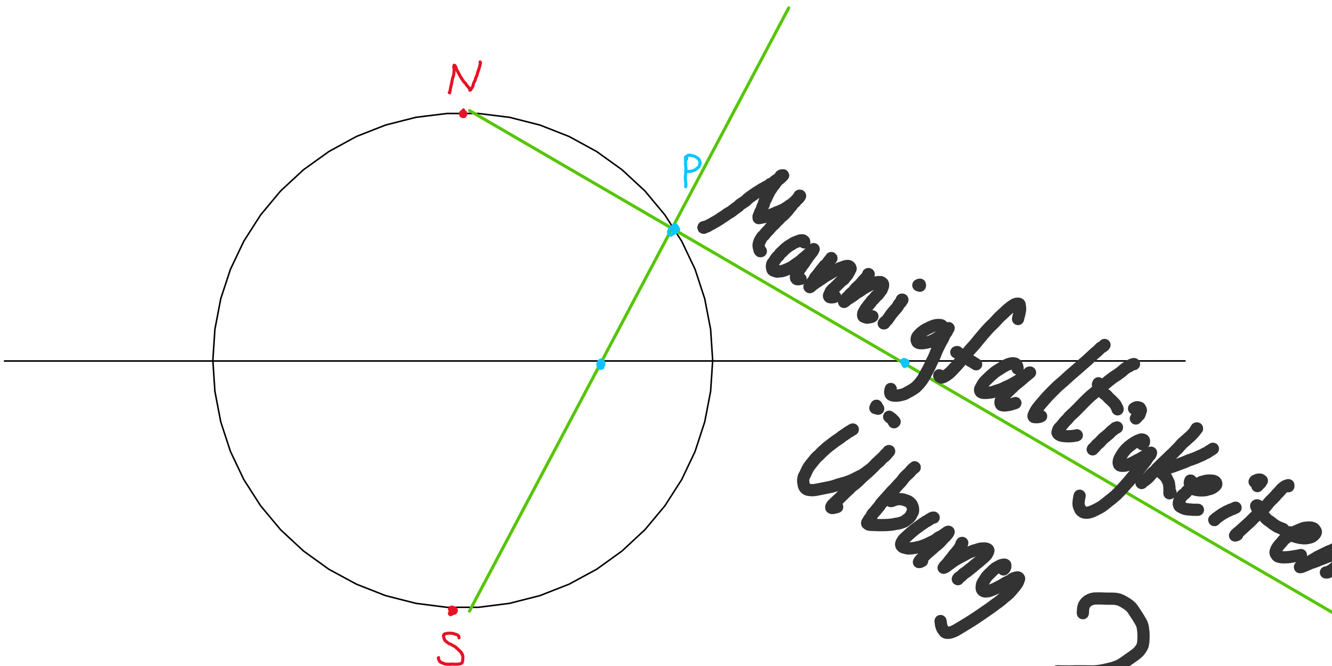


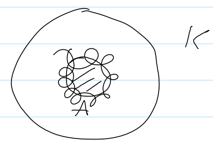
Mannigfaltigkeiten Übung 2

Corona Edition Reloaded

Aufgabe A.1: *Topologische Grundlagen* (**3+1+2+4**)
Seien (M, O_M) und (N, O_N) zwei Hausdorffräume.

(a) Sei (K, O_K) ein kompakter topologischer Raum. Zeigen Sie, dass eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq K$ auch kompakt ist.

Sei A abg. $\{U_i\}_{i\in I}$ offene Überdeckung A

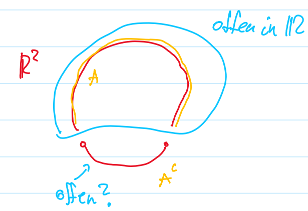


$\{U_i\}_{i\in I} \cup \{A^c\}$ offene Überdeckung K

$\overset{K \text{ cpt}}{\Longrightarrow}$ $\underbrace{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}}_{\text{überdeckt } A}$, A^c $\Rightarrow$ A kompakt

$[0,1] \supseteq (0,1)$

(b) Gilt dies auch für beliebige offene Teilmengen?



