Evaluación Continua de Mecánica II
Temas 2-3

Gabriel D'Andrade Furlanetto

23 de abril de 2022

1. Péndulo de Foucault

a) Escribe la segunda ley de Newton para el grave y demuestra que la tensión $\boldsymbol{T}$ se puede aproximar como $T \approx m\boldsymbol{g}_{ef}$, donde $\boldsymbol{g}_{ef}$ es la gravedad efectiva.

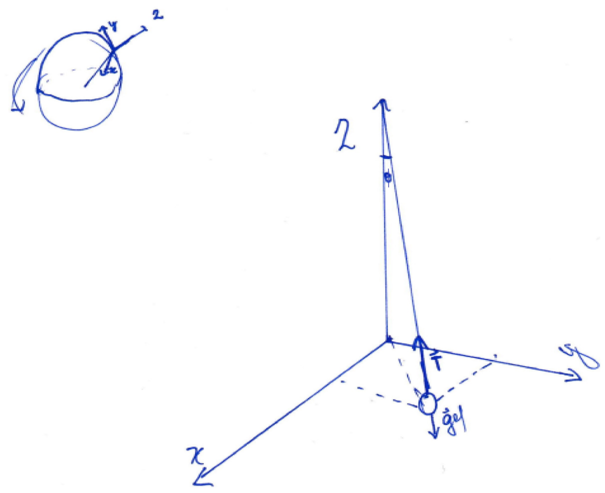

Figura 1: Representación del problema

Como estamos en el sistema de la Tierra, sabemos que podemos escribir la segunda Ley de Newton para este sistema como:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_{ap} + \boldsymbol{F}_{cf} + \boldsymbol{F}_{cor} \tag{1}$$

Para nuestro problema en particular, la fuerza aplicada será, por un lado, la tensión y, por otro, la gravedad. De esta manera, tendremos que:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g} + m(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) + 2m(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{\Omega}) \tag{2}$$

Esta ecuación se puede simplificar bastante si consideramos que el término centrífugo se puede combinar al gravitatorio y, al final, tendremos un término de la gravedad efectiva[1]:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g}_e f + 2m(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{\Omega}) \tag{3}$$

Para proseguir en la resolución, tendremos que mirar el problema en concreto. Primeramente, podemos escribir que, en el eje z, la segunda ley de Newton tendrá forma aproximadamente[2]

$$T_z - mg_{ef} \approx 0$$

Por la figura 1, sabemos por trigonometría básica que $T_z = T\cos\phi$. Como estamos en el régimen de oscilaciones pequeñas en ϕ, sabemos que:

$$T_z \approx T \tag{4}$$

Si juntamos las dos condiciones, tendremos que:

$$T \approx mg_e f \tag{5}$$

Como queríamos demostrar.

b) Escriba las ecuaciones de movimiento del plano horizontal en forma matricial

Como asumimos en nuestra aproximación que no había movimiento vertical, nos resta analizar el movimiento horizontal. Inicialmente, escribimos en coordenadas el término de Coriolis. Como $\dot{\boldsymbol{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ y $\boldsymbol{\Omega} = (0, \Omega\sin\theta, \Omega\cos\theta)$:

$$\boldsymbol{F}_{cor} = 2m(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{\Omega}) = 2m(\dot{y}\Omega\cos\theta - \dot{z}\sin\theta, -\dot{x}\Omega\cos\theta, \dot{x}\Omega\sin\theta)$$

Como ya lo decimos, vamos a ignorar el término vertical en este problema, entonces tomaremos el término de Coriolis como $\boldsymbol{F}_{cor} = 2m(\dot{y}\Omega\cos\theta, -\dot{x}\Omega\cos\theta)$. Por la ecuación (3), si determinamos las tensiones determinaremos las ecuaciones de movimiento. Eso se puede hacer de manera casi trivial con un poco de trigonometría, de la que concluiremos que $\frac{T_x}{T} = -\frac{x}{\ell}$ y $\frac{T_y}{T} = -\frac{y}{\ell}$[3]. De eso, concluimos que:

$$T_x = -\frac{mgx}{\ell}$$

$$T_y = -\frac{mgy}{\ell}$$

De manera que podemos escribir las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{gx}{\ell} + 2\dot{y}\Omega\cos\theta \\ \ddot{y} &= -\frac{gy}{\ell} - 2\dot{x}\Omega\cos\theta \end{aligned} \tag{6}$$

[1] Tomaremos esto simplemente como un hecho conocido, pero cualquier libro texto estándar de mecánica lo tiene tratado explícitamente.

