Assim, as coordenadas de um ponto P são iguais as componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$ que vai da origem do sistema de coordenadas ao ponto P. Em particular, o vetor nulo, $\bar{0} = (0,0,0)$. Assim, como fizemos para vetores no plano, para vetores no espaço a soma de vetores e a multiplicação de vetor por escalar podem ser realizadas em termos das componentes.

- Se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$, então a adição de V com W é dada por

$$\boxed{V + W = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3);}$$

- Se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e α é um escalar, então a multiplicação de V por α é dada por

$$\boxed{\alpha\, V = (\alpha\, v_1, \alpha\, v_2, \alpha\, v_3).}$$

Exemplo 3.1. Se $V = (1, -2, 3)$, $W = (2, 4, -1)$, então

$$V + W = (1+2, -2+4, 3+(-1)) = (3,2,2), \quad 3V = (3\cdot 1, 3\,(-2), 3\cdot 3) = (3, -6, 9).$$

Quando um vetor V está representado por um segmento orientado com ponto inicial fora da origem (Figura 3.13), digamos em $P = (x_1, y_1, z_1)$, e ponto final em $Q = (x_2, y_2, z_2)$, então as componentes do vetor V são dadas por

$$\boxed{V = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).}$$

Portanto, as componentes de V são obtidas subtraindo-se as coordenadas do ponto Q (extremidade) das do ponto P (origem). O mesmo se aplica a vetores no plano.

Exemplo 3.2. As componentes do vetor V que tem um representante com ponto inicial $P = (5/2, 1, 2)$ e ponto final $Q = (0, 5/2, 5/2)$ são dadas por

$$V = \overrightarrow{PQ} = (0 - 5/2, 5/2 - 1, 5/2 - 2) = (-5/2, 3/2, 1/2).$$

Observação. O vetor é "livre", ele não tem posição fixa, ao contrário do ponto e do segmento orientado. Por exemplo, o vetor $V = (-5/2, 3/2, 1/2)$, no exemplo acima, estava representado por um segmento orientado com a origem no ponto $P = (5/2, 1, 2)$. Mas, poderia ser representado por um segmento orientado cujo ponto inicial poderia estar em qualquer outro ponto.

Um vetor no espaço $V = (v_1, v_2, v_3)$ pode também ser escrito na notação matricial como uma **matriz linha** ou como uma **matriz coluna**:

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}.$$

Estas notações podem ser justificadas pelo fato de que as operações matriciais

$$V + W = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{bmatrix}, \quad \alpha V = \alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \alpha v_3 \end{bmatrix}$$

ou

$$V+W = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1+w_1 & v_2+w_2 & v_3+w_3 \end{bmatrix},$$

$$\alpha V = \alpha \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v_1 & \alpha v_2 & \alpha v_3 \end{bmatrix}$$

produzem os mesmos resultados que as operações vetoriais

$$V+W = (v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3) = (v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3),$$

$$\alpha V = \alpha(v_1, v_2, v_3) = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3).$$

O mesmo vale, naturalmente, para vetores no plano.

No teorema seguinte enunciamos as propriedades mais importantes da soma de vetores e multiplicação de vetores por escalar.

Teorema 3.1. *Sejam U, V e W vetores e α e β escalares. São válidas as seguintes propriedades:*

(a) $U + V = V + U$;

(b) $(U + V) + W = U + (V + W)$;

(c) $U + \bar{0} = U$;

(d) $U + (-U) = \bar{0}$;

(e) $\alpha(\beta U) = (\alpha\beta)U$;

(f) $\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V$;

(g) $(\alpha + \beta)U = \alpha U + \beta U$;