$[-2,2] \overset{\text{kompakt}}{\subseteq} \mathbb{R}$ $\quad (-1,-1)$ $\quad [\ (\quad | \quad | -)\ ]$ $-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$ $\quad 1-\frac{1}{n}$

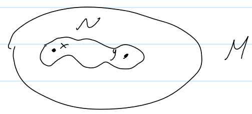
$U_i := \left(-1, 1-\frac{1}{n}\right)$ Angenommen es gäbe eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_k}\}$

$\tilde{n} = \max\{i_1, \dots, i_k\}$ $\quad \left(-1, 1-\frac{1}{\tilde{n}}\right) \subsetneq (-1,1)$ $\lightning$

(c) Zeigen Sie, dass in der Teilraumtopologie Unterräume von M Hausdorffräume sind.

$N \subseteq M$ ← top. Raum

(N, O_N) Teilraum top.



seien $x, y \in N$, so dass $x \neq y$

dann gilt $x, y \in M$ $\overset{M \text{ hausdorffsch}}{\Longrightarrow}$ $x \in U$, $y \in V$ (offen) und disjunkt $U \cap V = \emptyset$

$\overset{\text{Def Teilraumtop}}{\Longrightarrow}$ $U \cap N$, $V \cap N$ offen in O_N sind $\Rightarrow (N, O_N)$ Hausdorffschraum

immernoch offen $\quad f^{-1}$ $\quad$ ← etwas offenes

(d) Sei $f: M \to N$ stetig und $K \subseteq M$ überdeckungskompakt. Dann ist $f(K) \subseteq N$ ebenfalls überdeckungskompakt.

$f(K)$ durch offene Mengen $\{V_i\}_{i\in I}$ überdecken.

$\{f^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$ überdeckt K

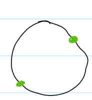
$\overset{K \text{ kompakt}}{\Longrightarrow}$ $f^{-1}(V_{i_1}), \dots, f^{-1}(V_{i_k})$ endlich Teilüberdeckung

$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} f^{-1}(V_{i_j}) = f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{k} V_{i_j}\right)$

$\overset{f}{\Longrightarrow}$ $f(K) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} V_{i_j}$ $\Rightarrow$ $f(K)$ kompakt

EZ

$A: S^n \longrightarrow S^n;\ a \longmapsto -a$



$S^n/A = \mathbb{RP}^{n+1}$

stetig

$\tilde{\pi} : S^n \longrightarrow S^n / A = \mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$ ← kompakt

kompakt

Aufgabe A.2: *Einsteinsche Summenkonvention* (**(1+1+1+1+1)+2+3**)
Die Einsteinsche Summenkonvention ist eine nützliche Schreibweise, um in einigen Berechnungen die Übersicht zu behalten. Dabei fixiert man eine Zahl n, z.B. die Dimension eines Raumes, und summiert über doppelt auftretende Indizes, auch Dummy-Indizes genannt, die jeweils einmal als unterer Index und einmal als oberer Index auftreten. Außerdem fordert man, dass ein Index höchstens zweimal verwendet werden darf. Beispielsweise schreibt man

$$a_i x^i \text{ statt } \boxed{\sum_{i=1}^n} a_i x^i.$$

Dummy

$v^i e_i$

Ein Vektor $v \in V$ mit $n = \dim V$ wird bezüglich der Basis $e_1, \ldots, e_n$ als $v = (v^1, \ldots, v^n)$ und ein dualer Vektor $\theta \in V^*$ würde $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ bezüglich der dualen Basis $\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n$ (d.h. $\epsilon^i(e_j) = \delta^i_j$) sein. Für $A \in End(V)$ bezeichnen wir die (i,j)-Komponente bezüglich der obigen Basis durch $A^i{}_j$.

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

duales

$\langle v, \cdot \rangle (w)$

$v_i \varepsilon^i (w^i e_i)$

(a) Formulieren Sie mit der Summenkonvention die folgenden Begriffe der Linearen Algebra:

(1) Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^n$ $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1} v^i w^i$, $\langle v, w \rangle = \delta_{ij} v^i w^j$ $= v^i w_i$

(2) Matrix-Vektor-Produkt $A^i{}_j v^j$

(3) Matrizenmultiplikation $A^i{}_j B^j{}_k$

(4) Spur einer Matrix $A^i{}_i$

(5) Transponieren einer Matrix ${}^t(A^i{}_j) = A^j{}_i$

(b) Das Levi-Civita-Symbol für $n = 3$ ist definiert als

$$\epsilon_{ij}{}^k = \begin{cases} 1 & (ijk) \text{ ist eine gerade Permutation} \\ -1 & (ijk) \text{ ist eine ungerade Permutation} \\ 0 & (ijk) \text{ ist keine Permutation} \end{cases}$$

1

Kreuzprodukt

und seien $x, y \in \mathbb{R}^3$. Wir definieren die Komponenten von $z \in \mathbb{R}^3$ als $\boxed{z^k = \epsilon_{ij}{}^k x^i y^j}$.
Begründen Sie was damit berechnet wird.

