Vázquez Blancas César Said

Ejercicio 1: la distancia entre los puntos del espacio está expresada mediante el campo o función escalar

$$D(\vec{r}) = D(x,y,z) = ((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2)^{1/2}$$

a) Determinar la distancia en coordenadas cilíndricas y esféricas

Coordenadas cilíndricas

Equivalencias para x, y y z

$x = \rho\cos\varphi$

$y = \rho\,\text{sen}\,\varphi$

$z = z$

Equivalencias para x_1, y_1, z_1

$x_1 = \rho_1\cos\varphi_1$

$y_1 = \rho_1\,\text{sen}\,\varphi_1$

$z_1 = z_1$

Sustituimos los valores en $D(\vec{r})$

$$D(\rho,\varphi,z) = ((\rho\cos\varphi - \rho_1\cos\varphi_1)^2 + (\rho\,\text{sen}\,\varphi - \rho_1\,\text{sen}\,\varphi_1)^2 + (z-z_1)^2)^{1/2}$$

Coordenadas Esféricas:

Equivalencias para x, y, z

$x = r\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi$

$y = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi$

$z = r\cos\theta$

Equivalencias para x_1, y_1, z_1

$x_1 = r_1\,\text{sen}\,\theta_1\cos\varphi_1$

$y_1 = r_1\,\text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\varphi_1$

$z_1 = r_1\cos\theta_1$

Sustituimos los valores en $D(\vec{r})$

$$D(r,\theta,\varphi) = ((r\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi - r_1\,\text{sen}\,\theta_1\cos\varphi_1)^2 + (r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi - r_1\,\text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\varphi_1)^2 + (r\cos\theta - r_1\cos\theta_1)$$

a)

a) $D(\rho,\varphi,z) = ((\rho\cos\varphi - \rho_1\cos\varphi_1)^2 + (\rho\,\text{sen}\,\varphi - \rho_1\,\text{sen}\,\varphi_1)^2 + (z-z_1)^2)^{1/2}$

$$D(r,\theta,\varphi) = ((r\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi - r_1\,\text{sen}\,\theta_1\cos\varphi_1)^2 + (r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi - r_1\,\text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\varphi_1)^2 + (r\cos\theta - r_1\cos\theta_1)$$

Vázquez Blancas César Said

b) Si los puntos coordenados son:

$\vec{r} = (1,3,3)$ y $\vec{r_1} = (4,-3,2)$

mostrar que la distancia es la misma en los 3 sistemas coordenados

$\vec{r} = (1, 3, 3)$ $\quad$ $\vec{r_1} = (4, -3, 2)$

$x \quad y \quad z \qquad\qquad x_1 \quad y_1 \quad z_1$

las coordenadas están en cartesianas, así que solo sustituimos en coordenadas de la función cartesiana

$x = 1 \quad x_1 = 4$

$y = 3 \quad y_1 = -3$

$z = 3 \quad z_1 \; 2$

$D(x,y,z) = ((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2)^{1/2}$

Sustituimos y queda

$D(x,y,z) = ((1-4)^2 + (3-(-3))^2 + (3-2)^2)^{1/2}$

$D(x,y,z) = ((-3)^2 + (3+3)^2 + (1)^2)^{1/2}$

$D(x,y,z) = \sqrt{9+36+1} = \sqrt{46} \approx 6.78$

$\boxed{D(x,y,z) = \sqrt{46} \approx 6.78}$ //

Para coordenadas cilíndricas, debemos hacer la conversión de las coordenadas a sus respectivas variables y sustituirlas en la función en coordenadas cilíndricas

$x = 1 \quad y = 3 \quad z = 3 \qquad\qquad x_1 = 4 \quad y_1 = -3 \quad z_1 = 2$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ $\qquad$ $\rho_1 = \sqrt{x_1^2+y_1^2} = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{25}$

$\rho \approx 3.1622$ // $\qquad$ $\rho_1 = 5$ //

Vázquez Blancas César Said

$\vec{r} = (3.1622, 71.56°, 3)$
$\rho \quad \varphi \quad z$

$\vec{r}_1 = (5, -36.86°, 2)$
$\rho_1 \quad \varphi_1 \quad z_1$

Sustituimos

$D(\rho,\varphi,z) = ((3.1622\cos 71.56° - 5\cos -36.86°)^2 + (3.1622\,\text{sen}\,71.56°$
$- 5\,\text{sen} -36.86°)^2 + (3-2)^2)^{1/2}$

$D(\rho,\varphi,z) = ((1-4)^2 + (2.99-(-2.99))^2 + (1)^2)^{1/2}$

$D(\rho,\varphi,z) = ((-3)^2 + (6)^2 + 1^2)^{1/2}$

$D(\rho,\varphi,z) = \sqrt{9+36+1} = \sqrt{46} \approx 6.78$

$D(\rho,\varphi,z) = \sqrt{46} \approx 6.78$ //

Para coordenadas esféricas debemos hacer la conversión de las coordenadas y sustituir en la función esférica

