Präsenzübungen

Erinnerung – Gruppen mit vier Elementen: In der Vorlesung haben wir gesehen, dass sich vier unterschiedliche Gruppentafeln aufstellen lassen, wenn wir annehmen, dass die betrachtete Gruppe neben dem Neutralelement e die weiteren Gruppenelemente a, b und c enthält. Wir haben festgestellt, dass sich drei dieser Gruppentafeln „durch Drehungen modellieren" lassen, die vierte jedoch nicht. Im Folgenden sind zwei (der von uns gefundenen vier) Gruppentafeln angegeben:

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Wir bezeichnen den durch die linke Verknüpfungstafel dargestellte Gruppentyp als **zyklischen Gruppe der Ordnung 4** (Symbol C_4) und den nichtzyklischen Typ (rechte Verknüpfungstafel) als **Kleinsche Vierergruppe** (Symbol V_4).

Aufgabe P 1. *Symmetrietransformationen von Rechtecken – Kleinsche Vierergruppe*

Die Menge der Symmetrietransformationen eines (beliebigen nichtquadratischen) Rechtecks mit der Verknüpfung $\circ$ (Hintereinanderausführung) bilden eine Gruppe, die vom Typ V_4 ist.

(a) **Zeichnen Sie** ein Rechteck, dessen Kanten parallel zu den Koordinatenachsen sind und dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt. **Machen Sie sich** anhand dieser Skizze **klar**, dass es genau die folgenden Transformationen sind, die das Rechteck in sich überführen: Die sogenannte „identische Abbildung" E, welche alle Punkte festlässt, die Drehung D um $180°$, die Spiegelung S_x an der x-Achse, die Spiegelung S_y an der y-Achse.

(b) **Schreiben Sie** in Form einer Tabelle für jede dieser vier Abbildungen **auf**, auf welchen Punkt die vier Ecken jeweils bewegt werden.

(c) Man erhält eine Gruppe, indem man die Hintereinanderausführung $\circ$ von Abbildungen als Verknüpfung einführt. **Stellen Sie** die Verknüpfungstafel **auf** und **vergleichen Sie** diese mit der Gruppentafeln von V_4.

Hinweise:

- Beachten Sie die **Reihenfolge der Ausführung**. Wenn f und g zwei Abbildungen sind, wird der Ausdruck $f \circ g$ so gelesen: „f **nach** g". Die **rechts** stehende Abbildung g muss **zuerst** ausgeführt werden, **danach** wird die links stehende Abbildung f ausgeführt. Wenn die Abbildung $f \circ g$ auf ein Element x angewandt wird, so ist also $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$.
- Um in der obigen Aufgabe **(c)** zum Beispiel das Ergebnis der Verknüpfung $S_x \circ D$ zu ermitteln, bestimmen Sie für jede Ecke, auf welchen Punkt sie abgebildet wird, wenn Sie **zuerst** D und **danach** S_x ausführen. Sie entnehmen dann Ihrer Tabelle aus Teilaufgabe **(b)**, welche der vier gegebenen Abbildungen die gleichen Bildpunkte wie $S_x \circ D$ liefert.

Aufgabe P 2. *Für Schnelle zugleich – für alle anderen zuhause: Quadratsymmetrien*

Zeichnen Sie ein Quadrat mit seinem Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Stellen Sie analog zur Aufgabe P 1 die Verknüpfungstafel für die (acht) Symmetrietransformationen dieses Quadrates auf.

$\boxed{\textbf{Ziel-Zeitmarke: 45 Minuten}}$

Aufgabe P 3. *8-Bit-Zweierkomplement-Darstellung ganzer Zahlen*

(a) Geben Sie an, welche ganzen (Dezimal-)Zahlen sich in Acht-Bit-Zweierkomplement-Darstellung (8-Bit-ZKD) schreiben lassen.

(b) Bestimmen Sie die 8-Bit-ZKDen der Dezimalzahlen 107_{10}, $(-107)_{10}$, 89_{10} und $(-89)_{10}$.

