Tarea 1

Luis Alejandro Hernández Maya
Facultad de ciencias,
UNAM,
`lahm@ciencias.unam.mx`

7 de julio de 2021

1. Transformación de $u_\pm^\dagger \sigma_\pm^\mu u_\pm$

Muestre que las combinaciones $u_+^\dagger \sigma_+^\mu u_+$ y $u_-^\dagger \sigma_-^\mu u_-$ transforman como cuadrivectores, es decir, se satisface la transformación:

$$\exp(\tfrac{i}{2}(\theta\vec{n} \pm i\vec{\beta})\cdot\sigma)\sigma_\pm^\mu \exp(-\tfrac{i}{2}(\theta\vec{n} \mp i\vec{\beta})\cdot\sigma) = \Lambda^\mu{}_\nu(\theta\vec{n},\vec{\beta})\sigma_\pm^\nu \tag{1.1}$$

la prueba la puede hacer a orden infinitesimal, es decir, recordando que $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta_\nu^\mu + \omega^\mu{}_\nu$ y hay que escribir $\omega^\mu{}_\nu$ en términos de $(\theta\vec{n},\vec{\beta})$.

Para comparar los grupos de transformación debemos primero generar una transformación lineal de los generadores de cada grupo que preserve el corchete de Lie. El álgebra del grupo GL(2,$\mathbb{C}$)es:

$$[\sigma_i,\sigma_j] = 2i\epsilon_{ij}{}^k\sigma_k, \quad [\sigma_i,\tau_j] = 2i\epsilon_{ij}{}^k\tau_k, \quad [\tau_i,\tau_j] = -2i\epsilon_{ij}{}^k\sigma_k, \tag{1.2}$$

donde σ_i son las matrices de Pauli y $\tau_i = i\sigma_i$. Por lo tanto, definiremos matrices R_i y B_i del álgebra de O(1,3) que tengan la misma álgebra:

$$R_x = 2i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_y = 2i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_z = 2i\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}, \quad B_x = 2i\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

$$B_y = 2i\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \quad B_z = 2i\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Para facilitar el álgebra, podemos reescribir las componentes de estas matrices como:

$$R^{i\mu}{}_{\nu} = 2i\delta^{\mu}_{j}\delta^{k}_{\nu}\epsilon^{ij}{}_{k}, \quad B^{i\mu}{}_{\nu} = 2i(\delta^{\mu}_{j}\delta^{ij}\sigma^{0}_{\pm} + \delta^{\mu}_{0}\sigma^{i}_{\pm}) \tag{1.4}$$

Cumpliéndose:

$$[R_i, R_j] = 2i\epsilon_{ij}{}^{k}R_k, \quad [R_i, B_j] = 2i\epsilon_{ij}{}^{k}B_k, \quad [B_i, B_j] = -2i\epsilon_{ij}{}^{k}R_k, \tag{1.5}$$

Así que tenemos un homomorfismo de álgebras de Lie:

$$\phi(\sigma_i) = R_i, \quad \phi(\tau_i) = B_i, \tag{1.6}$$

y si π y ρ son vectores del álgebra de Lie de GL(2,$\mathbb{C}$), entonces,

$$\phi^{-1}([\phi(\pi), \phi(\rho)]) = [\pi, \rho]. \tag{1.7}$$

Con esta notación, quizás un poco pesada, podemos reescribir la transformación de GL(2,$\mathbb{C}$)de la siguiente manera:

$$\exp(\tfrac{i}{2}(\theta\vec{n} + i\vec{\beta})\cdot\sigma) = \exp(\tfrac{i}{2}(\vec{\theta}\cdot\sigma + \vec{\beta}\cdot\tau)) \approx \mathbb{I} + \frac{i}{2}(\vec{\theta}\cdot\sigma + \vec{\beta}\cdot\tau), \tag{1.8}$$

donde hemos tomado la aproximación a primer orden en el desarrollo de la exponencial y hemos simplificado el álgebra con $\vec{\theta} = \theta\vec{n}$.

