37) $\vec{a} = (-2\sqrt{5},\ 0,\ -\sqrt{5})$

38) a) $(4\sqrt{3}, -4, 0)$ b) $(0, 1, \sqrt{3})$

39) $(-2, 1, 4)$

40) $(\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{8}{9})$ e $(-\frac{6}{5}, 0, -\frac{2}{5})$

41) $4\vec{i}$, $-3\vec{j}$, $2\vec{k}$

42) a) $\vec{v}_1 = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $\vec{v}_2 = (\frac{10}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$

b) $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ e $\vec{v}_2 = (2, 0, -2)$

c) $\vec{v}_1 = (3, 0, 0)$ e $\vec{v}_2 = (0, 5, 4)$

d) $\vec{v}_1 = (0, 0, 0)$ ($\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais) e $\vec{v}_2 = \vec{v}$

43) a) $m = 3$ b) $\frac{9}{26}\sqrt{26}$ c) $H(\frac{51}{26}, \frac{87}{26}, \frac{94}{26})$

44) a) $\frac{8}{3}$ b) -6

45) a) $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ e $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ b) $(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$ e $(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}})$

c) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

46) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ e $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ ou $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ e $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$

47) a) $\text{arc cos}\,(\frac{3}{5}) \cong 53°$ b) $\text{arc cos}\,(-\frac{1}{\sqrt{10}}) \cong 108°$ c) $90°$

48) a) $\sqrt{2}$, $45°$ d) $\sqrt{5}$, $\text{arc cos}\,(-\frac{1}{\sqrt{5}}) \cong 117°$

b) $\sqrt{5}$, $\text{arc cos}\,(\frac{2}{\sqrt{5}}) \cong 26°$ e) $\sqrt{5}$, $\text{arc cos}\,(\frac{1}{\sqrt{5}}) \cong 63°$

c) 3, 0°

49) 3 ou $-\frac{1}{3}$

50) a) $\vec{v}_1 = (4, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 3)$ c) $\vec{v}_1 = (\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$, $\vec{v}_2 = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

b) $\vec{v}_1 = (\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$, $\vec{v}_2 = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

MAKRON Books

3

Produto Vetorial

Preliminares

Antes de definirmos produto vetorial de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, faremos algumas considerações importantes:

a) O produto vetorial é um *vetor*, ao contrário do produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ que é um escalar (número real).

b) Para simplicidade de cálculo do produto vetorial, faremos uso de determinantes. Um determinante de ordem 2 é definido como

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$$

Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = (3)(5) - (-4)(2) = 15+8 = 23$$

c) Algumas propriedades dos determinantes serão utilizadas nesta seção:

c_1) a permutação de duas linhas inverte o sinal do determinante.
Em relação ao exemplo anterior, temos

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-4)(2) - (3)(5) = -8 - 15 = -23$$

c_2) se duas linhas forem constituídas de elementos proporcionais, o determinante é zero (duas linhas iguais é um caso particular).

No determinante a seguir, os elementos da segunda linha são o triplo dos elementos da primeira:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

c_3) se uma das linhas for constituída de zeros, o determinante é zero.
Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

d) Um determinante de ordem 3 pode ser dado por

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c$$

A expressão da direita é conhecida como *desenvolvimento do determinante pelo Teorema de Laplace aplicado à primeira linha.* Notemos que os três determinantes de ordem 2 desta expressão são obtidos a partir das duas últimas linhas, desprezando-se nelas, pela ordem, a 1ª coluna, a 2ª coluna e a 3ª coluna, trocando-se o sinal do determinante intermediário.

Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}(3) - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}(-2) + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}(-4)$$

$$= (6-5)(3) - (2+10)(-2) + (1+6)(-4)$$

$$= 3 + 24 - 28$$

$$= -1$$

Observação

Todas as propriedades dos determinantes acima citadas fizeram referência às linhas da matriz pelo fato de, no estudo do produto vetorial, haver menção somente a linhas. No entanto, estas propriedades valem também para as colunas.

Definição do Produto Vetorial

Chama-se *produto vetorial* de dois vetores

$\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, tomados nesta ordem, e se representa por $\vec{u} \times \vec{v}$, ao vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k} \qquad (1)$$

O produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ também é indicado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e lê-se "$\vec{u}$ vetorial $\vec{v}$".

