Escuela Superior de Cómputo

Ingeniería en Sistemas Computacionales

Matemáticas avanzadas para la ingeniería

Ecuaciones de Cauchy-Riemann-Función exponencial

Grupo: 4CV2
Profesor: Zárate Cárdenas Alejandro

Equipo:
Arellano Millán Gabriel
Gómez Tovar Yoshua Oziel
Herrera Tovar Karla Elena
Vázquez Blancas César Said
Zarco Sosa Kevin

9 de mayo de 2024

1 Ejercicio 1

e^z analítica para todo z

$$e^{x+iy}$$
$$e^x e^{iy}$$

Se utiliza la fórmula de Euler para escribir e^{iy} en términos de seno y coseno.

$$e^x(cos(y) + isen(y))$$
$$e^x cos(y) + e^x sen(y)i$$

Se introducen las variables u y v para representar las partes real e imaginaria de la función, respectivamente.

$$u = e^x cos(y)$$
$$v = e^x sen(y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x cos(y)$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x sen(y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -sen(y)e^x$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -(sen(y)e^x)$$
$$e^x cos(y) = e^x cos(y)$$
$$-sen(y)e^x = -sene^x$$

Por lo tanto, es analítica.

Calcular e^z (en la forma u+iv) y $|e^z|$ si z es igual a:

2 Ejercicio 3

$1 + i$

$$e^{1+i} = e^1 e^i$$

Se descompone utilizando la fórmula de Euler

$$e^1(cos(1) + isen(1))$$
$$ecos(1) + esen(1)i$$
$$= 1.466869 + 2.28736i$$

$$|e^z| = \sqrt{(1.46869)^2 + (2.28736)^2}$$
$$|e^z| = \sqrt{2.15705 + 5.23202}$$
$$|e^z| = \sqrt{7.389072}$$

Quedando así que $|e^z| = 2.711828$

3 Ejercicio 5

$\sqrt{2} - \frac{1}{2}i$

$$e^{\sqrt{2}-\frac{1}{2}i} = e^{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}i}$$
$$e^{\sqrt{2}}\left(cos(-\frac{1}{2}) + sen(-\frac{1}{2})i\right)$$
$$= 3.60972 - 1.972i$$

$$|e^z| = \sqrt{(3.60922)^2 + (1.972)^2}$$
$$|e^z| = \sqrt{13.02647 + 3.888784}$$
$$|e^z| = \sqrt{16.915254}$$

Quedando así que $|e^z| = 4.11282$

4 Ejercicio 7

$(1+i)\pi$

$$e^{(1+i)\pi} = e^{\pi+i\pi}$$
$$e^{\pi}ei\pi$$
$$e^{\pi}\left(cos(\pi) + isen(\pi)\right)$$
$$-23.14069 + 0 = -23.14069$$
$$|e^z| = \sqrt{-23.14069^2}$$

Quedando así que $|e^z| = 23.14069$

5 Ejercicio 9

$\frac{-9\pi i}{2}$

$$e^{\frac{-9\pi i}{2}} = \left(cos(\frac{-9\pi i}{2}) + isen(\frac{-9\pi i}{2})\right)$$
$$0 - i = -i$$

$$|e^z| = \sqrt{1} = 1$$

A sí nos queda que $|e^z| = 1$

6 Ejercicio 11

e^{z^3}

$$e^{z^3} = e^{(x+iy)^3}$$
$$e^{x^3+3x^2ui-3xy^2-y^3i}$$
$$e^{x^3-3xy^2}e^{3x^2yi-y^3i}$$
$$e^{x^3-3xy^2}e^{i(3x^2y-y^3)}$$

Aplicar la fórmula de Euler a la parte imaginaria

$$e^{x^3-3xy^2}\left(cos(3x^2y-y^3)+isen(3x^2y-y^3)\right)$$

combinar las partes real e imaginaria para obtener la forma u+iv

$$e^{x^3-3xy^2}cos(3x^2y-y^3)+e^{x^3-3xy^2}sen(3x^2y-y^3)i$$

Así tenemos que:

$$\mathbb{R}\left\{e^{z^3}\right\} = e^{x^3-3xy^2}cos(3x^2y-y^3)$$

$$Im\left\{e^{z^3}\right\} = e^{x^3-3xy^2}sen(3x^2y-y^3)$$

7 Ejercicio 13

e^{-2z}

$$e^{-2z} = e^{-2(x+iy)}$$
$$e^{-2x-2iy}$$
$$e^{-2x}e^{-2iy}$$
$$e^{-2x}\left(cos(-2y)+isen(-2y)\right)$$
$$e^{-2x}cos(2y)-e^{-2x}sen(2y)i$$

Así tenemos que:

$$\mathbb{R}\left\{e^{-2z}\right\} = e^{-2x}cos(2y)$$
$$Im\left\{e^{-2z}\right\} = -e^{-2x}sen(2y)$$

