3

Vetores no Plano e no Espaço

Muitas grandezas físicas, como velocidade, força, deslocamento e impulso, para serem completamente identificadas, precisam, além da magnitude, da direção e do sentido. Estas grandezas são chamadas **grandezas vetoriais** ou simplesmente **vetores**.

Geometricamente, vetores são representados por **segmentos (de retas) orientados** (segmentos de retas com um sentido de percurso) no plano ou no espaço. A ponta da seta do segmento orientado é chamada **ponto final ou extremidade** e o outro ponto extremo é chamado de **ponto inicial ou origem** do segmento orientado.

Segmentos orientados com mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento representam o mesmo vetor. A direção, o sentido e o comprimento do vetor são definidos como sendo a direção, o sentido e o comprimento de qualquer um dos segmentos orientados que o representam.

Este fato é análogo ao que ocorre com os números racionais e as frações. Duas frações representam o mesmo número racional se o numerador e o denominador de

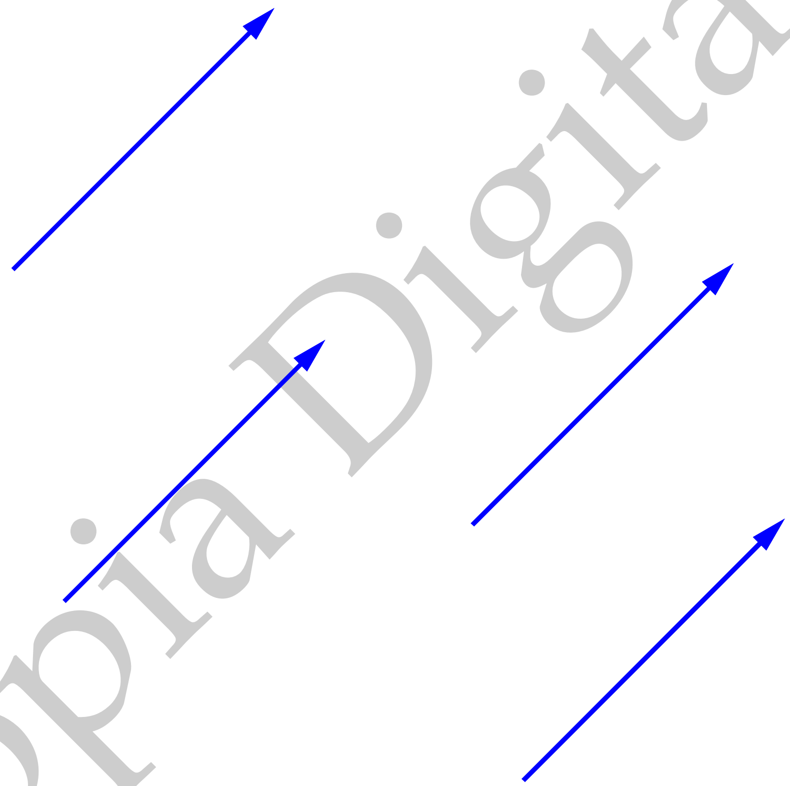


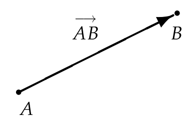
Figura 3.1. Segmentos orientados representando o mesmo vetor

cada uma delas estiverem na mesma proporção. Por exemplo, as frações $1/2$, $2/4$ e $3/6$ representam o mesmo número racional. A definição de igualdade de vetores também é análoga a igualdade de números racionais. Dois números racionais a/b e c/d são iguais, quando $ad = bc$. Dizemos que dois vetores são iguais se eles possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.

Na Figura 3.1 temos 4 segmentos orientados, com origens em pontos diferentes, que representam o mesmo vetor, ou seja, são considerados como vetores iguais, pois possuem a mesma direção, mesmo sentido e o mesmo comprimento.

Se o ponto inicial de um representante de um vetor V é A e o ponto final é B, então escrevemos

$$V = \overrightarrow{AB}$$



3.1 Soma de Vetores e Multiplicação por Escalar

A soma, $V + W$, **de dois vetores** V **e** W, é definida pelo vetor obtido da seguinte forma:

(a) tome um segmento orientado que representa V;

(b) tome um segmento orientado que representa W, com origem na extremidade de V;

(c) o vetor $V + W$ é representado pelo segmento orientado que vai da origem de V até a extremidade de W.

