Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Cómputo

# Matematicas Avanzadas para la Ingenieria

Ejercicios Propuestos 21 de Marzo

Integrantes:
Vazquez Blancas Cesar Said

3 de Abril de 2024

# 1.- Realice las operaciones indicadas

$$a)\frac{1}{i}$$

1.- Calculamos

$$0-1i$$

2.-Solucion Calculada

$$-i$$

$$b)\frac{1-i}{1+i}$$

1.- Calculamos

$$\frac{1-i}{1+i}$$

2.-Multiplicar Numerador y denominador Conjugar

$$\overline{1+i}=1-i$$

3.-con

$$(1-i)\ (1+i)=2$$

$$\frac{(1-i)^2}{2}$$

4.-Expandiendo los paréntesis

$$\frac{-2\,i}{2}$$

5.-Solucion Calculada

$$-i$$

$$c)\frac{2}{1-3\,i}$$

1.- Calculamos

$$\frac{2}{1-3\,i}$$

2.-Multiplicar Numerador y denominador Conjugar

$$\overline{1-3\,i}=1+3\,i$$

3.-Expandiendo parentesis

$$2\ (-4+2\,i)+12-16\,i$$

con

$$(1-3\,i)\,(1+3\,i)=10$$

$$\frac{1+3\,i}{5}$$

4.-Solucion Calculada

$$\frac{1}{5}+\frac{3\,i}{5}$$

$$d)\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^3$$

1.- Calculamos

$$\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^3$$

2.-Elevar a una potencia

$$\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^2\,\left(1-\sqrt{3}\,i\right)$$

$$\left(-2-2\,\sqrt{3}\,i\right)\,\left(1-\sqrt{3}\,i\right)$$

3.-Solucion Calculada

$$-8$$

# 2.- Encuentre la parte Real e imaginaria

$$\begin{aligned}
(1+e)^{-1} &= \frac{1}{1+e}\\
&= \frac{1}{1+e^{i\theta}}\\
&= \frac{1}{1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)}\\
&= \frac{1}{1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)}\cdot\frac{1+\cos(\theta)-i\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)-i\sin(\theta)}\\
&= \frac{1+\cos(\theta)-i\sin(\theta)}{(1+\cos(\theta))^2-\sin^2(\theta)}
\end{aligned}$$

## 3.- Obtengase

$$a)\ (1+i)^{16}$$

$$\begin{aligned}
(1+i)^{16} &= \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{16}\\
&= \left(\sqrt{2}\right)^{16}\left(\cos\left(16\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(16\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)\\
&= 2^{8}\left(\cos(4\pi)+i\sin(4\pi)\right)\\
&= 256\left(\cos(0)+i\sin(0)\right)\\
&= 256
\end{aligned}$$

$$b)\ \sum_{n=0}^{100} i^n$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{100} i^n &= \underbrace{(1+i+(-1)+(-i))+(1+i+(-1)+(-i))+\ldots}_{\text{25 ciclos completos}}+i^{100}\\
&= 0+1\\
&= 1
\end{aligned}$$

$$c)\ \left(2+2\sqrt{3}\,i\right)^{9}$$

$$\begin{aligned}
\left(2+2\sqrt{3}i\right)^{9} &= \left(4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^{9}\\
&= 4^{9}\left(\cos\left(9\cdot\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(9\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right)\\
&= 262144\left(\cos(3\pi)+i\sin(3\pi)\right)\\
&= 262144\left(-1+i\cdot 0\right)\\
&= -262144
\end{aligned}$$

## 4.- Obtenga el módulo y el Argumento de cada uno de los siguientes complejos:

$$a)3i$$

1. Cálculo del módulo ($r$):
El módulo ($r$) se calcula como la magnitud del número complejo, que es la distancia del origen al punto que r
Para $3i$, el módulo ($r$) es simplemente el coeficiente del término $i$, que es 3.

2. Cálculo del argumento ($\theta$):
El argumento ($\theta$) se calcula como el ángulo que el vector del número complejo forma con el eje positivo de las
Para $3i$, el argumento ($\theta$) es el ángulo cuya función trigonométrica del seno es 1 y del coseno es 0, que es $\frac{\pi}{2}$.

Por lo tanto, el módulo ($r$) es 3 y el argumento ($\theta$) es $\frac{\pi}{2}$.

$$b) - 2$$

1. Cálculo del módulo ($r$):
El módulo ($r$) se calcula como la magnitud del número complejo, que es la distancia del origen al punto que r
Para $-2$, el módulo ($r$) es simplemente el valor absoluto del número real, que es 2.

