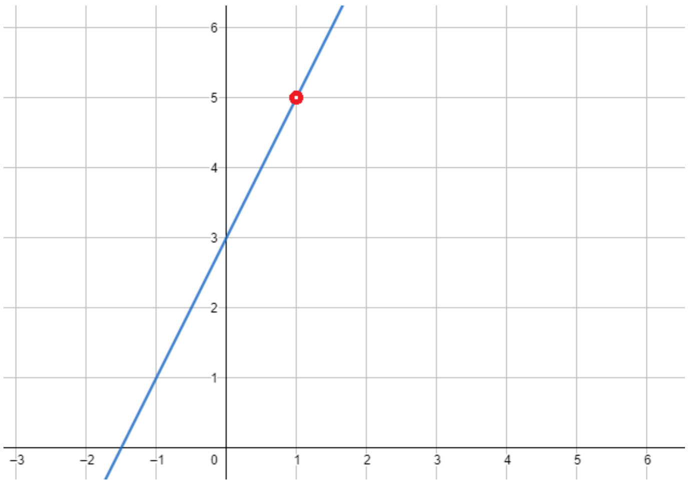
FUNÇÕES

LIMITE E CONTINUIDADE

Antes de definirmos limite, vejamos um exemplo. Considere a função

$$f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1}$$

Essa função está definida em $\mathbb{R} - \{1\}$. Se $x \neq 1$, a função pode ser escrita como $f(x) = 2x + 3$ e temos, então seu gráfico:



Estudaremos agora os valores de $f(x)$ quando x estiver próximo a 1 mas não igual a 1. Fazendo a variável x aproximar-se de 1 através de valores menores ou maiores que 1, podemos construir as tabelas a seguir:

x	$f(x)$
0,9	4,8
0,99	4,98
0,999	4,998
0,9999	4,9998
0,99999	4,99998

x	$f(x)$
1,1	5,2
1,01	5,02
1,001	5,002
1,0001	5,0002
1,00001	5,00002

Vemos, em ambas as tabelas que quando x se aproxima cada vez mais de 1, $f(x)$ se aproxima cada vez mais de 5. Ou seja, é possível fazer com que o valor de $f(x)$ se aproxime de 5 tanto quanto desejamos, bastando, para isso, tomar um valor de x suficientemente próximo de 1.

De fato, podemos escrever que

$$4,8 < f(x) < 5,2 \text{ sempre que } 0,9 < x < 1,1$$

$$4,98 < f(x) < 5,02 \text{ sempre que } 0,99 < x < 1,01$$

$$4,998 < f(x) < 5,002 \text{ sempre que } 0,999 < x < 1,001$$

$$4,9998 < f(x) < 5,0002 \text{ sempre que } 0,9999 < x < 1,0001$$

$$4,99998 < f(x) < 5,00002 \text{ sempre que } 0,99999 < x < 1,00001$$

Usualmente, utilizamos as letras gregas ε (épsilon) e δ (delta) para indicar pequenos números reais positivos. Assim

$$5-\varepsilon < f(x) < 5+\varepsilon \text{ sempre que } 1-\delta < x < 1+\delta,$$

ou usando notação modular,

$$-\varepsilon < f(x)-5 < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-5| < \varepsilon \text{ sempre que } -\delta < x-1 < \delta \Rightarrow |x-1| < \delta$$

A condição $0 < |x-1|$ é colocada pois não nos interessa o que ocorre quando $x = 1$.

É importante perceber que o tamanho do δ depende do tamanho de ε. Poderíamos continuar a dar qualquer valor pequeno a ε e encontrar um valor apropriado para δ tal que $|f(x)-5| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x-1| < \delta$. Dizemos, então, que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de 1 é igual a 5, ou em símbolos,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 5$$

Definição 9: Seja $f(x)$ uma função definida num intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio a, e seja L um número real. Então

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|f(x)-L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x-a| < \delta$.

A definição anterior afirma que os valores de função $f(x)$ tendem a um limite L quando x tende a um número a, mas não igual a a.

