A.1 Topologische Grundlagen

Seien (M, O_M) und (N, O_N) zwei Hausdorffräume.

(a) Zeigen Sie, dass in der Teilraumtopologie abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen auch kompakt sind.

Kompakte Menge: Jede offene Überdeckung besitzt endliche Teilüberdeckung. Überdeckung im Teilraum → Überdeckung im Raum → endliche Überdeckung im Raum → Per Schnitt mit Menge: Endliche offene Überdeckung.

(b) Gilt dies auch für beliebige offene Teilmengen?

(c) Zeigen Sie, dass in der Teilraumtopologie Unterräume von M Hausdorffräume sind.

(d) Sei $f : M \to N$ stetig und $K \subset M$ überdeckungskompakt. Dann ist $f(K) \subset N$ ebenfalls ü-kompakt.

A.2 Einsteinsche Summenkonvention

(a) Formulieren Sie mit der Summenkonvention die folgenden Begriffe der Linearen Algebra:

(1) Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^n$

$$v \cdot w = v_i w^i = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

(2) Matrix-Vektor-Produkt

$$b = Av \quad b^i = A^i{}_j v^j = \sum_{j=1}^{n} A^i{}_j v^j$$

(3) Matrizenmultiplikation

$$C = AB \quad C^i{}_k = A^i{}_j B^j{}_k = \sum_{j=1}^{n} A^i{}_j B^j{}_k$$

(4) Spur einer Matrix

$$\mathrm{Tr}\,(A) = A^j{}_j = \sum_{j=1}^{n} A^j{}_j$$

(5) Transponieren einer Matrix

$$B = A^T \quad B^i{}_j = A^j{}_i$$

(b) Das Levi-Civita-Symbol

Wir nehmen an:

$$x = (x^1, x^2, x^3) \quad y = (y^1, y^2, y^3) \quad z = (z^1, z^2, z^3)$$

Behauptung: Es wird das Kreuzprodukt $z = x \times y$ berechnet.
Begründung: Komponentenweise nachrechnen:

$$\begin{aligned} z^1 &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \epsilon_{ij}{}^{1} x^i y^j \\ &= \sum_{i=1}^{3} \left(\epsilon_{i2}{}^{1} x^i y^2 + \epsilon_{i3}{}^{1} x^i y^3 \right) \\ &= \epsilon_{32}{}^{1} x^3 y^2 + \epsilon_{23}{}^{1} x^2 y^3 \\ &= x^2 y^3 - x^3 y^2 \end{aligned}$$

Analog für die anderen Komponenten (zyklische Vertauschung der Indizes)

$$z = (x^2 y^3 - x^3 y^2, x^3 y^1 - x^1 y^3, x^1 y^2 - x^2 y^1)$$

(c) Beweisen Sie für $f, g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle f(t), g(t) \rangle = \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t), g(t) \right\rangle + \left\langle f(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t) \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle f(t), g(t) \rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f^i(t) g^i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f^i(t) g^i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}f^i(t)}{\mathrm{d}t} g^i(t) + f^i(t) \frac{\mathrm{d}g^i(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}f^i(t)}{\mathrm{d}t} g^i(t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}g^i(t)}{\mathrm{d}t} f^i(t) \\ &= \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t), g(t) \right\rangle + \left\langle f(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t) \right\rangle \end{aligned}$$

A.3 Einige Karten

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene Menge in der Standardtopologie. Statten Sie nun U mit einer n-dimensionalen Karte aus.

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; x \mapsto x$$

Ist eine Karte von U.

(b) Ist diese Konstruktion auch für beliebige abgeschlossene Mengen des $\mathbb{R}^n$ möglich?

Nein wahrscheinlich nicht. Gegenbeispiel

(c) Stereographische Projektion der S^n Karte. Weitere Karten für $2(n+1)$ Hemisphären $U_{i,\pm}$ für $i = 1, \ldots, n+1$. Alle Hemisphären für Überdeckung? Kartenwechsel $\to$ $\mathscr{C}^1$-Atlas?