INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

“ESCOM” (ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO)

VÁZQUEZ BLANCAS CÉSAR SAID

U.A.: TEORIA DE LA COMPUTACION

GRUPO: 4CM4

Articulo “On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem”

12/05/2024

Introducción

En su influyente artículo "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem", Alan Turing introduce conceptos fundamentales que sentarían las bases de la teoría de la computación. Turing se propone abordar el Entscheidungsproblem, un problema planteado por David Hilbert que buscaba determinar si existía un algoritmo capaz de decidir la verdad o falsedad de cualquier enunciado matemático formulado en términos lógicos. Turing comienza por definir los números computables como aquellos números reales cuyas expansiones decimales pueden ser calculadas mediante un procedimiento finito. En términos prácticos, un número es computable si existe una máquina que puede generar sus dígitos decimales uno a uno a través de una serie de operaciones definidas. Esta máquina teórica, ahora conocida como la "máquina de Turing", es un modelo abstracto que captura la esencia de cualquier proceso computacional mediante un conjunto finito de reglas que operan sobre una cinta infinita dividida en celdas. El artículo de Turing es particularmente notable por su aplicación al Entscheidungsproblem. Turing demuestra que no existe un método algorítmico universal que pueda resolver todos los problemas matemáticos, introduciendo el concepto de indecidibilidad. Esto significa que para una amplia clase de problemas, no es posible diseñar un algoritmo que siempre determine la verdad o falsedad de las declaraciones lógicas involucradas. Esta idea desafió la visión optimista de Hilbert sobre la capacidad de resolver sistemáticamente todas las preguntas matemáticas mediante algoritmos.

Además, Turing explora la noción de "calculabilidad efectiva", argumentando que cualquier función que pueda ser calculada de manera efectiva en un entorno dado puede ser computada por una máquina de Turing. Esta idea establece una conexión fundamental entre los modelos teóricos de computación y su implementación práctica.

El impacto de la investigación de Turing va más allá de responder a la pregunta de Hilbert. Sus aportes definen los límites de lo que puede ser computacionalmente resuelto, proporcionando una comprensión profunda de las capacidades y limitaciones de las máquinas computacionales. Este trabajo no solo influenció profundamente la matemática, sino que también sentó las bases para el desarrollo de la informática moderna. Al establecer los principios teóricos de la computabilidad y la indecidibilidad, Turing marcó un antes y un después en la historia de la ciencia, afectando campos tan diversos como la filosofía y la tecnología de la información.

Desarrollo

En su artículo de 1936, Alan Turing propone una solución innovadora al Entscheidungsproblem de David Hilbert mediante la introducción de un modelo teórico de computación conocido como la máquina de Turing. Este dispositivo teórico se utiliza para formalizar el concepto de algoritmo y explorar los límites de la computabilidad.

La máquina de Turing es un modelo abstracto que consiste en una cinta infinita dividida en celdas, cada una de las cuales puede contener un símbolo de un conjunto finito de símbolos. La máquina opera mediante una cabeza lectora/escritora que puede leer y escribir símbolos en las celdas de la cinta y moverse a la izquierda o a la derecha según un conjunto de reglas predefinidas. Estas reglas están determinadas por una función de transición que especifica, para cada combinación posible de estado actual y símbolo leído, el nuevo símbolo a escribir, la dirección de movimiento de la cabeza y el nuevo estado de la máquina.

El proceso de computación de una máquina de Turing comienza en un estado inicial con una configuración específica de la cinta y continúa hasta que alcanza un estado de parada, momento en el cual el cálculo se considera completo. El resultado del cálculo se representa mediante los símbolos presentes en la cinta cuando la máquina se detiene.

Turing argumenta que este modelo de computación es capaz de simular cualquier proceso de cálculo que un ser humano pueda realizar, sin requerir intervención creativa o intuitiva. Esto significa que cualquier número que pueda ser calculado por una máquina de Turing es un número computable. Además, Turing establece que los problemas que no pueden ser resueltos por una máquina de Turing no son decidibles por ningún otro procedimiento algorítmico, introduciendo así el concepto de indecidibilidad.

Un aspecto crucial del artículo de Turing es su demostración de que ciertos problemas, incluido el Entscheidungsproblem de Hilbert, no pueden ser resueltos por ningún algoritmo. Para ilustrar esta idea, Turing presenta el problema de la parada, que pregunta si una máquina de Turing determinada se detendrá en una entrada específica. Turing demuestra que no existe una máquina de Turing universal que pueda resolver el problema de la parada para todas las posibles máquinas y entradas, lo que implica que algunos problemas son inherentemente irresolubles por medios algorítmicos.

