Escuela Superior de Cómputo

Ingeniería en Sistemas Computacionales

Matemáticas avanzadas para la ingeniería

Funciones trigonométricas, funciones hiperbólicas

Grupo: 4CV2
Profesor: Zárate Cárdenas Alejandro

Equipo:
Arellano Millán Gabriel
Gómez Tovar Yoshua Oziel
Herrera Tovar Karla Elena
Vázquez Blancas César Said
Zarco Sosa Kevin

10 de mayo de 2024

1 Ejercicio 1

Demostrar que $cos(z), sen(z), cosh(z), senh(z)$ son funciones enteras.

$$sen(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$sen(z)$ y $cos(z)$ son combinaciones lineales de e^{iz} y e^{-iz}, por lo tanto, $sen(z)$ y $cos(z)$ son enteras.

$$senh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$senh(z)$ y $cosh(z)$ son combinaciones lineales de e^{z} y e^{-z}, por lo tanto, senh(z) y cosh(z) son enteras.

Calcular en la forma $(u + iv))$ lo siguiente

2 Ejercicio 3

$cos(1.7 + 1.5i)$
Aplicamos la definición de la función coseno en términos de los números complejos

$$\frac{e^{i(1.7+1.5i)} + e^{-i(1.7+1.5i)}}{2}$$

$$\frac{e^{-1.5+1.7i} + e^{1.5-1.7i}}{2}$$

Usando la fórmula de Euler:

$$\frac{e^{-1.5}cos(1.7) + e^{-1.5}sen(1.7)i + e^{1.5}cos(1.7) - e^{1.5}sen(1.7)i}{2}$$

$$\frac{-0.0287991 - 0.577441 - 4.4493i + 0.22127i}{2}$$

$$= \frac{-0.6061901 - 4.22303i}{2}$$

Simplificando obtenemos

$$= -0.30309 - 2.11151i$$

3 Ejercicio 5

$sen10i$

$$\frac{e^{i(10i)} - e^{i(10i)}}{2i}$$
$$\frac{e^{-10} - e^{10}}{2i}$$
$$\frac{-22026.4}{2i}$$
$$= 11013.2i$$

4 Ejercicio 7

$sen\sqrt{2} - 4i$
Aplicando la definición de la función coseno en términos de los números complejos

$$\frac{e^{i(\sqrt{2}-4i)} - e^{-i(\sqrt{2}-4i)}}{2i}$$
$$\frac{e^4cos(\sqrt{2}) + e^4sen(\sqrt{2})i - e^{-4}cos(\sqrt{2}) + e^{-4}sen(\sqrt{2})i}{2i}$$

Calculamos los valores numéricos

$$\frac{8.51424 - 0.002856 + 53.93019i + 0.0180916i}{2i}$$

De esta manera queda lo siguiente:

$$= 26.974 - 4.255i$$

5 Ejercicio 9

$cos3\pi i$
definición de la función coseno en términos de los números complejos

$$cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Aplicando la definición:

$$\frac{e^{i(3\pi i)} + e^{-i(3\pi i)}}{2}$$
$$\frac{e^{-3\pi} + e^{3\pi}}{2}$$

Calculamos los valores numéricos

$$\frac{12391.6978}{2}$$
$$= 6195.8239$$

6 Ejercicio 11

$cos(2.1 - 0.2i)$

$$\frac{e^{i(2.1-0.2i)} + e^{-i(2.1-0.2i)}}{2}$$

$$\frac{e^{2.1i+0.2)} + e^{-2.1i+0.2)}}{2}$$

$$\frac{e^{0.2}cos(2.1) + e^{0.2}sen(2.1)i + e^{-0.2}cos(2.1) - e^{-0.2}sen(2.1)i}{2}$$

$$= \frac{-0.61662 - 0.41333 - 0.706766i + 1.05433i}{2}$$

$$= \frac{-1.02995 + 0.347564i}{2}$$

$$= -0.514975 + 0.173782i$$

Calcular en la forma $u + iv$

7 Ejercicio 13

$cosh(-2 + 3i)$ Utilizando la definición de cosh(z) para un número complejo z

$$\frac{e^{-2+3i} + e^{-(-2+3i)}}{2}$$

$$\frac{e^{-2}e^{3i} + e^{2}e^{3i}}{2}$$

Aplicar fórmula de Euler:

$$\frac{e^{-2}cos(3) + e^{-2}sen(3)i + e^{2}cos(3) - e^{2}sen(3)i}{2}$$

Calculamos los valores numéricos

$$\frac{-0.133931 - 7.31511 + 0.01909i - 1.04274i}{2}$$

$$\frac{-7344909 - 1.02365i}{2}$$

Simplificando obtenemos:

$$= -3.724545 - 0.51182i$$

8 Ejercicio 15

$senh(2 + i)$
Utilizando la definición de sinh(z) para un número complejo z

$$\frac{e^{2+i} - e^{-2-i}}{2}$$

$$\frac{e^2 e^i - e^{-2} e^{-i}}{2}$$

Aplicar fórmula de Euler:

$$\frac{e^2 cos(1) + e^2 sen(1)i - e^{-2} cos(1) + e^{-2} sen(1)}{2}$$

Calculamos los valores numéricos

$$\frac{3.99232 - 0.073122 + 6.21768i + 0.113881}{2}$$

$$\frac{6.33156i + 3.91921}{2}$$

Así obtenemos:

$$= 3.16578i + 1.959605$$

Encontrar todas las soluciones de las siguientes ecuaciones

9 Ejercicio 17

$cos(z) = 3i$
Definición de la función coseno en términos de los números complejos:
Aplicado la definición:

$$cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 3i$$

Utilizamos una variable auxiliar

$$u = e^{iz}$$

$$e^{iz} + e^{-iz} = 6i$$

$$u + u^{-1} = 6i$$

Multiplicando toda la ecuación por u, obtenemos:

$$u^2 + 1 = 6iu$$

Reescrimos la ecuación como una ecuación cuadrática en u:

$$u^2 - 6iu + 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática obtenemos

$$u = (3 \pm \sqrt{10})$$

Reemplazando u

$$e^{iz} = (3 \pm \sqrt{10})i$$
$$e^{iz} = ln((3 \pm \sqrt{10})i) + 2n\pi i$$
$$e^{iz} = ln(3 \pm \sqrt{10}) \pm \frac{\pi}{2}i + 2n\pi i$$
$$e^{iz} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2} - iln(3 \pm \sqrt{10})$$
$$e^{iz} = \frac{1}{2}(2n+1)\pi - (-1)^n 1.818i$$

10 Ejercicio 19

$sen(z) = isenh(z)$
Definición de la función seno para números complejos:

$$sen(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Aplicando la definición

$$sen(iz) = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i}$$

Simplificando $e^i(iz)$

$$sen(iz) = \frac{e^{-z} - e^z}{2}$$
$$-sen(iz) = \frac{-1(e^{iz} - e^{-iz})}{1(2i)}$$
$$-sen(iz) = \frac{-e^{-z} - e^z}{2i}$$
$$-sen(iz) = \frac{e^z - e^{-z}}{2i}$$
$$-isen(iz) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Multiplicamos ambos lados por $-i$

$$-isen(iz) = isenh(z)$$

Quedando así:

$$sen(iz) = isenh(z)$$

11 Ejercicio 21

$cosh(z) = \frac{1}{2}$

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$e^z + e^{-z} = 1$$

Expresamos $e^z ye^{-z}$ en terminos de x(parte real) y(parte imaginaria)

$$e^{x+iy} + e^{-x-iy} = 1$$

$$e^x cos(y) + e^x isen(y) + e^{-x} cos(y) - e^{-x} isen(y) = 1$$

$$e^x cos(y) + \frac{1}{e^x} cos(y) + e^x isen(y) - \frac{1}{e^x} isen(y) = 1$$

Agrupando los términos reales e imaginarios

$$cosy(e^x + e^{-x}) + iseny(e^x - e^{-x}) = 1$$

Simplificando los términos con coseno y seno

$$cosy(e^x + e^{-x}) = 1$$

$$cosy(1 + 1) = 1$$

$$cosy(2) = 1$$

$$cos(y) = \frac{1}{2}$$

Encuentrar y

$$y = arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \pm 2\pi n$$

$$z = 0 \pm \frac{\pi}{3} i + 2\pi ni$$

Dando como resultado:

$$z = \pm\left(\frac{\pi}{3}\right) i \pm 2\pi ni$$

12 Ejercicio 23

$cosh(-1.5 + 1.7i)$

$$\frac{e^{(-1.5+1.7i)} + e^{-(-1.5+1.7i)}}{2}$$

$$\frac{e^{-1.5} cos(1.7) + e^{-1.5} isen(1.7) + e^{1.5} cos(1.7) - e^{1.5} isen(1.7)}{2}$$

$$\frac{-0.0287491 - 0.577441 + 0.22127i - 4.4433i}{2}$$

$$\frac{-4.22306i - 0.6061901}{2}$$

$$= -0.303 - 2.11153i$$

13 Ejercicio 25

Demostrar que $cos(-z) = cos(z)$ y $sen(-z) = -sen(z)$
comenzamos con la definición de la función coseno en términos de los números complejos

$$cos(-z) = \frac{e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}}{2}$$

$$cos(-z) = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2}$$

Reordenamos los términos en el numerador

$$cos(-z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = cos(z)$$

Comenzamos con la definición de la función seno en términos de números complejos

$$sen(-z) = \frac{e^{i(-z)} - e^{-i(-z)}}{2i}$$

Sustituir $-z$ por z

$$sen(-z) = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i}$$

$$sen(-z) = \frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$$

Reordenar los términos del numerador

$$sen(-z) = -\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)$$

$$sen(-z) = -sen(z)$$

14 Ejercicio 27

Demostrar que $senh(z)$ y $cosh(z)$ son periódicas en $2\pi i$

$$senh(z + 2\pi i) = senh(z)$$

$$\frac{e^{z+2\pi i} - e^{-(z+2\pi i)}}{2} = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$\frac{e^{z+2\pi i} - e^{-z-2\pi i}}{2} = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$\frac{e^{z}e^{2\pi i} - e^{-z}e^{-2\pi i}}{2} = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$\frac{e^{z}cos(2\pi) + e^{z}isen(2\pi) - e^{-z}cos(2\pi) - e^{-z}isen(2\pi)}{2}$$

