c) Usando a definição, demonstre que $\lim\limits_{x \to 2} (x^2) = 4$.

Exercícios

1) Nos exercícios abaixo, damos $f(x)$, a e L, bem como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Determine um δ para o ε dado tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

a) $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 3) = 5; \qquad \varepsilon = 0,0001$

b) $\lim\limits_{x \to -1} (1 - 2x) = 3; \qquad \varepsilon = 0,0005$

c) $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9; \qquad \varepsilon = 0,0005$

d) $\lim\limits_{x \to -3} \left(\dfrac{x^2 - 9}{x + 3} \right) = -6; \qquad \varepsilon = 0,0005$

e) $\lim\limits_{x \to 5} \left(\dfrac{x + 1}{2} \right) = 3; \qquad \varepsilon = 0,1$

2) Nos exercícios abaixo, demonstre os limites, isto é, para qualquer $\varepsilon > 0$, encontre um δ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

a) $\lim\limits_{x \to 4}(2x - 5) = 3$

b) $\lim\limits_{x \to -2}(7 - 2x) = 11$

c) $\lim\limits_{x \to 2}\left(\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}\right) = 4$

d) $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$

e) $\lim\limits_{x \to 3} 8 = 8$

Teorema (da unicidade): Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$ então $L_1 = L_2$.

Teoremas sobre limites de funções

Introduziremos alguns limites que nos auxiliarão no cálculo de limites e que são provados pela definição de limite, embora a prova será omitida.

Teorema 1: Se m e b forem constantes quaisquer, $\lim\limits_{x \to a}(mx + b) = ma + b$

Consequência 1: Se $m = 0$, então $\boxed{\lim\limits_{x \to a} b = b}$

0.x

0+b

b

Consequência 2: Se $m = 1$ e $b = 0$, então $\lim\limits_{x \to a} x = a$

Exemplos:

a) $\lim\limits_{x \to 2}(3x + 5) = 3.2+5 = 6+5 = 11$

b) $\lim\limits_{x \to 5} 7 = 7$

a) $\lim\limits_{x \to -6} x = -6$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Teorema 2: Se $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = L}$ e $\boxed{\lim\limits_{x \to a} g(x) = M}$, então $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$

$L \pm M$

Consequência: Se $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L_2$, ... , $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = L_n$ então

$$\lim_{x \to a}[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)] = L_1 \pm L_2 \pm \ldots \pm L_n$$

$\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)} \cdot \boxed{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

Teorema 3: Se $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = L}$ e $\boxed{\lim\limits_{x \to a} g(x) = M}$, então $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

$L \cdot M$

Consequência 1: Se $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L_2$, ... , $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = L_n$ então

$$\lim_{x \to a}[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)] = L_1 \cdot L_2 \cdot \ldots \cdot L_n$$

Consequência 2: Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e n for um inteiro positivo qualquer, então

Consequência 2: Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e n for um inteiro positivo qualquer, então

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = L^n$$

Exemplos:

a) $\lim_{x\to 3}[x(2x+1)] = \overset{T.3}{=} \lim_{x\to 3} x \cdot \lim_{x\to 3}(2x+1) \overset{T.1}{=} 3 \cdot (2.3+1) = 3.7 = 21$

b) $\lim_{x\to -2}(5x+7)^4 \overset{T.3}{=} \left[\lim_{x\to -2}(5x+7)\right]^4 \overset{T.1}{=} \left[5.(-2)+7\right]^4 = [-3]^4 = 81$

Teorema 4: Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M \neq 0$, então $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}$

Exemplo: $\lim_{x\to 4}\left(\frac{x}{-7x+1}\right) \overset{T.4}{=} \frac{\lim_{x\to 4} x}{\lim_{x\to 4}(-7x+1)} \overset{T.1}{=} \frac{4}{-7.4+1} = \frac{4}{-27} = -\frac{4}{27}$

Teorema 5: Se n for um inteiro positivo e $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ com a restrição de que se n for par, $L \geq 0$.

$\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$

Exemplo: $\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{\frac{x}{-7x+1}} \overset{T.5}{=} \sqrt[3]{\lim_{x\to 4}\frac{x}{-7x+1}} = \sqrt[3]{-\frac{4}{27}}$

Outros exemplos: Nos exemplos abaixo, ache cada limite e indique quais teoremas foram usados:

a) $\lim_{x\to 2}(x^2 - 7x + 8) \overset{T.2}{=} \lim_{x\to 2} x^2 - \lim_{x\to 2} 7x + \lim_{x\to 2} 8 \overset{T.3}{=} \left[\lim_{x\to 2} x\right]^2 - \lim_{x\to 2} 7x + \lim_{x\to 2} 8 \overset{T.1}{=}$

$x.x$

$2^2 - 7.2 + 8 = 4 - 14 + 8 = -2$

b) $\lim_{x\to 8}\left(\frac{x^2+\sqrt[3]{x}}{4-\frac{16}{x}}\right) \overset{T.4}{=} \frac{\lim_{x\to 8}(x^2+\sqrt[3]{x})}{\lim_{x\to 8}(4-16/x)} \overset{T.2}{=} \frac{\lim_{x\to 8} x^2 + \lim_{x\to 8}\sqrt[3]{x}}{\lim_{x\to 8} 4 - \lim_{x\to 8} 16/x} \overset{T.5}{=} \frac{\lim_{x\to 8} x^2 + \sqrt[3]{\lim_{x\to 8} x}}{\lim_{x\to 8} 4 - \frac{\lim_{x\to 8} 16}{\lim_{x\to 8} x}}$ T.4 $=$

$\overset{T.2}{\underset{T.1}{=}} \frac{8^2+\sqrt[3]{8}}{4-16/8} = \frac{64+2}{4-2} = \frac{66}{2} = 33$

c) $\lim_{x\to\pi}\left(\sqrt[3]{\frac{x-\pi}{x+\pi}}\right) \overset{T.5}{=} \sqrt[3]{\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{x+\pi}} =$

$\overset{T.4}{=} \sqrt[3]{\frac{\lim_{x\to\pi} x-\pi}{\lim_{x\to\pi} x+\pi}} \overset{T.1}{=} \sqrt[3]{\frac{\pi-\pi}{\pi+\pi}} = \sqrt[3]{\frac{0}{2\pi}} = \sqrt[3]{0} = 0$

d) $\lim_{x\to 7}\left(\frac{x^2-49}{x-7}\right) = \lim_{x\to 7}\frac{(x+7).\cancel{(x-7)}}{\cancel{(x-7)}} = \lim_{x\to 7}(x+7) \overset{T.1}{=} 7+7 = 14$

$x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x+7)(x-7)$

Exercícios

1) Nos Exercícios abaixo, encontre os limites, indicando os teoremas usados:

a) $\lim_{x\to 3}(x^2 - 3x + 5)$ b) $\lim_{x\to -2}(2x^3 - 6x^2 + 3x - 2)$ c) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x+3}{2x^2 - 6x + 5}\right)$

d) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}\right)$ e) $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{(x-2)}\right)$ f) $\lim_{x\to 0}(5x\sqrt{4 + 3x^2})$