LIMITE E CONTINUIDADE

Antes de definirmos limite, vejamos um exemplo. Considere a função

$$f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1}$$

Essa função está definida em $\mathbb{R} - \{1\}$. Se $x \neq 1$, a função pode ser escrita como $f(x) = 2x + 3$ e temos, então seu gráfico:

Estudaremos agora os valores de $f(x)$ quando x estiver próximo a 1 mas não igual a 1. Fazendo a variável x aproximar-se de 1 através de valores menores ou maiores que 1, podemos construir as tabelas a seguir:

x	$f(x)$
0,9	
0,99	
0,999	
0,9999	
0,99999	

x	$f(x)$
1,1	
1,01	
1,001	
1,0001	
1,00001	

Vemos, em ambas as tabelas que quando x se aproxima cada vez mais de 1, $f(x)$ se aproxima cada vez mais de 5. Ou seja, é possível fazer com que o valor de $f(x)$ se aproxime de 5 tanto quanto desejamos, bastando, para isso, tomar um valor de x suficientemente próximo de 1.

De fato, podemos escrever que

$$4,8 < f(x) < 5,2 \text{ sempre que } 0,9 < x < 1,1$$
$$4,98 < f(x) < 5,02 \text{ sempre que } 0,99 < x < 1,01$$
$$4,998 < f(x) < 5,002 \text{ sempre que } 0,999 < x < 1,001$$
$$4,9998 < f(x) < 5,0002 \text{ sempre que } 0,9999 < x < 1,0001$$
$$4,99998 < f(x) < 5,00002 \text{ sempre que } 0,99999 < x < 1,00001$$

Usualmente, utilizamos as letras gregas ε (épsilon) e δ (delta) para indicar pequenos números reais positivos. Assim

$$5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon \text{ sempre que } 1 - \delta < x < 1 + \delta,$$

ou usando notação modular,

$$-\varepsilon < f(x) - 5 < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon \text{ sempre que } -\delta < x - 1 < \delta \Rightarrow |x - 1| < \delta$$

A condição $0 < |x-1|$ é colocada pois não nos interessa o que ocorre quando $x = 1$.

É importante perceber que o tamanho do δ depende do tamanho de ε. Poderíamos continuar a dar qualquer valor pequeno a ε e encontrar um valor apropriado para δ tal que $|f(x) - 5| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 1| < \delta$. Dizemos, então, que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de 1 é igual a 5, ou em símbolos,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 5$$

Definição 9: Seja $f(x)$ uma função definida num intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio a, e seja L um número real. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

A definição anterior afirma que os valores de função $f(x)$ tendem a um limite L quando x tende a um número a, mas não igual a a.

Exemplos:

a) Seja $f(x) = 3x + 7$. Dado que $\lim_{x \to -2} f(x) = 1$, encontre δ para $\varepsilon = 0,03$ tal que

$$|f(x) - 1| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - (-2)| < \delta.$$

b) Usando a definição, demonstre que $\lim_{x \to 4}(3x - 1) = 11$.

c) Usando a definição, demonstre que $\lim_{x \to 2}(x^2) = 4$.

Exercícios

1) Nos exercícios abaixo, damos $f(x)$, a e L, bem como $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Determine um δ para o ε dado tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

a) $\lim_{x \to 1}(2x + 3) = 5; \qquad \varepsilon = 0,0001$

b) $\lim_{x \to -1}(1 - 2x) = 3; \qquad \varepsilon = 0,0005$

c) $\lim_{x \to 3} x^2 = 9; \qquad \varepsilon = 0,0005$

d) $\lim_{x \to -3}\left(\dfrac{x^2 - 9}{x + 3}\right) = -6; \qquad \varepsilon = 0,0005$

e) $\lim_{x \to 5}\left(\dfrac{x + 1}{2}\right) = 3; \qquad \varepsilon = 0,1$

2) Nos exercícios abaixo, demonstre os limites, isto é, para qualquer $\varepsilon > 0$, encontre um δ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

a) $\lim\limits_{x \to 4}(2x - 5) = 3$

b) $\lim\limits_{x \to -2}(7 - 2x) = 11$

c) $\lim\limits_{x \to 2}\left(\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}\right) = 4$

d) $\lim\limits_{x \to 1}x^2 = 1$

e) $\lim\limits_{x \to 3}8 = 8$

Teorema (da unicidade): Se $\lim\limits_{x \to a}f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to a}f(x) = L_2$ então $L_1 = L_2$.

Teoremas sobre limites de funções

Introduziremos alguns limites que nos auxiliarão no cálculo de limites e que são provados pela definição de limite, embora a prova será omitida.

