Escuela Superior de Cómputo

Ingeniería en Sistemas Computacionales

Matemáticas avanzadas para la ingeniería

Integral de contorno- Teorema de Cuachy

Grupo: 4CV2
Profesor: Zárate Cárdenas Alejandro

Equipo:
Arellano Millán Gabriel
Gómez Tovar Yoshua Oziel
Herrera Tovar Karla Elena
Vázquez Blancas César Said
Zarco Sosa Kevin

6 de junio de 2024

1 Ejercicio 1

$$\oint_C z^2 dz \quad con \quad C = -1, 1, 1+i, -1+i$$

1) $\quad con \quad C = -1$

$$z_1 = -1 + (1+1)t$$

$$z_1 = -1 + 2t \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$z^2 = 4t^2 - 4t + 1$$

$$dz = 2dt$$

$$\int_0^1 4t^2 - 4t + 1(2dt)$$

$$8\int_0^1 t^2 dt - 8\int_0^1 tdt + 2\int_0^1 dt$$

$$\frac{8t^3}{3} - 4t^2 + 2t\Big|_0^1$$

$$\frac{8}{3} - 4 + 2 + 0 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

2) $\quad con \quad C = 1$

$$z_2 = 1 + (1+i-1)t$$

$$z_2 = -1 + ti \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$z^2 = 1 + 2ti - t^2$$

$$dz = i$$

$$\int_0^1 (1 + 2ti - t^2) idt$$

$$\int_0^1 idt - 2\int_0^1 tdt - i\int_0^1 t^2 dt$$

$$it - t^2 - \frac{it^3}{3}\Big|_0^1$$

$$it - t^2 - \frac{i}{3} - 0 = -1 + \frac{2}{3}i$$

3) $\quad con \quad C = 1+i$

$$z_3 = 1 + i + (-1 + i - 1 - i)t$$

$$z_3 = 1 + i - 2t \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$z^2 = 4t^2 - 4t + 2i - 4ti$$

$$dz = -2$$

$$\int_0^1 4t^2 - 4t + 2i - 4ti(-2)dt$$

$$-8\int_0^1 t^2dt + 8\int_0^1 tdt - 4i\int_0^1 dt + 8i\int_0^1 tdt$$

$$-\frac{8t^3}{3} + 4t^2 - 4it + 4t^2i\Big|_0^1$$

$$-\frac{8}{3} + 4 - 4i + 4i = \frac{4}{3}$$

4) $\quad con \quad C = -1 + i$

$$z_4 = -1 + i + (-1 + 1 - i)t$$

$$z_4 = -1 + i - ti \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$z^2 = -t^2 - 2t - 2i + 2ti$$

$$dz = -i$$

$$\int_0^1 -t^2 + 2t - 2i + 2ti(-i)dt$$

$$i\int_0^1 t^2dt - 2i\int_0^1 tdt - 2\int_0^1 dt + 2\int_0^1 tdt$$

$$\frac{it^3}{3} - it^2 - 2t + t^2\Big|_0^1$$

$$\frac{i}{3} - i - 2 + 1 = -\frac{2i}{3} - 1$$

Entonces sumando los resultados

$$-\frac{2i}{3} - 1 + \frac{4}{3} - 1 + \frac{2i}{3} + \frac{2}{3}$$

$$-2 + \frac{6}{3} = -2 + 2 = 0$$

El teorema de cauchy dice que la funcion holomorfa es 0, por lo tanto el teorema está comprobado

2 Ejercicio 3

Comprobar el resultado del ejemplo 3

$$\oint_C \overline{z}dz = 2\pi i$$

$$\oint_C \frac{1}{z}dz = 2\pi i \quad Re\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 2\pi i * 1$$

$$2\pi i$$

Entonces $\oint_C \overline{z}dz = 2\pi i$

3 Ejercicio 5

Sí, por el principio de deformación

4 Ejercicio 7

$$f(z) = |z| \quad |z| = 1$$
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$u = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$v = 0$$

Como $v = 0$ al no haber parte imaginaria, no es analítica la función

$$z = e^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$
$$dz = e^{it} idt \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$
$$|z| = |e^{it}| = 1$$
$$\int_0^{2\pi} e^{it} idt = i \int_0^{2\pi} e^{it} dt$$
$$u = it \quad du = idt \quad \frac{du}{i} = dt$$
$$\frac{i}{i} \int_0^{2\pi} e^u du = e^u|_0^{2\pi}$$
$$e^{2\pi i} - e^0 = 1 - 1 = 0$$

