1.1 Komplexe Zahlen

Es gilt, alle Lösungen der folgenden Gleichungen über $\mathbb{C}$ zu finden.

(a) $z^2 - 10z + 34 = 0$

Polynom zweiten Grades ermöglicht p-q-Formel:

$$z_\pm = 5 \pm \sqrt{25 - 34} = 5 \pm \mathrm{i}\sqrt{9} = 5 \pm \mathrm{i}3$$

(b) $z^3 - 3z\bar{z} = -2$

Bedingungen an Nullstellen: $z^3 \in \mathbb{R}$, da $-3z\bar{z} + 2 \in \mathbb{R}$
Andererseits für die Beträge ($z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$): $r^3 - 3r^2 + 2 = 0$. Dies ist ein (reelles) Polynom, und die Lösung $r = 1$ kann leicht überprüft werden.
Per Polynomdivision lässt sich ein Linearfaktor $r - 1$ abspalten: $r^3 - 3r^2 + 2 = (r-1)(r^2 - 2r - 2)$.
Hier lassen sich die anderen Nullstellen per p-q-Formel bestimmen. $r = 1 \pm \sqrt{1+2} = 1 \pm \sqrt{3}$
Fall: $r = 1$, dann muss $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = 1$ sein, und es ergeben sich drei Nullstellen:

$$\begin{gathered} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\frac{2\pi}{3}} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\frac{2\pi}{3}} = 1 \end{gathered}$$

Fall: $r = (1 - \sqrt{3})$, dann muss $r^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - 3r^2 + 2 = 0$ sein, also:

$$\begin{aligned} (1 - 3\sqrt{3} + 9 - 3\sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - 3 + 6\sqrt{3} - 9 + 2 = 0 \\ (10 - 6\sqrt{3})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - 1) = 0 \end{aligned}$$

Dafür ergibt sich $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = 1$, also drei Nullstellen

$$\begin{gathered} (1 - \sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \\ (1 - \sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\frac{2\pi}{3}} \\ (1 - \sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\frac{2\pi}{3}} \end{gathered}$$

Fall: $r = (1 + \sqrt{3})$, dann gilt:

$$\begin{aligned} (1 + 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - 3 - 6\sqrt{3} - 9 + 2 = 0 \\ (10 + 6\sqrt{3})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - 1) = 0 \end{aligned}$$

Das ergibt analog:

$$\begin{gathered} (1 - \sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \\ (1 - \sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\frac{2\pi}{3}} \\ (1 - \sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\frac{2\pi}{3}} \end{gathered}$$

(c) $z^4 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$

Hier lässt sich auch wieder der Betrag und das Argument getrennt betrachten.

$$r^4 = \left|1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right| = 1^2 + (-\sqrt{3})^2 = \sqrt{2} \quad 4\varphi = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3} \mod (2\pi)$$

Damit ergeben sich vier Lösungen (:

$$\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{24}}$$
$$\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{8\pi}{24}}$$
$$\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{14\pi}{24}}$$
$$\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{20\pi}{24}}$$