VAZQUEZ BLANCAS CESAR SAID 2CM4

La Regla de L´Hopital

Historia:

Guillaume François Antoine, más conocido como el Marqués de L’Hôpital, interesado en el aquel tiempo novedoso cálculo diferencial, contrató a Johann Bernoulli para que le enseñara los secretos del nuevo cálculo a cambio de una generosa cantidad económica.

Las clases continuaron por correspondencia cuando Johann tuvo que volver a Basilea, bajo la promesa de no comentar con nadie los contenidos de las lecciones. Johann aprovechó la ocasión para recopilar las cartas con la idea de confeccionar un curso de cálculo diferencial. Pero, el estudiante se adelantó al profesor. Haciendo uso de las lecciones de Johann, L’Hôpital publicó en 1696 el primer libro de texto sobre cálculo diferencial “Analyse des infiniment petits pour l’intelligence des lignes courbes”. Es en este libro donde aparece por primera vez la regla de L’Hôpital. En la introducción, L’Hôpital reconoce su deuda con Johann Bernoulli y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) cuando él escribe “Yo he hecho uso libre de sus descubrimientos, por lo tanto francamente les regreso cualquiera cosa que quieran reclamar como propias “.

Johann, que en efecto reclamó la regla como suya no quedó satisfecho con este gesto de L’Hôpital y en una carta enviada a Leibniz años después, se queja de que L’Hôpital había comprado el talento de otros. Pero, como dijo el buen historiador Dirk Struik “Deje que el buen marqués mantenga su regla elegante, él pagó por esta”. Para evitar perder gloria por segunda vez, Johann escribió un tratado extenso sobre cálculo integral que fue publicado bajo su nombre en 1742.

Las primeras evidencias sobre la originalidad de las reclamaciones de Johann Bernoulli aparecieron en 1922, cuando se encontró en la biblioteca de Basilea un ejemplar del curso de cálculo diferencial de Johann que este nunca llegó a publicar.

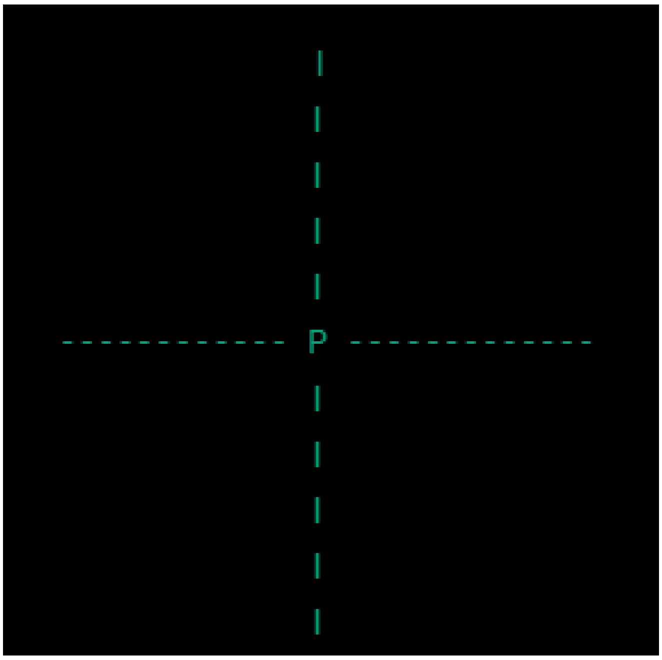
Si se compara el curso de Johann con el libro de L’Hôpital, resulta evidente que la esencia de ambos es la misma. Pero, la prueba definitiva fue la aparición en 1955 de las primeras correspondencias entre Johann Bernoulli y L’Hôpital. Aquí se descubrió la sorprendente propuesta que el marqués de L’Hôpital hizo a Johann Bernoulli en una carta fechada el 17 de marzo de 1694. Aunque la respuesta de Johann no se conserva, se entiende que aceptó el trato. En las siguientes cartas, Johann escribe a L’Hôpital respondiendo a sus preguntas. Precisamente una de ellas contiene la regla de L’Hôpital.