Usando nuestro homomorfismo de álgebras de Lie, y del hecho de que grupos de Lie con el mismo álgebra son localmente isomorfos[1], la transformación de Lorentz correspondiente será:

$$\exp(\frac{i}{2}(\vec{\theta}\cdot R \pm \vec{\beta}\cdot B))^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\vec{\theta}, \vec{\beta}) \approx \delta^{\mu}_{\nu} + \frac{i}{2}(\theta^{i}R_{i}{}^{\mu}{}_{\nu} + \beta^{i}B_{i}{}^{\mu}{}_{\nu}) \tag{1.9}$$

[1]Esta propiedad se denomina **segundo teorema fundamental de Lie.**

Ahora, expresaremos la transformación usando la representación de GL(2,$\mathbb{C}$)mediante conjugación[2].

$$\begin{aligned}
&\exp(\tfrac{i}{2}(\theta\vec{n} \pm i\vec{\beta})\cdot\sigma)\sigma^\mu_\pm \exp(-\tfrac{i}{2}(\theta\vec{n} \mp i\vec{\beta})\cdot\sigma) \\
&\quad \approx [\mathbb{I} + \tfrac{i}{2}(\vec{\theta} \pm i\vec{\beta})\cdot\sigma]\sigma^\mu_\pm[\mathbb{I} - \tfrac{i}{2}(\vec{\theta} \mp i\vec{\beta})\cdot\sigma] \\
&\quad \approx \sigma^\mu_\pm + \frac{i}{2}\theta_i\sigma^i\sigma^\mu_\pm \mp \frac{1}{2}\beta_i\sigma^i\sigma^\mu_\pm - \frac{i}{2}\theta_i\sigma^\mu_\pm\sigma^i \mp \frac{1}{2}\beta_i\sigma^\mu_\pm\sigma^i \\
&\quad = \sigma^\mu_\pm + \frac{i}{2}\theta_i[\sigma^i, \sigma^\mu_\pm] \mp \frac{1}{2}\beta_i\{\sigma^i, \sigma^\mu_\pm\}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Ahora, utilizando la expresión (4.8), podemos deducir:

$$\begin{aligned}
\mp\frac{1}{2}\beta_i\{\sigma^i, \sigma^\mu_\pm\} &= -\frac{1}{2}\beta_i\{\sigma^i_\pm, \sigma^\mu_\pm\} \\
&= \beta_i(-\delta^\mu_0\sigma^i_\pm - \cancel{\delta^i_0\sigma^\nu_\pm} + \eta^{i\mu}\mathbb{I}) \\
&= -\beta_i(\delta^\mu_j\delta^{ij}\sigma^0_\pm + \delta^\mu_0\sigma^i_\pm) \\
&= \frac{i}{2}\beta_i R^{i\mu}{}_\nu\sigma^\nu_\pm, \quad \text{por la definición en (1.4).}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Debido a que

$$[\sigma^i, \sigma^0_\pm] = [\sigma^i, \mathbb{I}] = 0, \tag{1.12}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2}\theta_i[\sigma^i, \sigma^\mu_\pm] &= \pm\frac{i}{2}\delta^\mu_j\theta_i[\sigma^i, \sigma^j] \\
&= \pm\frac{i}{2}\delta^\mu_j\theta_i(2i\epsilon^{ij}{}_k\sigma^k) \\
&= \frac{i}{2}\theta_i(2i\delta^\mu_j\delta^k_\nu\epsilon^{ij}{}_k)\sigma^\nu_\pm \\
&= \frac{i}{2}\theta_i R^{i\mu}{}_\nu\sigma^\nu_\pm, \quad \text{por la definición en (1.4).}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

[2] De hecho, no es exactamente una conjugación, sino más bien una especie de conjugación compleja: $\sigma^\mu_\pm \mapsto S_\pm(\Lambda)\sigma^\mu_\pm S_\pm(\Lambda)^*$