(c) Rechnen Sie nun (wie ein Computer) in der Welt der Zweierkomplementdarstellungen. Verwenden Sie die in Teilaufgabe **(b)** ermittelten Darstellungen

- zur Berechnung der 8-Bit-ZKD x, die der Dezimalzahl $X = 107_{10} - 89_{10}$ entspricht,
- zur Berechnung der 8-Bit-ZKD y, die der Dezimalzahl $Y = 89_{10} - 107_{10}$ entspricht.

Hinweis: $107_{10} - 89_{10} = 107_{10} + (-89)_{10}$, *usw.*

(d) Prüfen Sie nach, ob Ihre Ergebnisse x und y tatsächlich den Dezimalzahlen 18_{10} bzw. $(-18)_{10}$ entsprechen.

Wir verwenden im Folgenden die abkürzenden Schreibweisen **1** für $0000\,0001$ und **0** für $0000\,0000$. Ferner bezeichne $\bar{z}$ die 8-Bit-Folge, die aus z durch **bitweise Inversion** entsteht. Der Ausdruck **Zweierkomplementbildung** bezeichnet den Übergang $z \mapsto \bar{z} + \mathbf{1}$.

(e) **Betrachten Sie** die 8-Bit-ZKD $a = 1010\,1110$, welche eine negative Zahl A darstellt. Um A zu bestimmen, haben Sie mehrere Möglichkeiten, vgl. auch Aufgabe H 9. Im Folgenden bezeichne b die 8-Bit-ZKD der positiven Zahl $B := -A$.

> **Alternative 1:** Machen Sie die Operation rückgängig, mit der man durch Zweierkomplementbildung von b zu a käme: Aus $a = \overline{b} + \mathbf{1}$ folgt $a - \mathbf{1} = \overline{b}$ und $\overline{a - \mathbf{1}} = b$. Ziehen Sie also $\mathbf{1} = 0000\,0001$ von a ab, wenden Sie auf das Ergebnis bitweise Inversion an, um b zu erhalten, bestimmen Sie hieraus B und schließlich $A = -B$.
>
> **Alternative 2:** Bilden Sie $\overline{a} + \mathbf{1} = \overline{\overline{b} + \mathbf{1}} + \mathbf{1} = b$. Invertieren Sie also a bitweise, addieren Sie $\mathbf{1} = 0000\,0001$ zu $\bar{a}$, um b zu erhalten, bestimmen Sie hieraus B und schließlich $A = -B$.
>
> **Alternative 3:** Schreiben Sie a als Summe $1010\,1110 = 1000\,0000 + 0010\,1110$ und berechnen Sie A als Summe von $-(128)_{10}$ und der Dezimalzahl, die der Folge $0010\,1110$ entspricht.

Welche Alternative sagt Ihnen am besten zu?

Ziel-Zeitmarke: 90 Minuten

Für Schnelle sogleich, für alle anderen zuhause:

Aufgabe P 4. *Schriftliche Addition und Subtraktion im Dezimal- und im Dualsystem*

(a) Berechnen Sie schriftlich die Summe S und danach die Differenz D der beiden Dezimalzahlen 713 und 386. Beobachten Sie, wo Sie Überträge notieren bzw. wo Sie sich „Ziffern borgen".

(b) Berechnen Sie zunächst die Summe $s = a + b$ und danach die Differenz $d = a - b$ der beiden Dualzahlen $a = 0111\,0001$ und $b = 0101\,0110$. Führen Sie Ihre Rechnungen **unbedingt im Dualsystem** durch. Auch hier müssen Sie Überträge bilden bzw. sich „Ziffern borgen".

Erst nachdem Sie Ihre Rechnungen im Dualsystem durchgeführt haben, übersetzen Sie bitte die Zahlen a, b, s und d ins Dezimalsystem.

Hausübungen

Die in der Präsenzübung zu Übungseinheit 2 teilweise behandelte Aufgabe H 1 kann nach der Übungssitzung noch einmal aufgegriffen und vertieft werden.

Aufgabe H 1. *Schriftliche Addition und Subtraktion im Dezimal- und im Dualsystem*

(a) Berechnen Sie schriftlich die Summe S und danach die Differenz D der beiden Dezimalzahlen 713 und 386. Beobachten Sie, wo Sie Überträge notieren bzw. wo Sie sich „Ziffern borgen“.

