INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SUL DE MINAS GERAIS

Derivada

Nesta seção, veremos problemas distintos resolvidos pelo cálculo de um mesmo tipo de limite. Este tipo de limite recebe um nome específico.

1 A derivada de uma função num ponto

A derivada de uma função $f(x)$ no ponto x_1, denotada por $f'(x_1)$, (lê-se f linha de x, no ponto x_1), é definida pelo limite

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x},$$

quando este limite existe.

Também podemos escrever

$$f'(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Se $f'(x_1)$ existe, então dizemos que a função $f(x)$ é derivável ou diferenciável no ponto x_1.

2 A derivada de uma função

A derivada de uma função $f(x)$, denominada de $f'(x)$ (lê-se f linha de x) é uma função definida por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

se este limite existe.

Dizemos que uma função é derivável ou diferenciável quando existe a derivada em todos os pontos de seu domínio.

Outras notações: $D_x f(x) = D_x y = \dfrac{dy}{dx}$.

Exemplos: Calcule $f'(x)$ para a função dada:

a) $f(x) = 2x^2 + 3$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{2(x + \Delta x)^2 + 3 - (2x^2 + 3)}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{2(x^2 + 2x\Delta x + \Delta^2 x) + 3 - 2x^2 - 3}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2\Delta^2 x + 3 - 2x^2 - 3}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{4x\Delta x + \Delta^2 x}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} (4x + \Delta x) = 4x$$

Exercícios:

1. Encontre $f'(x_1)$ para o valor dado a x_1.

   a) $f(x) = 1 - 2x^2; \quad x_1 = 1$ b) $f(x) = \dfrac{2}{x^3}; \quad x_1 = 6$

2. Nos Exercícios a seguir, calcule $f'(x)$:

a) $f(x) = 9$ b) $f(x) = x^2 - 2x$ c) $f(x) = 2 + 8x - 5x^2$

d) $f(x) = x^3 - x$ e) $f(x) = \dfrac{1}{3-x}$

2.1 Regras de Derivação

Nesta seção deduziremos várias regras, chamadas regras de derivação, que permitem determinar as derivadas das funções sem o uso da definição.

Teorema 1: Se c é uma constante e $f(x) = c$ para todo x, então $f'(x) = 0$.

Teorema 2: Se n é um número inteiro positivo e $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Observação: Este teorema se estende quando n for um número real. Assim, se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, n real qualquer.

Exemplos:

a) Se $f(x) = x^5$, então $f'(x) = 5x^4$.

b) Se $f(x) = x^1$, então $f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1x^0 = 1$.

c) Se $y = \dfrac{1}{x^{13}}$, $y = x^{-13}$ então $\dfrac{dy}{dx} = -13x^{-14} = -\dfrac{13}{x^{14}}$

d) Se $y = x^{\frac{3}{2}}$, então $D_x y = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$

e) Se $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$, $f(x) = f(x) = \dfrac{1}{x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{-3}{4}}}$ então $f'(x) = -\dfrac{3}{4} \cdot x^{\frac{-3}{4}-1} = -\dfrac{3}{4} \cdot x^{\frac{-7}{4}} = -\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^7}}$.

f) Se $f(x) = x^{\sqrt{3}}$, então $f'(x) = \sqrt{3} \cdot x^{\sqrt{3}-1}$

Teorema 3: Sejam $f(x)$ uma função, c uma constante e $g(x)$ a função definida por $g(x) = c \cdot f(x)$. Se $f'(x)$ existe, então $g'(x) = cf'(x)$.

Exemplos:

a) Se $f(x) = 8x^2$, então $f'(x) = 8(2x) = 16x$.

b) Se $g(z) = -2z^7$, então $g'(z) = -2(7z^6) = -14z^6$.

Teorema 4: Sejam $u(x)$ e $v(x)$ duas funções e $f(x)$ a função definida por $f(x) = u(x) + v(x)$, então $f'(x) = u'(x) + v'(x)$, desde que $u'(x)$ e $v'(x)$ existam. (ou seja, a derivada da soma é igual a soma das derivadas).

