1+9+4+1$$

$= 34$

Orthogonale Projektion

Gegeben: 2 Signalvektoren $x, y \in \mathbb{C}^N$

Gesucht: Proj. von x auf y

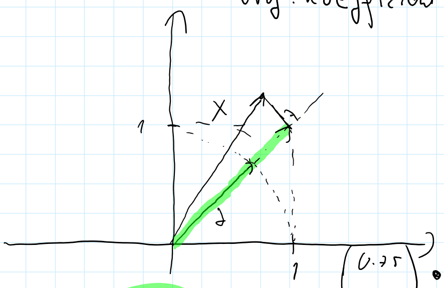
$x \circ y$

Gegeben: 2 Signalvektoren $x, y \in \mathbb{C}$

Gesucht: Proj. von x auf y

$$P_{\langle y\rangle} x = \frac{x \circ y}{\|y\|^2}\, y \quad \text{oder} \quad \frac{x \circ y}{y \circ y}\, y$$

Proj. koeffizient



$$x = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 1.25 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Proj}_{\langle y\rangle} x = \frac{\begin{pmatrix} 0.75 \\ 1.25 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}{1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\frac{3}{4\sqrt{2}} + \frac{5}{4\sqrt{2}}}{1}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{8}{4\sqrt{2}}\, y = \sqrt{2}\, y$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\sqrt{2}$ = Proj. koeff. Maß für wieviel von y in x vorhanden ist

Signalrekonstruktion aus Projektionen

Einfaches Bsp.: Proj. auf Standardbasis sind die Koordinaten des Vektors

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots x_{N-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

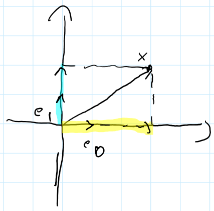
$$= \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

$N = 2$

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Wir proj. x auf die Standardbasis $e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P_{e_0}(x) = \frac{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$P_{e_1}(x) = \frac{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Originalsignal x: Summe der Proj.

$$x = P_{e_0}(x) + P_{e_1}(x) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

{gilt nur, wenn wir das Signal auf paarweise senkrechte Vektoren projizieren}

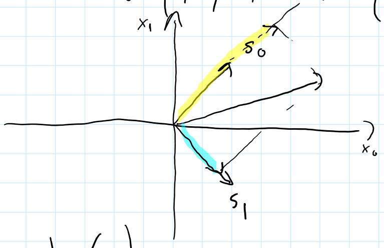
Interessant ist der Fall, wenn wir nicht auf die Standardbasis projizieren $\rightsquigarrow$ Koordinaten- oder Basistransformation interpretieren

Im Fall der diskreten Fouriertransf. (DFT): sind die Vektoren auf die man projiziert Komplexe ...

Im Fall der diskreten Fouriertransf. (DFT): sind die Vektoren auf die ~~man~~ projiziert Komplexe Sinusschwingungen / Exponentielle

Bsp $N = 2$

$s_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad s_k \quad k = 0, 1$



$$P_{s_0}(x) = \frac{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} s_0 = \frac{x_0 + x_1}{2} s_0$$

$$P_{s_1}(x) = \frac{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{2} s_1 = \frac{x_0 - x_1}{2} s_1$$

$$3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$P_{s_0}(x) + P_{s_1}(x) = \frac{x_0 + x_1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x_0 - x_1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_0 - x_1}{2} \\ \frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{-x_0 + x_1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x_0}{2} \\ \frac{2x_1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

DFT: Diskrete Fourier Transformation

Input x - Signal bzgl. der Zeit oder des Ortes
Output X - Signal bzgl. der Frequenz

$$X(k) = \frac{1}{N} \langle x | s_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, \bar{s}_k(n) \qquad k = 0, 1, \dots, N-1$$

