MAKRON *Books*

4

Produto Misto

Definição

Chama-se *produto misto* dos vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ e $\vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$, tomados nesta ordem, ao número real $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$.

O produto misto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ também é indicado por $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Tendo em vista que

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\vec{k}$$

vem

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

e, portanto,

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Exemplo

Calcular o produto misto dos vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{w} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

Solução

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 27$$

Propriedades do Produto Misto

As propriedades do produto misto decorrem, em sua maioria, das propriedades dos determinantes.

I) O produto misto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ muda de sinal ao trocarmos a posição de dois vetores.

Em relação ao exemplo anterior onde $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 27$, teríamos

$(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -27$ (permuta de $\vec{u}$ e $\vec{v}$)

$(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = -27$ (permuta de $\vec{u}$ e $\vec{w}$)

$(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -27$ (permuta de $\vec{v}$ e $\vec{w}$)

Se em qualquer um destes três últimos produtos efetuarmos nova permutação de dois vetores, o produto misto resultante volta a ser 27.

É o que acontece com $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = 27$, onde no primeiro deles permutamos $\vec{u}$ e $\vec{w}$.

Então, se em relação ao produto misto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ocorrer

a) uma permutação – haverá troca de sinal;

b) duas permutações – não altera o valor.

Resulta desta propriedade que os sinais $\cdot$ e $\times$ podem ser permutados, isto é,

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

pois

$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

II) $(\vec{u} + \vec{x}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{x}, \vec{v}, \vec{w})$

$(\vec{u}, \vec{v} + \vec{x}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{x}, \vec{w})$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{x}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{v}, \vec{x})$

III) $(\alpha\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \alpha\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w}) = \alpha(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

IV) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ se, e somente se, os três vetores forem coplanares.

Admitindo-se que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$, ou seja, $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$, conclui-se que $(\vec{v} \times \vec{w}) \perp \vec{u}$. Por outro lado, no estudo do produto vetorial vimos que o vetor $\vec{v} \times \vec{w}$ é também ortogonal a $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Assim sendo, como $\vec{v} \times \vec{w}$ é ortogonal aos três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, estes são coplanares (Figura 4.1).

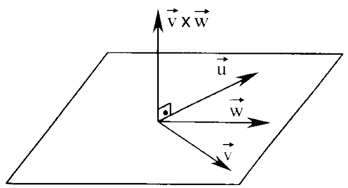

Figura 4.1

Reciprocamente, admitindo-se que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam coplanares, o vetor $\vec{v} \times \vec{w}$, por ser ortogonal a $\vec{v}$ e $\vec{w}$, é também ortogonal a $\vec{u}$.

Ora, se $\vec{u}$ e $\vec{v} \times \vec{w}$ são ortogonais, o produto escalar deles é igual a zero, isto é,

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$$

Observação

A equivalência da propriedade IV continua válida em situações particulares, tais como:

a) *se pelo menos um dos vetores é nulo* (o determinante (1) é zero por ter uma fila de zeros e os três vetores são coplanares);

b) *se dois deles forem paralelos* (o determinante (1) é zero por ter duas filas de elementos proporcionais ou iguais e os três vetores são coplanares).

Exemplos

1) Verificar se são coplanares os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, -1)$ e $\vec{w} = (2, -1, 4)$.

Solução

Como

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

os vetores não são coplanares.

2) Qual deve ser o valor de m para que os vetores $\vec{u} = (2, m, 0)$, $\vec{v} = (1, -1, 2)$ e $\vec{w} = (-1, 3, -1)$ sejam coplanares?

Solução

Para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam coplanares deve-se ter

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$$

isto é,

$$\begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$2 - 2m - 12 + m = 0$$

e, portanto,

$$m = -10$$

3) Verificar se os pontos A(1, 2, 4), B(-1, 0, -2), C (0, 2, 2) e D(-2, 1, -3) estão no mesmo plano.

