0.1 Was besagt der Hauptsatz der Galoistheorie? Geben Sie ein Anwendungsbeispiel.

Der Hauptsatz der Galoistheorie besagt, dass die Untergruppen der Galoisgruppe einer Körpererweiterung den Zwischenkörpern der Körpererweiterung entsprechen. Ein Anwendungsbeispiel ist, Zwischenkörper zu finden.

0.2 Bestimmen sie $\mathrm{Gal}\left(f\left(x\right),\mathbb{Q}\right)$ in den folgenden Fällen:

(a) $f\left(x\right)=x^3-2$

Drei Nullstellen: $\alpha_1=\sqrt[3]{2}$, $\alpha_2=\sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$, $\alpha_3=\sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\frac{2\pi}{3}}$
Zerfällungskörper: $\mathbb{Q}\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$
Permutation der Nullstellen (3)
$\rightarrow \mathrm{Gal}\left(f\left(x\right),\mathbb{Q}\right)=S_3$

(b) $f\left(x\right)=x^4-2$

Vier Nullstellen: $\alpha_1=\sqrt[4]{2}$, $\alpha_2=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{4}}$, $\alpha_3=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\frac{2\pi}{4}}$, $\alpha_4=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\frac{2\pi}{4}}$
Zerfällungskörper: $\mathbb{Q}\left(\mathrm{i},\sqrt[4]{2}\right)$
Permutation der Nullstellen (8)
$\rightarrow \mathrm{Gal}\left(f\left(x\right),\mathbb{Q}\right)=D_4$

(c) $f\left(x\right)=x^4-4x^2+2$

Vier Nullstellen: $y=x^2$ $y_\pm=2\pm\sqrt{4-2}$ $x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}$
Zerfällungskörper: $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$
Die Galoisgruppe ist $S_2\times S_2$

(d) $f\left(x\right)=x^3-3x+1$

Nullstellen:
Zerfällungskörper:
Galoisgruppe:

0.3 Für Beispiele in 2: Explizit

(a) Verband der Untergruppen $\mathrm{Gal}\left(f\left(x\right),\mathbb{Q}\right)$

(b) Verband der Zwischenkörper $\mathbb{Q}\subset E$