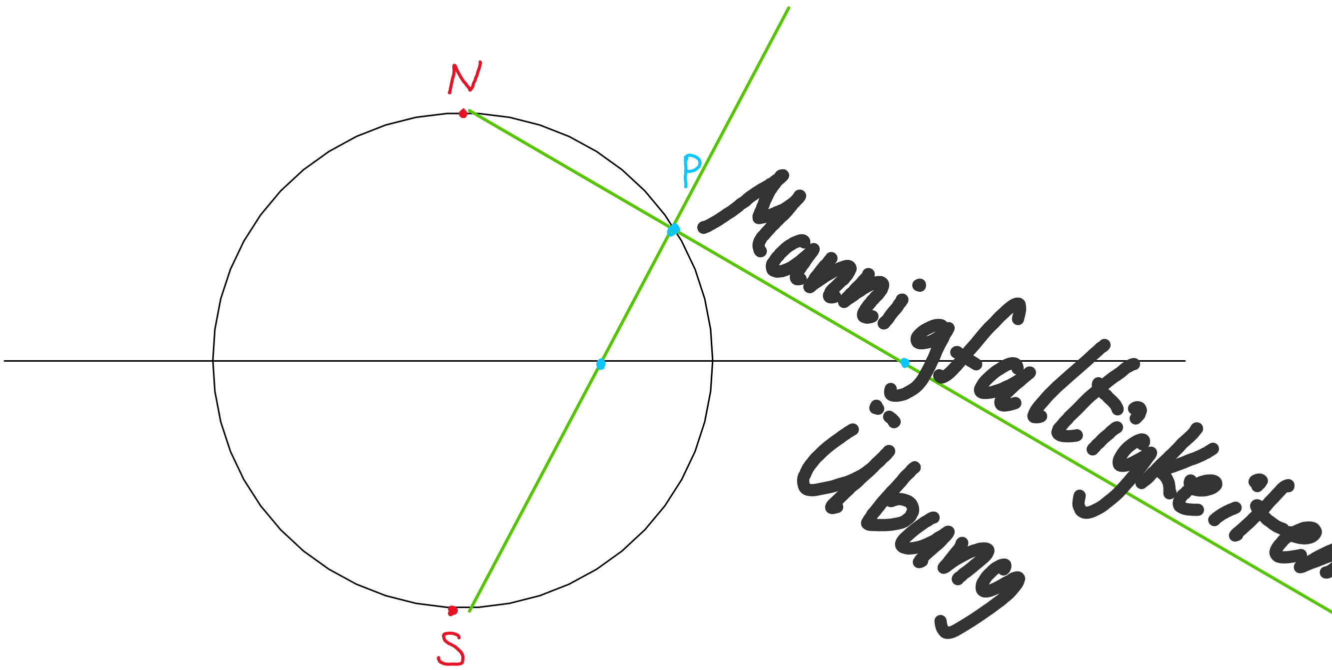


Mannigfaltigkeiten Übung

Corona Edition

Organisation

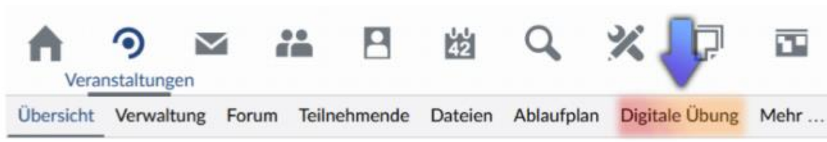
Leibniz Universität Hannover

Institut für Differentialgeometrie
Balázs Márk Békési
Wajahat Rana

Mannigfaltigkeiten - SoSe 2020

Informationszettel

- **Digitale Übung**
  Die Übung wird aufgrund der momentanen Umstände vorerst online stattfinden und dazu werden wir mittwochs von 12:15 bis 13:45 per BigBlueButton die Veranstaltung übertragen. Dabei müssen Sie, wie unten gekennzeichnet, auf Digitale Übung klicken.



  Wir haben uns für dieses Format entschieden, da Sie dadurch aktiv mitarbeiten können. Die Mitschriften aus der Übung werden voraussichtlich bei Stud.IP als PDF-Datei hochgeladen werden.

