INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL DE MINAS GERAIS

Pré-Cálculo

1 Regras Básicas

Propriedades básicas das operações de adição e multiplicação

Quaisquer que sejam on números reais a, b e c tem-se:

1. $a + b = b + a$ $\qquad$ $ab = ba$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ $\qquad$ $a(bc) = (ab)c$
3. $a + 0 = a$ $\qquad$ $a.1 = a$
4. $a + (-a) = 0$ $\qquad$ $a.\dfrac{1}{a} = 1$
5. $a(b + c) = ab + ac$ $\qquad$ $(b + c)a = ba + ac$

Consequências das propriedades básicas

A) Cancelamento

Vamos supor que $a + b = c$. Se quisermos isolar a no primeiro membro, pela regra da balança, podemos somar $-b$ a ambos os membros da igualdade, e assim obtermos $a + b + (-b) = c + (-b)$. Como $b + (-b) = 0$, temos $a = c + (-b) = c - b$.

Suponhamos agora que $ab = c$, com $b \neq 0$. Se quisermos isolar a, multiplicamos ambos os membros da igualdade por $1/b$, o que é permitido pela regra da balança. obtemos

$$ab.\frac{1}{b} = c.\frac{1}{b}$$

e como $b.(1/b) = 1$, $a.1 = a$, o primeiro membro vale a, de modo que $a = c.\frac{1}{b} = \frac{c}{b}$

B) Anulamento

Registraremos a seguir duas propriedades envolvendo o número 0:

Regra do fator nulo. Qualquer que seja a real,

$$a.0 = 0.a = 0$$

Regra do produto nulo. Sendo a e b números reais, tem-se: $a.b = 0$ então ou $a = 0$ ou $b = 0$ ou ainda $a = b = 0$

C)Regras de sinal

Para quaisquer a e b reais tem-se:

1. $-(-a) = a$
2. $(-a)b = -(ab) = a(-b)$
3. $(-a)(-b) = ab$

Regras de potenciação

Sendo a um número real, definimos:

$$a^1 = a \qquad \text{e} \qquad a^n = a.a.a.....a(n \text{ fatores})$$

$$a^0 = 1 \qquad \text{e} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Sendo a, b, m e n números reais, tem-se:

1. $a^{m+n} = a^m a^n$
2. $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $(ab)^n = a^n b^n$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Propriedades da subtração

Quaisquer que sejam on números reais a, b e c tem-se:

$$b - a = b + (-a) \qquad a(b-c) = ab - ac \qquad (b-c)a = ba - ac$$

Propriedades de frações

$$\frac{b}{a} = b.\frac{1}{a}$$

ATENCÃO: Por definição, pressupõe-se $a \neq 0$, ou seja, é proibido dividir por 0.

Uma fração não se altera se multiplicarmos numerador e denominador por um mesmo número não nulo.

Regras de sinais para frações

Para quaisquer a e b reais tem-se:

1. $\dfrac{-b}{a} = \dfrac{b}{-a} = -\dfrac{b}{a}$
2. $\dfrac{-b}{-a} = \dfrac{b}{a}$

Soma de frações

1. $\dfrac{a}{c} \pm \dfrac{b}{c} = \dfrac{a \pm b}{c}$ $(c \neq 0)$
2. $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd}$ $(b \neq 0, d \neq 0)$

Produto de frações

Se $b \neq 0$ e $d \neq 0$, então

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Quociente de frações

Se $b \neq 0$, $d \neq 0$ e $c \neq 0$, então

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\frac{d}{c}$$

2 Expressões Algébricas

Produtos notáveis

1. $(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$
2. $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ $\qquad (x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$
3. $(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ $\qquad (x-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

Módulo ou valor Absoluto

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Propriedades de módulo

1. $|a| \geq 0$ e $|a| = 0$ se e somente se $a = 0$
2. $|ab| = |a||b|$ e se $b \neq 0$ então $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$
3. $|-a| = |a|$
4. $|a|^2 = a^2$
5. $|a+b| \leq |a| + |b|$

