Coalescing - Expansion d'opérateur

Raphaël Le Bihan

24 juin 2020

On étudie dans ce document le remplacement d'un opérateur par sa définition dans une formule FOML. On cherche à montrer en particulier que pour un opérateur $d(\vec{x_i}) \triangleq e_d$ et une formule FOML ϕ, si ϕ est valide une fois abstraite en FOL, alors la formule $\widetilde{\phi}$ obtenue en remplaçant chaque occurence de $d(\vec{e_i})$ par $e_d(\vec{e_i}/\vec{x_i})$ est également valide une fois abstraite en FOL.

On cherche alors à établir une correspondance sémantique entre les abstractions FOL de ϕ et $\widetilde{\phi}$.

$$\phi \to \phi_{\text{FOL}}$$
$$\phi \to \widetilde{\phi} \to \widetilde{\phi}_{\text{FOL}}$$

(J'effacerai ce schéma ou j'en ferai un mieux, mais pour l'instant il permet de comprendre quelles formules qu'on manipule.)

Définition Remplacement d'un opérateur défini
Soit $d(\vec{x_i}) \triangleq e_d$ un opérateur défini, et ϕ une formule FOML pouvant contenir des occurences de d. On définit récursivement $\widetilde{\phi}$ la formule obtenue en

On suppose que d n'apparaît pas dans e_d ?

remplaçant d par sa définition dans ϕ par :

$$\begin{aligned}
\widetilde{x} &\hat{=} x \\
\widetilde{v} &\hat{=} v \\
\widetilde{op(\vec{e_i})} &\hat{=} op(\vec{\widetilde{e}_i}) && \text{si } op \text{ différent de } d \\
\widetilde{e_1 = e_2} &\hat{=} \widetilde{e_1} = \widetilde{e_2} \\
\widetilde{\text{FALSE}} &\hat{=} \text{FALSE} \\
\widetilde{e_1 \Rightarrow e_2} &\hat{=} \widetilde{e_1} \Rightarrow \widetilde{e_2} \\
\widetilde{\forall x : e} &\hat{=} \forall x : \widetilde{e} \\
\widetilde{\nabla} e &\hat{=} \nabla \widetilde{e} \\
\widetilde{d(\vec{e_i})} &\hat{=} e_d(\vec{\widetilde{e}_i}/\vec{x_i})
\end{aligned}$$

Cette définition correspond bien à ce qu'on veut faire.
Remarque 1 : Ici on n'a pas parlé des opérateurs définis autres que d.
Remarque 2 : On ne remplace pas «qu'une fois» d, mais récursivement. Par ex $d(d(e))$ donne $e_d([e_d(e/x)]/x)$ et pas $e_d([d(e)]/x)$.

$e_d(\vec{\widetilde{e}_i}/\vec{x_i})$ plutôt que $\widetilde{e}_d(\vec{\widetilde{e}_i}/\vec{x_i})$ suffit car d ne peut apparaître dans e_d et sinon ça ne terminerait pas. S'il y a plusieurs opérateurs définis (toujours sans récursion) il faudra les éliminer l'un après l'autre.

Propriété 1 *Soit $d(\vec{x_i}) \triangleq e_i$ un opérateur défini, et ϕ une formule FOML pouvant contenir des occurences de d. Soit $\mathcal{M}$ un modèle FOL où on peut interpréter $\widetilde{\phi}_{\text{FOL}}$ (çàd les opérateurs générés lors de lors de l'abstraction de $\widetilde{\phi}$ sont interprétés dans ce modèle). On peut compléter $\mathcal{M}$ en un modèle FOL $\mathcal{M}_d$ où on peut interpréter ϕ_{FOL} et tel que :*

Ici on a ϕ, ϕ_{FOL} et $\widetilde{\phi}_{\text{FOL}}$, les deux dernières n'étant pas définies dans cette note ...