(c) Beweisen Sie für $f, g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, dass

$$\frac{d}{dt}\langle f(t), g(t)\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} f(t), g(t) \right\rangle + \left\langle f(t), \frac{d}{dt} g(t) \right\rangle.$$

$$\frac{}{dt}\langle f(t), g(t)\rangle = \left\langle \frac{}{dt} f(t), g(t) \right\rangle + \left\langle f(t), \frac{}{dt} g(t) \right\rangle.$$

$$\frac{d}{dt}\langle f(t), g(t)\rangle = \frac{d}{dt} f^i(t)\, g_i(t) \overset{\text{Produktregel}}{=} \frac{d f^i(t)}{dt} \cdot g_i(t) + f^i(t) \frac{d g_i(t)}{dt}$$

A.3

(a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene Menge in der Standardtopologie. Statten Sie nun U mit einer n-dimensionalen Karte aus.

$\mathrm{id} : U \longrightarrow U$

bijektiv offen

(b) Ist diese Konstruktion auch für beliebige abgeschlossene Mengen des $\mathbb{R}^n$ möglich? $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ $\mathbb{N}_0$

$f : \{pt\} \longrightarrow \Omega$

offen in $\mathbb{R}^n$

$|\Omega|$ is überabzählbar kann f nicht bijektiv sein.

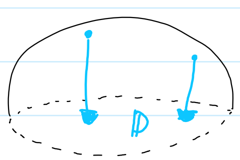
(c) In der Vorlesung wurde bereits die stereographische Projektion der S^n als Karte eingeführt. In dieser Teilaufgabe müssen sie nun eine weitere Karte konstruieren. Statten Sie dazu die $2(n+1)$ Hemisphären

wäre nicht in der Überdeckung

$(0,0,-1,\dots,0)$ $U_{3,-}$

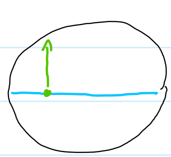
$$U_{i,\pm} := \{\, (x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n \mid \pm x^i > 0 \,\}$$

für $i = 1, \dots, n+1$ mit geeigneten Karten aus. Braucht man alle $2(n+1)$ Mengen um S^n zu überdecken? Berechnen Sie auch die Kartenwechsel und bestimmen Sie, ob somit ein $\mathscr{C}^1$-Atlas vorliegt.



$$\Phi_{i,\pm} : U_{i,+} \longrightarrow \overset{\text{offen}}{\mathbb{D} = B(0,1)} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$(x^1, \dots, x^{n+1}) \longmapsto (x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^{n+1})$$



$(-1,1)$

$B(0,1)$

$$\Phi^{-1}_{i,+}(y^1, \dots, y^n) = (y^1, \dots, y^{i-1}, s, y^i, \dots, y^n)$$

$$\|\Phi^{-1}_{i,\pm}(y)\|^2 = s^2 + \|y\|^2 \overset{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow s = \pm\sqrt{1 - \|y\|^2}$$

obdA $j < i$

$$\Phi_{j,+} \circ \Phi^{-1}_{i,+}(y^1, \dots, y^n) = (y^1, \dots, \widehat{y^j}, \dots, y^{i-1}, \sqrt{1 - \|y\|^2}, \dots, y^n)$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1 - \|y\|^2}} \cdot y$$

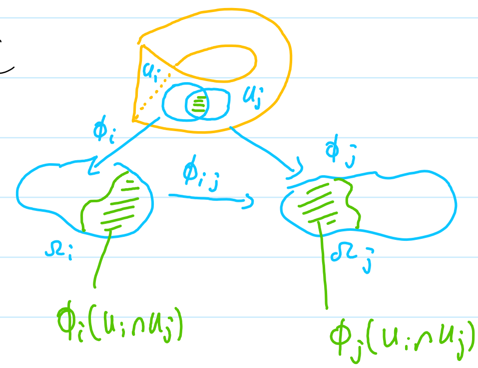
Wiederholung

28 April 2020 15:42

M Menge.