6. $|a| - |b| \leq |a - b|$
7. $|x| < a$ se e somente se $-a < x < a$ em que $a > 0$
8. $|x| \leq a$ se e somente se $-a \leq x \leq a$ em que $a > 0$
9. $|x| > a$ se e somente se $x > a$ ou $x < -a$ em que $a > 0$
10. $|x| \geq a$ se e somente se $x \geq a$ ou $x \leq -a$ em que $a > 0$

Radiciação

Seja $b \geq 0$ um número real e $n > 1$ um inteiro par. Chama-se **raiz n-ésima** de b ao número $a \geq 0$ tal que $a^n = b$. Indica-se $a = \sqrt[n]{b}$. b é chamado de **radicando**, $\sqrt{\ }$ é o chamado **radical** e n o **índice**.

Sendo b um número real e $n > 1$ um inteiro ímpar, o único número a tal que $a^n = b$ é chamado de **raiz n-ésima** de b. Indica-se $a = \sqrt[n]{b}$.

Propriedades de radiciação

Valem as propriedades, para n, p, m inteiros, $n > 1$, $m > 1$:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad (b \neq 0)$
3. $(\sqrt[n]{a}^{m}) = \sqrt[n]{a^m}$
4. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}$

Observações:

- Se n for par, então $a \geq 0$ e $b \geq 0$
- Se $m < 0$, então $a \neq 0$

Alguns erros a serem evitados

Este parágrafo se destina a citar alguns erros, que são destacados pelo fato de serem comuns. Preste atenção para não cometê-los.

1. Confundir $-|-x|$ com $-(-x)$.
2. Confundir $(-x)^2$ com $-x^2$.
3. Escrever $-(a + b)$ como $-a + b$.
4. Concluir que se $x < a$ então $cx < ca$.
5. Escrever $(x + a)^2$ como $x^2 + a^2$.

6. Em uma fração, cancelar uma parcela do numerador com uma parcela do denominador.
7. Escrever $\sqrt{x+a}$ como $\sqrt{x}+\sqrt{a}$.
8. Escrever $2 > x > 6$, como equivalente a $x < 2$ ou $x > 6$.
9. Confundir $a + bc$ com $(a + b)c$.
10. Confundir a^{b^c} com $(a^b)^c$

Conjunto: Uma coleção de zero ou mais elementos, na maioria das vezes com alguma característica em comum. Notação: A, B, C etc. Os elementos de um conjunto são representados por letras minúsculas: a, b, c etc.
Relação de pertinência: $x \in A \qquad y \notin A$
Subconjuntos: $A \subset B$
Conjunto vazio: $\varnothing$
Conjunto Universo: E ou S ou Ω.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A$$

Operações entre conjuntos: Sejam P e Q dois conjuntos de um mesmo conjunto universo E.

Intersecção: $P \cap Q = \{x \in E | x \in P \text{ e } x \in Q\}$
União: $P \cup Q = \{x \in E | x \in P \text{ ou } x \in Q\}$
Complementar de um conjunto: P^c ou $\bar{P} = \{x \in E | x \notin P\}$

Conjuntos Numéricos
Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$)

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3...\}$$

Conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$)

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$$

Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$)

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, 0 \neq q \in \mathbb{Z}\}$$

Os números racionais podem ser representados na forma decimal quando se efetua a divisão de p por q.
Exemplos: $\frac{2}{10} = 0,2$; $\quad \frac{12}{5} = 2,4$; $\quad \frac{1}{3} = 0,3333...$ $\quad \frac{5}{11} = 0,454545... = 0,4\bar{5}$.
Mas nem todos os números podem ser representados na forma $\frac{p}{q}$
Exemplo: a medida da diagonal de um quadrado de lado igual a 1 unidade.

Surgem então os números que não têm representação fracionária, os quais são chamados de números irracionais ($\mathbb{I}$).
Outros exemplos: $\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, π etc.
Tem-se então:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \text{ e } \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$$

Esse novo conjunto é denominado de **conjunto dos números reais**.

Intervalos

Sejam a e b dois números reais, com $a < b$. Um intervalo em $\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ que tem uma das seguintes formas:

Representação geométrica

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$
2. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
3. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$
4. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$
5. $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$
6. $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$
7. $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$
8. $]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$
9. $]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$

Observação: $-\infty$ e ∞ não são números, são apenas símbolos.