Evaluación Continua de Mecánica II
Tema 1

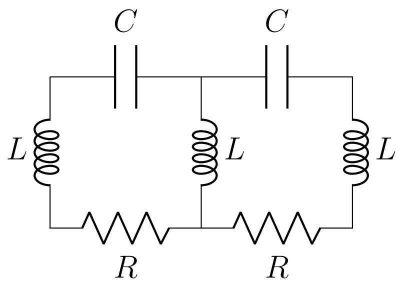
Gabriel D'Andrade Furlanetto

14 de marzo de 2022

1. Circuitos LRC acoplados

En este problema, analizaremos el circuito representado en la Figura 1

Figura 1: Circuito a ser analizado



a) Escribe las ecuaciones de Kirchoff del circuito y encontra los modos y frecuencias normales.

Para escribir las ecuaciones de Kirchoff, tenemos que analizar las corrientes utilizando la Ley de Corrientes de Kirchoff, y las tensiones, utilizando la Ley de Voltajes de Kirchoff. El primero es trivial, y está hecho en la Figura 2. Para el segundo, utilizaremos las mallas en la Figura 3.

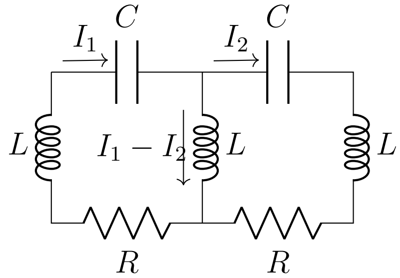


Figura 2: Análisis de corrientes

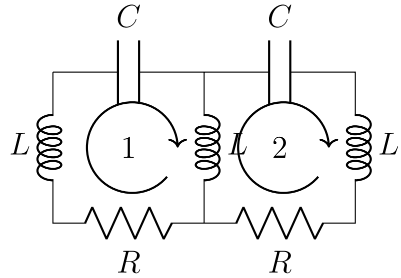


Figura 3: Análisis de mallas

Tendremos, finalmente, dos ecuaciones utilizando que $\sum V = 0$ para una malla cerrada. Como $I = \dot{Q}$, seremos capaces de escribir las ecuaciones para la primera y segunda malla, respectivamente:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{C}Q_1 + R\dot{Q}_1 + L\ddot{Q}_1 + L(\ddot{Q}_1 - \ddot{Q}_2)) = 0 \\
\frac{1}{C}Q_2 + R\dot{Q}_2 + L\ddot{Q}_2 - L(\ddot{Q}_1 - \ddot{Q}_2)) = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

A este sistema de ecuaciones diferenciales lineales de orden 2 no será posible aplicar las técnicas estándar que desarrollamos durante el curso, ya que tenemos términos con dependencia en las velocidades, o sea, tenemos oscilaciones amortiguadas.

De esta manera, podemos mirar fijamente el Sistema (1) y percibir que si sumamos o tomamos la diferencia de las ecuaciones, podremos trivialmente encontrar unas coordenadas normales (esto es, desacopladas). Es decir, podemos escribir nuestras ecuaciones como:

$$
\frac{1}{C}(Q_1 + Q_2) + R(\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2) + L(\ddot{Q}_1 + \ddot{Q}_2) = 0 \qquad \text{(Suma)}
$$

$$
\frac{1}{C}(Q_1 - Q_2) + R(\dot{Q}_1 - \dot{Q}_2) + 3L(\ddot{Q}_1 - \ddot{Q}_2) = 0 \qquad \text{(Sustracción)}
$$

Escrito de esa manera, no es un salto de lógica muy grande hacer el siguiente cambio de coordenadas:

$$
\begin{aligned}
\eta = Q_1 + Q_2 \\
\xi = Q_1 - Q_2
\end{aligned}
\tag{2}
$$

De manera que tendremos dos osciladores amortiguados desacoplados:

$$
\begin{aligned}
\ddot{\eta} + 2\left(\frac{R}{2L}\right)\dot{\eta} + \left(\sqrt{\frac{1}{CL}}\right)^2 \eta = 0 \\
\ddot{\xi} + 2\left(\frac{R}{6L}\right)\ddot{\xi} + \left(\sqrt{\frac{1}{3CL}}\right)^2 \xi = 0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Y podemos encontrar la solución para η y ξ por los métodos estándar:

$$
\begin{aligned}
\eta(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}\left[A_1 e^{\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{CL}}t} + A_2 e^{-\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{CL}}t}\right] \\
\xi(t) = e^{-\frac{R}{6L}t}\left[A_1 e^{\sqrt{\left(\frac{R}{6L}\right)^2 - \frac{1}{3CL}}t} + A_2 e^{-\sqrt{\left(\frac{R}{6L}\right)^2 - \frac{1}{3CL}}t}\right]
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Que no ilumina básicamente nada de nuestro problema.[1].

