Name	Emailadresse	Matrikelnummer
Sascha Wache	sascha.wache@stud.uni-hannover.de	10012481
Lukas Hantzko	lukas.freddy@gmx.de	10011048
Lennart Binkowski	lennart.b@yahoo.com	10011560

1.1 Komplexe Zahlen

Es gilt, alle Lösungen der folgenden Gleichungen über $\mathbb{C}$ zu finden.

(a) $z^2 - 10z + 34 = 0$

Polynom zweiten Grades ermöglicht p-q-Formel:

$$z_{\pm} = 5 \pm \sqrt{25 - 34} = 5 \pm \mathrm{i}\sqrt{9} = 5 \pm \mathrm{i}3$$

(b) $z^3 - 3z\bar{z} = -2$

Bedingungen an Nullstellen: $z^3 \in \mathbb{R}$, da $-3z\bar{z} + 2 \in \mathbb{R}$
Andererseits für die Beträge ($z = re^{\mathrm{i}\varphi}$): $r^3 - 3r^2 + 2 = 0$. Dies ist ein (reelles) Polynom, und die Lösung $r = 1$ kann leicht überprüft werden.
Per Polynomdivision lässt sich ein Linearfaktor $r - 1$ abspalten: $r^3 - 3r^2 + 2 = (r - 1)(r^2 - 2r - 2)$.
Hier lassen sich die anderen Nullstellen per p-q-Formel bestimmen. $r = 1 \pm \sqrt{1 + 2} = 1 \pm \sqrt{3}$
Fall: $r = 1$, dann muss $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi} = 1$ sein, und es ergeben sich drei Nullstellen:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\frac{2\pi}{3}}$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\frac{2\pi}{3}} = 1$$

Fall: $r = (1 - \sqrt{3})$, dann muss $r^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi} - 3r^2 + 2 = 0$ sein, also:

$$\begin{aligned}(1 - 3\sqrt{3} + 9 - 3\sqrt{3})\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi} - 3 + 6\sqrt{3} - 9 + 2 &= 0\\ (10 - 6\sqrt{3})(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi} - 1) &= 0\end{aligned}$$

Dafür ergibt sich $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi} = 1$, also drei Nullstellen

$$(1 - \sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$$
$$(1 - \sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\frac{2\pi}{3}}$$
$$(1 - \sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\frac{2\pi}{3}}$$

Fall: $r = (1 + \sqrt{3})$, dann gilt:

$$\begin{aligned}(1 + 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3})\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi} - 3 - 6\sqrt{3} - 9 + 2 &= 0\\ (10 + 6\sqrt{3})(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi} - 1) &= 0\end{aligned}$$

Das ergibt analog:

$$(1 + \sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$$
$$(1 + \sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\frac{2\pi}{3}}$$
$$(1 + \sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\frac{2\pi}{3}}$$

Name	Emailadresse	Matrikelnummer
Sascha Wache	sascha.wache@stud.uni-hannover.de	10012481
Lukas Hantzko	lukas.freddy@gmx.de	10011048
Lennart Binkowski	lennart.b@yahoo.com	10011560

(c) $z^4 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$

Hier lässt sich auch wieder der Betrag und das Argument getrennt betrachten.

$$r^4 = \left|1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \quad 4\varphi = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3} \mod (2\pi)$$

Damit ergeben sich vier Lösungen:

$$\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{24}}$$
$$\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{8\pi}{24}}$$
$$\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{14\pi}{24}}$$
$$\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{20\pi}{24}}$$

1.2 Aufgabe 2

(a)

$f(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 2x + i(-y^3 + 3x^2y - 2y)$ ist komplex differenzierbar in $x + iy$ gdw. die Jacobi-Matrix
$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dx}x^3 - 3xy^2 - 2x & \frac{d}{dx} - y^3 + 3x^2y - 2y \\ \frac{d}{dy}x^3 - 3xy^2 - 2 & \frac{d}{dy} - y^3 + 3x^2y - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 - 2 & 6xy \\ -6xy & -3y^2 + 3x^2 - 2 \end{pmatrix}$$ schiefsymmetrisch
ist. Dies ist offensichtlich für alle $x + iy \in \mathbb{C}$ erfüllt.
Damit ist f auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

(b)

$g(x, y) = x^3 + xy^2 + i(y^3 + 3x^2y - 2y)$ ist komplex differenzierbar in $x + iy$ gdw. die Jacobi-Matrix
$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dx}x^3 + xy^2 & \frac{d}{dx} - y^3 + 3x^2y - 2y \\ \frac{d}{dy}x^3 + xy^2 & \frac{d}{dy} - y^3 + 3x^2y - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 & 6xy \\ 2xy & 3y^2 + 3x^2 - 2 \end{pmatrix}$$ schiefsymmetrisch ist.
Aus $-6xy = 2xy$ folgt $x = 0 \vee y = 0$.
Fall $x = 0$: $y^2 \overset{!}{=} 3y^2 - 2 \Rightarrow y = \pm 1$
Fall $y = 0$: $3x^2 \overset{!}{=} 3x^2 - 2$ Widerspruch!
g erfüllt also nur auf $\{\pm 1\}$ die CRD, g ist demnach nur auf $\emptyset$ komplex differenzierbar.

(c)

1.3 Komplexe Funktionen

(a) Realteil

$u(x, y) = -\frac{x^3}{3} + yx^2$ ist Realteil einer komplexen Funktion f.
$f(x, y) = u(x, y) + \mathrm{i}w(x, y)$ ist komplex differenzierbar in $x + \mathrm{i}y$ gdw. $\frac{d}{dx}u = \frac{d}{dy}w$ und $\frac{d}{dy}u = -\frac{d}{dx}w$
Aus $\frac{d}{dx}u = -x^2 + y^2$ folgt $w = \int \frac{d}{dx}u dy = -x^2y + y^3/3 + c(x)$, wobei c eine nur von x abhängige

Name	Emailadresse	Matrikelnummer
Sascha Wache	sascha.wache@stud.uni-hannover.de	10012481
Lukas Hantzko	lukas.freddy@gmx.de	10011048
Lennart Binkowski	lennart.b@yahoo.com	10011560

Funktion ist.

Andererseits muss auch gelten $w = -\int \frac{d}{dy} u dx = -\int 2xy dx = -x^2y + c(y)$, d.h. $c(y) = \frac{y^3}{3}$

Zusammengenommen ergibt sich: $w(x,y) = -x^2y + \frac{y^3}{3}$ bzw. $f(x,y) = -\frac{x^3}{3} + x^2y + \mathrm{i}(-x^2y + \frac{y^3}{3})$