Institut für Differentialgeometrie
Balázs Márk Békési
Wajahat Rana

Mannigfaltigkeiten - SoSe 2020

Übungsblatt A

Abgabe bis 29.04.2020, 12 Uhr

Aufgabe A.1: *Topologische Grundlagen* (**3+1+2+4**)
Seien (M, O_M) und (N, O_N) zwei Hausdorffräume.

(a) Sei (K, O_K) ein kompakter topologischer Raum. Zeigen Sie, dass eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq K$ auch kompakt ist.

(b) Gilt dies auch für beliebige offene Teilmengen?

(c) Zeigen Sie, dass in der Teilraumtopologie Unterräume von M Hausdorffräume sind.

(d) Sei $f : M \to N$ stetig und $K \subseteq M$ überdeckungskompakt. Dann ist $f(K) \subseteq N$ ebenfalls überdeckungskompakt.

Aufgabe A.2: *Einsteinsche Summenkonvention* (**(1+1+1+1+1)+2+3**)
Die Einsteinsche Summenkonvention ist eine nützliche Schreibweise, um in einigen Berechnungen die Übersicht zu behalten. Dabei fixiert man eine Zahl n, z.B. die Dimension eines Raumes, und summiert über doppelt auftretende Indizes, auch Dummy-Indizes genannt, die jeweils einmal als unterer Index und einmal als oberer Index auftreten. Außerdem fordert man, dass ein Index höchstens zweimal verwendet werden darf. Beispielsweise schreibt man

$$a_i x^i \text{ statt } \sum_{i=1}^{n} a_i x^i.$$

Ein Vektor $v \in V$ mit $n = \dim V$ wird bezüglich der Basis $e_1, \ldots, e_n$ als $v = (v^1, \ldots, v^n)$ und ein dualer Vektor $\theta \in V^*$ würde $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ bezüglich der dualen Basis $\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n$ (d.h. $\epsilon^i(e_j) = \delta^i_j$) sein. Für $A \in End(V)$ bezeichnen wir die (i, j)-Komponente bezüglich der obigen Basis durch $A^i{}_j$.

(a) Formulieren Sie mit der Summenkonvention die folgenden Begriffe der Linearen Algebra:

(1) Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^n$
(2) Matrix-Vektor-Produkt
(3) Matrizenmultiplikation
(4) Spur einer Matrix
(5) Transponieren einer Matrix

(b) Das Levi-Civita-Symbol für $n = 3$ ist definiert als

$$\epsilon_{ij}{}^k = \begin{cases} 1 & (ijk) \text{ ist eine gerade Permutation} \\ -1 & (ijk) \text{ ist eine ungerade Permutation} \\ 0 & (ijk) \text{ ist keine Permutation} \end{cases}$$

und seien $x, y \in \mathbb{R}^3$. Wir definieren die Komponenten von $z \in \mathbb{R}^3$ als $z^k = \epsilon_{ij}{}^k x^i y^j$. Begründen Sie was damit berechnet wird.

(c) Beweisen Sie für $f, g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, dass

$$\frac{d}{dt}\langle f(t), g(t)\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} f(t), g(t) \right\rangle + \left\langle f(t), \frac{d}{dt} g(t) \right\rangle.$$

Aufgabe A.3: *Einige Karten* (**3+1+6**)
Nun werden Sie einige weitere Beispiele von Karten kennenlernen.

(a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene Menge in der Standardtopologie. Statten Sie nun U mit einer n-dimensionalen Karte aus.

(b) Ist diese Konstruktion auch für beliebige abgeschlossene Mengen des $\mathbb{R}^n$ möglich?

(c) In der Vorlesung wurde bereits die stereographische Projektion der S^n als Karte eingeführt. In dieser Teilaufgabe müssen sie nun eine weitere Karte konstruieren. Statten Sie dazu die $2(n+1)$ Hemisphären

$$U_{i,\pm} := \left\{ (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n \mid \pm x^i > 0 \right\}$$

für $i = 1, \ldots, n+1$ mit geeigneten Karten aus. Braucht man alle $2(n+1)$ Mengen um S^n zu überdecken? Berechnen Sie auch die Kartenwechsel und bestimmen Sie, ob somit ein $\mathscr{C}^1$-Atlas vorliegt.