Institut für Algebraische Geometrie
Sommersemester 2020
Prof. Dr. Matthias Schütt
Dr. Claudia Schoemann

Algebra II
Übungsblatt 3

Abgabe: 08.05.2020 bis 12:15 per email an
algebra2@math.uni-hannover.de

Aufgabe 3.1 (3+4+3 Punkte)
Jeder Gruppe G kann man nach dem Lemma 1.17 die abelsche Gruppe $G^{ab} := G/K(G)$ zuordnen, wobei $K(G) := [G, G]$ die Kommutatoruntergruppe von G ist.

(a) Beweisen Sie: Ist $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, so gibt es einen eindeutig bestimmten induzierten Gruppenhomomorphismus abelscher Gruppen $f^{ab} : G^{ab} \to H^{ab}$. (**Tipp:** Benutzen Sie das Lemma 1.23!)

(b) Beweisen Sie: Für den induzierten Gruppenhomomorphismus gilt:

(i) $(\mathrm{id}_G)^{ab} = \mathrm{id}_{G^{ab}}$.

(ii) $(g \circ f)^{ab} = g^{ab} \circ f^{ab}$ für zwei Gruppenhomomorphismen $f : G \to H$ und $g : H \to K$.

(c) Beweisen Sie: Ist der Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$ surjektiv, so ist auch der induzierte Gruppenhomomorphismus $f^{ab} : G^{ab} \to H^{ab}$ surjektiv.

Aufgabe 3.2 (5+5 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass die Gruppe S_4 auflösbar ist. (Tipp: Betrachten Sie eine Kette von Untergruppen, für die die Eigenschaften wie in Satz 1.22 erfüllt sind.)

(b) Sei K ein Körper und $B(3, K) \subset GL(3, K)$ die Gruppe der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen. Beweisen Sie, dass $B(3, K)$ auflösbar ist.

Aufgabe 3.3 (2+2+1+2+3 Punkte)
Sei $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ vom Grad n mit einfachen Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ im Zerfällungskörper E, Δ_f die Diskriminante von $f(x)$ und $\sqrt{\Delta_f} := \prod_{1\leq i<j\leq n} (\alpha_i - \alpha_j)$. Das Element $\sigma \in \mathrm{Gal}(f(x); \mathbb{Q})$ entspreche der Permutation $\pi_\sigma \in S_n$ der Indizes der Nullstellen, d.h. $\sigma(\alpha_i) = \alpha_{\pi_\sigma(i)}$ für alle i.

(a) Beweisen Sie: Es gilt $\sigma(\sqrt{\Delta_f}) = \mathrm{sign}(\pi_\sigma)\sqrt{\Delta_f}$.

Identifiziere nun $\mathrm{Gal}(f(x); \mathbb{Q})$ mit der entsprechenden Untergruppe von S_n.

(b) Beweisen Sie: Es gilt $\mathrm{Fix}(E, \mathrm{Gal}(f(x); \mathbb{Q}) \cap A_n) = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta_f})$.

(c) Folgern Sie aus (b): $\sqrt{\Delta_f} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \mathrm{Gal}(f(x); \mathbb{Q})$ ist Untergruppe von A_n.

(d) Beweisen Sie: Ist $f(x)$ irreduzibel und vom Grad 3, so ist $\mathrm{Gal}(f(x); \mathbb{Q}) \in \{\mathbb{Z}_3, S_3\}$ und $\mathrm{Gal}(f(x); \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_3 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta_f} \in \mathbb{Q}$.

(e) Bestimmen Sie $\mathrm{Gal}(f(x); \mathbb{Q})$ für

(i) $f(x) = x^3 - 3x + 1$. (ii) $f(x) = x^3 - 3x + 2$. (iii) $f(x) = x^3 + 6x + 2$.

Aufgabe 3.4 (10 Punkte)
Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggt}(n, \mathrm{char}(K)) = 1$ und w die Anzahl der n-ten Einheitswurzeln in K. Beweisen Sie: Für $f(x) = x^n - a \in K[x]$ gilt:

$$\mathrm{Gal}(f(x); K) \text{ ist abelsch} \Leftrightarrow \text{Es gibt ein } b \in K \text{ mit } b^n = a^w.$$