Ecuación empírica de estado de gases ideales

Gabriel D'Andrade Furlanetto, Sergio Bernardo Pérez

March 8, 2022

1 Datos de Laboratorio

Table 1: Temperatura y presión en el laboratorio

T_0(°C)	T_f(°C)	P_0(mmHg)	P_f(mmHg)
17 ± 0.5	17 ± 0.5	694 ± 1	694 ± 1

2 Objetivos

Comprobar que el aire a presiones y temperaturas normales se comporta como un gás ideal y, por lo tanto, verifica las leyes de Boyle-Mariotte y Gay-Lussac.

3 Ecuaciones Fundamentales

Cuando un gas ideal realiza un proceso isotermo, se verifica que la presión y el volumen son inversamente proporcionales, la ley de Boyle-Mariotte:

$$PV = K_1 \tag{1}$$

Cuando realiza un proceso isobaro, se verifica la temperatura y el volumen son proporcionales, la primera ley de Gay-Lussac:

$$\frac{V}{T} = K_2 \tag{2}$$

Y, finalmente, en un proceso isocoro, la presión y temperatura son proporcionales, o sea, se verifica la segunda ley de Gay-Lussac:

$$\frac{P}{T} = K_3 \tag{3}$$

Que se pueden combinar para forma la ecuación del gas ideal:

$$PV = nRT \tag{4}$$

Donde n es el número de moles, y $R = 8.314$ J/(mol K) es una constante de proporcionalidad, la constante universal de los gases. De esa ecuación, podemos calcular los coeficientes termomecánicos para un gas ideal:

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{T} \tag{5}$$

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \frac{1}{P} \tag{6}$$

$$\beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T} \tag{7}$$

4 Datos Experimentales

Table 2: Datos experimentales

Isoterma		Isocora	
$t = 20.4 \pm 1$		$V = 30.0 \pm 0.5 cm^3$	
V (cm^3)	P (hPa)	t(°C)	P(hPa)
30	996	20.4	996
35	862	29.1	1040
40	757	40.1	1077
45	672	49.4	1092
50	603	59	1115
55	550		
60	497		
$\Delta V = 0.5 cm^3$	$\Delta P = 1 hPa$	$\Delta t = 0.1$	$\Delta P = 1 hPa$

5 Datos para la representación gráfica

Table 3: Datos para las representaciones de la isoterma

$T = 293.4 \pm 0.1$ K				
$x = P(Pa)$		$\Delta y(mol)$		$\Delta z(m^{-3})$
99600	1.22×10^{-3}	0.020×10^{-3}	33333	556
86200	1.24×10^{-3}	0.018×10^{-3}	28571	408
75700	1.24×10^{-3}	0.016×10^{-3}	25000	313
67200	1.24×10^{-3}	0.014×10^{-3}	22222	247
60300	1.24×10^{-3}	0.013×10^{-3}	20000	200
55000	1.24×10^{-3}	0.012×10^{-3}	18182	165
49700	1.22×10^{-3}	0.010×10^{-3}	16667	139

Table 4: Datos para la representación gráfica de la isocora

$V = 30 \pm 0.5$	
$x = T$ (K)	$y = P$ (Pa)
293.4	99600
302.1	104000
313.1	107700
322.4	109200
332	111500
	$\Delta y = 100 Pa$

6 Representación gráfica

7 Ajuste de datos

Para el cálculo, utilizaremos que, en general, para una regresión del tipo $y = ax + b$, se tiene que:

$$a = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \tag{8}$$

$$b = \frac{\sum y \sum x^2 - \sum x \sum xy}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \tag{9}$$

$$R^2 = \frac{\left(\sum xy - \sum x \sum y\right)^2}{\left(n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right)\left(n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2\right)} \tag{10}$$

Table 5: Datos para el ajuste de $\frac{PV}{RT}$ frente a P

n	$\sum x$	$\sum y$	$\sum x^2$	$\sum y^2$	$\sum xy$
7	493700	8.64E-03	36728110000	1.07E-05	609.3841188

Recta de regresión $\frac{PV}{RT} = a_1 P + b_1$:

$$a_1 = -3.96 \times 10^{-11} \frac{mol}{Pa} \tag{11}$$

$$b_1 = 1.24 \times 10^{-3} mol \tag{12}$$

$$R_1^2 = 0.00857 \tag{13}$$

Table 6: Datos para el ajuste de $\frac{1}{V}$ frente a P

n	$\sum x$	$\sum z$	$\sum x^2$	$\sum z^2$	$\sum xz$
5	725900	1.36E-02	257386710000	8.08E-05	4553.016987

Recta de regresión $\frac{1}{V} = a_2 P + b_2$:

$$a_2 = 0.334 \frac{1}{m^3 Pa} \tag{14}$$

$$b_2 = -159 \frac{1}{m^3} \tag{15}$$

$$R_2^2 = 0.00857 \tag{16}$$

Table 7: Datos para el ajuste de P frente a T

n	$\sum x$	$\sum y$	$\sum x^2$	$\sum y^2$	$\sum xy$
5	1563	532000	489545.34	56692340000	166585990

