Derivada

0.1 Derivadas de Ordem Superior

A derivada de uma função $f(x)$ é também uma função de x e denominada de $f'(x)$, ou ainda, primeira derivada de $f(x)$.

A derivada de $f'(x)$, se existir, é chamada de segunda derivada de $f(x)$, denominada por,

$$f''(x) = y'' = D_x^2 y = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Generalizando, a $n-$ésima derivada de $f(x)$ é a derivada da $(n-1)-$ésima derivada de $f(x)$ e denotada por

$$f^{(n)}(x) = y^{(n)} = D_x^n y = \frac{d^ny}{dx^n}$$

Exemplos:

a) Encontrar todas as derivadas da função definida por: $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 10$.

Resolução:

$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 2x$

$f''(x) = 36x^2 - 12x + 2$

$f'''(x) = 72x^3 - 12$

$f^{(4)}(x) = 72$

$f^{(5)}(x) = 0 \quad \forall n \geq 5.$

b) Dada a função $y = e^{kx}$ (k constante), encontre a expressão da sua derivada de ordem n.

Resolução:

Temos $y' = ke^{kx}$

$y'' = k^2e^{kx}$

$y''' = k^3e^{kx}$

Dessa maneira, observa-se que $y^{(n)} = k^ne^{kx}$

Exercícios

1. Nos Exercícios a seguir, encontre as derivadas de primeira e segunda ordem da função dada:

a) $f(x) = 5x^3 + 8x^2 - 7x + 3$ b) $f(x) = 3x^8 + 5x^4$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{x^2}$

d) $f(x) = \sqrt{3x+1}$ e) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ f) $f(x) = \sqrt[5]{10x+7}$

g) $f(x) = e^{(x^2)}$ h) $f(x) = \text{sen}^2 x$ i) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{4+x^2}\right)$

2. Nos exercícios a seguir, encontre a expressão para $f^{(n)}(x)$:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ c) $f(x) = \text{sen}(x)$

d) $f(x) = e^{-3x}$ e) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ f) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

1 Aplicações da Derivada

Antes de passarmos para a próxima seção vamos relembrar as seguintes definições. Sejam $f(x)$ uma função e A um subconjunto do domínio de $f(x)$. Dizemos que $f(x)$ é crescente (ou decrescente) em A, se quaisquer que sejam x_1 e x_2 em A,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \qquad (f(x_1) > f(x_2)).$$

1.1 Funções Crescentes e Decrescentes

O valor da primeira derivada pode ser interpretado como o coeficiente angular da reta de tangência a curva no ponto dado por $(a, f(a))$, e a derivada da função pode ser utilizada para a análise da taxa de crescimento de uma função.

Teorema 1: Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b).

i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ então $f(x)$ é crescente em $[a, b]$

ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ então $f(x)$ é decrescente em $[a, b]$

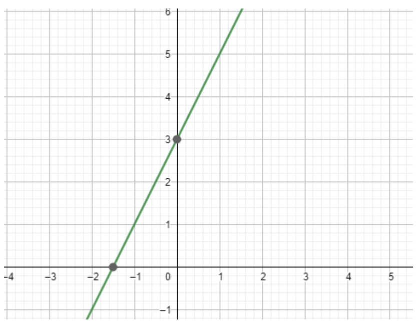
Exemplos

Determine os intervalos de crescimento e decrescimento, e esboce o gráfico das funções a seguir:

a) $f(x) = 2x + 3$

$f'(x) = 2$

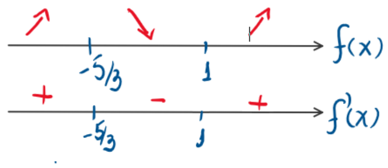
Como $f'(x) = 2 > 0$ em todo o domínio de $f(x)$, logo $f(x)$ é sempre crescente, ou seja, é crescente em todo o conjunto dos números reais



