Solução

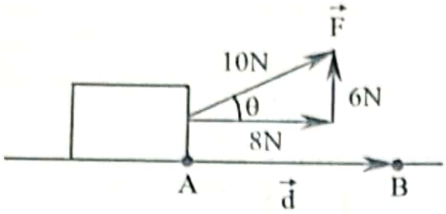

Figura 2.15

A Força $\vec{F}$ (Figura 2.15) é decomposta em $\vec{F} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$, onde $8 = |\vec{F}|\cos\theta$, $6 = |\vec{F}|\,\text{sen}\,\theta$ e $\vec{d} = 20\vec{i} + 0\vec{j}$.

O trabalho realizado pela força $\vec{F}$ pode ser calculado por

$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ (produto escalar)

$W = (8\vec{i} + 6\vec{j}) \cdot (20\vec{i} + 0\vec{j})$

$W = 160$ J

ou por

$W = |\vec{F}||\vec{d}|\cos\theta$

$W = (10N)(20m)(\cos 36{,}9°)$

$W = 160$ J

Problemas Propostos

1) Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, 4)$, calcular

a) $2\vec{u} \cdot (-\vec{v})$

b) $(\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} - 2\vec{u})$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

d) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})$

2) Sejam os vetores $\vec{u} = (2, a, -1)$, $\vec{v} = (3, 1, -2)$ e $\vec{w} = (2a - 1, -2, 4)$. Determinar a de modo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{w})$.

3) Dados os pontos A (4, 0, -1), B (2, -2, 1) e C (1, 3, 2) e os vetores $\vec{u} = (2, 1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, -2, 3)$, obter o vetor $\vec{x}$ tal que

a) $3\vec{x} + 2\vec{v} = \vec{x} + (\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u})\vec{v}$

b) $(\overrightarrow{BC} \cdot \vec{v})\vec{x} = (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v} - 3\vec{x}$.

4) Determinar o vetor $\vec{v}$, paralelo ao vetor $\vec{u} = (2, -1, 3)$, tal que $\vec{v} \cdot \vec{u} = -42$.

5) Determinar o vetor $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}| = 5$, $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Ox, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 6$ e $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

6) Determinar o vetor $\vec{v}$, ortogonal ao eixo Oy, $\vec{v} \cdot \vec{v}_1 = 8$ e $\vec{v} \cdot \vec{v}_2 = -3$, sendo $\vec{v}_1 = (3, 1, -2)$ e $\vec{v}_2 = (-1, 1, 1)$.

7) Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$ e $\vec{w} = (3, 1, 0)$, determinar o vetor $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \cdot \vec{u} = -16$, $\vec{x} \cdot \vec{v} = 0$ e $\vec{x} \cdot \vec{w} = 3$.

8) Sabendo que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$, calcular

a) $(\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot \vec{u}$

b) $(2\vec{v} - \vec{u}) \cdot (2\vec{v})$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - 4\vec{u})$

d) $(3\vec{u} + 4\vec{v}) \cdot (-2\vec{u} - 5\vec{v})$

Digitalizado com CamScanner

9) Calcular $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$, sabendo que $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$, $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ e $|\vec{w}|=5$.

10) Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo eqüilátero cujo lado mede 20 cm. Calcular $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$.

11) O quadrilátero ABCD (Figura 2.16) é um losango de lado 2. Calcular:

a) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

c) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

e) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$

f) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}$

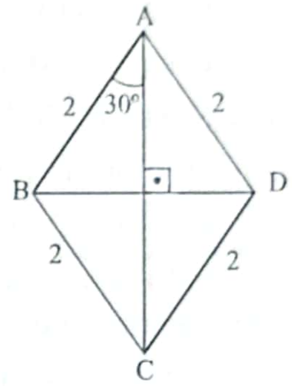

Figura 2.16

12) Calcular $|\vec{u}+\vec{v}|$, $|\vec{u}-\vec{v}|$ e $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$, sabendo que $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=3$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60º.

