Problema 1.45 Demostrar que $(A - B) \times (A + B) = 2 A \times B$ y dar una interpretación geometrica

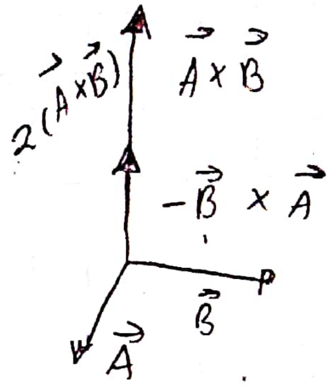
$$(\vec{A} - \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B}) = 2 \vec{A} \times \vec{B}$$

$$\vec{A} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{B} - \vec{B} \times \vec{A} - \vec{B} \times \vec{B}$$

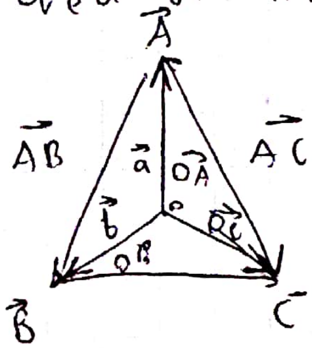
$$\vec{0} + \vec{A} \times \vec{B} - \vec{B} \times \vec{A} - \vec{0}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{B}$$

$$\boxed{2(\vec{A} \times \vec{B})}$$



Problema 1.46 Sea ABC un triangulo O cualquier punto $a = \vec{OA}$, $b = \vec{OB}$, $c = \vec{OC}$. Mostrar que el area de ABC es igual a $\frac{1}{2} |a \times b + b \times c + c \times a|$



$$\vec{OA} = a$$
$$\vec{OB} = b$$
$$\vec{OC} = c$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} \cdot \vec{OA}$$
$$\vec{AB} = b - a$$
$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$$
$$\vec{AC} = c - a$$

$$\frac{1}{2}(\vec{AB} \times \vec{AC})$$

$$\frac{1}{2}((b-a) \times (c-a))$$

$$\frac{1}{2}(b \times c - b \times a - a \times c + a \times a)$$

$$\frac{1}{2}(b \times c - b \times a - a \times c)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}(a \times b + b \times c + c \times a)}$$

Problema 1.47 Demostrar que
$(a-d)\times(b-c)+(b-d)\times(c-a)+(c-d)\times(a-b)=$
$2(a\times b+b\times c+c\times a)$

$\bar a\times\bar b-\bar a\times\bar c-\cancel{\bar d\times\bar b}+\cancel{\bar d\times\bar c}+\bar b\times\bar c-\bar b\times\bar a-\cancel{\bar d\times\bar c}+\cancel{\bar d\times\bar a}$
$+\bar c\times\bar a-\bar c\times\bar b-\cancel{\bar d\times\bar a}+\cancel{\bar d\times\bar b}$

$\bar a\times\bar b-\bar a\times\bar c+\bar b\times\bar c-\bar b\times\bar a+\bar c\times\bar a-\bar c\times\bar b$
$\bar a\times\bar b+\bar c\times\bar a+\bar c\times\bar b+\bar a\times\bar b+\bar c\times\bar a+\bar b\times\bar c$
$\bar a\times\bar b+\bar a\times\bar b+\bar b\times\bar c+\bar b\times\bar c+\bar c\times\bar a+\bar c\times\bar a$
$2(\bar a\times\bar b)+2(\bar b\times\bar c)+2(\bar c\times\bar a)$

$2(\bar a\times\bar b+\bar b\times\bar c+\bar c\times\bar a)$

Problema 1.50. Mostrar que $(A+B)\cdot(B+C)\times(C+A)$
$=2[ABC]$

$(A+B)\cdot(B+C)\times(C+A)$
$(A+B)\cdot(B\times C+B\times A+C\times C+C\times A)$

$A\cdot B\times C+\underbrace{\cancel{A\cdot B\times A}}_{=0}+\underbrace{\cancel{A\cdot C\times C}}_{=0}+\underbrace{\cancel{A\cdot C\times A}}_{=0}+\underbrace{\cancel{B\cdot B\times C}}_{=0}+$
$\underbrace{\cancel{B\cdot B\times A}}_{=0}+\underbrace{\cancel{B\cdot C\times C}}_{=0}+B\cdot C\times A$

$A\cdot B\times C+B\cdot C\times A=A\cdot B\times C+A\cdot B\times C$

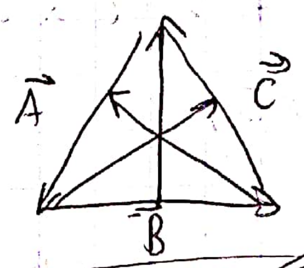
$=2[A\cdot B\times C]$

$=2[ABC]$

1.56.- Demostrar que $A\,B\,C$ son linealmente dependientes si y solo si $[A\,B\,C] = 0$

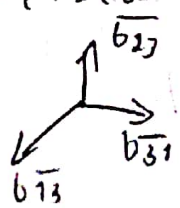
Si $[ABC] = 0$, significa que no hay volumen por lo que son coplanares y si son coplanares se pueden reescribir respecto a los vectores sobrantes

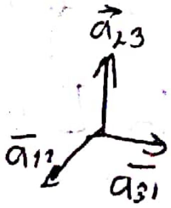
1.57.- Demostrar usando vectores que las mediatrices de un angulo son concurrentes



1.58.- Si a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3 son conjuntos reciproco de vectores, mostrar que $a_2 \times a_3$, $a_3 \times a_1$, $a_1 \times a_2$ y $b_2 \times b_3$, $b_3 \times b_1$, $b_1 \times b_2$ son tambien conjuntos recíprocos

Si a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3 son conjuntos recíprocos entonces el vector resultante de $a_2 \times a_3$, va en misma dirección que $b_2 \times b_3$, lo mismo con los demas conjuntos, por lo tanto los conjuntos del producto cruz son recíprocos





1.5a. Si a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3 son conjuntos recíprocos de vectores mostrar que $a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 + a_3 \times b_3 = 0$

$$\vec{a}_1 \times \vec{b}_1 + \vec{a}_2 \times \vec{b}_2 + \vec{a}_3 \times \vec{b}_3 = 0$$

$$|a_1|\,|b_1| \operatorname{sen} 0 + |a_2|\,|b_2| \operatorname{sen} 0 + |a_3|\,|b_3| \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$0 + 0 + 0 = 0$$

$$\therefore = 0$$