- **Hausaufgaben**
  Die wöchentlichen Hausaufgaben werden jeweils mit 30 Punkten gewichtet, wobei wir es uns vorbehalten, gegebenenfalls Bonusaufgaben zu stellen.
  Die Übungsblätter werden planmäßig mittwochs hochgeladen und Sie werden jeweils eine Woche Zeit zur Bearbeitung haben. Sie dürfen in Gruppen von maximal zwei Personen abgeben und falls Sie diese Möglichkeit wahrnehmen, kennzeichnen Sie dies auch. Das bedeutet, dass auch in der Datei selbst beide Namen bzw. Matrikelnummern auftreten müssen!
  Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt digital (eingescannt, getext, usw.) über Stud.IP in den jeweiligen Abgabeordner, der in der Übungsveranstaltung zu finden sein wird, **bis mittwochs 12:00**. Nutzen Sie dazu die Bezeichnung

  [Übungsblattbuchstabe]_[Person1]_[Person2].pdf

  für Ihre Abgaben. Beispielsweise würde Wajahat Rana seine bearbeiteten Hausaufgaben zum Übungsblatt C als C_WajahatRana.pdf bei Stud.IP unter Dateien/Abgaben/Blatt C/ hochladen.
  Die Rückgabe erfolgt per E-Mail/Stud.IP.
  Bitte achten Sie auch auf Leserlichkeit der eingescannten Übungen, da unleserliche Abgaben nicht korrigiert werden können!

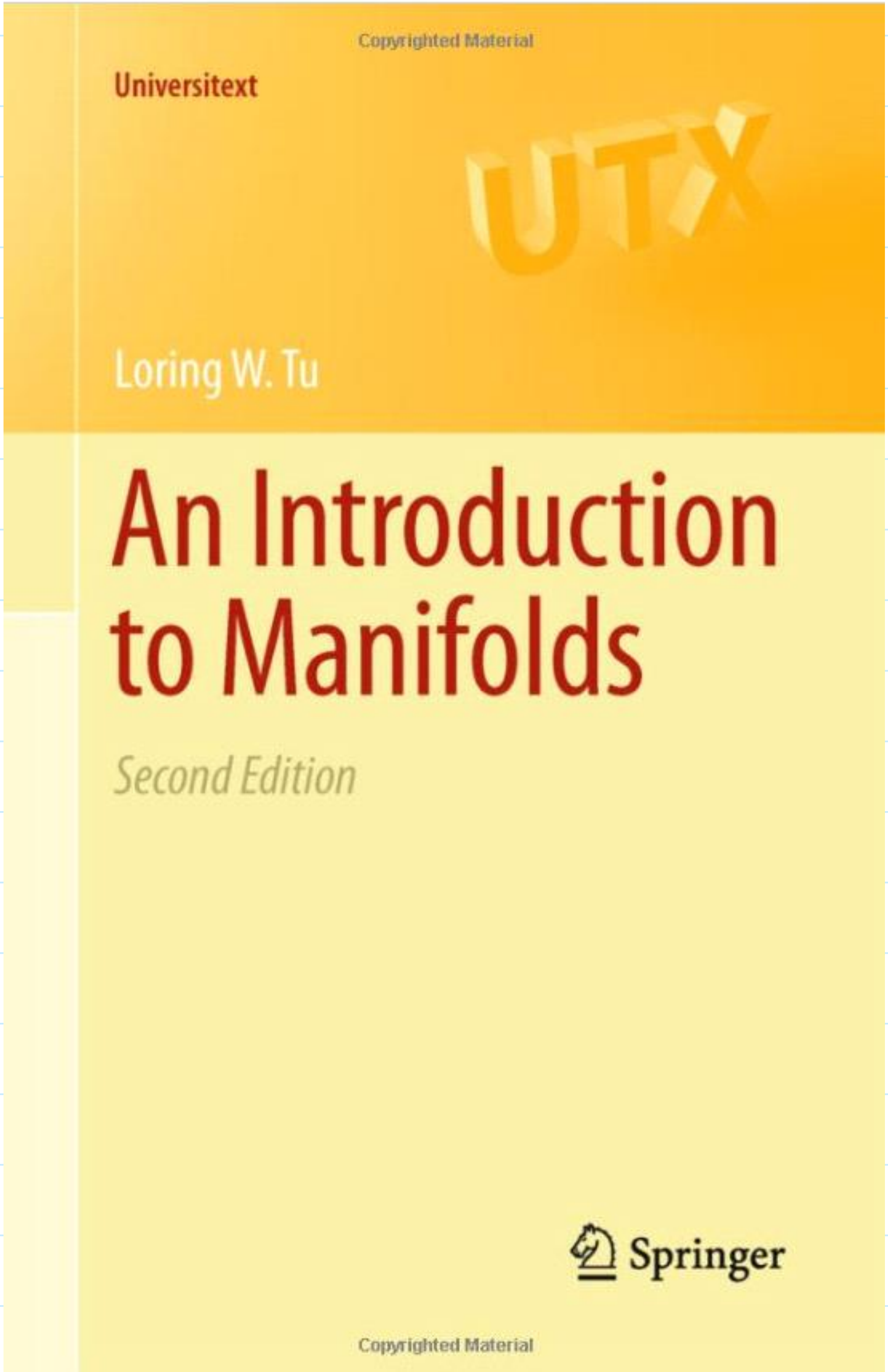
- **Studienleistung**
  Die Studienleistung wird für das Erreichen von 40% der Gesamtpunkte vergeben. Eventuelle Bonuspunkte sind natürlich aus der zum Bestehen nötigen Punktzahl ausgenommen.
  Außerdem behalten wir uns das Recht vor, eine Hausaufgabe durch eine LaTeX-dokumentierte Literaturrecherche zu ersetzen [1].

