Institut für Differentialgeometrie
Balázs Márk Békési
Wajahat Rana

Mannigfaltigkeiten - SoSe 2020

Übungsblatt B

Abgabe bis 06.05.2020, 12 Uhr

Aufgabe B.1: *Mannigfaltigkeiten?* (**5+1*+5**)

(a) Wir identifizieren die reelle Achse $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie jeweils mit $\mathbb{R} \times \{1\}$ und $\mathbb{R} \times \{-1\}$. Das heißt, dass wir zwei Kopien von $\mathbb{R}$ nehmen und sie formal unterscheiden. Danach führen wir auf $\mathbb{R} \times \{1\} \cup \mathbb{R} \times \{-1\}$ die Äquivalenzrelation

$$\begin{aligned}(x,1) \sim (y,1) &:\Leftrightarrow x = y,\\ (x,-1) \sim (y,-1) &:\Leftrightarrow x = y,\\ (x,1) \sim (y,-1) &:\Leftrightarrow x = y \neq 0\end{aligned}$$

ein. Nun betrachten wir $M := (\mathbb{R} \times \{1\} \cup \mathbb{R} \times \{-1\})/\sim$ mit der Quotiententopologie und die Abbildungen

$$\phi_i : U_i \to \mathbb{R}; [(x,i)] \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & sonst \end{cases},$$

wobei $U_i = [\mathbb{R} \times \{i\}]$ und $i = \pm 1$ sind. Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit?

(b) Finden Sie für M eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(c) Sei $M = \{\, (x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \,\} \cup \{\, (x, \alpha x^3) \mid x \in \mathbb{R}_{>0} \,\}$ mit $\alpha \neq 0$, sowie die Mengen

$$\begin{aligned}U &= \{\, (x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \,\},\\ V &= \{\, (x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}_{\leq 0} \,\} \cup \{\, (x, \alpha x^3) \mid x \in \mathbb{R}_{>0} \,\}\end{aligned}$$

mit den Abbildungen

$$\begin{aligned}\phi : U \to \mathbb{R}; &\quad (x,0) \mapsto x\\ \psi : V \to \mathbb{R}; &\quad (x,y) \mapsto \begin{cases} x & \text{für } y = 0 \\ x & \text{für } y = \alpha x^3 \end{cases}\end{aligned}$$

gegeben. Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit?

Aufgabe B.2: *Topologische Grundlagen II* (**4+1+1+4**)

(a) Seien M, N topologische Räume und $f : M \to N$ eine stetige, surjektive Abbildung. Falls M zusammenhängend ist, dann ist auch N zusammenhängend.

(b) Gilt die Umkehrung der obigen Aussage?

(c) Welche Aussage aus Analysis I wird durch a) verallgemeinert?

(d) Sei M wegzusammmenhängend. Zeigen Sie, dass M auch zusammenhängend ist.

(Hinweis zu a) und d)): indirekter Beweis!

Aufgabe B.3: *Karten der* $\mathbb{R}$ (**5+5**)

(a) Für welche $k \in \mathbb{Z}$ ist $(\mathbb{R}, x \mapsto x^k, \mathbb{R})$ ist ein 1-dimensionaler $\mathscr{C}^1$-Atlas für $\mathbb{R}$.

(b) Seien nun $(\mathbb{R}, x \mapsto x^{2n+1}, \mathbb{R})$,$(\mathbb{R}, x \mapsto x^{2m+1}, \mathbb{R})$ für $m \neq n$ und $n, m \in \mathbb{N}_0$. Welche von ihnen sind $\mathscr{C}^0$ - bzw. $\mathscr{C}^1$-äquivalent?