Sie finden die Vorgehensweise bei der Subtraktion in Online-Quellen, studieren Sie dort die Angaben unter den Stichworten „Abziehverfahren“ „Ergänzungsverfahren“ und „Entbündelungsverfahren“.

(b) Berechnen Sie zunächst die Summe $s = a + b$ und danach die Differenz $d = a - b$ der beiden Dualzahlen $a = 0111\,0001$ und $b = 0101\,0110$. Führen Sie Ihre Rechnungen **unbedingt im Dualsystem** durch. Auch hier müssen Sie Überträge bilden bzw. sich „Ziffern borgen“.

Erst nachdem Sie Ihre Rechnungen im Dualsystem durchgeführt haben, übersetzen Sie bitte die Zahlen a, b, s und d ins Dezimalsystem.

(c) Führen Sie die Subtraktion der Dezimalzahlen $5\,160\,467 - 1\,862\,584$ einmal nach dem „Entbündelungsverfahren“ und einmal nach dem „Ergänzungsverfahren“ durch.

Aufgabe H 2. *Gruppen mit vier Elementen*

Gegeben sei eine Gruppe G mit vier Elementen e, a, b, c, wobei e das Neutralelement der Gruppe ist. Die Verknüpfungen in endlichen Gruppen kann man in Verknüpfungstafeln aufschreiben. Im Folgenden sind noch einmal zwei Gruppentafeln für diese vier Elemente angegeben:

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(a) **Betrachten Sie** die linke Verknüpfungstafel und **bestimmen Sie**

$$a * a = a^2, \quad a * a * a = a^3, \quad a * a * a * a = a^4, \quad a * a * a * a * a = a^5, \ \ldots$$
$$b * b = b^2, \quad b * b * b = b^3, \ \ldots$$
$$c * c = c^2, \quad c * c * c = c^3, \ \ldots \ .$$

Welche Ergebnisse ergeben sich für Potenzen $n > 4$?

(b) Zeigen Sie anhand der einschlägigen Definitionen, die Sie bitte in den Vorlesungsfolien nachlesen, dass die durch die linke Tafel dargestellte Gruppe **zyklisch** ist.

(c) **Betrachten Sie** nun die rechte Verknüpfungstafel und verfahren Sie analog zur Teilaufgabe **(a)**. Ist die durch die rechte Tafel dargestellte Gruppe zyklisch?

(d) Untersuchen Sie die beiden anderen möglichen Verknüpfungstafeln (vgl. Vorlesungsfolien) für Gruppen mit vier Elementen in analoger Weise und weisen Sie nach, dass auch diese zum zyklischen Typ gehören.

Aufgabe H 3. *Der Körper mit zwei Elementen*

Es sei $\mathbb{F}_2$ der Körper, welcher (nur) zwei Elemente enthält. Die beiden Elemente bezeichnen wir mit 0 bzw. 1. Stellen Sie die Verknüpfungstafeln für die Addition $\oplus$ und für die Multiplikation $\odot$ in $\mathbb{F}_2$ auf.

Hinweis: Lassen Sie sich durch die vielleicht ungewohnten Symbole $\oplus$ und $\odot$ nicht verwirren. Zur Aufstellung der Additionstafel gehen Sie so vor wie in der Vorlesung (Sudoku-Prinzip). Zur Aufstellung der Multiplikationstafel verwenden Sie die Tatsache, dass $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$ für alle $a \in F_2$ gilt.

Aufgabe H 4. *Ein kleiner endlicher Körper*

Betrachten Sie den Körper $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ mit drei Elementen und stellen Sie die Verknüpfungstafel für die Addition und für die Multiplikation auf.

Aufgabe H 5. *Ein weiterer kleiner endlicher Körper*

Betrachten Sie den Körper $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, a, b\}$ mit vier Elementen und stellen Sie die Verknüpfungstafel für die Addition und für die Multiplikation auf.

Hinweis: In diesem Körper gelten die Beziehungen $1 + 1 = 0$, $a + a = 0$, $b + b = 0$.

