(a) $|V \cdot W| \leq ||V||\,||W||$;

(b) $||V+W|| \leq ||V|| + ||W||$; (Sugestão: mostre que $||V+W||^2 = (V+W)\cdot(V+W) \leq (||V||+||W||)^2$, usando o item anterior)

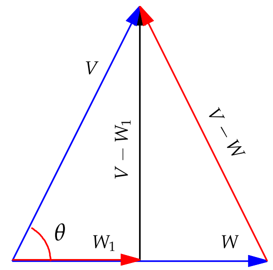
(c) $\Big|\, ||V|| - ||W|| \,\Big| \leq ||V-W||$. (Sugestão: defina $U = V - W$ e aplique o item anterior a U e W)

3.2.21. Sejam U_1, U_2 e U_3 três vetores unitários mutuamente ortogonais. Se $A = [\; U_1 \; U_2 \; U_3 \;]$ é uma matriz 3×3 cujas colunas são os vetores U_1, U_2 e U_3, então A é invertível e $A^{-1} = A^t$. (Sugestão: mostre que $A^t A = I_3$.)

3.3 Produtos Vetorial e Misto

3.3.1 Produto Vetorial

Vamos, agora, definir um produto entre dois vetores, cujo resultado é um vetor. Por isso, ele é chamado **produto vetorial**. Este produto tem aplicação, por exemplo, em Física: a força exercida sobre uma partícula com carga unitária mergulhada num campo magnético uniforme é o produto vetorial do vetor velocidade da partícula pelo vetor campo magnético.



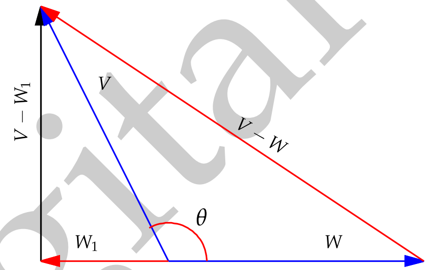


Figura 3.20. Triângulos formados por representantes de V, W e $V - W$, de V, W_1 e $V - W_1$ e $V - W_1$, $V - W$ e $W - W_1$, em que $W_1 = \text{proj}_W V$. À esquerda o ângulo entre V e W é agudo e à direita é obtuso.

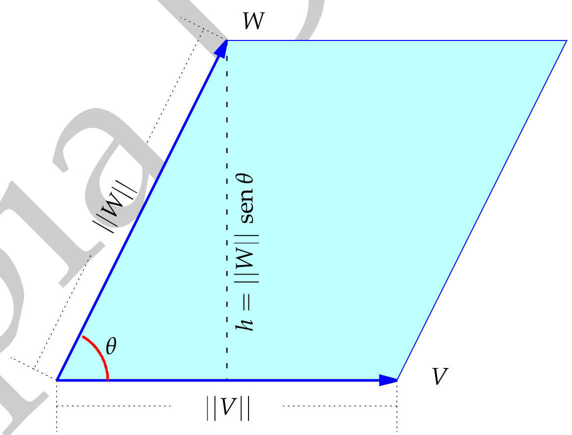


Figura 3.21. Área de um paralelogramo determinado por dois vetores

Sejam V e W dois vetores no espaço. Se os vetores forem não nulos, definimos o **produto vetorial**, $V \times W$, como sendo o vetor com as seguintes características:

(a) Tem comprimento dado numericamente por

$$||V \times W|| = ||V||\,||W|| \operatorname{sen} \theta,$$

ou seja, a *norma* de $V \times W$ é numericamente igual à área do paralelogramo determinado por V e W.

(b) Tem direção perpendicular a V e a W.

(c) Tem o sentido dado pela regra da mão direita (Figura 3.22): Se o ângulo entre V e W é θ, giramos o vetor V de um ângulo θ até que coincida com W e acompanhamos este movimento com os dedos da mão direita, então o polegar vai apontar no sentido de $V \times W$.

Se um dos vetores for o vetor nulo, o produto vetorial, $V \times W$, é definido como sendo o vetor nulo.

