Institut für Algebraische Geometrie
Sommersemester 2020
Prof. Dr. Matthias Schütt
Dr. Claudia Schoemann

Algebra II
Übungsblatt 1

Abgabe: 27.04.2020 bis 12:15 per email an
algebra2@math.uni-hannover.de

Aufgabe 1.1 (2+4+4 Punkte)
Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Weiterhin sei die lineare Abbildung σ die Drehung des $\mathbb{R}^2$ mit dem Drehwinkel $\frac{2\pi}{n}$ und τ die Spiegelung an der y - Achse. D_n sei die von σ und τ erzeugte Untergruppe der linearen Automorphismen von $\mathbb{R}^2$, d.h. $D_n = \langle \sigma, \tau \rangle$. Beweisen Sie:

(a) Es gilt ord(σ)=n, ord(τ)=2 und $\sigma\tau\sigma = \tau$.

(b) Es gilt $D_n = \{\tau^i \sigma^j \,|\, i \in \{0,1\}\,,\, j \in \{0,1,\dots n-1\}\}$.

(c) D_n hat $2n$ Elemente und ist nicht kommutativ.

Aufgabe 1.2 (3+2+2+3 Punkte)
Sei K ein Körper und $f(x) \in K[x]$ ein irreduzibles normiertes Polynom. Sei weiter a eine Nullstelle von $f(x)$ in einem Erweiterungskörper von K.

(a) Beweisen Sie: Ist auch $f(a+1) = 0$, so gilt $\mathrm{char}(K) > 0$.

Gelte nun weiter $\mathrm{char}(K) = p$ und $a^p - a \in K$.

(b) Beweisen Sie, dass $f(x) = x^p - x - (a^p - a)$ gilt.

(c) Beweisen Sie, dass die Erweiterung $K(a)/K$ galoissch ist.

(d) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Aut}(K(a);K)$ zyklisch von Ordnung p ist.

Aufgabe 1.3 (4+6 Punkte)
Sei $\mathbb{C}(x)$ der Körper der rationalen Funktionen über $\mathbb{C}$. Betrachten Sie in $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}(x);\mathbb{C})$ die Elemente σ und τ induziert durch $\sigma(x) = -x$ und $\tau(x) = \mathrm{i}x^{-1}$. Sei $G = \langle \sigma, \tau \rangle \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{C}(x);\mathbb{C})$.

(a) Beweisen Sie, dass G endlich ist. Welche Ihnen bekannte Gruppe ist G?

(b) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Fix}(\mathbb{C}(x);G)$ wieder ein rationaler Funktionenkörper über $\mathbb{C}$ ist, d.h. beweisen Sie $\mathrm{Fix}(\mathbb{C}(x);G) = \mathbb{C}(y)$ mit einem $y \in \mathbb{C}(x)$. Geben Sie explizit ein y an.