Aufgabe H 6. *Sudoku-Prinzips für Gruppentafeln*

In der Vorlesung wurde das vom Dozenten so genannte „Sudoku-Prinzip“ für Gruppentafeln vorgestellt: **Jede Gruppentafel erfüllt das Sudokuprinzip**.

Die Umkehrung dieser Aussage („Jedes Sudoku stellt eine Gruppentafel dar.“) **ist jedoch nicht richtig. Es gibt Sudokus, die keine Gruppentafel darstellen** Dies wird nun demonstriert.

Sudokus mit fünf Elementen – Gruppe oder nicht?

$\cdot$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c

$\cdot$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	e	d	b	c
b	b	c	e	d	a
c	c	d	a	e	b
d	d	b	c	a	e

Betrachten Sie zunächst die linke Gruppentafel einer Gruppe mit fünf Elementen:

(a) Ist die dargestellte Gruppe kommutativ?

(b) Die Gruppe ist zyklisch. Welche Gruppenelemente sind Erzeuger der Gruppe? *Bemerkung: Jede Gruppe mit fünf Elementen ist zyklisch*

(c) Die rechte Tafel ist zwar ein regelgerechtes Sudoku (stimmt das?), stellt jedoch keine Gruppentafel dar. Konnen Sie erklären, warum? *Hinweis: Finden Sie (mindestens) eine Verletzung des Assoziativgesetzes; bestimmen Sie z.B. $(a * b) * c$ und $a * (b * c)$.*

Aufgabe H 7. *Ein Ring mit vier Elementen – „Restklassenring modulo 4"*

Wir betrachten nun die zyklische Gruppe C_4, bezeichnen die Elemente mit $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$ und verwenden die Addition $+$ als Verknüpfung.

Die hier dargestellte Gruppe ist wie folgt motiviert: Wir betrachten die Reste, die sich bei der ganzzahligen Division natürlicher oder ganzer Zahlen durch 4 ergeben. So gilt z.B. $13 = 3 \cdot 4 + 1$, der sich hier ergebende Rest ist also gleich 1. Man schreibt hierfür auch $13 \mod 4 = 1$. Für 27 etwa ergibt sich der Rest 3, dagegen ist z.B. 20 durch 4 teilbar, hier ergibt sich also der Rest 0.

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

Das Symbol $\overline{0}$ bezeichnet nun die Menge all derjenigen ganzen Zahlen, die bei ganzzahliger Division durch 4 den Rest 0 ergeben. Dementsprechend bezeichnet $\overline{1}$ die Menge all derjenigen ganzen Zahlen, die bei ganzzahliger Division durch 4 den Rest 1 ergeben, usw.

Mit diesen sogenannten Restklassen kann man nun rechnen. Beispielsweise lässt sich die Gleichung $\overline{1}+\overline{3} = \overline{0}$, die sich aus der obigen Verknüpfungstafel ablesen lässt, wie folgt interpretieren:

Addiert man irgendeine Zahl aus $\overline{1}$ zu irgendeiner Zahl aus $\overline{3}$, so ist das Ergebnis durch 4 teilbar, liegt also in $\overline{0}$.

(a) Illustrieren Sie den oben beschriebenen Sachverhalt anhand von Beispielen.

(b) Welche Elemente von C_4 sind Erzeuger von C_4?

(c) Das Erzeugnis $\langle\overline{2}\rangle$ von $\overline{2}$ ist eine Gruppe. Schreiben Sie die Gruppentafel von $\langle\overline{2}\rangle$ auf. Erkennen Sie diese wieder?

(d) Beweisen Sie mit Hilfe des Distributivgesetzes, dass für alle Elemente $a \in C_4$ die Gleichung $\overline{0} \cdot a = \overline{0}$ gilt.

Hinweis: Beginnen Sie so: $\overline{0} \cdot a = (\overline{0} + \overline{0}) \cdot a = \overline{0} \cdot a + \overline{0} \cdot a$.

(e) Stellen Sie die Verknüpfungstafel für die Multiplikation $\cdot$ auf. Berücksichtigen Sie hierbei, dass für alle Elemente $a \in C_4$ die folgenden Gleichungen gelten: $\overline{0} \cdot a = \overline{0}$, $\overline{1} \cdot a = a$, $\overline{2} \cdot a = (\overline{1} + \overline{1}) \cdot a = \overline{1} \cdot a + \overline{1} \cdot a = a + a$, $\overline{3} \cdot a = a + a + a$, usw.

