1 Mannigfaltigkeiten

Zielsetzung dieser Aufzeichnungen ist es, den Leser mit den wichtigsten Konzepten differenzierbarer Mannigfaltigkeiten vertraut zu machen. Der Begriff der Mannigfaltigkeit gehört zu den zentralsten Begriffen in der modernen Mathematik, sowohl in der Analysis und der Mathematischen Physik als auch insbesondere in der Differentialgeometrie und der Algebraischen Geometrie.

Vereinfacht ausgedrückt sind Mannigfaltigkeiten topologische Räume, die lokal die Struktur anderer *einfacherer* topologische Räume besitzen. Dabei meint *einfach* meist, dass es sich bei dem lokalen Modellraum um den $\mathbb{R}^m$ mit seiner Standardtopologie oder um eine Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ versehen mit der hierauf induzierten Relativtopologie handelt - wie etwa beim oberen Halbraum des $\mathbb{R}^m$.

Unter dem $\mathbb{R}^m$ verstehen wir das m-fache kartesische Produkt

$$\mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x^1, \ldots, x^m) : x^1, \ldots, x^m \in \mathbb{R}\}.$$

Für $x = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m$ nennen wir $x^1, \ldots, x^m$ die *kartesischen Koordinaten* von x und wir vereinbaren, dass wir die Indizes von Koordinaten stets nach oben stellen wollen. Warum das eine sinnvolle Konvention ist, wird sich im Verlauf der Vorlesung zeigen. Es ist wichtig, an dieser Stelle zu betonen, dass wir hier den $\mathbb{R}^m$ nicht als Vektorraum, sondern nur als eine Punktmenge (und weiter unten als einen topologischen Raum) verstehen.

1.1 Karten, Kartenwechsel und Atlanten

1.1.1 Definition (Karten, Kartenwechsel)
Gegeben seien eine nicht leere Menge M sowie eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}_0$. Unter einer *m-dimensionalen lokalen Karte* für M um $p \in M$ verstehen wir eine Bijektion $x : U \to \Omega$ zwischen einer Teilmenge $U \subset M$ mit $p \in U$ und einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. U heißt *Kartengebiet*, Ω nennen wir *Koordinatenbereich* und $x(p) = (x^1(p), \ldots, x^m(p))$ die *Koordinaten des Punkts p bezüglich der Karte $x : U \to \Omega$.*

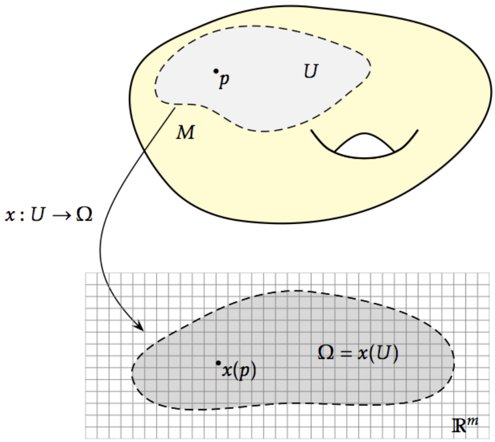

Abbildung 1.1: Lokale Darstellung einer Karte $x : U \to \Omega$ von einem Kartengebiet $U \subset M$ auf eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Sind $x : U \to \Omega$ und $\tilde{x} : \tilde{U} \to \tilde{\Omega}$ zwei Karten für M, so heißt die Abbildung

$$\tilde{x} \circ x^{-1} : x(U \cap \tilde{U}) \to \tilde{x}(U \cap \tilde{U})$$

Kartenwechsel oder auch *Koordinatentransformation* bzw. *Koordinatenwechsel*. Die Umkehrabbildung

$$F := x^{-1} : \Omega \to U \subset M$$

einer Karte $x : U \to \Omega$ wie oben nennen wir eine *lokale Parametrisierung von M um p*.