[2] Aquí estamos aproximando la fuerza de Coriolis no tiene efecto en el eje z y que partícula aproximadamente no se mueve

[3] El signo negativo es una sutileza que se puede fácilmente olvidar, pero viene del hecho de que la tensión estará siempre opuesta al movimiento. Si no lo fuera, la solución explotaría y eso claramente no es una solución física para un péndulo.

O sea, lo escribimos aqui como:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y}\Omega\cos\theta + \frac{gx}{\ell} = 0\\ \ddot{y} + 2\dot{x}\Omega\cos\theta + \frac{gy}{\ell} = 0\end{aligned} \tag{7}$$

Que podemos escribir vectorialmente como:

$$\ddot{\boldsymbol{\chi}} + A\dot{\chi} + B\boldsymbol{\chi} = 0 \tag{8}$$

Donde:

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A = 2\Omega\cos\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{g}{\ell}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Que era lo que queríamos encontrar.

c) Integre las ecuaciones de movimiento de manera exacta y demuestra que la órbita del grave es una elipse que precesa con velocidad angular $\Omega\cos\theta$.

Para integrar nuestra ecuación, utilizaremos la técnica que vimos en clases de introducir una variable compleja[4] , $z = x + iy$. Si sumamos la primera fila por i veces la segunda. Lo hacemos explícitamente:

$$\ddot{x}+i\ddot{y}+2\Omega\cos\theta(\dot{y}-i\dot{x})+\frac{g}{\ell}(x+iy) = \frac{d^2}{dt^2}(x+iy)+2\Omega\cos\theta\frac{d}{dt}-i(iy+x)+\frac{g}{\ell}(x+iy) = 0$$

$$\ddot{z} - 2i\Omega\cos\theta\dot{z} + \frac{g}{\ell}z = 0$$

Para encontrar la solución de este sistema lineal de orden dos, probaremos una solución de tipo $z(t) = ei\lambda t$:

$$e^{i\lambda t}(-\lambda^2 - 2\Omega\cos\theta\lambda + \frac{g}{l}) = 0$$

De manera que tendremos dos valores de lambda como solución:

$$\lambda = \Omega\cos\theta \pm \sqrt{(\Omega\cos\theta)^2 + \left(\frac{g}{l}\right)^2} = \Omega_\theta \pm \omega$$

Donde, por claridad, hemos definido $\Omega_\theta = \Omega\cos\theta$ y $\omega = \sqrt{\Omega_\theta^2 + \left(\frac{g}{l}\right)^2}$. De esa manera, tendremos que la solución general para nuestro problema será:

$$z = C_1 e^{it(\Omega_\theta+\omega)} + C_2 e^{it(\Omega_\theta-\omega)} = C_1 e^{i\Omega_\theta t}e^{i\omega t} + C_2 e^{i\Omega_\theta t}e^{-i\omega t} = e^{i\Omega_\theta t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right)$$

$$z = e^{i\Omega_\theta t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right) \tag{10}$$

[4]Más que una coincidencia feliz, es casi siempre ideal introducir números complejos para tratar de rotaciones en $\mathbb{R}^2$, que es exactamente la esencia de nuestro problema, por el isomorfismo entre $SO(2)$ y $U(1)$.