Observações:

i) Costuma-se escrever $(u + v)' = u' + v'$

ii) O resultado pode ser estendido a qualquer número finito de funções.

Exemplos:

a) Se $f(x) = 4x^2 + 8$, então $f'(x) = 8x$.

b) Se $f(x) = 4x^4 + 7x^2 - x + 16$, então $f'(x) = 16x^3 + 14x - 1$.

c) Se $y = \sqrt{5x} + \dfrac{16}{x^2} - \pi$, $y = \sqrt{5}\sqrt{x} + 16x^{-2} - \pi = \sqrt{5}x^{\frac{1}{2}} + 16x^{-2} - \pi$ então
$f'(x) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 32x^{-3} = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{32}{x^3}$

Teorema 5: Sejam $u(x)$ e $v(x)$ duas funções e $f(x)$ a função definida por $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, então $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$, desde que $u'(x)$ e $v'(x)$ existam.

Observação: Costuma-se escrever $(uv)' = u'v + uv'$.

Exemplos:

a) Se $f(x) = (x^3 - 4x)(3x^4 + 8x^3)$, então

$f'(x) = (3x^2 - 4)(3x^4 + 8x^3) + (x^3 - 4x)(12x^3 + 24x^2) = 21x^6 + 48x^5 - 60x^4 - 128x^3$.

b) Se $u(x) = \left(\dfrac{2}{x} - 3\right)\left(\dfrac{1}{x^3} + 7\right) = (2x^{-1} - 3)(x^{-3} + 7)$, então
$D_x u = (-2x^{-2})(x^{-3} + 7) + (2x^{-1} - 3)(-3x^{-4}) = -2x^{-5} - 14x^{-2} - 6x^{-5} + 9x^{-4} = \dfrac{-8}{x^5} + \dfrac{9}{x^4} - \dfrac{14}{x^2}$.

Teorema 6: Sejam $u(x)$ e $v(x)$ duas funções e $f(x)$ a função definida por $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, em que $v(x) \neq 0$, então $f'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$ desde que $u'(x)$ e $v'(x)$ existam.

Observação: Costuma-se escrever $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemplos:

a) Se $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, então
$f'(x) = \dfrac{1(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{1 - x - (-1 - x)}{(1-x)^2} = \dfrac{1 - x + 1 + x}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2}$

b) Se $f(x) = \dfrac{2x^3 + 4}{x^2 - 4x + 1}$, então
$f'(x) = \dfrac{(6x^2)(x^2 - 4x + 1) - (2x^3 + 4)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 1)^2} = \dfrac{6x^4 - 24x^3 + 6x^2 - 4x^4 8x^3 - 8x + 16}{(x^2 - 4x + 1)^2}$
$= \dfrac{2x^4 - 16x^3 + 6x^2 - 8x + 16}{(x^2 - 4x + 1)^2}$

Exercícios

1. Obtenha a derivada das funções a seguir:

a) $f(x) = 2x^7$

b) $f(x) = 3x^8 - 4x^3 + x^2 - 1$

c) $g(x) = (2x - x^2)^3$

d) $g(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 - 2x^{-1} + 4x^{-2}$

e) $h(x) = 2x^4 - 3x + \dfrac{5}{8x^3}$

f) $h(x) = x^2 \sqrt[3]{x^2}$

g) $f(x) = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}$

h) $f(x) = \sqrt[5]{x^3} - \dfrac{1}{\sqrt{4x}} + 5$

i)$g(x) = (x^2 + 2x)(3x + 1)$

j) $g(x) = (x^4 + 2x - 3)(x^6 - 7x^5 + 9x^2 + 1)$

k) $h(x) = \dfrac{2x^3 - 3x + 4}{x}$

l) $h(x) = \dfrac{2x + 3}{3x - 2}$

m) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 4}{x^2 - 2x + 3}$

n) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 5}(3x - 1)$