Determinante

Corolário 5.2: Existe uma função determinante em $M(n \times n)$

p/ $n=1$ $\quad A=(a)$ $\quad \det(A)=a$

p/ $n=2$ $\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad \boxed{\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}}$

p/ $n=3$ $\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $\quad \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$

$$\det(A)=a_{21}a_{32}a_{13}+a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}$$

$n=4$?

Outro método:

$n=1$ $\quad A=(a) \Rightarrow \det(A)=a$

$n>1$

$$\det(A)=(-1)^{j+1}\cdot a_{1j}\cdot\det(A(1|j))+\dots+(-1)^{j+n}a_{nj}\cdot\det(A(n|j))$$

p/ $n=2$ $\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$

P/ $n=2$ $\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \cdot \det(A(1|1)) + (-1)^{2+1} \cdot a_{12} \cdot \det(A(1|2))$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} a_{21}$$

P/ $n=3$ $\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\det(A) = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det(A(1|1)) + (-1)^{2+1} a_{12} \det(A(1|2)) + (-1)^{3+1} a_{13} \det(A(1|3))$$

$$= a_{11} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12}(a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + a_{13}(a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31})$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

Exemplo: $\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det(A(1|1)) + (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \det(A(1|2)) + (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \det(A(1|3)) + (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \det(A(1|4))$$

$$= \det(A(1|1)) + 0 + \det(A(1|3)) - \det(A(1|4))$$

$$= \det(A(1|1)) + 0 + \det(A(1|3)) - \det(A(1|4))$$

$$= 9 + 0 + (-3) - 2 = 9 - 3 - 2 = 4$$

$$\det(A(1,1)) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 + \cancel{1} + 6 - 0 - \cancel{1} + 3 = 9$$

$$\det(A(1|3)) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \cancel{1} - 3 - \cancel{1} = -3$$

$$\det(A(1|4)) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 - 1 + 1 = 2$$

Teorema: Sejam A e B matrizes em $M(n \times n)$ então:

$$\det(AB) = \det(A) . \det(B)$$

Teorema: Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

Sistema de equações lineares

Um sistema de equações lineares com m equações e n incógni-
tas é um conjunto de equações do tipo

Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Uma solução do sistema é uma n-upla de números $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ que satisfaça simultaneamente as m equações

Dois sistemas são equivalentes se, e somente se, toda solução de qualquer um dos dois sistemas também é solução do outro.

Podemos escrever o sistema na forma matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{m\times n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{m\times 1}$$

$$A \quad \cdot \quad X = B$$

Uma outra matriz que podemos associar ao sistema é a matriz ampliada do sistema.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

<u>Exemplo</u>: Para o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 1x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

temos a forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

Para a matriz ampliada, temos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right)$$

A partir das operações elementares podemos produzir matrizes equivalentes e dois sistemas que possuam matrizes

A partir das operações elementares podemos produzir matrizes equivalentes e dois sistemas que possuem matrizes ampliadas equivalentes, são equivalentes, ou seja, possuem o mesmo conjunto solução.

Dessa forma, podemos escalonar a matriz ampliada anterior da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow$$