0, no es aplicable Teorema dde Cauchy

5 Ejercicio 9

$$f(z) = Im(z) \quad |z| = 1$$
$$Im(x + iy) = y$$
$$v = 0 \quad v = y$$

Como $v = 0$ no hay parte real, por tanto la función no es analítica y el teorema de Cauchy no es aplicable

$$z = e^{it} t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$
$$dz = e^{it} i$$
$$Im(z) = cos(t) + isen(t)$$
$$Im(z) = sen(t)$$

$$\int_0^{2\pi} sen(t)e^{it}idt = i\int_0^{2\pi} sen(t)e^{it}dt$$

$$i\left[\frac{1}{4}\left(-4cos(t)(cos(t)+isen(t))-2sen^2(t)+i(sen(2t)+2t)\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= i\left[\left(\frac{1}{4}\left(-4cos(2\pi)(cos(2\pi)+isen(2\pi))-2sen^2(2\pi)+isen(2\pi)+2\pi\right)\right)-\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{4}\left(-4cos(0)(cos(0)+isen(0))-2sen^2(0)+isen(0)+2(0)\right)\right)\right]$$

$$i[i\pi] = -\pi$$

$-\pi$. no es aplicable Teorema de Cauchy

6 Ejercicio 11

$$f(z) = \frac{1}{\overline{z}} \quad |z| = 1$$

$$\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{x-iy} = \frac{x+iy}{x^2+y^2}$$

$$u = \frac{x}{x^2+y^2} \quad v\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \neq \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Por lo tannto, la función no es analítica y el Teorema de Cauchy no es aplicable

$$z = e^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$z = cos(t) + isen(t)$$

$$\overline{z} = cos(t) - isen(t) = e^{-it}$$

$$dz = e^{it}i$$

$$i\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{-it}}e^{it}dt = i\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{-it}}dt = i\int_0^{2\pi} e^{2it}dt$$

$$u = 2it \quad du = 2idt \quad dt = \frac{du}{2i}$$

$$\frac{i}{2i}\int_0^{2\pi} e^u du = \left.\frac{1}{2}e^{2it}\right|_0^{2\pi}$$

$$\frac{1}{2}e^{4\pi} - \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

0, no se puede resolver por Teorema de Cauchy

7 Ejercicio 13

$$f(z) = tan(z) \quad |z| = 1$$

$$tan(x + iy) = \frac{sen(z)}{cos(z)}$$

Es analítica menos cuando cos(z)=0 $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ es aplicable el teorema de Cauchy

$$z = e^{it}$$

$$\int \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

Dado que tan(z) no tiene singularidades en su contorno en la circunferencia unitaria, es 0, por lo tanto es aplicable Teorema de Cauchy

8 Ejercicio 15

$$f(z) = \overline{z} \quad |z| = 1$$

$$(x - iy)^2 = x^2 - 2xyi - y^2$$

$$u = x^2 - y^2 \quad v = -2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -(-2y) = 2y$$

$$2x \neq -2x$$

$$-2y \neq 2y$$

Por tanto no es aplicable Teorema de Cauchy

$$z = e^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$dz = e^{it} i dt$$

$$\overline{z}^2 = (e^{it})^2 = e^{-2it}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-2it} e^{it} i dt = i \int_0^{2\pi} e^{-it} dt$$

$$u = -it \quad du = -idt \quad \frac{du}{-i} = dt$$

$$\frac{i}{-i} \int_0^{2\pi} e^u du = -e^{it} \Big|_0^{2\pi}$$

$$-e^{2\pi i} + e^0 = -1 + 1 = 0$$

0, no es aplicable Teorema de Cauchy

9 Ejercicio 17

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+2)} \quad |z| = 1$$

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+2}$$

$$z^2+2=0 \quad z^2=-2 \quad z=\pm\sqrt{-2}$$

$$z_1 = i\sqrt{2} \quad z_2 = -i\sqrt{2}$$

$$\oint_C \frac{dz}{(z+i\sqrt{2})(z-i\sqrt{2})}$$

$$\oint_{C_1} \frac{\frac{1}{z-i\sqrt{2}}}{(z+i\sqrt{2})} dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{1}{z+i\sqrt{2}}}{(z-i\sqrt{2})} dz$$

$$z_0 = -i\sqrt{2} \quad z_0 = i\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{-i\sqrt{2}-i\sqrt{2}} = \frac{1}{-2i\sqrt{2}} \quad \frac{1}{i\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{-2\pi i}{2i\sqrt{2}} + \frac{2\pi i}{2i\sqrt{2}} = 0$$

