INSTITUTO FEDERAL
Sul de Minas Gerais
Campus Muzambinho

Lógica Matemática

Aula 03 – Lógica Proposicional – Parte 2

Prof. Dr. Diego Saqui
Email: diego.saqui@muz.ifsuldeminas.edu.br

Regras de equivalência

Tabelas Verdade

- $a \wedge (b \vee c)$
- $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- $(a \wedge b) \rightarrow b$
- $\neg(a \wedge b) \vee b$

Regras de equivalência

- Existem equivalências importantes para simplificação e manipulação de expressões lógicas com vistas a prova da validade de argumento.
- Com exceção da lei da dupla negação, todas leis apresentadas no slide posterior são abordadas em pares, denominados pares duais.

Leis	Nome
$\alpha \wedge \neg\alpha \equiv$ falso	Lei da contradição
$\alpha \vee \neg\alpha \equiv$ verdade	Lei do meio excluído
$\alpha \wedge$ verdade $\equiv \alpha$ $\alpha \vee$ falso $\equiv \alpha$	Leis da identidade
$\alpha \wedge$ falso $\equiv$ falso $\alpha \vee$ verdade $\equiv$ verdade	Leis da dominação
$\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$ $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$	Leis idempotentes
$\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$	Lei da dupla negação
$\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$ $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$	Leis comutativas
$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	Leis associativas
$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$	Leis distributivas
$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$ $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$	Leis De Morgan

Importantes para operações que serão realizadas no futuro

Equivalência da Condicional e da Bicondicional

$(\alpha \rightarrow \beta)$	$\equiv$	$\neg\alpha \vee \beta$	(1)
$(\alpha \leftrightarrow \beta)$	$\equiv$	$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$	(2)
$(\alpha \leftrightarrow \beta)$	$\equiv$	$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ $(\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha)$	(3)

Tabela que evidencia a equivalência (1) anterior

	α	β	$\neg\alpha$	$(\alpha \to \beta)$	$(\neg\alpha \vee \beta)$	$(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \vee \alpha)$
I_1	v	v	f	v	v	v
I_2	v	f	f	f	f	v
I_3	f	v	v	v	v	v
I_4	f	f	v	v	v	v

Demonstração

INSTITUTO FEDERAL

Tabela que evidencia a equivalência (2) anterior

Tabela 1.30 Tabela-verdade que evidencia a equivalência ( )

	α	β	$\neg\alpha$	$\neg\beta$	$(\alpha \leftrightarrow \beta)$	$(\alpha \to \beta)$	$(\beta \to \alpha)$	$(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$	$(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow ((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha))$
I_1	v	v	f	f	v	v	v	v	v
I_2	v	f	f	f	f	f	v	f	v
I_3	f	v	v	v	f	v	f	f	v
I_4	f	f	v	v	v	v	v	v	v

Demonstração

INSTITUTO FEDERAL

Tabela que evidencia a equivalência (3) anterior

Tabela 1.31 Tabela-verdade que evidencia a equivalência (3)

	α	β	$\neg\alpha$	$\neg\beta$	$(\alpha \leftrightarrow \beta)$	$(\neg\alpha \vee \beta)$	$(\neg\beta \vee \alpha)$	$(\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha)$	$(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha)$
I_1	v	v	f	f	v	v	v	v	v
I_2	v	f	f	f	f	f	v	f	v
I_3	f	v	v	v	f	v	f	f	v
I_4	f	f	v	v	v	v	v	v	v

Demonstração

Equivalências importantes

$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)$	$\equiv$	α	absorção
$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$	$\equiv$	α	absorção
$(\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta)$	$\equiv$	β	
$(\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \beta)$	$\equiv$	β	

Formas Normais

Formas Normais

- É possível observar que há várias maneiras de escrever uma mesma fórmula. Ex.: $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge \gamma \equiv (\neg\alpha \vee \beta) \wedge \gamma$.
- Muitas vezes, adotamos uma padronização na notação para poder expressas as formulas de uma maneira única para facilitar a comparações.
- Duas formas são utilizadas e normalmente conhecidas, tais como:
  - **Forma Normal Conjuntiva (FNC)** (importante para linguagem de programação Prolog).
  - **Forma Normal Disjuntiva (FND).**

Forma Normal Conjuntiva (FNC)

- Definição: Diz-se que uma fórmula α está na FNC quando α for uma conjunção $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \cdots \wedge \beta_n$, em que cada $\beta_i (1 \leq i \leq n)$ é uma cláusula (disjunção de literais). Então dizemos que α está na FNC sse:
  - Contém como conectivos apenas ∧, ∨ e ¬;
  - ¬ só opera sobre proposições atômicas: não tem alcance sobre ∧ e ∨ ;
  - Não apresenta operadores de negação sucessivos como ¬¬;
  - ∨ não tem alcance em ∧: ex.: não existe expressões como $p \vee (q \wedge r)$.

Forma Normal Conjuntiva

- Exemplo:
- (a) Para a fórmula α: $(\neg \mathrm{p} \vee q) \rightarrow r$, tem-se que:

$$FNC(\alpha): (\neg \mathrm{p} \vee \neg q \vee r) \wedge (\mathrm{p} \vee \neg q \vee r) \wedge (\mathrm{p} \vee q \vee r)$$

- (b) As seguintes fórmulas da Lógica Proporcional estão na FNC:

  1-) $\mathrm{p} \wedge (q \vee r)$

  2-) $\mathrm{p} \wedge verdade$

  3-) $\neg \mathrm{p} \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge \mathrm{s}$

- (c) Já a expressão $\mathrm{p} \wedge (r \vee (p \wedge s))$ não está na FNC porque a disjunção $r \vee (p \wedge s)$ contém uma conjunção como subfórmula.

