

Evaluación Continua de Mecánica II

Temas 2-3

Gabriel D'Andrade Furlanetto

20 de abril de 2022

1. Péndulo de Foucault

a) Escribe la segunda ley de Newton para el grave y demuestra que la tensión T se puede aproximar como $T \approx mg_{ef}$, donde g_{ef} es la gravedad efectiva.

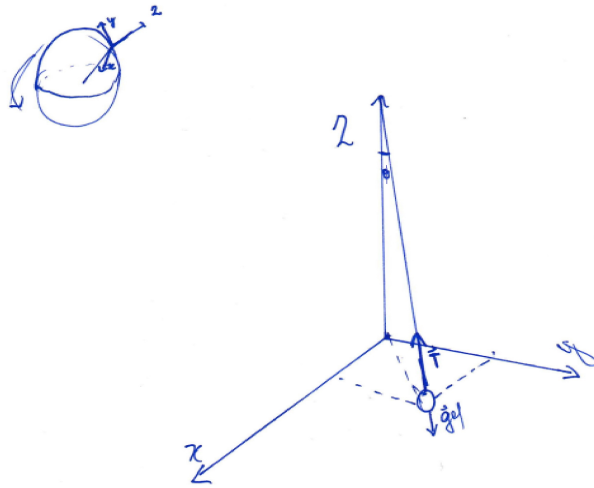


Figura 1: Representación del problema

Como estamos en el sistema de la Tierra, sabemos que podemos escribir la segunda Ley de Newton para este sistema como:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{ap} + \mathbf{F}_{cf} + \mathbf{F}_{cor} \quad (1)$$

Para nuestro problema en particular, la fuerza aplicada será, por un lado, la tensión y, por otro, la gravedad. De esta manera, tendremos que:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2m(\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\Omega}) \quad (2)$$

Esta ecuación se puede simplificar bastante si consideramos que el término centrífugo se puede combinar al gravitatorio y, al final, tendremos un término de la gravedad

efectiva¹:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{T} + m\mathbf{g}_{ef} + 2m(\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\Omega}) \quad (3)$$

Para proseguir en la resolución, tendremos que mirar el problema en concreto. Primeramente, podemos escribir que, en el eje z , la segunda ley de Newton tendrá forma aproximadamente²

$$T_z - mg_{ef} \approx 0$$

Por la figura 1, sabemos por trigonometría básica que $T_z = T \cos \phi$. Como estamos en el régimen de oscilaciones pequeñas en ϕ , sabemos que:

$$T_z \approx T \quad (4)$$

Si juntamos las dos condiciones, tendremos que:

$$T \approx mg_{ef} \quad (5)$$

Como queríamos demostrar.

b) Escriba las ecuaciones de movimiento del plano horizontal en forma matricial

Como asumimos en nuestra aproximación que no había movimiento vertical, nos resta analizar el movimiento horizontal. Inicialmente, escribimos en coordenadas el término de Coriolis. Como $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ y $\boldsymbol{\Omega} = (0, \Omega \sin \theta, \Omega \cos \theta)$:

$$\mathbf{F}_{cor} = 2m(\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\Omega}) = 2m(\dot{y}\Omega \cos \theta - \dot{z} \sin \theta, -\dot{x}\Omega \cos \theta, \dot{x}\Omega \sin \theta)$$

Como ya lo decimos, vamos a ignorar el término vertical en este problema, entonces tomaremos el término de Coriolis como $\mathbf{F}_{cor} = 2m(\dot{y}\Omega \cos \theta, -\dot{x}\Omega \cos \theta)$. Por la ecuación (3), si determinamos las tensiones determinaremos las ecuaciones de movimiento. Eso se puede hacer de manera casi trivial con un poco de trigonometría, de la que concluiremos que $\frac{T_x}{T} = -\frac{x}{\ell}$ y $\frac{T_y}{T} = -\frac{y}{\ell}$. De eso, concluimos que:

$$T_x = -\frac{mgx}{\ell}$$

$$T_y = -\frac{mgy}{\ell}$$

De manera que podemos escribir las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{gx}{\ell} + 2\dot{y}\Omega \cos \theta \\ \ddot{y} &= -\frac{gy}{\ell} - 2\dot{x}\Omega \cos \theta \end{aligned} \quad (6)$$

¹Tomaremos esto simplemente como un hecho conocido, pero cualquier libro texto estándar de mecánica lo tiene tratado explícitamente.

