

Medida de Permeabilidad del Vacío

Gabriel D'Andrade Furlanetto - XDD204950

9 de marzo de 2021

1. Objetivos

Se tiene como objetivo principal de la experiencia el cálculo del coeficiente de permeabilidad magnética del vacío, μ_0 . Para esto, se han utilizado bobinas cilíndricas de diámetros, longitudes y número de espiras conocidas, poniéndolas una adentro de la otra. De esta manera, se introduce una corriente alterna en la bobina principal con un oscilador y se mide el voltaje inducido en la bobina secundaria.

Con esto, se puede medir indirectamente el coeficiente de inducción mutua, M_{12} y, finalmente, se puede utilizar este resultado para encontrar μ_0 . Este proceso se repite dos veces para comparar los resultados de diferentes bobinas y, finalmente, se hace una medida indirecta de la constancia del campo magnético en la bobina para saber cuanto se puede justificar las premisas que llevan a las ecuaciones utilizadas.

2. Material Utilizado

- Bobina 1: $\Phi_1 = 12,5cm$ $N_1 = 317$ $l_1 = 50cm$
- Bobina 2: $\Phi_2 = 3,2cm$ $N_2 = 190$ $l_2 = 30cm$
- Bobina 3: $\Phi_3 = 5,1cm$ $N_3 = 257$ $l_3 = 40cm$
- Dos multímetros para medir la intensidad y el voltaje inducido
- Un oscilador para regular la frecuencia y la corriente

3. Realización práctica

3.1. Cálculo de μ_0 a partir del coeficiente de inducción mutua entre las bobinas 1 Y 2

El cálculo del coeficiente de permeabilidad magnética del vacío está contingente en una serie de ecuaciones que relacionan los datos experimentales obtenidos (esto es, la intensidad, voltaje inducida y la frecuencia) al llamado coeficiente de inductancia mutua, M_{12} y otro par de ecuaciones que lo relacionan a la geometría de las bobinas y el coeficiente de permeabilidad.

De esta manera, la idea fundamental de este apartado es calcular de la manera más precisa posible M_{12} a partir de I_e y V_e , haciendo dos regresiones lineales para minimizar las incertidumbres. Empezando por la ecuación

$$V_e = (2\pi f \cdot M_{12}) I_e$$

O sea, si se hace una regresión lineal de V_e en función de I_e , el valor de la pendiente k será igual a

$$k = (2\pi M_{12}) f$$

Por lo tanto, si se hace la regresión anterior para diferentes valores de f y, finalmente, se pone k como función de f , la pendiente será igual a $2\pi M_{12}$, o sea, se puede encontrar el coeficiente de inductancia mutua trivialmente. Encontrando este coeficiente, podemos relacionarlo con el de permeabilidad magnética por la siguiente expresión¹:

$$\mu_0 = \frac{4M_{12}l_1}{N_1N_2\pi\Phi_2^2} \quad (1)$$

Teniendo considerado que hacer con los datos, es necesario de hecho tenerlos:

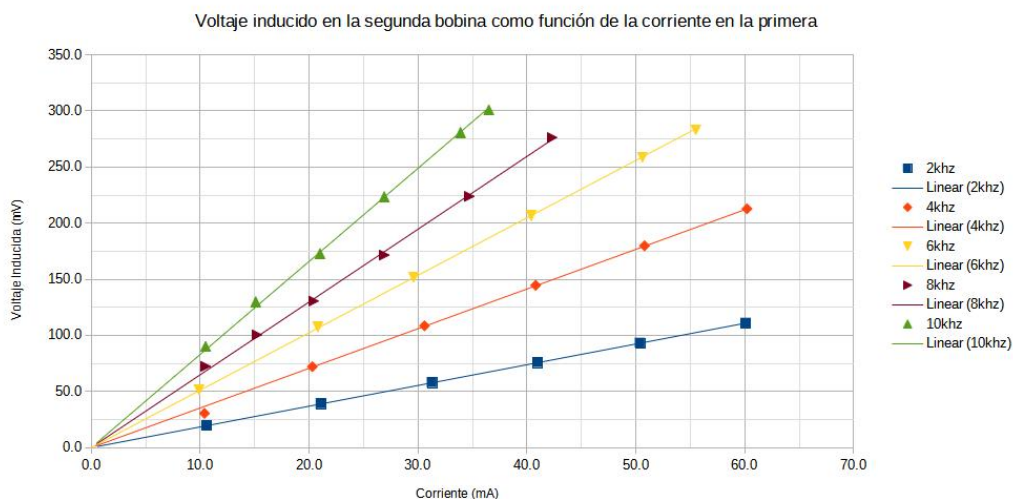
¹David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. 4th Edition. Addison-Wesley, 2012. ISBN: 0321856562,9780321856562, pág. 323

