

## 1.1 Komplexe Zahlen

Es gilt, alle Lösungen der folgenden Gleichungen über  $\mathbb{C}$  zu finden.

(a)  $z^2 - 10z + 34 = 0$

Polynom zweiten Grades ermöglicht p-q-Formel:

$$z_{\pm} = 5 \pm \sqrt{25 - 34} = 5 \pm i\sqrt{9} = 5 \pm i3$$

(b)  $z^3 - 3z\bar{z} = -2$

Bedingungen an Nullstellen:  $z^3 \in \mathbb{R}$ , da  $-3z\bar{z} + 2 \in \mathbb{R}$

Andererseits für die Beträge ( $z = re^{i\varphi}$ ):  $r^3 - 3r^2 + 2 = 0$ . Dies ist ein (reelles) Polynom, und die Lösung  $r = 1$  kann leicht überprüft werden.

Per Polynomdivision lässt sich ein Linearfaktor  $r - 1$  abspalten:  $r^3 - 3r^2 + 2 = (r - 1)(r^2 - 2r - 2)$ .

Hier lassen sich die anderen Nullstellen per p-q-Formel bestimmen.  $r = 1 \pm \sqrt{1 + 2} = 1 \pm \sqrt{3}$

Fall:  $r = 1$ , dann muss  $e^{i\varphi} = 1$  sein, und es ergeben sich drei Nullstellen:

$$\begin{aligned} e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ e^{i2\frac{2\pi}{3}} \\ e^{i3\frac{2\pi}{3}} = 1 \end{aligned}$$

Fall:  $r = (1 - \sqrt{3})$ , dann muss  $r^3 e^{i\varphi} - 3r^2 + 2 = 0$  sein, also:

$$\begin{aligned} (1 - 3\sqrt{3} + 9 - 3\sqrt{3})e^{i\varphi} - 3 + 6\sqrt{3} - 9 + 2 &= 0 \\ (10 - 6\sqrt{3})(e^{i\varphi} - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Dafür ergibt sich  $e^{i\varphi} = 1$ , also drei Nullstellen

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ (1 - \sqrt{3})e^{i2\frac{2\pi}{3}} \\ (1 - \sqrt{3})e^{i3\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

Fall:  $r = (1 + \sqrt{3})$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} (1 + 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3})e^{i\varphi} - 3 - 6\sqrt{3} - 9 + 2 &= 0 \\ (10 + 6\sqrt{3})(e^{i\varphi} - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Das ergibt analog:

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ (1 + \sqrt{3})e^{i2\frac{2\pi}{3}} \\ (1 + \sqrt{3})e^{i3\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

(c)  $z^4 = 1 - i\sqrt{3}$

Hier lässt sich auch wieder der Betrag und das Argument getrennt betrachten.

$$r^4 = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \quad 4\varphi = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} \mod (2\pi)$$

Damit ergeben sich vier Lösungen (:

$$\sqrt[4]{2}e^{-i\frac{2\pi}{24}}$$

$$\sqrt[4]{2}e^{-i\frac{8\pi}{24}}$$

$$\sqrt[4]{2}e^{-i\frac{14\pi}{24}}$$

$$\sqrt[4]{2}e^{-i\frac{20\pi}{24}}$$