Observemos que a definição de $\vec{u} \times \vec{v}$ dada em (1) pode ser obtida do desenvolvimento segundo o Teorema de Laplace (item d das Preliminares) substituindo-se a, b e c pelos vetores unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, fato que sugere a notação

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

O símbolo à direita de (2) não é um determinante, pois a primeira linha contém vetores em vez de escalares. No entanto, usaremos esta notação pela facilidade de memorização que ela propicia no cálculo do produto vetorial.

Exemplo

Calcular $\vec{u} \times \vec{v}$ para $\vec{u} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$.

Solução

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (4 - 0)\vec{i} - (5 - 3)\vec{j} + (0 - 4)\vec{k}$$

$$= 4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

Dispositivo prático para o cálculo de $\vec{u} \times \vec{v}$

Dispõe-se os dois vetores em linha, e repete-se pela ordem, as duas primeiras colunas. As três componentes de $\vec{u} \times \vec{v}$ são dadas pelos três determinantes, conforme está indicado a seguir. A vantagem do dispositivo é que não se corre o risco de esquecer a troca de sinal do determinante intermediário.

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{4 \quad 0 \;\; 3 \quad 1}_{4} \qquad \underbrace{3 \quad 1 \;\; 5 \quad 1}_{-2} \qquad \underbrace{5 \quad 1 \;\; 4 \quad 0}_{-4}$$

Levando-se em conta as considerações feitas sobre as propriedades dos determinantes, concluímos de imediato que:

1º) $\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$, isto é, os vetores $\vec{v} \times \vec{u}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ são opostos (Figura 3.1), pois a troca de ordem dos vetores no produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ implica troca de sinal de todos os determinantes de ordem 2, ou seja, troca de sinal de todas as suas componentes.

Por outro lado, como $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u}$ conclui-se que o produto vetorial não é comutativo (ao contrário do produto escalar: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$). Portanto, no produto vetorial *a ordem dos fatores é importante.*

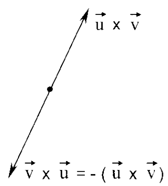


Figura 3.1

2º) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ *se, e somente se,* $\vec{u} \,//\, \vec{v}$, pois neste caso, todos os determinantes de ordem 2 têm suas linhas constituídas por elementos proporcionais.

Estão aí também incluídos os casos particulares:

I) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ (determinantes de ordem 2 com linhas iguais)

II) $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$ (determinantes de ordem 2 com uma linha de zeros)

Exemplos de produto vetorial de vetores paralelos:

a) $\vec{u} \times (3\vec{u}) = \vec{0}$

b) $(2\vec{u}) \times (-7\vec{u}) = \vec{0}$

c) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{u}) = \vec{0}$

d) $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{0}$

e) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \times (6\vec{u} + 9\vec{v}) = \vec{0}$

f) $(5\vec{u}) \times \vec{0} = \vec{0}$

Sabemos que um vetor está bem definido quando conhecemos sua direção, seu sentido e seu comprimento. A seguir passaremos a definir o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ no caso de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serem *não-nulos* e *não-paralelos.*

Características do Vetor $\vec{u} \times \vec{v}$

Consideremos os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

a) Direção de $\vec{u} \times \vec{v}$

O vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Tendo em vista que dois vetores são ortogonais quando o produto escalar deles é zero, basta mostrar que

$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$ e $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$

Temos, então

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_1 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_1$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$= 0$ (primeira e segunda linhas iguais).

Logo, $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

De forma análoga, demonstra-se que $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$.

Como o vetor $\vec{v} \times \vec{u}$ tem a mesma direção de $\vec{u} \times \vec{v}$ (apenas seus sentidos são opostos), também ele é ortogonal tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$. A Figura 3.2 apresenta os vetores $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$ ortogonais ao plano π determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

