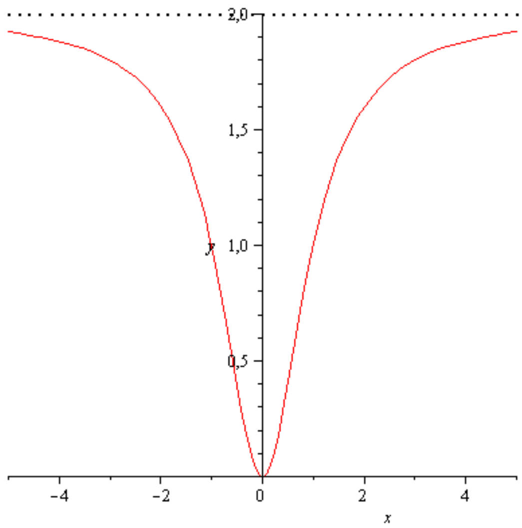
FUNÇÕES

Limites no Infinito

Considere a função $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ cujo um esboço do gráfico é mostrado a seguir:

x	-1000	-100	-10	-1	0	1	10	100	1000
$f(x)$	1,999998	1,9998	1,98020	1	0	1	1,98020	1,9998	1,999998



Percebemos, pelo gráfico e pela tabela, que à medida que x cresce ilimitadamente ($x \to \infty$) ou decresce ilimitadamente ($x \to -\infty$), os valores da função $f(x)$ se aproxima cada vez mais de 2.

Assim podemos escrever $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2$ no sentido de que podemos tornar a diferença entre 2 e $f(x)$ tão pequena quanto desejarmos, tomando x cada vez maior.

De igual modo, podemos escrever $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2$ indicando que podemos tornar a diferença entre 2 e $f(x)$ tão pequena quanto desejarmos, tomando x cada vez menor.

Formalmente, temos as definições:

Definição 1: Suponha que f esteja definida em um intervalo (a, ∞). Dizemos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe um número positivo N tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x > N$.

Definição 2: Suponha que f esteja definida em um intervalo $(-\infty, a)$. Dizemos que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe um número negativo N tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x < N$.

Teorema: Se r é um inteiro positivo qualquer, então

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^r}\right) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^r}\right) = 0$$

Os teoremas de limite dados anteriormente, bem como suas consequências, continuam válidos quando substituímos $x \to a$ por $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$.

Exemplo: Calcule os limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{5x-2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2x+1}{x}}{\frac{5x-2}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{x}}{5-\frac{2}{x}}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-2\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{2+0}{5-2.0} = \frac{2}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\frac{2x^2-x+3}{x^3}}{\frac{x^3-8x+5}{x^3}}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{8}{x^2}+\frac{5}{x^3}}\right) = \dfrac{0-0+0}{1-0+0} = 0$

Exercícios

1. Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x^2-7x}{7x^2+5}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2+3}{2x^2-1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{5x^2-8}\right)$

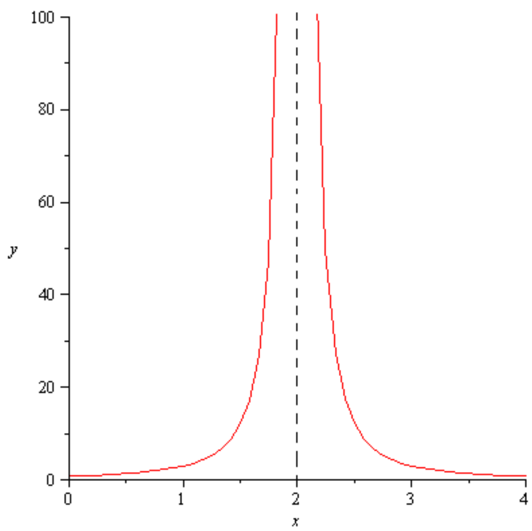
d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^4-7x^2+2}{2x^4+1}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5x^2-7x+3}{8x^2+5x+1}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^{100}+x^{99}}{x^{101}-x^{100}}\right)$

Limites Infinitos

Considere a função $f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$ cujo um esboço do gráfico é mostrado a seguir:



Observamos que podemos tornar $f(x)$ tão grande quanto desejarmos, tomando valores de x próximos de 2, sendo esta aproximação feita por valores menores ou maiores que 2. Escrevemos, $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{3}{(x-2)^2} = \infty$ e $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{3}{(x-2)^2} = \infty$, respectivamente.

Portanto quando x se aproxima de 2 pela direita ou pela esquerda, $f(x)$ cresce ilimitadamente e escrevemos $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3}{(x-2)^2} = \infty$. Formalmente, temos a definição:

Definição 1: Seja f definida num intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Dizemos que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

se para qualquer $N > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que $f(x) > N$ sempre que $0 < |x-a| < \delta$.

Analogamente, temos:

Definição 2: Seja f definida num intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Dizemos que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

se para qualquer $N < 0$ existir um $\delta > 0$ tal que $f(x) < N$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Observação: Definições semelhantes podem ser feitas ao trocarmos, $x \to a$ por $x \to a^+$ ou $x \to a^-$.

Teorema 1: Se r for um inteiro positivo qualquer, então

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^r} = \infty$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty \text{ se } r \text{ for ímpar} \\ \infty \text{ se } r \text{ for par} \end{cases}$

Exemplos: Do teorema anterior, temos:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty$

Teorema 2: Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$, em que c é uma constante não nula, então

(i) se $c > 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores positivos, $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$

(ii) se $c > 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores negativos, $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

(iii) se $c < 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores positivos, $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

(iv) se $c < 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores negativos, $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$

Teorema 3: Se $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$, em que c é uma constante não nula, então

(i) $\displaystyle\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \pm\infty$

(ii) se $c > 0$, então $\displaystyle\lim_{x\to a} [f(x).g(x)] = \pm\infty$

(iii) se $c < 0$, então $\displaystyle\lim_{x\to a} [f(x).g(x)] = \mp\infty$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

O teoremas também são válidos se $x \to a$ for substituído por $x \to a^+$ ou $x \to a^-$.

Exemplos: calcule:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty$ (item ii do teorema 2)

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right)$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right) = -\infty$(item ii do teorema 2)

$\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right) = \infty$(item i do teorema 2)

Como os limites laterais assumem valores diferentes, logo o limite $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right)$ não existe

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{|x|} = \infty$ (item i do teorema 2)

d) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-x+2}{x^2-2x-3} = \infty$ (item i do teorema 2)

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-4}{5x+3} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x^3-4}{x^3}}{\frac{5x+3}{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\frac{4}{x^3}}{\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}} = \infty$ (item i do teorema 2)

Exercícios

1. Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{8x}{(x-3)^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2}{9-x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x}{(x-4)}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{(x-2)}$

f) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{4+3x^2}}{5x}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}(5x^2-3x)$

h) $\lim\limits_{x\to -1^+}\left(\dfrac{3}{(x+1)}-\dfrac{5}{x^2-1}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-x^2}{3x+5}$

k) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x+1}$

l) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-15x^2}{13x}$