$x = 1 \quad y = 3 \quad z = 3$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{1^2+3^2+3^2} = \sqrt{19}$

$r \approx 4.3589$ /

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\rho}{z}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3.1622}{3}\right)$

$\theta = 46.50°$ /

$\varphi = \varphi = 71.56°$

$\varphi = 71.56°$ /

$x_1 = 4 \quad y_1 = -3 \quad z_1 = 2$

$r_1 = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} = \sqrt{4^2+(-3)^2+(2)^2} = \sqrt{29}$

$r_1 = 5.3851$ /

$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\rho_1}{z_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$

$\theta_1 = 68.19°$ /

$\varphi_1 = \varphi_1 = -36.86°$

$\varphi_1 = -36.86°$ /

Vázquez Blancos César Said

$\vec{r} = (4.3589, 46.50°, 71.56°)$ $\quad$ $\vec{r_1} = (5.3851, 68.19°, -36.86°)$

$r \quad \theta \quad \varphi \qquad r_1 \quad \theta_1 \quad \varphi_1$

Sustituimos

$D(r,\theta,\varphi) = \sqrt{(4.3589 \operatorname{sen} 46.50° \cos 71.56° - 5.3851 \operatorname{sen} 68.19° \cos -36.86°)^2}$
$+ (4.3589 \operatorname{sen} 46.50° \operatorname{sen} 71.56° - 5.3851 \operatorname{sen} 68.19° \operatorname{sen} -36.86°)^2 +$
$+ (4.3589 \cos 46.50° - 5.3851 \cos 68.19°)$

$D(r,\theta,\varphi) = \sqrt{(1-4)^2 + (3+3)^2 + (3-2)^2}$

$D(r,\theta,\varphi) = \sqrt{(-3)^2 + (6)^2 + (1)^2} = \sqrt{9+36+1} = \sqrt{46} \approx 6.78$

$D(r,\theta,\varphi) = \sqrt{46} \approx 6.78$

b)

$$\boxed{\begin{aligned} D(x,y,z) &= \sqrt{46} \\ D(\rho,y,z) &= \sqrt{46} \\ D(r,\theta,\varphi) &= \sqrt{46} \end{aligned}}$$

En los 3 sistemas coordenados la distancia es la misma ∴ está correcto el problema

Escaneado con CamScanner

Vázquez Blancas César Said

· Dipolo Electrico

El potencial eléctrico que genera un dipolo eléctrico en un punto fuera del eje simétrico está dado por la función o campo escalar

$$V(\vec{r}) = V(x,y,z) = -k\ \vec{P} \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \text{potencial eléctrico}$$

donde $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ = constante de permitividad eléctrica

$\vec{P} = (P_1, P_2, P_3)$ es un vector constante llamado momento dipolar eléctrico $r = |\vec{r}| = (x,y,z)^{1/2}$

a) Determinar el campo eléctrico dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = \vec{E}(x,y,z)$$

Primero resolvemos $V(r)$ y sería resolver el $\nabla \frac{1}{r}$

$$\nabla \frac{1}{r} = \nabla r^{-1} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}, \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}, \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(\cancel{2}x)\hat{i} + \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(\cancel{2}y)\hat{j}\right) +$$

$$\left(-\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(\cancel{2}z)\hat{k}\right.$$

$$\nabla \frac{1}{r} = \left(\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}, \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right)$$

$$\nabla \frac{1}{r} = \frac{\vec{r}}{-r^3}$$

Ahora lo ponemos con el producto punto del vector $\vec{P}$

$$V(\vec{r}) = -k\ \vec{P} \cdot \frac{\vec{r}}{-r^3} = \frac{k\,|P|\,|r|\cos\theta}{r^3} = \frac{k\ p\cancel{r}\cos\theta}{r^{\cancel{3}}}$$

$$\boxed{V(r) = \frac{k\ p\cos\theta}{r^2} \quad \text{ó} \quad \frac{k\ \vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3}}$$

$\vec{P} \cdot \vec{r} = |P|\,|r|\cos\theta$

↑ Producto Punto

Vázquez Blancas César Said

Ahora, para calcular E en términos de (x, y, z) debemos hacer las conversiones, puesto que el campo está escrito en términos de coordenadas esféricos

$$V(r) = kp\frac{\cos\theta}{r^2}$$

P es constante igual que k

$z = r\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{z}{r}$ $\therefore$ $\frac{\frac{kp\,z}{r}}{\frac{r^2}{1}} = \frac{kp\,z}{r^3} = \frac{kp\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