1. *$\mathcal{M}_d$ et $\mathcal{M}$ ont même domaine, et même interprétation des opérateurs $op \in \mathcal{O}$ et des opérateurs générés lors de l'abstraction de $\widetilde{\phi}$;*
2. *$\mathcal{M}_d$ et $\mathcal{M}$ ont même affectation sur les variables libres de $\widetilde{\phi}_{\text{FOL}}$;*
3. *On devra donner aux opérateurs $\boxed{\lambda z : \nabla e}$ et $\boxed{d_{\vec{e}}}$ générés lors de l'abstraction de ϕ une interprétation dans $\mathcal{M}_d$ de sorte que la propriété soit vraie. Cf § suivant*

et vérifiant :

$$[\![\widetilde{\phi}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}} = [\![\phi_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d}$$

Remarque : En fait cette propriété a l'air vraie même en gardant exactement la même affectation dans $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_d$, et en utilisant dans $\mathcal{M}_d$ une bonne définition pour les opérateurs générés lors de l'abstraction de ϕ. Dans ce cas, la preuve serait plus simple, puisqu'on parlerait DU modèle $\mathcal{M}_d$, et il n'y aurait pas besoin de recombiner plusieurs modèles comme dans les cas de $\Rightarrow$ ou $\forall$.

Voici donc les points où je bloque dans ma preuve :

— Quelle interprétation donner aux nouveaux opérateurs dans $\mathcal{M}_d$

— Cas ∇e et $d(\vec{e_i})$ de la preuve, mais je pense que ces cas seront faisables une fois qu'on saura quelle interprétation donner.

Interprétation des nouveaux opérateurs dans $\mathcal{M}_d$ On peut définir :

— Pour tout opérateur $d(\vec{x_i}) = e_d$ son interprétation dans $\mathcal{M}_d$ une fois abstrait :

$$\mathcal{I}_d(\boxed{d_{\vec{\epsilon}}}) : \vec{a_i} \in \text{ dom } \mathcal{M}_d \mapsto [\![e_{d}{}^{\vec{x_i}}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d[x_i \mapsto a_i]}$$

On évalue la définition, en affectant à chaque paramètre l'argument correspondant.

Remarque sur cette définition :

Ceci permet ensuite dans la preuve pour le cas $d(\vec{e_i})$:

$$[\![d(\vec{e_i})^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d} = [\![e_{d}{}^{\vec{x_i}}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d[x_i \mapsto [\![e_i{}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d}]} = [\![e_{d}{}^{\vec{x_i}}_{\text{FOL}}(e_i{}^y_{\text{FOL}}/x_i)]\!]_{\mathcal{M}_d}$$

La première égalité est vraie par définition.

On peut montrer la seconde égalité en utilisant d'un lemme de substitution en FOL.

On devra ensuite montrer que : Je bloque ici

$$[\![e_{d}{}^{\vec{x_i}}_{\text{FOL}}(e_i{}^y_{\text{FOL}}/x_i)]\!]_{\mathcal{M}_d} = [\![e_d(e_i/x_i)^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d}$$

Ceci est vrai seulement si on choisit des bonnes interprétations dans $\mathcal{M}_d$ des opérateurs générés pendant l'abstraction de ϕ.

On montre dans la suite un exemple où il faut effectivement avoir défini les bonnes interprétations, car les opérateurs obtenus lors de l'abstraction sont différents :

Opérateur :

$$d(x) \triangleq e_d \text{ où } e_d = \nabla\forall y : y = x$$

Substitution :

cad, $x \mapsto \nabla z$?

$$x \mapsto e = \nabla z$$

Formules une fois abstraites :

$$e^z_{\text{FOL}} = \boxed{\lambda z : \nabla z}(z)$$

$$e_d{}^x_{\text{FOL}} = \boxed{\lambda x : \nabla \forall y : y = x}(x)$$

$$e_d(e/x)^z_{\text{FOL}} = \boxed{\lambda z : \nabla \forall y : y = \nabla z}(z)$$

Ici, si on donne n'importe quelle interprétation à $\boxed{\lambda z : \nabla z}$ et $\boxed{\lambda x : \nabla \forall y : y = x}$, on n'aura pas a priori

$$[\![\boxed{\lambda x : \nabla \forall y : y = x}(\boxed{\lambda z : \nabla z}(z))]\!]_{\mathcal{M}_d} = [\![\boxed{\lambda z : \nabla \forall y : y = \nabla z}(z)]\!]_{\mathcal{M}_d}$$

Preuve La preuve n'est pas finie, en particulier les cas $\phi = d(\vec{e_i})$ et $\phi = \nabla \psi$. On montre que la propriété est vraie pour ϕ^y_{FOL} pour toute liste de variables rigides y. On fait une preuve par récurrence sur ϕ.

