

# Coalescing - Expansion d'opérateur

Raphaël Le Bihan

23 juin 2020

On étudie dans ce document le remplacement d'un opérateur par sa définition dans une formule FOML. On cherche à montrer en particulier que pour un opérateur  $d(\vec{x}_i) \triangleq e_d$  et une formule FOML  $\phi$ , si  $\phi$  est valide une fois abstraite en FOL, alors la formule  $\tilde{\phi}$  obtenue en remplaçant chaque occurrence de  $d(\vec{e}_i)$  par  $e_d(\vec{e}_i/\vec{x}_i)$  est également valide une fois abstraite en FOL.

On cherche alors à établir une correspondance sémantique entre les abstractions FOL de  $\phi$  et  $\tilde{\phi}$ .

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi_{\text{FOL}} \\ \phi &\rightarrow \tilde{\phi} \rightarrow \tilde{\phi}_{\text{FOL}}\end{aligned}$$

J'effacerai ce schéma ou j'en ferai un mieux, mais pour l'instant il permet de comprendre quelles formules qu'on manipule.

**Définition** Remplacement d'un opérateur défini

Soit  $d(\vec{x}_i) \triangleq e_d$  un opérateur défini, et  $\phi$  une formule FOML pouvant contenir des occurrences de  $d$ . On définit récursivement  $\tilde{\phi}$  la formule obtenue en

remplaçant  $d$  par sa définition dans  $\phi$  par :

$$\begin{aligned}
\widetilde{x} &\triangleq x \\
\widetilde{v} &\triangleq v \\
\widetilde{op(\vec{e}_i)} &\triangleq op(\vec{\widetilde{e}}_i) \\
\widetilde{e_1 = e_2} &\triangleq \widetilde{e}_1 = \widetilde{e}_2 \\
\widetilde{\text{FALSE}} &\triangleq \text{FALSE} \\
\widetilde{e_1 \Rightarrow e_2} &\triangleq \widetilde{e}_1 \Rightarrow \widetilde{e}_2 \\
\widetilde{\forall x : e} &\triangleq \forall x : \widetilde{e} \\
\widetilde{\nabla e} &\triangleq \nabla \widetilde{e} \\
\widetilde{d(\vec{e}_i)} &\triangleq e_d(\vec{\widetilde{e}}_i/\vec{x}_i)
\end{aligned}$$

Cette définition correspond bien à ce qu'on veut faire. Remarque 1 : Ici on n'a pas parlé des opérateurs définis autres que  $d$ . Remarque 2 : On ne remplace pas « qu'une fois »  $d$ , mais récursivement. Par ex  $d(d(e))$  donne  $e_d([e_d(e/x)]/x)$  et pas  $e_d([d(e)]/x)$ .

**Propriété 1** Soit  $d(\vec{x}_i) \triangleq e_i$  un opérateur défini, et  $\phi$  une formule FOML pouvant contenir des occurrences de  $d$ . Soit  $\mathcal{M}$  un modèle FOL où on peut interpréter  $\widetilde{\phi}_{\text{FOL}}$  (çàd les opérateurs générés lors de l'abstraction de  $\widetilde{\phi}$  sont interprétés dans ce modèle). On peut compléter  $\mathcal{M}$  en un modèle FOL  $\mathcal{M}_d$  où on peut interpréter  $\phi_{\text{FOL}}$  et tel que :

1.  $\mathcal{M}_d$  et  $\mathcal{M}$  ont même domaine, et même interprétation des opérateurs  $op \in \mathcal{O}$  et des opérateurs générés lors de l'abstraction de  $\widetilde{\phi}$  ;
2.  $\mathcal{M}_d$  et  $\mathcal{M}$  ont même affectation sur les variables libres de  $\widetilde{\phi}_{\text{FOL}}$  ;
3. Opérateurs générés lors de l'abstraction de  $\phi$ . **A DEFINIR cf plus bas**

et vérifiant :

$$\llbracket \widetilde{\phi}_{\text{FOL}} \rrbracket_{\mathcal{M}} = \llbracket \phi_{\text{FOL}} \rrbracket_{\mathcal{M}_d}$$

En fait cette propriété a l'air vraie même en gardant exactement la même affectation dans  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}_d$ , et en utilisant dans  $\mathcal{M}_d$  une bonne définition pour les opérateurs générés lors de l'abstraction de  $\phi$ . Dans ce cas, la preuve serait sans doute plus simple, puisqu'on parlerait DU modèle  $\mathcal{M}_d$ , pas besoin de faire des recombinaisons de modèles comme dans les cas de  $\Rightarrow$  ou  $\forall$ .

**Interprétation des nouveaux opérateurs dans  $\mathcal{M}_d$**  C'est ici que j'ai du mal à trouver la bonne définition. On peut définir : (ça devient rapidement difficilement lisible..)