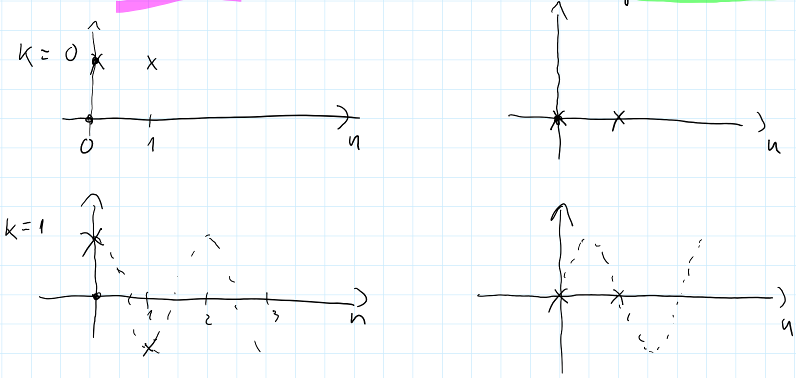
k-te Fourierkoeff. ist das Skalarprodukt zw. x u. der kten Komplexen Exponentiellen $s_k(n) = e^{i\frac{2\pi n k}{N}}$

2-Punkt-DFT $N = 2$

$$s_0 = \begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi \cdot 0 \cdot 0}{2}} \\ e^{i\frac{2\pi \cdot 1 \cdot 0}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s_0(n) = e^{i\frac{2\pi n \cdot 0}{N}} = \cos(n0) + i\sin(n0) \quad n = 0, 1$$

$$s_1 = \begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi \cdot 0 \cdot 1}{2}} \\ e^{i\frac{2\pi \cdot 1 \cdot 1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad s_1(n) = e^{i\frac{2\pi n \cdot 1}{2}} = e^{in\pi} = \cos n\pi + i\sin(n\pi) \quad n = 0, 1$$

Realteil | Imaginärteil



4-Punkt DFT $\qquad s_k(n) = e^{i\frac{2\pi n k}{N}} \qquad N = 4$

$k = 0, \dots, N-1$
$n = 0, \dots, N-1$

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi \cdot 0 \cdot 0}{4}} \\ \dots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \end{pmatrix}$$

$n = 0, \dots, N-1$

$$s_0 = \begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi \cdot 0 \cdot 0}{4}} \\ \vdots \\ e^{i\frac{2\pi \cdot 3 \cdot 0}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$s_1 = \begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi \cdot 0 \cdot 1}{4}} \\ e^{i\frac{2\pi \cdot 1 \cdot 1}{4}} \\ e^{i\frac{2\pi \cdot 2 \cdot 1}{4}} \\ e^{i\frac{2\pi \cdot 3 \cdot 1}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\frac{\pi}{2}} \\ e^{i\pi} \\ e^{i\frac{3\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$s_1(n) = e^{i\frac{2\pi \cdot n}{4}} = e^{i\frac{n\pi}{2}}$$

