$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = -2L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 = -L_1 + L_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2/-3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 = 7L_2 + L_3]{L_1 = -4L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 11/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{L_3 = -3L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 11/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 = -\frac{1}{3}L_3 + L_1]{L_2 = -\frac{2}{3}L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$ que é a

matriz ampliada do sistema

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = -2 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Portanto a solução do sistema inicial é o vetor

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Um sistema de m equações lineares com n incógnitas poderá ter

i) uma única solução. Neste caso, dizemos que ele é possível e determinado (SPD)

ii) infinitas soluções. Neste caso, dizemos que o sistema é possível e indeterminado. (SPI)

iii) nenhuma solução. Neste caso, dizemos que é impossível. (SI)

Exemplos

1) Considere o sistema
$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 1 \\ x_1 \quad\quad - x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

cuja matriz ampliada é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3=-3L_1+L_3]{L_2=L_1-L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3=2L_2+L_3]{L_1=-L_2+L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 = 2 \\ 0x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -4 \end{cases} \Rightarrow 0 = -4 \Rightarrow \text{Contradição}$$

Portanto, o sistema não tem solução, ou seja é SI.

2) Considere o sistema $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 6x_1 + 3x_2 = 15 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = \frac{L_1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 6 & 3 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = -6L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, temos o seguinte sistema equivalente

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 5/2 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 5/2 \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_2}$$

Dessa maneira, a segunda equação pode ser "ignorada", pois não estabelece nenhuma condição sobre x_1 e x_2. Ela é verdadeira para qualquer x_1 e x_2. O conjunto solução desse sistema será dado, atribuindo valores arbitrários para a incógnita x_2 e tomando $x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_2$.

Este sistema admite infinitas soluções

Exercícios

Resolva os sistemas lineares a seguir

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 11 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$