- Pour tout opérateur  $d(\vec{x}_i) = e_d$  son interprétation dans  $\mathcal{M}_d$  une fois abstrait :

$$\mathcal{I}_d(\boxed{d_{\vec{e}}}) : \vec{a}_i \in \text{dom } \mathcal{M}_d \mapsto \llbracket e_{d_{\text{FOL}}}^{\vec{x}_i} \rrbracket_{\mathcal{M}_d[x_i \mapsto a_i]}$$

On évalue la définition en affectant à chaque paramètre l'argument correspondant. Ceci permet ensuite dans la preuve pour le cas  $d(\vec{e}_i)$  :

$$\llbracket d(\vec{e}_i)_{\text{FOL}}^y \rrbracket_{\mathcal{M}_d} = \llbracket e_{d_{\text{FOL}}}^{\vec{x}_i} \rrbracket_{\mathcal{M}_d[x_i \mapsto \llbracket e_{i_{\text{FOL}}}^y \rrbracket_{\mathcal{M}_d}]} = \llbracket e_{d_{\text{FOL}}}^{\vec{x}_i}(e_{i_{\text{FOL}}}^y/x_i) \rrbracket_{\mathcal{M}_d}$$

On peut montrer la seconde égalité, il s'agit d'un lemme de substitution en FOL. On devra ensuite montrer que :

$$\llbracket e_{d_{\text{FOL}}}^{\vec{x}_i}(e_{i_{\text{FOL}}}^y/x_i) \rrbracket_{\mathcal{M}_d} = \llbracket e_d(e_i/x_i)_{\text{FOL}}^y \rrbracket_{\mathcal{M}_d}$$

Ceci est peut-être vrai si on choisit les bonnes définitions pour les interprétations dans  $\mathcal{M}_d$  des opérateurs générés pendant l'abstraction de  $\phi$ .

On montre un exemple où il faut effectivement avoir posé les bonnes définitions, car les différents opérateurs obtenus sont différents :

Opérateur :

$$d(x) \triangleq e_d \text{ où } e_d = \nabla \forall y : y = x$$

Substitution :

$$x \mapsto e = \nabla z$$

Formules une fois abstraites :

$$e_{\text{FOL}} = \boxed{\lambda z : \nabla z}(z)$$

$$e_{d_{\text{FOL}}} = \boxed{\lambda x : \nabla \forall y : y = x}(x)$$

$$e_d(e/x)_{\text{FOL}} = \boxed{\lambda z : \nabla \forall y : y = \nabla z}(z)$$

**Preuve** La preuve n'est pas finie, en particulier les cas  $\phi = d(\vec{e}_i)$  et  $\phi = \nabla \psi$ . On montre que la propriété est vraie pour  $\phi_{\text{FOL}}^y$  pour toute liste de variables rigides  $y$ . On fait une preuve par récurrence sur  $\phi$ .

- Cas  $\phi = x \mid y \mid \text{FALSE}$ . Il suffit de poser  $\mathcal{M}_d = \mathcal{M}$ .

- Cas  $\phi = (\phi_1 \Rightarrow \phi_2)$ . Par définition  $\phi_{\text{FOL}}^y = \phi_{1\text{FOL}}^y \Rightarrow \phi_{2\text{FOL}}^y$  et  $\tilde{\phi}_{\text{FOL}}^y = \tilde{\phi}_{1\text{FOL}}^y \Rightarrow \tilde{\phi}_{2\text{FOL}}^y$ . Par hypothèse de récurrence sur  $\phi_1$  et  $\phi_2$  il existe  $\mathcal{M}_{d1}$  et  $\mathcal{M}_{d2}$  vérifiant les hypothèses 1, 2 et 3. On pose  $\mathcal{M}_d$  qui a même domaine et interprétation des opérateurs que  $\mathcal{M}_{d1}$  et  $\mathcal{M}_{d2}$ , et dont l'affectation  $\xi_d$  des variables est défini pour toute variable  $x$  (flexible ou rigide) comme :

$$\xi_d(x) = \begin{cases} \xi_{d1}(x) & \text{si } x \in fv(\phi_1) \\ \xi_{d2}(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors  $\mathcal{M}_d$  vérifie les hypothèses 1, 2 et 3. De plus :  $\llbracket \phi_{1\text{FOL}}^y \rrbracket_{\mathcal{M}_{d1}} = \llbracket \phi_{1\text{FOL}}^y \rrbracket_{\mathcal{M}_d}$  et  $\llbracket \phi_{2\text{FOL}}^y \rrbracket_{\mathcal{M}_{d2}} = \llbracket \phi_{2\text{FOL}}^y \rrbracket_{\mathcal{M}_d}$ . Alors :

