

A.1 Topologische Grundlagen

Seien (M, O_M) und (N, O_N) zwei Hausdorffräume.

- (a) Zeigen Sie, dass in der Teilraumtopologie abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen auch kompakt sind.

Kompakte Menge: Jede offene Überdeckung besitzt endliche Teilüberdeckung. Überdeckung im Teilraum \rightarrow Überdeckung im Raum \rightarrow endliche Überdeckung im Raum \rightarrow Per Schnitt mit Menge: Endliche offene Überdeckung.

- (b) Gilt dies auch für beliebige offene Teilmengen?

- (c) Zeigen Sie, dass in der Teilraumtopologie Unterräume von M Hausdorffräume sind.

Aufgrund der Teilraumtopologie sind Unterräume U auch topologische Räume. Bleibt zu zeigen, dass in Unterräumen auch die Hausdorffeigenschaft erfüllt ist. Nehmen wir also zwei Punkte $x, y \in U$. Diese besitzen, da $U \subset M$ ein Hausdorffraum ist zwei offene Umgebungen $V_x, V_y \in O_M$, so dass gilt: $V_x \cap V_y = \emptyset$ (disjunkt). Nun definieren wir $U_x, U_y \subset U$ als $U_x = V_x \cap U$, also der Schnitt mit U . Diese sind in der Teilraumtopologie $U_x, U_y \in O_U = \{A \cap U \mid A \in O_M\}$, da $V_x, V_y \in O_M$. Außerdem sind sie disjunkt, da $U_x \cap U_y = V_x \cap U \cap V_y \cap U = V_x \cap V_y = \emptyset$ nach Voraussetzung. Damit sind diese Punkte durch disjunkte offene Umgebungen getrennt.

- (d) Sei $f : M \rightarrow N$ stetig und $K \subset M$ überdeckungskompakt. Dann ist $f(K) \subset N$ ebenfalls ü-kompakt.

Sei eine offene Überdeckung von $f(K)$ gegeben:

$$f(K) \subset \bigcup_{i \in I} A_i \subset N$$

Dann ist folgendes auch eine offene Überdeckung:

$$K \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i) \subset M$$

Dann existiert eine endliche Teilüberdeckung (K überdeckungskompakt)

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(A_i) \subset M$$

Das Bild davon ist dann eine endliche Teilüberdeckung von $f(K)$:

$$f(K) \subset \bigcup_{i=1}^n A_i \subset N$$

A.2 Einsteinsche Summenkonvention

- (a) Formulieren Sie mit der Summenkonvention die folgenden Begriffe der Linearen Algebra:

- (1) Standardskalarprodukt des \mathbb{R}^n

$$v \cdot w = v_i w^i = \sum_{i=1}^n v_i w^i$$

- (2) Matrix-Vektor-Produkt

$$b = Av \quad b^i = A^i_j v^j = \sum_{j=1}^n A^i_j v^j$$

(3) Matrizenmultiplikation

$$C = AB \quad C^i_k = A^i_j B^j_k = \sum_{j=1}^n A^i_j B^j_k$$

(4) Spur einer Matrix

$$\text{Tr}(A) = A^j_j = \sum_{j=1}^n A^j_j$$

(5) Transponieren einer Matrix

$$B = A^T \quad B^i_j = A^j_i$$

(b) Das Levi-Civita-Symbol

Wir nehmen an:

$$x = (x^1, x^2, x^3) \quad y = (y^1, y^2, y^3) \quad z = (z^1, z^2, z^3)$$

Behauptung: Es wird das Kreuzprodukt $z = x \times y$ berechnet.

Begründung: Komponentenweise nachrechnen:

$$\begin{aligned} z^1 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij}^1 x^i y^j \\ &= \sum_{i=1}^3 (\epsilon_{i2}^1 x^i y^2 + \epsilon_{i3}^1 x^i y^3) \\ &= \epsilon_{32}^1 x^3 y^2 + \epsilon_{23}^1 x^2 y^3 \\ &= x^2 y^3 - x^3 y^2 \end{aligned}$$

Analog für die anderen Komponenten (zyklische Vertauschung der Indizes)

$$z = (x^2 y^3 - x^3 y^2, x^3 y^1 - x^1 y^3, x^1 y^2 - x^2 y^1)$$

(c) Beweisen Sie für $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle f(t), g(t) \rangle &= \left\langle \frac{d}{dt} f(t), g(t) \right\rangle + \left\langle f(t), \frac{d}{dt} g(t) \right\rangle \\ \frac{d}{dt} \langle f(t), g(t) \rangle &= \frac{d}{dt} f^i(t) g^i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} f^i(t) g^i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{df^i(t)}{dt} g^i(t) + f^i(t) \frac{dg^i(t)}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{df^i(t)}{dt} g^i(t) + \sum_{i=1}^n \frac{dg^i(t)}{dt} f^i(t) \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} f(t), g(t) \right\rangle + \left\langle f(t), \frac{d}{dt} g(t) \right\rangle \end{aligned}$$

A.3 Einige Karten

- (a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene Menge in der Standardtopologie. Statten Sie nun U mit einer n -dimensionalen Karte aus.

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; x \mapsto x$$

Ist eine Karte von U .

- (b) Ist diese Konstruktion auch für beliebige abgeschlossene Mengen des \mathbb{R}^n möglich?

Nein wahrscheinlich nicht. Gegenbeispiel

- (c) Stereographische Projektion der S^n Karte. Weitere Karten für $2(n+1)$ Hemisphären $U_{i,\pm}$ für $i = 1, \dots, n+1$. Alle Hemisphären für Überdeckung? Kartenwechsel $\rightarrow \mathcal{C}^1$ -Atlas?