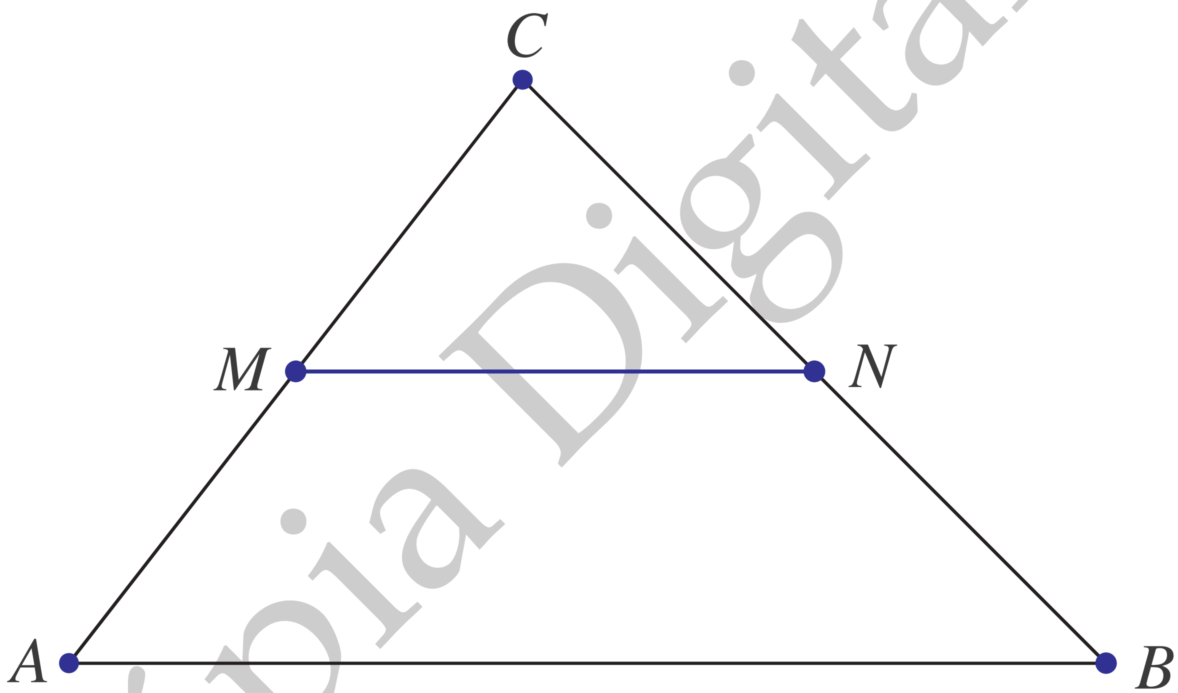
(h) $1U = U$.

Demonstração. Segue diretamente das propriedades da álgebra matricial (Teorema 1.1 na página 9). ■

Exemplo 3.3. Seja um triângulo ABC e sejam M e N os pontos médios de AC e BC, respectivamente. Vamos provar que MN é paralelo a AB e tem comprimento igual à metade do comprimento de AB.

Devemos provar que

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,.$$



Agora, a partir da figura acima temos que

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}\,.$$

Como M é ponto médio de AC e N é ponto médio de BC, então

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}.$$

Logo,

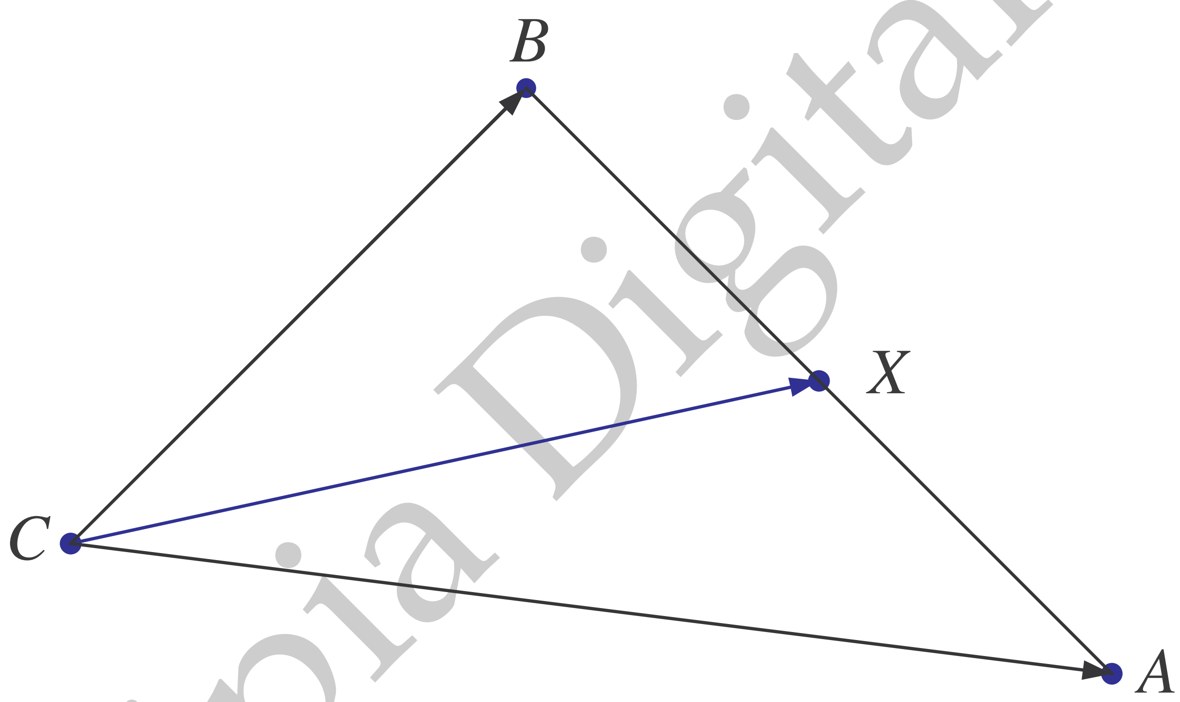
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Exemplo 3.4. Dados quatro pontos A, B, C e X tais que $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$, vamos escrever $\overrightarrow{CX}$ como **combinação linear** de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$, isto é, como uma soma de múltiplos escalares de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.

