

### 1.1.3 Definition (Atlas)

Gegeben sei eine Menge  $M$ .

1. Zwei  $m$ -dimensionale Karten  $x : U \rightarrow \Omega$ ,  $\tilde{x} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{\Omega}$  für  $M$  heißen  $C^k$ -verträglich,  $k \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$ , wenn gilt:

- a)  $x(U \cap \tilde{U})$ ,  $\tilde{x}(U \cap \tilde{U})$  sind offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^m$ .
- b) Der Kartenwechsel  $\tilde{x} \circ x^{-1} : x(U \cap \tilde{U}) \rightarrow \tilde{x}(U \cap \tilde{U})$  ist ein Homöomorphismus und in beiden Richtungen  $k$ -mal stetig differenzierbar.

2. Zu einer Indexmenge  $I$  und zu jedem  $\alpha \in I$  sei nun eine  $m$ -dimensionale Karte  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow \Omega_\alpha$  für  $M$  gegeben. Die Familie

$$\mathcal{A} = \{x_\alpha : U_\alpha \rightarrow \Omega_\alpha : \alpha \in I\}$$

heißt  $C^k$ -Atlas der Dimension  $m$  für  $M$ , wenn  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$  und wenn sämtliche Karten aus  $\mathcal{A}$  miteinander  $C^k$ -verträglich sind. Ist  $k = 0$ , so nennen wir den Atlas einen *topologischen Atlas*. Für  $k = \infty$  nennen wir den Atlas *differenzierbar*.

3. Zwei  $C^k$ -Atlanten  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  heißen *äquivalent*, wenn  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  wieder ein  $C^k$ -Atlas ist. Hierdurch wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller  $C^k$ -Atlanten auf  $M$  erzeugt. Ist  $\mathcal{A}$  ein  $C^k$ -Atlas, so ist die hierdurch festgelegte Äquivalenzklasse  $[\mathcal{A}]$  die Menge aller Karten auf  $M$ , die mit dem Atlas  $\mathcal{A}$  verträglich sind. Eine solche Äquivalenzklasse nennt man eine  $C^k$ -Struktur für  $M$ . Eine  $C^\infty$ -Struktur für  $M$  wird auch *differenzierbare Struktur* genannt.

### 1.1.4 Beispiel

Wir geben mehrere Beispiele für Mengen mit Atlanten an.

1.  $\mathbb{S}^m$ , die Sphäre.

Die beiden stereographischen Projektionen  $x_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^m$  der Einheitssphäre  $\mathbb{S}^m$  sind miteinander  $C^\infty$ -verträglich, denn der Kartenwechsel

$$x_S \circ x_N^{-1} : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$$

ist ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus. Da die Kartengebiete  $\mathbb{S}^m$  überdecken, bildet  $\mathcal{A} := \{x_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^m, x_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^m\}$  bereits einen  $C^\infty$ -Atlas und  $[\mathcal{A}]$  eine differenzierbare Struktur auf  $\mathbb{S}^m$ .

2.  $\mathbb{R}$ .

Auf  $M = \mathbb{R}$  betrachten wir die beiden Karten  $x_1(x) = x$  und  $x_2(x) = x^3$ . Die Kartenwechsel sind

$$x_1 \circ x_2^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_2 \circ x_1^{-1}(x) = x^3.$$

Da der erste Kartenwechsel an der Stelle  $x = 0$  nicht differenzierbar ist, sind die beiden Karten nicht  $C^k$ -verträglich für  $k \geq 1$ . Sie sind aber noch  $C^0$ -verträglich, weil die Kartenwechsel Homöomorphismen sind. Jede Karte überdeckt ganz  $M$  und definiert für sich allein bereits einen  $C^\infty$ -Atlas und dann auch eine  $C^\infty$ -Struktur auf  $\mathbb{R}$ . Daher können wir schon auf  $M = \mathbb{R}$  verschiedene differenzierbare Strukturen finden.

### 3. Quadrat.

Wir betrachten die Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}.$$

Außerdem definieren wir die folgenden beiden Karten.

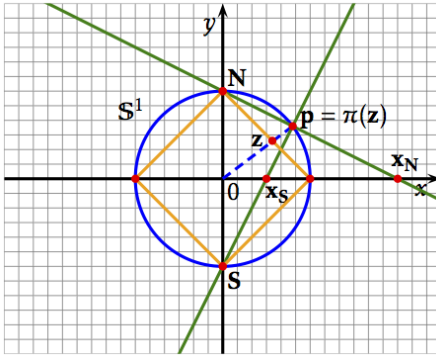


Abbildung 1.4: Zeichnerische Darstellung der Abbildungen in Beispiel 1.1.4, Teil 3.

$$\phi : M \setminus \{(0, -1)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x, y) := \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2} - y},$$

$$\psi : M \setminus \{(0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(x, y) := \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2} + y}.$$