1.1.2 Beispiel

1. *Ebene Polarkoordinaten*. Die *kartesischen Koordinaten* des $\mathbb{R}^m$ ergeben sich, wenn man als Karte für den $\mathbb{R}^m$ die Identität benutzt. Für viele Zwecke ist es aber nötig individuell angepasste Koordinaten zu verwenden, z.B. bietet es sich oft an, die Lage eines ebenen Punktes (das heißt seine Koordinaten) durch *Polarkoordinaten* zu beschreiben. Sind (x, y) die kartesischen Koordinaten eines Punkts p der *geschlitzten Ebene* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(s, 0) \in \mathbb{R}^2 : s \leq 0\}$, so sei $r(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\alpha(x, y)$ sei der eindeutig bestimmte Winkel im Intervall $(-\pi, \pi)$ mit

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha.$$

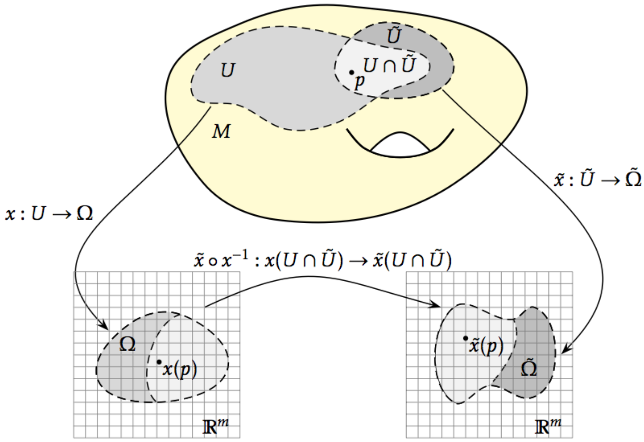

Abbildung 1.2: Schematische Darstellung eines Kartenwechsels.

Die hierdurch definierten Koordinaten

$$(r, \alpha) : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x < 0\} \to \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi)$$

nennt man *ebene Polarkoordinaten*.

2. *Sphäre*. Wir betrachten die Einheitssphäre

$$M = \mathbb{S}^m = \{y \in \mathbb{R}^{m+1} : ||y|| = 1\}$$

und geben zwei Karten an. Seien $N := (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{S}^m$ der *Nordpol* und $S := (0, \ldots, 0, -1) \in \mathbb{S}^m$ der *Südpol* der Einheitssphäre. Die Mengen

$$U_N := \mathbb{S}^m \setminus \{N\}, \quad U_S := \mathbb{S}^m \setminus \{S\}$$

werden durch die Abbildungen

$$x_N : U_N \to \mathbb{R}^m, \quad x_N(y^1, \ldots, y^{m+1}) := \left(\frac{y^1}{1 - y^{m+1}}, \ldots, \frac{y^m}{1 - y^{m+1}} \right)$$

$$x_S : U_S \to \mathbb{R}^m, \quad x_S(y^1, \ldots, y^{m+1}) := \left(\frac{y^1}{1 + y^{m+1}}, \ldots, \frac{y^m}{1 + y^{m+1}} \right)$$

bijektiv auf den $\mathbb{R}^m$ abgebildet. Man nennt x_N die *stereographische Projektion der Einheitssphäre bezüglich des Nordpols* (und entsprechend x_S die stereographische Projektion bezüglich des

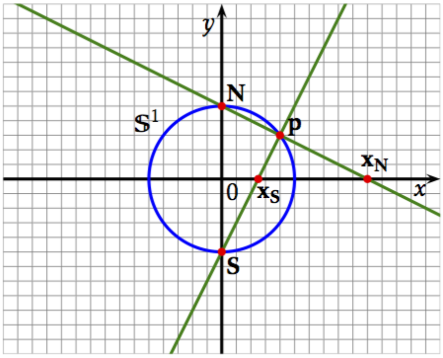

Abbildung 1.3: Stereographische Projektion der Sphäre auf die Ebene.

Südpols). Wir möchten den Kartenwechsel berechnen. Im ersten Fall ist z.B. wegen

$$(y^1)^2 + \cdots + (y^{m+1})^2 = 1$$

und

$$x_N^i(y) = \frac{y^i}{1 - y^{m+1}}\,, \quad i = 1, \ldots, m$$

auch

$$||x_N(y)||^2 = \sum_{i=1}^{m} (x_N^i(y))^2 = \frac{1 - (y^{m+1})^2}{(1 - y^{m+1})^2} = \frac{1 + y^{m+1}}{1 - y^{m+1}}\,,$$

das heißt

$$x_N^{-1}(x) = \left(\frac{2x^1}{||x||^2 + 1}, \ldots, \frac{2x^m}{||x||^2 + 1}, \frac{||x||^2 - 1}{||x||^2 + 1} \right)$$

Für den Kartenwechsel $x_S \circ x_N^{-1} : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ ergibt sich damit z.B.

$$\left(x_S \circ x_N^{-1}\right)(x) = \frac{x}{||x||^2}.$$