(f) Ist der Ring $\left(C_4, +, \overline{0}, \cdot, \overline{1}\right)$ ein Körper?

Aufgabe H 8. *Restklassenring modulo 6*

Stellen Sie in Analogie zur vorstehenden Aufgabe die Verknüpfungstafeln für Addition und Multiplikation im Restklassenring modulo 6 auf.

Beispiele zur Illustration:

$\bar{4} + \bar{3} = \bar{1}$, denn $4 + 3 = 7 = 1 \cdot 6 + 1$.

$\bar{4} \cdot \bar{3} = \bar{0}$, denn $4 \cdot 3 = 12 = 2 \cdot 6 + 0$.

Aufgabe H 9. *8-Bit-Zweierkomplementdarstellungen ganzer Zahlen*

(a) Es seien X und Y bzw. x und y die Zahlen bzw. Darstellungen aus Aufgabe P 3. Offensichtlich gilt $Y = -X$ und $X = -Y$. Prüfen Sie nach, dass für die 8-Bit-ZK-Darstellungen die Gleichung $x = \overline{y} + \mathbf{1}$ gilt.

(b) Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass $\overline{z} + \mathbf{1}$ die 8-Bit-ZKD der Dezimalzahl $(-Z)_{10}$ darstellt, wenn z die 8-Bit-ZKD der Dezimalzahl $(+Z)_{10}$ ist. Da ja $-(-Z) = Z$ gilt, sollte auch die Identität $\overline{\overline{z} + \mathbf{1}} + \mathbf{1} = z$ gelten. Zeigen Sie, dass dies in der Tat so ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Tatsache, dass $z + \overline{z} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$ gilt und starten Sie wie folgt: $\overline{\overline{z} + \mathbf{1}} + \mathbf{1} = (\overline{\overline{z} + \mathbf{1}} + \mathbf{1}) + (z + \overline{z} + \mathbf{1})$. Klammern Sie um und fassen Sie geeignet zusammen.

(c) Erinnern Sie sich daran, dass $k = 1000\,0000$ die 8-Bit-ZKD von $-(128)_{10}$ ist. Die Binärzahl k hat wie die Null eine gewisse Ausnahmestellung. Prüfen Sie nach, dass $\overline{k} + \mathbf{1} = k$ sowie $k + k = \mathbf{0}$ gilt.

Aufgabe H 10. *Binärzahlen und zyklische Gruppen*

(a) Die Menge B_2 der 2-Bit-Folgen enthalt die Elemente $[00]$, $[01]$, $[10]$ und $[11]$. Wir haben auf B_2 eine Addition $\oplus$ erklart (nämlich stellenweise Addition mit Übertrag). Stellen Sie die Verknüpfungstafel von $(B_2, \oplus)$ auf und verifizieren Sie, dass sich die Verknüpfungstafel einer zyklischen Gruppe mit vier Elementen ergibt.

(b) Geben Sie für jedes der vier Elemente von B_2 das jeweilige inverse Element an.

(c) Zählen Sie ab, wieviele Gleichungen man nachprüfen müsste, um nachzuweisen, dass das Assoziativgesetz für $(B_2, \oplus)$ gilt.

*Hinweis: Damit das Assoziativgesetz gilt, muss $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ **für alle** $a, b, c \in B_2$ erfüllt sein.*

(d) Weisen Sie exemplarisch nach, dass $([10] \oplus [11]) \oplus [10] = [10] \oplus ([11] \oplus [10])$ gilt.

(e) Betrachten Sie die Menge B_4 der 4-Bit-Folgen und als Verknüpfung die stellenweise Addition mit Übertrag $\oplus$. Berechnen Sie das Erzeugnis $\langle 0001 \rangle$, das Erzeugnis $\langle 0010 \rangle$, das Erzeugnis $\langle 0100 \rangle$ und das Erzeugnis $\langle 1000 \rangle$ jeweils durch sukzessive Addition. Stellen Sie die Gruppe $(B_4, \oplus)$ durch Drehungen dar, verwenden Sie hierzu ein zyklisches Schema („Uhr“) und markieren Sie alle Erzeuger.