Solução

Os quatro pontos dados são coplanares se forem coplanares os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ (Figura 4.2), e, para tanto, deve-se ter

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$$

Como

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 0,$$

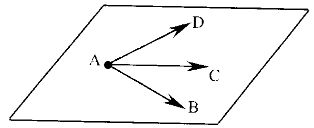

Figura 4.2

os pontos dados são coplanares.

Interpretação Geométrica do Módulo do Produto Misto

Geometricamente, o produto misto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ é igual, em módulo, ao volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelos vetores não-coplanares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (Figura 4.3).

A área da base do paralelepípedo é $|\vec{v} \times \vec{w}|$.

Seja θ o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v} \times \vec{w}$. Sendo $\vec{v} \times \vec{w}$ um vetor ortogonal à base, a altura será paralela a ele, e, portanto,

$$h = |\vec{u}|\,|\cos\theta|$$

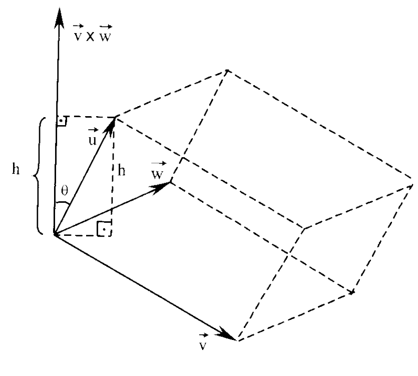

Figura 4.3

(É necessário considerar o valor absoluto $|\cos\theta|$, pois θ pode ser um ângulo obtuso).

Então, o volume V do paralelepípedo é

$$\begin{aligned} V &= (\text{área da base})\,(\text{altura}) \\ &= |\vec{v} \times \vec{w}|\,|\vec{u}|\,|\cos\theta| \\ &= |\,|\vec{u}|\,|\vec{v} \times \vec{w}|\cos\theta\,| \\ &= |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre da relação (2) do Produto Escalar.

Portanto,

$$V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$

Exemplo

Sejam os vetores $\vec{u} = (3, m, -2)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (2, -1, 2)$. Calcular o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja 16 u.v. (unidades de volume).

Solução

O volume do paralelepípedo é dado por

$$V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$

e, no caso presente, deve-se ter

$$|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = 16$$

Sendo

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & m & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2m - 8$$

vem

$$|-2m - 8| = 16,$$

que, pela definição de módulo, implica duas hipóteses:

$$-2m - 8 = 16 \quad \text{ou} \quad -2m - 8 = -16$$

e, portanto,

$$m = -12 \quad \text{ou} \quad m = 4$$

Volume do Tetraedro

Sejam A, B, C e D pontos não-coplanares. Portanto, os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ também são não-coplanares. Em conseqüência, estes vetores determinam um paralelepípedo (Figura 4.4) cujo volume é

$$V = |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|.$$

Este paralelepípedo, por sua vez, pode ser repartido em dois prismas triangulares de mesmo tamanho (conforme figura) e, portanto, o volume V_p de cada prisma é a metade do volume V do paralelepípedo ($V_p = \frac{1}{2}V$).

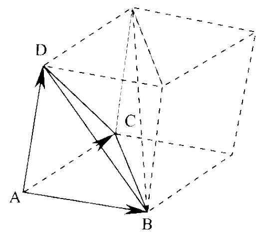

Figura 4.4

Por outro lado, da Geometria Espacial sabemos que o prisma pode ser repartido em três pirâmides de mesmo volume, sendo uma delas o tetraedro ABCD. Assim, o volume V_t do tetraedro é um terço do volume do prisma, isto é,

$$V_t = \frac{1}{3}V_p = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}V\right)$$

ou

$$V_t = \frac{1}{6}V$$

ou

$$V_t = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$$

Exemplo

Sejam A(1, 2, -1), B(5, 0, 1), C(2, -1, 1) e D(6, 1, -3) vértices de um tetraedro. Calcular

a) o volume deste tetraedro;

b) a altura do tetraedro relativa ao vértice D.

