## Uma Aplicação na Física

O produto vetorial é uma importante ferramenta matemática utilizada na Física. Dentre algumas de suas aplicações pode-se citar o *torque*.

O torque é uma grandeza vetorial, representado por $\tau$, e está relacionada com a possibilidade de um corpo sofrer uma torção ou alterar seu movimento de rotação.

A equação para o cálculo do torque é

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

onde $|\vec{r}|$ é a distância do ponto de aplicação da força $\vec{F}$ ao eixo de rotação, ao qual o corpo está vinculado.

Lembrando o cálculo do módulo do produto vetorial visto em (3) tem-se

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}|\,|\vec{F}| \text{ sen } \theta$$

onde $\theta$ é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$.

### Exemplo

Calcular o torque sobre a barra $\overline{AB}$ (Figura 3.11), onde $\overrightarrow{AB} = \vec{r} = 2\vec{j}$ (em metros), $\vec{F} = 10\vec{i}$ (em newtons) e o eixo de rotação é o eixo z.

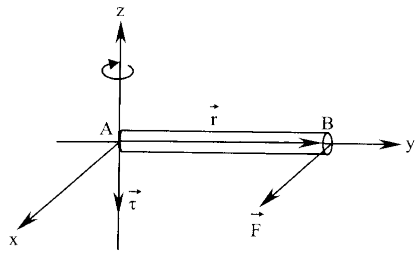


**Figura 3.11**

### Solução

O vetor torque, para o caso desta figura, é dado por

$$\vec{\tau} = (0\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k})\text{m} \times (10\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k})\text{N}$$

ou

$$\vec{\tau} = (0\vec{i} + 0\vec{j} - 20\vec{k})\text{mN}$$

ou

$$\vec{\tau} = (-20\vec{k})\text{mN}$$

A intensidade (módulo) do torque pode ser calculado por

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}|\,|\vec{F}| \text{ sen } \theta = (2\text{m})(10\text{N})\ (\text{sen } 90^\circ) = 20\text{mN}$$

ou por

$$|\vec{\tau}| = \sqrt{(-20)^2} = 20\text{mN}$$



### Observação

Caso a força $\vec{F}$ seja invertida (Figura 3.12), isto é, $\vec{F} = -10\vec{i}$ (em newtons), o torque é dado por

$$\vec{\tau} = (0\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k})\text{m} \times (-10\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k})\text{N}$$

ou

$$\vec{\tau} = (20\vec{k})\text{mN}.$$

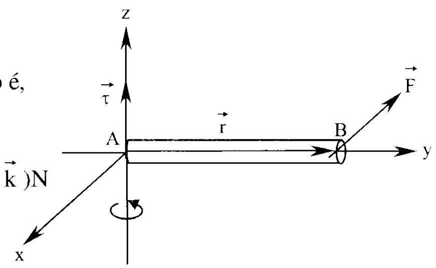


**Figura 3.12**

## Problemas Propostos

1) Se $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{w} = -\vec{i} + \vec{k}$, determinar

| | | |
|---|---|---|
| a) $\lvert\vec{u} \times \vec{u}\rvert$ | e) $(\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{w}$ | i) $\vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ |
| b) $(2\vec{v}) \times (3\vec{v})$ | f) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ | j) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v}$ |
| c) $(\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{w} \times \vec{u})$ | g) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ | k) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ |
| d) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{u})$ | h) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})$ | l) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ |

2) Efetuar

| | | |
|---|---|---|
| a) $\vec{i} \times \vec{k}$ | e) $(3\vec{i}) \cdot (2\vec{j})$ | i) $(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{k}$ |
| b) $\vec{j} \times (2\vec{i})$ | f) $(3\vec{i}) \times (2\vec{j})$ | j) $(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{j}$ |
| c) $(3\vec{i}) \times (2\vec{k})$ | g) $\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{i})$ | k) $\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{j})$ |
| d) $\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k})$ | h) $\vec{j} \cdot (\vec{j} \times \vec{k})$ | l) $(\vec{j} \times \vec{k}) \cdot \vec{i}$ |

3) Dados os pontos A(2, 1, -1), B(3, 0, 1) e C(2, -1, -3), determinar o ponto D tal que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}$.