— Cas $\phi = x \mid y \mid \text{FALSE}$. Il suffit de poser $\mathcal{M}_d = \mathcal{M}$.

— Cas $\phi = (\phi_1 \Rightarrow \phi_2)$. Par définition $\phi^y_{\text{FOL}} = \phi_1{}^y_{\text{FOL}} \Rightarrow \phi_2{}^y_{\text{FOL}}$ et $\widetilde{\phi}^y_{\text{FOL}} = \widetilde{\phi_1}^y_{\text{FOL}} \Rightarrow \widetilde{\phi_2}^y_{\text{FOL}}$. Par hypothèse de récurrence sur ϕ_1 et ϕ_2 il existe $\mathcal{M}_{d1}$ et $\mathcal{M}_{d2}$ vérifiant les hypothèses 1, 2 et 3. On pose $\mathcal{M}_d$ qui a même domaine et interprétation des opérateurs que $\mathcal{M}_{d1}$ et $\mathcal{M}_{d2}$, et dont l'affectation ξ_d des variables est défini pour toute variable x (flexible ou rigide) comme :

$$\xi_d(x) = \begin{cases} \xi_{d1}(x) & \text{si } x \in fv(\phi_1) \\ \xi_{d2}(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Je suppose qu'on fait de même pour interpréter les opérateurs introduits lors de l'abstraction, cad les faire coïncider avec $\mathcal{M}_{d1}$ si l'opérateur apparaît dans ϕ_1 et avec $\mathcal{M}_{d2}$ sinon ?

Alors $\mathcal{M}_d$ vérifie les hypothèses 1, 2 et 3. De plus : $[\![\phi_1{}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_{d1}} = [\![\phi_1{}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d}$ et $[\![\phi_2{}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_{d2}} = [\![\phi_2{}^y_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d}$.

Je ne comprends pas pourquoi on peut affirmer ces égalités car ϕ_1 et ϕ_2 peuvent partager des symboles. Or, $\mathcal{M}_d$ et $\mathcal{M}_{d2}$ ne coïncident alors pas.

Alors :

$$\begin{aligned}
[\![\phi^{y}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d} &= \begin{cases} \text{tt} & \text{si } [\![{\phi_1}^{y}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d} \neq \text{tt ou } [\![{\phi_2}^{y}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d} = \text{tt} \\ \text{ff} & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \text{tt} & \text{si } [\![\widetilde{\phi_1}^{y}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}} \neq \text{tt ou } [\![\widetilde{\phi_2}^{y}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}} = \text{tt} \\ \text{ff} & \text{sinon} \end{cases} \\
&\text{par hypothèse de récurrence} \\
&= [\![\widetilde{\phi}^{y}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}}
\end{aligned}$$

— Les cas $\phi = (\phi_1 = \phi_2)$ et $\phi = op(\vec{\phi_i})$ sont similaires.

— Cas $\phi = \forall x : \psi$. Par définition $\phi^{y}_{\text{FOL}} = \forall x : \psi^{xy}_{\text{FOL}}$ et $\widetilde{\phi}^{y}_{\text{FOL}} = \forall x : \widetilde{\psi}^{xy}_{\text{FOL}}$. Alors :

$$\begin{aligned}
[\![\widetilde{\phi}^{y}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}} &= [\![\forall x : \widetilde{\psi}^{xy}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}} \\
&= \begin{cases} \text{tt} & \text{si pour } a \in \text{dom}\mathcal{M}, [\![\widetilde{\psi}^{xy}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}[x \mapsto a]} = \text{tt} \\ \text{ff} & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Pour tout $a \in \text{dom}\mathcal{M}$ par HR il existe $\mathcal{M}_{da}$ vérifiant les différentes hypothèses par rapport à $\mathcal{M}[x \mapsto a]$. Tous les modèles ont alors même domaine, interprétation des opérateurs, et affectation sur les variables libres de $\widetilde{\psi}_{\text{FOL}}$ excepté x. On pose $\mathcal{M}_d$ un modèle parmi les $\mathcal{M}_{da}$ (qui à x associe une valeur quelconque). Alors pour tout a, $\mathcal{M}_{da} = \mathcal{M}_d[x \mapsto a]$. Alors :