(f) Durch welche geometrische Operation erhält man in dem Diagramm aus **(e)** zu einem gegebenen Element das inverse Element?

(g) Prägen Sie sich ein: Für jede natürlich Zahl $n \geq 1$ ist die Menge B_n der n-Bit-Folgen mit der Verknüpfung „stellenweise Addition mit Übertrag“eine zyklische und (daher) kommutative Gruppe mit 2^n Elementen.

Aufgabe H 11. *Symmetriegruppe eines Quadrates*

Zeichnen Sie ein Quadrat mit seinem Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Stellen Sie analog zur Aufgabe P 1 die Verknüpfungstafel für die acht Symmetrietransformationen dieses Quadrates auf.

Tutoriumsübungen

Aufgabe T 1. *Zahlensysteme*

(a) Stellen Sie die Zahl $Z = 1013_{10}$ im Dualsystem (d.h. bezüglich der Basis 2) dar. Verwenden Sie hierzu das Verfahren sukzessiver Division mit Rest.

(b) Bestimmen Sie die Darstellung $t = [t_6, t_5, t_4, t_3, t_2, t_1, t_0]$ der Zahl $Z = 1013_{10}$ im Dreiersystem (d.h. bezüglich der Basis 3). Verwenden Sie das Verfahren sukzessiver Division mit Rest. Werten Sie als Probe die Summe

$$t_6 \cdot 3^6 + t_5 \cdot 3^5 + t_4 \cdot 3^4 + t_3 \cdot 3^3 + t_2 \cdot 3^2 + t_1 \cdot 3^1 + t_0 \cdot 3^0$$

aus.

(c) Im Hexadezimalsystem (mit Basis 16) werden die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F verwendet. Bestimmen Sie die Darstellung h der Zahl $Z = 1013_{10}$ im Hexadezimalsystem. Führen Sie eine Probe analog zur Teilaufgabe **(b)** durch.

(d) Aus der Hexadezimaldarstellung (Hex-Darstellung) $h = [h_2 h_1 h_0]$ der Zahl Z ergibt sich mühelos die 12-Bit-Darstellung b von Z. Erkennen Sie, wie man b aus h gewinnt?

Hinweis: Jede der Hexadezimalstellen wird mit 4 Binärstellen dargestellt.

(e) **Zusatzaufgabe für ganz Schnelle:** Welche (ziemlich große) Dezimalzahl wird durch die Hexadezimalfolge `AFFE` dargestellt?

(f) Stellen Sie die Zahl $Z = 1013_{10}$ im Oktalsystem (d.h. bezüglich der Basis 8) dar.

Aufgabe T 2. *Binärdarstellung ganzer Zahlen (Klausuraufgabe Wintersemester 2010/11)*

(a) Bestimmen Sie die 8-Bit-Zweierkomplementdarstellung der Dezimalzahl 91 mit einer Methode Ihrer Wahl.

(b) Es sei $a = 1001\,1010$ die 8-Bit-Zweierkomplementdarstellung einer ganzen Zahl A. Bestimmen Sie die Dezimaldarstellung der Zahl A mit einer Methode Ihrer Wahl.

(c) Lässt sich die Zahl $A + A$ in 8-Bit-Zweierkomplementdarstellung darstellen?

Aufgabe T 3. *8-Bit-Zweierkomplementdarstellung ganzer Zahlen*

(a) **Bestimmen Sie** die 8-Bit-Zweierkomplementdarstellungen a, b und c der Zahlen $A = 88_{10}$, $B = 115_{10}$, und $C = (-115)_{10}$.

(b) **Rechnen Sie** nun (wie ein Computer) in der Welt der Zweierkomplementdarstellungen. **Verwenden Sie** die in Teilaufgabe **(a)** ermittelten 8-Bit-Zweierkomplement-Darstellungen a und c zur Berechnung der 8-Bit-ZKD y, die der Dezimalzahl $Y = 88_{10} - 115_{10}$ entspricht.

Hinweis: $88_{10} - 115_{10} = 88_{10} + (-115)_{10}$.