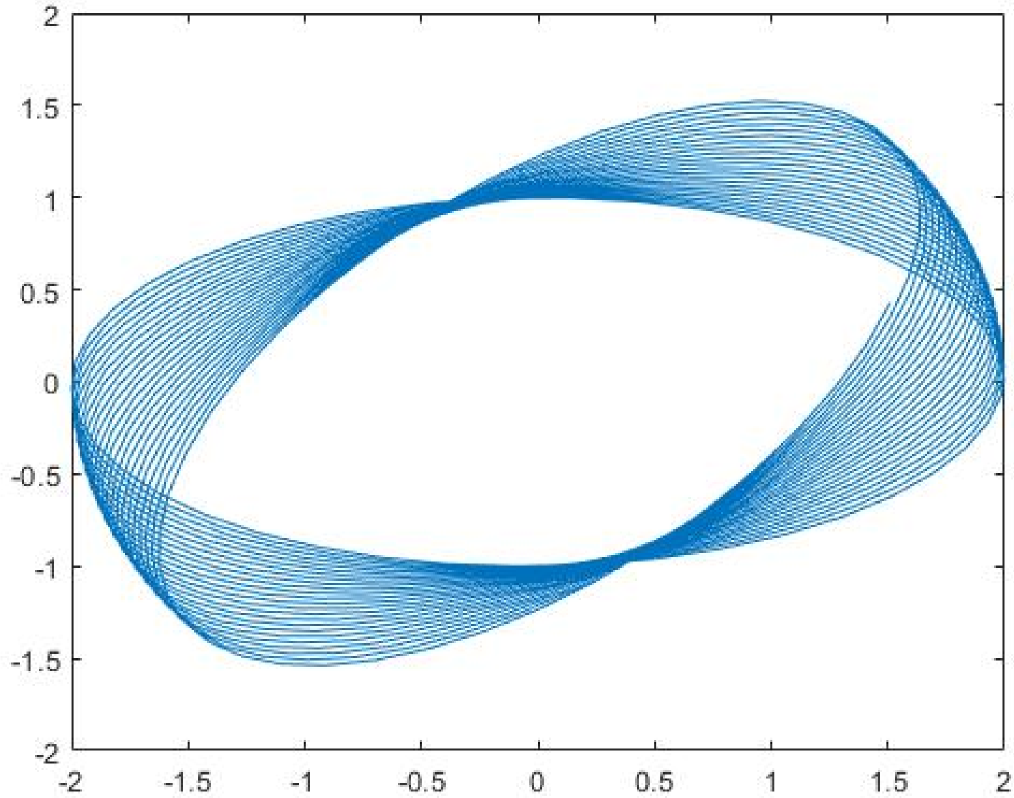

Figura 2: Gráfico de los 15 primeros segundos para $C_1 = C_2 + 1 = 1{,}5$, $\Omega_\theta = 0{,}05Hz$ y $\omega = 10Hz$

Si queremos explícitamente encontrar las soluciones en nuestras variables original, sabemos que $x = \Re(z)$ e $y = \Im(z)$ y estas son operaciones triviales de hacer, pero no iluminan mucho nuestra solución.[5]. Si miramos directamente a la ecuación (10), podremos apreciar que tenemos un término envolvente, de frecuencia Ω_θ, y otro término interior, combinación lineal de frecuencias ω y $-\omega$. Este término interior corresponde exactamente a una elipsis en el plano complejo, y el exterior a una rotación de esta elipsis (Esto es, un término de precesión). Para valores escogidos de manera aleatoria, tenemos la siguiente representación gráfica:

De esa manera, encontramos la solución exacta para nuestra ecuación diferencial y demostramos que es una elipsis que precesa con velocidad angular $\Omega_\theta = \Omega \cos\theta$, que es exactamente lo que se pedía.

[5]Hacer eso sería como resolver el problema de dos cuerpos en polares y pasarlo a cartesianas para 'interpretar los resultados'

d) Integra la ecuación diferencial del apartado anterior de manera perturbativa hasta primer orden en Ω

Solución de Orden 0

El método perturbativo siempre empieza por la solución de orden 0, esto es, donde no consideramos los términos con Ω[6]. De las ecuaciones(7) y tomando $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \\ \ddot{y}_0 + \omega_0^2 y_0 = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Que son absolutamente triviales de resolver, ya que son apenas osciladores armónicos desacoplados:

$$\begin{aligned} x_0(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + B_1 \sin \omega_0 t) \\ y_0(t) = A_2 \cos(\omega_0 t) + B_2 \sin \omega_0 t) \end{aligned} \tag{12}$$

1.0.1. Solución de Orden 1

Finalmente, podemos poner los términos que van en orden 1:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - 2\dot{y}_0 + \omega_0^2 x_1 = 0 \\ \ddot{y}_1 + 2\dot{x}_0 + \omega_1^2 y_1 = 0 \end{aligned}$$

Que podemos escribir como:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= 2\omega_0(A_2 \cos(\omega_0 t) + B_2 \sin \omega_0 t)) \\ \ddot{y}_1 + \omega_0^2 y_1 &= -2\omega_0(A_1 \cos(\omega_0 t) + B_1 \sin \omega_0 t)) \end{aligned} \tag{13}$$

Y esto se puede resolver con métodos estándar para obtener

$$\begin{aligned} x_1 &= (A_2 t + C_1)\cos(\omega_0 t) + (B_2 t + C_2)\sin \omega_0 t \\ y_1 &= (-A_1 t + C_3)\cos(\omega_0 t) + (-B_1 t + C_4)\sin \omega_0 t \end{aligned} \tag{14}$$