8 Ejercicio 15

$\sqrt{i}, \sqrt{-i}$ donde $k = n - 1$

$$w_k = r^{\frac{1}{n}} \left[cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

donde r=1, n=2, k=0

$$1^{\frac{1}{2}} \left[cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2(0)\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2(0)\pi}{2}\right)\right]$$

$$1 \left[cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 0}{2}\right) + isen\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 0}{2}\right)\right]$$

$$1 \left[cos(\frac{\pi}{4} + isen(\frac{\pi}{4}))\right]$$

con k=1

$$1^{\frac{1}{2}} \left[cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2(1)\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2(1)\pi}{2}\right)\right]$$

$$1 \left[cos\left(\frac{\frac{5\pi}{2}}{2}\right) + isen\left(\frac{\frac{5\pi}{2}}{2}\right)\right]$$

$$1 \left[cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

De esta manera queda que $e^{\frac{\pi i}{4}}, e^{\frac{5\pi i}{4}}$

Ahora con r=1, n=2, k=0

$$1 \left[cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2(0)\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2(0)\pi}{2}\right)\right]$$

$$1 \left[cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

k=1

$$1 \left[cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{2}\right)\right]$$

$$1 \left[cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right]$$

quedando así que

$$e^{\frac{3\pi i}{4}}, e^{\frac{7\pi i}{4}}$$

9 Ejercicio 17

$3 + 4i$

$$r = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\theta = arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

Luego

$$5\left(cos\left(arctan\left(\frac{4}{3}\right) + isen\left(arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right)\right)\right)$$

$$5e^{arctan(\frac{4}{3})i}$$

Encontrar todos los valores de z tales que:

10 Ejercicio 19

$|e^z| < 1$

Sustituir z por $-(x + iy)$ en la desigualdad

$$|e^{-(x+iy)}| < 1$$

$$|e^{-x-iy)}| < 1$$

$$|e^{-x}\left(cos(y) - isen(y)\right)| < 1$$

Aplicar la definición de números complejos en su forma exponencial

$$\sqrt{e^{-2x}cos^2(y) + e^{-2x}isen^2(y)} < 1$$

$$\sqrt{e^{-2x}\left(cos^2(y) + isen^2(y)\right)} < 1$$

$$\sqrt{e^{-2x}} < 1$$

$$e^{-x} < 1$$

$$-x < ln(1)$$

$$-x(-1) > 0(-1)$$

$$x > 0$$

11 Ejercicio 21

Re $e^{2z} = 0$

$$Re \quad e^{2(x+iy)} = 0$$
$$Re \quad e^{2x+2iy)} = 0$$
$$Re \quad \left\{e^{2x}e^{2iy} = 0\right\}$$
$$Re \quad \left\{e^{2x}\left(cos(2y) + isen(2y)\right)\right\} = 0$$
$$Re \quad \left\{e^{2x}cos(2y) + e^{2x}isen(2y)\right\} = 0$$
$$e^{2x}cos(2y) = 0$$

Entonces $e^{2x} = 0$ o $cos(2y) = 0$

$$2x = ln(0)$$

$$2x = ind$$

Sin solución

$$2y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$
$$y = \frac{(2n+1)\pi}{4}$$

12 Ejercicio 23

$e^z = -2$

$$e^z = -2$$
$$e^x(cos(y) + isen(y)) = -2$$
$$e^x(cos(y) + isen(y)) = 2(cos(\pi) + isen(\pi))$$
$$e^x = 2$$
$$x = ln(2)$$
$$y = \pi + 2n\pi$$
$$z = Ln(2) + (2n+1)i\pi$$

13 Ejercicio 25

$e^z = 0$

$$e^x(cos(y) + isen(y)) = 0$$
$$e^x(cos(y) + isen(y)) = 0(cos(0) + isen(0))$$
$$e^x = 0$$
$$x = ln|0|$$
$$x = Ind$$

Entonces $x = Ind$ y $y = 0$, por lo tanto no hay soluciones

14 Ejercicio 27

Encontrar todos los valores de k tal que $f(z) = e^x(cos(ky) + isen(ky))$ sea analítica

$$f(z) = e^x cos(ky) + e^x isen(ky)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = cos(ky)e^x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = cos(ky)e^x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = ke^x cos(ky)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -ke^x sen(ky)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -sen(ky)e^x$$

$$cos(ky)e^x = ke^x cos(ky)$$

$$k = \frac{cos(ky)e^x}{cos(ky)e^x}$$

Por lo tanto, k=1

15 Ejercicio 29

Es interesante que $f(z) = e^z$ esté determinada de manera única por las 2 propiedades $f(x + io) = e^x y f'(z) = f(z)$, en donde se supone que f es entera. Demostrar este hecho. Sea g entera con estas dos propiedades y demostrar que $\left(\frac{g}{f}\right)' = 0$

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{(g'f - gf')}{g^2} = 0$$

ya que g'=g, f'=f, $(\frac{g}{f}) = k = cont$ $g(0) = f(0) = e^0 = 1$ se obtiene k=1, g=f