Produto Vetorial

<u>Definição</u>: Sejam $V=(v_1, v_2, v_3)$ e $W=(w_1, w_2, w_3)$ vetores no espaço. O produto vetorial entre V e W é dado por

$$\boxed{V \times W = \left(\det\begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}, -\det\begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \right)}$$

$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

$V=(1,2,-2)$ $\quad$ $W=(3,0,1)$

<u>Exemplo</u>: Sejam $V = 1\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ e $W = 3\vec{i} + \vec{k}$. Vamos determinar o produto vetorial $V \times W$.

$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$1-(-6)$

$$V \times W = \left(\det\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, -\det\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= (2, -7, -6)$$

$$V \times W = (2, -7, -6) = 2\vec{i} - 7\vec{j} - 6\vec{k}$$

<u>Dispositivo prático</u>

$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{matrix}\right]$$

$$\begin{bmatrix} W \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$V \times W = (2, -7, -6)$$

Exemplo 2: Para os mesmos vetores V e W, do exemplo anterior, calcule $W \times V$

$$\begin{bmatrix} W \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$-2 \quad 7 \quad 6$$

$$W \times V = (-2, 7, 6)$$

$$\therefore \; V \times W = -(W \times V)$$

Propriedades

1ª) $V \times W = -(W \times V)$ Não é comutativo.

$V \times W$ e $W \times V$ são opostos

2ª) $V \times W = \vec{0}$ se, e somente se, $\underbrace{V = \alpha W \text{ ou } W = \alpha V}_{V // W}$

Consequências:

$$V \times V = \vec{0}$$

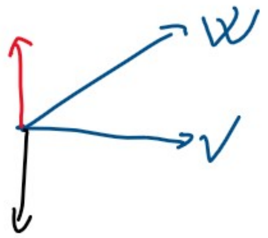
$$V \times \vec{0} = \vec{0}$$

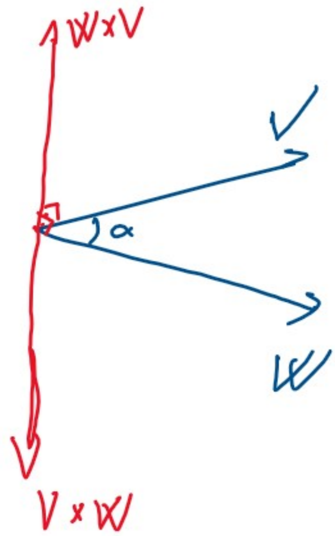
$$V \times \vec{0} = \vec{0}$$

Características do vetor $V \times W$

1ª) O vetor $V \times W$ é simultaneamente ortogonal a V e W, ou seja, $(V \times W) \cdot V = 0$ e $(V \times W) \cdot W = 0$.

Como $W \times V$ tem a direção de $V \times W$ (sentidos opostos), $W \times V$ é também, ortogonal a V e W.





Exemplo: Dado os vetores $V = (3, 1, 2)$ e $W = (-2, 2, 5)$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

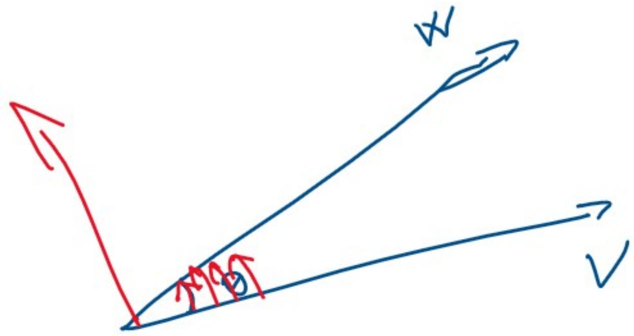
$$V \times W = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \right) = (1, -19, 8)$$

$$(V \times W) \cdot V = (1, -19, 8) \cdot (3, 1, 2) = 3 - 19 + 16 = 0$$

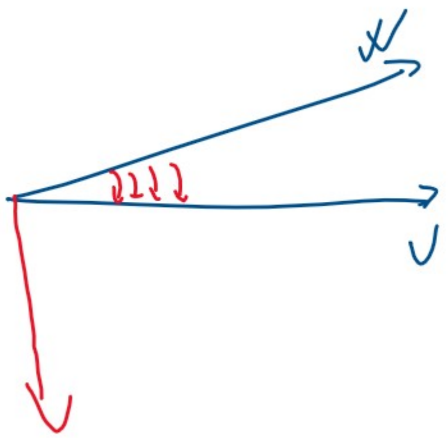
$$(V \times W) \cdot W = (1, -19, 8) \cdot (-2, 2, 5) = -2 - 38 + 40 = 0$$

2ª) O sentido de $V \times W$ poderá ser determinado utilizando-se a "regra da mão direita", sendo θ o angulo entre V e W.

$\underline{V} \times \underline{W}$



$W \times V$



3º) O comprimento de $V \times W$ é dado por

$$\boxed{\|V \times W\| = \|V\| . \|W\| . \operatorname{sen}(\theta)}$$

$|V \times W| = |V| . |W| . \operatorname{sen} \theta$

em que θ é o ângulo entre V e W.

1ª AVALIAÇÃO : 05/05 às 13h