Lógica Matemática

Lógica Proposicional – Parte 1

Prof. Dr. Diego Saqui
Email: diego.saqui@muz.ifsuldeminas.edu.br

Lembrando...

- Precisamos de uma linguagem precisa que é a lógica e permite verificar se os argumentos e raciocínio estão corretos ou não.

- Lógica formal = envolve o entendimento de várias expressões (não somente números), implicações, se e somente se.

- <u>Lógica Proposicional</u> e <u>Lógica de Predicados</u> são duas linguagens formais importantes para essa disciplina.

Lógica Proposicional ou Cálculo Proposicional

- Formalismo lógico simples para raciocínio: Sem símbolos para representação de problemas do mundo real.
- Conveniente e poderosa para lidar com muitos problemas e formalizar precisamente soluções
- A Lógica Proposicional lida apenas com enunciados declarativos, chamados **proposições** (verdadeiro ou falso). As sentenças exclamativas, imperativas e interrogativas são excluídas.

Exemplo de Proposições

- **Ex de proposição e sentença declarativa.:**
  - A soma dos números 5 e 6 é 11
  - O programa tem problemas
  - As refeições são saborosas e caras.
- Ex de sentença:
  - Interrogativa: Que horas são?
  - Imperativa: Que Deus acompanhe.

Exemplo

- Considere o seguinte exemplo de uma **sentença** em **linguagem natural** que tem alguma **estrutura lógica**:
  - "Se chover na segunda-feira, então vamos distribuir guarda-chuvas ou alugar um ônibus".
- Esta frase fala sobre três proposições básicas, cada uma das quais pode ser potencialmente verdadeira ou falsa:
  - $p1 = $ "$chove\ na\ segunda - feira$",
  - $p2 = $ "$vamos\ entregar\ guarda - chuvas$" e
  - $p3 = $ "$vamos\ alugar\ um\ \hat{o}nibus$".
- Essas três **proposições** estão conectadas logicamente da seguinte forma: "$p1\ implica\ (p2\ ou\ p3)$", que escreveremos como $(p1 \rightarrow (p2 \mid p3))$.

Alfabeto da Lógica Proposicional

- Símbolos de
  - Pontuação: ()
  - Valor da proposição (Interpretação de uma função): Verdadeiro, Falso (contradomínio)
  - Proposições atômicos: p, q, s, r...
  - Conectivos lógicos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
    - ~, &, |, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (para computadores)
- Esses símbolos são utilizados para formar **formulas proposicionais**.

Operador de Negação

- Seja p uma proposição. A negação de p, denotada por $\neg p$ é a afirmação:

  “Não é o caso que p.”

A proposição $\neg p$ é lida “não p”. O valor de verdade da negação de p, $\neg p$, é o oposto do valor verdade de p.

p	$\neg p$
V	F
F	V

INSTITUTO FEDERAL

Exemplo de Negação

- p: O computador do Michel roda Linux
- $\neg p$: O computador do Michel não roda Linux

Operador “e”

- Sejam p e q proposições. A conjunção de p e q, denotada por $p \wedge q$, é a proposição “p e q.”
- A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira quando p e q são verdadeiras e é falsa caso contrário.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Operador “ou”

- Sejam p e q proposições. A disjunção de p e q, denotada por $p \vee q$, é a proposição “p ou q.”
- A disjunção $p \vee q$ é falsa quando ambos p e q são falsos e é verdadeira caso contrário.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplo dos operadores “e” e “ou”

- p: O computador da Rebeca tem mais de 500 GB de SSD
- q: Rebeca tem um computador com 16 GB de Memória
- r: O computador de Rebeca é mais lento que o meu
- $p \land q$: O computador da Rebeca tem mais de 500 GB de SSD **e** 16 GB de Memória
  - Obs.: **“mas”** pode ser usado como operador **“e”** em sentenças
- $p \lor q$: Rebeca tem um computador com 16 GB de Memória **“ou”** é mais lento que o meu

INSTITUTO FEDERAL

Operador de Implicação

- Sejam p e q proposições. A declaração condicional $p \rightarrow q$ é a proposição "se p, então q."
- A declaração condicional $p \rightarrow q$ é falsa quando p é verdadeira e q é falsa, e verdadeira caso contrário. Na declaração condicional $p \rightarrow q$, p é chamado de hipótese (ou premissa) e q é a conclusão (ou consequência).