Sustituimos estos resultados en (1.10) y obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\exp(\tfrac{i}{2}(\theta\vec{n} \pm i\vec{\beta})\cdot\sigma)\sigma_{\pm}^{\mu}\exp(-\tfrac{i}{2}(\theta\vec{n} \mp i\vec{\beta})\cdot\sigma) \\
&\approx \sigma_{\pm}^{\mu} + \frac{i}{2}\theta_i[\sigma^i, \sigma_{\pm}^{\mu}] \mp \frac{1}{2}\beta_i\{\sigma^i, \sigma_{\pm}^{\mu}\} \\
&= \delta_{\nu}^{\mu}\sigma_{\pm}^{\nu} + \frac{i}{2}\theta_i R^{i\mu}{}_{\nu}\sigma_{\pm}^{\nu} + \frac{i}{2}\beta_i B^{i\mu}{}_{\nu}\sigma_{\pm}^{\nu} \\
&\approx \exp(\frac{i}{2}(\theta_i R^i + \beta_i B^i))^{\mu}{}_{\nu}\sigma_{\pm}^{\nu} \\
&= \Lambda(\vec{\theta}, \vec{\beta})^{\mu}{}_{\nu}\sigma_{\pm}^{\nu}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Que es lo que queríamos demostrar aunque a primer orden.

Recordemos que en la transformación $u_{\pm} \mapsto S_{\pm}(\Lambda)u_{\pm}$ no cambia las $\sigma_{\pm}^{\mu}$, sino que cambia toda la expresión $u_{\pm}^{\dagger}\sigma_{\pm}^{\mu}u_{\pm}$. Por lo tanto, se requiere de un paso extra:

$$u_{\pm}^{\dagger\prime}\sigma_{\pm}^{\mu}u_{\pm}' = u_{\pm}^{\dagger}S_{\pm}(\Lambda)\sigma_{\pm}^{\mu}S_{\pm}(\Lambda)^{*}u_{\pm} = u_{\pm}^{\dagger}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\sigma_{\pm}^{\nu}u_{\pm} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\; u_{\pm}^{\dagger}\sigma_{\pm}^{\nu}u_{\pm}. \tag{1.15}$$

2. El pseudovector $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\psi$

Muestre que la combinación $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\psi$ transforma como las componentes de un pseudovector. Comenzaremos reescribiendo:

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\psi &= \begin{pmatrix} u_-^{\dagger} & u_+^{\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma_-^{\mu} \\ \sigma_+^{\mu} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \\ & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_+ \\ u_- \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_-^{\dagger} & u_+^{\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma_-^{\mu} \\ \sigma_+^{\mu} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_+ \\ -u_- \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_-^{\dagger} & u_+^{\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sigma_-^{\mu}u_- \\ \sigma_+^{\mu}u_+ \end{pmatrix} \\
&= u_+^{\dagger}\sigma_+^{\mu}u_+ - u_-^{\dagger}\sigma_-^{\mu}u_-
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Por lo tanto, ante una transformación de Lorentz tenemos:

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}'\gamma^{\mu}\gamma_5\psi' &= u_+^{\dagger\prime}\sigma_+^{\mu}u_+' - u_-^{\dagger\prime}\sigma_-^{\mu}u_-' \\
&= \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\;(u_+^{\dagger}\sigma_+^{\nu}u_+ - u_-^{\dagger}\sigma_-^{\nu}u_-) \\
&= \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\;\bar{\psi}\gamma^{\nu}\gamma_5\psi,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

es decir, transforma como vector o pseudovector.

Para corroborar que es un pseudovector recurriremos a conocer qué sucede ante cambio de paridad. Ante un cambio de paridad los espinores de Weil $u_\pm$ cambian el comportamiento de su transformación al comportamiento de $u_\mp$. Obtenemos:

$$P(\ \bar{\psi}'\gamma^\mu\gamma_5\psi'\ ) = u_-^{\dagger\prime}\sigma_+^\mu u_-' - u_+^{\dagger\prime}\sigma_-^\mu u_+', \tag{2.3}$$

que cambia de signo la componente temporal, pero mantiene el signo en las componentes espaciales. Se trata entonces de un pseudovector, porque si fuera un vector cambiaría de signo las espaciales y mantendría intacta la temporal.