Solução

a) O volume do tetraedro é dado por

$$V_t = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$$

Mas

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 36$$

Portanto, o volume do tetraedro é

$$V_t = \frac{1}{6} \cdot 36 = 6 \text{ u.v.}$$

b) Observemos na Figura 4.4 que a altura do tetraedro traçada do vértice D é a própria altura do paralelepípedo de base determinada por $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$. Como o volume V do paralelepípedo é dado por

$V = $ (área da base) (altura)

$= |\vec{AB} \times \vec{AC}| \cdot h$

tem-se

$$h = \frac{V}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}$$

Mas,

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (2, -6, -10)$$

e, portanto,

$$h = \frac{36}{|(2, -6, -10)|} = \frac{36}{\sqrt{4+36+100}} = \frac{36}{\sqrt{140}} = \frac{18}{\sqrt{35}} \text{ u.c.}$$

Problemas Propostos

1) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 2)$ e $\vec{w} = (2, 0, -3)$, calcular

a) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ b) $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$

2) Sabendo que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -5$, calcular

a) $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$ b) $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ c) $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ d) $\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})$

3) Sabendo que $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 2$, calcular

a) $\vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v})$ c) $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$ e) $\vec{u} \cdot (2\vec{w} \times \vec{v})$

b) $\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})$ d) $(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot (3\vec{v})$ f) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{w})$

4) Sabendo que $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{x}) = 2$ e $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}) = 5$, calcular

a) $(\vec{u}, \vec{x}, -\vec{w})$ b) $(3\vec{u}, 3\vec{w}, -2\vec{x})$ c) $(2\vec{u} + 4\vec{v}, \vec{w}, \vec{x})$ d) $(5\vec{u} - 3\vec{v}, 2\vec{w}, \vec{x})$

5) Verificar se são coplanares os vetores

a) $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (2, 2, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 0, -4)$

b) $\vec{u} = (2, -1, 3)$, $\vec{v} = (3, 1, -2)$ e $\vec{w} = (7, -1, 4)$

6) Determinar o valor de k para que sejam coplanares os vetores

a) $\vec{u} = (2, -1, k)$, $\vec{v} = (1, 0, 2)$ e $\vec{w} = (k, 3, k)$

b) $\vec{u} = (2, k, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, k)$ e $\vec{w} = (3, 0, -3)$

7) Verificar se são coplanares os pontos

a) A(1, 1, 0), B(-2, 1, -6), C(-1, 2, -1) e D(2, -1, -4)

b) A(2, 1, 2), B(0, 1, -2), C(1, 0, -3) e D(3, 1, -2)

8) Para que valor de m os pontos A(m, 1, 2), B(2, -2, -3), C(5, -1, 1) e D(3, -2, -2) são coplanares?

9) Qual o volume do cubo determinado pelos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$?

10) Um paralelepípedo é determinado pelos vetores $\vec{u} = (3, -1, 4)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 1, 5)$. Calcular seu volume e a altura relativa à base definida pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

11) Calcular o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{v}_1 = (0, -1, 2)$, $\vec{v}_2 = (-4, 2, -1)$ e $\vec{v}_3 = (3, m, -2)$ seja igual a 33. Calcular a altura deste paralelepípedo relativa à base definida por $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

12) O ponto A(1, -2, 3) é um dos vértices de um paralelepípedo e os três vértices adjacentes são B(2, -1, -4), C(0, 2, 0) e D(-1, m, 1). Determinar o valor de m para que o volume deste paralelepípedo seja igual ao 20 u.v. (unidades de volume).

13) Dados os pontos A(2, 1, 1), B(-1, 0, 1) e C(3, 2, -2), determinar o ponto D do eixo Oz para que o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ e $\vec{AD}$ seja 25 u.v.