$$\begin{aligned} \llbracket \phi_{\text{FOL}}^y \rrbracket_{\mathcal{M}_d} &= \begin{cases} \text{tt} & \text{si } \llbracket \phi_{1\text{FOL}}^y \rrbracket_{\mathcal{M}_d} \neq \text{tt} \text{ ou } \llbracket \phi_{2\text{FOL}}^y \rrbracket_{\mathcal{M}_d} = \text{tt} \\ \text{ff} & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{tt} & \text{si } \llbracket \tilde{\phi}_{1\text{FOL}}^y \rrbracket_{\mathcal{M}} \neq \text{tt} \text{ ou } \llbracket \tilde{\phi}_{2\text{FOL}}^y \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{tt} \\ \text{ff} & \text{sinon} \end{cases} \\ &\quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \llbracket \tilde{\phi}_{\text{FOL}}^y \rrbracket_{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

- Les cas  $\phi = (\phi_1 = \phi_2)$  et  $\phi = op(\vec{\phi}_i)$  sont similaires.
- Cas  $\phi = \forall x : \psi$ . Par définition  $\phi_{\text{FOL}}^y = \forall x : \psi_{\text{FOL}}^{xy}$  et  $\tilde{\phi}_{\text{FOL}}^y = \forall x : \tilde{\psi}_{\text{FOL}}^{xy}$ . Alors :

$$\begin{aligned} \llbracket \tilde{\phi}_{\text{FOL}}^y \rrbracket_{\mathcal{M}} &= \llbracket \forall x : \tilde{\psi}_{\text{FOL}}^{xy} \rrbracket_{\mathcal{M}} \\ &= \begin{cases} \text{tt} & \text{si pour } a \in \text{dom}\mathcal{M}, \llbracket \tilde{\psi}_{\text{FOL}}^{xy} \rrbracket_{\mathcal{M}[x \mapsto a]} = \text{tt} \\ \text{ff} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour tout  $a \in \text{dom}\mathcal{M}$  par HR il existe  $\mathcal{M}_{da}$  vérifiant les différentes hypothèses par rapport à  $\mathcal{M}[x \mapsto a]$ . Tous les modèles ont alors même domaine, interprétation des opérateurs, et affectation sur les variables libres de  $\tilde{\psi}_{\text{FOL}}$  excepté  $x$ . On pose  $\mathcal{M}_d$  un modèle parmi les  $\mathcal{M}_{da}$  (qui à  $x$  associe une valeur quelconque). Alors pour tout  $a$ ,  $\mathcal{M}_{da} = \mathcal{M}_d[x \mapsto a]$ .

$a]$ . Alors :

$$\begin{aligned}
\llbracket \tilde{\phi}_{\text{FOL}}^y \rrbracket_{\mathcal{M}} &= \begin{cases} \text{tt} & \text{si pour } a \in \text{dom}\mathcal{M}, \llbracket \tilde{\psi}_{\text{FOL}}^{xy} \rrbracket_{\mathcal{M}[x \mapsto a]} = \text{tt} \\ \text{ff} & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \text{tt} & \text{si pour } a \in \text{dom}\mathcal{M}_d, \llbracket \psi_{\text{FOL}}^{xy} \rrbracket_{\mathcal{M}_d[x \mapsto a]} = \text{tt} \\ \text{ff} & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \llbracket \forall x : \psi_{\text{FOL}}^{xy} \rrbracket_{\mathcal{M}_d} \\
&= \llbracket \phi_{\text{FOL}}^y \rrbracket_{\mathcal{M}_d}
\end{aligned}$$

- Cas  $\phi = \nabla\psi$ .
- Cas  $\phi = d(\vec{e}_i)$ .

C'est dans les deux derniers cas qu'on rencontre des problèmes.

**Propriété 2** Soit  $d(\vec{x}_i) \triangleq e_d$  un opérateur défini, et  $\phi$  une formule FOML pouvant contenir des occurrences de  $d$ . Si  $\models_{\text{FOL}} \phi_{\text{FOL}}$  alors  $\models_{\text{FOL}} \tilde{\phi}_{\text{FOL}}$ .

**Preuve** Pour tout modèle  $\mathcal{M}$  de  $\tilde{\phi}_{\text{FOL}}$  par la propriété 1 il existe  $\mathcal{M}_d$  tel que

$$\llbracket \tilde{\phi}_{\text{FOL}} \rrbracket_{\mathcal{M}} = \llbracket \phi_{\text{FOL}} \rrbracket_{\mathcal{M}_d} = \text{tt}$$

car  $\phi_{\text{FOL}}$  est valide. Alors  $\tilde{\phi}_{\text{FOL}}$  est valide.