La investigación de Turing también aborda la noción de "calculabilidad efectiva", sugiriendo que cualquier función que pueda ser calculada de manera efectiva en cualquier entorno puede ser computada por una máquina de Turing. Esto establece una conexión fundamental entre los conceptos teóricos de computabilidad y su implementación práctica en máquinas reales.

El enfoque de Turing proporciona la base para demostrar que no todos los problemas matemáticos pueden ser resueltos algorítmicamente. Su modelo muestra que es imposible diseñar una máquina de Turing que pueda determinar si cualquier máquina y cualquier estado inicial se detendrán o continuarán ejecutándose indefinidamente. Esta limitación fundamental tiene profundas implicaciones en la lógica y las matemáticas, ya que establece los límites de lo que es computacionalmente posible.

El trabajo de Turing no solo define los límites teóricos de la computación, sino que también abre la puerta a futuros desarrollos en el diseño de máquinas computacionales. Su investigación proporciona un marco teórico claro y bien definido para entender las capacidades y limitaciones de los algoritmos, lo que ha influido en el desarrollo de la informática y la tecnología moderna. Al establecer los principios de la computabilidad y la indecidibilidad, Turing sentó las bases para la comprensión de lo que significa resolver un problema matemático desde una perspectiva computacional y tecnológica.

Conclusiones

El artículo de Alan Turing sobre "números computables y su aplicación al Entscheidungsproblem" ha dejado un legado profundo tanto en su época como en la actualidad, estableciendo fundamentos críticos en múltiples campos de la ciencia y la tecnología. Turing abordó el problema planteado por David Hilbert de manera radical al introducir la máquina de Turing, un modelo teórico que formaliza el concepto de algoritmo y computación. Esta innovación no solo impactó en la matemática y la lógica, sino que también estableció límites claros sobre lo que las máquinas pueden teóricamente resolver.

El trabajo de Turing ganó relevancia al demostrar que hay problemas que no son computables de manera algorítmica, respondiendo así a interrogantes fundamentales planteados por matemáticos y filósofos de renombre. Este avance no solo formalizó el concepto de computabilidad, sino que también sentó las bases para el desarrollo futuro de las computadoras digitales. Turing estableció reglas preestablecidas que permitieron simular cualquier proceso de cálculo mediante máquinas, consolidando un marco crucial para el funcionamiento de las computadoras modernas.

Personalmente, al reflexionar sobre el impacto de este trabajo, creo que Turing no solo sentó las bases para la informática moderna, sino que también anticipó conceptos fundamentales que hoy son relevantes en el campo de la inteligencia artificial. La máquina de Turing demostró que existen límites en lo que las máquinas pueden alcanzar, similar a los límites que enfrentamos al intentar replicar completamente la complejidad del pensamiento humano. Así como algunos problemas son intratables para una máquina de Turing, existen aspectos de la cognición humana que aún escapan a nuestras capacidades computacionales actuales.

En resumen, el trabajo de Alan Turing no solo fue revolucionario en su tiempo, sino que también estableció principios que siguen siendo fundamentales para entender los límites y posibilidades de la computación. Su legado perdura en la continua exploración de cómo las máquinas pueden modelar y simular procesos complejos, siempre recordándonos que hay preguntas que pueden ser respondidas de manera algorítmica y otras que, por su naturaleza, siguen desafiando nuestras capacidades computacionales y nuestro entendimiento del mundo.

La Prueba o Test de Turing

La prueba de Turing, propuesta por Alan Turing en su artículo de 1950 "Computing Machinery and Intelligence", es un experimento mental diseñado para determinar si una máquina puede exhibir comportamiento inteligente indistinguible del de un ser humano. Turing formuló la prueba como una respuesta a la pregunta "¿Pueden las máquinas pensar?" y propuso un criterio práctico y operativo para la inteligencia artificial. El test de Turing se lleva a cabo en forma de un "juego de imitación". En su forma más común, implica a tres participantes: un interrogador (humano) y dos sujetos (uno humano y uno máquina). Los participantes están ubicados en habitaciones separadas, de modo que el interrogador no puede ver ni escuchar a los sujetos, comunicándose únicamente a través de una interfaz textual. El objetivo del interrogador es determinar cuál de los dos sujetos es la máquina y cuál es el humano mediante una serie de preguntas y respuestas. La máquina pasa la prueba si el interrogador no puede distinguir consistentemente entre el humano y la máquina, es decir, si la máquina puede imitar con éxito el comportamiento humano en la conversación.

Configuración:

- **Interrogador (I):** Un humano que hace preguntas.
- **Humano (H):** Un participante humano.
- **Máquina (M):** Un programa de inteligencia artificial diseñado para responder preguntas de manera conversacional.

Interfaz:

La comunicación se realiza a través de una terminal de texto, evitando cualquier indicio de voz o apariencia física que pueda revelar la identidad de los sujetos.