Demostracion geometrica

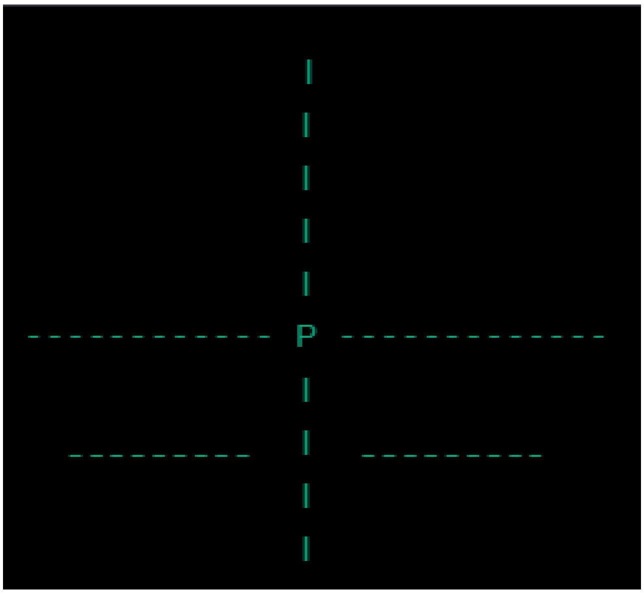
Consideremos el caso en que se tiene una función f(x) que tiende a cero y otra función g(x) que también tiende a cero cuando x se acerca a un punto a. Sea P(a, 0) el punto en el eje x donde las dos funciones se encuentran. Grafiquemos estas funciones en un sistema de coordenadas cartesianas.

VAZQUEZ BLANCAS CESAR SAID

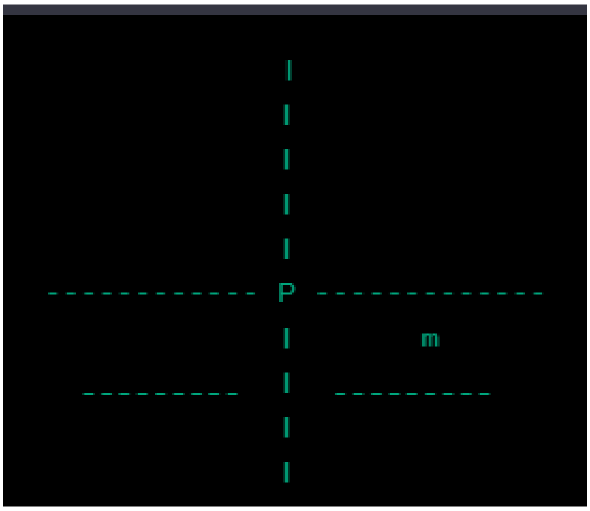
2CM4



Ahora, tracemos las rectas tangentes a las funciones f(x) y g(x) en el punto P(a, 0):



Las pendientes de estas rectas tangentes están dadas por las derivadas f'(a) y g'(a), respectivamente. Como las dos funciones se encuentran en el punto P(a, 0), es posible ver que las rectas tangentes se cortan en algún punto Q. Sea m la pendiente de la recta que une los puntos P y Q:



Si la recta tangente a f(x) es más empinada que la recta tangente a g(x), entonces m será positiva. Por lo tanto, cuando x se acerca a a, la razón f(x)/g(x) será mayor que cero, y la función f(x)/g(x) se acercará al infinito positivo. De manera similar, si la recta tangente a g(x) es más empinada que la recta tangente a f(x), entonces m será negativa. En este caso, cuando x se acerca a a, la razón f(x)/g(x) será menor que cero, y la función f(x)/g(x) se acercará al infinito negativo.

En resumen, la ley de L'Hôpital nos dice que, cuando las funciones f(x) y g(x) se acercan a cero alrededor del punto a, el límite de f(x)/g(x) es igual al límite de f'(x)/g'(x). Geométricamente, esto se traduce en la idea de que el cociente de las pendientes de las rectas tangentes a las funciones f(x) y g(x) en el punto P(a, 0) es igual al límite de la razón f(x)/g(x) cuando x se acerca a a.

Demostración algebraica

Como g{c$)=0$ y g$'(x)\neq 0$ si x$\neq c$, *se tiene que* g$(x)\neq 0$ si x$\neq c$ como consecuencia del Teorema de Rolle.

- Dado que $f(c)=g(c)=0$, aplicando el Teorema del Valor Medio de Cauchy, para todo x en (a,b), con x distinto de c, existe t_x en el intervalo de extremos a y b, tal que el cociente $f(x)/g(x)$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \frac{f'(t_x)}{g'(t_x)}$$

- Cuando x tiende hacia c, igualando los valores de las igualdades de arriba, t_x también tiende hacia c, así que:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(t_x)}{g'(t_x)} = L$$

VAZQUEZ BLANCAS CESAR SAID 2CM4