Como $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$, então os vetores $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{AB}$ são paralelos e portanto o ponto X só pode estar na reta definida por A e B. Vamos desenhá-lo entre A e B, mas isto não representará nenhuma restrição, como veremos a seguir.

O vetor que vai de C para X, pode ser escrito como uma soma de um vetor que vai de C para A com um vetor que vai de A para X,

$$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AX}.$$



Agora, por hipótese $\overrightarrow{AX} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$, o que implica que $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \lambda\,\overrightarrow{AB}$. Mas, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$, portanto $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \lambda(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})$. Logo,

$$\overrightarrow{CX} = (1-\lambda)\,\overrightarrow{CA} + \lambda\,\overrightarrow{CB}\,.$$

Observe que:

- Se $\lambda = 0$, então $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA}$.
- Se $\lambda = 1$, então $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CB}$.
- Se $\lambda = 1/2$, então $\overrightarrow{CX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.
- Se $\lambda = 1/3$, então $\overrightarrow{CX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.
- Se $0 \leq \lambda \leq 1$, então X pertence ao segmento AB, enquanto que se $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$, então X pertence a um dos prolongamentos do segmento AB.

Exemplo 3.5. Vamos mostrar, usando vetores, que o ponto médio de um segmento que une os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ é

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

O ponto M é o ponto médio de AB se, e somente se, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Então, aplicando o exemplo anterior (com o ponto C sendo a origem O), $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$. Como as coordenadas de um ponto são iguais as componentes do vetor que vai da origem até aquele ponto, segue-se que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(x_1, y_1, z_1) + \frac{1}{2}(x_2, y_2, z_2)$ e

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

Exercícios Numéricos (respostas na página 540)

3.1.1. Determine o ponto C tal que $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AB}$ sendo $A = (0, -2)$ e $B = (1, 0)$.

3.1.2. Uma reta no plano tem equação $y = 2x + 1$. Determine um vetor paralelo a esta reta.

3.1.3. Determine uma equação para a reta no plano que é paralela ao vetor $V = (2, 3)$ e passa pelo ponto $P_0 = (1, 2)$.

3.1.4. Determine o vetor X, tal que $3X - 2V = 15(X - U)$.

3.1.5. Determine os vetores X e Y tais que $\left\{ \begin{array}{rcrcl} 6X & - & 2Y & = & U \\ 3X & + & Y & = & U + V \end{array} \right.$

3.1.6. Determine as coordenadas da extremidade do segmento orientado que representa o vetor $V = (3, 0, -3)$, sabendo-se que sua origem está no ponto $P = (2, 3, -5)$.

