W. <u>Boothby</u>

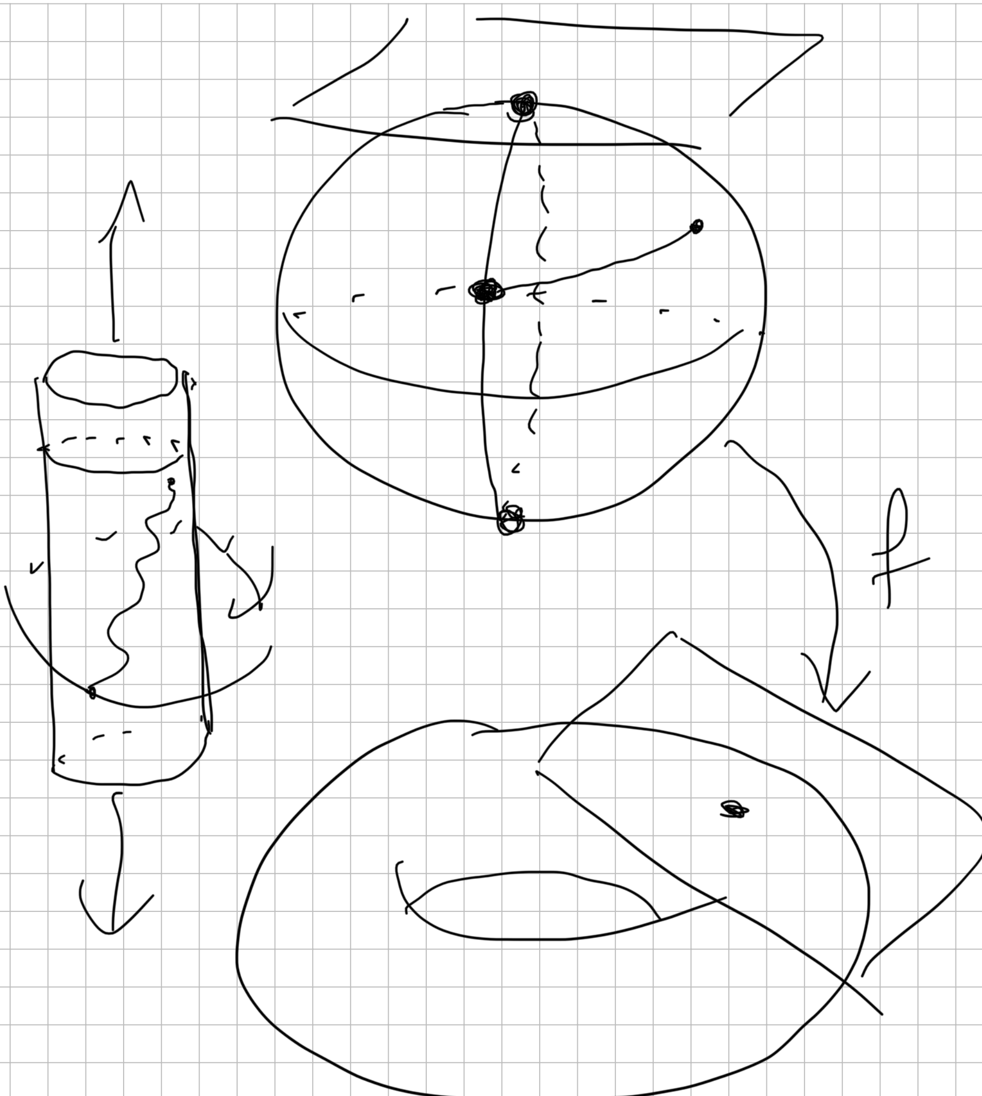
Introduction to manifolds and Riemannian geometry