Desarrollo del Test:

1. **Inicio del Test:**

   El interrogador empieza a hacer preguntas tanto al humano como a la máquina. La comunicación es anónima, de modo que el interrogador no sabe a quién se está dirigiendo con cada pregunta.

2. **Interacción:**
    - **Interrogador (I):** "¿Cuál es tu libro favorito y por qué?"
        - **Humano (H):** "Mi libro favorito es 'Cien años de soledad' de Gabriel García Márquez. Me encanta su estilo mágico y cómo retrata la vida y la historia de Macondo."
        - **Máquina (M):** "Me gusta '1984' de George Orwell porque explora temas profundos de la política y la sociedad, y su visión distópica es fascinante."
3. **Interrogador continúa con preguntas más específicas:**
    - **Interrogador (I):** "Describe tu día perfecto."
        - **Humano (H):** "Mi día perfecto comienza con una caminata matutina por el parque, seguida de un desayuno con amigos. Pasaría la tarde leyendo y la noche viendo una película con mi familia."
        - **Máquina (M):** "Un día perfecto para mí incluiría explorar nuevas tecnologías por la mañana, seguido de un almuerzo con compañeros de trabajo y una tarde tranquila programando un nuevo proyecto interesante."
4. **Interrogador intenta profundizar para distinguir mejor:**
    - **Interrogador (I):** "¿Qué opinas sobre el significado de la vida?"
        - **Humano (H):** "Creo que el significado de la vida es encontrar felicidad y propósito en las pequeñas cosas diarias y en las relaciones con los demás."
        - **Máquina (M):** "El significado de la vida es una pregunta compleja. Desde una perspectiva lógica, podría ser la búsqueda de conocimiento y la mejora continua de uno mismo."
5. **Evaluación del Interrogador:**

    Después de varias rondas de preguntas, el interrogador debe decidir quién es el humano y quién es la máquina basándose en la calidad y naturaleza de las respuestas recibidas.

Resultados del Test:

- Si el interrogador no puede identificar consistentemente cuál de los dos es la máquina, entonces la máquina se considera que ha pasado la prueba de Turing.

- Si el interrogador identifica correctamente y consistentemente a la máquina, entonces la máquina no ha pasado la prueba.

Importancia:

1. **Criterio Operativo:** La prueba de Turing ofrece un criterio práctico para evaluar la inteligencia artificial sin necesidad de definir la inteligencia de manera abstracta.
2. **Fomento de la IA:** Ha impulsado el desarrollo de tecnologías de IA centradas en el procesamiento del lenguaje natural y la interacción humano-computadora.

Evolución y Adaptaciones Modernas

Desde la propuesta original de Turing, se han desarrollado variantes y adaptaciones del test para evaluar diferentes aspectos de la inteligencia artificial, incluyendo:

1. **Prueba de Turing Total:** Incluye capacidades perceptuales y motoras además del procesamiento del lenguaje.
2. **Prueba de Lovelace:** Propone que una máquina debe ser capaz de crear algo novedoso y original por su cuenta.
3. **Pruebas Específicas de Dominio:** Evaluaciones diseñadas para contextos específicos, como el diagnóstico médico o la conducción autónoma.

Conclusión

La prueba de Turing sigue siendo un punto de referencia crucial en la discusión sobre la inteligencia artificial. Aunque ha sido objeto de críticas y ha evolucionado con el tiempo, su concepto básico de evaluar la inteligencia a través de la capacidad de una máquina para imitar el comportamiento humano sigue siendo relevante. Al proporcionar un criterio tangible para la inteligencia artificial, el test de Turing ha jugado un papel fundamental en el avance de la informática y la tecnología, fomentando la creación de sistemas que pueden interactuar de manera más natural y efectiva con los humanos.

La Tesis Church-Turing

La tesis Church-Turing es un principio fundamental en la teoría de la computación y la lógica matemática que formaliza el concepto de "calculabilidad efectiva" o "computabilidad". Esta tesis fue formulada de manera independiente por Alonzo Church y Alan Turing en la década de 1930 y sostiene que cualquier función que puede ser computada de manera efectiva puede ser calculada por una máquina de Turing.

a. ¿De dónde viene este concepto, es decir, cuáles son los antecedentes que dieron origen a esta tesis?