3.1.7. Quais são as coordenadas do ponto P', simétrico do ponto $P = (1, 0, 3)$ em relação ao ponto $M = (1, 2, -1)$? (Sugestão: o ponto P' é tal que o vetor $\overrightarrow{MP'} = -\overrightarrow{MP}$)

3.1.8. Verifique se os pontos dados a seguir são **colineares**, isto é, pertencem a uma mesma reta:

(a) $A = (5, 1, -3)$, $B = (0, 3, 4)$ e $C = (0, 3, -5)$;

(b) $A = (-1, 1, 3)$, $B = (4, 2, -3)$ e $C = (14, 4, -15)$;

3.1.9. Dados os pontos $A = (1, -2, -3)$, $B = (-5, 2, -1)$ e $C = (4, 0, -1)$. Determine o ponto D tal que A, B, C e D sejam vértices consecutivos de um paralelogramo.

3.1.10. Verifique se o vetor U é combinação linear (soma de múltiplos escalares) de V e W:

(a) $V = (9, -12, -6)$, $W = (-1, 7, 1)$ e $U = (-4, -6, 2)$;

(b) $V = (5, 4, -3)$, $W = (2, 1, 1)$ e $U = (-3, -4, 1)$;

3.1.11. Verifique se é um paralelogramo o quadrilátero de vértices (não necessariamente consecutivos)

(a) $A = (4, -1, 1)$, $B = (9, -4, 2)$, $C = (4, 3, 4)$ e $D = (4, -21, -14)$

(b) $A = (4, -1, 1)$, $B = (9, -4, 2)$, $C = (4, 3, 4)$ e $D = (9, 0, 5)$

3.1.12. Quais dos seguintes vetores são paralelos $U = (6, -4, -2)$, $V = (-9, 6, 3)$, $W = (15, -10, 5)$.

3.1.13. Considere os pontos $A = (-3, 0, 4)$, $B = (-3, -1, 0)$ e $C = (-1, -4, 3)$.

(a) Determine os pontos médios, M e N, dos segmentos AC e BC, respectivamente.

(b) Verifique que
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

(c) Determine o ponto D de forma que A, B, D e C sejam vértices consecutivos de um paralelogramo.

Exercícios usando o MATLAB®

» `V=[v1,v2,v3]` cria um vetor `V`, usando as componentes numéricas `v1, v2, v3`. Por exemplo » `V=[1,2,3]` cria o vetor $V = (1, 2, 3)$;

» `V+W` é a soma de `V` e `W`; » `V-W` é a diferença `V` menos `W`; » `num*V` é o produto do vetor `V` pelo escalar `num`;

» `subs(expr,x,num)` substitui `x` por `num` na expressão `expr`;

» `solve(expr)` determina a solução da equação `expr=0`;

Comandos gráficos do pacote GAAL:

» `desvet(P,V)` desenha o vetor `V` com origem no ponto `P` e » `desvet(V)` desenha o vetor `V` com origem no ponto $O = (0, 0, 0)$.

» `po([P1;P2;...;Pn])` desenha os pontos `P1, P2, ..., Pn`.
» `lineseg(P1,P2,'cor')` desenha o segmento de reta `P1P2`. » `tex(P,'texto')` coloca o `texto` no ponto `P`.

» `axiss` reescala os eixos com a mesma escala. » `eixos` desenha os eixos coordenados.

» `box` desenha uma caixa em volta da figura.

» `rota` faz uma rotação em torno do eixo z.

» `zoom3(fator)` amplifica a região pelo `fator`.

3.1.14. Coloque em duas variáveis V e W dois vetores do plano ou do espaço a seu critério

(a) Use a função `ilsvw(V,W)` para visualizar a soma dos dois vetores.