²Aquí estamos aproximando la fuerza de Coriolis no tiene efecto en el eje z y que partícula aproximadamente no se mueve

³El signo negativo es una sutileza que se puede fácilmente olvidar, pero viene del hecho de que la tensión estará siempre opuesta al movimiento. Si no lo fuera, la solución explotaría y eso claramente no es una solución física para un péndulo.

O sea, lo escribimos aqui como:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y}\Omega \cos \theta + \frac{gx}{\ell} &= 0 \\ \ddot{y} + 2\dot{x}\Omega \cos \theta + \frac{gy}{\ell} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Que podemos escribir vectorialmente como:

$$\ddot{\mathbf{x}} + A\dot{\mathbf{x}} + B\mathbf{x} = 0 \quad (8)$$

Donde:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad A = 2\Omega \cos \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \frac{g}{\ell} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Que era lo que queríamos encontrar.

c) Integre las ecuaciones de movimiento de manera exacta y demuestre que la órbita del grave es una elipse que precesa con velocidad angular $\Omega \cos \theta$.

Para integrar nuestra ecuación, utilizaremos la técnica que vimos en clases de introducir una variable compleja⁴, $z = x + iy$. Si sumamos la primera fila por i veces la segunda. Lo hacemos explícitamente:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + i\ddot{y} + 2\Omega \cos \theta (\dot{y} - i\dot{x}) + \frac{g}{\ell}(x + iy) &= \frac{d^2}{dt^2}(x + iy) + 2\Omega \cos \theta \frac{d}{dt} - i(iy + x) + \frac{g}{\ell}(x + iy) = 0 \\ \ddot{z} - 2i\Omega \cos \theta \dot{z} + \frac{g}{\ell}z &= 0 \end{aligned}$$

Para encontrar la solución de este sistema lineal de orden dos, probaremos una solución de tipo $z(t) = e^{i\lambda t}$:

$$e^{i\lambda t}(-\lambda^2 - 2\Omega \cos \theta \lambda + \frac{g}{\ell}) = 0$$

De manera que tendremos dos valores de lambda como solución:

$$\lambda = \Omega \cos \theta \pm \sqrt{(\Omega \cos \theta)^2 + \left(\frac{g}{\ell}\right)^2} = \Omega_\theta \pm \omega$$

Donde, por claridad, hemos definido $\Omega_\theta = \Omega \cos \theta$ y $\omega = \sqrt{(\Omega \cos \theta)^2 + \left(\frac{g}{\ell}\right)^2}$. De esa manera, tendremos que la solución general para nuestro problema será:

$$z = C_1 e^{it(\Omega+\omega)} + C_2 e^{it(\Omega-\omega)} = C_1 e^{i\Omega t} e^{i\omega t} + C_2 e^{i\Omega t} e^{-i\omega t} = e^{i\Omega t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t})$$

$$z = e^{i\Omega t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) \quad (10)$$

⁴Más que una coincidencia feliz, es casi siempre ideal introducir números complejos para tratar de rotaciones en \mathbb{R}^2 , que es exactamente la esencia de nuestro problema, por el isomorfismo entre $SO(2)$ y $U(1)$.

