

## 1.1 Komplexe Zahlen

Es gilt, alle Lösungen der folgenden Gleichungen über  $\mathbb{C}$  zu finden.

(a)  $z^2 - 10z + 34 = 0$

Polynom zweiten Grades ermöglicht p-q-Formel:  $z_{\pm} = 5 \pm \sqrt{25 - 34} = 5 \pm i\sqrt{9} = 5 \pm i3$

(b)  $z^3 - 3z\bar{z} = -2$

Bedingungen an Nullstellen:  $z^3 \in \mathbb{R}$ , da  $-3z\bar{z} + 2 \in \mathbb{R}$

Andererseits für die Beträge ( $z = re^{i\varphi}$ ):  $r^3 - 3r^2 + 2 = 0$ . Dies ist ein (reelles) Polynom, und die Lösung  $r = 1$  kann leicht überprüft werden.

Per Polynomdivision lässt sich ein Linearfaktor  $r - 1$  abspalten:  $r^3 - 3r^2 + 2 = (r - 1)(r^2 - 2r - 2)$ .

Hier lassen sich die anderen Nullstellen per p-q-Formel bestimmen.  $r = 1 \pm \sqrt{1 + 2} = 1 \pm \sqrt{3}$

Fall:  $r = 1$ , dann muss  $e^{3i\varphi} = 1$  sein, und es ergeben sich drei Nullstellen:

$$\begin{aligned} e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ e^{i2\frac{2\pi}{3}} \\ e^{i3\frac{2\pi}{3}} = 1 \end{aligned}$$

Fall:  $r = (1 - \sqrt{3})$ , dann muss  $r^3 e^{3i\varphi} - 3r^2 + 2 = 0$  sein, also:

$$\begin{aligned} (1 - 3\sqrt{3} + 9 - 3\sqrt{3})e^{3i\varphi} - 3 + 6\sqrt{3} - 9 + 2 &= 0 \\ (10 - 6\sqrt{3})(e^{3i\varphi} - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Dafür ergibt sich  $e^{3i\varphi} = 1$ , also drei Nullstellen

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ (1 - \sqrt{3})e^{i2\frac{2\pi}{3}} \\ (1 - \sqrt{3})e^{i3\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

Fall:  $r = (1 + \sqrt{3})$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} (1 + 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3})e^{3i\varphi} - 3 - 6\sqrt{3} - 9 + 2 &= 0 \\ (10 + 6\sqrt{3})(e^{3i\varphi} - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Das ergibt analog:

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ (1 + \sqrt{3})e^{i2\frac{2\pi}{3}} \\ (1 + \sqrt{3})e^{i3\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

(c)  $z^4 = 1 - i\sqrt{3}$

Hier lassen sich auch wieder der Betrag und das Argument getrennt betrachten.

$$r^4 = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \quad 4\varphi = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} \mod (2\pi)$$

Damit ergeben sich vier Lösungen:

$$\sqrt[4]{2}e^{-i\frac{2\pi}{24}}, \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{8\pi}{24}}, \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{14\pi}{24}}, \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{20\pi}{24}}.$$

## 1.2 Aufgabe 2

(a)

$f(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 2x + i(-y^3 + 3x^2y - 2y)$  ist komplex differenzierbar in  $x + iy$  gdw. die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dx}x^3 - 3xy^2 - 2x & \frac{d}{dx}(-y^3 + 3x^2y - 2y) \\ \frac{d}{dy}x^3 - 3xy^2 - 2x & \frac{d}{dy}(-y^3 + 3x^2y - 2y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 - 2 & 6xy \\ -6xy & -3y^2 + 3x^2 - 2 \end{pmatrix}$$

schiefsymmetrisch ist. Dies ist offensichtlich für alle  $x + iy \in \mathbb{C}$  erfüllt.

Damit ist  $f$  auf ganz  $\mathbb{C}$  komplex differenzierbar.

(b)

$g(x, y) = x^3 + xy^2 + i(y^3 + 3x^2y - 2y)$  ist komplex differenzierbar in  $x + iy$  gdw. die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dx}x^3 + xy^2 & \frac{d}{dx}(y^3 + 3x^2y - 2y) \\ \frac{d}{dy}x^3 + xy^2 & \frac{d}{dy}(y^3 + 3x^2y - 2y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 & 6xy \\ 2xy & 3y^2 + 3x^2 - 2 \end{pmatrix}$$

schiefsymmetrisch ist.