3. Normalización de $v(k,s)$

Muestre que las soluciones de energía negativa de la ecuación de Dirac están normalizadas como

$$v(k,s) = \frac{m - \not{k}}{m\sqrt{2(k_0+m)}} v^s(k_R) \tag{3.1}$$

Comenzaremos por escribir la solución libre del espinor de energía negativa.

$$v(x,s) = v(k,s)\exp(ik\cdot x)$$

Sabemos que cumple la ecuación libre de Dirac:

$$0 = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)v = -(\gamma^\mu k_\mu + m)v \tag{3.2}$$

Es como si ψ fuera "eigenvector" del operador diferencial con "eigenvalor" $(i\gamma^\mu k_\mu - m)$.

Recordemos que esto implica que el espinor debe ser necesariamente de la forma:

$$v(k_R) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} \eta \\ -\eta \end{pmatrix}, \quad \text{siendo } \eta \text{ un espinor de Weil normalizado} \tag{3.3}$$

Tomemos ahora un marco de referencia en reposo ($\not{k}_R = m\gamma^0$).

$$(\not{k}_R - m)v(k_R) = m \begin{pmatrix} -\mathbb{I} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \sqrt{m} \begin{pmatrix} \eta \\ -\eta \end{pmatrix} = -2mv(k_R) \tag{3.4}$$

quedando finalmente como

$$v(k_R) = -\frac{1}{2m}(\not{k}_R - m)v(k_R) \tag{3.5}$$

Igual que en las notas, ahora hay que generalizar a un marco en movimiento.

$$v(k) = N_p(\not{k} - m)v(k_R) \tag{3.6}$$

Esto se justifica porque si multiplicamos por la izquierda por $(\not{k} + m)$ obtenemos $(k_\mu k^\mu - m^2)$, que es cero.

Deseamos que en el marco en reposo $N_p = -\frac{1}{2m}$. De manera que

$$\begin{aligned} v^\dagger(k) &= N_p^* v^\dagger(k_R)(\gamma^{\mu\dagger}k_\mu - m) \\ \bar{v}(k) &= N_p^* v^\dagger(k_R)(\not{k}^\dagger - m)\gamma^0 \\ &= N_p^* v^\dagger(k_R)\gamma^0(\not{k} - m) \\ \bar{v}(k)v(k) &= |N_p|^2 v^\dagger(k_R)\gamma^0(\not{k} - m)(\not{k} - m)v(k_R) \\ &= |N_p|^2 v^\dagger(k_R)\gamma^0(k_\mu k^\mu - 2m\not{k} + m^2)v(k_R) \\ &= 2m|N_p|^2 v^\dagger(k_R)\gamma^0(m - \not{k})v(k_R) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Donde hemos usado la simetría de $k_\mu k_\nu$ para comprobar que

$$\not{k}\not{k} = k_\mu k_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2}k_\mu k_\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = k_\mu k_\nu \eta^{\mu\nu} = k_\mu k^\mu \tag{3.8}$$

Escribiremos esto en forma matricial con la representación que estamos manejando:

$$\begin{aligned} \bar{v}(k)v(k) &= 2m|N_p|^2 v^\dagger(k_R) \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & -k_\mu\sigma_-^\mu \\ -k_\mu\sigma_+^\mu & m \end{pmatrix} v(k_R) \\ &= 2m^2|N_p|^2(\eta^\dagger \quad -\eta^\dagger) \begin{pmatrix} -k_\mu\sigma_+^\mu & m \\ m & -k_\mu\sigma_-^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ -\eta \end{pmatrix} \\ &= 2m^2|N_p|^2(\eta^\dagger \quad -\eta^\dagger) \begin{pmatrix} -(k_\mu\sigma_+^\mu + m)\eta \\ (k_\mu\sigma_-^\mu + m)\eta \end{pmatrix} \\ &= -2m^2|N_p|^2(\quad \eta^\dagger(k_\mu\sigma_+^\mu + m)\eta \ + \ \eta^\dagger(k_\mu\sigma_-^\mu + m)\eta \quad) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Recordando que $\sigma_\pm^\mu = (\mathbb{I}, \pm\sigma_i)$, sólo sobreviven las $\sigma_\pm^0 = \mathbb{I}$.

$$\begin{aligned}
\bar{v}(k)v(k) &= -2m^2|N_p|^2(\quad 2(k_0+m)\eta^\dagger\eta \quad) \\
&= -4m^2(k_0+m)|N_p|^2 \\
&= -2m, \quad \text{porque es lo que esperamos.}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 2m(k_0+m)|N_p|^2 = 1 & \\
\Rightarrow \quad |N_p| &= \frac{1}{\sqrt{2m(k_0+m)}} \\
\Rightarrow \quad v(k) &= \frac{(\not{k}-m)}{\sqrt{2m(k_0+m)}} v(k_R) \\
&= \frac{(\not{k}-m)\sqrt{m}}{\sqrt{2m(k_0+m)}} \begin{pmatrix} \eta \\ -\eta \end{pmatrix} \\
&= \frac{\not{k}-m}{\sqrt{2(k_0+m)}} \begin{pmatrix} \eta \\ -\eta \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Si tomamos en cuenta el espín obtenemos:

$$v(k,s) = -\frac{m-\not{k}}{\sqrt{2m(k_0+m)}} v^s(k_R) \tag{3.12}$$

Esta expresión me parece correcta porque tiene unidades de $\sqrt{\text{masa}}$, que es lo que esperamos de estos espinores. Por otro lado el resultado al que se supone que debemos llegar es adimensional. También pienso que es correcta porque en las notas se normaliza a $u(k,s)$ de manera parecida.

El signo es irrelevante porque no podemos calcular ni medir la fase de N_p.

4. Productos $\bar{v}v$, $v\bar{v}$ y $\bar{v}u$

Muestre que

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \bar{v}^r(k)v^s(k) = -2m\delta^{rs} \\
&\text{b)} \quad \sum_{s=1}^{2} v(p,s)\bar{v}(p,s) = \not{p} - m \\
&\text{c)} \quad \bar{v}(p,r)u(p,s) = 0
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

4.a.

De la ecuación (3.12) tenemos:

$$
\begin{aligned}
\bar{v}^r(k)v^s(k) &= v^{r\dagger}(k)\gamma^0 v^s(k) \\
&= \left(-\frac{v^{r\dagger}(k_R)(m-\not{k}^\dagger)}{\sqrt{2m(k_0+m)}}\right)\gamma^0\left(-\frac{(m-\not{k})v^s(k_R)}{\sqrt{2m(k_0+m)}}\right) \\
&= \frac{1}{2(k_0+m)}(\eta^{r\dagger} \quad -\eta^{r\dagger})(m-\not{k}^\dagger)\gamma^0(m-\not{k})\begin{pmatrix} \eta^s \\ -\eta^s \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2(k_0+m)}(\eta^{r\dagger} \quad -\eta^{r\dagger})\gamma^0(m-\not{k})(m-\not{k})\begin{pmatrix} \eta^s \\ -\eta^s \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2(k_0+m)}(-\eta^{r\dagger} \quad \eta^{r\dagger})(m^2-2m\not{k}+k_\mu k^\mu)\begin{pmatrix} \eta^s \\ -\eta^s \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2m}{2(k_0+m)}(-\eta^{r\dagger} \quad \eta^{r\dagger})(m-\not{k})\begin{pmatrix} \eta^s \\ -\eta^s \end{pmatrix} \\
&= \frac{2m}{2(k_0+m)}(-\eta^{r\dagger} \quad \eta^{r\dagger})(m-\not{k})\begin{pmatrix} \eta^s \\ -\eta^s \end{pmatrix} \\
&= \frac{2m}{2(k_0+m)}\left(-2m\eta^{r\dagger}\eta^s - \eta^{r\dagger}k_\mu\sigma_+^\mu\eta^s - \eta^{r\dagger}k_\mu\sigma_-^\mu\eta^s \right) \\
&= \frac{-2m}{2(k_0+m)}(2m+2k_0)\eta^{r\dagger}\eta^s \\
&= -2m\delta^{rs}
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