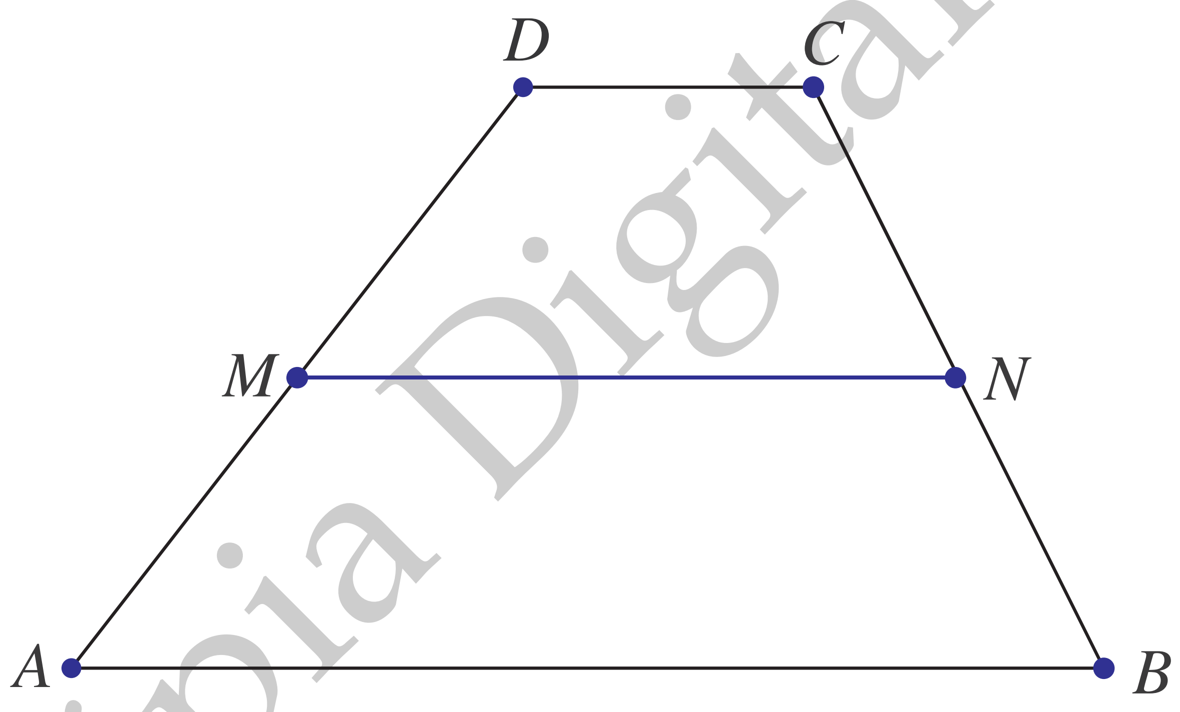
(b) Coloque em uma variável `a` um número e use a função `ilav(a,V)` para visualizar a multiplicação do vetor `V` pelo escalar `a`.

Exercícios Teóricos

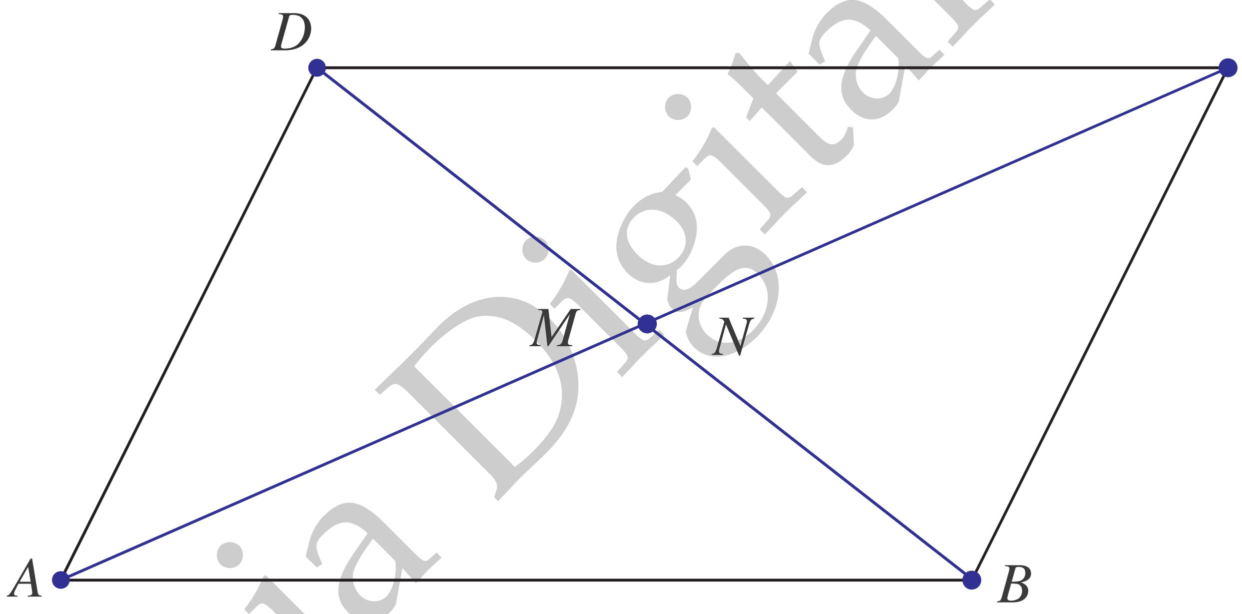
3.1.15. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a média aritmética das medidas das bases. (Sugestão: mostre que