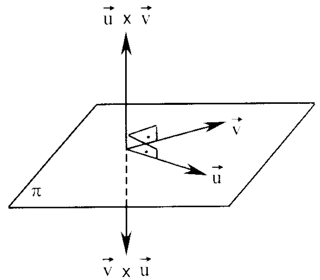


Figura 3.2

Exemplo

Dados os vetores $\vec{u} = (3, 1, 2)$ e $\vec{v} = (-2, 2, 5)$, tem-se

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (1, -19, 8)$$

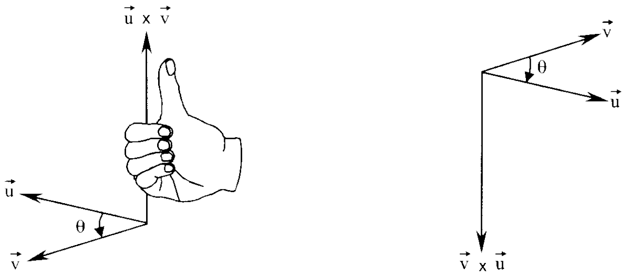
e

$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = (1, -19, 8) \cdot (3, 1, 2) = 3 - 19 + 16 = 0$

$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = (1, -19, 8) \cdot (-2, 2, 5) = -2 - 38 + 40 = 0$

b) Sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$

O sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ poderá ser determinado utilizando-se a *"regra da mão direita"* (Figura 3.3(a)). Sendo θ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, suponhamos que $\vec{u}$ (1º vetor) sofra uma rotação de ângulo θ até coincidir com $\vec{v}$. Se os dedos da mão direita forem dobrados na mesma direção da rotação, então o polegar estendido indicará o sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$.



(a) (b)

Figura 3.3

A Figura 3.3 (b) mostra que o produto vetorial muda de sentido quando a ordem dos vetores é invertida. Observemos que só será possível dobrar os dedos na direção de $\vec{v}$ para $\vec{u}$ se invertermos a posição da mão, quando então o dedo polegar estará apontando para baixo.

Caso tenhamos dúvidas sobre o sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$, podemos associar estes dois vetores a uma dupla de vetores unitários escolhidos entre $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$. Por exemplo, associando $\vec{u} \times \vec{v}$, com $\vec{i} \times \vec{j}$ e tendo em vista que

$$\vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,\ 0,\ 1) = \vec{k},$$

o sentido de $\vec{k}$ daria o sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$. Da mesma forma temos

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \qquad \text{e} \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

Na Figura 3.4 apresentamos um dispositivo mnemônico para lembrar os seis produtos vetoriais possíveis com estes três vetores unitários que determinam o sistema cartesiano. Associando estes vetores a três pontos distintos de uma circunferência, e adotando o sentido anti-horário, o produto vetorial de dois vetores sucessivos

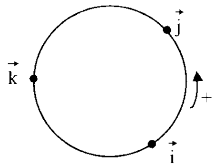


Figura 3.4

quaisquer é o vetor seguinte. Assim, neste dispositivo temos imediatamente $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ (sentido anti-horário) e, conseqüentemente, $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$ (sentido horário).

A tabela de dupla entrada apresenta as seis possibilidades com produto vetorial não-nulo:

x	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

c) Comprimento de $\vec{u} \times \vec{v}$

Se θ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não-nulos, então

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen} \theta \tag{3}$$

Este resultado será imediato quando se conhece a Identidade de Lagrange:

$$\boxed{|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2} \tag{4}$$

Como

$$\left| \vec{u} \times \vec{v} \right|^2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2$$

$$= (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (x_1 z_2 - x_2 z_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \tag{5}$$

e

$$|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 \tag{6}$$

a identidade (4) poderá ser verificada desenvolvendo-se os membros da direita de (5) e (6) e constatando sua igualdade (a cargo do leitor).

Tendo em vista que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$$

a igualdade (4) pode ser escrita como

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \cos^2 \theta$$

$$= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

$$= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

Extraindo as raízes quadradas e notando que $\operatorname{sen} \theta \geq 0$ (pois $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$), obtemos

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen} \theta.$$

Interpretação Geométrica do Módulo do Produto Vetorial

Observando que no paralelogramo determinado pelos vetores não-nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (Figura 3.5), a medida da base é $|\vec{u}|$ e da altura é $|\vec{v}|$ sen θ, a área A deste paralelogramo é

A = (base) (altura) = $|\vec{u}|\,|\vec{v}|$ sen θ

ou seja,

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| \qquad (7)$$

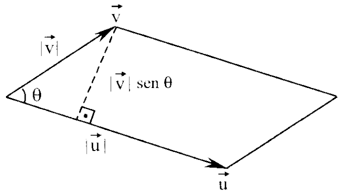


Figura 3.5

O resultado dado em (7) poderá ser expresso por: "*a área do paralelogramo determinado pelos vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *é numericamente igual ao comprimento do vetor* $\vec{u} \times \vec{v}$".

