INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
Escuela Superior de Cómputo
Academia de Formación Básica

ESCOM

3er examen parcial de Álgebra Lineal

Nombre: Vázquez Blancas César Said Grupo: 2CV1 Calif: 8 /8

Resuelve los siguientes ejercicios de manera clara y ordenada, recuerda que se califica el procedimiento. Cada ejercicio vale 2 puntos.

1. Determina la imagen del vector $v(2,1,-2)$ y la preimagen de $w(2,2,2)$ bajo la transformación lineal $T(x,y,z) = (x+y, y+z, x+z)$. Determina la matriz estándar de T así como el kernel y rango de la misma (subconjuntos de $\mathbb{R}^3$).

2. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, determina la fórmula para la transformación lineal T asociada a la misma, la imagen del vector $v(-1,1,4)$ y la preimagen de $w(4,2)$. Calcula una base para el kernel y otra para el rango de la transformación, así como las dimensiones de los mismos.

3. Calcula los valores y vectores propios asociados a la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Calcula los valores y vectores propios asociados a la matriz $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Imagen $v(2,1,-2)$ ✓ (1)

preimagen $w(2,2,2)$ ✓

$T(x,y,z) = (x+y, y+z, x+z)$ ✓

Matriz estandar ? ✓

Kernel ? ✓

Rango ? ✓

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Imagen}$$

$1-2=-1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{e_3 - e_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{e_3 + e_2 \to e_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{e_3/2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{e_2 - e_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{e_1 - e_2 \to e_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{PreImagen}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_3 - e_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_3 + e_2 \to e_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_3/2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{e_2 - e_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_1 - e_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}$$

$Ker = \{0\} \to 0$

$rank = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \to 3$

imagen = $(3, -1, 0)$

preimagen = $(1, 1, 1)$

Matriz estándar = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Kernel = $\{0\} \to 0$

Rango = $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \longrightarrow 3$

1

Escaneado con CamScanner

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Imagen = ?

preimagen = ?

base Kernel = ?

rango = ?

T(x, y, z) = ?

$T(x,y,z) = (x + 2y - z, x + z)$

$$V = (\overset{x}{-1}, \overset{y}{1}, \overset{z}{4})$$

$(-1 + 2 - 4, -1 + 4) = (-3, 3) \leftarrow$ Imagen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] e_2 - e_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right] e_2 - e_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x + z = 2 \\ y - z = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = 2 - z \\ y = 1 + z \end{array}$$

$Ker(T) = (2 - z, 1 + z, z)$

2

$$\begin{bmatrix} -z \\ z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Imagen} = (-3, 3) \\ \text{preImagen} = (-1, 1, 1) \\ \text{Ker} = (-1, 1, 1) \Rightarrow \mathbb{R}^1 \\ \text{Rango} = \{(1, 1), (2, 0)\} \Rightarrow \mathbb{R}^2 \\ T(x, y, z) = (x + 2y - z, x + z) \end{array}}$$

3 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -4 & \lambda-1 \end{bmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-1) - 4$

$$\begin{array}{r} \lambda-1 \\ \lambda-1 \\ \hline -\lambda \; 1 \\ \lambda^2-\lambda \\ \hline \lambda^2-2\lambda+1 \end{array}$$

$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4$

$= \lambda^2 - 2\lambda - 3$

$(\lambda - 3)(\lambda + 1)$

$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -1$

$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_2 - 2e_1} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_2/-1} \begin{bmatrix} 2 & +1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$2x + y$

$x = -1/2\, y \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Escaneado con CamScanner

$$y = -y \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2\, y \\ y \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = -1/2\, y$$

$$V_{\lambda_1} = (-1/2, 1)$$

$$\begin{bmatrix} 3-1 & -1 \\ -4 & 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_2/2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_2 - e_1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \quad 2x - y = 0 \quad x = 1/2\, y$$

$$2x = y \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2\, y \\ y \end{bmatrix} \to y\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_{\lambda_2} = (1/2, 1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= (-1/2, 1) \\ V_{\lambda_2} &= (1/2, 1) \end{aligned}}$$

3

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= 3 \end{aligned}}$$

(4) $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda-3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda-3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \lambda-3 & -2 \\ -2 & \lambda \\ -4 & -2 \end{matrix}$

$= (\lambda-3)(\lambda)(\lambda-3) - 16 - 16 - (16\lambda + 4\lambda - 12$
$+ 4\lambda - 12$

$\begin{array}{r} \lambda - 3 \\ \lambda - 3 \\ \hline -3\lambda + 9 \\ \lambda^2 - 3\lambda \\ \hline \lambda^2 - 6\lambda + 9 \end{array}$

$= \cancel{\lambda^3} - \cancel{6\lambda^2} + \cancel{9\lambda} - \cancel{32} - \cancel{16\lambda} - \cancel{4\lambda} + \cancel{12}$
$\cancel{-4\lambda} + \cancel{12}$

$= \lambda^3 - 6\lambda^2 - 15\lambda - 8$

$\lambda_1 = 8 \qquad \lambda_{2,3} = -1$

$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_3 - 2e_2} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ 0 & -18 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_2 \times 5} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -10 & 40 & -10 \\ 0 & -18 & 9 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{e_2 + 2e_1} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 36 & -18 \\ 0 & -18 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_3 - e_2/2} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 36 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; e_2 / 18$

$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_2 + e_1} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$x - z = 0 \qquad x = z$
$2y - z = 0 \qquad y = 1/2\, z$

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ 1/2\, z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_3 - e_1} \begin{bmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_2 - 1/2\, e_1}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_1/-2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2x + y + 2z = 0$$

$$x = \frac{-y - \cancel{2}z}{2 \;\; \cancel{2}}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}y - z$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2\,y - z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \underbrace{\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{} + z \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= (1, 1/2, 1) \\ V_{\lambda_2} &= (-1/2, 1, 0) \\ V_{\lambda_3} &= (-1, 0, 1) \\ \lambda_1 &= 8 \\ \lambda_{2,3} &= -1 \end{aligned}}$$

4