Teorema 1: Se m e b forem constantes quaisquer, $\lim\limits_{x \to a}(mx + b) = ma + b$

Consequência 1: Se $m = 0$, então $\lim\limits_{x \to a}b = b$

Consequência 2: Se $m = 1$ e $b = 0$, então $\lim\limits_{x \to a}x = a$

Exemplos:

a) $\lim\limits_{x \to 2}(3x + 5) =$

b) $\lim\limits_{x \to 5}7 =$

a) $\lim\limits_{x \to -6}x =$

Teorema 2: Se $\lim\limits_{x \to a}f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a}g(x) = M$, então $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$

Consequência: Se $\lim\limits_{x \to a}f_1(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a}f_2(x) = L_2$, ... , $\lim\limits_{x \to a}f_n(x) = L_n$ então

$$\lim_{x \to a}[f_1(x) \pm f_2(x) \pm ... \pm f_n(x)] = L_1 \pm L_2 \pm ... \pm L_n$$

Teorema 3: Se $\lim\limits_{x \to a}f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a}g(x) = M$, então $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

Consequência 1: Se $\lim\limits_{x \to a}f_1(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a}f_2(x) = L_2$, ... , $\lim\limits_{x \to a}f_n(x) = L_n$ então

$$\lim_{x \to a}[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot ... \cdot f_n(x)] = L_1 \cdot L_2 \cdot ... \cdot L_n$$

Consequência 2: Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e n for um inteiro positivo qualquer, então

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^n = L^n$$

Exemplos:

a) $\lim_{x\to 3}[x(2x+1)] =$

b) $\lim_{x\to -2}(5x+7)^4 =$

Teorema 4: Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M \neq 0$, então $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$

Exemplo: $\lim_{x\to 4} \dfrac{x}{-7x+1} =$

Teorema 5: Se n for um inteiro positivo e $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ com a restrição de que se n for par, $L > 0$.

Exemplo: $\lim_{x\to 4} \sqrt[3]{\dfrac{x}{-7x+1}} =$

Outros exemplos: Nos exemplos abaixo, ache cada limite e indique quais teoremas foram usados:

a) $\lim_{x\to 2}(x^2 - 7x + 8) =$

b) $\lim_{x\to 8}\left(\dfrac{x^2 + \sqrt[3]{x}}{4 - \frac{16}{x}}\right) =$

c) $\lim_{x\to \pi}\left(\sqrt[3]{\dfrac{x-\pi}{x+\pi}}\right) =$

d) $\lim_{x\to 7}\left(\dfrac{x^2-49}{x-7}\right) =$

Exercícios

1) Nos Exercícios abaixo, encontre os limites, indicando os teoremas usados:

a) $\lim_{x\to 3}(x^2-3x+5)$

b) $\lim_{x\to -2}(2x^3-6x^2+3x-2)$

c) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x+3}{2x^2-6x+5}\right)$

d) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3-1}{x-1}\right)$

e) $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{(x-2)}\right)$

f) $\lim_{x\to 0}(5x\sqrt{4+3x^2})$

Limites Laterais

Definição 1: Seja f uma função definida no intervalo (a,c). Então o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita será L, denotado por

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \text{ tal que,} \\ |f(x) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < x - a < \delta \end{cases}$$

Então, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ significa que podemos fazer $|f(x) - L|$ tão pequeno quanto desejamos, tomando x suficientemente próximo de a porém **maior** que a.

Definição 2: Seja f uma função definida no intervalo (d,a). Então o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda será L, denotado por

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \text{ tal que,} \\ |f(x) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } -\delta < x - a < 0 \end{cases}$$

Então, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ significa que podemos fazer $|f(x) - L|$ tão pequeno quanto desejamos, tomando x suficientemente próximo de a porém **menor** que a.

Teorema: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe e será igual a L se e somente se $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ existirem e ambos forem iguais a L.

Observação: se $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ existirem e forem diferentes, então $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ não existirá.

Os teoremas de limite dados anteriormente, bem como suas consequências, continuam válidos quando substituímos $x \to a$ por $x \to a^+$ ou $x \to a^-$.

Exemplos: Em cada exemplo, esboce o gráfico da função, calcule os limites laterais da função quando $x \to a^+$ e quando $x \to a^-$ e determine o limite da função quando $x \to a$ (se existir).

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 1 \\ -2x+4 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$; $\qquad a = 1.$

b) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$; $\qquad a = 0.$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}; \qquad a = 0.$

Exercícios

1. Esboce o gráfico de $f(x)$, calcule $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ (se existir) para cada um dos itens a seguir:

   a) $f(x) = \begin{cases} |x-2|, & \text{se } x \neq 2 \\ 3, & \text{se } x = 2 \end{cases}; \qquad a = 2.$

   b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x-4}, & \text{se } x \neq 4 \\ 5, & \text{se } x = 4 \end{cases}; \qquad a = 4.$

   c) $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{se } x < 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \\ 7-2x, & \text{se } x > 1 \end{cases}; \qquad a = 1.$

   d) $f(x) = 5 + |6x-3|; \qquad a = \dfrac{1}{2}$

   e) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 2 \\ 8-2x, & \text{se } x > 2 \end{cases}; \qquad a = 2.$

   f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+10}{|x+10|}, & \text{se } x \neq -10 \\ 0, & \text{se } x = -10 \end{cases}; \qquad a = -10.$

   g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{|x^2-1|}, & \text{se } x \neq 1 \text{ e } x \neq -1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{cases}; \qquad a = 1.$

   h) $f(x) = \begin{cases} 5+x, & \text{se } x \leq 3 \\ 9-x, & \text{se } x > 3 \end{cases}; \qquad a = 3.$

2. Dados: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{se } x \leq 1 \\ x + 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$
obtenha $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to 1} [f(x).g(x)]$, caso existam.