Vamos comprovar este resultado por meio de um exemplo particular tomando os vetores $\vec{u} = 2\vec{i}$ e $\vec{v} = 3\vec{j}$. Temos, então

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 6) = 6\vec{k}$$

e

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = 6$$

A Figura 3.6 mostra claramente que o paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem 6 u.a. (unidades de área) e o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ tem 6 u.c. (unidades de comprimento). Quer dizer, numericamente estas medidas são iguais.

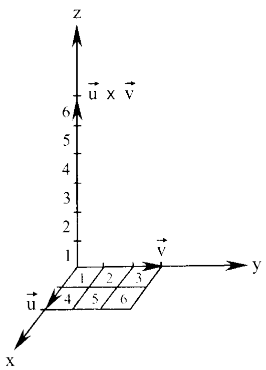


Figura 3.6

Para encerrar o estudo do produto vetorial, as conclusões finais:

1) O produto vetorial *não é associativo*, isto é, em geral

$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

Basta considerar, por exemplo,

$(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$

enquanto que

$\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{j}) = \vec{i} \times \vec{0} = \vec{0}$

2) Para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e o escalar α, são válidas as propriedades

I) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$ e

$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

II) $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$

III) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

As demonstrações destas propriedades, todas ligadas à aplicação da definição (1) e de propriedades dos determinantes além das citadas no texto, deixamos a cargo do leitor como desafio.

Exemplos

1) Determinar o vetor $\vec{x}$, tal que $\vec{x}$ seja ortogonal ao eixo dos y e $\vec{u} = \vec{x} \times \vec{v}$, sendo $\vec{u} = (1, 1, -1)$ e $\vec{v} = (2, -1, 1)$.

Solução

Como $\vec{x} \perp$ 0y, ele é da forma $\vec{x} = (x, 0, z)$.

Então, $\vec{u} = \vec{x} \times \vec{v}$ equivale a

$$(1, 1, -1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & 0 & z \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

ou

$$(1, 1, -1) = (z, -x + 2z, -x).$$

Pela condição de igualdade de dois vetores resulta o sistema

$$\begin{cases} z = 1 \\ -x + 2z = 1 \\ -x = -1 \end{cases}$$

cuja solução é x = 1 e z = 1.

Portanto, $\vec{x} = (1, 0, 1)$.

2) Sejam os vetores $\vec{u} = (1, -1, -4)$ e $\vec{v} = (3, 2, -2)$. Determinar um vetor que seja

a) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e unitário;

c) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e tenha módulo 4;

d) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e tenha cota igual a 7.

Solução

a) Sabe-se que o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Como multiplicar um vetor por um número real não altera a sua direção, todos os vetores do tipo $\alpha(\vec{u} \times \vec{v})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, são também ortogonais a $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Portanto, este problema tem infinitas soluções.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (10, -10, 5)$$

Logo, as infinitas soluções são

$\alpha(10, -10, 5)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observação

Se chamarmos de $\vec{x} = (x, y, z)$ todos os vetores ortogonais a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, estas mesmas soluções seriam obtidas resolvendo-se o sistema.

$$\begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x - y - 4z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

b) A partir de $\vec{u} \times \vec{v}$ (ou de qualquer $\alpha(u \times v)$, $\alpha \neq 0$), obtém-se dois vetores unitários:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{(10, -10, 5)}{15} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

e

$$\vec{u}_2 = -\vec{u}_1 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

c) Para obter um vetor de módulo 4 que seja ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, basta multiplicar por 4 um vetor unitário:

$$4\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

ou

$$4\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right).$$

d) Dentre as infinitas soluções $\alpha(10, -10, 5) = (10\alpha, -10\alpha, 5\alpha)$, deseja-se aquela cuja cota é 7. Então, $5\alpha = 7$, ou seja, $\alpha = \frac{7}{5}$. Logo, temos a solução

$$\frac{7}{5}(10, -10, 5) = (14, -14, 7).$$

3) Seja um triângulo eqüilátero ABC de lado 10. Calcular $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.