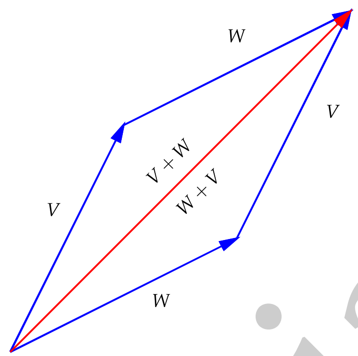


Figura 3.2. $V + W = W + V$

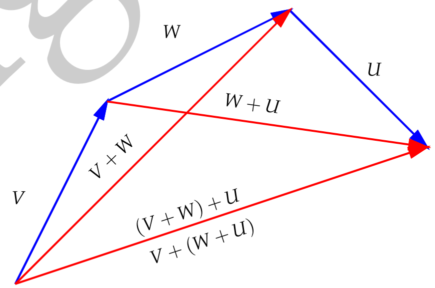


Figura 3.3. $V + (W + U) = (V + W) + U$

Da Figura 3.2, deduzimos que a soma de vetores é comutativa, ou seja,

$$V + W = W + V, \tag{3.1}$$

para quaisquer vetores V e W. Observamos também que a soma $V + W$ está na diagonal do paralelogramo determinado por V e W, quando estão representados com a mesma origem.

Da Figura 3.3, deduzimos que a soma de vetores é associativa, ou seja,

$$V + (W + U) = (V + W) + U, \tag{3.2}$$

para quaisquer vetores V, W e U.

O vetor que tem a sua origem coincidindo com a sua extremidade é chamado **vetor nulo** e denotado por $\bar{0}$. Segue então, que

$$V + \bar{0} = \bar{0} + V = V, \tag{3.3}$$

para todo vetor V.

Para qualquer vetor V, o **simétrico** de V, denotado por $-V$, é o vetor que tem mesmo comprimento, mesma direção e sentido contrário ao de V. Segue então, que

$$V + (-V) = \bar{0}. \tag{3.4}$$

Definimos a **diferença** W **menos** V, por

$$W - V = W + (-V).$$

Segue desta definição, de (3.1), (3.2), (3.4) e de (3.3) que

$$W + (V - W) = (V - W) + W = V + (-W + W) = V + \bar{0} = V.$$

Assim, a diferença $V - W$ é um vetor que somado a W dá V, portanto ele vai da extremidade de W até a extremidade de V, desde que V e W estejam representados por segmentos orientados com a mesma origem.

Figura 3.4. A diferença $V - W$

A **multiplicação de um vetor** V **por um escalar** α, $\alpha\, V$, se $\alpha \neq 0$ e $V \neq \bar{0}$, é definida pelo vetor caracterizado por:

(a) tem comprimento $|\alpha|$ vezes o comprimento de V,

(b) a direção é a mesma de V (neste caso, dizemos que eles são **paralelos**),

(c) tem o mesmo sentido de V, se $\alpha > 0$ e
tem o sentido contrário ao de V, se $\alpha < 0$.

Se $\alpha = 0$ ou $V = \bar{0}$, definimos a **multiplicação do vetor** V **pelo escalar** α como sendo o vetor nulo, $\alpha\, V = \bar{0}$.

As propriedades da multiplicação por escalar serão apresentadas mais a frente. Se $W = \alpha\, V$, dizemos que W é **um múltiplo escalar** de V. Observe que dois vetores não nulos são paralelos (ou **colineares**) se, e somente se, um é um múltiplo escalar do outro.

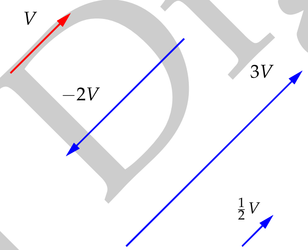


Figura 3.5. Multiplicação de vetor por escalar

As operações com vetores podem ser definidas utilizando um **sistema de coordenadas retangulares ou cartesianas**. Em primeiro lugar, vamos considerar os vetores no plano.

