21. Matrizes

1. Construa as seguintes matrizes:

   a) $A = (a_{ij})$ de tamanho 3×4 tal que $a_{ij} = i + j$.

   Resolução: A é uma matriz de 3 linhas e 4 colunas. Então seguindo a regra $a_{ij} = i + j$ temos que:

   $$a_{11} = 1+1 = 2 \quad a_{12} = 1+2 = 3 \quad a_{13} = 1+3 = 4 \quad a_{14} = 1+4 = 5$$

   $$a_{21} = 1+2 = 3 \quad a_{22} = 2+2 = 4 \quad a_{23} = 2+3 = 5 \quad a_{24} = 2+4 = 6$$

   $$a_{31} = 3+1 = 4 \quad a_{32} = 3+2 = 5 \quad a_{33} = 3+3 = 6 \quad a_{34} = 3+4 = 7$$

   Então:

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

   b) $B = (b_{ij})$ de tamanho 3×3 tal que $b_{ij} = ij$.

   Resolução: B é uma matriz de 3 linhas e 3 colunas. Então seguindo a regra $b_{ij} = i + j$ temos que:

   $$b_{11} = 1 \cdot 1 = 1 \quad b_{12} = 1 \cdot 2 = 2 \quad b_{13} = 1 \cdot 3 = 3$$

   $$b_{21} = 1 \cdot 2 = 2 \quad b_{22} = 2 \cdot 2 = 4 \quad b_{23} = 2 \cdot 3 = 6$$

   $$b_{31} = 3 \cdot 1 = 3 \quad b_{32} = 3 \cdot 2 = 6 \quad b_{33} = 3 \cdot 3 = 9$$

   Então:

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

   c) $C = (c_{ij})$ de tamanho 4×3 tal que $c_{ij} = 2i - \frac{1}{2}j$.

Resolução: C é uma matriz de 4 linhas e 3 colunas. Então construimos C seguindo a regra $c_{ij} = 2i - \frac{1}{2}j$ temos que:

$$c_{11} = 2 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 2 \quad c_{12} = \frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \quad c_{13} = 2 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{1}{2}$$

$$c_{21} = 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{7}{2} \quad c_{22} = 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 \quad c_{23} = 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{5}{2}$$

$$c_{31} = 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{11}{2} \quad c_{32} = 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 5 \quad c_{33} = 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2}$$

$$c_{41} = 2 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{15}{2} \quad c_{42} = 2 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 7 \quad c_{43} = 2 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{13}{2}$$

Então:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{11}{2} & 5 & \frac{9}{2} \\ \frac{15}{2} & 7 & \frac{13}{2} \end{pmatrix}$$

2. Considere as seguintes matrizes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A_7 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_9 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Determine para quais valores de $i,\ j$ podemos fazer os produtos A_iA_j e faça a conta para cada caso.
- Ache a transposta de cada uma das matrizes acima.
- Calcule

$$((2A_1)A_4)^t + 3A_7$$

Resolução:

$$A_1 \in \mathbb{M}(4 \times 4), \quad A_2 \in \mathbb{M}(3 \times 3), \quad A_3 \in \mathbb{M}(2 \times 2)$$

$$A_4 \in \mathbb{M}(4 \times 1), \quad A_5 \in \mathbb{M}(2 \times 1), \quad A_6 \in \mathbb{M}(3 \times 1)$$

$$A_7 \in \mathbb{M}(1 \times 4), \quad A_8 \in \mathbb{M}(1 \times 3), \quad A_9 \in \mathbb{M}(1 \times 2)$$