Aus  $-6xy = 2xy$  folgt  $x = 0 \vee y = 0$ .

Fall  $x = 0$ :  $y^2 \stackrel{!}{=} 3y^2 - 2 \Rightarrow y = \pm 1$

Fall  $y = 0$ :  $3x^2 \stackrel{!}{=} 3x^2 - 2$  Widerspruch!

$g$  erfüllt also nur auf  $\{\pm 1\}$  die CRD. Da jedoch  $\{\pm 1\}$  nicht offen ist, ist die größte Menge auf der  $g$  komplex differenzierbar ist die leere Menge.

(c)

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \sin(x + y^2 - x^2 + i(y - 2xy)) \\ &= \frac{1}{2i}(e^{i(x+y^2-x^2)-y+2xy} - e^{i(-x-y^2+x^2)+y-2xy}) \\ &= \frac{-i}{2}(e^{-y+2xy}(\cos(x+y^2-x^2) + i\sin(x+y^2-x^2)) - e^{y-2xy}(\cos(-x-y^2+x^2) + i\sin(-x-y^2+x^2))) \\ &= \frac{1}{2}e^{-y+2xy}\sin(x+y^2-x^2) - \frac{1}{2}e^{y-2xy}\sin(-x-y^2+x^2) + \frac{i}{2}(-e^{-y+2xy}\cos(x+y^2-x^2) + e^{y-2xy}\cos(-x-y^2+x^2)) \end{aligned}$$

Jetzt noch die JM aufstellen.

### 1.3 Komplexe Funktionen

(a) Realteil

$u(x, y) = -\frac{x^3}{3} + yx^2$  ist Realteil einer komplexen Funktion  $f$ .

$f(x, y) = u(x, y) + iw(x, y)$  ist komplex differenzierbar in  $x + iy$  gdw.  $\frac{d}{dx}u = \frac{d}{dy}w$  und  $\frac{d}{dy}u = -\frac{d}{dx}w$

Aus  $\frac{d}{dx}u = -x^2 + y^2$  folgt  $w = \int \frac{d}{dx}u dy = -x^2y + y^3/3 + c(x)$ , wobei  $c$  eine nur von  $x$  abhängige Funktion ist.

Andererseits muss auch gelten  $w = -\int \frac{d}{dy}u dx = -\int 2xy dx = -x^2y + c(y)$ , d.h.  $c(y) = \frac{y^3}{3}$

Zusammengenommen ergibt sich:  $w(x, y) = -x^2y + \frac{y^3}{3}$  bzw.  $f(x, y) = -\frac{x^3}{3} + x^2y + i(-x^2y + \frac{y^3}{3} + c)$  mit  $c \in \mathbb{R}$

Die Funktion  $f$  ist dabei sogar auf ganz  $\mathbb{C}$  komplex differenzierbar. Gleichzeitig folgt aus der Konstruktion von  $f$ , dass jede auf ganz  $\mathbb{C}$  komplex differenzierbare Funktion, die  $u$  als Realteil besitzt von obiger Form sein muss, d.h.

$$\{f \text{ ganz mit } u \text{ als Realteil}\} = \left\{ x + iy \mapsto -\frac{x^3}{3} + x^2y + i(-x^2y + \frac{y^3}{3} + c) : c \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) Konstanter Betrag

Ist  $f$  die Nullfunktion auf  $\Omega$ , so sind sowohl  $|f|$  als auch  $f$  auf  $\Omega$  konstant. Sei also im Folgenden  $f$  nicht konstant null, dann gilt dies auch für  $|f|$ .

Sei  $|f| = |u + iv|$  konstant auf  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , dann ist auch  $|f|^2 = u^2 + v^2$  konstant auf  $\Omega$ . Ableiten nach  $x$  bzw.  $y$  liefert:

$$2uu_x + 2vv_x = 0 \Leftrightarrow uu_x + vv_x = 0$$

$$2uu_y + 2vv_y = 0 \Leftrightarrow uu_y + vv_y = 0.$$

Da  $f$  nach Voraussetzung komplex differenzierbar auf  $\Omega$  ist, gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$uv_y + vv_x = 0 \Rightarrow 0 = (uv_y + vv_x)^2 = (uv_y)^2 + (vv_x)^2 + 2uvv_xv_y$$

$$vv_y - uv_x = 0 \Rightarrow 0 = (vv_y - uv_x)^2 = (vv_y)^2 + (uv_x)^2 - 2uvv_xv_y.$$

