Escuela Superior de Cómputo

Ingeniería en Sistemas Computacionales

Matemáticas Avanzadas para la Ingeniería

Potencias y Raíces de un Número Complejo

Grupo: 4CM2
Profesor: Zárate Cárdenas Alejandro

Equipo:
Arellano Millán Gabriel
Gómez Tovar Yoshua Oziel
Herrera Tovar Karla Elena
Vásquez Blancas César Said
Zarco Sosa Kevin

29 de Marzo de 2024

Escriba en forma polar el número complejo indicado.

1 Ejercicio 1

$$2$$

Aplicando la fórmula correspondiente para pasar un número complejo en forma rectangular a polar. Primero calculando el valor de r.

$$r = \sqrt{2^2}$$

$$r = 2$$

Posteriormente, se cálcula el valor del ángulo.

$$\theta = \arctan(\frac{0}{2})$$

$$\theta = \arctan(0)$$

$$\theta = 0$$

Por lo tanto, se tiene que la forma polar del número complejo es:

$$2(\cos(0) + i\sin(0))$$

2 Ejercicio 3

$$-3i$$

Aplicando la fórmula correspondiente para pasar un número complejo en forma rectangular a polar. Primero calculando el valor de r.

$$r = \sqrt{(-3)^2}$$

$$r = 3$$

Posteriormente, se cálcula el valor del ángulo.

$$\theta = \frac{3\pi}{2}$$

Por lo tanto, se tiene que la forma polar del número complejo es:

$$3(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2}))$$

3 Ejercicio 5

$$1 + i$$

Aplicando la fórmula correspondiente para pasar un número complejo en forma rectangular a polar. Primero calculando el valor de r.

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$r = \sqrt{2}$$

Posteriormente, se cálcula el valor del ángulo.

$$\theta = \arctan(\frac{1}{1})$$

$$\theta = \arctan(1)$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto, se tiene que la forma polar del número complejo es:

$$\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$$

4 Ejercicio 7

$$-\sqrt{3} = i$$

Aplicando la fórmula correspondiente para pasar un número complejo en forma rectangular a polar. Primero calculando el valor de r.

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2}$$

$$r = \sqrt{4} = 2$$

Posteriormente, se cálcula el valor del ángulo.

$$\theta = \arctan(\frac{1}{-\sqrt{3}})$$

$$\theta = -\frac{\pi}{6}$$

Por lo tanto, se tiene que la forma polar del número complejo es:

$$2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$$

5 Ejercicio 9

$$\frac{3}{-1+i}$$

Para comenzar, se realiza la división de números complejos.

$$\frac{3}{-1+i} = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$$

Aplicando la fórmula correspondiente para pasar un número complejo en forma rectangular a polar. Primero calculando el valor de r.

$$r = \sqrt{(-\frac{3}{2})^2 + (-\frac{3}{2})^2}$$

$$r = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{\sqrt{18}}{2}$$

Posteriormente, se cálcula el valor del ángulo.

$$\theta = \arctan(\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}})$$

$$\theta = \arctan(1)$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto, se tiene que la forma polar del número complejo es:

$$\frac{\sqrt{18}}{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$$

Escriba en la forma a+ib en el número indicado en forma polar.

6 Ejercicio 11

$$z = 5(\cos(\frac{7\pi}{6}) + i\sin(\frac{7\pi}{6}))$$

Aplicando la fórmula correspondiente para pasar un número complejo en forma polar a la forma a=ib.

$$z = 5(\cos(\frac{7\pi}{6}) + i\sin(\frac{7\pi}{6}))$$

$$z = 5(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$$

Por lo tanto, se tiene que la forma a+ib del número complejo es:

$$-\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i$$

7 Ejercicio 13

$$z = 6(\cos(\frac{\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{8}))$$

Aplicando la fórmula correspondiente para pasar un número complejo en forma polar a la forma a=ib.

$$z = 6(\cos(\frac{\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{8}))$$

$$z = 6(\frac{\sqrt{\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i)$$

Por lo tanto, se tiene que la forma a+ib del número complejo es:

$$3\sqrt{2+\sqrt{2}} + 3\sqrt{2-\sqrt{2}}i$$

Encuentre $z_1 z_2$ y $\frac{z_1}{z_2}$. Escriba en la forma a+ib.

