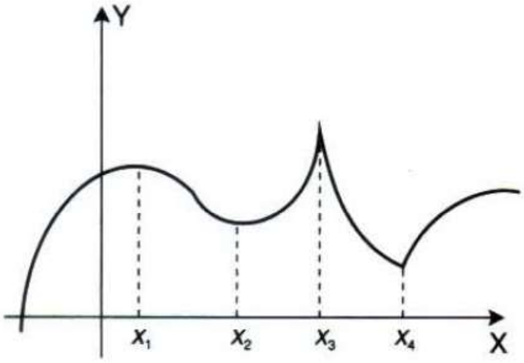
5.4 Máximos e Mínimos

Consideremos a seguir o gráfico de uma função $f(x)$, em que assinalamos pontos de abscissas $x_1,\ x_2,\ x_3$ e x_4.



Esses pontos são chamados de *pontos extremos* da função. Os valores de $f(x_1)$ e $f(x_3)$ são chamados de *máximos relativos* e $f(x_2),\ f(x_4)$ são chamados de *mínimos relativos*. Dessa forma pode-se formalizar as definições.

Definição 1: O ponto c do domínio de uma função $f(x)$ é dito *ponto crítico de* $f(x)$ se uma das duas condições a seguir for satisfeita:

i) $f'(c)$ existe e é zero.

ii) $f'(c)$ não existe.

Definição 2: Seja $f(x)$ definida num intervalo (a, b) e $c \in (a, b)$.

i) $f(c)$ é *máximo absoluto* (ou global) em (a, b) se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

ii) $f(c)$ é *mínimo absoluto* (ou global) em (a, b) se $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

Nesses casos, c é dito *ponto de máximo absoluto* e *ponto de mínimo absoluto* em (a, b), respectivamente.

Definição 3: Seja c um ponto do domínio da função $f(x)$.

i) $f(c)$ é *máximo relativo* (ou local) se existir um intervalo aberto (a, b), contendo c, tal que $f(c) \geq f(x)$, para todo $x \in (a, b)$

ii) $f(c)$ é *mínimo relativo* (ou local) se existir um intervalo aberto (a, b), contendo c, tal que $f(c) \leq f(x)$, para todo $x \in (a, b)$.

Observação: Dado um intervalo (a, b), uma função $f(x)$ poderá ter vários máximos e mínimos relativos, mas apenas um máximo e um mínimo absoluto, quando estes existirem. Em alguns casos, os máximos e mínimos relativos poderão coincidir com os máximos e mínimos absolutos.

Teorema 1: Se uma função $f(x)$ é derivável em c e tem um extremo local nesse ponto então $f'(x) = 0$.

Observações:

i) Portanto, a condição $f'(c) = 0$ é necessária para que a função derivável em c tenha nesse ponto um extremo relativo.

ii) Convém salientar que se $f(x)$ não for derivável em c, ela pode ter um extremo nesse ponto, como mostra a função $f(x) = |x|$, fazendo $c = 0$. Nesse caso 0 é um mínimo relativo (e também absoluto) e, no entanto, essa função não é derivável nesse ponto.

iii) Resumindo podemos concluir que para uma função contínua em $[a, b]$ ter um extremo relativo em c, de duas uma, ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe. Portanto, temos uma regra a seguir na busca de extremos relativos.

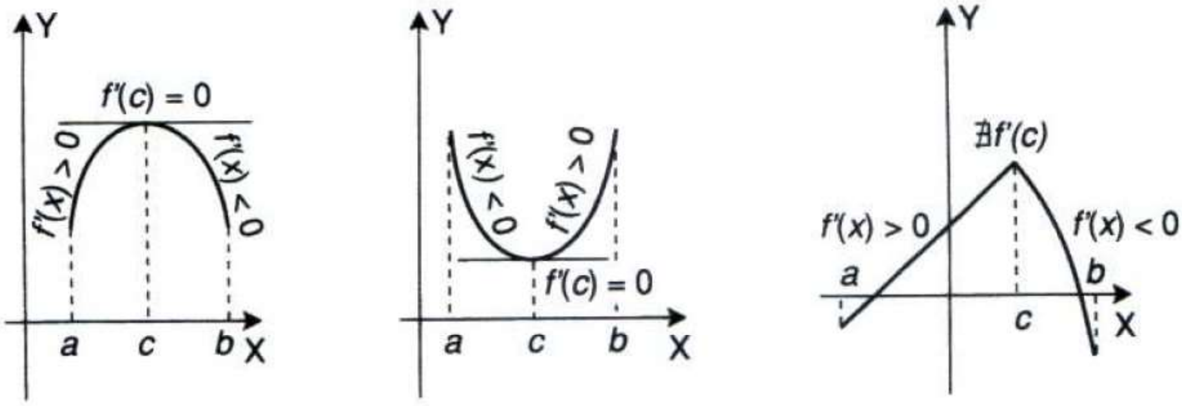
Teorema 2: Se uma função é contínua num intervalo fechado $[a, b]$ então $f(x)$ admite seu máximo absoluto e seu mínimo absoluto pelo menos uma vez em $[a, b]$.

Teorema 3: Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), exceto possivelmente em c.

i) Se $f'(x) > 0$ para todo $a < x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $c < x < b$, então $f(x)$ tem um máximo relativo em c.

ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $a < x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $c < x < b$, então $f(x)$ tem um mínimo relativo em c.

A figura a seguir ilustra as diversas possibilidades:



Exemplos:

a) Seja $f(x) = x^3 - 12x$; determine os extremos absolutos no intervalo [-3,5]. Esboce o gráfico de $f(x)$.

b) Se $f(x) = x^3$, mostre que $f(x)$ não possui extremo relativo.

c) Determinar os pontos críticos de $f(x) = (x+5)^2 \sqrt[3]{x-4}$.

Exercícios

1. Determine os extremos absolutos de $f(x)$ nos intervalos indicados:

   a) $f(x) = 5 - 6x^2 - 2x^3$; $[-3, 1]$

   b) $f(x) = 3x^2 - 10x + 7$; $[-1, 3]$

   c) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$; $[-1, 8]$

   d) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$; $[0, 2]$

2. Prove que $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ não possui extremo relativo.

3. Prove que $f(0)$ é mínimo relativo de $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$.

4. Determine os pontos críticos das funções:

a) $f(x) = 4x^3 - 3x + 2$

b) $g(x) = 2x + 5$

c) $s(t) = 2t^3 + t^2 - 20t + 4$

d) $k(z) = 4z^3 + 5z^2 - 42z + 7$

e) $f(z) = \sqrt{z^2 - 16}$

f) $G(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 9}$

Teorema 4: Seja $f(x)$ derivável num intervalo (a, b) contendo c e que $f'(c) = 0$. Então,

i) Se $f''(c) < 0$, então $f(x)$ tem um máximo relativo em c.

ii) Se $f''(x) > 0$ então $f(x)$ tem um mínimo relativo em c.

Exemplos:

1) Seja $f(x) = x^5 - 5x^3$; obtenha os extremos relativos dessa função, as concavidades e os pontos de inflexão.

2) Determinar os extremos relativos das funções:

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}(8 - x)$.

Exercícios:

Use o teste da segunda derivada (quando aplicável) para determinar os extremos locais de $f(x)$. Discuta concavidade, ache as abscissas dos pontos de inflexão e esboce o gráfico das funções a seguir:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$

b) $f(x) = \sqrt[5]{x} - 1$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(3x + 10)$

d) $f(x) = \dfrac{x + 4}{\sqrt{x}}$

e) $f(x) = 8\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^4}$

f) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$