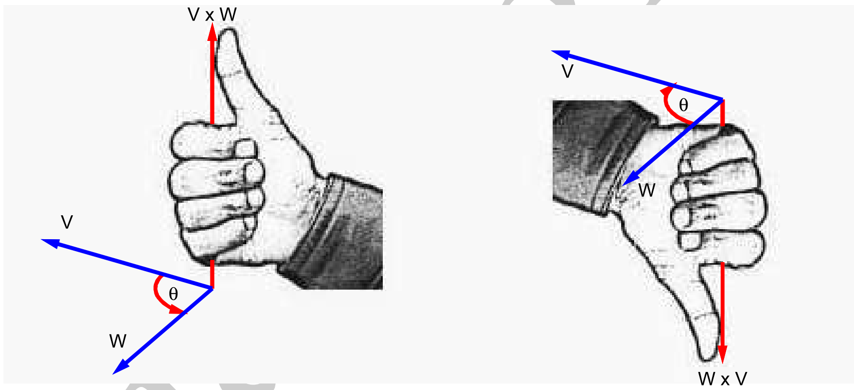


Figura 3.22. Regra da mão direita

Da forma como definimos o produto vetorial é difícil o seu cálculo, mas as propriedades que apresentaremos a seguir possibilitarão obter uma fórmula para o produto vetorial em termos das componentes dos vetores.

Teorema 3.5. *Sejam U, V e W vetores no espaço e α um escalar. São válidas as seguintes propriedades:*

(a) $V \times W = -(W \times V)$ *(anti-comutatividade).*

(b) $V \times W = \bar{0}$ *se, e somente se,* $V = \alpha W$ *ou* $W = \alpha V$.

(c) $(V \times W) \cdot V = (V \times W) \cdot W = 0$.

(d) $\alpha(V \times W) = (\alpha V) \times W = V \times (\alpha W)$.

(e) $V \times (W + U) = V \times W + V \times U$ *e* $(V + W) \times U = V \times U + W \times U$ *(Distributividade em relação a soma de vetores).*

Demonstração. (a) Pela definição do produto vetorial $V \times W$ e $W \times V$ têm o mesmo comprimento e a mesma direção. Além disso trocando-se V por W troca-se o sentido de $V \times W$ (Figura 3.22).

(b) $||V \times W|| = 0$ se, e somente se, um deles é o vetor nulo ou $\operatorname{sen}\theta = 0$, em que θ é o ângulo entre V e W, ou seja, V e W são paralelos. Assim, $V \times W = \bar{0}$ se, e somente se, $V = \alpha W$ ou $W = \alpha V$.

(c) Segue-se imediatamente da definição do produto vetorial.

(d) Segue-se facilmente da definição do produto vetorial, por isso deixamos como exercício para o leitor.

(e) Este item será demonstrado no Apêndice III na página 203. ■

Os **vetores canônicos**

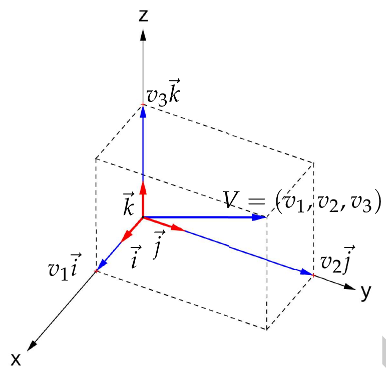
$$\boxed{\vec{i} = (1,0,0), \qquad \vec{j} = (0,1,0) \quad \text{e} \quad \vec{k} = (0,0,1)}$$

são vetores unitários (de norma igual a um) paralelos aos eixos coordenados. Todo vetor

$$V = (v_1, v_2, v_3)$$

pode ser escrito como uma soma de múltiplos escalares de $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ (combinação linear), pois

$$\begin{aligned} V = (v_1, v_2, v_3) &= (v_1, 0, 0) + (0, v_2, 0) + (0, 0, v_3) = \\ &= v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1) = \\ &= v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j} + v_3\,\vec{k}. \end{aligned} \tag{3.9}$$


z
$v_3\vec{k}$
$\vec{k}$
$V = (v_1, v_2, v_3)$
$v_1\vec{i}$
$\vec{i}$
$\vec{j}$
$v_2\vec{j}$
y
x

Da definição de produto vetorial podemos obter facilmente as seguintes relações:

$$\begin{array}{lll} \vec{i}\times\vec{i}=\bar{0}, & \vec{j}\times\vec{j}=\bar{0}, & \vec{k}\times\vec{k}=\bar{0}, \\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}, & \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}, & \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}, \\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}, & \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}, & \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}. \end{array}$$

Agora, estamos prontos para obter uma fórmula que dê o produto vetorial de dois vetores em termos das suas componentes.

