2 Gleichungen, 2 Unbekannte: 2)

$$\begin{cases} g_1: & 2x_1 - x_2 = 1 \\ g_2: & x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

Lösung Schnittpunkt der beiden Geraden

$\mathbb{L} = \{(2,3)\}$

Wann gibt es keine Lösung oder ∞ viele Lösungen?

Keine Lösung: Geraden sind $\parallel$

$$a x_1 + b x_2 + c = 0$$
$$a x_1 + b x_2 + c_1 = 0$$
$c_1 \neq c$

∞ viele Lösungen

$$a x_1 + b x_2 + c = 0$$
$$k a x_1 + k b x_2 + k c = 0$$

LGS mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten

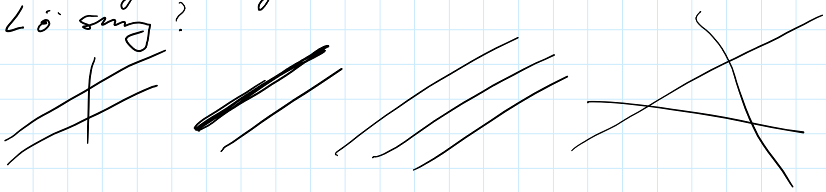
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - 6x_2 = -2 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

Geometrische Bedeutung der Zeilen: Ebenen im Raum

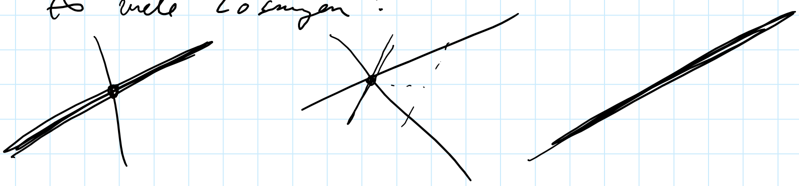
$\mathbb{L} = \{(1,1,2)\}$

Bei diesem Fall schneiden sich alle 3 Ebenen in einem Punkt $(1,1,2)$

Wann gibt es für 3 Gl. und 3 Unbekannte keine Lösung?



∞ viele Lösungen?



Gauß-Algorithmus

Fall mit eindeutiger Lösung

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - 6x_2 = -2 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Algo}]{\text{Gauß-}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Koeffizientenmatrix (KM)

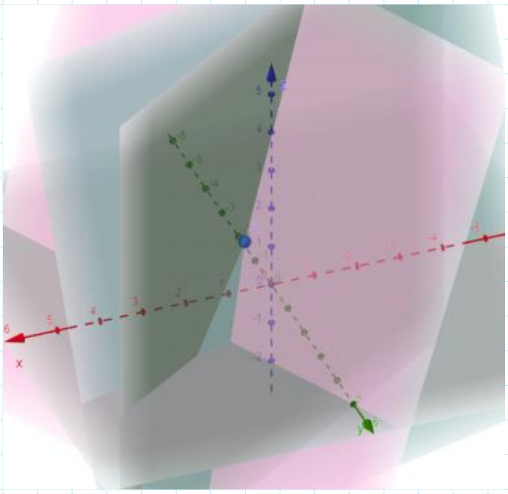
erweiterte KM (EKM)

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

$\mathbb{L} = \{(1,1,2)\}$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{array}\right. \qquad \mathbb{L} = \{(1,1,2)\}$$



1. Schritt: Führende 1 für x_1

$\frac{1}{2} z_1 \rightarrow z_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 5/2 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right)$$

2. Elimination von x_1 aus z_2 und z_3 mithilfe von Vielfachen der Zeile 1.

$? z_1 + z_2 \rightarrow z_2$

$? z_1 + z_3 \rightarrow z_3$

$-4 z_1 + z_2 \rightarrow z_2$

$2 z_1 + z_3 \rightarrow z_3$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccc} -4 & -2 & -2 & -10 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ \hline 0 & -8 & -2 & -12 \end{array} \qquad -4z_1 + z_2$$