13) Sabendo que $|\vec{u}|=\sqrt{2}$, $|\vec{v}|=3$ e que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam ângulo de $\frac{3\pi}{4}$ rad, determinar

a) $|(2\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-2\vec{v})|$

b) $|\vec{u}-2\vec{v}|$

14) Verificar para os vetores $\vec{u}=(4,-1,2)$ e $\vec{v}=(-3,2,-2)$ as desigualdades

a) $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leq|\vec{u}|\,|\vec{v}|$ (*Desigualdade de Schwarz*)

b) $|\vec{u}+\vec{v}|\leq|\vec{u}|+|\vec{v}|$ (*Desigualdade Triangular*)

15) Qual o valor de α para que os vetores $\vec{a}=\alpha\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ e $\vec{b}=2\vec{i}+(1-2\alpha)\vec{j}+3\vec{k}$ sejam ortogonais?

16) Dados os vetores $\vec{a}=(2,1,\alpha)$, $\vec{b}=(\alpha+2,-5,2)$ e $\vec{c}=(2\alpha,8,\alpha)$, determinar o valor de α para que o vetor $\vec{a}+\vec{b}$ seja ortogonal ao vetor $\vec{c}-\vec{a}$.

17) Dados os pontos A(-1, 0, 5), B(2, -1, 4) e C(1, 1, 1), determinar x tal que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BP}$ sejam ortogonais, sendo P (x, 0, x - 3).

18) Provar que os pontos A(-1, 2, 3), B(-3, 6, 0) e C(-4, 7, 2) são vértices de um triângulo retângulo.

19) Dados os pontos A(m, 1, 0), B(m - 1, 2m, 2) e C(1, 3, -1), determinar m de modo que o triângulo ABC seja retângulo em A. Calcular a área do triângulo.

20) Encontrar os vetores unitários paralelos ao plano yOz e que são ortogonais ao vetor $\vec{v}=(4,1\ -2)$.

21) Determinar o vetor $\vec{u}$ tal que $|\vec{u}|=2$, o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}=(1,-1,0)$ é 45º e $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{w}=(1,1,0)$.

Digitalizado com CamScanner

22) Seja o vetor $\vec{v} = (2, -1, 1)$. Obter

a) um vetor ortogonal a $\vec{v}$;

b) um vetor unitário ortogonal a $\vec{v}$;

c) um vetor de módulo 4 ortogonal a $\vec{v}$.

23) Sendo $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = 6$ e $|\vec{b}| = 8$, calcular $|\vec{a} + \vec{b}|$ e $|\vec{a} - \vec{b}|$.

24) Demonstrar que sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores dois a dois ortogonais, então

a) $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$.

b) $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2$.

25) Determinar o ângulo entre os vetores

a) $\vec{u} = (2, -1, -1)$ e $\vec{v} = (-1, -1, 2)$.

b) $\vec{u} = (1, -2, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 0)$.

26) Seja o triângulo de vértices A(3, 4, 4), B(2, -3, 4) e C(6, 0, 4). Determinar o ângulo interno ao vértice B. Qual o ângulo externo ao vértice B?

27) Calcular os ângulos internos do triângulo de vértices A(2, 1, 3), B(1, 0, -1) e C(-1, 2, 1).

28) Calcular o valor de m de modo que seja 120° o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, -2, 1)$ e $\vec{v} = (-2, 1, m + 1)$.

29) Calcular n para que seja de 30° o ângulo entre os vetores $\vec{v} = (-3, 1, n)$ e $\vec{k}$.

30) Se $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 2$ e 120° o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, determinar o ângulo entre $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ e construir uma figura correspondente a estes dados.

31) Seja o cubo de aresta a representado na Figura 2.17. Determinar:

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$

b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$

c) $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OB}$

d) $|\overrightarrow{OB}|$ e $|\overrightarrow{OG}|$

e) $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{CG}$

f) $(\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AB})\overrightarrow{OG}$

g) o ângulo agudo entre a diagonal do cubo e uma aresta;

h) o ângulo agudo formado por duas diagonais do cubo.

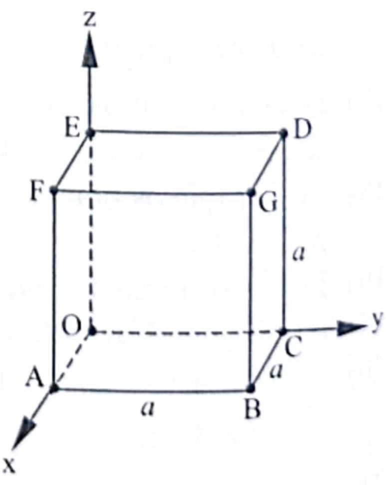

Figura 2.17

32) Calcular os ângulos diretores do vetor $\vec{v} = (6, -2, 3)$.