Teorema 3.6. *Sejam $V=(v_1,v_2,v_3)$ e $W=(w_1,w_2,w_3)$ vetores no espaço. Então o produto vetorial $V\times W$ é dado por*

$$V\times W=\left(\det\begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3\end{bmatrix}, -\det\begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3\end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2\end{bmatrix}\right). \tag{3.10}$$

Demonstração. De (3.9) segue-se que podemos escrever

$$V=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k} \quad \text{e} \quad W=w_1\vec{i}+w_2\vec{j}+w_3\vec{k}.$$

Assim, pela distributividade do produto vetorial em relação a soma, temos que

$$\begin{aligned}
V \times W &= (v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}) \times (w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}) \\
&= v_1w_1(\vec{i}\times\vec{i}) + v_1w_2(\vec{i}\times\vec{j}) + v_1w_3(\vec{i}\times\vec{k}) + \\
&\quad + v_2w_1(\vec{j}\times\vec{i}) + v_2w_2(\vec{j}\times\vec{j}) + v_2w_3(\vec{j}\times\vec{k}) + \\
&\quad + v_3w_1(\vec{k}\times\vec{i}) + v_3w_2(\vec{k}\times\vec{j}) + v_3w_3(\vec{k}\times\vec{k}) \\
&= (v_2w_3 - v_3w_2)\vec{i} + (v_3w_1 - v_1w_3)\vec{j} + (v_1w_2 - v_2w_1)\vec{k} \\
&= \det\begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}\vec{i} - \det\begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}\vec{j} + \det\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix}\vec{k} \\
&= \left(\det\begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}, -\det\begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}$$

■

Para obter as componentes do produto vetorial $V \times W$ procedemos como se segue:

- Escreva a matriz:
$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix};$$

- Para calcular a primeira componente de $V \times W$, elimine a primeira coluna da matriz acima e calcule o determinante da sub-matriz resultante. A segunda componente é obtida, eliminando-se a segunda coluna e calculando-se o determinante da sub-matriz resultante com o *sinal trocado*. A terceira é obtida como a primeira, mas eliminando-se a terceira coluna.

Exemplo 3.11. Sejam $V = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ e $W = 3\vec{i} + \vec{k}$. Vamos determinar o produto vetorial $V \times W$. Como

$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

então

$$V \times W = \left(\det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right) = (2, -7, -6)\,.$$

Usando os vetores $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ o produto vetorial $V \times W$, pode ser escrito em termos do "determinante"

$$V \times W = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix} \vec{i} - \det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix} \vec{j} + \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \vec{k}\,.$$

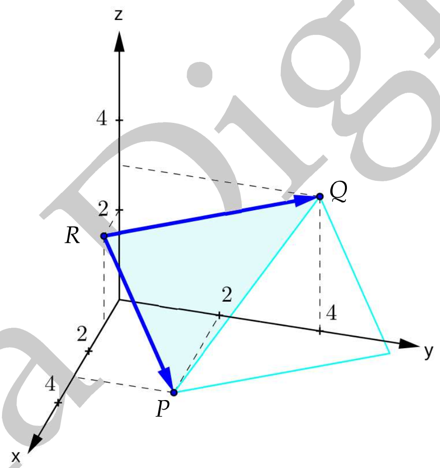


Figura 3.23. Área do triângulo PQR

Exemplo 3.12. Vamos calcular a área do triângulo PQR em que (Figura 3.23)

$$P = (3, 2, 0), \quad Q = (0, 4, 3) \quad \text{e} \quad R = (1, 0, 2).$$

Sejam

$$V = \overrightarrow{RP} = (3 - 1, 2 - 0, 0 - 2) = (2, 2, -2)$$

$$W = \overrightarrow{RQ} = (0 - 1, 4 - 0, 3 - 2) = (-1, 4, 1).$$

Então,

$$V \times W = (10, 0, 10) = 10(1, 0, 1).$$

A área do triângulo PQR é a metade da área do paralelogramo com lados determinados por V e W. Assim,

$$\text{Área} = \frac{1}{2}||V \times W|| = 5\sqrt{2}.$$

3.3.2 Produto Misto

O produto $(V \times W) \cdot U$ é chamado **produto misto** de U, V e W. O resultado abaixo mostra como calcular o produto misto usando as componentes dos vetores.