Prof. Dr. Lynn Heller,
MSc. Max Heydel, MSc. Alexander Müller

Funktionentheorie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Finden Sie für die folgenden Gleichungen über $\mathbb{C}$ alle existierenden Lösungen, wobei $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ und die in der Vorlesung eingeführten Rechenregeln für komplexe Zahlen gelten.

a) $z^2 - 10z + 34 = 0,$ (3 Punkte)
b) $z^3 - 3z\bar{z} = -2,$ (4 Punkte)
c) $z^4 = 1 - i\sqrt{3}$ (3 Punkte)

Hinweis: Scheuen Sie sich beim Raten der Nullstellen von Polynomen höheren Grades nicht, auch halbzahlige Nullstellen in Erwägung zu ziehen. Die in Vorlesung 1.3 eingeführten Polarkoordinaten $z = re^{i\phi}$ könnten ebenfalls hilfreich sein.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Überprüfen Sie, ob es eine offene Menge Ω in $\mathbb{C}$ gibt, sodass die folgenden Funktionen auf Ω komplex differenzierbar sind und geben sie in diesem Falle die größtmögliche Menge Ω mit dieser Eigenschaft an:
a) $f(x + iy) = (x^3 - 3xy^2 - 2x) + i(-y^3 + 3x^2y - 2y),$ (2 Punkte)
b) $g(x + iy) = (x^3 + xy^2) + i(y^3 + 3x^2y - 2y)$ (3 Punkte)
c) $h(x + iy) = \sin((x + y^2 - x^2) + i(y - 2xy))$ (5 Punkte)

Hinweis: Die komplexe Sinusfunktion ist definiert als $\sin(z) := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$. Nutzen Sie dies und die Euleridentität $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$, um die Funktion in c) in die Form $h = u + iv$ zu bringen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Gegeben sei die reelwertige Funktion

$$u(x, y) = -\frac{x^3}{3} + y^2x.$$

Überprüfen Sie, ob es sich bei u um den Realteil einer auf $\Omega \subset \mathbb{C}$ komplex differenzierbaren Funktion handeln kann, wobei Ω eine offene Teilmenge der komplexen Zahlen ist. Bestimmen Sie anschließend alle komplex differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{C}$, deren Realteil mit u übereinstimmt. (5 Punkte)

b) Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und f auf Ω komplex differenzierbar. Zeigen Sie: Ist $|f(z)|$ konstant in allen Punkten z in Ω, so ist auch f konstant. (5 Punkte)

Aufgabe 4 (10 Punkte)

In der Vorlesung wurde eingeführt, dass eine Funktion f: $\Omega \mapsto \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist, wenn das Differential des zu f assoziierten Vektorfeldes $F : \Omega \mapsto \mathbb{R}^2$ $\mathbb{C}$-linear ist. Beweisen Sie, dass dies genau dann der Fall ist, wenn der Grenzwert des komplexen Differenzenquotienten

$$f'(z) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existiert für jedes $z \in \Omega$. Zeigen Sie anschließend nur mithilfe dieser Definition, dass die Funktion $f(z) = \bar{z}$ in keiner komplexen Zahl z komplex differenzierbar ist.

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, was es bedeutet, dass ein Vektorfeld $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ total differenzierbar ist.

Allgemeine Hinweise

Startend vom 23.04.2020 wird jeden Donnerstag ein Übungsblatt hochgeladen, welches bis zum darauffolgenden Donnerstag zu bearbeiten ist. Laden Sie ihre Lösung bitte in einer PDF Datei über Stud.ip in den dafür vorgesehen Ordner hoch und geben Sie auf ihrer Abgabe bitte auch ihre Email Adresse an. Die Korrektur werden Sie dann auch per Email erhalten. Sie können ihre Lösungen gerne in Gruppen von bis zu drei Leuten abgeben. Der aktuelle Übungszettel ist bis zum 30.04.2020 abzugeben.