Name	Emailadresse	Matrikelnummer
Sascha Wache	sascha.wache@stud.uni-hannover.de	10012481
Lukas Hantzko	lukas.freddy@gmx.de	10011048
Lennart Binkowski	lennart.b@yahoo.com	10011560

1.1 Komplexe Zahlen

Es gilt, alle Lösungen der folgenden Gleichungen über $\mathbb{C}$ zu finden.

(a) $z^2 - 10z + 34 = 0$

Polynom zweiten Grades ermöglicht p-q-Formel:

$$z_\pm = 5 \pm \sqrt{25-34} = 5 \pm \mathrm{i}\sqrt{9} = 5 \pm \mathrm{i}3$$

(b) $z^3 - 3z\bar{z} = -2$

Bedingungen an Nullstellen: $z^3 \in \mathbb{R}$, da $-3z\bar{z} + 2 \in \mathbb{R}$
Andererseits für die Beträge ($z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$): $r^3 - 3r^2 + 2 = 0$. Dies ist ein (reelles) Polynom, und die Lösung $r = 1$ kann leicht überprüft werden.
Per Polynomdivision lässt sich ein Linearfaktor $r - 1$ abspalten: $r^3 - 3r^2 + 2 = (r-1)(r^2 - 2r - 2)$.
Hier lassen sich die anderen Nullstellen per p-q-Formel bestimmen. $r = 1 \pm \sqrt{1+2} = 1 \pm \sqrt{3}$
Fall: $r = 1$, dann muss $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi} = 1$ sein, und es ergeben sich drei Nullstellen:

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \\ &\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\frac{2\pi}{3}} \\ &\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\frac{2\pi}{3}} = 1 \end{aligned}$$

Fall: $r = (1-\sqrt{3})$, dann muss $r^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi} - 3r^2 + 2 = 0$ sein, also:

$$\begin{aligned} (1 - 3\sqrt{3} + 9 - 3\sqrt{3})\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi} - 3 + 6\sqrt{3} - 9 + 2 &= 0 \\ (10 - 6\sqrt{3})(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi} - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Dafür ergibt sich $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi} = 1$, also drei Nullstellen

$$\begin{aligned} &(1-\sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \\ &(1-\sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\frac{2\pi}{3}} \\ &(1-\sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

Fall: $r = (1+\sqrt{3})$, dann gilt:

$$\begin{aligned} (1 + 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3})\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi} - 3 - 6\sqrt{3} - 9 + 2 &= 0 \\ (10 + 6\sqrt{3})(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\varphi} - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Das ergibt analog:

$$\begin{aligned} &(1+\sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \\ &(1+\sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\frac{2\pi}{3}} \\ &(1+\sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

(c) $z^4 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$

Hier lässt sich auch wieder der Betrag und das Argument getrennt betrachten.

$$r^4 = \left|1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \quad 4\varphi = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3} \mod (2\pi)$$

Damit ergeben sich vier Lösungen:

$$\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{24}}$$
$$\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{8\pi}{24}}$$
$$\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{14\pi}{24}}$$
$$\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{20\pi}{24}}$$

1.2 Aufgabe 2

(a)

$f(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 2x + i(-y^3 + 3x^2y - 2y)$ ist komplex differenzierbar in $x + iy$ gdw. die Jacobi-Matrix $\begin{pmatrix} \frac{d}{dx}x^3 - 3xy^2 - 2x & \frac{d}{dx} - y^3 + 3x^2y - 2y \\ \frac{d}{dy}x^3 - 3xy^2 - 2 & \frac{d}{dy} - y^3 + 3x^2y - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 - 2 & 6xy \\ -6xy & -3y^2 + 3x^2 - 2 \end{pmatrix}$ schiefsymmetrisch ist. Dies ist offensichtlich für alle $x + iy \in \mathbb{C}$ erfüllt.
Damit ist f auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

(b)

$g(x,y) = x^3 + xy^2 + i(y^3 + 3x^2y - 2y)$ ist komplex differenzierbar in $x + iy$ gdw. die Jacobi-Matrix $\begin{pmatrix} \frac{d}{dx}x^3 + xy^2 & \frac{d}{dx} - y^3 + 3x^2y - 2y \\ \frac{d}{dy}x^3 + xy^2 & \frac{d}{dy} - y^3 + 3x^2y - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 & 6xy \\ 2xy & 3y^2 + 3x^2 - 2 \end{pmatrix}$ schiefsymmetrisch ist.
Aus $-6xy = 2xy$ folgt $x = 0 \vee y = 0$.
Fall $x = 0$: $y^2 \stackrel{!}{=} 3y^2 - 2 \Rightarrow y = \pm 1$
Fall $y = 0$: $3x^2 \stackrel{!}{=} 3x^2 - 2$ Widerspruch!
g erfüllt also nur auf $\{\pm 1\}$ die CRD, g ist demnach nur auf komplex differenzierbar.