Datos experimentales de la intensidad y tensión para diferentes valores de la frecuencia

f=2kHz		f=4kHz		f=6kHz		f=8kHz		f=10kHz	
$I_e(mA)$	$V_e(mV)$	$I_e(mA)$	$V_e(mV)$	$I_e(mA)$	$V_e(mV)$	$I_e(mA)$	$V_e(mV)$	$I_e(mA)$	$V_e(mV)$
10,6	19,7	10,4	30,5	9,9	51,7	10,5	72,4	10,5	90,1
21,1	39,0	20,3	72,1	20,8	107,5	15,2	100,5	15,1	130,0
31,3	57,9	30,6	108,5	29,6	152,0	20,4	130,6	21,0	172,8
41,0	75,7	40,8	144,6	40,4	206,8	26,9	171,6	26,9	223,6
50,4	93,1	50,8	179,9	50,6	258,9	34,7	223,9	33,9	280,9

Primaria: bobina 1 ($\Phi = 12,5cm$). Secundaria: bobina 2 ($\Phi = 3,2cm$)

Que pueden ser representados gráficamente para mayor claridad:



Si se hace la regresión lineal, se obtienen los siguientes valores para k para los distintos valores de f :

Valores de las pendientes para diferentes valores de la frecuencia.

$f(Hz)$	$k(\Omega)$
2000	1.84
4000	3.62
6000	5.08
8000	6.41
10000	8.10

Primaria: bobina 1 ($\Phi = 12,5\text{cm}$). *Secundaria: bobina 3* ($\Phi = 3,2\text{cm}$)

Finalmente, se puede hacer un regresión lineal aquí y dividirla por 2π , obteniendo el coeficiente de inducción mutua:

$$M_{12} = 1,22 \cdot 10^{-4} H$$

De donde podemos obtener finalmente la permeabilidad magnética por la relación (1):

$$\mu_0 = \frac{4M_{12}l_1}{N_1N_2\pi\Phi_2^2} = 1,25668 \cdot 10^{-6}$$

Y, considerando el número correcto de cifras significativas, tenemos que:

$$\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \quad (2)$$

Un resultado increíblemente próximo del teórico, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 12,56637 \cdot 10^{-6}$, exactamente igual a el para las cifras significativas consideradas, o sea, se tiene que el error relativo de este experimento fue de 0 %.

3.2. Comprobación de la simetría del coeficiente de inducción mutua

Si se intercambiaran la bobina interior y la bobina exterior, el resultado del coeficiente de inducción mutua debería ser igual al obtenido anteriormente. Esto es, el coeficiente es simétrico², $M_{12} = M_{21}$. En este apartado, se desea verificar este hecho, haciendo la bobina 2 la primaria y la 1 la secundaria.

Como este valor no será utilizado para calcular μ_0 , se puede calcularlo de forma menos precisa, utilizando solamente la ecuación para M :

$$M_{21} = \frac{V_e}{2\pi f I_e}$$

De esta manera, tenemos que:

Primaria: bobina 2 ($\Phi = 3,2\text{cm}$). *Secundaria: bobina 1* ($\Phi = 12,5\text{cm}$)

De donde podemos hacer la media de los valores de M_{21} , que nos indica un valor de $M_{21} = 1,69 \cdot 10^{-4}$, valor extremadamente dispar al de M_{12} . De esta manera, se puede asumir, sea por haber accidentalmente desplazado la bobina para un lado u otro o por haber conectado mal un cable, que hubo alguna fuente de error no considerada que llevo a tal equívoco.

²Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, pág. 322

Valores de frecuencia, corriente y voltaje inducido

$f(Hz)$	$I_e(mA)$	$V_e(mV)$	$M_{21}(H)$
2010	34.1	74.4	$1,73 \cdot 10^{-4}$
4120	33.9	150.2	$1,71 \cdot 10^{-4}$
6320	33.7	226.1	$1,69 \cdot 10^{-4}$
8000	33.5	281.8	$1,67 \cdot 10^{-4}$
9700	33.2	335.4	$1,66 \cdot 10^{-4}$

3.3. Cálculo de μ_0 a partir del coeficiente de inducción mutua entre las bobinas 1 y 3

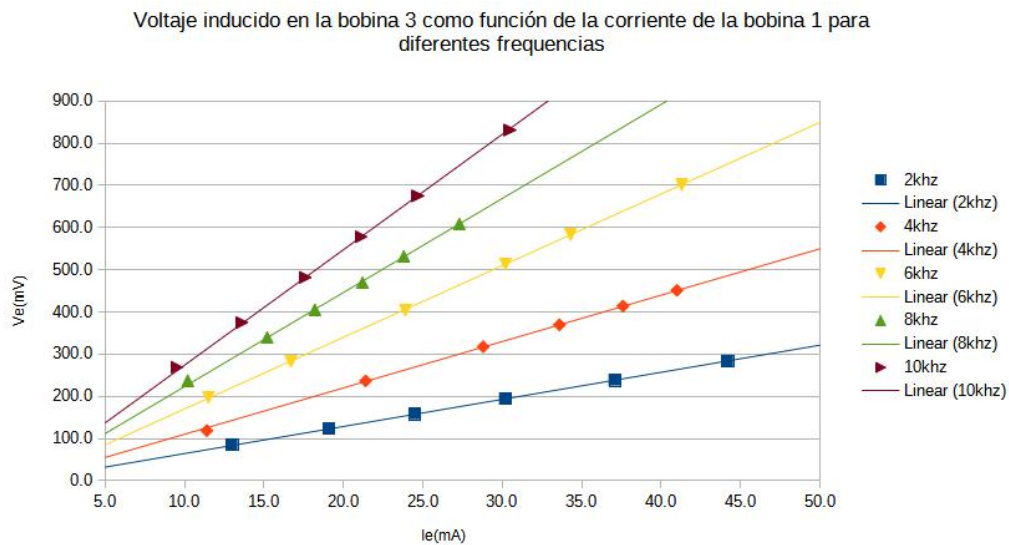
La ecuación (1), en su derivación, asume que el campo magnético en el interior de la bobina más grande es uniforme. Esta aproximación es solamente válida para $l \ll l_1$, de manera que, si se tiene una bobina con longitud mayor que la de la bobina 2, se espera que produzca un resultado más impreciso de μ_0 .

De esta manera, se repite el procedimiento de 3,1 con otra bobina con l mayor que la 2, la 3:

Datos experimentales de la intensidad y tensión para diferentes valores de la frecuencia

f=2kHz		f=4kHz		f=6kHz		f=8kHz		f=10kHz	
$I_e(mA)$	$V_e(mV)$	$I_e(mA)$	$V_e(mV)$	$I_e(mA)$	$V_e(mV)$	$I_e(mA)$	$V_e(mV)$	$I_e(mA)$	$V_e(mV)$
13.0	84.9	11.4	118.4	11.5	198.4	10.2	237.0	9.5	268.7
19.1	123.1	21.4	236.5	16.7	282.9	15.2	338.8	13.6	374.5
24.5	157.9	28.8	317.4	23.9	403.9	18.2	404.9	17.6	481.8
30.2	194.0	33.6	369.3	30.2	514.0	21.2	468.7	21.1	578.0
37.1	237.9	37.6	413.8	34.3	583.0	23.8	531.0	24.7	675.0
44.2	283.0	41.0	450.9	41.3	701.0	27.3	608.0	30.5	831.0

Primaria: bobina 1 ($\Phi = 12,5cm$). Secundaria: bobina 3 ($\Phi = 5,1cm$)



De donde se puede utilizar el mismo procedimiento de antes para adquirir M_{13} y, consecuentemente, μ_0 . Se hacen las primeras regresiones lineales:

Valores de las pendientes para diferentes valores de la frecuencia.