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemplo de Implicação

- $p \rightarrow q$: Se eu for eleito, reduzirei os impostos
- p: Eu for eleito
- q: Reduzirei impostos

Operador de bi-implicação

- Sejam p e q proposições. A declaração bicondicional $p \leftrightarrow q$ é a proposição "p se e somente se q."
- A bicondicional $p \leftrightarrow q$ é falsa quando p e q tem interpretações (valores-verdade) diferentes, e verdadeira caso contrário.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemplo de bi-implicação

- $p \leftrightarrow q$: Você pode pegar um voo se e somente se você comprar um *ticket*
- p: Você pode pegar um voo
- q: Você comprar um *ticket*

Operador de Ou-Exclusivo (XOR)

- Sejam p e q proposições. A declaração $\mathrm{p} \oplus \mathrm{q}$ é falsa quando p e q tem interpretações (valores-verdade) iguais, e verdadeira caso contrário.

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Operador de Ou-Exclusivo (XOR)

- Sejam p e q as proposições que afirmam "Um aluno pode comer uma salada no jantar" e "Um aluno pode tomar sopa no jantar", respectivamente.
- Sendo $p \oplus q$ a afirmação temos: "Um aluno pode comer sopa ou salada, mas não os dois, no jantar". Observe que isso geralmente é declarado como "Um aluno pode comer sopa ou salada no jantar", sem declarar explicitamente que não é permitido tomar os dois.

FBF- Formulas bem formadas (*wff-well formed formulas*)

- Novas proposições podem ser construídas por meio de outras.
  - Para isso vamos utilizar conectivos lógicos.
- Essas novas proposições, bem como as proposições atômicas são as wff
- Para representar proposições gerais utilizaremos letras do alfabeto grego.
- *FBF* são análogas a importância de comandos de linguagens de programação, pois comando não formados corretamente poderão não compilar.

Fórmulas

- Símbolos de verdade e falso.
- Átomo (proposição inicial não derivada de outra)

wff	Lida como	wff chamada de
$(\neg\alpha)$	não α	Negação (unário)
$(\alpha \land \beta)$	α e β	Conjunção
$(\alpha \lor \beta)$	α ou β	Disjunção
$(\alpha \rightarrow \beta)$	Se α então β	Condicional
$(\alpha \leftrightarrow \beta)$	α se e somente se β	Bi-condicional

Precedência

Maior

$\downarrow$

Menor

Ex.: $\neg p \lor q \leftrightarrow (\neg p) \lor q$

Subfórmulas

- Seja α uma fórmula, uma subfórmula de α é definida por:
  - α é subfórmula de α;
  - se α: $(\neg\beta)$, então β é uma fórmula de α;
  - se α é uma fórmula em qualquer dos padrões:

$$(\beta \wedge \gamma), (\beta \vee \gamma), (\beta \rightarrow \gamma) \text{ ou } (\beta \leftrightarrow \gamma)$$

  então β e γ são subfórmulas de α;
- Informalmente, uma subfórmula de uma fórmula α é uma parte de α que é uma fórmula wff.
- Exemplos:
  - Considere a fórmula α: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$. As fórmulas $(p \rightarrow q)$, p, q e r são todas subfórmulas de α.