$n = 0, \dots, 3$

$$= \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n = i^n$$

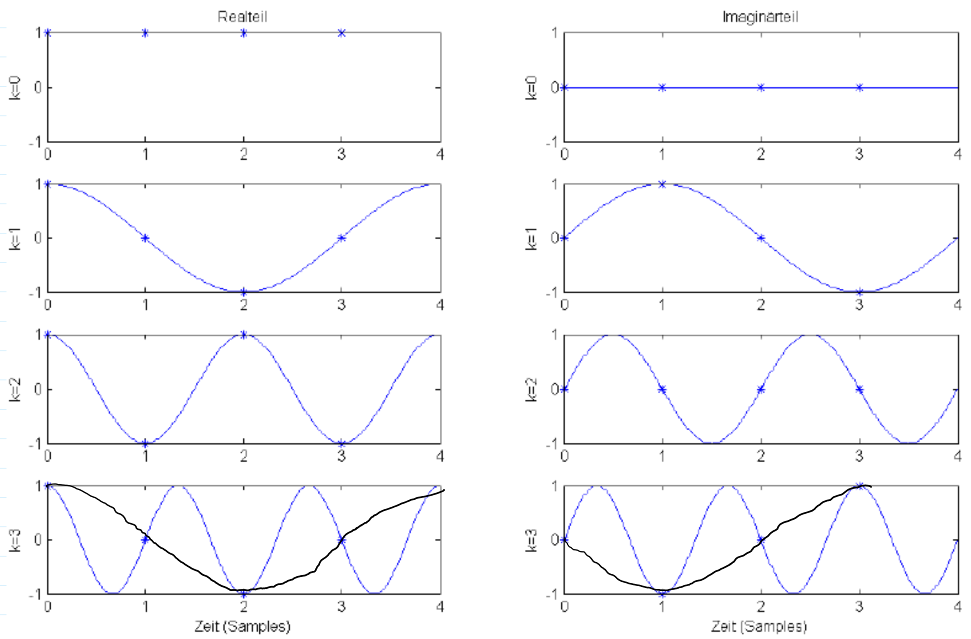
$$s_2 = \begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi \cdot 0 \cdot 2}{4}} \\ e^{i\frac{2\pi \cdot 1 \cdot 2}{4}} \\ e^{i\frac{2\pi \cdot 2 \cdot 2}{4}} \\ e^{i\frac{2\pi \cdot 3 \cdot 2}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$s_3 = \begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi \cdot 0 \cdot 3}{4}} \\ e^{i\frac{2\pi \cdot 1 \cdot 3}{4}} \\ e^{i\frac{2\pi \cdot 2 \cdot 3}{4}} \\ e^{i\frac{2\pi \cdot 3 \cdot 3}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\frac{3\pi}{2}} \\ e^{i3\pi} \\ e^{i\frac{9\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$s_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Realteil Imaginärteil



Beispiele

Geg. $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gesucht X $\qquad N = 4$

$$X(0) = \frac{1}{4}\langle x \mid s_0 \rangle = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1+1+1+1}{4} = 1$$

$$X(1) = \frac{1}{4}\langle x \mid s_1 \rangle = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}}_{\bar{s}_1} = \frac{1-i-1+i}{4} = 0$$

$$X(2) = \frac{1}{4}\langle x \mid s_2 \rangle = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$X(3) = \frac{1}{4}\langle x \mid s_3 \rangle = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}}_{\bar{s}_3} = \frac{1+i-1-i}{4} = 0$$

$$X = \{1, 0, 0, 0\}$$

$$X(k) = \frac{1}{N}\langle x \mid s_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, \bar{s}_k(n) \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Der Proj. koeff $\dfrac{\langle x \mid s_k \rangle}{\langle s_k \mid s_k \rangle} = \dfrac{\langle x \mid s_k \rangle}{\| s_k \|^2}$

$i\,\frac{2\pi n k}{N} \qquad -i\,\frac{2\pi n k}{N}$

$$\ldots \frac{\ldots}{\langle s_k | s_k \rangle} = \frac{\ldots}{\| s_k \|^2}$$

$$\langle s_k | s_k \rangle = e^{i\frac{2\pi nk}{N}} \cdot e^{-i\frac{2\pi nk}{N}} \qquad \text{für } n = 0, \ldots, N-1$$

$$= \underbrace{e^0 + e^0 + \ldots + e^0}_{N\text{-mal}} = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{N\text{-mal}} = N$$

Matrixformulierung der DFT: $(N = 4)$

Statt 4-mal SKP auszuführen können wir es kompakt als Matrix-Vektor Multiplikation aufschreiben

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{4}\begin{bmatrix} - & \bar{s}_0^T & - \\ - & \bar{s}_1^T & - \\ - & \bar{s}_2^T & - \\ - & \bar{s}_3^T & - \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Inverse DFT

- Signalrekonstruktion als Summe der Projektionen

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot s_k = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{i\frac{2\pi nk}{N}} \qquad n = 0, \ldots, N-1$$

$$= X(0) \cdot s_0 + X(1) \cdot s_1 + X(2)\, s_2 \ldots X(N-1) \cdot s_{N-1}$$

Zurück zum Bsp. $X = \{1, 0, 0, 0\}$

$$x = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$