

Medida de la Aceleración de la Gravedad

Gabriel D'Andrade Furlanetto - XDD204950

1. Tiro Horizontal

1.1. Objetivos

Se tiene como objetivo de este experimento medir la aceleración de la gravedad utilizando medidas de la altura, H , y del tiempo de queda, t , en un tiro horizontal. Para esto, se utiliza la relación cinemática para este tipo de movimiento, $g = \frac{2H}{t}$

1.2. Datos de Laboratorio

Tabla de Datos

Presión y temperatura del laboratorio:

P_0 :	699 mmHg
t_i :	17 °C
t_f :	18 °C

1.3. Datos Experimentales

Se ha medido la altura H entre la tabla inferior y el borde de la tabla superior:

$$H = (0,8093 \pm 0,0005)m \quad (1)$$

Y los diferentes valores para el tiempo de queda:

Cuadro 1: Valores experimentales del tiempo de queda:

	$t_1(s)$	$t_2(s)$	$t(s)$	$(t\bar{t})^2(s^2)$
	2.98472	3.39111	0.40639	$1.02319 \cdot 10^{-9}$
	2.90906	3.31553	0.40647	$2.30310 \cdot 10^{-9}$
	2.56893	2.97535	0.40642	$3.10000 \cdot 10^{-12}$
	1.73934	2.14580	0.40646	$1.44400 \cdot 10^{-9}$
	2.92313	3.32950	0.40637	$2.70400 \cdot 10^{-9}$
Σ	- - -	- - -	2.03211	$7.48000 \cdot 10^{-9}$

1.4. Resultado y cálculo de errores

De esta manera, se puede expresar el tiempo de queda como:

$$t = \bar{t} \pm \delta t$$

Donde \bar{t} es la media de los valores de t y δt es la incertidumbre estadística de la muestra¹. De esta manera, tenemos que:

$$\bar{t} = \frac{\sum^i t_i}{n} = 0,40642s$$

Y que:

$$\delta t = 2\sqrt{\frac{\sum^i (t_i - \bar{t})^2}{n(n-1)}} = 0,000038678$$

De esta manera, utilizando el número correcto de cifras significativas, se tiene que

$$t = (0,40642 \pm 0,00004)s \quad (2)$$

De esta manera, se pasa al cálculo de la magnitud que se quiere determinar, g . Para esto, se debe utilizar una relación muy similar a la utilizada para calcular el tiempo:

$$g = \bar{g} + \delta g$$

Donde \bar{g} es el valor calculado por la fórmula y δg es la incertidumbre propagada de H y t . De esta manera,

$$\bar{g} = \frac{2\bar{H}}{\bar{t}^2} = 9,79907m/s^2$$

y se pasa al cálculo de δg :

$$\delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial H}\right)^2 \delta H^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 \delta t^2}$$

Para hacerlo, se calculan primeramente las derivadas parciales:

$$\frac{\partial g}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial H} \frac{2H}{t^2} = \frac{2}{t^2}$$

¹El error instrumental para t es despreciable frente al estadístico en esta situación por la precisión del aparato utilizado, la tarjeta de sonido del ordenador

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{2H}{t^2} = -\frac{6H}{t^3}$$

De esta manera, se tiene finalmente que:

$$\delta g = \sqrt{\left(\frac{2}{t^2}\right)^2 \delta H^2 + \left(\frac{6H}{t}\right)^2 \delta t^2} = 0,006353 m/s^2$$

1.5. Conclusiones

$$g = (9,799 \pm 0,006) m/s^2 \quad (\epsilon_g = 0,065 \%) \quad (3)$$

1.6. Comentarios

El resultado final obtenido se compara muy bien con el de la literatura², que encontró $g = 9,799498549 \pm 0,000000003$ en Madrid, o sea, que para las cifras significativas consideradas, no hay diferencia entre el valor encontrado y el de la literatura.