4.b.

Usaremos la convención de Einstein para el ínidce del espín.

$$
\begin{aligned}
&v^s(k)\bar{v}_s(k)\\
&\quad= v^s(k)v_s^\dagger(k)\gamma^0\\
&\quad= \left(-\frac{(m-\not{k})v^s(k_R)}{\sqrt{2m(k_0+m)}}\right)\left(-\frac{v_s^\dagger(k_R)(m-\not{k}^\dagger)}{\sqrt{2m(k_0+m)}}\right)\gamma^0\\
&\quad= \frac{1}{2(k_0+m)}(m-\not{k})\begin{pmatrix}\eta^s\\ -\eta^s\end{pmatrix}(\eta_s^\dagger \quad -\eta_s^\dagger)(m-\not{k}^\dagger)\gamma^0\\
&\quad= \frac{1}{2(k_0+m)}(m-\not{k})\begin{pmatrix}\eta^s\eta_s^\dagger & -\eta^s\eta_s^\dagger\\ -\eta^s\eta_s^\dagger & \eta^s\eta_s^\dagger\end{pmatrix}\gamma^0(m-\not{k})\gamma^0\gamma^0\\
&\quad= \frac{1}{2(k_0+m)}(m-\not{k})\begin{pmatrix}\mathbb{I} & -\mathbb{I}\\ -\mathbb{I} & \mathbb{I}\end{pmatrix}\gamma^0(m-\not{k})\\
&\quad= \frac{1}{2(k_0+m)}(m-\not{k})(\mathbb{I}-\gamma^0)\gamma^0(m-\not{k})\\
&\quad= \frac{1}{2(k_0+m)}(m-\not{k})(\gamma^0-\mathbb{I})(m-\not{k})
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Desarrollaremos dos expresiones de manera independiente.

$$
(m-\not{k})(-\mathbb{I})(m-\not{k}) = -(m^2-2m\not{k}+k_\mu k^\mu) = 2m(\not{k}-m) \tag{4.4}
$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
&(m-\not{k})\gamma^0(m-\not{k})\\
&\quad= \begin{pmatrix}m & -k_\mu\sigma_-^\mu\\ -k_\mu\sigma_+^\mu & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \mathbb{I}\\ \mathbb{I} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m & -k_\mu\sigma_-^\mu\\ -k_\mu\sigma_+^\mu & m\end{pmatrix}\\
&\quad= \begin{pmatrix}m & -k_\mu\sigma_-^\mu\\ -k_\mu\sigma_+^\mu & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-k_\mu\sigma_+^\mu & m\\ m & -k_\mu\sigma_-^\mu\end{pmatrix}\\
&\quad= \begin{pmatrix}-mk_\mu\sigma_+^\mu - mk_\mu\sigma_-^\mu & m^2+k_\mu k_\nu\sigma_-^\mu\sigma_-^\nu\\ m^2+k_\mu k_\nu\sigma_+^\mu\sigma_+^\nu & -mk_\mu\sigma_+^\mu - mk_\mu\sigma_-^\mu\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Una vez más, dividiremos el trabajo en dos casos.

$$
-mk_\mu\sigma_+^\mu - mk_\mu\sigma_-^\mu = -mk_\mu(\sigma_+^\mu+\sigma_-^\mu) = -2mk_0 \tag{4.6}
$$