Forma Normal Conjuntiva

- Para obtenção da FNC de uma fórmula não tautológica α com n átomos, procura-se na tabela-verdade de α as interpretações que avaliam α como f.
- Para cada uma dessas interpretações I_i constrói-se uma disjunção da seguinte maneira:
  - Se na interpretação I_i o átomo p da fórmula α é avaliado como v, toma-se $\neg p$ e, se for avaliado como f, toma-se p.
  - Em seguida, determina-se a conjunção das disjunções obtidas em cada uma das interpretações I_i.
- Se a fórmula α for uma tautologia, determina-se que $\mathrm{FNC}(\alpha)\text{: } p \vee (\neg p)$, na qual p é fórmula atómica.

Forma Normal Conjuntiva

- Exemplo: Considere a fórmula α: $(\neg p \vee q) \rightarrow r$ e sua Tabela-verdade

	p	q	r	$(\neg p \vee q) \rightarrow r$	
I_1	v	v	v	v	
I_2	v	v	f	**f**	$\leftarrow$
I_3	v	f	v	v	
I_4	v	f	f	v	
I_5	f	v	v	v	
I_6	f	v	f	**f**	$\leftarrow$
I_7	f	f	v	v	
I_8	f	f	f	**f**	$\leftarrow$

Focalizando as interpretações cujo valores-verdade de são, de acordo com o procedimento anterior,

$$\text{FNC}(\alpha):$$
$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$$

Forma Normal Disjuntiva

- Definição: Diz-se que uma fórmula proposicional α está na Forma Normal Disjuntiva (FND) quando α for uma disjunção $\beta_1 \vee \beta_2 \vee \beta_3 \vee \cdots \vee \beta_n$, em que cada $\beta_i (1 \leq i \leq n)$ é uma conjunção de literais. Pode-se então dizer que uma fórmula α está na FND se e somente se:
  - Contém como conectivos apenas ∧, ∨ e ¬;
  - ¬ só opera sobre proposições atômicas, isto é, não tem alcance sobre ∧ e ∨ ;
  - Não apresenta operadores de negação sucessivos como ¬¬;
  - ∧ não tem alcance sobre ∨, ou seja, não existe expressões tais como $\mathrm{p} \wedge (q \vee r)$.

- Se β é uma FND equivalente a α, então β é referenciada como FND(α)

Forma Normal Disjuntiva

- Para obtenção da FND de uma fórmula não tautológica α com n átomos, procura-se na tabela-verdade de α as interpretações que avaliam α como v. Para cada uma dessas interpretações $I_i (1 \leq i \leq 2^n)$ constrói-se uma conjunção da seguinte maneira:
  - Se na interpretação I_i o átomo p da fórmula α é avaliado como v, toma-se p e, se for avaliado como f, toma-se $\neg\, p$.
  - Em seguida, determina-se a conjunção das disjunções obtidas em cada uma das interpretações I_i. Se a fórmula α for uma contradição, determina-se que $\mathrm{FND}(\alpha)$: $p \wedge (\neg p)$, na qual p é fórmula atómica.

Obtenção da FNC por Equivalência

1. Repetidamente, usar as equivalências, para eliminar os conectivos lógicos $\leftrightarrow$ e $\rightarrow$:

$$\alpha \leftrightarrow \beta \quad \equiv \quad (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha)$$

$$\alpha \rightarrow \beta \quad \equiv \quad \neg\alpha \vee \beta$$

2. Repetidamente, eliminar as negações, utilizando:

$$\neg(\neg\alpha) \quad \equiv \quad \alpha$$

$$\neg(\alpha \vee \beta) \quad \equiv \quad (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \quad \equiv \quad (\neg\alpha \vee \neg\beta)$$

3. Repetidamente, aplicar a lei distributiva:

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \quad \equiv \quad (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$$

$$(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \quad \equiv \quad (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$$

Exemplo

- Obter a FNC das fórmulas:
  - a) $(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \wedge r)$
  - b) $(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r)$
- i) Usando equivalência
- ii) Usando tabela verdade

Notação clausal

Notação clausal

- Uma fórmula α representada na FNC é uma conjunção de cláusulas:

$$FNC(\alpha): F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n$$

- Uma cláusula, por sua vez, é uma disjunção de literais (átomo ou átomo negado), isto é:

$$F_i = L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_s$$

- Uma das vantagens de se ter a FNC de uma fórmula α é poder garantir que se o valor de α em uma interpretação for V, então cada cláusula também é.
- Como a FNC é uma conjunção de cláusulas, a ordem destas cláusulas é irrelevante – pela propriedade associativa. Assim, pode-se dizer que a FNC de α é uma coleção de cláusulas:

$$\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$$

Notação clausal

- Exemplo
  - $FNC(((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow s)$:
    - $((s \vee \neg q \vee p) \wedge (s \vee \neg p \vee \neg r) \wedge (s \vee \neg q \vee \neg r))$
- Pode-se escrever:
  - $FNC(((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow s)$: $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$
- onde
  - F_1: $(s \vee \neg q \vee p)$, F_2: $(s \vee \neg p \vee \neg r)$, F_3: $(s \vee \neg q \vee \neg r)$
  - que pode ser representado por $F = \{F_1, F_2, F_3\}$, onde a conjunção está implícita

Fim