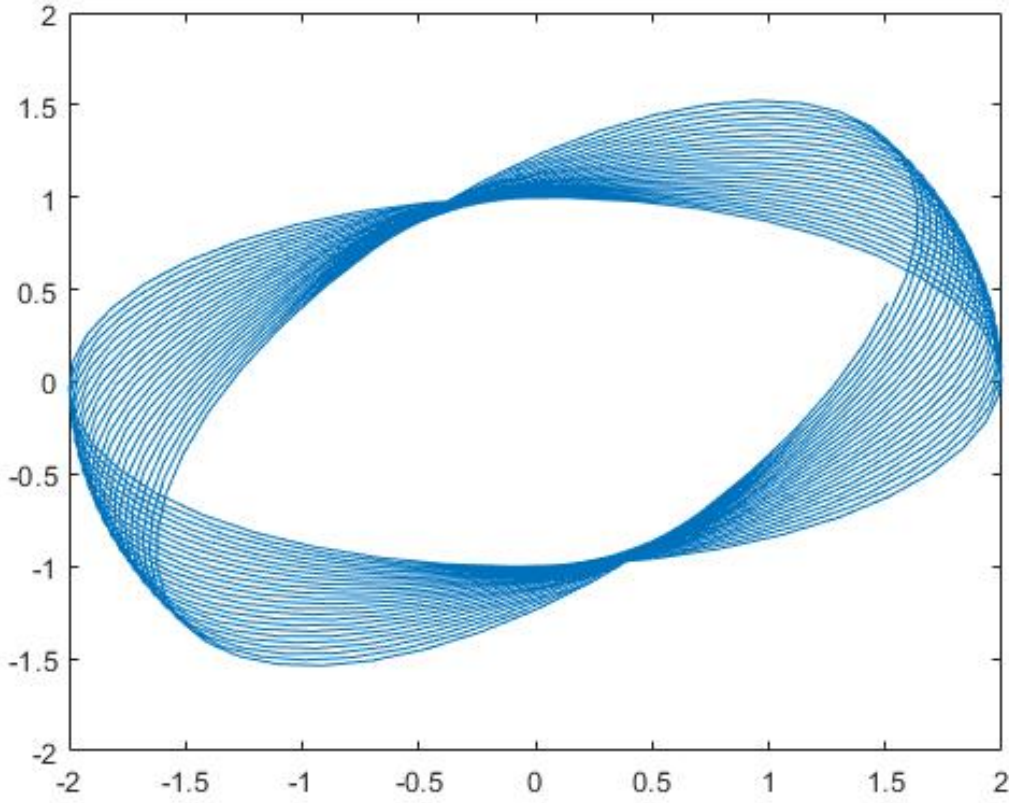


Figura 2: Gráfico de los 15 primeros segundos para $C_1 = C_2 + 1 = 1,5$, $\Omega_\theta = 0,05Hz$ y $\omega = 10Hz$

Si queremos explícitamente encontrar las soluciones en nuestras variables original, sabemos que $x = \Re(z)$ e $y = \Im(z)$ y estas son operaciones triviales de hacer, pero no iluminan mucho nuestra solución.⁵ Si miramos directamente a la ecuación (10), podremos apreciar que tenemos un término envolvente, de frecuencia Ω_θ , y otro término interior, combinación lineal de frecuencias ω y $-\omega$. Este término interior corresponde exactamente a una elipsis en el plano complejo, y el exterior a una rotación de esta elipsis (Esto es, un término de precesión). Para valores escogidos de manera aleatoria, tenemos la siguiente representación gráfica:

De esa manera, encontramos la solución exacta para nuestra ecuación diferencial y demostramos que es una elipsis que precesa con velocidad angular $\Omega_\theta = \Omega \cos \theta$, que es exactamente lo que se pedía.