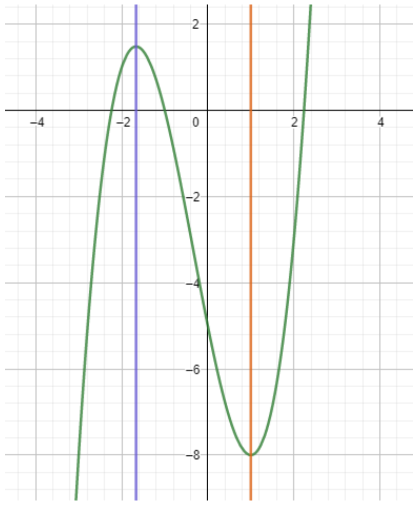
b) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{3}$ e $x = 1$. Fazendo o estudo do sinal de f'(x) temos:



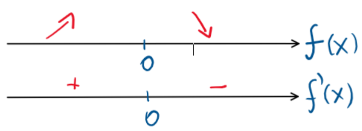
Portanto $f(x)$ é crescente nos intervalos $\left]-\infty, \frac{-5}{3}\right[$ e $]1, \infty[$ e decrescente no intervalo $\left]\frac{-5}{3}, 1\right[$.



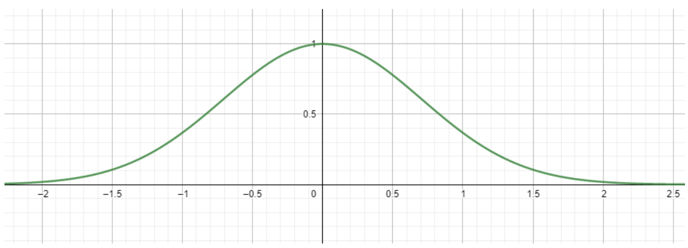
c) $f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = e^{-x^2} \times (-2x)$

$f'(x) = e^{-x^2} \times (-2x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, pois e^{-x^2} é sempre positivo. Fazendo o estudo do sinal de $f'(x)$ temos:



Portanto $f(x)$ é crescente no intervalo $]-\infty, 0[$ e decrescente no intervalo $]0, \infty]$.



Exercícios

1. Indique os intervalos em que a função $f(x)$ é crescente ou decrescente e obtenha para que valores de x, $f'(x) = 0$. Esboce o gráfico de $f(x)$.

   a) $f(x) = 5 - 7x - 4x^2$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(8 - x)$ c) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 20x + 1$

   d) $f(x) = 6x^2 - 9x + 5$ e) $f(x) = x^2\sqrt[3]{x^2 - 4}$ f) $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{x}$

2. Calcular os valores de x tais que $f'(x) = 0$.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 9x}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+7}}$ c) $f(x) = \dfrac{2x-5}{x+3}$

3. Calcule os valores de x tais que $f''(x) = 0$.

a) $f(x) = e^{-x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - x^2$ c) $f(x) = \ln x$

1.2 Concavidade e Pontos de Inflexão

Seja $f(x)$ derivável no intervalo aberto (a, b) e seja p um ponto desse intervalo. A reta tangente em $(p, f(p))$ ao gráfico de $f(x)$ é

$$y - f(p) = f'(p)(x - p) \text{ ou } y = f(p) + f'(p)(x - p).$$

Desse modo, a reta tangente em $(p, f(p))$ é o gráfico da função $T(x)$ dada por

$$T(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$$

Definição 1: Dizemos que $f(x)$ tem a *concavidade para cima* no intervalo (a, b) se $f(x) > T(x)$ quaisquer que sejam x e p em (a, b), com $x \neq p$.

Definição 2: Dizemos que $f(x)$ tem a *concavidade para baixo* no intervalo (a, b) se $f(x) < T(x)$ quaisquer que sejam x e p em (a, b), com $x \neq p$.

Definição 3: Sejam $f(x)$ uma função e $p \in D_f$, com $f(x)$ contínua em p. Dizemos que p é *ponto de inflexão* de $f(x)$ se existirem números reais a e b, com $p \in (a, b) \subset D_f$, tal que $f(x)$ tenha concavidade de nomes contrários em (a, p) e em (p, b).