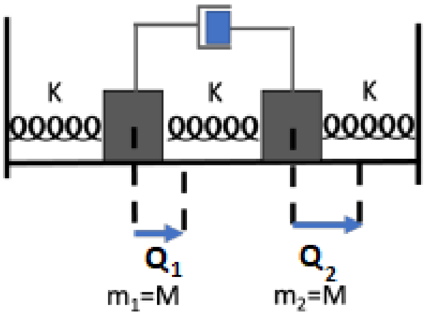
No obstante, solo tendrá sentido hablar de frecuencias normales para el régimen de amortiguamiento débil, ya que es el único que de hecho oscila, y serán definidas por:

$$
\omega_\eta = \sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \tag{5}
$$

$$
\omega_\xi = \sqrt{\frac{1}{3CL} - \left(\frac{R}{6L}\right)^2} \tag{6}
$$

[1]Las soluciones tienen más sentido después de ser determinado el régimen de amortiguación

Figura 4: Problema 25: Masas-muelles acoplados con pistón viscoso.



Es importante mencionar que, una vez encontrados $\eta(t)$ y $\xi(t)$, podemos trivialmente obtener expresiones para Q_1 y Q_2 de la ecuación (4)[2]:

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= \frac{\eta(t)+\xi(t)}{2} \\ Q_2(t) &= \frac{\eta(t)-\xi(t)}{2} \end{aligned} \tag{7}$$

Finalmente, no es mala idea hacer las analogías que este sistema electrónico tiene a sistemas mecánicos explicita: La decisión de discutir la carga Q_i en los capacitores[3] no fue una trivialidad, sino algo que hecho adrede para hacer una conexión estrecha con las coordenadas generalizadas q_i.

De hecho, si se omitiera la primera página de este documento, sería bastante razonable esperar que estuviera resolviendo el problema 25 de la lista de problemas, un oscilador acoplado con un pistón viscoso, representado en la Figura 4

Fundamentalmente, los métodos de la mecánica clásica no comienzan y acaban en posiciones generalizadas y momentos canónicos, y este problema lo ilustra un poco.

b) Discute los regímenes de amortiguación del circuito. Escribe la solución para el caso particular de $6L = CR^2$

Algunas generalidades de los regímenes de amortiguación fueron discutidas en la sección anterior, pero fundamentalmente estará dado para cada modo normal por el signo de las cantidades:

$$\Delta_\eta = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{CL}$$

$$\Delta_\xi = \left(\frac{R}{6L}\right)^2 - \frac{1}{3CL}$$

Si son positivas, tendremos el régimen de sobre-amortiguamiento. Si son 0, tendríamos un amortiguamiento crítico, y si son negativas, tendremos el amortiguamiento débil. Para el caso de $R^2 = \frac{6L}{C}$, tendremos que:

[2]No será muy útil o instructivo hacerlo para las ecuaciones generales de (5) y (6), entonces lo haremos solo para el caso particular del apartado siguiente.

[3]Y no corrientes, como se hace usualmente en electrónica

$$\Delta_\eta = \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL} = \frac{6L}{4L^2C} - \frac{1}{CL} = \frac{1}{CL}\left(\frac{3}{2} - 1\right) > 0 \tag{8}$$

Que significa que la coordinada η estará sobreamortiguado. Para el otro,

$$\Delta_\xi = \frac{R^2}{36L^2} - \frac{1}{3CL} = \frac{6L}{36L^2C} - \frac{1}{3CL} = \frac{1}{CL}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) < 0 \tag{9}$$

O sea, la coordinada ξ estará en el régimen de amortiguación débil.
De esta manera, podemos escribir las ecuaciones para los dos:

$$\eta(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}\left[A_1 e^{\sqrt{\frac{1}{2CL}}t} + B_1 e^{-\sqrt{\frac{1}{2CL}}t}\right] \tag{10}$$

$$\xi(t) = e^{-\frac{R}{6CL}t} A_2 \cos\left(\frac{1}{6CL}t + B_2\right) \tag{11}$$

Por lo que tenemos que la solución general de nuestro sistema será:

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= \eta(t) + \xi(t) \\ &= e^{-\frac{R}{2L}t}\left[A_1 e^{\sqrt{\frac{1}{2CL}}t} + B_1 e^{-\sqrt{\frac{1}{2CL}}t}\right] + e^{-\frac{R}{6CL}t} A_2 \cos\left(\frac{1}{6CL}t + B_2\right) \end{aligned} \tag{12}$$