⁵Hacer eso sería como resolver el problema de dos cuerpos en polares y pasarlo a cartesianas para ‘interpretar los resultados’

d) Integra la ecuación diferencial del apartado anterior de manera perturbativa hasta primer orden en Ω

Solución de Orden 0

El método perturbativo siempre empieza por la solución de orden 0, esto es, donde no consideramos los términos con Ω^6 . De las ecuaciones(7) y tomando $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 &= 0 \\ \ddot{y}_0 + \omega_0^2 y_0 &= 0\end{aligned}\tag{11}$$

Que son absolutamente triviales de resolver, ya que son apenas osciladores armónicos desacoplados:

$$\begin{aligned}x_0(t) &= A_1 \cos(\omega_0 t + \delta_1) \\ y_0(t) &= A_2 \cos(\omega_0 t + \delta_2)\end{aligned}\tag{12}$$

1.0.1. Solución de Orden 1

Finalmente, podemos poner los términos que van en orden 1:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 - 2\dot{y}_0 + \omega_0^2 x_1 &= 0 \\ \ddot{y}_1 + 2\dot{x}_0 + \omega_1^2 y_1 &= 0\end{aligned}$$

Que podemos escribir como:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= -2A_2\omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta_2) \\ \ddot{y}_1 + \omega_0^2 y_1 &= 2A_1\omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta_1)\end{aligned}\tag{13}$$

e) Demuestra que el período de oscilación del péndulo es aproximadamente $T = T_0(1 - \frac{\Omega^2}{2\omega_0^2} \cos^2 \theta)$

En la sección c), determinamos que el péndulo oscilaba con frecuencia angular $\omega = \sqrt{(\Omega \cos \theta)^2 + \left(\frac{g}{\ell}\right)^2}$. Podemos manipular un poco esta expresión:

$$\omega = \sqrt{(\Omega \cos \theta)^2 + \omega_0^2} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \cos^2 \theta}$$

Por definición, sabemos que el período está relacionado con la frecuencia angular por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

De manera que, para nuestra frecuencia particular tendremos que:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Pero, sabemos que $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ y que podemos aproximar $(1 + x)^n = 1 + nx$, o sea, podemos escribir que:

⁶Formalmente, asumimos que la solución va con potencias de Ω y agrupamos términos del mismo orden.

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 - \frac{\Omega^2}{2\omega^2}\right) \quad (14)$$

Que era lo que queríamos demostrar.

f) Calcula el tiempo que tarda el péndulo en dar una vuelta completa alrededor de su eje de giro y estima dicho tiempo para la facultad

Sabemos que la frecuencia angular de precesión del péndulo es $\Omega_\theta = \Omega \cos \theta$, y que esta frecuencia angular está relacionada con el período por:

$$T_{prec} = \frac{2\pi}{\Omega_\theta} = \frac{2\pi}{\Omega} \sec \theta = T_{tierra} \sec \theta$$

Finalmente, sabemos que Salamanca está a una colatitud de $\theta = 49,03118$ y que el período de la tierra es de 24h, y por lo tanto sabemos que

$$T_{precUSAL} = 36,60h = 36h36min$$

2. Cánica puntual sobre cara interna de un cono hueco

a) Calcula el momento de inercia del cono alrededor de su eje de giro y escribe el Lagrangeano del sistema cánica + cono en un sistema inercial.

Para calcular el momento de inercia del cono, utilizaremos que:

$$I = \int dm = \int_S \sigma r^2 d\Omega = \int_0^h \int_0^{2\pi} \sigma r^2 r d\phi dz$$

Pero, para el cono, sabemos que $\sigma = \frac{M}{\pi R h}$ y que $r = z \tan \alpha$. O sea:

$$I = \sigma \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h r^3 \tan^3 \alpha dz = \sigma \pi \frac{h}{4}$$

Para el lagrangeano, tendremos 3 términos cinéticos y 2 potenciales: 2 cinéticos para el cono (uno de rotación y otro de traslación) y uno para la masa, y un potencial para cada. Escribiéndolo, tenemos que:

$$T = T_{rot} + T_{trans} + T_{cuenca} = \frac{1}{2} I \omega^2(t) + \frac{1}{2} M \dot{Z}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

$$V = MgZ + mgz$$

Finalmente,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I \omega^2(t) + \frac{1}{2} M \dot{Z}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - MgZ - mgz \quad (15)$$