Coalescing - Expansion d'opérateur

Raphaël Le Bihan

24 juin 2020

On étudie dans ce document le remplacement d'un opérateur par sa définition dans une formule FOML. On cherche à montrer en particulier que pour un opérateur $d(\vec{x_i}) \triangleq e_d$ et une formule FOML ϕ, si ϕ est valide une fois abstraite en FOL, alors la formule $\widetilde{\phi}$ obtenue en remplaçant chaque occurence de $d(\vec{e_i})$ par $e_d(\vec{e_i}/\vec{x_i})$ est également valide une fois abstraite en FOL.

On cherche alors à établir une correspondance sémantique entre les abstractions FOL de ϕ et $\widetilde{\phi}$.

$$\phi \to \phi_{\text{FOL}}$$
$$\phi \to \widetilde{\phi} \to \widetilde{\phi}_{\text{FOL}}$$

(J'effacerai ce schéma ou j'en ferai un mieux, mais pour l'instant il permet de comprendre quelles formules qu'on manipule.)

Définition Remplacement d'un opérateur défini
Soit $d(\vec{x_i}) \triangleq e_d$ un opérateur défini, et ϕ une formule FOML pouvant contenir des occurences de d. On définit récursivement $\widetilde{\phi}$ la formule obtenue en

remplaçant d par sa définition dans ϕ par :

$$\widetilde{x} \hat{=} x$$
$$\widetilde{v} \hat{=} v$$
$$\widetilde{op(\vec{e_i})} \hat{=} op(\vec{\widetilde{e_i}})$$
$$\widetilde{e_1 = e_2} \hat{=} \widetilde{e_1} = \widetilde{e_2}$$
$$\widetilde{\text{FALSE}} \hat{=} \text{FALSE}$$
$$\widetilde{e_1 \Rightarrow e_2} \hat{=} \widetilde{e_1} \Rightarrow \widetilde{e_2}$$
$$\widetilde{\forall x : e} \hat{=} \forall x : \widetilde{e}$$
$$\widetilde{\nabla e} \hat{=} \nabla \widetilde{e}$$
$$\widetilde{d(\vec{e_i})} \hat{=} e_d(\vec{\widetilde{e_i}}/\vec{x_i})$$

Cette définition correspond bien à ce qu'on veut faire.
Remarque 1 : Ici on n'a pas parlé des opérateurs définis autres que d.
Remarque 2 : On ne remplace pas « qu'une fois »d, mais récursivement. Par ex $d(d(e))$ donne $e_d([e_d(e/x)]/x)$ et pas $e_d([d(e)]/x)$.

Propriété 1 Soit $d(\vec{x_i}) \triangleq e_i$ un opérateur défini, et ϕ une formule FOML pouvant contenir des occurences de d. Soit $\mathcal{M}$ un modèle FOL où on peut interpréter $\widetilde{\phi}_{\text{FOL}}$ (çàd un modèle dans lequel les opérateurs $\boxed{\lambda z.\nabla e}$ générés lors de l'abstraction de $\widetilde{\phi}$ ont une interprétation). On peut compléter $\mathcal{M}$ en un modèle FOL $\mathcal{M}_d$ où on peut interpréter ϕ_{FOL} en ajoutant les interprétations suivantes pour les opérateurs $\boxed{\lambda z.\nabla e}$ et $\boxed{d_{\vec{\epsilon}}}$ générés lors de l'abstraction de ϕ :

1. Pour les opérateurs $\boxed{\lambda z.\nabla e}$ ayant déjà une interprétation dans $\mathcal{M}$ (donc ayant déjà été générés lors de l'abstraction de $\widetilde{\phi}$) :
$$\mathcal{I}_d(\boxed{\lambda z.\nabla e}) = \mathcal{I}(\boxed{\lambda z.\nabla e})$$
2. Pour les opérateurs $\boxed{\lambda z.\nabla e}$ n'étant pas interprétés dans $\mathcal{M}$ (donc n'ayant PAS été générés lors de l'abstraction de $\widetilde{\phi}$) : A compléter
3. ESSAI 1
Pour les opérateurs $\boxed{d_{\vec{\epsilon}}}$: Finalement cette définition ne convient pas, voir le contre exemple dans le document pdf « brouillon ».
$$\mathcal{I}_d(\boxed{d_{\vec{\epsilon}}}) : \vec{a_i} \in \text{ dom } \mathcal{M}_d \mapsto [\![e_{d_{\text{FOL}}}^{\vec{x_i}}]\!]_{\mathcal{M}_d[x_i \mapsto a_i]}$$

Alors :

$$[\![\widetilde{\phi}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}} = [\![\phi_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d}$$

Voici donc les points où je bloque dans ma preuve :

— Quelle interprétation donner aux nouveaux opérateurs dans $\mathcal{M}_d$

— Cas ∇e et $d(\vec{e_i})$ de la preuve, mais je pense que ces cas seront faisables une fois qu'on saura quelle interprétation donner.