Solução

É uma aplicação direta da relação (3):

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}| \operatorname{sen} \hat{A}$

Como $\hat{A} = 60°$ (Figura 3.7), vem

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = (10)(10)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 50\sqrt{3}.$$

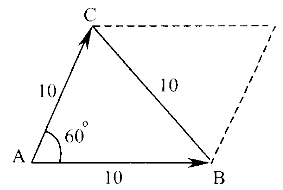


Figura 3.7

Observação

Este resultado representa a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Logo, a área do triângulo da figura é a metade, ou seja, $25\sqrt{3}$.

4) Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1, 1)$ e $\vec{v} = (2, -3, 4)$, calcular

a) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) a altura do paralelogramo relativa à base definida pelo vetor $\vec{u}$.

Solução

a) Sabemos de (7) que a área A é dada por

$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$

Como

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (-1, -2, -1)$$

tem-se

$A = |(-1, -2, -1)| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$ u.a (unidades de área).

b) A Figura 3.8 ilustra outra vez o significado geométrico de $|\vec{u} \times \vec{v}|$ e indica a altura h que se pretende calcular.

De

$A = (\text{base})(\text{altura}) = |\vec{u}| \cdot h$

vem

$$h = \frac{A}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}|}$$

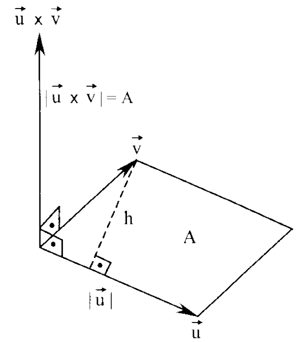


Figura 3.8

ou seja

$$h = \frac{\sqrt{6}}{|(1, -1, 1)|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \text{ u.c.}$$ (unidades de comprimento).

5) Determinar a distância do ponto P(5, 1, 2) à reta r que passa por A (3, 1, 3) e B (4, -1, 1).

Solução

Seja d a distância do ponto P à reta r (Figura 3.9). Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AP}$ determinam um paralelogramo cuja altura relativa à base AB é a distância d de P a r.

Logo, de acordo com o problema anterior, temos

$$d = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|}$$

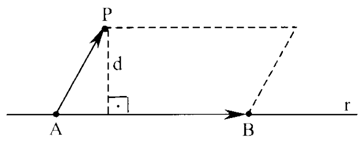


Figura 3.9

Como $\overrightarrow{AB} = (1, -2, -2)$, $\overrightarrow{AP} = (2, 0, -1)$ e

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (2, -3, 4)$$

vem

$$d = \frac{|(2, -3, 4)|}{|(1, -2, -2)|} = \frac{\sqrt{4+9+16}}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{\sqrt{29}}{3} \text{ u.c.}$$

6) Dados os vetores $\vec{u} = (2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, a)$, calcular o valor de a para que a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja igual a $\sqrt{62}$.

Solução

A área A do paralelogramo é dada por

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

Deseja-se que

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{62}$$

Mas

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = (a - 1, -2a - 1, -3)$$

e

$$|(a - 1, -2a - 1, -3)| = \sqrt{62}$$

ou

$$\sqrt{(a - 1)^2 + (-2a - 1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{62}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e ordenando os termos, vem

$$a^2 - 2a + 1 + 4a^2 + 4a + 1 + 9 = 62$$

$$5a^2 + 2a - 51 = 0$$

donde

$$a = 3 \quad \text{ou} \quad a = -\frac{17}{5}.$$

7) Dados os pontos A(2, 1, 1), B(3, -1, 0) e C(4, 2, -2), determinar
a) a área do triângulo ABC;
b) a altura do triângulo relativa ao vértice C.

Solução

a) A Figura 3.10 mostra que, a partir do triângulo ABC, é possível construir um paralelogramo ABDC, cuja área é o dobro da área do triângulo.

Como o paralelogramo é determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, conclui-se que a área A do triângulo é

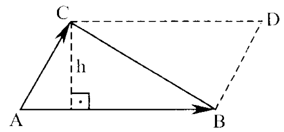


Figura 3.10

$$A_\Delta = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

Mas

$$\overrightarrow{AB} = (1, -2, -1), \quad \overrightarrow{AC} = (2, 1, -3) \quad \text{e}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (7, 1, 5)$$

Logo,

$$A_\Delta = \frac{1}{2}|(7, 1, 5)| = \frac{1}{2}\sqrt{49+1+25} = \frac{1}{2}\sqrt{75} = \frac{5}{2}\sqrt{3} \text{ u.a.}$$

b) A altura do triângulo indicada na figura é a mesma do paralelogramo de base AB. Como a área A do paralelogramo é

$$A = \text{(base) (altura)} = b \,.\, h, \text{ vem}$$

$$h = \frac{A}{b} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\sqrt{75}}{|(1, -2, -1)|} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{5}{2}\sqrt{2} \text{ u.c.}$$

Uma Aplicação na Física

O produto vetorial é uma importante ferramenta matemática utilizada na Física. Dentre algumas de suas aplicações pode-se citar o *torque*.