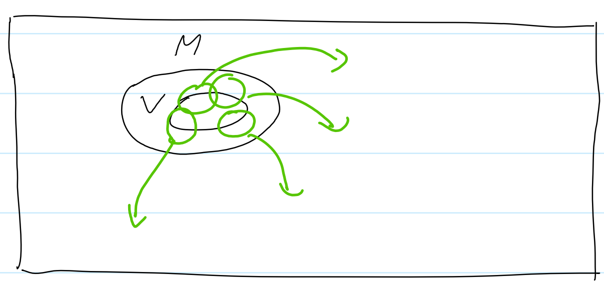
Ein $\mathcal{C}^k$-Atlas $\mathcal{A}$ besteht aus einer Familie von Karten (U_i, ϕ_i, Ω_i) $i \in I$,

so dass
- U_i überdecken M
- alle Karten sind $\mathcal{C}^k$-verträglich



Zwei $\mathcal{C}^k$-Atlanten $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ heißen $\mathcal{C}^k$-äquivalent, falls $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ wieder ein $\mathcal{C}^k$-Atlas ist.

$\Rightarrow$ Äquivalenzrelation $\Rightarrow$ $[\mathcal{A}]$ $\mathcal{C}^k$-Struktur



Satz 1.2.5

M Menge mit m-dim $\mathcal{C}^k$-Atlas $\mathcal{A}$.

Definiere $\mathcal{O}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{P}(M)$ durch

$$V \in \mathcal{O}_{\mathcal{A}} :\Leftrightarrow \text{Für } \boxed{\text{jede}} \text{ Karte } (U, \phi, \Omega) \text{ gilt, dass } \phi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^m \text{ offen ist.}$$

Dann ist $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ eine Topologie auf M.

Ferner: Sei $\mathcal{B}$ $\mathcal{C}^k$-äquivalent zu $\mathcal{A}$. Dann gilt $\mathcal{O}_{\mathcal{A}} = \mathcal{O}_{\mathcal{B}}$

D.h: Topologie hängt von $[\mathcal{A}]$ ab

Mannigfaltigkeit

Menge $\qquad$ induziert

$$\left(M\ ,\ [\mathcal{A}]\ ,\ \mathcal{O}_{\mathcal{A}}\right)$$

$\mathcal{C}^k$-Struktur

$\mathcal{C}^k$-äq Atlanten

$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$

- überdeckt von Karten
- $\mathcal{C}^k$-verträglich

- Hausdorffsch
- zweitabzählbar

$k = 0$ topologisch Mannigfaltigkeit

$k = \infty$ glatte Mannigfaltigkeit

$k = \omega$ reell analytische Mannigfaltigkeit

Material

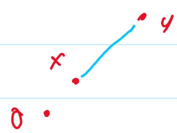
28 April 2020 21:20

Sei $(M, \mathcal{O}_M)$ top. Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M.
Die Projektion $\pi : M \longrightarrow M/\sim \; ; \; x \longmapsto [x]$ soll nun benutzt werden, um auf $M/\sim$ die **Quotiententopologie** $\mathcal{O}_\sim$ einzuführen

Dabei sagen wir, dass $U \subseteq M/\sim$ offen in $\mathcal{O}_\sim$ ist, falls $\pi^{-1}(U)$ offen in $\mathcal{O}_M$ ist.

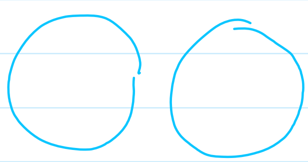
__Bsp:__ $\mathbb{R}^3 \setminus 0 \qquad x \sim y \iff x = \lambda y \quad \lambda \in \mathbb{R}_{>0}$

$(\mathbb{R}^3 \setminus 0)/\sim \; = S^2$



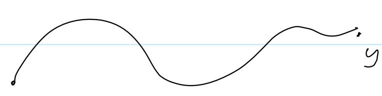
Sei $(M, \mathcal{O}_M)$ top. Raum.