Então os seguintes produtos possiveis são:

$$A_1 \cdot A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 17 \\ -22 \end{pmatrix}$$

$$A_2 \cdot A_6 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 \cdot A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$A_4 \cdot A_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ -6 & -2 & 4 & -2 \\ 15 & 5 & -10 & 5 \\ -12 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A_4 \cdot A_8 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & -0 & 2 \\ 10 & 0 & -5 \\ -8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_4 \cdot A_9 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \\ -10 & 5 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A_5 \cdot A_7 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_5 \cdot A_8 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_5 \cdot A_9 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_6 \cdot A_7 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 & 3 \\ -12 & -4 & 8 & -4 \\ 9 & 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_6 \cdot A_8 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -8 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A_6 \cdot A_9 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 8 & -4 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_7 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A_7 \cdot A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \end{pmatrix}$$

$$A_8 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
A_8 \cdot A_6 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \\
A_9 \cdot A_3 &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -9 \end{pmatrix} \\
A_9 \cdot A_5 &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -5
\end{aligned}
$$

$$
A_1^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
A_3^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_4^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}
$$

$$
A_5^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_6^t = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_7^t = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
A_8^t = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A_9^t = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
((2A_1) \cdot A_4)^t + 3A_7 &= \left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \right)^t + 3 \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 34 \\ -44 \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} 12 & 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 8 & 12 & 34 & -44 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 15 & 28 & -41 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3. Sejam $A,\ B$ duas matrizes A de tamanho $m \times n$ e B de tamanho $n \times p$. Escreva

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_p \end{pmatrix}$$

onde cada B_j é a $j-$ésima coluna da matriz B. Mostrar que a $i-$ésima coluna da matriz AB é dada por AB_i, isto é

$$AB = \begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 & \cdots & AB_p \end{pmatrix}$$

Exemplifique para o caso

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolução: Seja A uma matriz de tamanho $m \times n$ e B de tamanho $n \times p$ denote por B_i a coluna i de B observamos que $(A \cdot B_i)$ é uma matriz coluna. A entrada $j-$ésima da coluna é

$$(A \cdot B_i)_j = \sum_{k=1}^{h} A_{jk} \, B_{ki} = (AB)_{ij}$$

Portanto $A \cdot B_i$ coincide com $i-$ésima coluna da matriz AB.

Se

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad B_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observamos que

$$A \cdot B \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 3 \\ -1 & -7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Se denotamos por C_i a $i-$ésima coluna da matriz $A \cdot B$ Então

$$C_1 = A \cdot B_1 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = A \cdot B_2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = A \cdot B_3 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = A \cdot B_4 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

4. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} d & f \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} g \end{pmatrix}$$

- Mostre que a matriz de tamanho 1×1 obtida ao fazer

  $$X^t AX + BX + G$$

  tem como única entrada

  $$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + fy + g$$

- Exemplifique para o caso em que

  $$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$$

  e obtenha a entrada correspondente a $X^t AX + BX + G$.

- No item anterior substitua X por

  $$Y = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+1 \\ v+2 \end{pmatrix}$$

e mostre que ao fazer $Y^TAY + BY + G$ a entrada que obtemos é

$$4u^2 + 9v^2 - 36.$$

Resolução:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + g \\
= \quad & \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax & b/2y \\ b/2x & cy \end{pmatrix} + dx + fy + g \\
= \quad & ax^2 + \frac{b}{2}xy + \frac{b}{2}xy + cy^2 + dx + fy + g \\
= \quad & ax^2 + bxy + cy^2 + dx + fy + g
\end{aligned}$$

Se

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & \frac{-80}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 4 \\
= \quad & \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5x & -2y \\ -2x & +8y \end{pmatrix} + \frac{20x - 80y}{\sqrt{5}} + 4 \\
= \quad & 5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}}y + 4
\end{aligned}$$

Se

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1x & +2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & + & 1 \\ v & + & 2 \end{pmatrix}$$