Teorema (da unicidade): Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_2$ então $L_1 = L_2$.

Teoremas sobre limites de funções

Introduziremos alguns limites que nos auxiliarão no cálculo de limites e que são provados pela definição de limite, embora a prova será omitida.

Teorema 1: Se m e b forem constantes quaisquer, $\lim\limits_{x\to a}(mx+b) = ma+b$

Consequência 1: Se $m = 0$, então $\lim\limits_{x\to a} b = b$

Consequência 2: Se $m = 1$ e $b = 0$, então $\lim\limits_{x\to a} x = a$

Exemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x+5) = 3\times 2+5 = 11$

b) $\lim\limits_{x\to 5} 7 = 7$

a) $\lim\limits_{x\to -6} x = -6$

Teorema 2: Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, então $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = L\pm M$

Consequência: Se $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = L_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = L_2$, ... , $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = L_n$ então

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)\pm f_2(x)\pm ...\pm f_n(x)] = L_1\pm L_2\pm ...\pm L_n$$

Teorema 3: Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, então $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

Consequência 1: Se $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L_2$, ... , $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = L_n$ então

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)] = L_1 \cdot L_2 \cdot \ldots \cdot L_n$$

Consequência 2: Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e n for um inteiro positivo qualquer, então

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = L^n$$

Exemplos:

a) $\lim\limits_{x \to 3} [x(2x + 1)] = \lim\limits_{x \to 3} x \times \lim\limits_{x \to 3} (2x + 1) = 3 \times (2 \times 3 + 1) = 21$

b) $\lim\limits_{x \to -2} (5x + 7)^4 = \left[\lim\limits_{x \to -2} (5x + 7)\right]^4 = [5 \times (-2) + 7]^4 = (-3)^4 = 81$

Teorema 4: Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M \neq 0$, então $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$

Exemplo: $\lim\limits_{x \to 4} \left(\dfrac{x}{-7x + 1}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x \to 4} (x)}{\lim\limits_{x \to 4} (-7x + 1)} = \dfrac{4}{-27}$

Teorema 5: Se n for um inteiro positivo e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, então $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ com a restrição de que se n for par, $L \geq 0$.

Exemplo: $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt[3]{\dfrac{x}{-7x + 1}} = \sqrt[3]{\dfrac{\lim\limits_{x \to 4} (x)}{\lim\limits_{x \to 4} (-7x + 1)}} = \sqrt[3]{\dfrac{4}{-27}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{-3}$

Outros exemplos: Nos exemplos abaixo, ache cada limite e indique quais teoremas foram usados:

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 7x + 8) = 2^2 - 7 \times 2 + 8 = -2$

b) $\lim\limits_{x \to 8} \left(\dfrac{x^2 + \sqrt[3]{x}}{4 - \frac{16}{x}}\right) = \left(\dfrac{8^2 + \sqrt[3]{8}}{4 - \frac{16}{8}}\right) = \dfrac{66}{2} = 33$

c) $\lim\limits_{x \to \pi} \left(\sqrt[3]{\dfrac{x - \pi}{x + \pi}}\right) = \sqrt[3]{\dfrac{\pi - \pi}{\pi + \pi}} = \dfrac{0}{2\pi} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 7} \left(\dfrac{x^2 - 49}{x - 7}\right) = \lim\limits_{x \to 7} \left(\dfrac{(x + 7)(x - 7)}{x - 7}\right) = \lim\limits_{x \to 7} (x + 7) = 7 + 7 = 14$

Exercícios

1) Nos Exercícios abaixo, encontre os limites, indicando os teoremas usados:

a) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 3x + 5)$

b) $\lim\limits_{x \to -2} (2x^3 - 6x^2 + 3x - 2)$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x + 3}{2x^2 - 6x + 5}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}\right)$

e) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{(x - 2)}\right)$

f) $\lim\limits_{x \to 0} (5x\sqrt{4 + 3x^2})$

Limites Laterais

Definição 1: Seja f uma função definida no intervalo (a, c). Então o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita será L, denotado por

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ tal que,} \\ |f(x) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < x - a < \delta \end{cases}$$

Então, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ significa que podemos fazer $|f(x) - L|$ tão pequeno quanto desejamos, tomando x suficientemente próximo de a porém **maior** que a.

