

Mannigfaltigkeiten - SoSe 2020

Übungsblatt A

Abgabe bis 29.04.2020, 12 Uhr

Aufgabe A.1: Topologische Grundlagen (3+1+2+4)

Seien (M, O_M) und (N, O_N) zwei Hausdorffräume.

- Zeigen Sie, dass in der Teilraumtopologie abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen auch kompakt sind.
- Gilt dies auch für beliebige offene Teilmengen?
- Zeigen Sie, dass in der Teilraumtopologie Unterräume von M Hausdorffräume sind.
- Sei $f : M \rightarrow N$ stetig und $K \subseteq M$ überdeckungskompakt. Dann ist $f(K) \subseteq N$ ebenfalls überdeckungskompakt.

Aufgabe A.2: Einsteinsche Summenkonvention ((1+1+1+1+1)+2+3)

Die Einsteinsche Summenkonvention ist eine nützliche Schreibweise, um in einigen Berechnungen die Übersicht zu behalten. Dabei fixiert man eine Zahl n , z.B. die Dimension eines Raumes, und summiert über doppelt auftretende Indizes, auch Dummy-Indizes genannt, die jeweils einmal als unterer Index und einmal als oberer Index auftreten. Außerdem fordert man, dass ein Index höchstens zweimal verwendet werden darf. Beispielsweise schreibt man

$$a_i x^i \text{ statt } \sum_{i=1}^n a_i x^i.$$

Ein Vektor $v \in V$ mit $n = \dim V$ wird bezüglich der Basis e_1, \dots, e_n als $v = (v^1, \dots, v^n)$ und ein dualer Vektor $\theta \in V^*$ würde $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ bezüglich der dualen Basis $\epsilon^1, \dots, \epsilon^n$ (d.h. $\epsilon^i(e_j) = \delta_j^i$) sein. Für $A \in \text{End}(V)$ bezeichnen wir die (i, j) -Komponente bezüglich der obigen Basis durch A^i_j .

- Formulieren Sie mit der Summenkonvention die folgenden Begriffe der Linearen Algebra:
 - Standardskalarprodukt des \mathbb{R}^n
 - Matrix-Vektor-Produkt
 - Matrizenmultiplikation
 - Spur einer Matrix
 - Transponieren einer Matrix
- Das Levi-Civita-Symbol für $n = 3$ ist definiert als

$$\epsilon_{ij}^k = \begin{cases} 1 & (ijk) \text{ ist eine gerade Permutation} \\ -1 & (ijk) \text{ ist eine ungerade Permutation} \\ 0 & (ijk) \text{ ist keine Permutation} \end{cases}$$

und seien $x, y \in \mathbb{R}^3$. Wir definieren die Komponenten von $z \in \mathbb{R}^3$ als $z^k = \epsilon_{ij}^{k} x^i y^j$. Begründen Sie was damit berechnet wird.

- (c) Beweisen Sie für $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, dass

$$\frac{d}{dt} \langle f(t), g(t) \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} f(t), g(t) \right\rangle + \left\langle f(t), \frac{d}{dt} g(t) \right\rangle.$$

Aufgabe A.3: *Einige Karten (3+1+6)*

Nun werden Sie einige weitere Beispiele von Karten kennenlernen.

- (a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene Menge in der Standardtopologie. Statten Sie nun U mit einer n -dimensionalen Karte aus.
- (b) Ist diese Konstruktion auch für beliebige abgeschlossene Mengen des \mathbb{R}^n möglich?
- (c) In der Vorlesung wurde bereits die stereographische Projektion der S^n als Karte eingeführt. In dieser Teilaufgabe müssen sie nun eine weitere Karte konstruieren. Statten Sie dazu die $2(n+1)$ Hemisphären

$$U_{i,\pm} := \{ (x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n \mid \pm x^i > 0 \}$$

für $i = 1, \dots, n+1$ mit geeigneten Karten aus. Braucht man alle $2(n+1)$ Mengen um S^n zu überdecken? Berechnen Sie auch die Kartenwechsel und bestimmen Sie, ob somit ein \mathcal{C}^1 -Atlas vorliegt.