Coalescing - Brouillon

Raphaël Le Bihan

26 juin 2020

Le contre exemple présenté montre que la propriété 1 ne peut pas être montrée par récurrence, peu importe les définitions données aux opérateurs $\boxed{\lambda z.\nabla e}$ et $\boxed{d_{\vec{\epsilon}}}$.

Contre-exemple Opérateur :

$$d(x) \triangleq \nabla x$$

Formules :

$$\phi = \nabla z \Rightarrow d(\nabla z)$$

$$\widetilde{\phi} = \nabla z \Rightarrow \nabla\nabla z$$

Formules FOL :

$$\phi^z_{\text{FOL}} = \boxed{\lambda z.\nabla z}(z) \Rightarrow \boxed{d_{\nabla z}}(\boxed{\lambda z.\nabla z}(z))$$

$$\widetilde{\phi}^z_{\text{FOL}} = \boxed{\lambda z.\nabla z}(z) \Rightarrow \boxed{\lambda z.\nabla\nabla z}(z)$$

Modèle FOL $\mathcal{M}$:

$$\text{dom } \mathcal{M} = \{\text{tt}, \text{ff}\}$$

$$\mathcal{I}(\boxed{\lambda z.\nabla z}) = \_ \mapsto \text{tt}$$

$$\mathcal{I}(\boxed{\lambda z.\nabla\nabla z}) = \text{id}$$

~~Complétion de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}_d$:~~ Justement non, voir l'erreur dans la preuve pour le cas $\Rightarrow$.

On considère les modèles $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ coincidants avec $\mathcal{M}$ où ne sont interprétés que les prédicats générés lors de l'abstraction des sous-formules de

$\widetilde{\phi}$ ∇z et $\nabla\nabla z$.
Modèles $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$:

$$\mathcal{I}_1(\boxed{\lambda z.\nabla z}) = \mathcal{I}(\boxed{\lambda z.\nabla z})$$

$$\mathcal{I}_2(\boxed{\lambda z.\nabla\nabla z}) = \mathcal{I}_2(\boxed{\lambda z.\nabla\nabla z})$$

Par HR on complète les modèles $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ en des modèles $\mathcal{M}_{d1}$ et $\mathcal{M}_{d2}$:

$$\mathcal{I}_{d1}(\boxed{\lambda z.\nabla z}) = \mathcal{I}_1(\boxed{\lambda z.\nabla z})$$

$$\mathcal{I}_{d2}(\boxed{\lambda z.\nabla\nabla z}) = \mathcal{I}_{d2}(\boxed{\lambda z.\nabla\nabla z})$$

$$\mathcal{I}_{d2}(\boxed{d_\epsilon}) = ...$$

$$\mathcal{I}_{d2}(\boxed{\lambda z.\nabla z}) = ...$$

Pour pouvoir reformer $\mathcal{M}_d$ à partir de $\mathcal{M}_{d1}$ et $\mathcal{M}_{d2}$ il faut que $\mathcal{I}_{d2}(\boxed{\lambda z.\nabla z}) = \mathcal{I}_{d1}(\boxed{\lambda z.\nabla z})$. Si ce n'est pas le cas, alors on ne peut pas simplement fusionner $\mathcal{M}_{d1}$ et $\mathcal{M}_{d2}$ pour obtenir $\mathcal{M}_d$. On suppose que c'est le cas, et on montre que peu importe la définition donnée à $\boxed{d_{\lambda z.\nabla z}}$ ... Alors :

$$[\![\boxed{d_{\nabla z}}(\boxed{\lambda z.\nabla z}(z))]\!]_{\mathcal{M}_d} \neq [\![\boxed{\lambda z.\nabla\nabla z}(z)]\!]_{\mathcal{M}_d}$$

Car :

$$\begin{aligned}
[\![\boxed{d_{\nabla z}}(\boxed{\lambda z.\nabla z}(z))]\!]_{\mathcal{M}_d} &= [\![\boxed{\lambda x.\nabla x}(x)]\!]_{\mathcal{M}_d[x \mapsto [\![\boxed{\lambda z.\nabla z}(z))]\!]_{\mathcal{M}_d}} \\
&= [\![x]\!]_{\mathcal{M}_d[x \mapsto [\![\boxed{\lambda z.\nabla z}(z))]\!]_{\mathcal{M}_d}} \\
&= [\![\boxed{\lambda z.\nabla z}(z))]\!]_{\mathcal{M}_d} \\
&= [\![z]\!]_{\mathcal{M}_d}
\end{aligned}$$

Mais :

$$\begin{aligned}
[\![\boxed{\lambda z.\nabla\nabla z}(z)]\!]_{\mathcal{M}_d} &= \begin{cases} \mathrm{tt} & \text{si } [\![z]\!]_{\mathcal{M}_d} = \mathrm{ff} \\ \mathrm{ff} & \text{sinon} \end{cases} \\
&\neq [\![z]\!]_{\mathcal{M}_d}
\end{aligned}$$

Cela veut dire qu'il faut trouver une autre interprétation des $\boxed{d_{\vec{\epsilon}}}$ dans $\mathcal{M}_d$, pour pouvoir satisfaire la propriété voulue.