Seja V um vetor no plano. Definimos as **componentes de** V como sendo as coordenadas (v_1, v_2) do ponto final do representante de V que tem ponto inicial na origem. Vamos identificar o vetor com as suas componentes e vamos escrever simplesmente

$$\boxed{V = (v_1, v_2).}$$

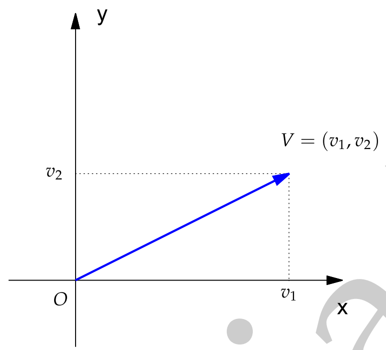


Figura 3.6. As componentes do vetor V no plano

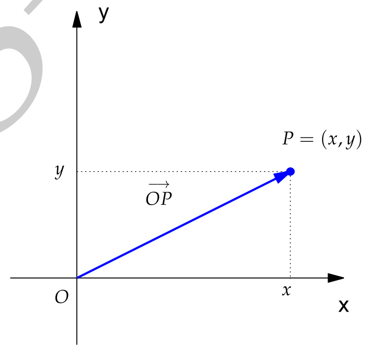


Figura 3.7. As coordenadas de P são iguais as componentes de $\overrightarrow{OP}$

Assim, as coordenadas de um ponto P são iguais as componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$, que vai da origem do sistema de coordenadas ao ponto P. Em particular, o vetor nulo, $\bar{0} = (0, 0)$. Em termos das componentes, podemos realizar facilmente as operações: soma de vetores e multiplicação de vetor por escalar.

- Como ilustrado na Figura 3.8, a **soma** de dois vetores $V = (v_1, v_2)$ e $W = (w_1, w_2)$ é dada por

$$\boxed{V + W = (v_1 + w_1, v_2 + w_2);}$$

- Como ilustrado na Figura 3.9, a **multiplicação** de um vetor $V = (v_1, v_2)$ por um escalar α é dada por

$$\boxed{\alpha\, V = (\alpha\, v_1, \alpha\, v_2).}$$

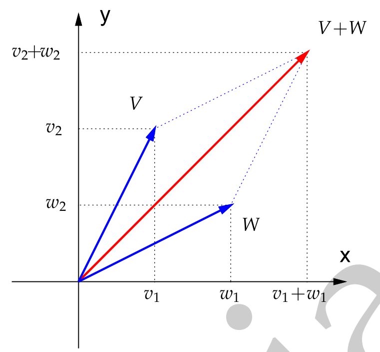


Figura 3.8. A soma de dois vetores no plano

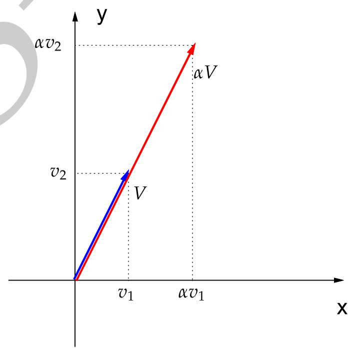
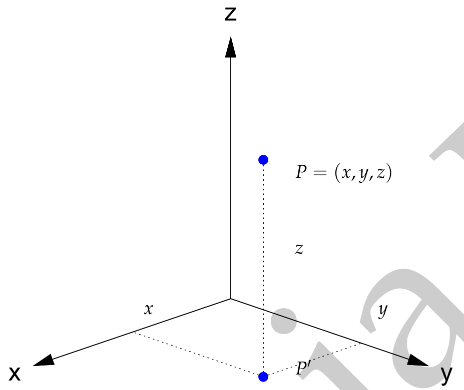