De manera que nuestra solución es:

$$\begin{aligned} x_1 &= (A_2 t + C_1)\cos(\omega_0 t) + (B_2 t + C_2)\sin \omega_0 t \\ y_1 &= (-A_1 t + C_3)\cos(\omega_0 t) + (-B_1 t + C_4)\sin \omega_0 t \end{aligned} \tag{15}$$

Pero, si escribimos $x = x_0 + \Omega_\theta x_1$, vamos a percibir que tenemos demasiadas constantes para nuestra solución: Como son ambas de orden 2, deberíamos tener 2 constantes para cada coordenada. Tenemos bastantes más que eso, lo que significa adicionamos soluciones extraneas al problema , y tendremos que poner nuestras expresiones de x e y en la ecuación (7). De esa manera, tendremos finalmente que:

$$\begin{aligned} x_1 = C_1 \cos(\omega_0 t) - \Omega t C_2 \sin \omega_0 t \\ y_1 = C_2 \sin \omega_0 t - C_1 t \cos(\omega_0 t) \end{aligned} \tag{16}$$

Si tomamos de la ecuación (10) que $x = \Re(z)$, que $y = \Im(z)$

[6] Formalmente, asumimos que la solución va con potencias de Ω y agrupamos términos del mismo orden.

e) Demuestra que el período de oscilación del péndulo es aproximadamente $T = T_0(1 - \frac{\Omega^2}{2\omega_0^2}\cos^2\theta)$

En la sección c), determinamos que el péndulo oscilaba con frecuencia angular $\omega = \sqrt{(\Omega\cos\theta)^2 + \left(\frac{g}{l}\right)^2}$. Podemos manipular un poco esta expresión:

$$\omega = \sqrt{(\Omega\cos\theta)^2 + \omega_0^2} = \omega_0\sqrt{1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\cos^2\theta}$$

Por definición, sabemos que el período está relacionado con la frecuencia angular por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

De manera que, para nuestra frecuencia particular tendremos que:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Pero, sabemos que $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ y que podemos aproximar $(1+x)^n \approx 1 + nx$, o sea, podemos escribir que:

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 - \frac{\Omega^2}{2\omega^2}\right) \tag{17}$$

Que era lo que queríamos demostrar.

f) Calcula el tiempo que tarda el péndulo en dar una vuelta completa alrededor de su eje de giro y estima dicho tiempo para la facultad

Sabemos que la frecuencia angular de precesión del péndulo es $\Omega_\theta = \Omega\cos\theta$, y que está frecuencia angular está relacionada con el período por:

$$T_{prec} = \frac{2\pi}{\Omega_\theta} = \frac{2\pi}{\Omega}\sec\theta = T_{tierra}\sec\theta$$

Finalmente, sabemos que Salamanca está a una colatitud de $\theta = 49{,}03118$ y que el periodo de la tierra es de 24h, y por lo tanto sabemos que

$$T_{precUSAL} = 36{,}60h = 36h36min$$

2. Cánica puntual sobre cara interna de un cono hueco

a) Calcula el momento de inercia del cono alrededor de su eje de giro y escribe el Lagrangeano del sistema cánica + cono en un sistema inercial.

Para calcular el momento de inercia del cono, utilizaremos que:

$$I = \int r^2 dm = \int_S \sigma r^2 d\Omega$$

Pero sabemos que podemos parametrizar (en cartesianas) el cono como: $(z\tan\alpha\cos\theta, z\tan\alpha\sin\theta, z)$. Calculamos los vectores tangentes:

$$\boldsymbol{v}_\theta = z(-\tan\alpha\sin\theta, \tan\alpha\cos\theta, 0)$$

$$\boldsymbol{v}_z = (\tan\alpha\cos\theta, \tan\alpha\sin\theta, 1)$$

De manera que:

$$||\boldsymbol{n}|| = z\tan\alpha\sec\alpha$$

$$I = \sigma\int r^2 ||n|| dz d\phi = \sigma\int_0^{2\pi} d\theta z^3\tan^3\alpha\sec\alpha\int_0^h dz = \sigma 2\pi\frac{h^4}{4}\tan^3\alpha\sec\alpha$$

$$I = \sigma\pi h\tan\alpha h\sec\alpha\frac{(h\tan\alpha)^2}{2} = \sigma\pi r l\frac{r^2}{2}$$