Teorema: Seja $f(x)$ uma função que admite derivada de 2ª ordem no intervalo (a,b),

i) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ então $f(x)$ tem concavidade para cima em (a, b)

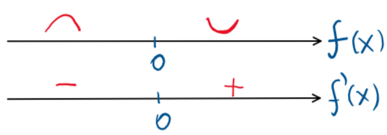
ii) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ então $f(x)$ tem concavidade para baixo em (a, b)

Exemplos:

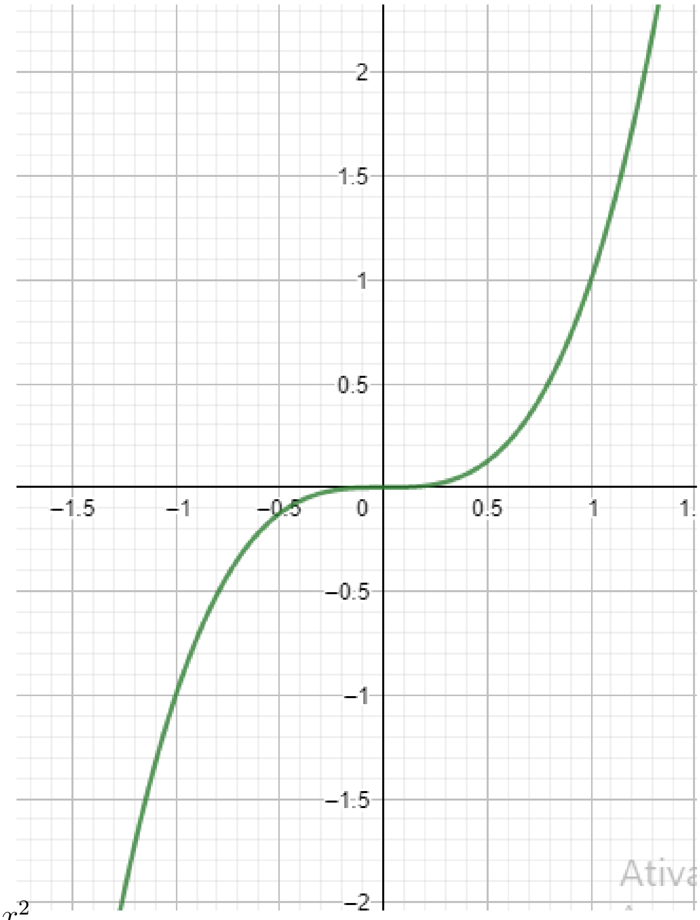
a) Estude a concavidade e obtenha os pontos de inflexão da função $f(x) = x^3$. Faça um esboço do gráfico.

$f'(x) = 3x^2$ e $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Fazendo o estudo do sinal de $f''(x)$ temos:



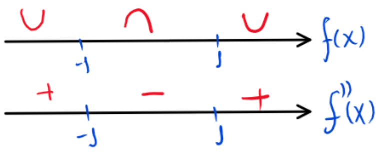
Portanto $f(x)$ tem concavidade para cima no intervalo $]0, \infty[$ e concavidade para baixo no intervalo $]-\infty, 0]$.



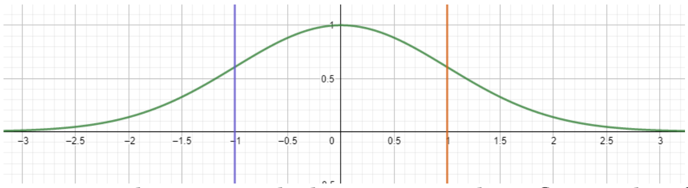
b) Seja $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$. Estude a função com relação à concavidade e determine os pontos de inflexão e esboce seu gráfico.

$f'(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} \times (-x)$ e $f''(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} \times (x^2 - 1)$

$f''(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} \times (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$ pois $e^{-\frac{-x^2}{2}}$ é sempre positivo. Fazendo o estudo do sinal de $f''(x)$ temos:



Portanto $f(x)$ tem concavidade para cima no intervalo $]-\infty, -1[$ e $]1, \infty[$; e concavidade para baixo no intervalo $]-1, 1]$.



Exercícios: Discuta os tipos de concavidade e pontos de inflexão das funções.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$

b) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6$

c) $f(x) = x^3 + 10x^2 + 25x - 50$

d) $f(x) = 8x^2 - 24x^4$

e) $f(x) = \dfrac{(x+4)}{\sqrt{x}}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$