Figura 3.9. A multiplicação de vetor por escalar no plano

Definimos as **componentes de um vetor no espaço** de forma análoga a que fizemos com vetores no plano. Vamos inicialmente introduzir um **sistema de coordenadas retangulares no espaço**. Para isto, escolhemos um ponto como origem O e como eixos coordenados, três retas orientadas (com sentido de percurso definido), passando pela origem, perpendiculares entre si, sendo uma delas vertical orientada para cima. Estes serão os eixos x, y e z. O eixo z é o eixo vertical. Os eixos x e y são horizontais e satisfazem a seguinte propriedade. Suponha que giramos o eixo x pelo menor ângulo até que coincida com o eixo y. Se os dedos da mão direita apontam na direção do semieixo x positivo de forma que o semieixo y positivo esteja do lado da palma da mão, então o polegar aponta no sentido do semieixo z positivo. Cada par de eixos determina um plano chamado de **plano coordenado**. Portanto, os três planos coordenados são: xy, yz e xz.

A cada ponto P no espaço associamos um terno de números (x, y, z), chamado de **coordenadas do ponto** P como segue.

- Trace uma reta paralela ao eixo z, passando por P;
- A interseção da reta paralela ao eixo z, passando por P, com o plano xy é o ponto P'. As coordenadas de P', (x, y), no sistema de coordenadas xy são as duas primeiras coordenadas de P.
- A terceira coordenada é igual ao comprimento do segmento PP', se P estiver acima do plano xy e ao comprimento do segmento PP' com o sinal negativo, se P estiver abaixo do plano xy.



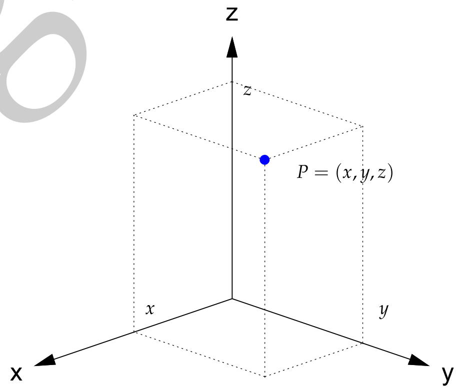


Figura 3.10. As coordenadas de um ponto no espaço

As coordenadas de um ponto P são determinadas também da maneira dada a seguir.

- Passe três planos por P paralelos aos planos coordenados.
- A interseção do plano paralelo ao plano xy, passando por P, com o eixo z determina a coordenada z.
- A interseção do plano paralelo ao plano xz, passando por P, com o eixo y determina a coordenada y
- A interseção do plano paralelo ao plano yz, passando por P, com o eixo x determina a coordenada x.

Agora, estamos prontos para utilizarmos um sistema de coordenadas cartesianas também nas operações de vetores no espaço. Seja V um vetor no espaço. Como no caso de vetores do plano, definimos as **componentes de** V como sendo as coordenadas (v_1, v_2, v_3) do ponto final do representante de V que tem ponto inicial na origem. Também identificamos o vetor com as suas componentes e vamos escrever

$$\boxed{V = (v_1, v_2, v_3).}$$

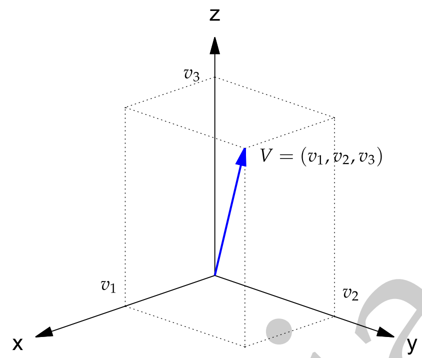


Figura 3.11. As componentes de um vetor no espaço

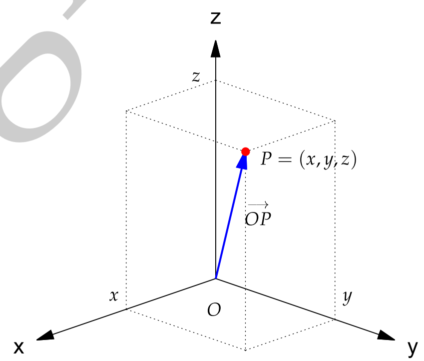


Figura 3.12. As coordenadas de P são iguais as componentes de $\overrightarrow{OP}$