Remarque analogue au cas $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
[\![\widetilde{\phi}^{y}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}} &= \begin{cases} \text{tt} & \text{si pour } a \in \text{dom}\mathcal{M}, [\![\widetilde{\psi}^{xy}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}[x \mapsto a]} = \text{tt} \\ \text{ff} & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \text{tt} & \text{si pour } a \in \text{dom}\mathcal{M}_d, [\![\psi^{xy}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d[x \mapsto a]} = \text{tt} \\ \text{ff} & \text{sinon} \end{cases} \\
&= [\![\forall x : \psi^{xy}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d} \\
&= [\![\phi^{y}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d}
\end{aligned}$$

— Cas $\phi = \nabla\psi$.

— Cas $\phi = d(\vec{e_i})$.

C'est dans les deux derniers cas qu'on rencontre des problèmes.

Je pense en effet que si l'on veut suivre cette idée on devrait arriver à définir une seule interprétation $\mathcal{M}_d$ pour éviter d'avoir à fusionner des modèles éventuellement différents. Il peut être instructif de travailler sur l'exemple suivant.

$$
\begin{array}{lcl}
d(x) & \triangleq & \exists y : \nabla(x = y) \\
(d(\nabla\text{TRUE}))_{\text{FOL}} & = & \boxed{d, \nabla\text{TRUE}}(\nabla\text{TRUE}) \\
(d(\text{TRUE}))_{\text{FOL}} & = & \boxed{d, *}(\text{TRUE}) \\
\widetilde{d(\nabla\text{TRUE})} & = & \exists y : \nabla((\nabla\text{TRUE}) = y) \\
(\widetilde{d(\nabla\text{TRUE})})_{\text{FOL}} & = & \exists y : \boxed{\lambda y : \nabla((\nabla\text{TRUE}) = y)}(y) \\
\widetilde{d(\text{TRUE})} & = & \exists y : \nabla(\text{TRUE} = y) \\
(\widetilde{d(\text{TRUE})})_{\text{FOL}} & = & \exists y : \boxed{\lambda y : \nabla(\text{TRUE} = y)}(y)
\end{array}
$$

(J'espère que je ne me suis pas trompé.) Comment définir les interprétations requises ? Sachant que $d(\nabla\text{TRUE}) \equiv d(\text{TRUE})$ mais cela n'a probablement peu d'importance.

En fait, je me demande si c'est la bonne façon de procéder que de vouloir relier les abstractions de $d(e)$ et de $\widetilde{d(e)}$ plutôt que de suivre la piste indiquée dans le papier de 2014 qui fait le lien entre l'abstraction de $d(e)$ et l'interprétation de $d(e)$ dans un modèle de logique modale ?

Propriété 2 *Soit* $d(\vec{x_i}) \triangleq e_d$ *un opérateur défini, et* ϕ *une formule FOML pouvant contenir des occurences de* d*. Si* $\vDash_{\text{FOL}} \phi_{\text{FOL}}$ *alors* $\vDash_{\text{FOL}} \widetilde{\phi}_{\text{FOL}}$*.*

Preuve Pour tout modèle $\mathcal{M}$ de $\widetilde{\phi}_{\text{FOL}}$ par la propriété 1 il existe $\mathcal{M}_d$ tel que

$$[\![\widetilde{\phi}_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}} = [\![\phi_{\text{FOL}}]\!]_{\mathcal{M}_d} = tt$$

car ϕ_{FOL} est valide. Alors $\widetilde{\phi}_{\text{FOL}}$ est valide.