²Enrique Rodríguez Pujol. «Medidas Gravimétricas en Madrid y en España». En: *Instituto Geográfico Nacional* (2002)

2. Muelle Oscilante

2.1. Objetivos

En este experimento, se desea medir la aceleración de la gravedad utilizando un muelle. De esta manera, se medirá primeramente el coeficiente $\frac{k}{g}$ por la relación $\Delta m = \frac{k}{g} \Delta z$. Después, se calculará el coeficiente midiendo el período en función de la variación de masa y, utilizando $T^2 = \frac{4\pi^2}{k} \Delta m + \frac{4\pi^2 m_0}{k}$ se puede calcular k . Finalmente, se pueden utilizar estos dos valores para obtener g .

2.2. Datos de Laboratorio

Tabla de Datos

Presión y temperatura del laboratorio:

P_0 :	695 mmHg
t_i :	18 °C
t_f :	18 °C

2.3. Ecuaciones fundamentales

Para que se pueda interpretar los datos obtenidos de manera racional, es necesario considerar las ecuaciones físicas que describen de este sistema. Primeramente, se tiene que, en el equilibrio, se tiene por la segunda ley que:

$$\sum F = \vec{F}_g + \vec{F}_k = 0$$

Por manipulaciones sencillas, reemplazando las fuerzas por sus expresiones, se concluye que:

$$\Delta m = \frac{k}{g} \Delta z \quad (4)$$

Lo que nos permite calcular $\frac{k}{g}$ haciendo una regresión lineal de Δm como función de Δz . Para el cálculo de k , es necesario utilizar otra relación, obtenida a partir de las ecuaciones de MAS del sistema oscilante:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} \Delta m + \frac{4\pi^2 m_0}{k} \quad (5)$$

2.4. Cálculo de k/g

2.4.1. Datos Experimentales

Haciendo las medidas, se obtiene que:

Cuadro 2: Valores experimentales para obtenidos de la masas y elongaciones

$\Delta m(kg)$	$z(m)$	$\Delta z(m)$
0.000	0.1910	0.000
0.010 ± 0.001	0.2335 ± 0.0005	0.0425 ± 0.0005
0.020 ± 0.001	0.2550 ± 0.0005	0.0640 ± 0.0005
0.030 ± 0.001	0.2945 ± 0.0005	0.1035 ± 0.0005
0.040 ± 0.001	0.3295 ± 0.0005	0.1385 ± 0.0005
0.050 ± 0.001	0.3650 ± 0.0005	0.1740 ± 0.0005
0.060 ± 0.001	0.4000 ± 0.0005	0.2090 ± 0.0005

2.4.2. Representación Gráfica

Cuadro 3: Datos para la representación gráfica de Δm en función de Δz :

$\Delta m(kg)$	$\delta \Delta m(kg)$	$\Delta z(m)$	$\delta \Delta z(m)$
0.010	0.001	0.0425	0.0005
0.020	0.001	0.0640	0.0005
0.030	0.001	0.1035	0.0005
0.040	0.001	0.1385	0.0005
0.050	0.001	0.1740	0.0005
0.060	0.001	0.2090	0.0005

2.4.3. Cálculo de Parámetros de Ajuste

Para que se pueda calcular los parámetros de ajuste, se tiene que:

Cuadro 4: Datos para el cálculo de los parámetros de ajuste

n	$\sum \Delta z_i(m)$	$\sum \Delta m_i(kg)$	$\sum \Delta z^2(m^2)_i$	$\sum \Delta m_i^2(kg^2)$	$\sum \Delta z_i \Delta m_i(mkg)$
6	0.7315	0.2100	0.1098	0.0091	0.0316