33) Os ângulos diretores de um vetor $\vec{a}$ são 45°, 60° e 120° e $|\vec{a}| = 2$. Determinar $\vec{a}$.

34) Os ângulos diretores de um vetor podem ser de 45°, 60° e 90°? Justificar.

35) Mostrar que existe um vetor cujos ângulos diretores são 30°, 90° e 60°, respectivamente, e determinar aquele que tem módulo 10.

Digitalizado com CamScanner

36) Determinar um vetor unitário ortogonal ao eixo Oz e que forme 60º com o vetor $\vec{i}$.

37) Determinar o vetor $\vec{a}$ de módulo 5, sabendo que é ortogonal ao eixo Oy e ao vetor $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{k}$, e forma ângulo obtuso com o vetor $\vec{i}$.

38) Determinar o vetor $\vec{v}$ nos casos

a) $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Oz, $|\vec{v}| = 8$, forma ângulo de 30º com o vetor $\vec{i}$ e ângulo obtuso com $\vec{j}$;

b) $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Ox, $|\vec{v}| = 2$, forma ângulo de 60º com o vetor $\vec{j}$ e ângulo agudo com $\vec{k}$.

39) O vetor $\vec{v}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u} = (1, 2, 0)$ e $\vec{w} = (2, 0, 1)$ e forma ângulo agudo com o vetor $\vec{j}$. Determinar $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}| = \sqrt{21}$.

40) Dados os vetores $\vec{u} = (3, 0, 1)$ e $\vec{v} = (-2, 1, 2)$, determinar $proj_{\vec{v}}\vec{u}$ e $proj_{\vec{u}}\vec{v}$.

41) Determinar os vetores projeção de $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ sobre os eixos cartesianos x, y e z.

42) Para cada um dos pares de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, encontrar a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e decompor $\vec{v}$ como soma de $\vec{v}_1$ com $\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 \parallel \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.

a) $\vec{u} = (1, 2, -2)$ e $\vec{v} = (3, -2, 1)$

b) $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (3, 1, -1)$

c) $\vec{u} = (2, 0, 0)$ e $\vec{v} = (3, 5, 4)$

d) $\vec{u} = (3, 1, -3)$ e $\vec{v} = (2, -3, 1)$

43) Sejam A(2, 1, 3), B(m, 3, 5) e C(0, 4, 1) vértices de um triângulo (Figura 2.18).

a) Para que valor de m o triângulo ABC é retângulo em A?

b) Calcular a medida da projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC.

c) Determinar o ponto H, pé da altura relativa ao vértice A.

d) Mostrar que $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$.

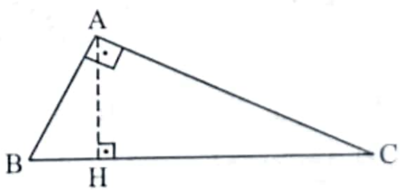

Figura 2.18

44) Determinar o valor de k para que os vetores $\vec{u} = (-2, 3)$ e $\vec{v} = (k, -4)$ sejam

a) paralelos; b) ortogonais.

45) Obter os dois vetores unitários ortogonais a cada um dos vetores

a) $4\vec{i} + 3\vec{j}$ b) $(-2, 3)$ c) $(-1, -1)$

Digitalizado com CamScanner

46) Determinar um par de vetores unitários e ortogonais entre si, em que um deles seja paralelo a $\vec{v} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$.

47) Determinar, aproximadamente, o ângulo entre os pares de vetores

a) $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (4, -2)$

b) $\vec{u} = (1, -1)$ e $\vec{v} = (-4, -2)$

c) $\vec{u} = (1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1)$

48) Dados os vetores $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$, determinar o módulo e o ângulo que os seguintes vetores formam com o vetor $\vec{i}$:

a) $\vec{u}$ c) $\vec{u} + \vec{v}$ e) $\vec{v} - \vec{u}$

b) $\vec{v}$ d) $\vec{u} - \vec{v}$

49) Determinar o valor de a para que seja 45° o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (1, a)$.