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$$

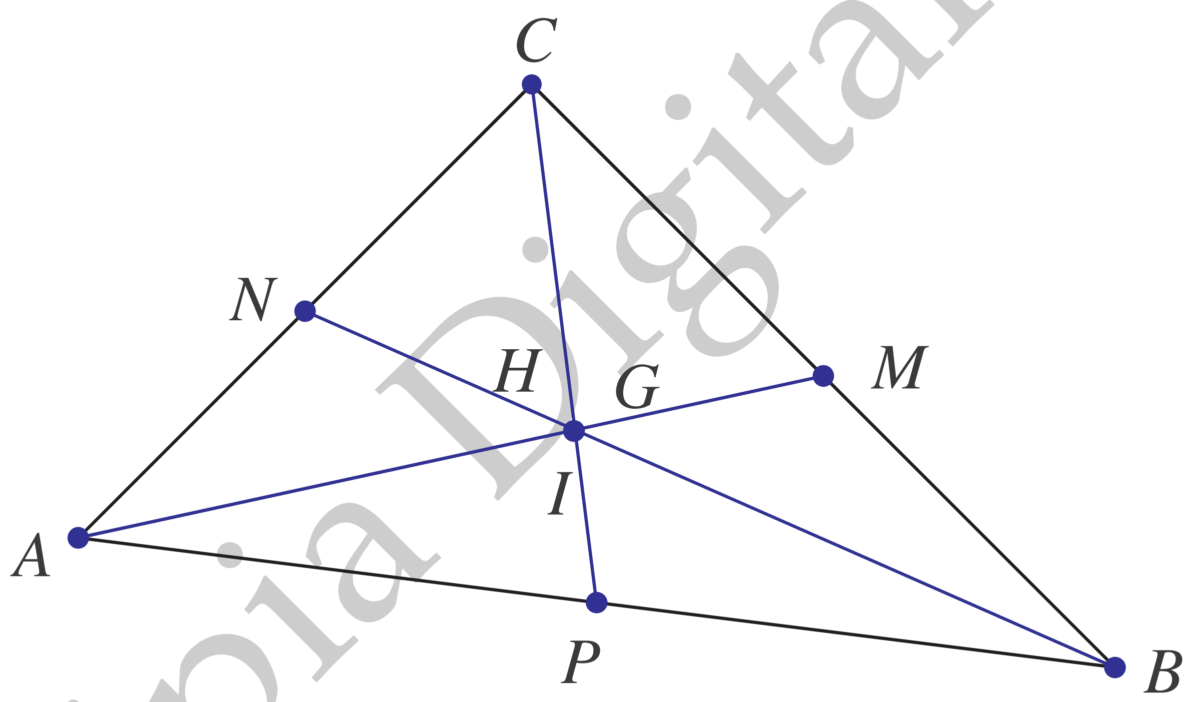
e depois conclua que $\overrightarrow{MN}$ é um múltiplo escalar de $\overrightarrow{AB}$. Revise o Exemplo 3.3 na página 149)



3.1.16. Demonstre que as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio. (Sugestão: Sejam M e N os pontos médios das duas diagonais do paralelogramo. Mostre que o vetor $\overrightarrow{MN} = \bar{0}$, então conclua que $M = N$.)



3.1.17. Considere o triângulo ABC e sejam M o ponto médio de BC, N o ponto médio de AC e P o ponto médio de AB. Mostre que as medianas (os segmentos AM, BN e CP) se cortam num mesmo ponto que divide as medianas na proporção $2/3$ e $1/3$. (Sugestão: Sejam G, H e I os pontos definidos por $\overrightarrow{AG}= \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BH}= \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$ e $\overrightarrow{CI}= \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$. Mostre que $\overrightarrow{GH}= \bar{0}$, $\overrightarrow{GI}= \bar{0}$, conclua que $G = H = I$.)