(c)

$h(x,y) = sin(x + y^2 - x^2 + i(y - 2xy))$
$= \frac{1}{2i}(e^{i(x+y^2-x^2)-y+2xy} - e^{i(-x-y^2+x^2)+y-2xy})$
$= \frac{-i}{2}(e^{-y+2xy}(cos(x + y^2 - x^2) + isin(x + y^2 - x^2)) - e^{y-2xy}(cos(-x - y^2 + x^2) + isin(-x - y^2 + x^2)))$
$= \frac{1}{2}e^{-y+2xy}sin(x+y^2-x^2) - \frac{1}{2}e^{y-2xy}sin(-x-y^2+x^2) + \frac{i}{2}(-e^{-y+2xy}cos(x+y^2-x^2) + e^{y-2xy}cos(-x - y^2 + x^2)$
Jetzt noch die JM aufstellen.

1.3 Komplexe Funktionen

(a) Realteil

$u(x,y) = -\frac{x^3}{3} + yx^2$ ist Realteil einer komplexen Funktion f.
$f(x,y) = u(x,y) + \mathrm{i}w(x,y)$ ist komplex differenzierbar in $x + \mathrm{i}y$ gdw. $\frac{d}{dx}u = \frac{d}{dy}w$ und $\frac{d}{dy}u = -\frac{d}{dx}w$

Name	Emailadresse	Matrikelnummer
Sascha Wache	sascha.wache@stud.uni-hannover.de	10012481
Lukas Hantzko	lukas.freddy@gmx.de	10011048
Lennart Binkowski	lennart.b@yahoo.com	10011560

Aus $\frac{d}{dx}u = -x^2 + y^2$ folgt $w = \int \frac{d}{dx} u dy = -x^2 y + y^3/3 + c(x)$, wobei c eine nur von x abhängige Funktion ist.
Andererseits muss auch gelten $w = -\int \frac{d}{dy} u dx = -\int 2xy dx = -x^2 y + c(y)$, d.h. $c(y) = \frac{y^3}{3}$
Zusammengenommen ergibt sich: $w(x, y) = -x^2 y + \frac{y^3}{3}$ bzw. $f(x, y) = -\frac{x^3}{3} + x^2 y + \mathrm{i}(-x^2 y + \frac{y^3}{3} + c)$ mit $c \in \mathbb{R}$
Die Funktion f ist dabei sogar auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Gleichzeitig folgt aus der Konstruktion von f, dass jede auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbare Funktion, die u als Realteil besitzt von obiger Form sein muss, d.h.

$$\{f \text{ ganz mit } u \text{ als Realteil}\} = \left\{ x + \mathrm{i}y \mapsto -\frac{x^3}{3} + x^2 y + \mathrm{i}(-x^2 y + \frac{y^3}{3} + c) \,:\, c \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) Konstanter Betrag

Ist f die Nullfunktion auf Ω, so sind sowohl $|f|$ als auch f auf Ω konstant. Sei also im Folgenden f nicht konstant null, dann gilt dies auch für $|f|$.
Sei $|f| = |u + iv|$ konstant auf $\Omega \subset \mathbb{C}$, dann ist auch $|f|^2 = u^2 + v^2$ konstant auf Ω. Ableiten nach x bzw. y liefert:

$$\begin{aligned} 2uu_x + 2vv_x = 0 &\Leftrightarrow uu_x + vv_x = 0 \\ 2uu_y + 2vv_y = 0 &\Leftrightarrow uu_y + vv_y = 0. \end{aligned}$$

Da f nach Voraussetzung komplex differenzierbar auf Ω ist, gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} uv_y + vv_x = 0 &\Rightarrow 0 = (uv_y + vv_x)^2 = (uv_y)^2 + (vv_x)^2 + 2uvv_x v_y \\ vv_y - uv_x = 0 &\Rightarrow 0 = (vv_y - uv_x)^2 = (vv_y)^2 + (uv_y)^2 - 2uvv_x v_y. \end{aligned}$$

Addition dieser beiden Gleichungen liefert schließlich:

$$\begin{aligned} 0 &= (uv_y)^2 + (vv_x)^2 + (vv_y)^2 + (uv_y)^2 = \underbrace{(u^2 + v^2)}_{=\text{const.}\neq 0}(v_x^2 + v_y^2) \\ &\Rightarrow v_x^2 + v_y^2 = 0 \Rightarrow v_x = v_y = 0 \end{aligned}$$

Die letzte Implikation gilt, da v eine reelle Funktion ist, Quadrate also stets nicht-negativ sind. Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erhält man nun, dass

$$\begin{aligned} 0 &= v_x = -u_y \\ 0 &= v_y = u_x \end{aligned}$$

Also sind sowohl Real- als auch Imaginärteil der Funktion f weder von x noch von y abhängig und damit konstant, womit auch f insgesamt konstant auf ganz Ω ist.