2. Cálculo del argumento ($\theta$):
El argumento ($\theta$) se calcula como el ángulo que el vector del número complejo forma con el eje positivo de las
Para $-2$, el argumento ($\theta$) es el ángulo cuyo coseno es $-1$ y el seno es $0$, que es $\pi$.

Por lo tanto, el módulo ($r$) es 2 y el argumento ($\theta$) es $\pi$.

$$c)1+i$$

- Cálculo del módulo $(r)$:
El módulo $(r)$ se calcula como la magnitud del número complejo, que es la distancia del origen al punto que r
Para $1+i,$ el módulo $(r)$ se puede calcular utilizando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo form
el eje imaginario y la hipotenusa, que es la distancia desde el origen hasta el punto $1+i$ en el plano complejo
Entonces, tenemos:
$r=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

- Cálculo del argumento $(\theta)$:
El argumento $(\theta)$ se calcula como el ángulo que el vector del número complejo forma con el eje positivo de las
Para $1+i,$ podemos usar las funciones trigonométricas para calcular el argumento. Dado que $1+i$ está en el
el argumento $(\theta)$ es simplemente el ángulo cuya tangente es $1,$ que es $\frac{\pi}{4}$.

$$d)-1-i$$

- Cálculo del módulo $(r)$:
El módulo $(r)$ se calcula como la distancia del número complejo al origen en el plano complejo.
Utilizamos la fórmula del módulo:
$r=|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

- Cálculo del argumento $(\theta)$:
El argumento $(\theta)$ se calcula como el ángulo que el número complejo forma con el eje positivo de las $x$ en senti
Usando trigonometría, podemos calcular el ángulo cuya tangente es $-1$. Esto nos da un ángulo de $-\frac{3\pi}{4}$,
pero como estamos en el tercer cuadrante, sumamos $2\pi$ para obtener el valor final del argumento:
$\theta=-\frac{3\pi}{4}+2\pi=\frac{5\pi}{4}$

$$e)2 + 5i$$

- Cálculo del módulo $(r)$:

El módulo $(r)$ se calcula como la distancia del número complejo al origen en el plano complejo.

Utilizamos la fórmula del módulo:

$r = |z| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$

- Cálculo del argumento $(\theta)$:

El argumento $(\theta)$ se calcula como el ángulo que el número complejo forma con el eje positivo de las $x$ en senti

Usando trigonometría, podemos calcular el ángulo cuya tangente es $\frac{5}{2}$. Esto nos da un ángulo de aproximada

$$f)2 - 5i$$

- Cálculo del módulo $(r)$:

Utilizamos la fórmula del módulo:

$r = |z| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$

- Cálculo del argumento $(\theta)$:

Usamos la fórmula de la tangente inversa para calcular el ángulo cuya tangente es $-\frac{5}{2}$.

Dado que el número complejo está en el cuarto cuadrante, sumamos $2\pi$ para obtener el ángulo final:

$\theta = \arctan\left(\frac{-5}{2}\right) + 2\pi$

$$g) - 2 + 5i$$

- Cálculo del módulo ($r$):

Utilizamos la fórmula del módulo:

$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$

- Cálculo del argumento ($\theta$):

Usamos la fórmula de la tangente inversa para calcular el ángulo cuya tangente es $\frac{5}{-2}$.

Dado que el número complejo está en el segundo cuadrante, sumamos $\pi$ para obtener el ángulo final:

$\theta = \arctan\left(\frac{5}{-2}\right) + \pi$

$$h) - 2 - 5i$$

- Cálculo del módulo ($r$):

Utilizamos la fórmula del módulo:

$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$

- Cálculo del argumento ($\theta$):

Usamos la fórmula de la tangente inversa para calcular el ángulo cuya tangente es $\frac{-5}{-2}$.

Dado que el número complejo está en el tercer cuadrante, sumamos $\pi$ para obtener el ángulo final:

$\theta = \arctan\left(\frac{-5}{-2}\right) + \pi$

$i)bi, bdiferentede0$

- Cálculo del módulo ($r$):
El módulo ($r$) de un número complejo en el eje imaginario es simplemente el valor absoluto de la parte imagin
es decir, $r = |bi| = |b| = b$.

- Cálculo del argumento ($\theta$):
Dado que el número complejo $bi$ se encuentra en el eje imaginario, su argumento ($\theta$) es
$\frac{\pi}{2}$ si $b > 0$ y $-\frac{\pi}{2}$ si $b < 0$.