- **Sprechstunde**

Außerdem behalten wir uns das Recht vor, eine Hausaufgabe durch eine LaTeX-dokumentierte Literaturrecherche zu ersetzen [1].

- **Sprechstunde**
  Wir bieten keine festen Sprechzeiten an, Sie können uns jedoch stets per E-Mail oder über Stud.IP erreichen.

[1] dazu später mehr


Copyrighted Material
Universitext
UTX
Loring W. Tu
An Introduction to Manifolds
Second Edition
Springer
Copyrighted Material

Motivation

Reine Mathematik

- Mannigfaltigkeiten
  - Riemannsche Flächen
    - Funktionentheorie
  - Lie Gruppen und Algebren
    - Gruppentheorie
    - Darstellungstheorie
  - Remannsche Geometrie
    - Innenprodukt
  - Komplexe Geometrie
    - Algebraische Geometrie
  - Evolutionsgleichungen
    - PDE
  - Differentialtopologie
    - Algebraische Topologie

Angewandte Mathematik

- Mannigfaltigkeiten
  - 3D Visualisierung
    - Informatik
  - Kontrolltheorie
    - Optimierung
  - Informationsgeometrie
    - Stochastik

Physik

Yang

Klassische Mechanik

Yang Mills

Klassische Mechanik

Symplektische Geometrie

ART

Hauptfaser-bündel

Mannigfaltigkeiten

Pseudoriemannsche Geometrie

Differentialform