4) Determinar o vetor $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \cdot (1, 4, -3) = -7$ e $\vec{x} \times (4, -2, 1) = (3, 5, -2)$.

5) Resolver os sistemas

a) $\begin{cases} \vec{x} \times \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{x} \cdot (4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \vec{x} \times (2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) = \vec{0} \\ \vec{x} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}) = 12 \end{cases}$

6) Dados os vetores $\vec{u} = (3, 1, 1)$, $\vec{v} = (-4, 1, 3)$ e $\vec{w} = (1, 2, 0)$, determinar $\vec{x}$ de modo que $\vec{x} \perp \vec{w}$ e $\vec{x} \times \vec{u} = \vec{v}$.

7) Levando em conta a Figura 3.13, calcular

a) $\overrightarrow{OF} \times \overrightarrow{OD}$ d) $\overrightarrow{EC} \times \overrightarrow{EA}$

b) $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{FA}$ e) $\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OE})$

c) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ f) $\overrightarrow{GB} \times \overrightarrow{AF}$

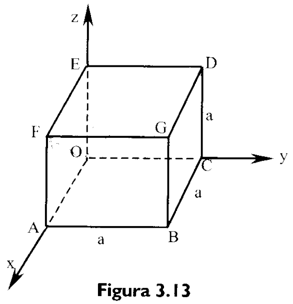


Figura 3.13

8) Sejam os vetores $\vec{u} = (1, -2, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$ e $\vec{w} = (1, 0, -1)$.

a) Utilizar o produto escalar para mostrar que os vetores são, dois a dois, ortogonais.

b) Utilizar o produto vetorial para mostrar que o produto vetorial de quaisquer dois deles é paralelo ao terceiro vetor.

c) Mostrar que $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{0}$

9) Determinar um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} + 2\vec{v}$ e $\vec{v} - \vec{u}$, sendo $\vec{u} = (-3, 2, 0)$ e $\vec{v} = (0, -1, -2)$.

10) Obter um vetor ortogonal ao plano determinado pelos pontos A(2, 3, 1), B(1, -1, 1) e C(4, 1, -2).

11) Dado $\vec{v}_1 = (1, -2, 1)$, determinar vetores $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ de modo que os três sejam mutuamente ortogonais.

12) Dados os vetores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 2)$, determinar

a) um vetor unitário simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) um vetor de módulo 5 simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

13) Determinar um vetor de módulo 2 ortogonal a $\vec{u} = (3, 2, 2)$ e a $\vec{v} = (0, 1, 1)$.

14) Com base na Figura 3.14, calcular

a) $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$

b) $|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}|$

c) $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DC}|$

d) $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}|$

e) $|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{AC}|$

f) $|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{CD}|$

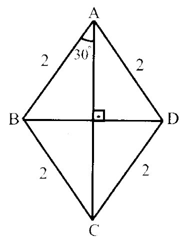


Figura 3.14

15) Sendo $|\vec{u}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{v}| = 4$ e 45° o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular

a) $|2\vec{u} \times \vec{v}|$ b) $\left|\frac{2}{5}\vec{u} \times \frac{1}{2}\vec{v}\right|$

16) Determinar $\vec{u} \cdot \vec{v}$, sabendo que $|\vec{u} \times \vec{v}| = 12$, $|\vec{u}| = 13$ e $\vec{v}$ é unitário.



17) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 2)$ e $\vec{v} = (-2, 2, 1)$, calcular

a) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) a altura do paralelogramo relativa à base definida pelo vetor $\vec{v}$.

18) Mostrar que o quadrilátero ABCD de vértices A(4, 1, 2), B(5, 0, 1), C(-1, 2, -2) e D (-2, 3, -1) é um paralelogramo e calcular sua área.

19) Dois vértices consecutivos de um paralelogramo são A(2, -4, 0) e B(1, -3, -1) e o ponto médio das diagonais é M (3, 2, -2). Calcular a área do paralelogramo.

20) Calcular o valor de *m* para que a área do paralelogramo determinado por $\vec{u} = (m, -3, 1)$ e $\vec{v} = (1, -2, 2)$ seja igual a $\sqrt{26}$.

21) Sabendo que $|\vec{u}| = 6$, $|\vec{v}| = 4$ e 30° o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular

a) a área do triângulo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $(-\vec{v})$;

c) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.