1.4 Komplexe Differenzierbarkeit

(a) Differenzenquotient

Komplexe Funktionen werden im Folgenden mit Kleinbuchstaben, die dazu assoziierten Vektrofelder im $\mathbb{R}^2$ hingegen mit Großbuchstaben gekenntzeichnet. Der zu $z \in \mathbb{C}$ assoziierte Vektor im $\mathbb{R}^2$ wird dabei mit x bezeichnet.

Name	Emailadresse	Matrikelnummer
Sascha Wache	sascha.wache@stud.uni-hannover.de	10012481
Lukas Hantzko	lukas.freddy@gmx.de	10011048
Lennart Binkowski	lennart.b@yahoo.com	10011560

Sei $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ das zu $f : \Omega \to \mathbb{C}$ assoziierte Vektorfeld und dessen Differential im Punkt x_0 $\mathbb{C}$-linear. Dann existiert also eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\lim_{h\to 0} \frac{||R(h)||}{||h||} = 0$$

für $R(h) = F(x_0 + h) - F(x_0) - L(h)$. Übersetzt in die komplexe Ebene bedeutet dies:

$$\lim_{h\to 0} \frac{|r(h)|}{|h|} = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

für $r(h) = f(z_0 + h) - f(z_0) - l(h)$. Dann gilt aber

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{r(h) + l(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} + \frac{l(h)}{h} = 0 + \lim_{h\to 0} \frac{l(h)}{h} = \lim_{h\to 0} l\left(\frac{h}{h}\right) = l(1).$$

Im letzten Schritt wurde dabei die $\mathbb{C}$-Linearität von L und damit auch von l ausgenutzt. Der Differenzenquotient existiert also in z_0. Da x_0 bzw. z_0 beliebeig gewählt warne, folgt dies für jedes $z \in \Omega$.

Sei nun in z_0 der Differenzenquotient existent, d.h.

$$f'(z_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existiert. Dann gilt obige Gleichung jedoch auch betragsmäßig. Wähle nun $l : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear mit $\lim_{h\to 0} \frac{l(h)}{h} = l(1) = f'(z_0)$. Diese Eigenschaft gilt dann offensichtlich auch für das assoziierte Vektorfeld L. Ferner ist

$$||F'(x_0|| = \lim_{h\to 0} \frac{||F(x_0 + h) - F(x_0)||}{||h||} = \lim_{h\to 0} \frac{||R(h) + L(h)||}{||h||} \overset{*}{\leq} \lim_{h\to 0} \frac{||R(h)||}{||h||} + \underbrace{\frac{||L(h)||}{||h||}}_{=||F'(x_0)||} \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{||R(h)||}{||0||} = 0.$$

Dabei haben wir bei (*) die Dreiecksungleichung für die Norm $||.||$ verwendet. Damit ist also das assoziierte Vektorfeld F im Punkt x_0 total differenzierbar mit $\mathbb{C}$-linearem Differential. Wieder waren z_0 bzw. x_0 beliebieg gewählt, sodass die Aussage für alle $z \in \Omega$ folgt.

(b) Komplexe Konjugation

Sei $f(z) = \bar{z}$. Angenommen der komplexe Differenzenquotient von f existiere für ein $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann müssen insbesondere die Grenzwerte für $h \to 0$ mit $h \in \mathbb{R}$ und $\eta \to 0$ mit $\eta \in i\mathbb{R}$ identisch sein. Wir überprüfen:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{z_0} + h - \bar{z_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$
$$\lim_{\eta\to 0} \frac{f(z_0 + \eta) - f(z_0)}{\eta} = \lim_{\eta\to 0} \frac{\bar{z_0} - \eta - \bar{z_0}}{\eta} = \lim_{\eta\to 0} \frac{-\eta}{\eta} = -1$$

Wir erhalten also einen Widerspruch ($1 \neq -1$) unabhängig vom gewählten $z_0 \in \mathbb{C}$. Folglich kann $f(z) = \bar{z}$ in keiner komplexen Zahl differenzierbar sein.