O torque é uma grandeza vetorial, representado por τ, e está relacionada com a possibilidade de um corpo sofrer uma torção ou alterar seu movimento de rotação.

A equação para o cálculo do torque é

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

onde $|\vec{r}|$ é a distância do ponto de aplicação da força $\vec{F}$ ao eixo de rotação, ao qual o corpo está vinculado.

Lembrando o cálculo do módulo do produto vetorial visto em (3) tem-se

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}| \operatorname{sen} \theta$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$.

Exemplo

Calcular o torque sobre a barra $\overline{AB}$ (Figura 3.11), onde $\overrightarrow{AB} = \vec{r} = 2\vec{j}$ (em metros), $\vec{F} = 10\vec{i}$ (em newtons) e o eixo de rotação é o eixo z.

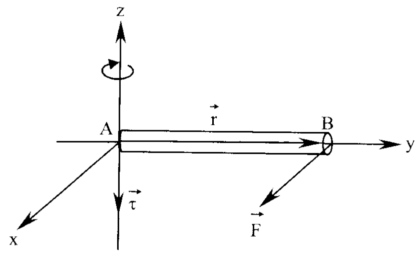


Figura 3.11

Solução

O vetor torque, para o caso desta figura, é dado por

$$\vec{\tau} = (0\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k})\text{m} \times (10\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k})\text{N}$$

ou

$$\vec{\tau} = (0\vec{i} + 0\vec{j} - 20\vec{k})\text{mN}$$

ou

$$\vec{\tau} = (-20\vec{k})\text{mN}$$

A intensidade (módulo) do torque pode ser calculado por

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}| \operatorname{sen} \theta = (2\text{m})(10\text{N}) (\operatorname{sen} 90^\circ) = 20\text{mN}$$

ou por

$$|\vec{\tau}| = \sqrt{(-20)^2} = 20\text{mN}$$

Observação

Caso a força $\vec{F}$ seja invertida (Figura 3.12), isto é, $\vec{F} = -10\vec{i}$ (em newtons), o torque é dado por

$$\vec{\tau} = (0\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k})\text{m} \times (-10\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k})\text{N}$$

ou

$$\vec{\tau} = (20\vec{k})\text{mN}.$$

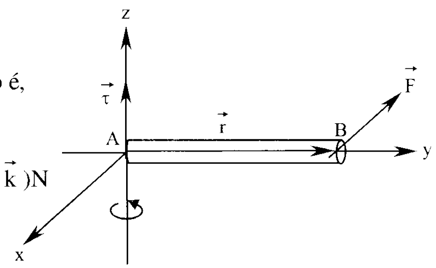


Figura 3.12

Problemas Propostos

1) Se $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{w} = -\vec{i} + \vec{k}$, determinar

a) $\lvert\vec{u} \times \vec{u}\rvert$	e) $(\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{w}$	i) $\vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
b) $(2\vec{v}) \times (3\vec{v})$	f) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$	j) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v}$
c) $(\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{w} \times \vec{u})$	g) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$	k) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$
d) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{u})$	h) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})$	l) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

2) Efetuar

a) $\vec{i} \times \vec{k}$	e) $(3\vec{i}) \cdot (2\vec{j})$	i) $(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{k}$
b) $\vec{j} \times (2\vec{i})$	f) $(3\vec{i}) \times (2\vec{j})$	j) $(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{j}$
c) $(3\vec{i}) \times (2\vec{k})$	g) $\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{i})$	k) $\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{j})$
d) $\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k})$	h) $\vec{j} \cdot (\vec{j} \times \vec{k})$	l) $(\vec{j} \times \vec{k}) \cdot \vec{i}$

3) Dados os pontos A(2, 1, -1), B(3, 0, 1) e C(2, -1, -3), determinar o ponto D tal que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}$.