(c) **Prüfen Sie nach**, ob Ihr Ergebnis y tatsächlich zur Dezimalzahl Y passt.

(d) **Betrachten Sie** die 8-Bit-ZKD $z = 1010\,1010$; diese stellt eine negative Zahl Z dar. Um Z zu bestimmen, haben Sie mehrere Möglichkeiten, vgl. die Hinweise in Aufgabe P 3 sowie in Aufgabe H 9.

Aufgabe T 4. *Schriftliche Subtraktion im Dezimalsystem*

Lösen Sie die (im Folgenden noch einmal abgedruckte) Teilaufgabe **(c)** von Aufgabe H 1 der Hausübungen:

Führen Sie die Subtraktion der Dezimalzahlen $5\,160\,467 - 1\,862\,584$ einmal nach dem „Entbündelungsverfahren“ und einmal nach dem „Ergänzungsverfahren“ durch.

Nutzen Sie hierfür als Referenz z.B. `https://de.wikipedia.org/wiki/Subtraktion`.

Aufgabe T 5. *Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks*

Zeichnen Sie ein gleichseitiges Dreieck und markieren Sie die Eckpunkte (im Gegenuhrzeigersinn) mit den Ziffern 1 bis 3. Zeichnen Sie außerdem die drei Winkelhalbierenden (bzw. Seitenhalbierenden bzw. Höhen bzw. Mittelsenkrechten) ein, deren Schnittpunkt ist der Dreiecksmittelpunkt M. Betrachten Sie nun die folgenden Abbildungen:

S_1: Spiegelung an der Winkelhalbierenden durch den Punkt 1.

S_2: Spiegelung an der Winkelhalbierenden durch den Punkt 2.

S_3: Spiegelung an der Winkelhalbierenden durch den Punkt 3.

D_1: Drehung um $120°$ im Gegenuhrzeigersinn – Drehzentrum ist der Dreiecksmittelpunkt M.

D_2: Drehung um $240°$ im Gegenuhrzeigersinn – Drehzentrum ist der Dreiecksmittelpunkt M.

id: Identische Abbildung (alle Punkte bleiben fest).

Bemerkung: Die Spiegelungen erfolgen immer an den angegebenen ortsfesten Achsen. Dies gilt auch dann, wenn einer Spiegelung eine andere Abbildung vorrausgeht.

(a) **Schreiben Sie** in Form einer Tabelle für jede dieser sechs Abbildungen auf, auf welchen Punkt die drei Ecken jeweils bewegt werden.

Zum Beispiel bewegt die Spiegelung S_1 den Eckpunkt 2 auf den Punkt 3, den Eckpunkt 3 auf den Punkt 2, während die Ecke 1 festbleibt. Die Drehung D_1 bewegt die Eckpunkt 1 auf den Punkt 2, die Ecke 2 auf den Punkt 3 und die Ecke 3 auf den Punkt 1.

Man erhält eine Gruppe, indem man die Hintereinanderausführung $\circ$ von Abbildungen als Verknüpfung einführt. Dabei bedeutet z.B. $S_1 \circ D_1$, dass **zuerst** D_1 und **danach** S_1 ausgeführt wird. Die Symbole $S_1 \circ D_1$ liest man „S_1 **nach** D_1“.

(b) **Ermitteln Sie** das Ergebnis der Verknüpfung $S_1 \circ D_1$, indem Sie für jede Ecke bestimmen, auf welchen Punkt sie abgebildet wird, wenn Sie **zuerst** D_1 und dann S_1 ausführen. Entnehmen Sie dann Ihrer Tabelle aus Teilaufgabe **(a)**, welche der sechs gegebenen Abbildungen die gleichen Bildpunkte liefert.

(c) **Prüfen Sie nach**, dass $D_1 \circ S_1 = S_3$ gilt.

(d) **Stellen Sie** die Gruppentafel dieser Gruppe mit 6 Elementen **auf** und bestimmen Sie möglichst viele der (insgesamt 36) Einträge.

Hinweis: Im weiteren Verlauf des Semesters werden wir noch andere Methoden (mit Matrizen) kennenlernen, um Abbildungen darzustellen und Verknüpfungen von Abbildungen zu berechnen.