Diese Abbildungen sind die Verkettung der Abbildung  $\pi : M \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $\pi(z) = z/|z|$  mit den beiden stereographischen Projektionen für den Einheitskreis, das heißt  $\phi = x_N \circ \pi$ ,  $\psi = x_S \circ \pi$ . Daraus folgt für den Kartenwechsel  $\psi \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,

$$(\psi \circ \phi^{-1})(t) = (x_S \circ \pi \circ \pi^{-1} \circ x_N^{-1})(t) = (x_S \circ x_N^{-1})(t) = \frac{1}{t}.$$

Da diese Abbildung ein glatter Diffeomorphismus auf  $\mathbb{R}^*$  ist, legen die beiden Karten  $\phi, \psi$  auf  $M$  eine  $C^\infty$ -Struktur fest.

4. *Zurückgezogener Atlas.*

Die Konstruktion beim Quadrat unter Punkt 3. lässt sich verallgemeinern. Es sei  $f : M \rightarrow N$  eine Bijektion zwischen zwei nicht leeren Mengen und  $N$  besitze einen  $C^k$ -Atlas  $\mathcal{A}_N$ . Dann lässt sich der Atlas mittels  $f$  auf  $M$  zurückziehen. Ist nämlich  $y : V \rightarrow \Lambda$  eine Karte aus dem Atlas  $\mathcal{A}_N$ , so setzen wir

$$U := f^{-1}(V), \quad \Omega := \Lambda, \quad x := y \circ f : U \rightarrow \Omega.$$

$x : U \rightarrow \Omega$  bildet eine Karte für  $M$ . Sind  $x : U \rightarrow \Omega$ ,  $\tilde{x} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{\Omega}$  zwei derart definierte Karten, so gilt für den Kartenwechsel

$$\tilde{x} \circ x^{-1} = \tilde{y} \circ f \circ (y \circ f)^{-1} = \tilde{y} \circ f \circ f^{-1} \circ y^{-1} = \tilde{y} \circ y^{-1}$$

und daher sind die Karten  $x : U \rightarrow \Omega$ ,  $\tilde{x} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{\Omega}$  genauso verträglich wie die Karten  $y : V \rightarrow \Lambda$ ,  $\tilde{y} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{\Lambda}$ , das heißt man erhält auf diese Weise einen  $C^k$ -Atlas auf  $M$ .

5.  $\mathbb{T}_\Gamma^m$ , *Torus zum Gitter*  $\Gamma$ .

Sei  $v_1, \dots, v_m$  eine Basis des  $\mathbb{R}^m$ . Das durch diese Vektoren erzeugte *Gitter*  $\Gamma$  ist

$$\Gamma := \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x = \sum_{i=1}^m k_i v_i, \text{ mit } k_i \in \mathbb{Z} \text{ für alle } i = 1, \dots, m \right\}$$

Wir definieren eine Äquivalenzrelation  $\sim_\Gamma$  auf  $\mathbb{R}^m$  wie folgt.

$$x_1 \sim_\Gamma x_2 \quad :\Leftrightarrow \quad x_1 - x_2 \in \Gamma$$

Sei

$$\mathbb{T}_\Gamma^m := \mathbb{R}^m / \sim_\Gamma.$$

der erzeugte Quotientenraum. Ist  $x \in \mathbb{R}^m$  beliebig, so existieren eindeutig bestimmte reelle Zahlen  $r_1, \dots, r_m$  mit

$$x = \sum_{i=1}^m r_i v_i,$$

denn  $v_1, \dots, v_m$  bilden ja eine Basis des  $\mathbb{R}^m$ . Sei  $k_i$  die jeweils größte ganze Zahl mit  $r_i - k_i \geq 0$ . Dann ist  $r_i = k_i + \epsilon_i$  mit einem  $0 \leq \epsilon_i < 1$ . Wir setzen

$$x' := \sum_{i=1}^m \epsilon_i v_i.$$

Wegen

$$x - x' = \sum_{i=1}^m k_i v_i$$

sind  $x$  und  $x'$  bzgl.  $\Gamma$  äquivalent. Dies zeigt, dass es in jeder Äquivalenzklasse  $[x]_\Gamma$  genau ein Element  $x'$  gibt, das sich in der Form

$$x' = \sum_{i=1}^m \epsilon_i v_i$$

mit  $0 \leq \epsilon_i < 1$  darstellen lässt. Die Menge

$$F_\Gamma := \left\{ x' \in \mathbb{R}^m : x' = \sum_{i=1}^m \epsilon_i v_i, 0 \leq \epsilon_i < 1 \right\}$$

