Prof. Dr. Lynn Heller,
MSc. Max Heydel, MSc. Alexander Müller

Funktionentheorie

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (10 Punkte)

In der Vorlesung wurde der komplex projektive Raum $\mathbb{C}\mathrm{P}1$ eingeführt als

$\mathbb{C}\mathrm{P}1 = (\mathbb{C}^2 \backslash (0,0))_{\sim}$

wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben ist durch

$(z_1, z_2) \sim (z_3, z_4) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{C} : (z_3, z_4) = (cz_1, cz_2).$

Mithilfe der beiden Karten

$\varphi_1 : \mathbb{C}\mathrm{P}1 \backslash [0:1] \mapsto \mathbb{C}, \quad [1:z] \mapsto z,$

$\varphi_2 : \mathbb{C}\mathrm{P}1 \backslash [1:0] \mapsto \mathbb{C}, \quad [z:1] \mapsto z$

lässt sich der komplex projektive Raum auf $\mathbb{C}$ abbilden. Nutzen Sie den durch φ_1 und φ_2 definierten Atlas und die stereographischen Projektionen bezüglich Nord- und Südpol, um zu zeigen, dass $\mathbb{C}\mathrm{P}1$ diffeomorph zu $\mathbb{S}^2$ (Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$) ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Es sei Φ eine Möbiustransformation, die nicht die Identitätsabbildung ist. Wie viele Fixpunkte, d.h. Punkte z mit $\Phi(z) = z$ kann Φ maximal besitzen ?
(2 Punkte)
b) Neben den in der Vorlesung definierten Möbiustransformationen lassen sich auch verallgemeinerte Möbiustransformationen betrachten. Diese sind ebenfalls Abbildungen

$$\Phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C},$$

jedoch lediglich mit der Forderung, dass $ad - bc \neq 0$.
Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi_{\xi,a}(z) := \xi \frac{z-a}{\bar{a}z-1}, \quad |\xi| = 1, \ |a| < 1$$

eine verallgemeinerte Möbiustransformation definiert und dass $\Phi_{\xi,a}$ die Einheitkreisscheibe

$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

in sich selbst abbildet. (8 Punkte)

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei f eine beliebige komplexwertige Funktion und $\gamma : [a,b] \mapsto \Omega \subset \mathbb{C}$ eine differenzierbare Kurve. Das Kurvenintegral von f über γ ist gegeben durch

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

a)Beweisen Sie die Ungleichung

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \max_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| \cdot L(\gamma)$$

mit der Länge der Kurve

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt. \quad \text{(4 Punkte)}$$

b) Nutzen Sie die Ungleichung in a), um zu zeigen, dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz = 0.$$

Hierbei ist γ_R eine Kurve, die den Kreis mit Radius R parametrisiert. (6 Punkte)

Hinweis: Die Abschätzung $\left|\int_a^b g(t)dt\right| \leq \int |g(t)|dt$ *ist für ein komplexwertiges g nicht trivial und muss erst gezeigt werden! Finden Sie in b) eine clevere Abschätzung von* $|z^2+1|$, *um das Maximum des Integranden zu bestimmen.*

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Betrachten Sie die beiden Funktionen $f(z) = z^2$ und $g(z) = \bar{z}$. Wir wollen die Punkte $z_1 = 0$ und $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ über zwei Wege miteinander verbinden: Einmal über die Gerade zwischen z_1 und z_2 und einmal wollen wir vom Punkt $z_1 = 0$ zum Punkt $P = 1$ gehen, um von dort dann entlang eines Kreisbogens am Einheitskreis zu z_2 zu gelangen. Finden Sie eine Parametrisierung für beide Wege γ_1, γ_2 und bestimmen Sie $\int_{\gamma_1} f dz, \int_{\gamma_2} f dz, \int_{\gamma_1} g dz, \int_{\gamma_2} g dz$. Was fällt auf und woran könnte es liegen ?

Allgemeine Hinweise

Startend vom 23.04.2020 wird jeden Donnerstag ein Übungsblatt hochgeladen, welches bis zum darauffolgenden Donnerstag zu bearbeiten ist. Laden Sie ihre Lösung bitte in einer PDF Datei über Stud.ip in den dafür vorgesehen Ordner hoch und geben Sie auf ihrer Abgabe bitte auch ihre Email Adresse an. Die Korrektur werden Sie dann auch per Email erhalten. Sie können ihre Lösungen gerne in Gruppen von bis zu drei Leuten abgeben. Der aktuelle Übungszettel ist bis zum 07.05.2020 abzugeben.