Por fin, podemos calcular los parámetros para $\Delta m = a_1 \Delta z + b_1$

$$a_1 = \frac{n \sum \Delta z \Delta m - \sum \Delta z \sum \Delta m}{n \sum \Delta z^2 - (\sum \Delta z)^2} = \frac{6 \cdot 0,0316 - 0,7315 \cdot 0,2100}{6 \cdot 0,1098 - 0,5350} = 0,2906 kg/m$$

$$b_1 = \frac{\sum \Delta m \sum \Delta z^2 - \sum \Delta z \sum \Delta z \Delta m}{n \sum \Delta z^2 - (\sum \Delta z)^2} = \frac{0,2100 \cdot 0,1098 - 0,7315 \cdot 0,0316}{6 \cdot 0,1098 - 0,5350} = -0,0004 kg$$

$$R_1^2 = \frac{(n \sum \Delta z \Delta m - \sum \Delta z \sum \Delta m)^2}{(n \sum \Delta z^2 - (\sum \Delta z)^2) (n \sum \Delta m^2 - (\sum \Delta m)^2)}$$

$$R_1^2 = \frac{6 \cdot 0,0316 - 0,7315 \cdot 0,21}{(6 \cdot 0,1098 - 0,7315^2) \cdot (6 \cdot 0,0091 - 0,21^2)} = 0,9969$$

Al final, es fundamental reiterar que, por la e Para regresiones lineales, se tiene que la incertidumbre se manifiesta de dos maneras distintas en

2.4.4. Cálculo de Incertidumbres

los parámetros de ajuste: La propagación de la incertidumbre instrumental de cada una de las medidas y la incertidumbre estadística de la regresión.

La primera se calcula con:

$$\delta a_{1inst} = \sqrt{\sum_j \left[\frac{n \cdot \Delta z_j - \sum_i \Delta z_i}{n \sum_i \Delta z_i^2 - (\sum_i \Delta z_i)^2} \right]^2 \cdot \delta \Delta z_j^2} = 0,00349 kg/m$$

$$\delta b_{1inst} = \sqrt{\sum_j \left[\frac{n \cdot \sum \Delta z_i^2 - \Delta z_j \sum_i \Delta z_i}{n \sum_i \Delta z_i^2 - (\sum_i \Delta z_i)^2} \right]^2 \cdot \delta \Delta z_j^2} = 0,00567 kg$$

La segunda, más sencilla:

$$\delta a_{1est} = a_1 \sqrt{\frac{R_1^{-2} - 1}{n - 2}} = 0,0004kg/m$$

$$\delta b_{1est} = \delta a_{1est} \sqrt{\frac{\sum_i \Delta z_i^2}{n}} = 0,00005kg$$

Finalmente, se puede calcular el error total por la regla de cuadratura:

$$\delta a_1 = \sqrt{\delta a_{1est}^2 + \delta a_{1inst}^2} = 0,0035kg/m$$

$$\delta b_1 = \sqrt{\delta b_{1est}^2 + \delta b_{1inst}^2} = 0,0056kg$$

2.4.5. Resultados

Utilizando la ecuación (4), $a_1 = \frac{k}{g}$ o sea, que al final el resultado obtenido es:

$$a_1 = \frac{k}{g} = (0,291 \pm 0,004)kg/m \ (\epsilon_{a_1} = 1,37\%) \quad (6)$$

2.5. Cálculo de k

2.5.1. Datos Experimentales

Cuadro 5: Valores experimentales de los períodos para incrementos de masa

$\Delta m(kg)$	$T(s)$	$T^2(s^2)$
$0,040 \pm 0,001$	$0,868430 \pm 0,000005$	$0,7541706 \pm 0,000009$
$0,050 \pm 0,001$	$0,945220 \pm 0,000005$	$0,8934408 \pm 0,000009$
$0,060 \pm 0,001$	$1,017190 \pm 0,000005$	$1,034675 \pm 0,00001$
$0,070 \pm 0,001$	$1,083240 \pm 0,000005$	$1,173408 \pm 0,00001$
$0,080 \pm 0,001$	$1,142860 \pm 0,000005$	$1,306129 \pm 0,00001$

2.5.2. Representación Gráfica

Cuadro 6: Datos para la representación gráfica de T^2 como función de Δm

$T^2(s^2)$	δT^2	$\Delta m(kg)$	$\delta \Delta m(kg)$
0,7541710	0,000009	0,040	0,001
0,8934408	0,000009	0,050	0,001
1,034675	0,00001	0,060	0,001
1,173408	0,00001	0,070	0,001
1,306129	0,00001	0,080	0,001