$r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$

Ahora sustituimos en $E(x,y,z) = -\nabla V(\vec{r})$

$$E(\vec{r}) = \left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{kp\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

$$E(\vec{r}) = \left(-\frac{\partial \frac{kp\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{kp\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}}{\partial y} - \frac{\partial \frac{kp\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}}{\partial z}\right)$$

$$E(\vec{r}) = -\left(\frac{0(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - \left(\frac{3x^3+3xy^2+3xz^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)z}{((x^2+y^2+z^2)^{3/2})^2}\right) - \frac{0(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - \frac{(3x^2y+3y^3+3xz^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{((x^2+y^2+z^2)^{6/2}}$$

$$\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 - z\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}(3(x^2+y^2+z)^2(2z))}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^6}\right)$$

$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right.$$

Vázquez Blancas César Said

$$+\frac{x^4+y^4-2z^4+2x^2y^2-x^2z^2-y^2z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

$$\vec{E}(x,y,z)=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},\frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},\frac{x^4+y^4-2z^4+2x^2y^2-x^2z^2-y^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{7/2}}\right)$$

Ahora para sacar los valores en cilíndricas, hacemos lo mismo, solo que ya tenemos la función en cilíndricas, quedaría:

k y p son constantes

$$E(r,\theta,\varphi)=-\nabla V(\vec{r})$$

$$E(\vec{r})=\left(-\frac{\partial}{\partial r},\frac{1}{r}-\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{1}{r\,\text{sen}\theta}-\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{kp\cos\theta}{r^2}\right)$$

$$E(\vec{r})=\frac{-\partial\frac{kp\cos\theta}{r^2}}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{-\partial\frac{kp\cos\theta}{r^2}}{\partial\theta},\frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{-\partial\frac{kp\cos\theta}{r^2}}{\partial\varphi}$$

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\left(\frac{0(r^2)-\cos\theta\,2r}{r^4}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{-\text{sen}\theta\,r^2-0}{r^4}\right)-0\right)$$

$$E(\vec{r})=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{-\cos\theta\,2r}{r^4},\frac{1}{r}\frac{\text{sen}\theta}{r^2},\frac{1}{r\,\text{sen}}0\right)$$

$$E(\vec{r})=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{\cos\theta\,2}{r^3},\frac{\text{sen}\theta}{r^3},0\right)$$

$$E(\vec{r})=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta,\text{sen}\theta,0\right)$$

Escaneado con CamScanner

Vázquez Blancas César Saíd

Ahora se transforma a cilíndricos y se calcula el campo

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{k\rho\cos\theta}{r^2}$$

$z = r\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{z}{r}$

$r = \sqrt{\rho^2+z^2}$

$$\frac{\frac{k\rho z}{r}}{\frac{r^2}{1}} = \frac{k\rho z}{r^3} = \frac{k\rho z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

$$E(\vec{r}) = \nabla V(\vec{r})$$

$$E(\vec{r}) = \left(\frac{-\partial}{\partial\rho}, \frac{1}{\rho}\frac{-\partial}{\partial\varphi}, \frac{-\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{k\rho z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

$$E(\vec{r}) = \left(-\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{k\rho z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{k\rho z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} - \frac{\partial\left(\frac{k\rho z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\right)}{\partial z}\right)$$

$$E(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\cancel{-}\left(\frac{-2\left(\frac{1}{2\sqrt{g}}\left(3(\rho^2+z^2)^2\right)2\rho\right)}{(\sqrt{\rho^2+z^2})^6} - \frac{1}{\rho}\,0 - \left(\frac{\sqrt{(\rho^2+z^2)^3} - z\frac{1}{2\sqrt{(\rho^2+z^2)^3}}\left(3(\rho^2+z^2)^2\right)2z}{\sqrt{(\rho^2+z^2)^3}^2}\right)\right)\right.$$

$$E(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2\frac{1}{2\sqrt{(\rho^2+z^2)^3}}3(\rho^2+z^2)^2 2\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}^6} - 0 - \frac{\rho^2-2z^2}{\sqrt{\rho^2+z^2}(\rho^2+z^2)^2}\right)$$

$$E(r) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3z\rho}{(\rho^2+z^2)^2\sqrt{\rho^2+z^2}}, 0, \frac{2z^2-\rho^2}{\sqrt{\rho^2+z^2}(\rho^2+z^2)^2}\right)$$

Vázquez Blancas César Said

Si tomamos $a(\rho^2+z^2)^2$ como r^4 puede salir como constante y quedaría

$$E(r) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left(3z\rho,\ 0,\ 2z^2-\rho^2\right)$$

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},\ \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},\ \frac{x^4+y^4-2z^4+2x^2y^2-x^2z^2-y^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{7/2}}\right)$$

$$\vec{E}(r,\theta,\varphi) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta,\ 0\right)$$

$$\vec{E}(\rho,\varphi,z) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left(3z\rho,\ 0,\ 2z^2-\rho^2\right)$$

Escaneado con CamScanner