Preuve La preuve n'est pas finie, en particulier les cas $\phi = d(\vec{e_i})$ et $\phi = \nabla\psi$. La partie de la preuve qui a déjà été écrite est indépendante de l'interprétation des nouveaux opérateurs dans $\mathcal{M}_d$.

On montre que la propriété est vraie pour ϕ^y_{FOL} pour toute liste de variables rigides y. On fait une preuve par récurrence sur ϕ.

— Cas $\phi = x \mid y \mid$ FALSE. Dans ce cas $\mathcal{M}_d = \mathcal{M}$ et $\phi^y_{\text{FOL}} = \widetilde{\phi}^y_{\text{FOL}}$ donc on peut conclure.

— Cas $\phi = (\phi_1 \Rightarrow \phi_2)$. Par définition $\phi^y_{\text{FOL}} = {\phi_1}^y_{\text{FOL}} \Rightarrow {\phi_2}^y_{\text{FOL}}$ et $\widetilde{\phi}^y_{\text{FOL}} = \widetilde{\phi_1}^y_{\text{FOL}} \Rightarrow \widetilde{\phi_2}^y_{\text{FOL}}$. Par hypothèse de récurrence sur ϕ_1 et ϕ_2 : $[\![{\phi_1}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d} = [\![\widetilde{\phi_1}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}}$ et $[\![{\phi_2}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d} = [\![\widetilde{\phi_2}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}}$. Alors :

$$\begin{aligned}
[\![\phi^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d} &= \begin{cases} \text{tt} & \text{si } [\![{\phi_1}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d} \neq \text{tt ou } [\![{\phi_2}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d} = \text{tt} \\ \text{ff} & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \text{tt} & \text{si } [\![\widetilde{\phi_1}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}} \neq \text{tt ou } [\![\widetilde{\phi_2}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}} = \text{tt} \\ \text{ff} & \text{sinon} \end{cases} \\
&= [\![\widetilde{\phi}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}}
\end{aligned}$$

— Les cas $\phi = (\phi_1 = \phi_2)$ et $\phi = op(\vec{\phi_i})$ sont similaires.

— Cas $\phi = \forall x : \psi$. Par définition $\phi^y_{\text{FOL}} = \forall x : \psi^{xy}_{\text{FOL}}$ et $\widetilde{\phi}^y_{\text{FOL}} = \forall x : \widetilde{\psi}^{xy}_{\text{FOL}}$. Alors :

$$\begin{aligned}
[\![\phi^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d} &= [\![\forall x : \psi^{xy}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d} \\
&= \begin{cases} \text{tt} & \text{si pour } a \in \text{dom}\mathcal{M}_d, [\![\psi^{xy}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d[x\mapsto a]} = \text{tt} \\ \text{ff} & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \text{tt} & \text{si pour } a \in \text{dom}\mathcal{M}, [\![\widetilde{\psi}^{xy}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}[x\mapsto a]} = \text{tt} \\ \text{ff} & \text{sinon} \end{cases} \\
&\quad \text{par HR sur les } \mathcal{M}_d[x \mapsto a] \\
&= [\![\forall x : \widetilde{\psi}^{xy}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}} \\
&= [\![\widetilde{\phi}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}}
\end{aligned}$$

— Cas $\phi = \nabla\psi$.
— Cas $\phi = d(\vec{e_i})$.
C'est dans les deux derniers cas qu'on rencontre des problèmes.

Propriété 2 Soit $d(\vec{x_i}) \triangleq e_d$ un opérateur défini, et ϕ une formule FOML pouvant contenir des occurences de d. Si $\vDash_{\text{FOL}} \phi_{\text{FOL}}$ alors $\vDash_{\text{FOL}} \widetilde{\phi}_{\text{FOL}}$.

Preuve Pour tout modèle $\mathcal{M}$ de $\widetilde{\phi}_{\text{FOL}}$ par la propriété 1 il existe $\mathcal{M}_d$ tel que

$$[\![\widetilde{\phi}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}} = [\![\phi_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d} = tt$$

car ϕ_{FOL} est valide. Alors $\widetilde{\phi}_{\text{FOL}}$ est valide.