50) Para cada um dos pares de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, encontrar o vetor projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e decompor $\vec{v}$ como soma de $\vec{v}_1$ com $\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 \,//\, \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.

a) $\vec{u} = (1, 0)$ e $\vec{v} = (4, 3)$ c) $\vec{u} = (4, 3)$ e $\vec{v} = (1, 2)$

b) $\vec{u} = (1, 1)$ e $\vec{v} = (2, 5)$

Respostas de Problemas Propostos

1) a) -2 b) 21 c) -4 d) 4

2) $a = \frac{5}{8}$

3) a) (3, 6, -9) b) $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1)$

4) (-6, 3, -9)

5) (0, 3, 4) ou (0, 3, -4)

6) (2, 0, -1)

7) $\vec{x} = (2, -3, 4)$

8) a) 7 b) 38 c) –4 d) -181

9) -19

10) 200 e -200

11) a) 0 b) 2 c) –2 d) 2 e) 4 f) -4

12) $\sqrt{37}$, $\sqrt{13}$ e 7

13) a) 37 b) $\sqrt{50}$

15) -5

Digitalizado com CamScanner

16) 3 ou -6

17) $x = \frac{25}{2}$

18) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

19) $m = 1$ e $\frac{\sqrt{30}}{2}$

20) $(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ ou $(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$

21) $(1, -1, \sqrt{2})$ ou $(1, -1, -\sqrt{2})$

22) a) Dentre os infinitos possíveis: (1, 1, -1)

b) Um deles: $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

c) Um deles: $(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}})$

23) 10 e 10

25) a) 120º b) 150º

26) 45º e 135º

27) $\hat{A} \cong 50°57'$, $\hat{B} \cong 57°1'$, $\hat{C} \cong 72°2'$

28) 0 ou -18

29) $\sqrt{30}$

30) $\arccos \frac{3}{\sqrt{21}} \cong 49°6'$

31) a) 0 c) 0 e) a^2 g) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \cong 54°44'$

b) 0 d) $a\sqrt{2}$ e $a\sqrt{3}$ f) (a^3, a^3, a^3) h) $\arccos (\frac{1}{3}) \cong 70°31'$

32) $\alpha = \arccos (\frac{6}{7}) \cong 31°$ $\beta = \arccos (-\frac{2}{7}) \cong 107°$

$\gamma = \arccos (\frac{3}{7}) \cong 65°$

33) $\vec{a} = (\sqrt{2}, 1, -1)$

34) Não, $\cos^2 45° + \cos^2 60° + \cos^2 90° \neq 1$

35) $(5\sqrt{3}, 0, 5)$

36) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ou $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$

Digitalizado com CamScanner

37) $\vec{a} = (-2\sqrt{5},\ 0,\ -\sqrt{5})$

38) a) $(4\sqrt{3}, -4, 0)$ b) $(0, 1, \sqrt{3})$

39) $(-2, 1, 4)$

40) $(\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{8}{9})$ e $(-\frac{6}{5}, 0, -\frac{2}{5})$

41) $4\vec{i}$, $-3\vec{j}$, $2\vec{k}$

42) a) $\vec{v}_1 = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $\vec{v}_2 = (\frac{10}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$

b) $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ e $\vec{v}_2 = (2, 0, -2)$

c) $\vec{v}_1 = (3, 0, 0)$ e $\vec{v}_2 = (0, 5, 4)$

d) $\vec{v}_1 = (0, 0, 0)$ ($\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais) e $\vec{v}_2 = \vec{v}$

43) a) $m = 3$ b) $\frac{9}{26}\sqrt{26}$ c) $H(\frac{51}{26}, \frac{87}{26}, \frac{94}{26})$

44) a) $\frac{8}{3}$ b) -6

45) a) $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ e $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ b) $(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$ e $(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}})$

c) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

46) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ e $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ ou $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ e $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$

47) a) arc cos $(\frac{3}{5}) \cong 53^\circ$ b) arc cos $(-\frac{1}{\sqrt{10}}) \cong 108^\circ$ c) 90°

48) a) $\sqrt{2}$, 45° d) $\sqrt{5}$, arc cos $(-\frac{1}{\sqrt{5}}) \cong 117^\circ$

b) $\sqrt{5}$, arc cos $(\frac{2}{\sqrt{5}}) \cong 26^\circ$ e) $\sqrt{5}$, arc cos $(\frac{1}{\sqrt{5}}) \cong 63^\circ$

c) 3, 0°

49) 3 ou $-\frac{1}{3}$

50) a) $\vec{v}_1 = (4, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 3)$ c) $\vec{v}_1 = (\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$, $\vec{v}_2 = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

b) $\vec{v}_1 = (\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$, $\vec{v}_2 = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

Digitalizado com CamScanner