Então podemos escrever

$$\begin{aligned}
& y^tAy + By + 6 \\
= \quad & \frac{1}{5}(u+1,\ v+2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+1 \\ v+2 \end{pmatrix} \\
+ \quad & \frac{1}{5}(20, -80) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & + & 1 \\ v & + & 2 \end{pmatrix} + 4 \\
= \quad & \frac{1}{5}(u+1,\ v+2) \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & + & 1 \\ v & + & 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+1 \\ v+2 \end{pmatrix} \\
+ \quad & \frac{1}{5}(-40, -180) \begin{pmatrix} u & + & 1 \\ v & + & 2 \end{pmatrix} + 4 \\
= \quad & \frac{1}{5}(u+1,\ v+2) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & + & 1 \\ v & + & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}(-8, -36) \begin{pmatrix} u & + & 1 \\ v & + & 2 \end{pmatrix} + 4 \\
= \quad & 4(u+1)^2 + 9(v+2)^2 = 8(u+1) = -36(v+2) + 4 \\
= \quad & 4u^2 + 8u + 4 + 9v^2 + 36v + 36 - 8u - 8 - 36v - 64 + 4 \\
= \quad & 4u^2 + 9v^2 - 36
\end{aligned}$$

5. Sejam $A,\ B$ duas matrizes quadradas de tamanho $n \times n$.
   - Mostre que

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

- Observe que para ter $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ temos que garantir que $AB = BA$. É verdade que $AB = BA$ para qualquer matriz quadrada? Veja o que acontece no caso

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolução:
Observamos que $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$. É falso que $AB = BA$ se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

então

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No entanto

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Seja A uma matriz de tamanho $m \times n$ e X a matriz

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n. \end{pmatrix}$$

Mostrar que

$$AX = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n$$

onde A_j é a $j-$ésima coluna da matriz A. Para entender as contas considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Resolução:

Seja A uma matriz de tamanho $m \times n$ e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n. \end{pmatrix}$ como X é de tamannho $(n \times 1)$ temos que AX é de tamanho $(m \times 1)$. Assim a a $j-$ésima linha de AX é

$$\sum_{k=1}^{h} A_{jk}\, X_k = \sum_{k=1}^{h} X_k\, A_{jk} = \sum_{k=1}^{h} X_k = [A]_k^j$$

onde A^j é a $j-$ésima coluna de A. Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} x & + & y & + & z \\ -x & + & 2y & + & 2z \end{pmatrix}$$

$$xA_1 + yA_2 + zA_3 = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2z \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & + & y & + & z \\ -x & + & 2y & + & 2z \end{pmatrix}$$

7. Mostre que as matrizes da forma $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix}$ satisfazem a equação $X^2 - 2X = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$

Resolução:

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix}$ então:

$$A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{y} \\ 2y & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & \frac{-2}{y} \\ -2y & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.
   - Se A é uma matriz de tamanho 2×2 tal que $A^2 = I$ então $A = I$ (aqui I =identidade)
     Resolução: (FALSO) De fato, considere
     $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   - Se A é uma matriz de tamanho $n \times n$ tais que $A^2 = I$, então $A = I$ ou $A = -I$
     Resolução: (FALSO) De fato, considere
     $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A \neq I,\ A \neq -I,\ \text{e } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   - Se A e B são duas matrizes de tamanho $n \times n$, então $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
     Resolução: (FALSO) Considere
     $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (A+B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
     Então $(A+B)^2 = A+B$, $A^2 = A$, $B^2 = 0$ e $AB = 0$. Portanto $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
   - Se A e B são duas matrizes que comutam com a matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ então $AB = BA$.
     Resolução: (VERDADEIRO) Primeiramente observamos que se
     $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
     tal que $AM = MA$ então
     $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow a = d\ c = -b.$$
     Portanto A e B devem ser da forma
     $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} t & s \\ -s & t \end{pmatrix}.$$

Fazemos

$$AB = \begin{pmatrix} at - sb & as + tb \\ -bt - sa & at - bs \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} at - bs & bt + sa \\ -sa - tb & -sb + ta \end{pmatrix}.$$

Portanto $AB = BA$.

- Se A é uma matriz quadrada tal que $A^3 = A$ então $A = I$ ou $A = 0$.
  Resolução: (FALSO) Seja $A = -I$ então $A^3 = -I = A$.