8 Ejercicio 15

$$z_1 = 2(\cos(\frac{\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{8}))$$

$$z_2 = 4(\cos(\frac{3\pi}{8}) + i\sin(\frac{3\pi}{8}))$$

Primero se obtiene $z_1 z_2$, siguiendo la fórmula correspondiente.

$$z_1 z_2 = (2 * 4)(\cos(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8}))$$

$$z_1 z_2 = 8(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))$$

$$z_1 z_2 = 8(0 + i)$$

Por lo tanto, se tiene que la forma a+ib de $z_1 z_2$ es:

$$8i$$

Ahora, para obtener $\frac{z_1}{z_2}$, de igual forma se sigue la fórmula indicada.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{4}(\cos(\frac{\pi}{8} - \frac{3\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{8} - \frac{3\pi}{8}))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}(\cos(-\frac{2\pi}{8}) + i\sin(-\frac{2\pi}{8}))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)$$

Por lo tanto, se tiene que la forma a+ib de $\frac{z_1}{z_2}$ es:

$$\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i$$

Escriba cada número complejo en forma polar. Después, utilice (4) o (5) para obtener una forma polar del número indicado. Finalmente, escríbalo en la forma a+ib.

9 Ejercicio 17

$$(3-3i)(5+5\sqrt{3}i$$

Primero se obtiene r_1 y su ángulo.

$$r_1 = \sqrt{3^2 + (-3)^2}$$
$$r_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
$$\theta = \arctan(\frac{-3}{3})$$
$$\theta = -\frac{\pi}{4}$$

También se obtiene r_2 y su ángulo.

$$r_2 = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2}$$
$$r_2 = \sqrt{100} = 10$$
$$\theta = \arctan(\frac{5\sqrt{3}}{5})$$
$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

Obteniendo la forma polar de ambos términos:

$$z_1 = 3\sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{7\pi}{4}))$$
$$z_2 = 10(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$$

Se obtiene z_1z_2, siguiendo la fórmula correspondiente.

$$z_1z_2 = (3\sqrt{2} * 10)(\cos(\frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{3}))$$
$$z_1z_2 = 30\sqrt{2}(\cos(\frac{25\pi}{12}) + i\sin(\frac{25\pi}{12}))$$

Por lo tanto, se tiene que la forma a+ib es:

$$40.98 + 10.98i$$

10 Ejercicio 19

$$\frac{-i}{2-2i}$$

Primero se obtiene r_1 y su ángulo.

$$r_1 = \sqrt{(-1)^2}$$

$$r_1 = 1$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2}$$

También se obtiene r_2 y su ángulo.

$$r_2 = \sqrt{2^2 + (-2)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\theta = \frac{7\pi}{4}$$

Obteniendo la forma polar de ambos términos:

$$z_1 = (\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2}))$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{7\pi}{4}))$$

Se obtiene $\frac{z_1}{z_2}$, siguiendo la fórmula correspondiente.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos(\frac{7\pi}{4} + i\sin(\frac{7\pi}{4}))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}i$$

Por lo tanto, se tiene que la forma a+ib es:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$

Utilice (8) para calcular la potencia indicada.

11 Ejercicio 21

$$(1 + \sqrt{3}i)^9$$

Obtenemos r y su ángulo.

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$r = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = \arctan(\frac{\sqrt{3}}{1})$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

Finalmente, se calcula la potencia deseada.

$$2^9(\cos(3\pi) + i\sin(3\pi))$$

$$512(\cos(3\pi) + i\sin(3\pi))$$

$$-512 + 0$$

Por lo tanto, se tiene que la potencia del número complejo es:

$$-512$$

12 Ejercicio 23

$$(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^{10}$$

Obtenemos r y su ángulo.

$$r = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2}$$

$$r = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \arctan(1)$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

Finalmente, se calcula la potencia deseada.

$$(\frac{\sqrt{2}}{2})^{10}(\cos(\frac{5\pi}{2}) + i\sin(\frac{5\pi}{2}))$$

$$\frac{1}{32}(\cos(\frac{5\pi}{2}) + i\sin(\frac{5\pi}{2}))$$

$$\frac{1}{32}(0) + \frac{1}{32}i$$

Por lo tanto, se tiene que la potencia del número complejo es:

$$\frac{1}{32}i$$

13 Ejercicio 25

$$(\cos(\frac{\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{8}))^{12}$$

Se tiene que r y su ángulo son:

$$r = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{8}$$

Finalmente, se calcula la potencia deseada.

$$(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2}))$$

$$0 - i$$

Por lo tanto, se tiene que la potencia del número complejo es:

$$-i$$

Utilice (10) para calcular todas las raíces.