Elektrodynamik

Lie Gruppen

Calabi-Yau

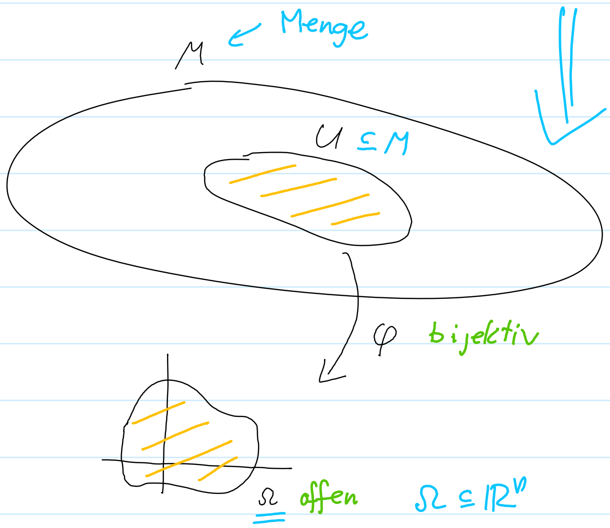
Symmetrien

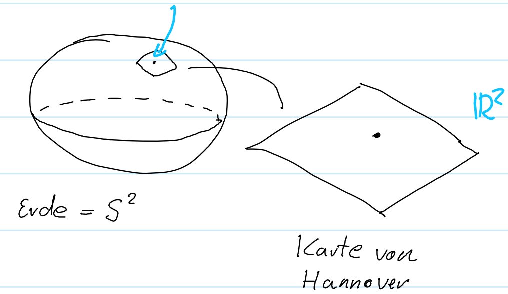
String Theorie

Wiederholung

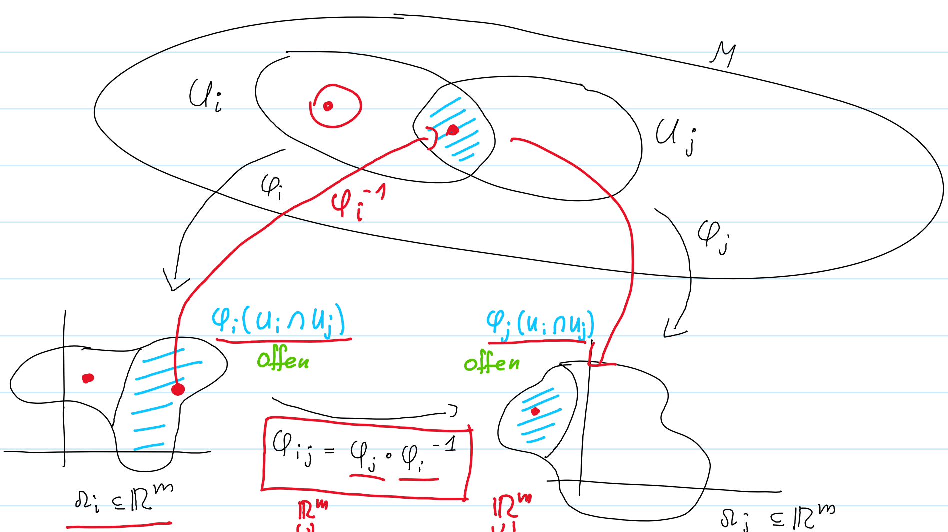
n-dim

Karten





Kartenwechsel und $\mathcal{C}^k$-verträglich



$\varphi_{ij} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$

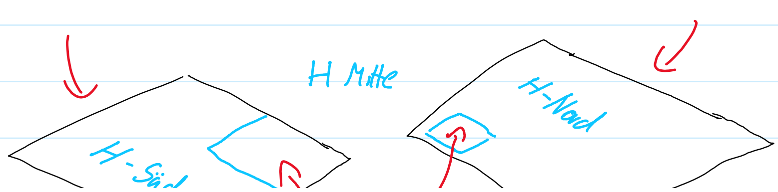
von der Klasse $\mathcal{C}^k$ und φ_{ji} auch!

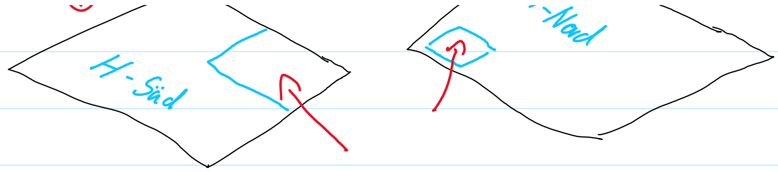
$\mathcal{C}^k$ k-mal stetig diffbar

$k = 0$ topologisch

$k = \infty$ glatt

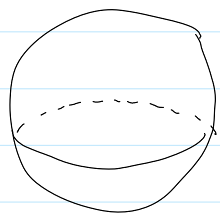
$k = \omega$ analytisch





Atlas:

S^2



Ganz S^2 sollte durch Karten bedeckt werden

+ C^k - verträglich

Material

Def: Topologischer Raum

M Menge, $\mathcal{O}_M \subseteq \mathcal{P}(M)$ (Potenzmenge). Dann ist $(M, \mathcal{O}_M)$ ein top. Raum falls

a) $\emptyset, M \in \mathcal{O}_M$

b) Sei $\{X_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{O}_M$ dann ist $\bigcup_{i\in I} X_i \in \mathcal{O}_M$ (beliebig I)

c) Für $X, Y \in \mathcal{O}_M$ folgt $X \cap Y \in \mathcal{O}_M$

Die Elemente von $\mathcal{O}_M$ heißen offene Mengen.

