INSTITUTO FEDERAL
Sul de Minas Gerais
Campus Muzambinho

Lógica Matemática

Tema 03 – Lógica Proposicional – Parte 3

Prof. Dr. Diego Saqui
Email: diego.saqui@muz.ifsuldeminas.edu.br

Regras de Inferências

Regras de Inferência

Regra	**Nome da Regra**
$\alpha, \alpha \rightarrow \beta \vDash \beta$	Modus Ponens
$\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta \vDash \neg\alpha$	Modus Tollens
$\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \vDash \alpha \rightarrow \gamma$	Silogismo hipotético (regra da cadeia)
$\alpha \vee \beta, \neg\alpha \vDash \beta$ $\alpha \vee \beta, \neg\beta \vDash \alpha$	Silogismo disjuntivo
$\alpha \wedge \beta \vDash \alpha$ $\alpha \wedge \beta \vDash \beta$	Simplificação
$\alpha, \beta \vDash \alpha \wedge \beta$	Conjunção
$\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \beta \vDash \beta$	De casos
$\alpha \vDash \alpha \vee \beta$ $\beta \vDash \alpha \vee \beta$	Adição

Regras de Inferência

Regra	**Nome da Regra**
$\alpha \to \beta, \gamma \to \delta, \alpha \vee \gamma \vDash \beta \vee \delta$	Dilema Construtivo
$\alpha \to \beta, \gamma \to \delta, \neg\beta \vee \neg\delta \vDash \neg\alpha \vee \neg\gamma$	Dilema Destrutivo
$\alpha \to \beta \vDash \neg\beta \to \neg\alpha$	Contraposição
$\alpha, \neg\alpha \vDash \beta$	Da inconsistência
$\alpha \to \beta, \beta \to \alpha \vDash \alpha \leftrightarrow \beta$	Introdução da Equivalência
$\alpha \leftrightarrow \beta \vDash \alpha \to \beta$ $\alpha \leftrightarrow \beta \vDash \beta \to \alpha$	Eliminação da Equivalência
$\alpha \vee \beta, \neg\alpha \vee \gamma \vDash \beta \vee \gamma$	Resolução

Ref.:
https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4848806/mod_resource/content/3/2019-Logica.pdf

De onde que vem essas regras?

- Para saber precisamos entender dois símbolos:
  - **,** (vírgula), que neste caso funciona como o operador lógico ∧(e)
  - **|=** que significa **Consequência Lógica.**

Consequência Lógica

- Na **consequência lógica** temos que:
  - sempre que a primeira parte da expressão é verdade na linha, a segunda parte também é verdade (mas não diz nada sobre "falso"). Então o seguinte exemplo é verdade:

	p	q	$(p \vee q)$
I_1	v	v	v
I_2	v	f	v
I_3	f	v	v
I_4	f	f	f

$$p \models (p \vee q)$$

$$q \models (p \vee q)$$

Consequência Lógica

- Juntando a **consequência lógica** com o operador ∧ **(na forma de vírgulas)** construímos a tabela de inferências, como o exemplo a seguir:
- ***Modus Ponens*:**

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$	$\alpha, \alpha \rightarrow \beta$
V	**V**	V	**V**
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

Observem aqui que sempre que a coluna do $\alpha, \alpha \rightarrow \beta$ é **Verdade** a coluna do β é **Verdade** também. Foi daí que tiramos a regra do ***Modus Ponens***: $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \vDash \beta$

INSTITUTO FEDERAL

Utilidade de Inferência Lógica: Sistemas de derivação e argumentos

- Para discutir argumentos considere o seguinte <u>**exemplo 1**</u>:

  Se as uvas caem, então a raposa as come.

  Se a raposa as come, então estão maduras.

  As uvas estão verdes ou caem.

  Logo,

  A raposa come as uvas se e somente se as uvas caem.

Utilidade de Inferência Lógica: Sistemas de derivação e argumentos

- Para resolver o exemplo precisamos lembrar do que são as premissas e o que é a conclusão.
  - A parte da expressão anterior antes da palavra **logo** são as premissas
  - e a parte que vem depois dela a conclusão.

- Obs.: A conclusão é útil para expressar um padrão de raciocínio sendo colocada após as premissas e é "anunciada" por palavras indicativas, tais como: "então", "logo", "portanto", "como consequência", "conclui-se", etc. Ao conjunto de premissas + conclusão damos o nome de “argumentos”.