INSTITUTO FEDERAL

Procedimento para verificar se é WFF

- Suponha que a fórmula α seja $((p \leftrightarrow q) \vee (r \wedge (\neg s))) \leftrightarrow (\neg p)$.
  - O conectivo principal de α é $\leftrightarrow$.
  - Seguindo as regras apresentadas, para que α seja bem formada, é preciso mostrar que $((p \leftrightarrow q) \vee (r \wedge \neg s))$ e que $(\neg p)$ são bem-formadas.
  - Para mostrar que $((p \leftrightarrow q) \vee (r \wedge \neg s))$, cujo conectivo principal é $\vee$, é bem-formada, é preciso evidenciar que tanto $(p \leftrightarrow q)$ quanto $(r \wedge \neg s)$ são bem-formadas.
- Note que $(p \leftrightarrow q)$ é bem-formada, uma vez que p é bem-formada (é um átomo), q é bem-formada e a composição de duas fórmulas bem-formadas, usando o conectivo $\leftrightarrow$ é bem-formada.

Procedimento para verificar se é WFF

- Note que na fórmula $(r \wedge (\neg s))$ a fórmula r é bem-formada, uma vez que é um átomo e $(\neg s)$ é também bem-formada, uma vez que é a negação de um átomo. Dado que ambas, tanto r quanto $(\neg s)$, são bem-formadas, $(r \wedge (\neg s))$ é bem-formada pois é uma conjunção de duas fórmulas bem formadas.
- Como ambas, $(p \leftrightarrow q)$ e $(r \wedge (\neg s))$ são bem-formadas, também o será a disjunção dessas duas fórmulas $((p \leftrightarrow q) \vee (r \wedge (\neg s)))$ Por outro lado, a fórmula $(\neg p)$ é bem-formada, pois a negação de um átomo. Dado que ambas são bem-formadas, a fórmula composta das duas fórmulas bem-formadas por meio do uso do conectivo $\leftrightarrow$ é também bem-formada.

Cuidado ! Ambiguidade

- Dada as proposições atômicas:
  - p definida como “Maria termina o relatório”
  - q definida como “Maria está feliz” e
  - r definida como “Maria vai ao cinema”
- Considere a proposição composta $p \rightarrow q \wedge r$. Essa regra pode significar:
  - $(p \rightarrow q) \wedge r$, que se expressa: “se Maria termina o relatório, Maria está feliz e irá, em qualquer circunstancia, ao cinema”.
  - $p \rightarrow (q \wedge r)$: “se Maria termina o relatório, então, Maria está feliz e Maria irá ao cinema”.

Verifique se os seguintes casos são WFF

- $((p \rightarrow q) \leftrightarrow (\mathrm{p} \vee)$
- $((p \rightarrow \rightarrow q) \vee \mathrm{p})$
- $((p \rightarrow \wedge q) s)$
- $((\mathrm{p} \vee (\neg (p \rightarrow q) \wedge \vee q))$

Exemplo

- Considere a fórmula α: $((\neg p) \wedge q) \rightarrow \neg r$ e uma interpretação I dada por:

	p	q	r
I	v	f	f

- Para determinar o significado semântico de α de acordo com I, considere:

	p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$(\neg p) \wedge q)$	α
I	v	f	f				

Tabela Verdade

	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
I_1	v	v	f	f	v	v	v	v
I_2	v	f	f	v	f	v	f	f
I_3	f	v	v	f	f	v	v	f
I_4	f	f	v	v	f	f	v	v

Dada uma wff α, tabela-verdade de α mostra a semântica de α sob todas as possíveis interpretações; cada linha da tabela é associada a uma possível interpretação.

Exemplo com Linguagem de Programação Python

- https://colab.research.google.com/drive/11J03428_Y0k2mCF_6_4-aZXdlY2_Q8v7?usp=sharing

Tabela Verdade

- **Exercício:**
  - Considere a fórmula $\alpha: ((\neg p) \vee q) \rightarrow ((\neg r) \leftrightarrow (\neg s))$. Qual é a tabela-verdade de α?. Note que α tem quatro átomos $(p, q, r\ e\ s)$.