1.1 $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$. σ Drehung $\mathbb{R}^2$ um $\phi = \frac{2\pi}{n}$. τ Spiegelung an y-Achse. $D_n = \langle \sigma, \tau \rangle$

Im folgenden wird $x \in \mathbb{R}^2$ angenommen.

(a) Es gilt $\operatorname{ord}(\sigma) = n$, $\operatorname{ord}(\tau) = 2$ und $\sigma\tau\sigma = \tau$.

$\operatorname{ord}(\sigma) = n$, da:

$$\sigma^i(x) = \begin{pmatrix} \cos(i \cdot \phi) & \sin(i \cdot \phi) \\ -\sin(i \cdot \phi) & \cos(i \cdot \phi) \end{pmatrix} \cdot x$$

Und damit:

$$\sigma^n(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = x \quad \sigma^n = \mathrm{id}$$

Für τ:

$$\tau(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot x \quad \tau^2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = x \quad \tau^2 = \mathrm{id}$$

Damit ist $\operatorname{ord}(\tau) = 2$.

$$\sigma\tau\sigma(x) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot x = \tau(x)$$

Es gilt also auch $\sigma\tau\sigma = \tau$

(b) Es gilt $D_n = \left\{ \tau^i \sigma^j \middle| i \in \{0, 1\}, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \right\}$.

Da D_n nach dem ersten Aufgabenteil abelsch ist, sind alle Elemente von der Form $D_n = \left\{ \tau^i \sigma^j \middle| i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N} \right\}$. Da die beiden erzeugenden Elemente eine Ordnung von n und 2 haben, ist

(c) D_n hat n Elemente und ist nicht kommutativ.

D_n ohne Spiegelung ist reguläres n-Eck. Spiegelungen an der y-Achse sind irrelevant.

1.2 K Körper und $f(x) \in K[x]$ irreduzibel. a Nullstelle von $f(x)$ in Erweiterungskörper von K.

(a) Beweisen Sie: Ist auch $f(a+1) = 0$, so gilt $\operatorname{char}(K) > 0$.

Es gilt:
Gelte nun weiter $\operatorname{char}(K) = p$ und $a^p - a \in K$.

(b) Beweisen Sie, dass $f(x) = x^p - x - (a^p - a)$ gilt.

(c) Beweisen Sie, dass die Erweiterung $K(a)/K$ galoissch ist.

(d) Beweisen Sie, dass $\operatorname{Aut}(K(a); K)$ zyklisch von Ordnung p ist.

1.3 $\mathbb{C}(x)$ rationale Funktionen über $\mathbb{C}$. In $\operatorname{Aut}(\mathbb{C}(x); \mathbb{C})$, betrachte σ, τ mit $\sigma(x) = -x$ und $\tau(x) = \mathrm{i}x^{-1}$. $G = \langle \sigma, \tau \rangle \subset \operatorname{Aut}(\mathbb{C}(x); \mathbb{C})$.

(a) Beweisen Sie, dass G endlich ist. Welche Ihnen bekannte Gruppe ist G?

(b) Beweisen Sie, dass $\operatorname{Fix}(\mathbb{C}(x); G)$ rationaler Fkt-Körper über $\mathbb{C}$; $\operatorname{Fix}(\mathbb{C}(x); G) = \mathbb{C}(y)$ mit $y \in \mathbb{C}(x)$. y angeben.