22) Calcular a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabendo que suas diagonais são $\vec{u} + \vec{v} = (-1, 3, 4)$ e $\vec{u} - \vec{v} = (1, -1, 2)$.

23) Calcular a distância do ponto P(4, 3, 3) à reta que passa por A(1, 2, -1) e B(3, 1, 1).

24) Calcular a área do triângulo ABC e a altura relativa ao lado BC, sendo dados

a) A(-4, 1, 1), B(1, 0, 1) e C(0, -1, 3)

b) A(4, 2, 1), B(1, 0, 1) e C(1, 2, 0)

25) Encontrar um vetor ortogonal ao plano determinado pelos pontos P, Q e R e calcular a área do triângulo PQR.

a) P(3, 0, 0), Q(0, 3, 0), R(0, 0, 2)

b) P(2, 3, 0), Q(0, 2, 1), R(2, 0, 2)

26) Calcular *z*, sabendo-se que A (2, 0, 0), B(0, 2, 0) e C(0, 0, *z*) são vértices de um triângulo de área 6.

27) Dados os pontos A(2, 1, -1) e B(0, 2, 1), determinar o ponto C do eixo Oy de modo que a área do triângulo ABC seja 1,5 u.a.

28) Sabendo que os pontos A(4, 0, 0), B(0, 0, 2), C(0, 3, 0) e D(4, 3, -2) são coplanares, calcular a área do quadrilátero ABCD.

29) Os pontos médios dos lados do triângulo ABC são M(0, 1, 3), N(3, -2, 2) e P(1, 0, 2). Determinar a área do triângulo ABC.

## Respostas de Problemas Propostos

1) a) 0 d) $\vec{0}$ g) (-6, -20, 1) j) 0

b) $\vec{0}$ e) (-5, 0, -5) h) (8, -2, 13) k) 5

i) (8, -2, 13) l) 5

2) a) $-\vec{j}$ e) 0 i) $\vec{0}$

b) $-2\vec{k}$ f) $6\vec{k}$ j) $-\vec{i}$

c) $-6\vec{j}$ g) 0 k) $\vec{0}$

d) 1 h) 0 l) 1

3) D (-4, -1, 1)

4) $\vec{x} = (3, -1, 2)$

5) a) $\vec{x} = (1, -3, 0)$ b) $\vec{x} = (-4, 2, -6)$

6) Não existe $\vec{x}$ pois $\vec{u}$ não é ortogonal a $\vec{v}$.

7) a) $(-a^2, -a^2, a^2)$ c) $(0, 0, a^2)$ e) $a^3$

b) $(-a^2, -a^2, 0)$ d) $(-a^2, -a^2, -a^2)$ f) $\vec{0}$

9) Um deles: $(\vec{u} + 2\vec{v}) \times (\vec{v} - \vec{u}) = (-12, -18, 9)$

10) Um deles: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (12, -3, 10)$

11) Uma das infinitas soluções: $\vec{v}_1 = (1, -2, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 1)$ e $\vec{v}_3 = (-1, 0, 1)$

12) a) $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ou $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

b) $(\frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}})$ ou $(-\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}})$

13) $(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ou $(0, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$

14) a) $2\sqrt{3}$ c) 0 e) $4\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{3}$ d) 0 f) $2\sqrt{3}$

15) a) 16 b) $\frac{8}{5}$

16) 5 ou -5

17) a) $3\sqrt{10}$ b) $\sqrt{10}$

18) $\sqrt{122}$

19) $2\sqrt{74}$

20) 0 ou 2

21) a) 6 b) 12 c) 24

22) $\sqrt{35}$

23) $\frac{\sqrt{65}}{3}$



24) a) $\sqrt{35}$ e $\frac{2\sqrt{35}}{\sqrt{6}}$ b) $\frac{7}{2}$ e $\frac{7}{\sqrt{5}}$

25) a) $t\,(2, 2, 3),\ t \in \mathbb{R}$ e $\frac{3\sqrt{17}}{2}$ b) $t\,(1, 4, 6),\ t \in \mathbb{R}$ e $\frac{\sqrt{53}}{2}$.

26) 4 ou -4

27) C (0, 1, 0) ou C $(0, \frac{5}{2}, 0)$

28) $2\sqrt{61}$

29) $4\sqrt{2}$