Recta de regresión $P = a_3 T + b_3$:

$$a_3 = 297.19 \frac{Pa}{K} \tag{17}$$

$$b_3 = 13497 Pa \tag{18}$$

$$R_3^2 = 0.960 \tag{19}$$

8 Cálculo de Errores

En general, para regresiones lineales, tenemos dos de error, el estadístico y el instrumental. El primero, se calcula con:

$$\Delta_{est}a = a\sqrt{\frac{R_1^{-2} - 1}{n-2}}$$

$$\Delta_{est}b = \Delta_{est}a\sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{n}}$$

Y el segundo se calcula con:

$$\Delta_{inst}a = \sqrt{\sum_j \left[\frac{n \cdot x_j - \sum_i x_i}{n\sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}\right]^2 \cdot \Delta y_j^2}$$

$$\Delta_{inst}b = \sqrt{\sum_j \left[\frac{\sum x_i^2 - x_j \sum_i x_i}{n\sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}\right]^2 \cdot \Delta y_j^2}$$

Finalmente, se puede calcular el error total por la regla de cuadratura:

$$\Delta a = \sqrt{\Delta_{est}a^2 + \Delta_{inst}a^2} \tag{20}$$

$$\Delta b = \sqrt{\Delta_{est}b^2 + \Delta_{inst}b^2} \tag{21}$$

Entonces, tenemos que:

$$\Delta_{est}a_1 = 1.90 \times 10^{-10}\frac{mol}{Pa}$$

$$\Delta_{esc}a_1 = 3.78 \times 10^{-10}\frac{mol}{Pa}$$

$$\Delta_{est}b_1 = 1.38 \times 10^{-5}mol$$

$$\Delta_{esc}b_1 = 2.50 \times 10^{-5}mol$$

$$\Delta a_1 = 4.23 \times 10^{-10}\frac{mol}{Pa} \tag{22}$$

$$\Delta b_1 = 2.85 \times 10^{-5}mol \tag{23}$$

$$\Delta_{est}a_2 = 0.0035\frac{1}{m^3 Pa}$$

$$\Delta_{esc}a_2 = 0.0094\frac{1}{m^3 Pa}$$

$$\Delta_{est}b_2 = 257\frac{1}{m^3}$$

$$\Delta_{esc}b_2 = 587\frac{1}{m^3}$$

$$\Delta a_2 = 0.01\frac{1}{m^3 Pa} \tag{24}$$

$$\Delta b_2 = 640\frac{1}{m^3} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{est} a_3 &= 35\frac{T}{Pa} \\
\Delta_{esc} a_3 &= 3.2418\frac{T}{Pa} \\
\Delta_{est} b_3 &= 10951T \\
\Delta_{esc} b_3 &= 1014T
\end{aligned}$$

$$\Delta a_3 = 35.1\frac{1}{m^3 Pa} \tag{26}$$

$$\Delta b_3 = 10951\frac{1}{m^3} \tag{27}$$

Finalmente, no queremos los coeficientes directamente pero sí n, κ_T a $P = 100000 atm$ y β a $300K$. De esa manera, calculamos primero a n:

$$n = b_1 = 1.24 \times 10^{-3} \text{ mol} \tag{28}$$

Por lo que tenemos, trivialmente, que

$$\Delta n = \Delta b_1 = 0.029 \times 10^{-3} \text{ mol} \tag{29}$$

Para κ_T, tenemos que:

$$\kappa_T = V\left(\frac{\partial 1/V}{\partial P}\right) = \frac{1}{a_2 P + b_2} a_2 = 1.00 \times 10^{-5} \tag{30}$$

$$\Delta\kappa_T = \sqrt{\left(\frac{\partial \kappa_T}{\partial a_2}\Delta a_2\right)^2 + \left(\frac{\partial \kappa_T}{\partial b_2}\Delta b_2\right)^2} = 0.02 \times 10^{-5} \tag{31}$$

Finalmente, para β, tendremos que

$$\beta = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right) = \frac{1}{a_3 T + b_3} a_3 = 2.9 \times 10^{-3} K^{-1} \tag{32}$$

$$\Delta\beta = \sqrt{\left(\frac{\partial \beta}{\partial a_3}\Delta a_3\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial b_3}\Delta b_3\right)^2} = 0.3 \times 10^{-3} \tag{33}$$

9 Resultados

$$n = (1.24 \pm 0.03) \times 10^{-3}\text{mol} \tag{34}$$

$$\kappa_T = (1.00 \pm 0.02) \times 10^{-5}\text{Pa}^{-1} \tag{35}$$

$$\beta = (2.9 \pm 0.3) \times 10^{-3}\text{K}^{-1} \tag{36}$$

10 Conclusiones

11 Observaciones y sugerencias