14) Representar graficamente o tetraedro ABCD e calcular seu volume, sendo A(1, 1, 0), B(6, 4, 1), C(2, 5, 0) e D(0, 3, 3).

15) Calcular o volume do tetraedro de base ABC e vértice P, sendo A (2, 0, 0), B (2, 4, 0), C(0, 3, 0) e P(2, -2, 9). Qual a altura do tetraedro relativa ao vértice P?

16) Sabendo que os vetores $\vec{AB} = (2, 1, -4)$, $\vec{AC} = (m, -1, 3)$ e $\vec{AD} = (-3, 1, -2)$ determinam um tetraedro de volume 3, calcular o valor de m.

17) Três vértices de um tetraedro de volume 6 são A(-2, 4, -1), B(-3, 2, 3) e C(1, -2, -1). Determinar o quarto vértice D, sabendo que ele pertence ao eixo Oy.

18) Calcular a distância do ponto D(2, 5, 2) ao plano determinado pelos pontos A(3, 0, 0), B(0, -3, 0) e C(0, 0, 3).

19) Sendo $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$ e 120° o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular

a) $|\vec{u} + \vec{v}|$

b) $|\vec{u} \times (\vec{v} - \vec{u})|$

c) o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

226.205

20) Determinar m e n para que se tenha
   a) $(m, n, 2) \cdot (4, -1, 3) = -2$
   b) $(m, n, 2) \times (4, -1, 3) = (8, -1, -11)$
   c) $(m, n, 2) \cdot ((3, 1, 2) \times (0, 1, -1)) = 9$

Respostas de Problemas Propostos

1)	a) -29	b) -29				
2)	a) 5	b) 5	c) -5	d) -5		
3)	a) -2	b) 2	c) 2	d) -6	e) -4	f) -2
4)	a) 2	b) −36	c) 24	d) -10		
5)	a) Não	b) Sim				
6)	a) 6	b) 2 ou -3				
7)	a) Sim	b) Não				

8) $m = 4$
9) 1
10) 17 e $\dfrac{17}{\sqrt{30}}$
11) $m = 4$ ou $m = -\dfrac{17}{4}$ e $h = \dfrac{33}{\sqrt{89}}$
12) 6 ou 2
13) D(0, 0, -10) ou D(0, 0, 15)
14) $\dfrac{19}{2}$ u.v.
15) 12 u.v. e 9 u.c.
16) $m = -\dfrac{17}{2}$ ou $m = \dfrac{19}{2}$
17) D(0, 2, 0) ou D(0, -4, 0)
18) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ u.c.
19) a) $\sqrt{13}$ b) $6\sqrt{3}$ c) 108 u.v.
20) a) $n = 4m + 8$ b) $m = 3$ e $n = 2$ c) $n = m + 1$

MAKRON
Books

5

A Reta

Equação Vetorial da Reta

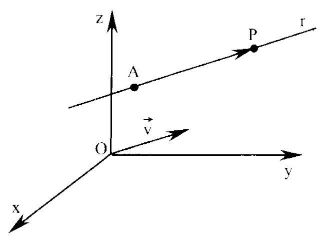

Figura 5.1

Consideremos um ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e um vetor não-nulo $\vec{v} = (a, b, c)$. Só existe uma reta r que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$. Um ponto P(x, y, z) pertence a r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é paralelo a $\vec{v}$ (Figura 5.1), isto é,

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v} \qquad (1)$$

para algum real t.

De (1), vem

$$P - A = t\vec{v}$$

ou

$$P = A + t\vec{v} \qquad (2)$$

ou, em coordenadas

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c) \qquad (3)$$

Qualquer uma das equações (1), (2) ou (3) é denominada *equação vetorial* de r.

O vetor $\vec{v}$ é chamado *vetor diretor* da reta r e t é denominado *parâmetro*.

Exemplo

A reta r que passa por A(1, -1, 4) e tem a direção de $\vec{v} = (2, 3, 2)$, tem equação vetorial, de acordo com (3):