Jürgen Jost

Riemannian geometry

Springer Verlag

- Frank Warner


f

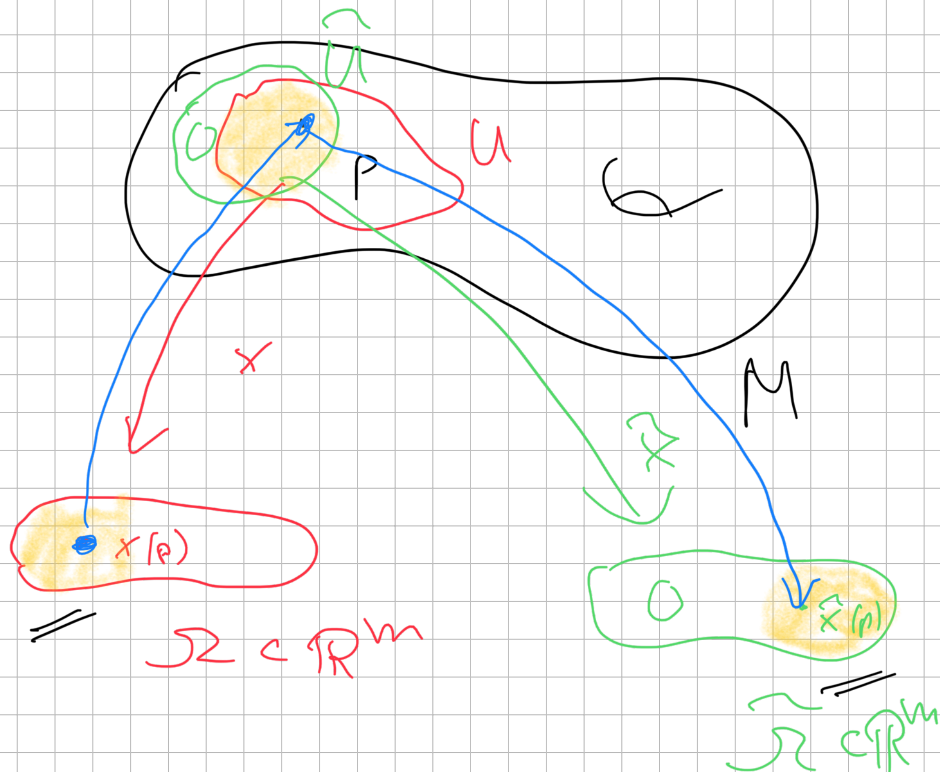
§1 Mannigfaltigkeiten

$\mathbb{R}^m$:

Unter dem $\mathbb{R}^m$ verstehen wir das m-fache kartesische Produkt

$$\mathbb{R}^m = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{m\text{-mal}} = \{(x^1, \dots, x^m) : x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}\}$$

Für $x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$ nennen wir $x^1, \dots, x^m$ die kartesischen Koordinaten von x



Sind $x : U \to \Omega$ und $\hat{x} : \hat{U} \to \hat{\Omega}$ zwei m-dim. Karten für M, so heißt die Abb.

$$\hat{x} \circ x^{-1} : x(U \cap \hat{U}) \to \hat{x}(U \cap \hat{U})$$

Kartenwechsel (Koordinatentransformation

1.1 Karten, Kartenwechsel und Atlanten

1.1 Def.: Gegeben sei eine nicht leere Menge M sowie eine nat. Zahl $m \in \mathbb{N}_0$. Unter einer m-dim. Karte für M um $p \in M$ verstehen wir eine Bijektion $x : U \to \Omega$ zwischen einer Teilmenge $U \subset M$ mit $p \in U$ und einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. U heißt Kartengebiet, Ω nennen wir Koordinatenbereich und $x(p) = (x^1(p), \dots, x^m(p))$ die Koordinaten von p bzgl. $x : U \to \Omega$.

Die Umkehrabb.

$$F := x^{-1} : \Omega \to U \subset M$$

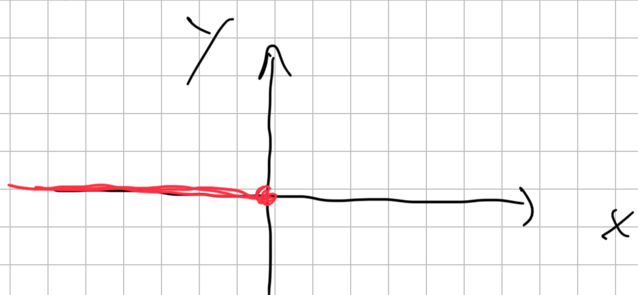
nennt man eine lokale Parametrisierung von M um p.

1.2 Beispiele

1. Ebene Polarkoordinaten.

Sind (x,y) die kartesischen Koord. von

$$p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ (s,0) \in \mathbb{R}^2 , s \leq 0 \} =: U$$



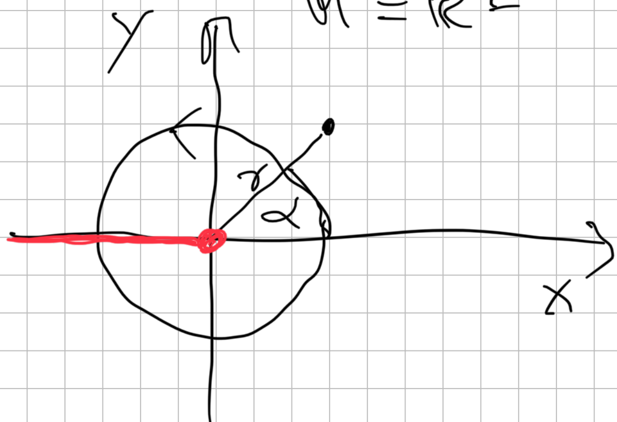
so sei $r(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$ und

$\alpha(x,y)$ sei der eindeutig best.