Por otro lado tenemos:

$$
\begin{aligned}
m^2 + k_\mu k_\nu \sigma_\pm^\mu \sigma_\pm^\nu &= m^2 + \frac{1}{2} k_\mu k_\nu \{\sigma_\pm^\mu, \sigma_\pm^\nu\} \\
&= m^2 + 2k_0 k_\mu \sigma_\pm^\mu - k_\mu k^\mu \\
&= 2k_0 k_\mu \sigma_\pm^\mu,
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

donde hemos usado:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\{\sigma_\pm^\mu, \sigma_\pm^\nu\} &= \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \sigma_\pm^x & \sigma_\pm^y & \sigma_\pm^z \\ \sigma_\pm^x & \mathbb{I} & 0 & 0 \\ \sigma_\pm^y & 0 & \mathbb{I} & 0 \\ \sigma_\pm^z & 0 & 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \\
&= \delta_0^\nu \sigma_\pm^\mu + \delta_0^\mu \sigma_\pm^\nu - \eta^{\mu\nu} \mathbb{I}.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Incorporando estos resultados a la matriz de (4.5) obtenemos:

$$
(m - \not{k})\gamma^0(m - \not{k}) = \begin{pmatrix} -2mk_0 & 2k_0 k_\mu \sigma_-^\mu \\ 2k_0 k_\mu \sigma_+^\mu & -2mk_0 \end{pmatrix} = 2k_0(\not{k} - m) \tag{4.9}
$$

Este resultado y el (4.4) los incorporamos a (4.3) y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
v^s(k)\bar{v}_s(k) &= \frac{1}{2(k_0 + m)}(m - \not{k})(\gamma^0 - \mathbb{I})(m - \not{k}) \\
&= \frac{1}{2(k_0 + m)}(2m(\not{k} - m) + 2k_0(\not{k} - m)) \\
&= \not{k} - m,
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

que es lo que queríamos demostrar.

4.c.

Expresando la $\bar{v}$ y la u en términos de los espinores en reposo:

$$\begin{aligned}
\bar{v}^r(k)u^s(k) &= v^{r\dagger}(k)\gamma^0 u^s(k) \\
&= \left(\frac{v^{r\dagger}(k_R)(\not{k}^\dagger - m)}{\sqrt{2m(k_0+m)}}\right)\gamma^0\left(\frac{(\not{k}+m)u^s(k_R)}{\sqrt{2m(k_0+m)}}\right) \\
&= \frac{v^{r\dagger}(k_R)\gamma^0(\not{k}-m)(\not{k}+m)u^s(k_R)}{2m(k_0+m)} \\
&= \frac{v^{r\dagger}(k_R)\gamma^0(k_\mu k^\mu - m^2)u^s(k_R)}{2m(k_0+m)} \\
&= 0, \quad \text{porque } m^2 = k_\mu k^\mu.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Un resultado que utilizaremos en el problema 5 tiene un desarrollo similar:

$$\begin{aligned}
\bar{u}^r(k)v^s(k) &= u^{r\dagger}(k)\gamma^0 v^s(k) \\
&= \left(\frac{u^{r\dagger}(k_R)(\not{k}^\dagger + m)}{\sqrt{2m(k_0+m)}}\right)\gamma^0\left(\frac{(\not{k}+m)v^s(k_R)}{\sqrt{2m(k_0-m)}}\right) \\
&= \frac{u^{r\dagger}(k_R)\gamma^0(\not{k}+m)(\not{k}-m)v^s(k_R)}{2m(k_0+m)} \\
&= \frac{u^{r\dagger}(k_R)\gamma^0(k_\mu k^\mu - m^2)v^s(k_R)}{2m(k_0+m)} \\
&= 0, \quad \text{por la misma razón.}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