$j)a + bi, adiferentede0$

1. Cálculo del módulo ($r$):
El módulo $r$ de un número complejo $z = a + bi$ se calcula como:
$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

2. Cálculo del argumento ($\theta$):
El argumento $\theta$ de un número complejo $z = a + bi$ se calcula como:
$\theta = \mathrm{atan2}(b, a)$

## 6.- Encuéntrense fórmulas para sumar las expresiones siguientes:

$$a)1 + cos + cos2 + cos3 + \ + cosn$$

1. Aplicación de la fórmula de la suma de una serie finita de cosenos:

La fórmula de la suma de una serie finita de cosenos es:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

2. Sustitución en la serie dada:

La serie dada es $1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cos(3\theta) + \ldots + \cos(n\theta)$

Por lo tanto, aplicamos la fórmula de la suma de cosenos a partir de $k = 0$ hasta $k = n$ :

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = 1 + \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

3. Expresión final:

La expresión final de la suma de la serie es:

$$\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

$$b) sen + sen2 + sen3 + \; + senn$$

1. Aplicación de la fórmula de la suma de una serie finita de senos:
La fórmula de la suma de una serie finita de senos es:

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

2. Sustitución en la serie dada:
La serie dada es $\sin(\theta) + \sin(2\theta) + \sin(3\theta) + \ldots + \sin(n\theta)$
Por lo tanto, aplicamos la fórmula de la suma de senos a partir de $k = 0$ hasta $k = n$ :

$$\sin(\theta) + \sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta) = \sin(\theta) + \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

3. Expresión final:
La expresión final de la suma de la serie es:

$$\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$c) cos + cos3 + \; + cos2(n+1)$$

1. Aplicación de la fórmula de la suma de una serie finita de cosenos:
La fórmula de la suma de una serie finita de cosenos es:

$$\cos(\theta) + \cos(3\theta) + \ldots + \cos(2(n+1)\theta) = \frac{\sin\left((2n+2)\theta/2\right) \cdot \cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

2. Sustitución en la serie dada:
La serie dada es $\cos(\theta) + \cos(3\theta) + \ldots + \cos(2(n+1)\theta)$
Por lo tanto, aplicamos la fórmula de la suma de cosenos:

$$\cos(\theta) + \cos(3\theta) + \ldots + \cos(2(n+1)\theta) = \frac{\sin(2\theta) + (\sin(4\theta) - \sin(2\theta)) + (\sin(6\theta) - \sin(4\theta))}{2\sin\theta}$$

3. Expresión final:
La expresión final de la suma de la serie es:

$$\frac{\sin(2n\theta) \cdot}{2\sin\theta}$$

D2 . Pruébense que: a) la ecuación A (z + z) + iB (z  z) + C (zz  1) + D (zz + 1) = 0 representa: una recta en el plano, caso de que C + D = 0; una circunferencia, de centro y radio a determinar, en el caso de que C + D = 0. (Circunrecta de parámetros reales A, B, C, D, de ahora en adelante.) b) toda circunrecta en el plano responde a una ecuación de la forma dada arriba, para convenientes números reales A, B, C, D. **Parte a)**

Consideremos la ecuación:

$$A(z+\overline{z})+iB(z-\overline{z})+C(zz-1)+D(zz+1)=0$$

Donde $z=x+iy$ y $\overline{z}=x-iy$.

Reorganizando, obtenemos:

$$(A+C)x+i(B-A)y+(D-C)x^2+(D+C)y^2-C-D=0$$

Si $C+D=0$, la ecuación representa una recta en el plano.

Si $C+D\neq 0$, la ecuación representa una circunferencia de la forma:

$$(D-C)u^2+(A+C)u+(D+C)v^2+i(B-A)v=C+D$$

**Parte b)**

Toda circunrecta en el plano complejo puede representarse mediante una ecuación de la forma:

$$(D-C)u^2+(A+C)u+(D+C)v^2+i(B-A)v=C+D$$

para convenientes números reales $A,B,C,D$.

$$b)sen + sen2 + sen3 + \ + senn$$

## Demostración de la Fórmula del Argumento Principal

Dado un número complejo $z = x+iy$, donde $x$ e $y$ son las partes real e imaginaria respectivamente, queremos probar la fórmula para el argumento principal $\arg(z)$.

### Caso 1: $x > 0$

Si $x > 0$, entonces $\arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

### Caso 2: $x < 0$ y $y \geq 0$

Si $x < 0$ y $y \geq 0$, entonces $\arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$.

### Caso 3: $x < 0$ y $y < 0$

Si $x < 0$ y $y < 0$, entonces $\arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$.

### Caso 4: $x = 0$ y $y > 0$

Si $x = 0$ y $y > 0$, entonces $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$.

### Caso 5: $x = 0$ y $y < 0$

Si $x = 0$ y $y < 0$, entonces $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$.

### Conclusiones

Hemos demostrado la fórmula para el argumento principal de un número complejo en diferentes casos, cubriendo todos los posibles valores de $x$ e $y$.