nennen wir *Fundamentalebene* bzgl.  $\Gamma$ . Die oben beschriebene Abbildung, die jedem  $x \in \mathbb{R}^m$  das eindeutig bestimmte  $x' \in F_\Gamma$  mit  $x \sim_\Gamma x'$  zuordnet, ist eine Bijektion zwischen  $F_\Gamma$  und  $\mathbb{T}_\Gamma^m$ . Auf  $\mathbb{T}_\Gamma^m$  kann auf folgende Weise ein glatter Atlas definiert werden: Sei  $U \subset \mathbb{R}^m$  eine beliebige offene Menge, die kein Paar äquivalenter Punkte enthält. Dann existiert zu jedem  $[p] \in [U]$  genau ein  $q_p \in U$  mit  $q \in [p]$  und die Abbildung  $x : [U] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x([p]) := q_p$  ist eine Karte. Da sämtliche Kartenwechsel glatt sind, definiert dies eine  $C^\infty$ -Struktur auf  $\mathbb{T}_\Gamma^m$ .

#### 6. Produktmengen.

Es seien  $M_1, M_2$  zwei Mengen mit  $C^k$ -Atlanten  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  der Dimensionen  $m_1$  bzw.  $m_2$ . Sind  $x_1 : U_1 \rightarrow \Omega_1$  und  $x_2 : U_2 \rightarrow \Omega_2$  dann jeweils Karten aus  $\mathcal{A}_1$  bzw.  $\mathcal{A}_2$ , so können wir eine  $(m_1 + m_2)$ -dimensionale Karte  $x : U \rightarrow \Omega$  für  $M := M_1 \times M_2$  durch die Vorschrift

$$U := U_1 \times U_2, \quad \Omega := \Omega_1 \times \Omega_2,$$

$$x := x_1 \times x_2 : U \rightarrow \Omega, \quad x(p_1, p_2) := (x_1(p_1), x_2(p_2))$$

konstruieren. Führt man dies mit allen Karten durch, so erhält man einen  $C^k$ -Atlas

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 := \{(U_1 \times U_2, x_1 \times x_2, \Omega_1 \times \Omega_2) : (U_i, x_i, \Omega_i) \in \mathcal{A}_i, i = 1, 2\},$$

welchen wir den durch  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  erzeugten *Produktatlas* nennen. Dies zeigt, dass das kartesische Produkt von endlich vielen Mengen  $M_1, \dots, M_n$ , welche jeweils  $C^k$ -Strukturen besitzen, in natürlicher Weise ebenfalls eine  $C^k$ -Struktur trägt. Ein wichtiger Spezialfall hiervon ist der  $m$ -dimensionale *Produkt-Torus*

$$\mathbb{T}^m = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_{m\text{-mal}}.$$

7.  $\mathbb{RP}^m$ , der reell projektive Raum.

Auf der Menge  $N = \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$  definieren wir die folgende Äquivalenzrelation.

$$x_1 \sim x_2 \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0 \text{ mit } x_1 = \lambda x_2.$$

Die zugehörige Äquivalenzklasse  $[x]$  eines Punktes  $x \in N$  ist also die (im Ursprung punktierte) Gerade, welche den Ursprung des  $\mathbb{R}^{m+1}$  mit dem Punkt  $x$  verbindet. Der Quotientenraum  $\mathbb{RP}^m := N/\sim$  heißt *reell projektiver Raum*. Wir setzen

$$\tilde{U}_i = \{x = (x^1, \dots, x^{m+1}) \in N : x^i \neq 0\}, \quad U_i := [\tilde{U}_i].$$

Dann ist

$$\mathbb{RP}^m = \bigcup_{i=1}^n U_i.$$

Im nächsten Schritt definieren wir Abbildungen

$$\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad i = 1, \dots, m+1$$

wie folgt. Auf  $\tilde{U}_i$  seien zunächst die Abbildungen

$$\tilde{\phi}_i : \tilde{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \tilde{\phi}_i(x) := \left( \frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^m}{x^i} \right)$$

erklärt. Sind  $x_1, x_2 \in \tilde{U}_i$  mit  $x_1 \sim x_2$ , so ist  $\tilde{\phi}_i(x_1) = \tilde{\phi}_i(x_2)$ . Also lässt sich die Abbildung  $\tilde{\phi}_i$  zu einer Abbildung  $\phi_i$  auf  $U_i$  ausdrücken, das heißt die Abbildung

$$\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \phi_i([x]) := \tilde{\phi}_i(x)$$

ist wohldefiniert und bijektiv ( $\phi_i^{-1}(z^1, \dots, z^m) = [z^1, \dots, z^{i-1}, 1, z^i, \dots, z^m]$ ). Wir behaupten, dass die Kartenwechsel glatt sind. Sei  $i \neq j$  und ohne Einschränkung wählen wir  $i < j$ . Der Schnitt  $U_i \cap U_j$  ist gegeben durch