$f(Hz)$	$k(\Omega)$
2000	1.84
4000	3.62
6000	5.08
8000	6.41
10000	8.10

Primaria: bobina 1 ($\Phi = 12,5cm$). Secundaria: bobina 3 ($\Phi = 5,1cm$)

Y, haciendo otra regresión lineal, obtenemos que:

$$M_{13} = 4,11 \cdot 10^{-4} H$$

Y, por fin, se tiene que:

$$\mu_0 = \frac{4M_{13}l_1}{N_1N_3\pi\Phi_3^2} = 1,23379 \cdot 10^{-6}$$

O sea,

$$\mu_0 = 1,23 \cdot 10^{-6} \quad (3)$$

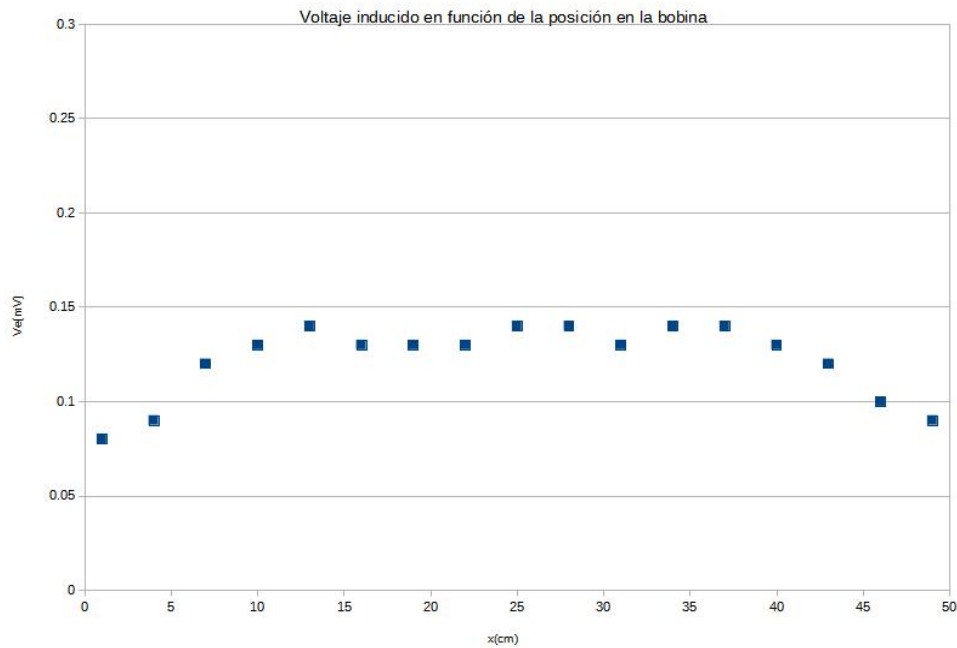
Un valor de μ_0 que tiene $\delta = \frac{\mu_{0teorico} - \mu_0}{\mu_{0teorico}} = 0,016$ del valor teórico, o sea, un desvío de 1,6 % del teórico. De esta manera, se ilustra como una medida hecha con un solenoide con mayor longitud es más imprecisa que de uno con menor.

3.4. Comprobación de la uniformidad del campo magnético en el interior de un solenoide

Para verificar la uniformidad del campo magnético de manera cualitativa, se puede medir el voltaje inducido en diferentes puntos de la bobina para mismos valores de corriente y frecuencia. Variaciones del voltaje significan variaciones en el campo magnético. Entonces, se tiene que:

Valores de la voltaje inducida para diferentes posiciones en la bobina.

$x(cm)$	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49
$V_e(V)$	0.08	0.09	0.12	0.13	0.14	0.13	0.13	0.13	0.14	0.14	0.13	0.14	0.14	0.13	0.12	0.1	0.09



O sea, el campo magnético es esencialmente constante en el intervalo de 10 – 40cm.

4. Conclusiones y Discusión

Todos los resultados obtenidos están en completa concordancia con la bibliografía, a parte del coeficiente M_{21} , que debería verificar simetría con el M_{12} pero no lo hace.

Como era de se esperar, la precisión en el primero experimento, con la bobina de menor longitud de bobina, es más alta que en el segundo. Eso se explica por la aproximación de la uniformidad del campo empeorarse más allá de una longitud de $30cm$ (región en que se puede considerar uniforme).

Referencias

Griffiths, David J. *Introduction to Electrodynamics*. 4th Edition. Addison-Wesley, 2012. ISBN: 0321856562,9780321856562.