Definição 2: Seja f uma função definida no intervalo (d, a). Então o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda será L, denotado por

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ tal que,} \\ |f(x) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } -\delta < x - a < 0 \end{cases}$$

Então, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ significa que podemos fazer $|f(x) - L|$ tão pequeno quanto desejamos, tomando x suficientemente próximo de a porém **menor** que a.

Teorema: $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe e será igual a L se e somente se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ existirem e ambos forem iguais a L.

Observação: se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ existirem e forem diferentes, então $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ não existirá.

Os teoremas de limite dados anteriormente, bem como suas consequências, continuam válidos quando substituímos $x \to a$ por $x \to a^+$ ou $x \to a^-$.

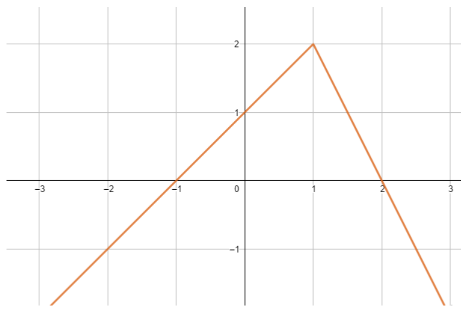
Exemplos: Em cada exemplo, esboce o gráfico da função, calcule os limites laterais da função quando $x \to a^+$ e quando $x \to a^-$ e determine o limite da função quando $x \to a$ (se existir).

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x < 1 \\ -2x + 4 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$; $\qquad a = 1.$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-2x + 4) = -2 + 4 = 2$$

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$, logo $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

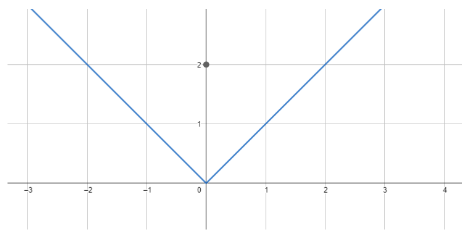


b) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$; $\qquad a = 0.$

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = -0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} (x) = 0$$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$, logo $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

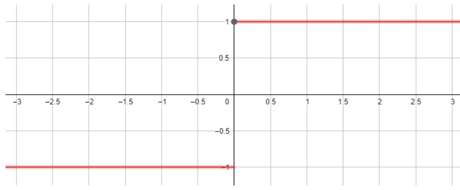


c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$; $\qquad a = 0.$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} dfxx = \lim_{x\to 0^+} (1) = 1$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neg \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, logo $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ não existe.



Exercícios

1. Esboce o gráfico de $f(x)$, calcule $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (se existir) para cada um dos itens a seguir:

a) $f(x) = \begin{cases} |x-2|, & \text{se } x \neq 2 \\ 3, & \text{se } x = 2 \end{cases}$; $\quad a = 2.$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x-4}, & \text{se } x \neq 4 \\ 5, & \text{se } x = 4 \end{cases}$; $\quad a = 4.$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{se } x < 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \\ 7-2x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$; $\quad a = 1.$

d) $f(x) = 5 + |6x-3|$; $\quad a = \dfrac{1}{2}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 2 \\ 8-2x, & \text{se } x > 2 \end{cases}$; $\quad a = 2.$

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+10}{|x+10|}, & \text{se } x \neq -10 \\ 0, & \text{se } x = -10 \end{cases}$; $\quad a = -10.$

g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{|x^2-1|}, & \text{se } x \neq 1 \text{ e } x \neq -1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$; $\quad a = 1.$

h) $f(x) = \begin{cases} 5+x, & \text{se } x \leq 3 \\ 9-x, & \text{se } x > 3 \end{cases}$; $\quad a = 3.$

2. Dados: $f(x) = \begin{cases} x^2+3, & \text{se } x \leq 1 \\ x+1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$
obtenha $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1} [f(x).g(x)]$, caso existam.