Utilidade de Inferência Lógica: Sistemas de derivação e argumentos

Um argumento é correto se a conclusão segue logicamente das premissas, como formalmente estabelecido na definição a seguir:

- **Definição A:** Um argumento é uma sequência α_1, α_2, α_3,..., α_n $(n >= 1)$ de proposições, na qual as proposições α_i $(1 <= i <= n - 1)$ são chamadas de premissas e a proposição α_n é chamada de conclusão.

Indica-se um argumento α_1, α_2, α_3,..., $\alpha_{n-1} \vdash \alpha_n$ e ele é um argumento válido se e somente se a fórmula

$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \ldots \wedge \alpha_{n-1} \rightarrow \alpha_n$ for uma tautologia

ou de outra forma, um argumento é válido se e somente se, sendo as premissas verdadeiras a conclusão também é verdadeira (isso é tautologia).

Exemplo

- O argumento $p, q \rightarrow r, \sim r, \sim q$ é válido pois a fórmula $(p \wedge (q \rightarrow r) \wedge \sim r) \rightarrow \sim q$ é uma **tautologia**.
- **Um argumento é correto se a conclusão segue logicamente das premissas:**
- O que verificamos nas linhas onde as premissas são verdadeiras que a conclusão também é verdadeira (**tabela verdade a seguir, linha 4**).

Exemplo

p	q	r	p	$q \rightarrow r$	~ r	$\sim q$	$(p \wedge (q \rightarrow r) \wedge \sim r) \rightarrow \sim q$ (Tautologia)
V	V	V	V	V	F	F	V
V	V	F	V	F	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V	F	V
F	F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

Lembrando

- Eventualmente, a verificação da validade de um argumento por meio de tabelas-verdade pode ser um trabalho longo, dado que depende do número de átomos nele existentes. Outra maneira de evidenciar a validade de argumentos é por meio de um procedimento descrito por uma sequência de passos, que faz uso de argumentos válidos já conhecidos e de equivalências, processo que leva à noção de derivação ou prova formal.

Sistema Dedutivo

- Um **sistema dedutivo** consiste de um conjunto finito de axiomas lógicos (ou esquemas de axiomas) e um conjunto finito de regras de inferência que são usados para derivar os teoremas do **sistema.**

- Na lógica tradicional, um axioma ou postulado é uma sentença ou proposição que não é provada ou demonstrada e é considerada como óbvia ou como um consenso inicial necessário para a construção ou aceitação de uma teoria.

Dedução/prova

Definição B: Considerando as fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ e β da Lógica Proposicional. Diz-se que uma sequência finita de fórmulas $C_1, C_2, \ldots, C_k$ é uma prova (ou dedução ou derivação) de β a partir de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ (consideradas premissas) se e somente se:

1. cada C_i for uma premissa α_j $(1 <= j <= n)$; ou
2. C_i provém das fórmulas precedentes, pelo uso de um argumento válido de L; ou;
3. C_i provém do uso do princípio de substituição usado em uma fórmula anterior; ou
4. C_k é β.

Dedução

- Diz-se, então, que β é **dedutível** a partir de α_1, α_2, α_3,..., α_n ou que β é um **teorema**. Se a sequência puder ser construída, isto é, se existir uma derivação para a conclusão β, dado que α_1, α_2, α_3,..., α_n são as premissas e dado que L é um conjunto de regras de inferência admissíveis, diz-se que o argumento é válido, ou seja, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$ é válido.

Dedução

- <u>Regras de inferência</u> devem ser escolhidas de tal maneira que possam derivar apenas resultados que estejam corretos. Isso significa que *L* não deve conter qualquer falácia. Uma falácia permite encontrar uma conclusão que não possa ser derivada das premissas e, consequentemente, não correta.

Dedução – retomando o exemplo 1

- Para discutir argumentos considere o seguinte **exemplo 1**:

Se as uvas caem, então a raposa as come.

Se a raposa as come, então estão maduras.

As uvas estão verdes ou caem.

Logo,

A raposa come as uvas se e somente se as uvas caem.