5. Proyecciones Λ_+ y Λ_-

Prueba que

$$\Lambda_+ = \frac{\not{p}+m}{2m}, \qquad \Lambda_- = \frac{\not{p}-m}{2m} \tag{5.1}$$

satisfacen

$$\Lambda_\pm^2 = \Lambda_\pm, \qquad \Lambda_+\Lambda_- = 0. \tag{5.2}$$

¿Cómo actúan estos proyectores sobre los espinores básicos

$$u_r(k) = u(r,k), \qquad v_r(k) = v(r,k)\ ? \tag{5.3}$$

Desarrollando,

$$\begin{aligned}
\Lambda_+\Lambda_+ &= \frac{1}{4m^2}(p_\mu\gamma^\mu + m)(p_\nu\gamma^\nu + m) \\
&= \frac{1}{4m^2}(p_\mu p_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu + 2mp_\mu\gamma^\mu + m^2) \\
&= \frac{1}{4m^2}(\tfrac{1}{2}p_\mu p_\nu\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} + 2mp_\mu\gamma^\mu + m^2) \\
&= \frac{1}{4m^2}(p_\mu p^\mu + 2mp_\mu\gamma^\mu + m^2) \\
&= \frac{1}{4m^2}(2mp_\mu\gamma^\mu + 2m^2) \\
&= \frac{1}{2m}(p_\mu\gamma^\mu + m) \\
&= \Lambda_+
\end{aligned} \tag{5.4}$$

También,

$$\begin{aligned}
\Lambda_-\Lambda_- &= \frac{1}{4m^2}(p_\mu\gamma^\mu - m)(p_\nu\gamma^\nu - m) \\
&= \frac{1}{4m^2}(p_\mu p_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu - 2mp_\mu\gamma^\mu + m^2) \\
&= \frac{1}{4m^2}(\tfrac{1}{2}p_\mu p_\nu\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} - 2mp_\mu\gamma^\mu + m^2) \\
&= \frac{1}{4m^2}(p_\mu p^\mu - 2mp_\mu\gamma^\mu + m^2) \\
&= \frac{1}{4m^2}(-2mp_\mu\gamma^\mu + 2m^2) \\
&= -\frac{1}{2m}(p_\mu\gamma^\mu - m) \\
&= -\Lambda_-
\end{aligned} \tag{5.5}$$

quizás me equivoqué. Si no, el signo se resuelve redefiniendo al operador Λ_-.

$$\Lambda_- \mapsto -\Lambda_- = -\frac{p - m}{2m}$$

Para conocer los efectos de estos proyectores con los espinores u y v usaremos la información de las notas TCC.2.6, p. 357, y del problema

4.b de esta tarea para reescribir las Λ como:

$$\Lambda_+ = \frac{1}{2m}u^s(p)\bar{u}_s(p), \qquad \Lambda_- = -\frac{1}{2m}v^s(p)\bar{v}_s(p). \tag{5.6}$$

Por lo tanto,

$$\Lambda_+ u^r(p) = \frac{1}{2m}u^s(p)\bar{u}_s(p)u^r(p) = \frac{2m}{2m}\delta^r_s u^s(p) = u^r(p), \tag{5.7}$$

donde hemos usado que el producto matricial es asociativo.

$$\Lambda_+ v^r(p) = \frac{1}{2m}u^s(p)\bar{u}_s(p)v^r(p) = 0, \quad \text{porque } \bar{u}_s(p)v^r(p) = 0. \tag{5.8}$$

En este desarrollo utilizamos el segundo resultado del problema 4.c.

$$\Lambda_- u^r(p) = -\frac{1}{2m}v^s(p)\bar{v}_s(p)u^r(p) = 0, \quad \text{porque } \bar{v}_s(p)u^r(p) = 0. \tag{5.9}$$

En este otro, utilizamos el primer resultado del problema 4.c.

$$\Lambda_- v^r(p) = -\frac{1}{2m}v^s(p)\bar{v}_s(p)v^r(p) = -\frac{-2m}{2m}\delta^r_s v^s(p) = v^r(p) \tag{5.10}$$