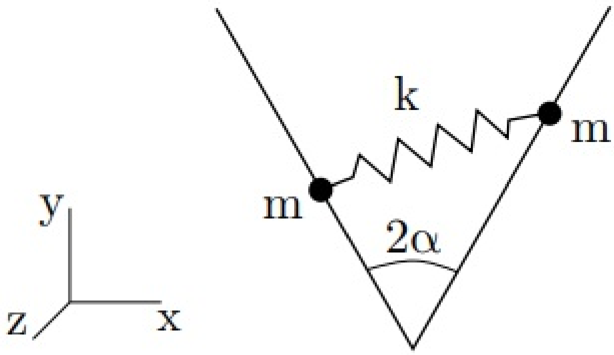
$$\begin{aligned} Q_2(t) &= \eta(t) - \xi(t) \\ &= e^{-\frac{R}{2L}t}\left[A_1 e^{\sqrt{\frac{1}{2CL}}t} - B_1 e^{-\sqrt{\frac{1}{2CL}}t}\right] - e^{-\frac{R}{6CL}t} A_2 \cos\left(\frac{1}{6CL}t + B_2\right) \end{aligned} \tag{13}$$

Para la corriente, tenemos que derivar estas expresiones. La expresión no son elegantes, pero al final, tendremos que:

$$\begin{aligned} I_1(t) =& e^{-\frac{R}{2L}t}\left[A_1\left(\frac{1}{2CL} - \frac{R}{2L}\right) e^{\sqrt{\frac{1}{2CL}}t} - \left(\frac{1}{2CL} + \frac{R}{2L}\right) B_1 e^{-\sqrt{\frac{1}{2CL}}t}\right] - A_2 e^{-\frac{R}{6CL}t} \beta \cos\left(\frac{1}{6CL}t + B_2\right) \\ &+ \frac{1}{6CL}\sin\left(\frac{1}{6CL}t + B_2\right) \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} I_2(t) =& e^{-\frac{R}{2L}t}\left[A_1\left(\frac{1}{2CL} - \frac{R}{2L}\right) e^{\sqrt{\frac{1}{2CL}}t} - \left(\frac{1}{2CL} + \frac{R}{2L}\right) B_1 e^{-\sqrt{\frac{1}{2CL}}t}\right] + A_2 e^{-\frac{R}{6CL}t} \beta \cos\left(\frac{1}{6CL}t + B_2\right) \\ &+ \frac{1}{6CL}\sin\left(\frac{1}{6CL}t + B_2\right) \end{aligned} \tag{15}$$

Figura 5: Representación del Problema 2



2. Partículas de masas m en barras fijas con ángulo constante de 2α entre si conectadas con muelles.

En este problema, analizaremos el sistema mecánico representado en la Figura 5.

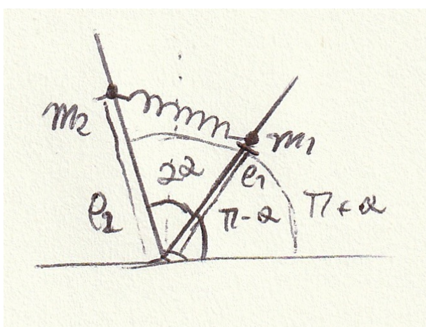
a) Supongamos que hay un campo gravitatorio g en la dirección negativa del eje y. Calcula el Lagrangiano, posición de equilibrio, modos y frecuencias normales.

Para este problema, lo más conveniente es utilizar la distancia del vértice como las coordenadas generalizadas, que llamaremos de ρ_1 y ρ_2. Por algunas relaciones trigonométricas básicas, representadas en la Figura 6, tendremos que:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho_1 \sin(\alpha) \\ y_1 &= \rho_1 \cos(\alpha) \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \rho_2 \sin(\alpha) \\ y_2 &= \rho_2 \cos(\alpha) \end{aligned} \tag{17}$$

Figura 6: Representación esquemática del sistema



2.0.1. Lagrangiano

Trivialmente podemos calcular la energía cinética, que nos saldrá:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}_1 + \dot{\rho}_2) \tag{18}$$

Por la presencia de la gravedad, sabemos que la energía potencial tendrá dos términos, uno gravitacional que va a depender de y_i y otro elástico que dependerá de D, la distancia entre las masas. Por la ley de cosenos podemos trivialmente calcular esta distancia:

$$D = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos{(2\alpha)}}$$

La energía potencial estará dada por:

$$U = \frac{1}{2}k(D - l_0)^2 + mgy_1 + mgy_2 = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos{(2\alpha)}} - l_0\right)^2 + mg\cos{(\alpha)}\,(\rho_1 + \rho_2)$$