Pero, como $\sigma = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi r l}$, tendremos que:

$$I = M\frac{r^2}{2} = M\frac{h^2\tan^2\alpha}{2} \tag{18}$$

Para el lagrangeano, tendremos 3 términos cinéticos y 2 potenciales: 2 cinéticos para el cono (uno de rotación y otro de traslación) y uno para la masa, y un potencial para cada. Escribiéndolo, tenemos que:

$$T = T_{rot} + T_{trans} + T_{cuenca} = \frac{1}{2}I\omega^2(t) + \frac{1}{2}M\dot{Z} + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

$$V = MgZ + mgz$$

Finalmente,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I\omega^2(t) + \frac{1}{2}M\dot{Z}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - MgZ - mgz \tag{19}$$

Pero es importante fijarse que esas no son coordenadas generalizadas para el problema, ya que no idénticamente verifican las ligaduras del cono. De hecho, las coordenadas generalizadas serían (s, ϕ), donde s es la distancia de la canica al vértice, pero como este vértice accelera uniformemente para abajo, esta no sería una coordenada inercial.

b) Haz un cambio de coordenadas a unas variables que roten con el cono y encuentra las ecuaciones de movimiento de la canica. Demuestra que son las mismas que se obtendrían con la segunda Ley de Newton

Además de cambiarnos la coordenada ϕ a una que rote con el sistema, vamos a cambiar las coordenadas z para que no nos tengamos que preocuparnos con los términos de gravedad[7] y que posamos implementar coordenadas generalizadas apropiadas. Empezamos por los siguientes cambios:

$$Z \to \bar{Z} = Z + \frac{gt^2}{2}$$
$$z \to \bar{z} = z + \frac{gt^2}{2}$$

Que nos llevará a un Lagrangeano de forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I\omega^2(t) + \frac{1}{2}M\left(\dot{\bar{Z}} + gt\right) + \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \left(\dot{\bar{Z}} + gt\right)\right) - Mg\left(\bar{Z} + \frac{gt^2}{2}\right) - mg\left(\bar{z} + \frac{gt^2}{2}\right)$$

Que parece bastante más complicado que nuestro Lagrangeano original, algo un poco preocupante. Pero, si analizamos los términos de velocidades, veremos los dos tienen forma de $\frac{m}{2}\dot{\bar{x}}^2 + m\dot{\bar{x}}gt + \frac{m}{2}g^2t^2$. Sin entrar en detalles excesivos, los términos con t van a cancelar los términos potenciales, *salvo una derivada total en t*. Pero, las ecuaciones de movimiento son invariantes bajo este tipo de transformación del Lagrangeano , esto es $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \dfrac{dF}{dt}$ producen las mismas ecuaciones de movimiento. Al final de ese proceso un poco tenebroso, tendremos la siguiente expresión[8]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I\omega^2(t) + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{\bar{z}}^2) \tag{20}$$

Ahora, pasamos a las coordenadas $\bar{z} = s\cos\alpha$ y $r = s\sin\alpha$, donde s es la distancia de la canica al vértice. Trivialmente, podemos calcular que:

$$\dot{\bar{z}} = \dot{s}\cos\alpha$$
$$\dot{r} = \dot{s}\sin\alpha$$

Sustituindo en nuestra expresión, tendremos que:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I\omega^2(t) + \frac{1}{2}m(\dot{s}^2\sin^2\alpha + s^2\sin^2\alpha\dot{\phi}^2 + \dot{s}^2\cos^2\alpha)$$

O sea, que:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I\omega^2(t) + \frac{1}{2}m(\dot{s}^2 + s^2\sin^2\alpha\dot{\phi}) \tag{21}$$

Finalmente, hacemos el cambio de coordenadas que nos pide:

$$\dot{\phi} \to \dot{\vartheta} = \dot{\phi} - \omega(t)$$

Y ponemoslo en el Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I\omega^2(t) + \frac{1}{2}m(\dot{s}^2 + s^2\sin^2\alpha(\dot{\vartheta} + \omega(t))^2)$$

[7] Por el principio de equivalencia, sabemos que *no* debería influir la gravedad en nuestro problema, pero eso no es claro a priori del Lagrangeano en la ecuación (19). Ese cambio de coordenadas lo hace explícito.

[8] En este sistema de coordenadas, $\bar{Z}$ es una coordenada cíclica pero $\bar{z}$ no.