3.1.18. Sejam A, B e C pontos quaisquer com $A \neq B$. Prove que:

(a) Um ponto X pertence a reta determinada por A e B ($\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB}$) se, e somente se,

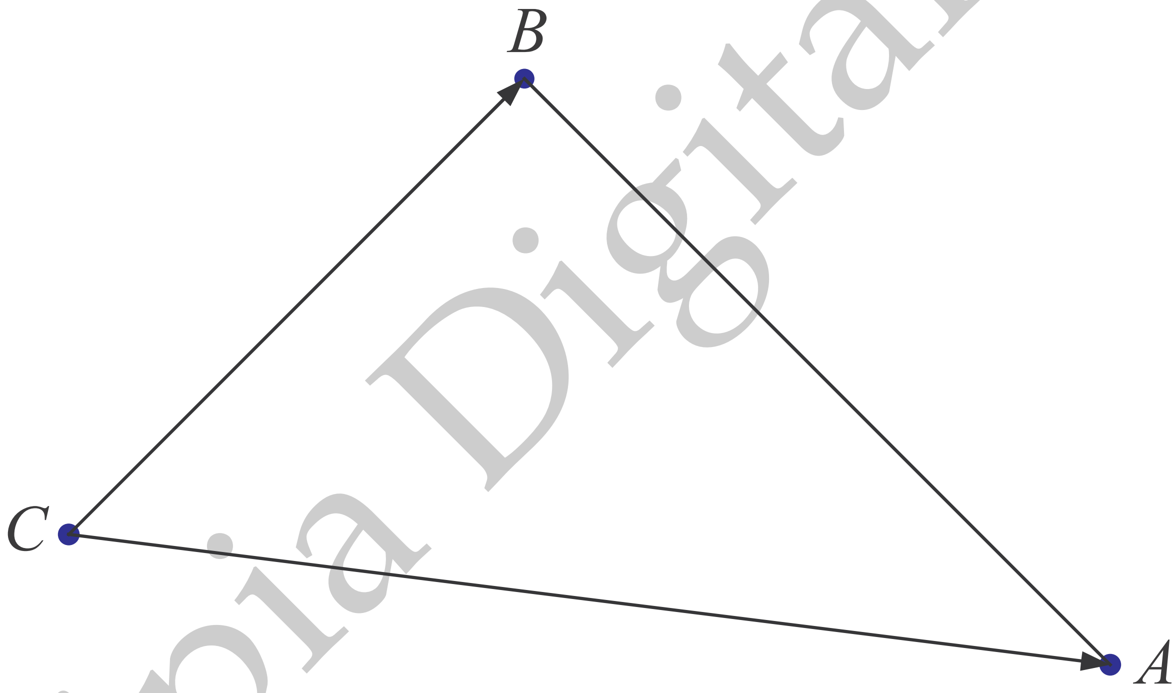
$$\overrightarrow{CX} = \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB}, \quad \text{com} \quad \alpha + \beta = 1.$$

(b) Um ponto X pertence ao interior do segmento AB ($\overrightarrow{AX} = \lambda\, \overrightarrow{AB}$, com $0 < \lambda < 1$) se, e somente se,

$$\overrightarrow{CX} = \alpha\, \overrightarrow{CA} + \beta\, \overrightarrow{CB}, \quad \text{com} \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad \text{e} \quad \alpha + \beta = 1.$$

(c) Um ponto X é um ponto interior ao triângulo ABC ($\overrightarrow{A'X} = \lambda\, \overrightarrow{A'B'}$, com $0 < \lambda < 1$, em que A' é um ponto interior ao segmento AC e B' é interior ao segmento CB) se, e somente se,

$$\overrightarrow{CX} = \alpha\, \overrightarrow{CA} + \beta\, \overrightarrow{CB}, \quad \text{com} \quad \alpha > 0,\ \beta > 0 \quad \text{e} \quad \alpha + \beta < 1.$$



3.1.19. Mostre que se $\alpha V = \bar{0}$, então $\alpha = 0$ ou $V = \bar{0}$.

3.1.20. Se $\alpha U = \alpha V$, então $U = V$? E se $\alpha \neq 0$?

3.1.21. Se $\alpha V = \beta V$, então $\alpha = \beta$? E se $V \neq \bar{0}$?