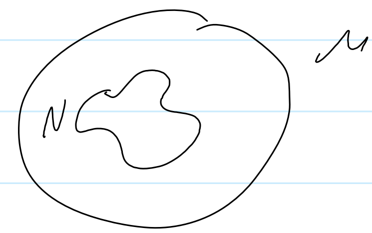
$A \subseteq M$ heißt abgeschlossen, falls $A^c = M \setminus A$ offen ist.

Bsp $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{O})$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}, \underbrace{d, \|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle}) $

Def: $(M, \mathcal{O}_M)$ top. Raum und $N \subseteq M$ Dann ist

$$\mathcal{O}_N := \{X \cap N \mid X \in \mathcal{O}_M\}$$



die Teilraumtopologie (induziert von $(M, \mathcal{O}_M)$ auf N)

$\emptyset \cap N = \emptyset$, $M \cap N = N$, $\mathcal{O}_M$

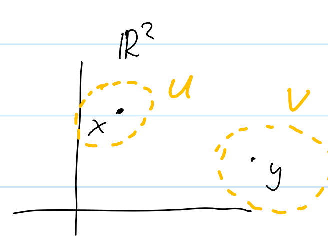
$\{Y_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{O}_N$, $Y_i = \underset{\mathcal{O}_M}{X_i} \cap N \implies \bigcup_{i\in I}(X_i \cap N) = \big(\underbrace{\bigcup_{i\in I} X_i}_{\in \mathcal{O}_M}\big) \cap N \in \mathcal{O}_N$

Schnitte analog

Def: Ein top. Raum $(M, \mathcal{O}_M)$ heißt Hausdorff / Hausdorffraum falls zu $x, y \in M$ beliebig und $x \neq y$ stets $U, V \in \mathcal{O}_M$ existieren mit:

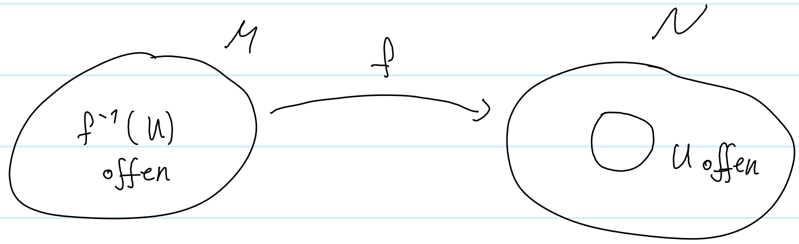
a) $x \in U$, $y \in V$

b) $U \cap V = \emptyset$, d.h. disjunkt

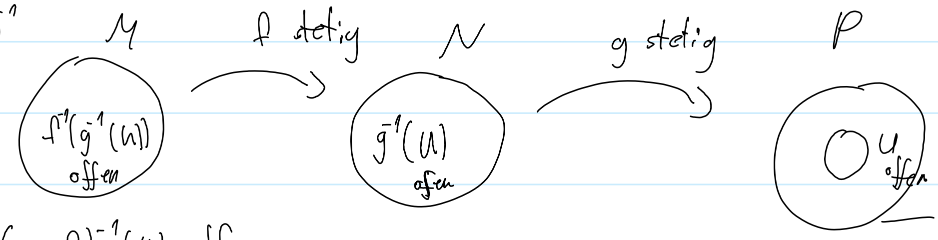


Def: Sei $(M, \mathcal{O}_M)$ ein Hausdorffraum. Dann ist $K \subseteq M$ **(überdeckungs) kompakt**, falls für jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung existiert.

Def: Seien $(M, \mathcal{O}_M)$, $(N, \mathcal{O}_N)$ top. Räume und $f: M \to N$ eine Abbildung. f heißt **stetig**, falls Urbilder offener Mengen offen sind, d.h. für $U \in \mathcal{O}_N$ offen ist $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_M$



$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$



$(g \circ f)^{-1}(U)$ offen

$\Rightarrow$ Verkettung stetiger Abbildungen sind auch stetig

Tipps

Leibniz Universität Hannover

Institut für Differentialgeometrie
Balázs Márk Békési
Wajahat Rana

Mannigfaltigkeiten - SoSe 2020

Übungsblatt A

Abgabe bis 29.04.2020, 12 Uhr

Aufgabe A.1: *Topologische Grundlagen* (**3+1+2+4**)
Seien (M, O_M) und (N, O_N) zwei Hausdorffräume.