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$cosh(z + 2\pi i) = cosh(z)$$

$$\frac{e^{z+2\pi i} + e^{-(z+2\pi i)}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\frac{e^{z+2\pi i} + e^{-z-2\pi i)}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\frac{e^z e^{2\pi i} + e^{-z} e^{-2\pi i)}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\frac{e^z cos(2\pi) + e^z isen(2\pi) + e^{-z} cos(2\pi) - e^{-z} isen(2\pi)}{2}$$

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

15 Ejercicio 29

$cos^2(z) + sen^2(z) = 1$
Utilizamos las fórmulas de Euler para el seno y el coseno

$$sen(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$$

Sustuimos las fórmulas en la identidad principal

$$\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}\right)^2 = 1$$

Multiplicando y simplificando

$$\frac{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2}{(2i)^2} + \frac{\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)^2}{(2)^2} = 1$$

$$\frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1$$

Multiplicar ambos lados de la ecuación por 4

$$\frac{1}{4}\left(-(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}) + e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}\right) = 1$$

$$\frac{1}{4}\left(-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz} + e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}\right) = 1$$

$$\frac{1}{4}(2+2)=1$$

$$\frac{1}{4}(4)=1$$

$$\frac{4}{4}=1$$

Simplificando un poco más hasta llegar al resultado

$$1=1$$

$cos^2(z)-sen^2(z)=cos(2z)$
Aplicamos las fórmulas de Euler para el seno y el coseno

$$\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)-\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2=cos(2z)$$

Sustituimos estas expresiones en la identidad trigonométrica inicial

$$\frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4}-\frac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{-4}=cos(2z)$$

Multiplicando y simplificando

$$\frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4}+\frac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{4}=cos(2z)$$

$$\frac{1}{4}\left(e^{2iz}+2+e^{-2iz}+e^{2iz}-2+e^{-2iz}\right)=cos(2z)$$

Sumamos los términos del lado izquierdo

$$\frac{1}{4}\left(2e^{2iz+2e^{-2iz}}\right)=cos(2z)$$

Simplificando nuevamente

$$\frac{2e^{2iz}}{4}+\frac{2e^{-2iz}}{4}=\frac{e^{2iz}+e^{-2iz}}{2}$$

$$\frac{e^{2iz}}{2}+\frac{e^{-2iz}}{2}=\frac{e^{2iz}+e^{-2iz}}{2}$$

Finalmente, observamos que ambos lados de la ecuación son iguales

$$\frac{e^{2iz}+e^{-2iz}}{2}=\frac{e^{2iz}+e^{-2iz}}{2}$$

$cosh^2(z) - senh^2(z) = 1$
Utilizamos las definiciones de las funciones hiperbólicas y Sustituimos estas expresiones en la identidad hiperbólica inicial

$$\frac{(e^z + e^{-z})^2}{(2)^2} + \frac{(e^z - e^{-z})^2}{(2)^2} = 1$$

$$\frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z}}{4} - \frac{e^{2z} - 2 + e^{-2z}}{4} = 1$$

Simplificando los términos

$$\frac{1}{4}\left(e^{2z} + 2 + e^{-2z} - e^{2z} + 2 - e^{-2z}\right) = 1$$

$$\frac{1}{4}(2+2) = 1$$

$$\frac{4}{4} = 1$$

Así da como resultado:

$$1 = 1$$

$cosh^2(z) + senh^2(z) = cosh(2z)$
Aplicamos las definiciones de las funciones hiperbólicas y colocamos estas expresiones en la identidad hiperbólica inicial

$$\frac{(e^z + e^{-z})^2}{2^2} + \frac{(e^z - e^{-z})^2}{2^2} = cosh(2z)$$

$$\frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z}}{4} + \frac{e^{2z} - 2 + e^{-2z}}{4} = cosh(2z)$$

Sumamos los términos

$$\frac{1}{4}\left(e^{2z} + 2 + e^{-2z} + e^{2z} - 2 + e^{-2z}\right) = cosh(2z)$$

$$\frac{1}{4}\left(2e^{2z} + 2e^{-2z}\right) = cosh(2z)$$

Simplificando la expresión

$$\frac{1}{4}\left(2e^{2z} + 2e^{-2z}\right) = cosh(2z)$$

$$\frac{2e^{2z}}{4} + \frac{2e^{-2z}}{4} = cosh(2z)$$

$$\frac{e^{2z}}{2} + \frac{e^-2z}{2} = \frac{e^{2z} + e^{-2z}}{2}$$

Así observamos que ambos lados de la ecuación son iguales

$$\frac{e^{2z} + e^{-2z}}{2} = \frac{e^{2z} + e^{-2z}}{2}$$