4) Determinar o vetor $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \cdot (1, 4, -3) = -7$ e $\vec{x} \times (4, -2, 1) = (3, 5, -2)$.

5) Resolver os sistemas

a) $\begin{cases} \vec{x} \times \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{x} \cdot (4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \vec{x} \times (2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) = \vec{0} \\ \vec{x} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}) = 12 \end{cases}$

6) Dados os vetores $\vec{u} = (3, 1, 1)$, $\vec{v} = (-4, 1, 3)$ e $\vec{w} = (1, 2, 0)$, determinar $\vec{x}$ de modo que $\vec{x} \perp \vec{w}$ e $\vec{x} \times \vec{u} = \vec{v}$.

7) Levando em conta a Figura 3.13, calcular

a) $\overrightarrow{OF} \times \overrightarrow{OD}$
b) $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{FA}$
c) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$
d) $\overrightarrow{EC} \times \overrightarrow{EA}$
e) $\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OE})$
f) $\overrightarrow{GB} \times \overrightarrow{AF}$

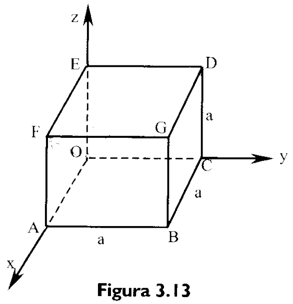


Figura 3.13

8) Sejam os vetores $\vec{u} = (1, -2, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$ e $\vec{w} = (1, 0, -1)$.

a) Utilizar o produto escalar para mostrar que os vetores são, dois a dois, ortogonais.
b) Utilizar o produto vetorial para mostrar que o produto vetorial de quaisquer dois deles é paralelo ao terceiro vetor.
c) Mostrar que $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{0}$

9) Determinar um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} + 2\vec{v}$ e $\vec{v} - \vec{u}$, sendo $\vec{u} = (-3, 2, 0)$ e $\vec{v} = (0, -1, -2)$.

10) Obter um vetor ortogonal ao plano determinado pelos pontos A(2, 3, 1), B(1, -1, 1) e C(4, 1, -2).

11) Dado $\vec{v}_1 = (1, -2, 1)$, determinar vetores $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ de modo que os três sejam mutuamente ortogonais.

12) Dados os vetores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 2)$, determinar

a) um vetor unitário simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
b) um vetor de módulo 5 simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

13) Determinar um vetor de módulo 2 ortogonal a $\vec{u} = (3, 2, 2)$ e a $\vec{v} = (0, 1, 1)$.

14) Com base na Figura 3.14, calcular

a) $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$
b) $|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}|$
c) $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DC}|$
d) $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}|$
e) $|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{AC}|$
f) $|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{CD}|$

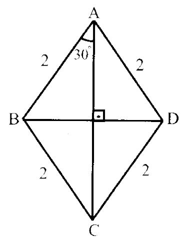


Figura 3.14

15) Sendo $|\vec{u}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{v}| = 4$ e 45° o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular

a) $|2\vec{u} \times \vec{v}|$
b) $\left|\frac{2}{5}\vec{u} \times \frac{1}{2}\vec{v}\right|$

16) Determinar $\vec{u} \cdot \vec{v}$, sabendo que $|\vec{u} \times \vec{v}| = 12$, $|\vec{u}| = 13$ e $\vec{v}$ é unitário.

17) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 2)$ e $\vec{v} = (-2, 2, 1)$, calcular

a) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
b) a altura do paralelogramo relativa à base definida pelo vetor $\vec{v}$.

18) Mostrar que o quadrilátero ABCD de vértices A(4, 1, 2), B(5, 0, 1), C(-1, 2, -2) e D (-2, 3, -1) é um paralelogramo e calcular sua área.

19) Dois vértices consecutivos de um paralelogramo são A(2, -4, 0) e B(1, -3, -1) e o ponto médio das diagonais é M (3, 2, -2). Calcular a área do paralelogramo.

20) Calcular o valor de *m* para que a área do paralelogramo determinado por $\vec{u} = (m, -3, 1)$ e $\vec{v} = (1, -2, 2)$ seja igual a $\sqrt{26}$.

21) Sabendo que $|\vec{u}| = 6$, $|\vec{v}| = 4$ e 30° o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular

a) a área do triângulo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
b) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $(-\vec{v})$;
c) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.