(a) Zeigen Sie, dass in der Teilraumtopologie abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen auch kompakt sind.

(b) Gilt dies auch für beliebige offene Teilmengen?

(c) Zeigen Sie, dass in der Teilraumtopologie Unterräume von M Hausdorffräume sind.

(d) Sei $f : M \to N$ stetig und $K \subseteq M$ überdeckungskompakt. Dann ist $f(K) \subseteq N$ ebenfalls überdeckungskompakt.

Aufgabe A.2: *Einsteinsche Summenkonvention* (**(1+1+1+1+1)+2+3**)
Die Einsteinsche Summenkonvention ist eine nützliche Schreibweise, um in einigen Berechnungen die Übersicht zu behalten. Dabei fixiert man eine Zahl n, z.B. die Dimension eines Raumes, und summiert über doppelt auftretende Indizes, auch Dummy-Indizes genannt, die jeweils einmal als unterer Index und einmal als oberer Index auftreten. Außerdem fordert man, dass ein Index höchstens zweimal verwendet werden darf. Beispielsweise schreibt man

$$a_i x^i \text{ statt } \sum_{i=1}^{n} a_i x^i.$$

Ein Vektor $v \in V$ mit $n = \dim V$ wird bezüglich der Basis $e_1, \ldots, e_n$ als $v = (v^1, \ldots, v^n)$ und ein dualer Vektor $\theta \in V^*$ würde $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ bezüglich der dualen Basis $\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n$ (d.h. $\epsilon^i(e_j) = \delta^i_j$) sein. Für $A \in End(V)$ bezeichnen wir die (i,j)-Komponente bezüglich der obigen Basis durch $A^i{}_j$.

(a) Formulieren Sie mit der Summenkonvention die folgenden Begriffe der Linearen Algebra:

(1) Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^n$

(2) Matrix-Vektor-Produkt

(3) Matrizenmultiplikation

(4) Spur einer Matrix

(5) Transponieren einer Matrix

(b) Das Levi-Civita-Symbol für $n = 3$ ist definiert als

(5) Transponieren einer Matrix

(b) Das Levi-Civita-Symbol für $n = 3$ ist definiert als

$$\epsilon_{ij}{}^k = \begin{cases} 1 & (ijk) \text{ ist eine gerade Permutation} \\ -1 & (ijk) \text{ ist eine ungerade Permutation} \\ 0 & (ijk) \text{ ist keine Permutation} \end{cases}$$

1

und seien $x, y \in \mathbb{R}^3$. Wir definieren die Komponenten von $z \in \mathbb{R}^3$ als $z^k = \epsilon_{ij}{}^k x^i y^j$. Begründen Sie was damit berechnet wird.

(c) Beweisen Sie für $f, g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, dass $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und ist 1-mal stetig differenzierbar

$$\frac{d}{dt}\langle f(t), g(t)\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} f(t), g(t) \right\rangle + \left\langle f(t), \frac{d}{dt} g(t) \right\rangle.$$

Aufgabe A.3: *Einige Karten* **(3+1+6)**
Nun werden Sie einige weitere Beispiele von Karten kennenlernen.

(a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene Menge in der Standardtopologie. Statten Sie nun U mit einer n-dimensionalen Karte aus.

(b) Ist diese Konstruktion auch für beliebige abgeschlossene Mengen des $\mathbb{R}^n$ möglich?

(c) In der Vorlesung wurde bereits die stereographische Projektion der S^n als Karte eingeführt. In dieser Teilaufgabe müssen sie nun eine weitere Karte konstruieren. Statten Sie dazu die $2(n + 1)$ Hemisphären

$$U_{i,\pm} := \left\{ (x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n \mid \pm x^i > 0 \right\}$$

für $i = 1, \dots, n + 1$ mit geeigneten Karten aus. Braucht man alle $2(n + 1)$ Mengen um S^n zu überdecken? Berechnen Sie auch die Kartenwechsel und bestimmen Sie, ob somit ein $\mathscr{C}^1$-Atlas vorliegt.

2