14 Ejercicio 27

$$(8)^{\frac{1}{3}}$$

Obteniendo r y su ángulo se tiene.

$$r = \sqrt{8^2}$$

$$r = 8$$

$$\theta = \arctan(0)$$

$$\theta = 0$$

Se calcula la raíz k=0.

$$2(\cos(\frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{2k\pi}{3}))$$

$$2(\cos(0) + i\sin(0))$$

$$2$$

Se calcula la raíz k=1.

$$2(\cos(\frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{2k\pi}{3}))$$

$$2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}))$$

$$-1 + \sqrt{3}i$$

Se calcula la raíz k=2.

$$2(\cos(\frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{2k\pi}{3}))$$

$$2(\cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3}))$$

$$-1 - \sqrt{3}i$$

15 Ejercicio 29

$$(i)^{\frac{1}{2}}$$

Obteniendo r y su ángulo se tiene.

$$r = \sqrt{1^2}$$

$$r = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Se calcula la raíz k=0.

$$(\cos(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}) + i\sin(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}))$$

$$(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Se calcula la raíz k=1.

$$2(\cos(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}) + i\sin(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}))$$

$$(\cos(\frac{5\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{4}))$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

16 Ejercicio 31

$$(-1+\sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}}$$

Obteniendo r y su ángulo se tiene.

$$r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$r=\sqrt{4}=2$$

$$\theta=-\frac{\pi}{3}$$

Se calcula la raíz k=0.

$$\sqrt{2}(\cos(\frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2})+i\sin(\frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}))$$

$$\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}))$$

$$-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Se calcula la raíz k=1.

$$\sqrt{2}(\cos(\frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2})+i\sin(\frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}))$$

$$\sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{6})+i\sin(\frac{5\pi}{6}))$$

$$-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Encuentre todas las soluciones de la ecuación dada.

17 Ejercicio 33

$$z^4+1=0$$

Despejando z.

$$z=(-1)^{\frac{1}{4}}$$

Obteniendo r y su ángulo se tiene.

$$r=\sqrt{(-1)^2}$$

$$r=1$$

$$\theta=\pi$$

Se calcula la raíz k=0.

$$(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}))$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Se calcula la raíz k=1.

$$(\cos(\frac{3\pi}{4})+i\sin(\frac{3\pi}{4}))$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Se calcula la raíz k=2.

$$(\cos(\frac{5\pi}{4})+i\sin(\frac{5\pi}{4}))$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Se calcula la raíz k=3.

$$(\cos(\frac{7\pi}{4})+i\sin(\frac{7\pi}{4}))$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Exprese el número complejo indicado en forma polar y de modo a+ib.

18 Ejercicio 35

$$(\cos(\frac{\pi}{9})+i\sin(\frac{\pi}{9}))^{12}(2(\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6})))^5$$

Desarrollando con las fórmulas correspondientes.

$$(\cos(\frac{4\pi}{3})+i\sin(\frac{4\pi}{3}))(32(\cos(\frac{5\pi}{6})+i\sin(\frac{5\pi}{6})))$$

Por lo tanto, la forma polare y rectángular son:

$$32(\cos(\frac{13\pi}{6})+i\sin(\frac{13\pi}{6}))$$

$$16\sqrt{3}+16i$$

19 Ejercicio 37

Utilice el resultado $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$ **para encontrar identidades trigronométricas para** $\cos 2\theta$ **y** $\sin 2\theta$ **.** Tenemos:

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

20 Ejercicio 39

a) Si $z_1 = -1$ **y** $z_2 = 5i$ **, verifique que** $Arg(z_1 z_2) \neq Arg(z_1) + Arg(z_2)$ **.**
b) Si $z_1 = -1$ **y** $z_2 = -5i$ **, verifique que** $Arg(\frac{z_1}{z_2}) \neq Arg(z_1) - Arg(z_2)$ **.**
Sea:

$$(-1)(5i) = (0-0) + i(0-5) = -5i$$

$$\arctan(z_1) = \pi$$

$$\arctan(z_2) = \frac{\pi}{2}$$

Para la primer condición.

$$\arctan(z_1 z_2) = \frac{3\pi}{2}$$

$$\arctan(z_1) + \arctan(z_2) = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

Por lo tanto, son iguales:

$$\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

Para la segunda condición.

$$\arctan(\frac{z_1}{z_2}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan(z_1) - \arctan(z_2) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, son iguales:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$