2.5.3. Cálculo de Parámetros

Primeramente, se hace la tabla para el cálculo de los parámetros de ajuste:

Cuadro 7: Datos para el cálculo de los parámetros de ajuste

n	$\sum \Delta m (kg)$	$\sum T^2 (s^2)$	$\sum \Delta m^2 (kg^2)$	$\sum (T^2)^2 (s^4)$	$\sum T^2 \Delta m (kg s^2)$
5	0.300000	5.161824	0.019000	5.520424	0.323548

Y se pueden calcular los parámetros de ajuste para $T^2 = a_2 \Delta m + b_2$

$$a_2 = \frac{n \sum \Delta m T^2 - \sum \Delta m \sum T^2}{n \sum \Delta m^2 - (\sum \Delta m)^2} = \frac{5 \cdot 0,323548 - 0,300000 \cdot 5,161824}{5 \cdot 0,019000 - 0,300000^2} = 13,8385 s^2/kg$$

$$b_2 = \frac{\sum T^2 \sum \Delta m^2 - \sum \Delta m \sum \Delta m T^2}{n \sum \Delta m^2 - (\sum \Delta m)^2} = \frac{5,161824 \cdot 0,019000 - 0,300000 \cdot 0,323548}{5 \cdot 0,019000 - 0,300000^2} = 0,2021 s^2$$

$$R_2^2 = \frac{(n \sum \Delta m T^2 - \sum \Delta m \sum T^2)^2}{(n \sum \Delta m^2 - (\sum \Delta m)^2) (n \sum (T^2)^2 - (\sum T^2)^2)}$$

$$R_2^2 = \frac{5 \cdot 0,323548 - 0,300000 \cdot 5,161824}{(5 \cdot 0,019000 - 0,300000^2) \cdot (5 \cdot 5,520424 - 5,161724^2)} = 0,9988$$

2.5.4. Cálculo de Incertidumbres

Utilizando las mismas técnicas de propagación de errores utilizadas anteriormente, se pueden determinar las incertidumbres:

$$\delta a_{2inst} = \sqrt{\sum_j \left[\frac{n \cdot \Delta m_j - \sum_i \Delta m_i}{n \sum_i \Delta m_i^2 - (\sum_i \Delta m_i)^2} \right]^2} \cdot \delta \Delta m_j^2 = 0,00066 s^2/kg$$

$$\delta b_{2inst} = \sqrt{\sum_j \left[\frac{n \cdot \sum_i \Delta m_i^2 - \Delta m_j \sum_i \Delta m_i}{n \sum_i \Delta m_i^2 - (\sum_i \Delta m_i)^2} \right]^2} \cdot \delta \Delta m_j^2 = 0,00345 s^2$$

$$\delta a_{2est} = a_2 \sqrt{\frac{R_2^{-2} - 1}{n - 2}} = 0,27693 s^2/kg$$

$$\delta b_{2est} = \delta a_{2est} \sqrt{\frac{\sum_i \Delta m_i^2}{n}} = 0,01707 s^2$$

Finalmente, se puede calcular el error total por la regla de cuadratura:

$$\delta a_2 = \sqrt{\delta a_{2est}^2 + \delta a_{2inst}^2} = 0,2769s^2/kg$$

$$\delta b_2 = \sqrt{\delta b_{2est}^2 + \delta b_{2inst}^2} = 0,001741s^2$$

2.5.5. Resultados

De esta manera, se ha encontrado a_2 y su incertidumbre. No obstante, se quiere encontrar k . Así dicho, es necesario utilizar la ecuación (5), que nos relaciona las dos cantidades:

$$a_2 = \frac{4\pi^2}{k}$$

Lo que nos permite concluir que

$$k = \frac{4\pi^2}{a_2} = 2,8527N/m$$

De esta manera, se puede obtener un valor para k , pero todavía es necesario calcular la incertidumbre asociada, que está determinada como:

$$\delta k = \left| \frac{\partial k}{\partial a_2} \right| \delta a_2 = \frac{4\pi^2}{a_2^2} \delta a_2 = 0,05708$$

$$k = (2,85 \pm 0,06)N/m \ (\epsilon_k = 2,10\%) \quad (7)$$

2.6. Cálculo de g

2.6.1. Cálculo de g y propagación de errores

A partir de los valores obtenidos en (6) y (7), se puede finalmente calcular g , puesto que, trivialmente,

$$g = \frac{k}{\frac{k}{g}} = \frac{k}{a_1} = 9,7938m/s^2$$

A lo que se debe propagar la incertidumbre

$$\delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial k} \delta k \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial a_1} \delta a_1 \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{a_1} \delta k \right)^2 + \left(\frac{k}{a_1^2} \delta a_1 \right)^2} = 0,246$$

2.6.2. Resultados

$$g = (9,8 \pm 0,2)m/s^2 \ (\epsilon_k = 2,04 \%) \quad (8)$$

2.7. Conclusiones

$$\frac{k}{g} = (0,291 \pm 0,004)kg/m \ (\epsilon_{a_1} = 1,37 \%)$$

$$k = (2,85 \pm 0,06)N/m \ (\epsilon_k = 2,10 \%)$$

$$g = (9,8 \pm 0,2)m/s^2 \ (\epsilon_k = 2,04 \%)$$

2.8. Comentarios

No obstante que la diferencia entre el valor obtenido y el teórico ser nula, es abundantemente obvio que el error está de veras elevado. Esto se puede explicar de manera sencilla haciendo referencia al hecho de que el valor final para g dependía de dos diferentes regresiones lineales.

De esta manera, era esperada y lógico que la medida fue mucho más imprecisa que aquella hecha en el experimento anterior, que solamente utilizó dos cantidades medidas directamente con mucha precisión.

3. Péndulo Simple

3.1. Objetivos

En este experimento, se desea medir la aceleración de la gravedad mediante el periodo de un péndulo simple. De este modo, se medirá el periodo de oscilaciones (T) para diferentes longitudes de hilos (L) y, mediante la relación lineal entre T^2 y L , $T^2 = \frac{4\pi^2}{g}L$, se puede determinar g por el método de mínimos cuadrados.

3.2. Datos de Laboratorio

Tabla de Datos

Presión y temperatura del Laboratorio:

P_0 :	697 mmHg
t_i :	17 °C
t_f :	18 °C

3.3. Datos Experimentales

Cuadro 8: Valores experimentales para la longitud y el periodo del péndulo

$L(cm)$	$T(s)$	$T^2(s^2)$
$41,80 \pm 0,005$	$1,29880 \pm 0,00005$	$1,6869 \pm 0,0007$
$53,40 \pm 0,005$	$1,45100 \pm 0,00005$	$2,1054 \pm 0,0007$
$62,20 \pm 0,005$	$1,58180 \pm 0,00005$	$2,5021 \pm 0,0007$
$72,30 \pm 0,005$	$1,70670 \pm 0,00005$	$2,8788 \pm 0,0007$
$82,10 \pm 0,005$	$1,82130 \pm 0,00005$	$3,3092 \pm 0,0007$

3.4. Representación Gráfica

Cuadro 9: Valores para la representación gráfica de T^2 como función de L

$T^2(s^2)$	$\delta T^2(s^2)$	$L(cm)$	$\delta L(cm)$
1,6868	0,007	41,80	0,005
2,1054	0,007	53,40	0,005
2,5020	0,007	62,20	0,005
2,8788	0,007	72,30	0,005
3,3092	0,007	82,10	0,005

3.5. Cálculo de Parámetros de Ajuste

Primeramente, se hace la tabla para el cálculo de los parámetros de ajuste:
Y se pueden calcular los parámetros de ajuste para $T^2 = aL + b$:

Cuadro 10: Datos para el cálculo de los parámetros de ajuste

n	$\sum T^2(s^2)$	$\sum L(m)$	$\sum (T^2)^2(s^4)$	$\sum L^2(m^2)$	$\sum T^2 L(ms^2)$
5	12,4823	3,1180	32,7771	2,0435	8,1839

$$a = \frac{n \sum L T^2 - \sum L \sum T^2}{n \sum L^2 - (\sum L)^2} = \frac{5 \cdot 8,1839 - 3,1180 \cdot 12,4823}{5 \cdot 2,0435 - 3,1180^2} = 4,03150s^2/m$$

$$b = \frac{\sum T^2 \sum L^2 - \sum L \sum L T^2}{n \sum L^2 - (\sum L)^2} = \frac{12,4823 \cdot 2,0435 - 3,1180 \cdot 8,1839}{5 \cdot 2,0435 - 3,1180^2} = -0,0198s^2$$

$$R^2 = \frac{(n \sum L T^2 - \sum L \sum T^2)^2}{(n \sum L^2 - (\sum L)^2) (n \sum (T^2)^2 - (\sum T^2)^2)}$$

$$R^2 = \frac{(5 \cdot 8,1839 - 3,1180 \cdot 12,4823)^2}{(5 \cdot 2,0435 - 3,1180^2) \cdot (5 \cdot 32,7771 - 12,4823^2)} = 0,9989$$

3.6. Cálculo de Incertidumbres

Utilizando las técnicas estándares de propagación de errores, se pueden determinar las incertidumbres:

$$\delta a_{inst} = \sqrt{\sum_j \left[\frac{n \cdot L_j - \sum_i L_i}{n \sum_i L_i^2 - (\sum_i L_i)^2} \right]^2} \cdot \delta L_j^2 = 0,0159s^2/m$$

$$\delta b_{inst} = \sqrt{\sum_j \left[\frac{n \cdot \sum_i L_i^2 - L_j \sum_i L_i}{n \sum_i L_i^2 - (\sum_i L_i)^2} \right]^2} \cdot \delta L_j^2 = 0,0101s^2$$

$$\delta a_{est} = a_2 \sqrt{\frac{R_2^{-2} - 1}{n - 2}} = 0,01916s^2/m$$

$$\delta b_{est} = \delta a_{est} \sqrt{\frac{\sum_i L_i^2}{n}} = 0,0636s^2$$

Finalmente, se puede calcular el error total por la regla de cuadratura:

$$\delta a = \sqrt{\delta a_{est}^2 + \delta a_{inst}^2} = 0,02477s^2/m$$

$$\delta b = \sqrt{\delta b_{est}^2 + \delta b_{inst}^2} = 0,06439s^2$$

3.7. Cálculo de g y propagación de errores:

Utilizando $T^2 = \frac{4\pi^2}{g}L = aL + b$, se puede concluir que $a = \frac{4\pi^2}{g}$, o sea, que

$$g = \frac{4\pi^2}{a} = 9,7924m/s^2$$

Para la incertidumbre, se tiene que

$$\delta g = \left| \frac{\partial g}{\partial a} \right| \delta a = \frac{4\pi^2}{a^2} \delta a = 0,058m/s^2$$

3.8. Conclusiones

$$g = (9,79 \pm 0,06)m/s^2 \quad (\epsilon_g = 0,612 \%) \quad (9)$$

3.9. Comentarios

El resultado final estuvo próximo del obtenido en la literatura, de $g = 9,80$, si son consideradas las cifras significativas relevantes. Sin embargo, el error relativo no fue 0, sino que $\epsilon_r = \frac{9,80-9,79}{9,80} = 0,001 = 0,1 \%$.

De esta manera, se obtuvo un valor satisfactorio para g y se ha atingido todos los objetivos propuestos.

Referencias

Pujol, Enrique Rodríguez. «Medidas Gravimétricas en Madrid y en España». En: *Instituto Geográfico Nacional* (2002).