- **Zusammenhangend** — drei äquivalente Definitionen



- M kann nicht als disjunkte Vereinigung zweier nichtleeren, offenen Mengen geschrieben werden
- M kann nicht als disjunkte Vereinigung zweier nichtleeren, abgeschlossenen Mengen geschrieben werden
- Die einzigen Mengen die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind, sind $\emptyset$ und M

wegzusammenhängend je zwei Punkte lassen sich durch einen stetigen Weg verbinden, d.h. für $x, y \in M$ existiert eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$



Tipps

28 April 2020 16:39

Blatt B

Institut für Differentialgeometrie
Balázs Márk Békési
Wajahat Rana

Mannigfaltigkeiten - SoSe 2020

Übungsblatt B

Abgabe bis 06.05.2020, 12 Uhr

Aufgabe B.1: *Mannigfaltigkeiten?* (**5+1*+5**)

(a) Wir identifizieren die reelle Achse $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie jeweils mit $\mathbb{R} \times \{1\}$ und $\mathbb{R} \times \{-1\}$. Das heißt, dass wir zwei Kopien von $\mathbb{R}$ nehmen und sie formal unterscheiden. Danach führen wir auf $\mathbb{R} \times \{1\} \cup \mathbb{R} \times \{-1\}$ die Äquivalenzrelation

$$\begin{aligned} (x,1) &\sim (y,1) :\Leftrightarrow x = y, \\ (x,-1) &\sim (y,-1) :\Leftrightarrow x = y, \\ (x,1) &\sim (y,-1) :\Leftrightarrow x = y \neq 0 \end{aligned}$$

ein. Nun betrachten wir $M := (\mathbb{R} \times \{1\} \cup \mathbb{R} \times \{-1\})/\sim$ mit der Quotiententopologie und die Abbildungen

$$\phi_i : U_i \to \mathbb{R}; [(x,i)] \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & sonst \end{cases},$$

wobei $U_i = [\mathbb{R} \times \{i\}]$ und $i = \pm 1$ sind. Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit?

(b) Finden Sie für M eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(c) Sei $M = \{ (x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \} \cup \{ (x, \alpha x^3) \mid x \in \mathbb{R}_{>0} \}$ mit $\alpha \neq 0$, sowie die Mengen

$$\begin{aligned} U &= \{ (x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \}, \\ V &= \{ (x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}_{\leq 0} \} \cup \{ (x, \alpha x^3) \mid x \in \mathbb{R}_{>0} \} \end{aligned}$$

mit den Abbildungen

$$\begin{aligned} \phi &: U \to \mathbb{R}; \quad (x,0) \mapsto x \\ \psi &: V \to \mathbb{R}; \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} x & \text{für } y = 0 \\ x & \text{für } y = \alpha x^3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\varphi : U \to \mathbb{R}; \quad (x,0) \mapsto x$$

$$\psi : V \to \mathbb{R}; \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} x & \text{für } y = 0 \\ x & \text{für } y = \alpha x^3 \end{cases}$$

gegeben. Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit?

Aufgabe B.2: *Topologische Grundlagen II* (**4+1+1+4**)

(a) Seien M, N topologische Räume und $f : M \to N$ eine stetige, surjektive Abbildung. Falls M zusammenhängend ist, dann ist auch N zusammenhängend.

(b) Gilt die Umkehrung der obigen Aussage?

(c) Welche Aussage aus Analysis I wird durch a) verallgemeinert?

(d) Sei M wegzusammmenhängend. Zeigen Sie, dass M auch zusammenhängend ist.

(Hinweis zu a) und d)): indirekter Beweis!

Aufgabe B.3: *Karten der* $\mathbb{R}$ (**5+5**)

(a) Für welche $k \in \mathbb{Z}$ ist $(\mathbb{R}, x \mapsto x^k, \mathbb{R})$ ist ein 1-dimensionaler $\mathscr{C}^1$-Atlas für $\mathbb{R}$.

(b) Seien nun $(\mathbb{R}, x \mapsto x^{2n+1}, \mathbb{R})$,$(\mathbb{R}, x \mapsto x^{2m+1}, \mathbb{R})$ für $m \neq n$ und $n, m \in \mathbb{N}_0$. Welche von ihnen sind $\mathscr{C}^0$ - bzw. $\mathscr{C}^1$-äquivalent?

2

29 April 2020 12:07

Fragen ?