O sea, nuestro Lagrangiano será:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}_1 + \dot{\rho}_2) - \frac{1}{2}k(\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos{(2\alpha)}} - l_0)^2 + mg\cos{(\alpha)}\,(\rho_1 + \rho_2) \tag{19}$$

Autofrecuencias

Si cambiamos de coordenadas, de modo que $(0, 0)$ es el punto de equilibrio de nuestro sistema, será trivial extraer las matrices de masa y de rigidez[4], que serán respectivamente:

$$M = m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$K = k\begin{pmatrix} 1 & -\cos{(2\alpha)} \\ -\cos{(2\alpha)} & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Para encontrar las autofrecuencias, vamos a utilizar la ecuación secular (y llamaremos $\omega^2 = \lambda$ por conveniencia). De esta manera, tendremos que:

$$\det{(K - M\lambda)} = \begin{vmatrix} k - m\lambda & k\cos 2\alpha \\ k\cos 2\alpha & k - m\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{22}$$

Una ecuación bastante sencilla de resolver, de donde encontraremos que:

$$\lambda = \frac{1}{m}(k \pm k\cos 2\alpha) = \frac{k}{m}(1 \pm \cos 2\alpha)$$

De modo que las frequencias normales son:

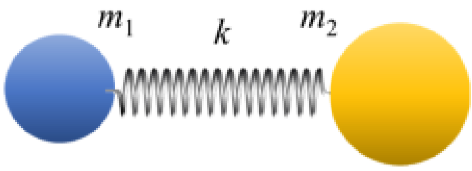
$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}(1 - \cos 2\alpha)} \\ \omega_1 &= \sqrt{\frac{k}{m}(1 + \cos 2\alpha)} \end{aligned} \tag{23}$$

[4]En estes sistemas, se eliminan todos los términos de orden diferente que dos del potencial, de manera que la matriz de rigidez, que no es más que el hessiano del potencial en el equilibrio, se podrá encontrar basicamente por inspección.

Caso límite: Masas libres

Antes de sacar los modos normales, que a priori pueden ser nada-triviales, es informativo ver si nuestro sistema complejo nos da las ecuaciones correctas para el caso más sencillo. Concretamente, analizaremos el caso de $2\alpha = \pi$, que corresponde a un sistema bastante conocido de dos masas libres acopladas entre si, reprentado en la figura 7

Figura 7: Límite del problema cuando $2\alpha = \pi$



Como $\cos\pi = -1$, llegaremos de nuestras ecuaciones a dos frecuencias normales, $\omega_0 = 0$ y $\omega_1 = \sqrt{2\frac{k}{m}}$. La frecuencia de 0 puede ser preocupante, pero fisicamente corresponde al hecho de que tenemos una simetría espacial. De cualquier manera, esas son exactamente las frecuencias de ese oscilador, algo que cualquiera puede verificar trivialmente. Por buen camino vamos.

Modos normales

Para el primer modo, tomaremos $\lambda_0 = \frac{k}{m}(1 - \cos 2\alpha)$ y lo pondremos en la ecuación:

$$(K - \lambda_0 M)\eta_0 = 0$$
$$\begin{pmatrix} k - k(1 - \cos 2\alpha) & -kcos2\alpha \\ -kcos2\alpha & k - k(1 - cos2\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{01} \\ \eta_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} k\cos 2\alpha & -kcos2\alpha \\ -kcos2\alpha & kcos2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{01} \\ \eta_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ecuación esta trivial de resolver,

$$\eta_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

Similarmente, podemos encontrar al otro modo normal:

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

Estes modos corresponden a los usuales simétrico/anti-simétrico de los problemas con dos grados de libertad, que es lo esperado.

c) Se tumba el sistema de modo que exista horizontalmente

En este caso, la única diferencia será que no tendremos la presencia de la gravedad. De esta manera, lo único que va a de hecho cambiar seran las posiciones de equilíbrio, no los modos o frecuencias normales. Para este sistema, tendremos que el equilíbrio estará en:

$$D^2 = l_0^2$$

Que, con la condición de $\rho_1 = \rho_2 = \rho_{eq}$, será equivalente a:

$$2\rho_{eq}^2 - 2\rho_{eq}^2 \cos 2\alpha = 2(1 - \cos 2\alpha)\rho_{eq}^2 = l_0^2$$

$$\rho_{eq} = \frac{l_0}{\sqrt{2(1 - \cos 2\alpha)}} = \frac{l_0}{2\sin(\alpha)} \tag{26}$$

Donde lo último se ha utilizado la sencilla relación de $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha$ para simplificar. Es útil mencionar que