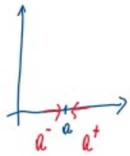
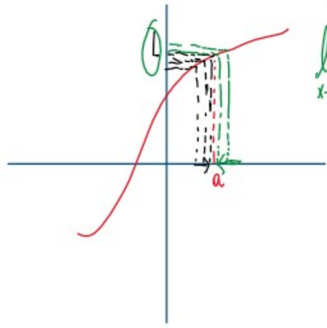
Limites laterais

quinta-feira, 30 de março de 2023 15:29

$\lim_{x\to a} f(x) = L$





$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to a^-} f(x) = L \\ \lim_{x\to a^+} f(x) = L\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = L$

Limites Laterais

Definição 1: Seja f uma função definida no intervalo (a, c). Então o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita será L, denotado por

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \text{ tal que,} \\ |f(x) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < x - a < \delta\end{array}\right.$$

Então, $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ significa que podemos fazer $|f(x) - L|$ tão pequeno quanto desejamos, tomando x suficientemente próximo de a porém **maior** que a.

Definição 2: Seja f uma função definida no intervalo (d, a). Então o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda será L, denotado por

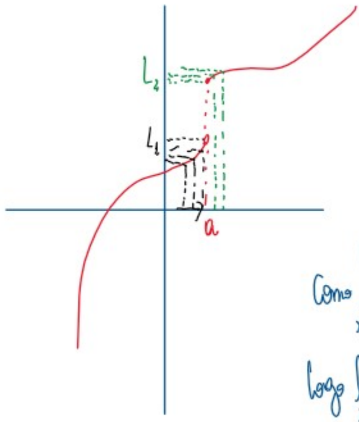
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \text{ tal que,} \\ |f(x) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } -\delta < x - a < 0\end{array}\right.$$

Então, $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ significa que podemos fazer $|f(x) - L|$ tão pequeno quanto desejamos, tomando x suficientemente próximo de a porém **menor** que a.

Teorema: $\lim_{x\to a} f(x)$ existe e será igual a L se e somente se $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existirem e ambos forem iguais a L.

Observação: se $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existirem e forem diferentes, então $\lim_{x\to a} f(x)$ não existirá.

Os teoremas de limite dados anteriormente, bem como suas consequências, continuam válidos quando substituímos $x \to a$ por $x \to a^+$ ou $x \to a^-$.



$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1 \\ \lim_{x\to a^+} f(x) = L_2\end{array}\right\}$

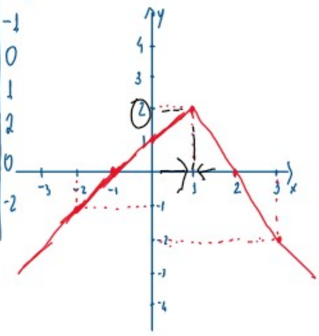
Como $\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1 \neq \lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$,

Logo $\lim_{x\to a} f(x)$ não existe

Exemplos: Em cada exemplo, esboce o gráfico da função, calcule os limites laterais da função quando $x \to a^+$ e quando $x \to a^-$ e determine o limite da função quando $x \to a$ (se existir).

a) $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} x+1 & \text{se } x < 1 \\ -2x+4 & \text{se } x > 1\end{array}\right.$; $a = 1$.

x	f(x)
-2	-1
-1	0
0	1
1	2
2	0
3	-2



$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x+1) = 1+1 = 2$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(-2x+4) = -2.1+4 = 2$

$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

$|x| = \left\{\begin{array}{ll} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0\end{array}\right.$

b) $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} |x| & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0\end{array}\right.$; $a = 0$.

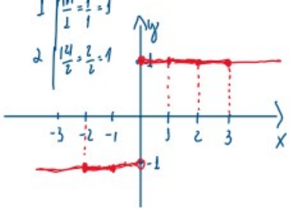
$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-}(-x) = -0 = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0\end{array}\right\}$ logo $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

c) $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0\end{array}\right.$; $a = 0$.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{|x|}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{-x}{+x}\right) = \lim_{x\to 0^-}(-1) = -1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{|x|}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$

x	f(x)
-2	$\frac{\lvert -2\rvert}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$
-1	$\frac{\lvert -1\rvert}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$
0	1
1	$\frac{\lvert 1\rvert}{1} = \frac{1}{1} = 1$
2	$\frac{\lvert 2\rvert}{2} = \frac{2}{2} = 1$



Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, logo $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe

Exercícios

1. Esboce o gráfico de $f(x)$, calcule $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim_{x\to a} f(x)$ (se existir) para cada um dos itens a seguir:

a) $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} |x-2|, & \text{se } x \neq 2 \\ 3, & \text{se } x = 2\end{array}\right.$; $a = 2$.

b) $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{x^2-16}{x-4}, & \text{se } x \neq 4 \\ 5, & \text{se } x = 4\end{array}\right.$; $a = 4$.

c) $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 2x+3, & \text{se } x < 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \\ 7-2x, & \text{se } x > 1\end{array}\right.$; $a = 1$.

d) $f(x) = 5 - |6x-3|$; $a = \frac{1}{2}$

e) $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} x^2, & \text{se } x \leq 2 \\ 8-2x, & \text{se } x > 2\end{array}\right.$; $a = 2$.

f) $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{x+10}{|x+10|}, & \text{se } x \neq -10 \\ 0, & \text{se } x = -10\end{array}\right.$; $a = -10$.

e) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 2 \\ 8 - 2x, & \text{se } x > 2 \end{cases}; \qquad a = 2.$

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+10}{|x+10|}, & \text{se } x \neq -10 \\ 0, & \text{se } x = -10 \end{cases}; \qquad a = -10.$

g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{|x^2-1|}, & \text{se } x \neq 1 \text{ e } x \neq -1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{cases}; \qquad a = 1.$

h) $f(x) = \begin{cases} 5 + x, & \text{se } x \leq 3 \\ 9 - x, & \text{se } x > 3 \end{cases}; \qquad a = 3.$

2. Dados: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{se } x \leq 1 \\ x + 1, & \text{se } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$
obtenha $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to 1} [f(x).g(x)]$, caso existam.