Lukas Hantzko
10011048

Aufgabe A.1 *Topologische Grundlagen*

Seien (M, O_M) und (N, O_N) zwei Hausdorffräume.

(a) Sei (K, O_K) ein kompakter Raum. Zeigen Sie, dass eine abgeschlossene Menge $A \subset K$ auch kompakt ist.

Sei eine beliebige offene Überdeckung $B_i \in O_K$, $i \in I$ von A gegeben. $A^C \in O_K$ Dann ist $C_i := A^C \cup B_i$ eine offene Überdeckung von K, nach Vorraussetzung ist K kompakt, also existiert eine endliche Teilüberdeckung $(I_n \subset I : |I_n| = n)$:

$$K \subset \bigcup_{i \in I_n} C_i$$

$B_i = C_i \cap A$, $i \in I_n$ ist dann eine endliche Teilüberdeckung von B_i:

$$A \subset \bigcup_{i \in I_n} B_i$$

(b) Gilt dies auch für beliebige offene Teilmengen?

In $\mathbb{R}$ ist ein offenes Intervall nicht kompakt, zum Beispiel $(0, 1)$ ist eine offene Teilmenge einer kompakten Menge, zum Beispiel das Intervall $[0, 1]$, die mit der üblichen Topologie ein kompakter topologischer Raum ist. Im Beweis sind die C_i nicht notwendigerweise offen, weshalb nicht unbedingt eine endliche Teilüberdeckung existieren muss.

(c) Zeigen Sie, dass in der Teilraumtopologie Unterräume von M Hausdorffräume sind.

Aufgrund der Teilraumtopologie sind Unterräume U auch topologische Räume.
Bleibt zu zeigen, dass in Unterräumen auch die Hausdorffeigenschaft erfüllt ist. Nehmen wir also zwei Punkte $x, y \in U$. Diese besitzen, da $U \subset M$ ein Hausdorffraum ist zwei offene Umgebungen $V_x, V_y \in O_M$, so dass gilt: $V_x \cap V_y = \emptyset$ (disjunkt).
Nun definieren wir $U_x, U_y \subset U$ über $U_. = V_. \cap U$, also der Schnitt mit U. Diese sind in der Teilraumtopologie $U_x, U_y \in O_U = \{A \cap U | A \in O_M\}$, da $V_x, V_y \in O_M$. Außerdem sind sie disjunkt, da $U_x \cap U_y = V_x \cap U \cap V_y \cap U = V_x \cap V_y = \emptyset$ nach Vorraussetzung. Damit sind diese Punkte durch disjunkte offene Umgebungen getrennt.

(d) Sei $f : M \to N$ stetig und $K \subset M$ überdeckungskompakt (ük). Dann ist $f(K) \subset N$ ebenfalls ük.

Sei eine offene Überdeckung von $f(K)$ gegeben:

$$f(K) \subset \bigcup_{i \in I} A_i \subset N$$

Dann ist folgendes auch eine offene Überdeckung, da f stetig:

$$K \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i) \subset M$$

Dann existiert eine endliche Teilüberdeckung $(I_n \subset I : |I_n| = n)$ (K überdeckungskompakt)

$$K \subset \bigcup_{I_n} f^{-1}(A_i) \subset M$$

Das Bild davon ist dann eine endliche Teilüberdeckung der ursprünglichen Überdeckung von $f(K)$:

$$f(K) \subset \bigcup_{I_n} A_i \subset N$$

Aufgabe A.2 *Einsteinsche Summenkonvention*

(a) Formulieren Sie mit der Summenkonvention die folgenden Begriffe der Linearen Algebra:

(1) Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^n$

$$v \cdot w = v_i w^i = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

(2) Matrix-Vektor-Produkt

$$b = Av \quad b^i = A^i{}_j v^j = \sum_{j=1}^{n} A^i{}_j v^j$$

(3) Matrizenmultiplikation

$$C = AB \quad C^i{}_k = A^i{}_j B^j{}_k = \sum_{j=1}^{n} A^i{}_j B^j{}_k$$

(4) Spur einer Matrix

$$\mathrm{Tr}\,(A) = A^j{}_j = \sum_{j=1}^{n} A^j{}_j$$

(5) Transponieren einer Matrix

$$B = A^T \quad B^i{}_j = A^j{}_i$$

(b) Das Levi-Civita-Symbol

Wir nehmen an:

$$x = (x^1, x^2, x^3) \quad y = (y^1, y^2, y^3) \quad z = (z^1, z^2, z^3)$$

Behauptung: Es wird das Kreuzprodukt $z = x \times y$ berechnet.
Begründung: Komponentenweise nachrechnen:

$$\begin{aligned} z^1 &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \epsilon_{ij}{}^1 x^i y^j \\ &= \sum_{i=1}^{3} \left(\epsilon_{i2}{}^1 x^i y^2 + \epsilon_{i3}{}^1 x^i y^3 \right) \\ &= \epsilon_{32}{}^1 x^3 y^2 + \epsilon_{23}{}^1 x^2 y^3 \\ &= x^2 y^3 - x^3 y^2 \end{aligned}$$

Analog für die anderen Komponenten (zyklische Vertauschung der Indizes)

$$z = (x^2y^3 - x^3y^2, x^3y^1 - x^1y^3, x^1y^2 - x^2y^1)$$

(c) Beweisen Sie für $f, g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle f(t), g(t)\rangle = \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t), g(t)\right\rangle + \left\langle f(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t)\right\rangle$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle f(t), g(t)\rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f^i(t)\, g^i(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f^i(t)\, g^i(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}f^i(t)}{\mathrm{d}t} g^i(t) + f^i(t)\, \frac{\mathrm{d}g^i(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}f^i(t)}{\mathrm{d}t} g^i(t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}g^i(t)}{\mathrm{d}t} f^i(t) \\
&= \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t), g(t)\right\rangle + \left\langle f(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t)\right\rangle
\end{aligned}$$

Aufgabe A.3 *Einige Karten*

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene Menge in der Standardtopologie. Statten Sie nun U mit einer n-dimensionalen Karte aus.

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; x \mapsto x$$

Ist eine Karte von U, da Bild und Urbild U jeweils offen sind, und die Identität bijektiv ist.

(b) Ist diese Konstruktion auch für beliebige abgeschlossene Mengen des $\mathbb{R}^n$ möglich?

Nein, da diese Abbildung dann nicht bijektiv von einer offenen Menge in eine offene Menge abbildet.

(c) Stereographische Projektion ist Karte der S^n. Weitere Karten für $2(n+1)$ Hemisphären $U_{i,\pm}$ für $i = 1, \ldots, n+1$. Braucht man alle Hemisphären für Überdeckung? Kartenwechsel $\to \mathscr{C}^1$-Atlas?

Für die Hemisphären $U_{1,\pm}$ gibt es zum Beispiel die Polarkoordinaten. Man braucht nicht alle Karten, da man auch eine Karte mit größerem Definitionsbereich nehmen könnte, in der dann zum Beispiel nur ein Pol fehlt. Nimmt man dann die andere Hemisphäre, so hat man die ganze S^n überdeckt. Die $\phi_{i,\pm}$ sind folgendermaßen definiert (Abbildungsvorschrift überall gleich, nur Definitionsbereich anders), Abkürzung $\sin(\phi^j) = \sin^j$. Da die Abbildungsvorschriften gleich sind, ist der Kartenwechsel die Identität, insbesondere $\mathscr{C}^1$

$$\begin{aligned}
\phi_{1,+} &: (0,\pi)^n \to \mathbb{R}^{n+1} \\
\phi_{1,-} &: (\pi, 2\pi) \times (0,\pi)^{n-1} \to \mathbb{R}^{n+1} \\
\phi_{2,+} &: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0,\pi)^n \to \mathbb{R}^{n+1} \\
\phi_{2,-} &: \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \times (0,\pi)^n \to \mathbb{R}^{n+1} \\
\phi_{i,+} &: (0,2\pi) \times (0,\pi)^{j-2} \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times (0,\pi)^{n-j+1} \to \mathbb{R}^{n+1} \\
\phi_{i,-} &: (0,2\pi) \times (0,\pi)^{j-2} \times \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \times (0,\pi)^{n-j+1} \to \mathbb{R}^{n+1} \\
(\phi^1, \ldots, \phi^n) &\mapsto \left(\sin^1 \ldots \sin^n, \cos^1 \ldots \sin^n, \cos^2 \ldots \sin^n, \ldots, \cos^n\right)
\end{aligned}$$