$$U_i \cap U_j = \{[x^1, \dots, x^{m+1}] : x^i x^j \neq 0\}.$$

Es ist

$$\phi_i(U_i \cap U_j) = \{(z^1, \dots, z^m) \in \mathbb{R}^m : z^{j-1} \neq 0\}$$

und

$$\phi_j(U_i \cap U_j) = \{(z^1, \dots, z^m) \in \mathbb{R}^m : z^i \neq 0\}.$$

Daraus ergibt sich für den Kartenwechsel

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \{(z^1, \dots, z^m) \in \mathbb{R}^m : z^{j-1} \neq 0\} \rightarrow \{(z^1, \dots, z^m) \in \mathbb{R}^m : z^i \neq 0\},$$

$$\begin{aligned}
\phi_j \circ \phi_i^{-1}(z^1, \dots, z^m) &= \phi_j([z^1, \dots, z^{i-1}, 1, z^i, \dots, z^m]) \\
&= \left( \frac{z^1}{z^{j-1}}, \dots, \frac{z^{i-1}}{z^{j-1}}, \frac{1}{z^{j-1}}, \frac{z^i}{z^{j-1}}, \dots, \frac{z^{j-2}}{z^{j-1}}, \frac{z^j}{z^{j-1}}, \dots, \frac{z^m}{z^{j-1}} \right)
\end{aligned}$$

und diese Abbildung ist offensichtlich glatt. Damit haben wir gezeigt, dass  $\mathbb{RP}^m$  einen differenzierbaren Atlas besitzt.

### 1.1.5 Bemerkung

1. Jeder  $C^k$ -Atlas  $\mathcal{A}$  auf  $M$  erzeugt eine  $C^k$ -Struktur  $[\mathcal{A}]$ , indem man sämtliche verträgliche Karten hinzunimmt.
2. Eine wichtige Bemerkung an dieser Stelle ist, dass es auf einer Menge  $M$  Atlanten verschiedener Dimension geben kann. Zum Beispiel ist durch

$$x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x = \text{Id}$$

ein glatter Atlas der Dimension 2 auf  $M := \mathbb{R}^2$  gegeben. Wir können aber ebenso leicht einen 1-dimensionalen glatten Atlas erzeugen. Auf den Teilmengen  $U_p := \{p\} \times \mathbb{R} \subset M$  definieren wir die Bijektionen

$$x_p : U_p \rightarrow \Omega_p := \mathbb{R}, \quad x_p((p, q)) := q.$$

Da  $\bigcup_{p \in \mathbb{R}} U_p = M$  und sämtliche Kartenwechsel glatt sind, bildet  $\{x_p : U_p \rightarrow \Omega_p : p \in \mathbb{R}^2\}$  einen 1-dimensionalen Atlas. Wenn wir später den Begriff der topologischen oder auch differenzierbaren Mannigfaltigkeit einführen, wollen wir vermeiden, dass es zwei Atlanten mit verschiedenen Dimensionen gibt. Dies werden wir durch zusätzliche Annahmen erreichen.

Für manche Zwecke kann es sinnvoll sein, mit speziellen Karten zu arbeiten. In diesem Zusammenhang erwähnen wir zunächst folgendes Lemma.

### 1.1.6 Lemma

*M sei eine Menge mit einem  $C^k$ -Atlas  $\mathcal{A}$  der Dimension  $m$ . Es seien eine nicht leere offene Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  sowie ein Punkt  $x_0 \in \Omega$  gegeben. Dann existiert zu jedem Punkt  $p \in M$  eine mit  $\mathcal{A}$  verträgliche Karte  $x : U \rightarrow \Omega$ , sodass  $p \in U$ ,  $x_0 = x(p)$ ,  $\Omega = x(U)$ .*

**Beweis:** Wir wählen eine beliebige mit dem Atlas verträgliche Karte  $\tilde{x} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{\Omega}$  um  $p$ . Es sei  $\tilde{x}_0 := \tilde{x}(p)$ . Weil  $\tilde{\Omega}$  offen ist, existiert ein  $\epsilon > 0$  mit

$$B(\tilde{x}_0, \epsilon) := \{\xi \in \mathbb{R}^m : \|\xi - \tilde{x}_0\| < \epsilon\} \subset \tilde{\Omega}.$$

Als nächstes definieren wir die Abbildung

$$\phi : B(\tilde{x}_0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \xi \mapsto x_0 + \frac{\xi - \tilde{x}_0}{\epsilon^2 - \|\xi - \tilde{x}_0\|^2}.$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist  $\phi$  ein glatter Diffeomorphismus mit  $\phi(\tilde{x}_0) = x_0$ . Zum Schluss setzen wir nur noch  $U := \tilde{x}^{-1}(\phi^{-1}(\Omega))$ ,  $x := \phi \circ \tilde{x}|_U$  und erhalten die gewünschte Karte  $x : U \rightarrow \Omega$ .  $\square$