Addition dieser beiden Gleichungen liefert schließlich:

$$\begin{aligned} 0 &= (uv_y)^2 + (vv_x)^2 + (vv_y)^2 + (uv_x)^2 = \underbrace{(u^2 + v^2)}_{=\text{const.} \neq 0} (v_x^2 + v_y^2) \\ &\Rightarrow v_x^2 + v_y^2 = 0 \Rightarrow v_x = v_y = 0 \end{aligned}$$

Die letzte Implikation gilt, da  $v$  eine reelle Funktion ist, Quadrate also stets nicht-negativ sind. Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erhält man nun, dass

$$0 = v_x = -u_y$$

$$0 = v_y = u_x$$

Also sind sowohl Real- als auch Imaginärteil der Funktion  $f$  weder von  $x$  noch von  $y$  abhängig und damit konstant, womit auch  $f$  insgesamt konstant auf ganz  $\Omega$  ist.

## 1.4 Komplexe Differenzierbarkeit

### (a) Differenzenquotient

Komplexe Funktionen werden im Folgenden mit Kleinbuchstaben, die dazu assoziierten Vektorfelder im  $\mathbb{R}^2$  hingegen mit Großbuchstaben gekennzeichnet. Der zu  $z \in \mathbb{C}$  assoziierte Vektor im  $\mathbb{R}^2$  wird dabei mit  $x$  bezeichnet.

Sei  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  das zu  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  assoziierte Vektorfeld und dessen Differential im Punkt  $x_0$   $\mathbb{C}$ -linear. Dann existiert also eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(h)\|}{\|h\|} = 0$$

für  $R(h) = F(x_0 + h) - F(x_0) - L(h)$ . Übersetzt in die komplexe Ebene bedeutet dies:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|r(h)|}{|h|} = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

für  $r(h) = f(z_0 + h) - f(z_0) - l(h)$ . Dann gilt aber

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h) + l(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} + \frac{l(h)}{h} = 0 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{l(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} l\left(\frac{h}{h}\right) = l(1).$$

Im letzten Schritt wurde dabei die  $\mathbb{C}$ -Linearität von  $L$  und damit auch von  $l$  ausgenutzt. Der Differenzenquotient existiert also in  $z_0$ . Da  $x_0$  bzw.  $z_0$  beliebig gewählt wurde, folgt dies für jedes  $z \in \Omega$ .

Sei nun in  $z_0$  der Differenzenquotient existent, d.h.

$$f'(z_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existiert. Dann gilt obige Gleichung jedoch auch betragsmäßig. Wähle nun  $l : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$   $\mathbb{C}$ -linear mit  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{l(h)}{h} = l(1) = f'(z_0)$ . Diese Eigenschaft gilt dann offensichtlich auch für das assoziierte Vektorfeld  $L$ . Ferner ist

$$\|F'(x_0)\| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(x_0 + h) - F(x_0)\|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(h) + L(h)\|}{\|h\|} \stackrel{(*)}{\leq} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(h)\|}{\|h\|} + \underbrace{\frac{\|L(h)\|}{\|h\|}}_{=\|F'(x_0)\|} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(h)\|}{\|0\|} = 0.$$

Dabei haben wir bei (\*) die Dreiecksungleichung für die Norm  $\|\cdot\|$  verwendet. Damit ist also das assoziierte Vektorfeld  $F$  im Punkt  $x_0$  total differenzierbar mit  $\mathbb{C}$ -linearem Differential. Wieder waren  $z_0$  bzw.  $x_0$  beliebig gewählt, sodass die Aussage für alle  $z \in \Omega$  folgt.

### (b) Komplexe Konjugation

Sei  $f(z) = \bar{z}$ . Angenommen der komplexe Differenzenquotient von  $f$  existiere für ein  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Dann müssen insbesondere die Grenzwerte für  $h \rightarrow 0$  mit  $h \in \mathbb{R}$  und  $\eta \rightarrow 0$  mit  $\eta \in i\mathbb{R}$  identisch sein. Wir überprüfen:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{z}_0 + h - \bar{z}_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \eta) - f(z_0)}{\eta} &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\bar{z}_0 - \eta - \bar{z}_0}{\eta} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{-\eta}{\eta} = -1 \end{aligned}$$

Wir erhalten also einen Widerspruch ( $1 \neq -1$ ) unabhängig vom gewählten  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Folglich kann  $f(z) = \bar{z}$  in keiner komplexen Zahl differenzierbar sein.