Evaluación Continua de Mecánica II
Temas 2-3

Gabriel D'Andrade Furlanetto

20 de abril de 2022

1. Péndulo de Foucault

a) Escribe la segunda ley de Newton para el grave y demuestra que la tensión $\boldsymbol{T}$ se puede aproximar como $T \approx m\boldsymbol{g}_{ef}$, donde $\boldsymbol{g}_{ef}$ es la gravedad efectiva.

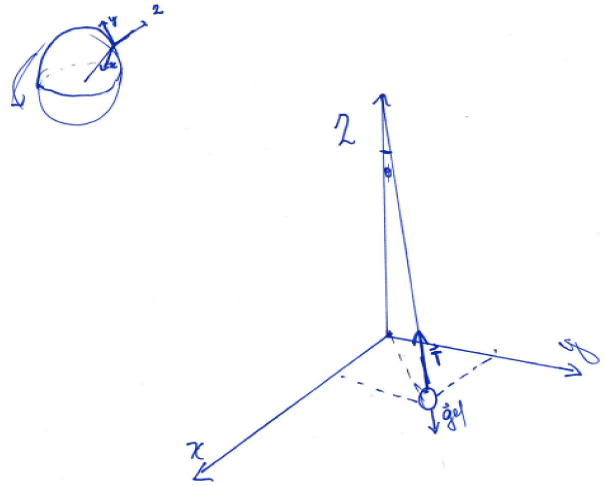

Figura 1: Representación del problema

Como estamos en el sistema de la Tierra, sabemos que podemos escribir la segunda Ley de Newton para este sistema como:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}_{ap} + \boldsymbol{F}_{cf} + \boldsymbol{F}_{cor} \tag{1}$$

Para nuestro problema en particular, la fuerza aplicada será, por un lado, la tensión y, por otro, la gravedad. De esta manera, tendremos que:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g} + m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + 2m(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{\omega}) \tag{2}$$

Esta ecuación se puede simplificar bastante si consideramos que el término centrífugo se puede combinar al gravitatorio y, al final, tendremos un término de la gravedad efectiva[1]:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g}_e f + 2m(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{\omega}) \tag{3}$$

Para proseguir en la resolución, tendremos que mirar el problema en concreto. Primeramente, podemos escribir que, en el eje z, la segunda ley de Newton tendrá forma aproximadamente[2]

$$T_z - mg_{ef} \approx 0$$

Por la figura 1, sabemos por trigonometría básica que $T_z = T\cos\phi$. Como estamos en el régimen de oscilaciones pequeñas en ϕ, sabemos que:

$$T_z \approx T \tag{4}$$

Si juntamos las dos condiciones, tendremos que:

$$T \approx mg_e f \tag{5}$$

Como queríamos demostrar.

b) Escriba las ecuaciones de movimiento del plano horizontal en forma matricial

Como asumimos en nuestra aproximación que no había movimiento vertical, nos resta analizar el movimiento horizontal. Inicialmente, escribimos en coordenadas el término de Coriolis. Como $\dot{\boldsymbol{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ y $\boldsymbol{\omega} = (0, \omega\sin\theta, \omega\cos\theta)$:

$$\boldsymbol{F}_{cor} = 2m(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{\omega}) = 2m(\dot{y}\omega\cos\theta - \dot{z}\sin\theta, -\dot{x}\omega\cos\theta, \dot{x}\omega\sin\theta)$$

Como ya lo decimos, vamos a ignorar el término vertical en este problema, entonces tomaremos el término de Coriolis como $\boldsymbol{F}_{cor} = 2m(\dot{y}\omega\cos\theta, -\dot{x}\omega\cos\theta)$. Por la ecuación (3), si determinamos las tensiones determinaremos las ecuaciones de movimiento. Eso se puede hacer de manera casi trivial con un poco de trigonometría, de la que concluiremos que $\frac{T_x}{T} = -\frac{x}{\ell}$ y $\frac{T_y}{T} = -\frac{y}{\ell}$[3]. De eso, concluimos que:

$$T_x = -\frac{mgx}{\ell}$$

$$T_y = -\frac{mgy}{\ell}$$

De manera que podemos escribir las ecuaciones de movimiento:

$$\ddot{x} = -\frac{gx}{\ell} + 2\dot{y}\omega\cos\theta \ddot{y} = -\frac{gy}{\ell} - 2\dot{x}\omega\cos\theta \tag{6}$$

Que podemos escribir vectorialmente como:

[1] Tomaremos esto simplemente como un hecho conocido, pero cualquier libro texto estándar de mecánica lo tiene tratado explícitamente.

[2] Aquí estamos aproximando la fuerza de Coriolis no tiene efecto en el eje z y que partícula aproximadamente no se mueve

[3] El signo negativo es una sutileza que se puede fácilmente olvidar, pero viene del hecho de que la tensión estará siempre opuesta al movimiento. Si no lo fuera, la solución explotaría y eso claramente no es una solución física para un péndulo.

$$\ddot{\boldsymbol{\chi}} + A\dot{\chi} + B\boldsymbol{\chi} = 0 \tag{7}$$

Donde:

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A = 2\omega\cos\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{g}{\ell}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Que era lo que queríamos encontrar.

c) Integre las ecuaciones de movimiento de manera exacta y demuestra que la órbita del grave es una elipse que precesa con velocidad angular $\omega\cos\theta$.

Para integrar nuestra ecuación, utilizaremos la técnica que vimos en clases de introducir una variable compleja[4] , $z = x + iy$. Si sumamos la primera fila por i veces la segunda. Lo hacemos explícitamente:

$$\ddot{x} + i\ddot{y} + 2\omega\cos\theta(\dot{y} - i\dot{x}) + \frac{g}{\ell}(x + iy) = \frac{d^2}{dt^2}(x + iy) + 2\omega\cos\theta\frac{d}{dt} - i(iy + x) + \frac{g}{\ell}(x + iy) = 0$$

$$\ddot{z} - 2i\omega\cos\theta\dot{z} + \frac{g}{\ell}z = 0$$

2. Cono con Canica

[4]Más que una coincidencia feliz, es casi siempre ideal introducir números complejos para tratar de rotaciones en R^2, que es exactamente la esencia de nuestro problema, por el isomorfismo entre $SO(2)$ y $U(1)$.