22) Calcular a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabendo que suas diagonais são $\vec{u} + \vec{v} = (-1, 3, 4)$ e $\vec{u} - \vec{v} = (1, -1, 2)$.

23) Calcular a distância do ponto P(4, 3, 3) à reta que passa por A(1, 2, -1) e B(3, 1, 1).

24) Calcular a área do triângulo ABC e a altura relativa ao lado BC, sendo dados

a) A(-4, 1, 1), B(1, 0, 1) e C(0, -1, 3)
b) A(4, 2, 1), B(1, 0, 1) e C(1, 2, 0)

25) Encontrar um vetor ortogonal ao plano determinado pelos pontos P, Q e R e calcular a área do triângulo PQR.

a) P(3, 0, 0), Q(0, 3, 0), R(0, 0, 2)
b) P(2, 3, 0), Q(0, 2, 1), R(2, 0, 2)

26) Calcular *z*, sabendo-se que A (2, 0, 0), B(0, 2, 0) e C(0, 0, *z*) são vértices de um triângulo de área 6.

27) Dados os pontos A(2, 1, -1) e B(0, 2, 1), determinar o ponto C do eixo Oy de modo que a área do triângulo ABC seja 1,5 u.a.

28) Sabendo que os pontos A(4, 0, 0), B(0, 0, 2), C(0, 3, 0) e D(4, 3, -2) são coplanares, calcular a área do quadrilátero ABCD.

29) Os pontos médios dos lados do triângulo ABC são M(0, 1, 3), N(3, -2, 2) e P(1, 0, 2). Determinar a área do triângulo ABC.

Respostas de Problemas Propostos

1) a) 0
b) $\vec{0}$
d) $\vec{0}$
e) (-5, 0, -5)
g) (-6, -20, 1)
h) (8, -2, 13)
i) (8, -2, 13)
j) 0
k) 5
l) 5

2) a) $-\vec{j}$ e) 0 i) $\vec{0}$

b) $-2\vec{k}$ f) $6\vec{k}$ j) $-\vec{i}$

c) $-6\vec{j}$ g) 0 k) $\vec{0}$

d) 1 h) 0 l) 1

3) D (-4, -1, 1)

4) $\vec{x} = (3, -1, 2)$

5) a) $\vec{x} = (1, -3, 0)$ b) $\vec{x} = (-4, 2, -6)$

6) Não existe $\vec{x}$ pois $\vec{u}$ não é ortogonal a $\vec{v}$.

7) a) $(-a^2, -a^2, a^2)$ c) $(0, 0, a^2)$ e) a^3

b) $(-a^2, -a^2, 0)$ d) $(-a^2, -a^2, -a^2)$ f) $\vec{0}$

9) Um deles: $(\vec{u} + 2\vec{v}) \times (\vec{v} - \vec{u}) = (-12, -18, 9)$

10) Um deles: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (12, -3, 10)$

11) Uma das infinitas soluções: $\vec{v}_1 = (1, -2, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 1)$ e $\vec{v}_3 = (-1, 0, 1)$

12) a) $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ou $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

b) $(\frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}})$ ou $(-\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}})$

13) $(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ou $(0, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$

14) a) $2\sqrt{3}$ c) 0 e) $4\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{3}$ d) 0 f) $2\sqrt{3}$

15) a) 16 b) $\frac{8}{5}$

16) 5 ou -5

17) a) $3\sqrt{10}$ b) $\sqrt{10}$

18) $\sqrt{122}$

19) $2\sqrt{74}$

20) 0 ou 2

21) a) 6 b) 12 c) 24

22) $\sqrt{35}$

23) $\frac{\sqrt{65}}{3}$

24) a) $\sqrt{35}$ e $\frac{2\sqrt{35}}{\sqrt{6}}$ b) $\frac{7}{2}$ e $\frac{7}{\sqrt{5}}$

25) a) $t\,(2, 2, 3), t \in \mathbb{R}$ e $\frac{3\sqrt{17}}{2}$ b) $t\,(1, 4, 6), t \in \mathbb{R}$ e $\frac{\sqrt{53}}{2}$.

26) 4 ou -4

27) C (0, 1, 0) ou C $(0, \frac{5}{2}, 0)$

28) $2\sqrt{61}$

29) $4\sqrt{2}$