3. Führende 1 für x_2

$? z_2 \rightarrow z_2$ $\qquad -\frac{1}{8} z_2 \rightarrow z_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/4 & 3/2 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{array}\right)$$

4. Schritt

Elimination von x_2 mithilfe von Vielfachen der Zeile 2

$? z_2 + z_1 \rightarrow z_1$

$? z_2 + z_3 \rightarrow z_3$

$-1/2 z_2 + z_1 \rightarrow z_1$

$-8 z_2 + z_3 \rightarrow z_3$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/8 & 7/4 \\ 0 & 1 & 1/4 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$

$-\frac{3}{4} + \frac{5}{2} = -\frac{3}{4} + \frac{10}{4} = \frac{7}{4}$

5. Schritt: Führende 1 für x_3

(hier nichts zu tun) ✓

6. Elimination von x_3 aus z_1 und z_2 mithilfe von Vielfachen von z_3

$? z_3 + z_2 \rightarrow z_2$

$? z_3 + z_1 \rightarrow z_1$

$-\frac{1}{4} z_3 + z_2 \rightarrow z_2$

$-\frac{3}{8} z_3 + z_1 \rightarrow z_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$-\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{4}{4} = 1$

Fall: alle Ebenen schneiden sich in einer Geraden

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 13 & 2 \end{array}\right)$$

Wir vertauschen z_1 und z_2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 13 & 2 \end{array}\right)$$

1. ✓

2. $-2z_1 + z_3 \to z_3$

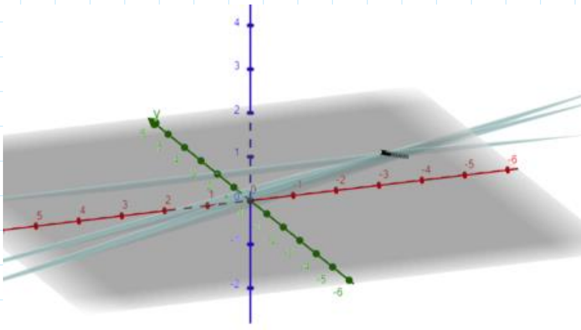
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

3. ✓

4. $-2z_2 + z_1 \to z_1$

   $-z_2 + z_3 \to z_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 - x_3 = -4 \\ x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_3 = t \qquad t \in \mathbb{R} \\ x_2 = 2 - 3t \\ x_1 = -4 + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -4 + t \\ x_2 = 2 - 3t \\ x_3 = t \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+t \\ 2-3t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ X(t) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Fall: keine Lösungen

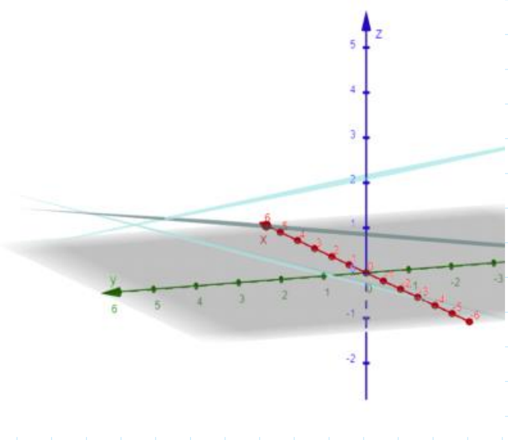
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 7 & 6 \\ -1 & 4 & -13 & 3 \\ 2 & 1 & 8 & 17 \end{array}\right)$$

1. ✓

2. $z_1 + z_2 \to z_2$

   $-2z_1 + z_3 \to z_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & +3 & -6 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 5 \end{array}\right)$$



3. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 5 \end{array}\right)$$

4. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \lightning$$

Rang eines LGS

Rang eines LGS

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \tilde{b}_1 \\
0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \tilde{b}_2 \\
\vdots & & \ddots & & & & \vdots \\
0 & & & & & 1 & \tilde{b}_r \\
\hline
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \tilde{b}_m
\end{array}\right)
$$

r = Rang eines LGS