Si expandimos el término de las velocidades angulares en parentesis y agrupamos todo lo similar, tendremos que:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(I + ms^2 \sin^2 \alpha)\omega^2 + ms^2 \sin^2 \alpha \dot{\vartheta}\omega + \frac{1}{2}ms^2 \sin^2 \alpha \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{s}^2 \tag{22}$$

Que es nuestro Lagrangeano final. Pero, es trivial observar que ϑ es cíclica, y por lo tanto se conserva p_ϑ:

$$\ell = ms^2 \sin^2 \alpha\omega + ms^2 \sin^2 \alpha\dot{\vartheta} = ms^2 \sin^2 \alpha(\omega + \dot{\vartheta}) \tag{23}$$

De manera que:

$$\dot{\vartheta} + \omega = \frac{\ell}{m \sin^2 \alpha s^2}$$

Escribimos la ecuación de E-L para s, donde tendremos que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}}\right)$$

$$ms \sin^2 \alpha(\omega + \dot{\vartheta})^2 = m\ddot{s}$$

De donde tendremos que:

$$ms \sin^2 \alpha \left(\frac{\ell}{m \sin^2 \alpha s^2}\right)^2 = \frac{\ell}{m \sin^2 \alpha s^3} = m\ddot{s}$$

O sea;

$$m\ddot{s} = \frac{\ell}{m \sin^2 \alpha s^3} \tag{24}$$

Los resultados son idénticos al que se tendría si aplicáramos las leyes de Newton en un sistema no-inercial. Hacer el desarrollo explícitamente llevaría más de que todo el desarrollo de Lagrange que hemos hecho hasta ahora.

c) Se verifica que $\dot{\vartheta} = 0$. Si $s(0) = D$ y $\omega(0) = \omega_0$, obtén $\omega(t)$ en función de $s(t)$.

Encontrar ω en función de s es básicamente trivial: Como $\dot{\vartheta} = 0$, $\ell = m\omega \sin^2 \alpha s^2$, de manera que $\omega = \frac{\ell}{m \sin^2 \alpha s^2}$. Pero como sabemos que ℓ es constante de movimiento y tenemos nuestras condiciones iniciales, podemos calcularlo explícitamente:

$$\ell = m\omega_0 \sin^2 \alpha D^2 \tag{25}$$

De manera que tenemos ω como función de s:

$$\omega = \frac{\omega_0 D^2}{s^2} \tag{26}$$

d) Determina la velocidad mínima v_0 para que la canica descienda hasta una distancia $\frac{D}{2}$

En este problema, como no tenemos ningún término de energía potencial y el sistema es natural[9], el Lagrangeano es directamente el Hamiltoneano del sistema, y como no depende explícitamente del tiempo, es por lo tanto una cantidad conservada. De manera que podemos escribir que:

$$\mathcal{L}_{inicial} = \frac{1}{2}(I + mD^2 \sin^2 \alpha)\omega_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\left(I + \frac{m \sin^2 \alpha D^2}{4}\right)\left(\frac{4\omega_0 D^2}{D^2}\right)^2 = \mathcal{L}_{final}$$

O sea:

$$mv_0^2 = (16I\omega_0^2 - I\omega_0^2) + (4m \sin^2 \alpha D^2 \omega_0^2 - m \sin^2 \alpha D\omega_0^2) = (15I + 3m \sin^2 \alpha D^2)\omega_0^2$$

De manera que:

$$v_0 = \omega_0 \sqrt{\frac{15I}{m} + 3m \sin^2 \alpha D^2} \tag{27}$$

A la última parte de la pregunta, es imposible llegar al vértice. Si volvemos al problema anterior y hacemos llegar a $\frac{D}{n}$, tendríamos que[10]:

$$v_0 = \omega_0 \sqrt{\frac{(n^4 - 1)I}{m} + (n^2 - 1)m \sin^2 \alpha D^2}$$

Pero el caso de llegar al vértice correspondería a tomar el límite para $n \to \infty$, y eso nos llevaría a una velocidad inicial infinita. Por lo tanto, no es posible llegar al vértice.

e) Si tomamos $v_0 = 0$, bajo qué condiciones la canica permanecerá quieta respecto del cono?

Este problema no es más que hacer que la aceleración de la ecuación (24) sea nula, que en este caso será equivalente a hacer el momento angular nulo. Por la ecuación (25), esto solo se cumple cuando o $\omega_0 = 0$ o $D = 0$. Ambos casos son bastante intuitivos: El primero corresponde al cono no rotar, y como pragmáticamente no tenemos gravedad en el sistema, la canica se quedaría quieta; El segundo corresponde a un equilibrio altamente inestable del sistema, que viene dado por tenermos una canica que, por ser puntual, no sentiría la rotación en $r = 0$

[9] La energía cinética es función homogénea de grado dos de los momentos canónicos
[10] nuestro problema correspondería a n = 2