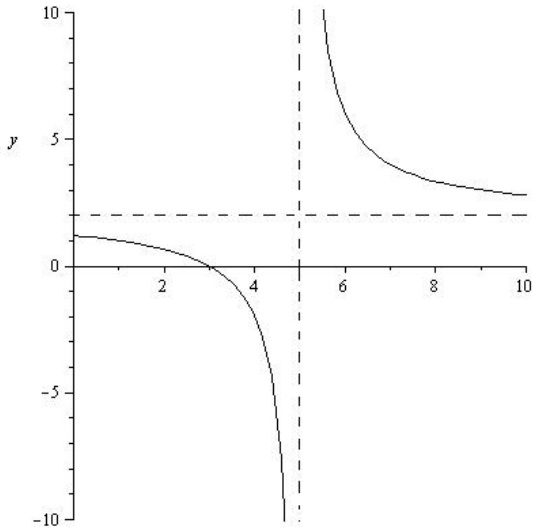
Assíntotas verticais e horizontais

Como exemplo, observemos o gráfico da função $f(x) = \dfrac{2x-6}{x-5}$



Vemos que o gráfico da função se aproxima do eixo vertical $x = 5$ a medida que a variável x se aproxima de 5, tanto pela esquerda quanto pela direita e que $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = -\infty$.

Tal reta é chamada de assíntota vertical. Temos de modo geral a seguinte definição:

Definição 1: Diz-se que a reta vertical $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico da função f se pelo menos uma das afirmações seguintes forem verdadeiras:

(i) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$

(ii) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

(iii) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$

(iv) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

De modo análogo, no exemplo, a linha horizontal $y = 2$ é chamada de assíntota horizontal do gráfico, pois $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

De forma geral, temos a definição:

Definição 2: Diz-se que a reta horizontal $y = b$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função f se pelo menos uma das afirmações seguintes forem verdadeiras:

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$

Exemplos: Encontre as assíntotas horizontais e verticais do gráfico de f, caso elas existam, e esboce o gráfico.

a) $f(x) = \dfrac{5x}{2x-1}$

Para achar uma assíntota horizontal, façamos

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{2x-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{2-\frac{1}{x}}\right) = \frac{5}{2}$$

Assim, $y = \dfrac{5}{2}$ é uma assíntota horizontal.

Também, temos que

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{5x}{2x-1} \right) = \frac{5}{2}$$

Dessa maneira, temos uma única assíntota horizontal.

Pesquisemos as assíntotas verticais:

Como $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \left(\frac{5x}{2x-1} \right) = \infty$, temos que $x = \dfrac{1}{2}$ é uma assíntota vertical.

Note que temos também que $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \left(\frac{5x}{2x-1} \right) = -\infty$

Esboço do gráfico:

Figura 1: Gráfico do Exemplo a

b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Para achar uma assíntota horizontal, façamos

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \right) = 1$$

Assim, $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

Como trabalhamos com valores positivos de x e, então $x = \sqrt{x^2}$

Consideremos agora

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)$$

Como trabalhamos com valores negativos de x, $x = -\sqrt{x^2}$ e então,

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \right) = -1$$

Logo, $y = -1$ é também uma assíntota horizontal

Como o domínio dessa função é o conjunto dos números reais, não existe assíntota vertical

Esboço do gráfico:

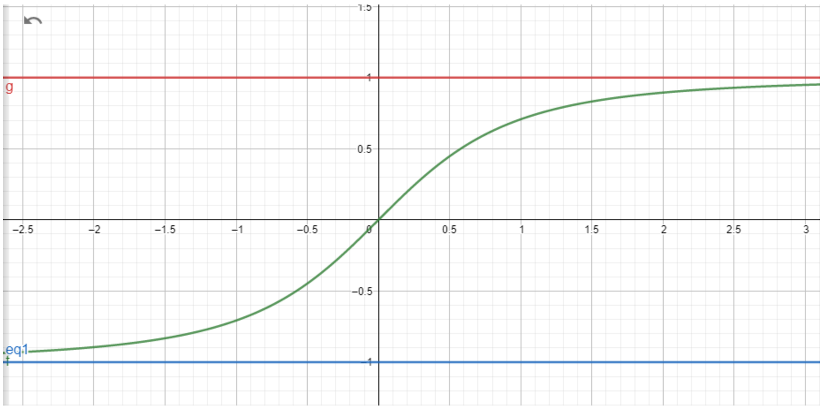


Figura 2: Gráfico do Exemplo b

Exercícios

1. Encontre as assíntotas horizontais e verticais (caso existam) do gráfico de cada função abaixo e trace o gráfico:

a) $f(x) = \dfrac{5x}{3x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{2-3x}{3+5x}$

c) $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{2x^2+1}}$

d) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2-4}}$

e) $f(x) = \dfrac{-3}{(x+2)^2}$

f) $f(x) = \dfrac{2x^2}{9-x^2}$

g) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{2x^2-3x}$

h) $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$

i) $F(x) = \dfrac{4x^2}{x^2-9}$