Winkel im Intervall $(-\pi, \pi)$

mit $\quad x = r\cos\alpha \quad , y = r\sin\alpha$

$\Omega = \mathbb{R}^2$

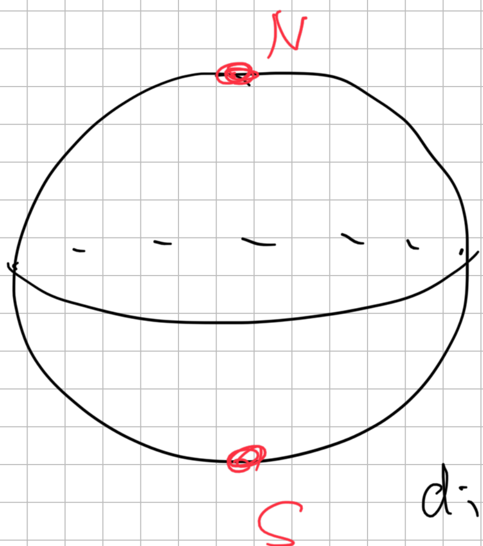


Man nennt r, α die ebenen Polarkoordinaten.

2. **Die Sphäre.** Wir betrachten

$$M = S^m = \{ y \in \mathbb{R}^{m+1} : \|y\| = 1 \}$$

Seien $N := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{m+1}$ und $S := (0, \dots, 0, -1)$ der Nord- bzw. Südpol von S^m.



Die Mengen

$$U_N := S^m \setminus \{N\}$$

$$U_S := S^m \setminus \{S\}$$

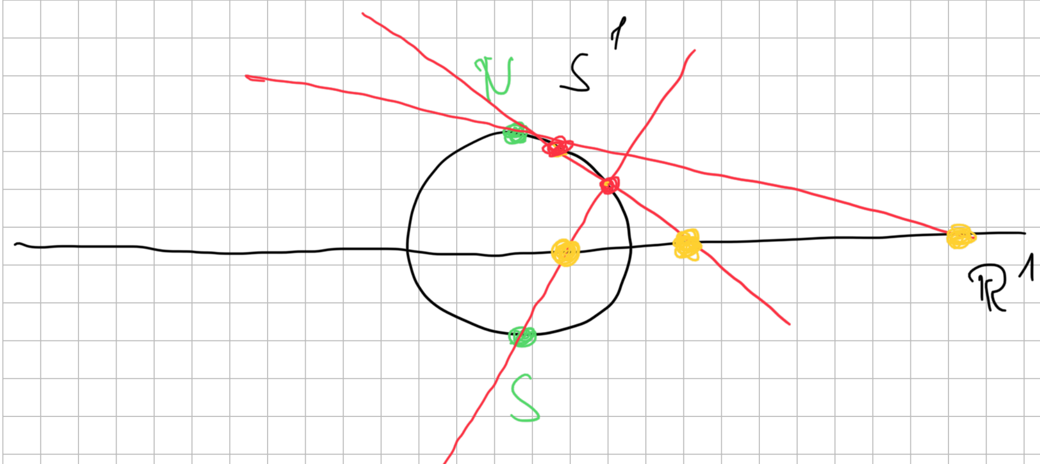
werden durch die Abbildungen

$$x_N : U_N \to \mathbb{R}^m$$

$$x_N(y^1,\dots,y^{m+1}) := \left(\frac{y^1}{1-y^{m+1}},\dots,\frac{y^m}{1-y^{m+1}}\right)$$

$$x_S : U_S \to \mathbb{R}^m$$

$$x_S(y^1,\dots,y^{m+1}) := \left(\frac{y^1}{1+y^{m+1}},\dots,\frac{y^m}{1+y^{m+1}}\right)$$



Es gilt

$$x_N^i(y) = \frac{y^i}{1-y^{m+1}}, \quad i = 1, \dots, m$$

und $\quad (y^1)^2 + \dots + (y^{m+1})^2 = 1$

$$\|x_N(y)\|^2 = \frac{1+y^{m+1}}{1-y^{m+1}}$$

$$\Rightarrow \quad x_N^{-1}(x) = \left(\frac{2x^1}{\|x\|^2+1}, \dots, \frac{2x^m}{\|x\|^2+1}, \frac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1} \right)$$

$$\Rightarrow \left(x_S \circ x_N^{-1} \right)(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$$