Coalescing - Expansion d'opérateur

Raphaël Le Bihan

23 juin 2020

On étudie dans ce document le remplacement d'un opérateur défini par son expression dans une formule FOML. On cherche à montrer en particulier que pour un opérateur $d(\vec{x_i}) \triangleq e_d$ et une formule FOML ϕ, si ϕ est valide une fois abstraite en FOL, alors la formule $\widetilde{\phi}$ obtenue en remplaçant chaque occurence de $d(e_i)$ par $e_d(\vec{e_i}/\vec{x_i})$ est également valide une fois abstraite en FOL.

Définition Remplacement d'un opérateur défini
Soit ϕ une formule FOML pouvant contenir des occurences de d. On définit récursivement $\widetilde{\phi}$ la formule obtenue par expansion de d par :

$$\begin{aligned}
\widetilde{x} &\hat{=} x \\
\widetilde{v} &\hat{=} v \\
\widetilde{op(\vec{e_i})} &\hat{=} op(\vec{\widetilde{e}_i}) \\
\widetilde{e_1 = e_2} &\hat{=} \widetilde{e_1} = \widetilde{e_2} \\
\widetilde{\text{FALSE}} &\hat{=} \text{FALSE} \\
\widetilde{e_1 \Rightarrow e_2} &\hat{=} \widetilde{e_1} \Rightarrow \widetilde{e_2} \\
\widetilde{\forall x : e} &\hat{=} \forall x : \widetilde{e} \\
\widetilde{\nabla e} &\hat{=} \nabla \widetilde{e}
\end{aligned}$$

Propriété 1 Soit $d(\vec{x_i}) \triangleq e_i$ un opérateur défini, et ϕ une formule FOML pouvant contenir des occurences de d. Soit $\mathcal{M}$ un modèle FOL où on peut interpréter $\widetilde{\phi}_{\text{FOL}}$. Alors il existe $\mathcal{M}_d$ un modèle FOL où on peut interpréter

ϕ_{FOL} et dom $\mathcal{M}_d$ = dom $\mathcal{M}$ tel que :

$$[\![\widetilde{\phi}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}} = [\![\phi_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d}$$

Preuve On montre que la propriété est vraie pour ϕ^y_{FOL} pour toute liste de variables rigides y et on impose des conditions plus fortes sur $\mathcal{M}_d$.

1. $\mathcal{M}_d$ et $\mathcal{M}$ ont même domaine, et même interprétation des opérateurs $op \in \mathcal{O}$ et des opérateurs générés lors de l'abstraction de $\widetilde{\phi}$;
2. $\mathcal{M}_d$ et $\mathcal{M}$ ont même affectation sur les variables libres de $\widetilde{\phi}_{\text{FOL}}$;
3. Opérateurs générés lors de l'abstraction de ϕ. A DEFINIR ! ! Et à étudier !

On fait une preuve par récurrence sur ϕ.

— Cas $\phi = x \mid y \mid$ FALSE. Il suffit de poser $\mathcal{M}_d = \mathcal{M}$.

— Cas $\phi = (\phi_1 \Rightarrow \phi_2)$. Par définition $\phi^y_{\text{FOL}} = {\phi_1}^y_{\text{FOL}} \Rightarrow {\phi_2}^y_{\text{FOL}}$ et $\widetilde{\phi}^y_{\text{FOL}} = \widetilde{\phi_1}^y_{\text{FOL}} \Rightarrow \widetilde{\phi_2}^y_{\text{FOL}}$. Par hypothèse de récurrence sur ϕ_1 et ϕ_2 il existe $\mathcal{M}_{d1}$ et $\mathcal{M}_{d2}$ vérifiant les hypothèses 1, 2 et 3. On pose $\mathcal{M}_d$ qui a même domaine et interprétation des opérateurs que $\mathcal{M}_{d1}$ et $\mathcal{M}_{d2}$, et dont l'affectation ξ_d des variables est défini pour toute variable x (flexible ou rigide) comme :

$$\xi_d(x) = \begin{cases} \xi_{d1}(x) & \text{si } x \in fv(\phi_1) \\ \xi_{d2}(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\mathcal{M}_d$ vérifie les hypothèses 1, 2 et 3. De plus : $[\![{\phi_1}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_{d1}} = [\![{\phi_1}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d}$ et $[\![{\phi_2}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_{d2}} = [\![{\phi_2}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d}$. Alors :

$$\begin{aligned} [\![\phi^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d} &= \begin{cases} \text{tt} & \text{si } [\![{\phi_1}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d} \neq \text{tt ou } [\![{\phi_2}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d} = \text{tt} \\ \text{ff} & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{tt} & \text{si } [\![\widetilde{\phi_1}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}} \neq \text{tt ou } [\![\widetilde{phi_2}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}} = \text{tt} \\ \text{ff} & \text{sinon} \end{cases} \\ &\text{par hypothèse de récurrence} \\ &= [\![\widetilde{\phi}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

— Les cas $\phi = (\phi_1 = \phi_2)$ et $\phi = op(\vec{\phi_i})$ sont similaires.

— Cas $\phi = \forall x : \psi$. Par définition $\phi^y_{\text{FOL}} = \forall x : \psi^{xy}_{\text{FOL}}$ et $\widetilde{\phi}^y_{\text{FOL}} = \forall x : \widetilde{\psi}^{xy}_{\text{FOL}}$. On pose $\mathcal{M}_d = \mathcal{M}$, qui vérifie bien les hypothèses 1, 2 et 3. Alors :

$$\begin{aligned} [\![\phi^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d} &= [\![\forall x : \psi^{xy}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d} \\ &= \begin{cases} \text{tt} & \text{si pour } a \in \text{dom}\mathcal{M}_d, [\![\psi^{xy}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}[x \mapsto a]} = \text{tt} \\ \text{ff} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Propriété 2 Soit $d(\vec{x_i}) \triangleq e_d$ un opérateur défini, et ϕ une formule FOML pouvant contenir des occurences de d. Si $\models_{\text{FOL}} \phi_{\text{FOL}}$ alors $\models_{\text{FOL}} \widetilde{\phi}_{\text{FOL}}$.

Preuve Pour tout modèle $\mathcal{M}$ de $\widetilde{\phi}_{\text{FOL}}$ par la propriété 1 il existe $\mathcal{M}_d$ tel que

$$[\![\widetilde{\phi}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}} = [\![\phi_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d} = tt$$

car ϕ_{FOL} est valide. Alors $\widetilde{\phi}_{\text{FOL}}$ est valide.