1. **Problemas de Decisión Matemática:**
    - En las primeras décadas del siglo XX, matemáticos como David Hilbert plantearon problemas fundamentales sobre la naturaleza de las matemáticas, incluyendo el Entscheidungsproblem, que cuestionaba si existía un procedimiento algorítmico para decidir la verdad o falsedad de cualquier proposición matemática.
2. **Desarrollo de la Lógica y la Computabilidad:**
    - Alonzo Church y su estudiante Stephen Kleene desarrollaron el λ-cálculo, un sistema formal para expresar funciones computables, que fue uno de los primeros intentos de formalizar el concepto de calculabilidad.
    - Independientemente, Emil Post y otros desarrollaron sistemas formales equivalentes, conocidos como funciones recursivas.
3. **La Máquina de Turing:**
    - En 1936, Alan Turing introdujo la máquina de Turing en su artículo "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem". Esta máquina abstracta proporcionó un modelo simple pero poderoso para entender la computación efectiva.

Unificación del Concepto:

- Tanto Church con su λ-cálculo como Turing con su máquina de Turing llegaron a la conclusión de que sus respectivas formalizaciones abarcaban todas las funciones que podían ser calculadas de manera efectiva. Este reconocimiento mutuo dio origen a lo que hoy conocemos como la Tesis Church-Turing.

b. ¿En qué consiste esta tesis?

La tesis Church-Turing sostiene que cualquier función que puede ser computada de manera efectiva por algún método algorítmico puede ser computada por una máquina de Turing. Formalmente, se puede expresar como:

- "Una función es computable si y solo si es computable por una máquina de Turing."

Esta tesis no es un teorema matemático formal que pueda ser probado, sino una hipótesis basada en la observación de que todas las formalizaciones conocidas de la computación efectiva son equivalentes en términos de poder computacional.

Componentes Principales:

1. **Máquina de Turing:**
   - Un modelo matemático abstracto que define una máquina que manipula símbolos en una cinta infinita según un conjunto de reglas.
2. **λ-cálculo:**
   - Un sistema formal para expresar funciones matemáticas y computacionales, basado en reglas de transformación de símbolos.
3. **Funciones Recursivas:**
   - Un formalismo en teoría de la computación basado en funciones definidas recursivamente.

c. Implicaciones de la Tesis Church-Turing

1. **Fundamentos de la Teoría de la Computación:**
   - La tesis proporciona un marco unificado para entender la computabilidad, sirviendo como base para gran parte de la teoría de la computación y la lógica matemática.
2. **Limitaciones de la Computación:**
   - Establece límites claros sobre lo que es computacionalmente posible. Si una función no puede ser computada por una máquina de Turing, se considera no computable en el sentido más general.

3. **Desarrollo de la Ciencia de la Computación:**
   - La tesis ha influido en el diseño y la construcción de computadoras modernas, así como en el desarrollo de lenguajes de programación y algoritmos.
4. **Impulso a la Investigación en IA:**
   - Ha proporcionado una base teórica para el desarrollo de la inteligencia artificial, ya que muchas técnicas y algoritmos de IA se basan en principios de computabilidad.
5. **Impacto en otras disciplinas:**
   - Las implicaciones de la tesis se extienden a áreas como la biología computacional, la física teórica y la filosofía de la mente, donde se exploran los límites de lo que puede ser calculado o simulado.

Teorema de Incompletitud de Gödel (Primer Teorema de Gödel)

El teorema de incompletitud de Gödel, formulado por el matemático austriaco Kurt Gödel en 1931, es uno de los resultados más profundos e importantes en la lógica matemática. Este teorema revela limitaciones inherentes en cualquier sistema formal suficientemente potente para incluir la aritmética básica.

Enunciado del Primer Teorema de Incompletitud

El primer teorema de incompletitud de Gödel establece que en cualquier sistema formal consistente y recursivamente enumerable que sea capaz de expresar la aritmética de los números naturales, existen proposiciones verdaderas que no pueden ser demostradas ni refutadas dentro del sistema. En otras palabras, cualquier sistema formal suficientemente complejo es incompleto: hay afirmaciones aritméticas que son verdaderas, pero no pueden ser probadas dentro del sistema.

Formalmente, el teorema se puede enunciar así:

- "En cualquier sistema formal consistente y suficientemente poderoso para expresar la aritmética de los números naturales, existen proposiciones que no pueden ser ni demostradas ni refutadas dentro del sistema."

Ejemplo para Ilustrar el Teorema

Consideremos un sistema formal S que puede expresar proposiciones sobre números naturales. Vamos a construir una proposición P que diga "P no es demostrable en S". Para simplificar, suponemos que podemos representar esta idea en el sistema S.

1. **Proposición Autorreferencial P:** P: "Esta proposición no es demostrable en el sistema S."
2. **Análisis de P:**
    - Si P es demostrable, entonces el sistema S contiene una contradicción porque P afirma que no es demostrable.
    - Si P no es demostrable, entonces P es verdadera porque P afirma su propia no demostrabilidad.

Este análisis muestra que P es una proposición verdadera en el sentido de que no puede ser demostrada dentro del sistema S, lo que ilustra que el sistema S es incompleto.