0. si es aplicable Teorema de Cauchy

10 Ejercicio 19

$$\oint_C \frac{dz}{z-i} \quad |z| = 2 \quad z = i = 9$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-9} dz = 2\pi i(1)$$

$$f(z) = 1 = 2\pi i(1) = 2\pi i$$

11 Ejercicio 21

$$\oint_C \frac{cos(z)}{z} dz \quad C \quad consta \quad de \quad |z| = 1 \quad |z| = 3$$

$$z = 0 \quad \frac{1}{z} = 1$$

$$\oint_C \frac{cos(z)}{z} = 1$$

Por lo tanto $2\pi i(1)$, lo mismo para $|z| = 3$, pero al ser contrario a las manecillas del reloj, da $-2\pi i$

$$2\pi i - 2\pi i = 0$$

12 Ejercicio 23

$$\oint_C \frac{dz}{z^2-1}$$

$\oint_C \frac{dz}{z^2-1}$ por Teorema de Cauchy de curvas cerradas

$$2\pi i f(z) = 2\pi i(1) = 2\pi i$$

$$f(z) = 1$$

13 Ejercicio 25

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+1}$$

$$C = a)|z+i| = 1 \quad C = b)|z-i| = 1$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)$$

$$z^2+1 = 0 \quad z = +i \quad z = -i$$

$$z^2 = -1$$

$$z = \pm\sqrt{-1}$$

$$\oint_C \frac{dz}{(z-i)(z+i)}$$

a)

$$= \oint_C \frac{\frac{1}{z+i}}{(z-i)}$$

z=i

$$\frac{1}{i+i} = \frac{1}{2i}$$

$$2\pi i\left(\frac{1}{2i}\right) = \pi$$

b)

$$= \oint_C \frac{\frac{1}{z-i}}{(z+i)}$$

z=-i

$$\frac{1}{-i-i} = -\frac{1}{2i}$$

$$2\pi i\left(-\frac{1}{2i}\right) = -\pi$$

$$\pi = -\pi$$

14 Ejercicio 27

$$\oint_C \frac{2z+1}{z^2+z}$$

$$a)|z| = \frac{1}{4} \quad b)|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{4} \quad a)|z| = 2$$

$$\oint_C \frac{2z+1}{z(z+1)}$$

z=0,z=-1

$$\int \frac{\frac{2z+1}{z+1}}{z} dz$$

a) Sentido de las manecillas del reloj

$$2\pi i(1) = 2\pi i$$

z=0

$$f(z) = \frac{1}{1}$$

$$f(0) = \frac{1}{1} = 1$$

b) Las sigularidades están afuera, por lo tanto, es 0por teorema de Cauchy c)

$$\int \frac{\frac{2z+1}{z}}{z+1} dz$$

z=-1

$$f(-1) = \frac{2(-1)+1}{-1} = \frac{-2+1}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$2\pi i(1) = 2\pi i + 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i$$

Sentido de las manecillas del reloj, entonces -4π, así:

$$-2\pi, 0, -4\pi i$$

15 Ejercicio 29

$$\oint_C \frac{3z+1}{z^3+z} dz$$

$$C = a)|z| = \frac{1}{2} \quad C = b)|z| = 2$$

$$\int \frac{3z+1}{z(z-1)(z+1)}$$

$$z = 0 \quad z = 1 \quad z = -1$$

$$\int \frac{\frac{3z+1}{(z-1)(z+1)}}{z}$$

a) z=0

$$f(0) = \frac{3(0)+1}{(0-1)(0+1)} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$= 2\pi i(-1) = 2\pi i$$

z=-1

$$\int \frac{\frac{3z+1}{z(z-1)}}{z+1}$$

$$\frac{3(-1)+1}{-1(-1-1)} = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$= 2\pi i(-1) = -2\pi i$$

z=1

$$\int \frac{\frac{3z+1}{z(z+1)}}{z-1}$$

$$\frac{3(1)+1}{1(1+1)} = \frac{3+1}{1(2)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$= 2\pi i(2) = 4\pi i$$

$$= 4\pi i - 2\pi i - 2\pi i = 4\pi i - 4\pi i$$

$$= 0$$

b)

$$-2\pi i, 0$$