Aufgabe A.1 *Topologische Grundlagen*

Seien (M, O_M) und (N, O_N) zwei Hausdorffräume.

(a) Sei (K, O_K) ein kompakter Raum. Zeigen Sie, dass eine abgeschlossene Menge $A \subset K$ auch kompakt ist.

Sei eine beliebige offene Überdeckung $B_i \in O_K$, $i \in I$ von A gegeben. $A^C \in O_K$ Dann ist $C_i := A^C \cup B_i$ eine offene Überdeckung von K, nach Vorraussetzung ist K kompakt, also existiert eine endliche Teilüberdeckung ($I_n \subset I : |I_n| = n$):

$$K \subset \bigcup_{i \in I_n} C_i$$

$B_i = C_i \cap A$, $i \in I_n$ ist dann eine endliche Teilüberdeckung von B_i:

$$A \subset \bigcup_{i \in I_n} B_i$$

(b) Gilt dies auch für beliebige offene Teilmengen?

In $\mathbb{R}$ ist ein offenes Intervall nicht kompakt, zum Beispiel $(0, 1)$ ist eine offene Teilmenge einer kompakten Menge, zum Beispiel das Intervall $[0, 1]$, die mit der üblichen Topologie ein kompakter topologischer Raum ist. Im Beweis sind die C_i nicht notwendigerweise offen, weshalb nicht unbedingt eine endliche Teilüberdeckung existieren muss.

(c) Zeigen Sie, dass in der Teilraumtopologie Unterräume von M Hausdorffräume sind.

Aufgrund der Teilraumtopologie sind Unterräume U auch topologische Räume.
Bleibt zu zeigen, dass in Unterräumen auch die Hausdorffeigenschaft erfüllt ist. Nehmen wir also zwei Punkte $x, y \in U$. Diese besitzen, da $U \subset M$ ein Hausdorffraum ist zwei offene Umgebungen $V_x, V_y \in O_M$, so dass gilt: $V_x \cap V_y = \emptyset$ (disjunkt).
Nun definieren wir $U_x, U_y \subset U$ über $U_. = V_. \cap U$, also der Schnitt mit U. Diese sind in der Teilraumtopologie $U_x, U_y \in O_U = \{A \cap U | A \in O_M\}$, da $V_x, V_y \in O_M$. Außerdem sind sie disjunkt, da $U_x \cap U_y = V_x \cap U \cap V_y \cap U = V_x \cap V_y = \emptyset$ nach Vorraussetzung. Damit sind diese Punkte durch disjunkte offene Umgebungen getrennt.

(d) Sei $f : M \to N$ stetig und $K \subset M$ überdeckungskompakt (ük). Dann ist $f(K) \subset N$ ebenfalls ük.

Sei eine offene Überdeckung von $f(K)$ gegeben:

$$f(K) \subset \bigcup_{i \in I} A_i \subset N$$

Dann ist folgendes auch eine offene Überdeckung, da f stetig:

$$K \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i) \subset M$$

Dann existiert eine endliche Teilüberdeckung ($I_n \subset I : |I_n| = n$) (K überdeckungskompakt)

$$K \subset \bigcup_{I_n} f^{-1}(A_i) \subset M$$

Das Bild davon ist dann eine endliche Teilüberdeckung der ursprünglichen Überdeckung von $f(K)$:

$$f(K) \subset \bigcup_{I_n} A_i \subset N$$

Aufgabe A.2 *Einsteinsche Summenkonvention*

(a) Formulieren Sie mit der Summenkonvention die folgenden Begriffe der Linearen Algebra:

(1) Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^n$

$$v \cdot w = v_i w^i = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

(2) Matrix-Vektor-Produkt

$$b = Av \quad b^i = A^i{}_j v^j = \sum_{j=1}^{n} A^i{}_j v^j$$

(3) Matrizenmultiplikation

$$C = AB \quad C^i{}_k = A^i{}_j B^j{}_k = \sum_{j=1}^{n} A^i{}_j B^j{}_k$$

(4) Spur einer Matrix

$$\operatorname{Tr}(A) = A^j{}_j = \sum_{j=1}^{n} A^j{}_j$$

(5) Transponieren einer Matrix

$$B = A^T \quad B^i{}_j = A^j{}_i$$

(b) Das Levi-Civita-Symbol

Wir nehmen an:

$$x = (x^1, x^2, x^3) \quad y = (y^1, y^2, y^3) \quad z = (z^1, z^2, z^3)$$

Behauptung: Es wird das Kreuzprodukt $z = x \times y$ berechnet.
Begründung: Komponentenweise nachrechnen:

$$\begin{aligned} z^1 &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \epsilon_{ij}{}^1 x^i y^j \\ &= \sum_{i=1}^{3} \left(\epsilon_{i2}{}^1 x^i y^2 + \epsilon_{i3}{}^1 x^i y^3\right) \\ &= \epsilon_{32}{}^1 x^3 y^2 + \epsilon_{23}{}^1 x^2 y^3 \\ &= x^2 y^3 - x^3 y^2 \end{aligned}$$

Analog für die anderen Komponenten (zyklische Vertauschung der Indizes)

$$z = (x^2 y^3 - x^3 y^2, x^3 y^1 - x^1 y^3, x^1 y^2 - x^2 y^1)$$

(c) Beweisen Sie für $f, g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle f(t), g(t)\rangle = \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t), g(t)\right\rangle + \left\langle f(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t)\right\rangle$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle f(t), g(t)\rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f^i(t)\, g^i(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f^i(t)\, g^i(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}f^i(t)}{\mathrm{d}t} g^i(t) + f^i(t)\frac{\mathrm{d}g^i(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}f^i(t)}{\mathrm{d}t} g^i(t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}g^i(t)}{\mathrm{d}t} f^i(t) \\
&= \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t), g(t)\right\rangle + \left\langle f(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t)\right\rangle
\end{aligned}$$

Aufgabe A.3 *Einige Karten*

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene Menge in der Standardtopologie. Statten Sie nun U mit einer n-dimensionalen Karte aus.

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; x \mapsto x$$

Ist eine Karte von U, da Bild und Urbild U jeweils offen sind, und die Identität bijektiv ist.

(b) Ist diese Konstruktion auch für beliebige abgeschlossene Mengen des $\mathbb{R}^n$ möglich?

Nein, da die Abbildung dann nicht bijektiv von einer offenen Menge in eine offene Menge abbildet.

(c) Stereographische Projektion ist Karte der S^n. Weitere Karten für $2(n+1)$ Hemisphären $U_{i,\pm}$ für $i = 1, \ldots, n+1$. Braucht man alle Hemisphären für Überdeckung? Kartenwechsel $\to \mathscr{C}^1$-Atlas?

Für die Hemisphären $U_{1,\pm}$ gibt es zum Beispiel folgende Karte (Polarkoordinaten):

$$\phi_{1,\pm} : \bigtimes_{i=1}^{n} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \qquad \left(\phi^1, \ldots, \phi^n\right) \mapsto \left(\pm\cos\left(\phi^1\right), \ldots, \pm\sin\left(\phi^1\right)\ldots\sin\left(\phi^n\right)\right)$$

Für die $U_{i,\pm}$ ergibt sich dann die Karte aus der Abbildung f^i Verknüpft mit $\phi_{1,\pm}$, wobei:

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1} \qquad \left(x^1, \ldots, x^n\right) \mapsto \left(x^n, x^1, \ldots, x^{n-1}\right)$$