Passo 1

- Identificando as **<u>proposições atômicas</u>** nas sentenças em língua natural neste exemplo e nomeando-as com os símbolos convencionados para átomos na Lógica Proposicional, tem-se:

- p: as uvas caem
- q: a raposa come as uvas
- r: as uvas estão maduras

Passo 2

- Reescrevendo o enunciado anterior usando a linguagem da Lógica Proposicional, tem-se:

$$p \rightarrow q$$

$$q \rightarrow r$$

$$\neg r \vee p$$

logo

$$p \leftrightarrow q$$

Passo 3

- A Tabela a seguir exibe a prova da conclusão como estabelecida na **Definição B.**

Tabela 1.45 Construção da prova de $p \leftrightarrow q$.

Tem-se	C_1	$p \rightarrow q$	premissa
	C_2	$q \rightarrow r$	premissa
	C_3	$\neg r \vee p$	premissa
Deduz-se	C_4	$r \rightarrow p$	(C_3: equivalência)
	C_5	$q \rightarrow p$	(C_2 + C_4 + silogismo hipotético)
	C_6	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	(C_1 + C_5 + conjunção)
	C_7	$(p \leftrightarrow q)$	(C_6: equivalência)

A seqüência C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7 é uma prova da conclusão $p \leftrightarrow q$ e o argumento $(p \rightarrow q)$, $(q \rightarrow r)$, $(\neg r \vee p) \mid\!- (p \leftrightarrow q)$ é válido.

Lembrete!

- O problema discutido aqui é a verificação da validade de uma conclusão lógica a partir de um conjunto de proposições dadas (premissas).
- É apresentado um conjunto de regras de inferência lógica que nos permite, a partir de um conjunto inicial de fatos, obter conclusões logicamente válidas, muitas vezes não óbvias à primeira vista.

- Argumento válido: Podemos expressar padrões de raciocínio de diversas maneiras. Na linguagem natural, em geral, a conclusão é colocada após as premissas e indicada por algumas palavras-chave como então, logo, portanto, como consequência, conclui-se, etc (NICOLETTI, 2009, p. 45).
- Dizemos que um argumento é válido se a conclusão segue logicamente as premissas ou, em outras palavras, se a conclusão é uma consequência lógica das premissas

Lembrete!

- **<u>Argumento válido:</u>** quando é possível justificar adequadamente a conclusão através das premissas
  - Se é válido, dizemos que a conclusão é consequência lógica das premissas.
    - determinar, para cada argumento, se suas premissas são verdadeiras ou não, não é uma questão lógica.
      - a lógica não se ocupa de conteúdos, mas apenas da forma e eis a razão pela qual ela é chamada de **lógica formal**.
- **<u>Argumento correto</u>**: Um argumento é correto se for válido e, além disso, tiver premissas verdadeiras.

Considerando exemplo anterior: $(p \to q), (q \to r), (\neg r \vee p) \vdash (p \leftrightarrow q)$

p	q	r	$\neg r$	$(p \to q)$	$(q \to r)$	$(\neg r \vee p)$	$(p \to q), (q \to r), (\neg r \vee p)$	$(p \leftrightarrow q)$	$\vdash$ (Tautologia)
V	V	V	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V

Exemplo 2

- No seguinte link:
  - https://docs.google.com/document/d/1hnHxSvwulTddwUj_bYjl09P6wo2e0g4iy1jat2zOsmc/edit?usp=sharing

Regra de introdução da condicional e teorema da dedução

Regra de introdução da condicional e teorema da dedução

- A regra da introdução da condicional pode ser enunciada como: dada a derivação de uma fórmula β a partir de uma hipótese α, pode-se descartar a hipótese e inferir a fórmula $\alpha \rightarrow \beta$. Essa regra é dada pelo Teorema da Dedução.

> **Teorema da Dedução:** Sejam α e β duas fórmulas bem formadas e $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ premissas. Se juntos $\alpha, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ logicamente implica em β, então $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ logicamente implicam $\alpha \rightarrow \beta$.

As regras de inferência da Tabela dos slides 3 e 4 com o Teorema da Dedução formam um sistema completo.

Exemplo 3

- No seguinte link:
  - https://docs.google.com/document/d/1hnHxSvwulTddwUj_bYjl09P6wo2e0g4iy1jat2zOsmc/edit?usp=sharing

Exercício

- **Pratiquem usando teorema da dedução**

Considere que:

- Se o universo é finito, então a vida é curta.
- Se a vida vale a pena, então a vida é complexa.
- Se a vida é curta ou complexa, então a vida tem sentido.
- A vida não tem sentido.

Verifique, usando regras de inferência e equivalências lógicas:

- **a-) Se o universo é finito e a vida vale a pena, então a vida tem sentido.**