2013-2014 学年第一学期《高等数学 AI》期末试卷（A）

授课班号________ 年级专业________ 学号________ 姓名________

题型	选择题	填空题	计算题	综合题	总 分	审 核
得分						

一、填空题(每小题 3 分，共 30 分)

得分	阅卷人

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} =$ <u>e^6</u>. $\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\frac{3x\cdot 2}{\sin x}}$

2. 设 $x\to 0$ 时，$f(x)=\ln(1+ax^2)$ 与 $g(x)=\sin^2 3x$ 是等价无穷小，则 $a=$ <u>9</u>. $\sim ax^2$ $\sim 9x^2$

3. 设 $y=\ln(f(\sin x))$，其中 $f(u)$ 为可导函数，且 $f(u)>0$，则 $y'(x)=$ <u>$f'(\sin x)\cos x$</u> $/ f(\sin x)$

4. 设 $y=\arctan e+\cos x-\sec x$，则 $y'=$ <u>$-\sin x-\sec x\tan x$</u>

5. 设曲线 $y=ax^3+bx^2$ 以点 $(1,3)$ 为拐点，则数组 $(a,b)=$ <u>$\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$</u> $y'=3ax^2+2bx$, $y''=6ax+2b \Rightarrow \begin{cases}6a+2b=0\\ a+b=3\end{cases}$

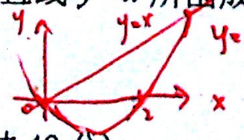
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-x}-3x}{1-\cos x}$ 的值等于 <u>3</u>. L'Hospital

7. 已知 $\dfrac{\cos x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f(x)\cdot\dfrac{\cos x}{x}\,dx=$ <u>$\frac{\cos^2 x}{2x^2}+C$</u> $f(x)=\left(\frac{\cos x}{x}\right)'$ $\int\frac{\cos x}{x}\,d\left(\frac{\cos x}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{x}\right)^2+C$

8. $\int_{-\pi}^{\pi}|\cos x|\sin^2 x\,dx=$ <u>$\frac{4}{3}$</u>. 原式 $=2\int_0^{\pi}|\cos x|\sin^2 x\,dx=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^2 x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\sin^2 x\,dx\right]$

9. 设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^{x^3}f(t)\,dt=x$，则 $f(8)=$ <u>$\frac{1}{12}$</u>. 求导：$f(x^3)\cdot 3x^2=1$ 令 $x=2$.

10. 抛物线 $y=x(x-2)$ 与直线 $y=x$ 所围成的平面图形的面积为 <u>$\frac{9}{2}$</u>.



交点 $\begin{cases}y=x\\ y=x(x-2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ y=3\end{cases}$

$A=\int_0^3[x-x(x-2)]\,dx$

二、计算题(每小题 7 分，共 42 分)

得分	阅卷人

1. 设 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^2}$.

(4')

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{1}{2}f'(0)=1$

(L'Hospital) (2') (1')

(注：无 $f'(x)$ 连续性，错解为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2}$)

2. 设 $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a(\cos t - \cos t + t\sin t)}{a(-\sin t + \sin t + t\cos t)} = \frac{at\sin t}{at\cos t} = \tan t \quad (3')$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{at\cos t} = \frac{\sec^3 t}{at} \quad (4')$$

3. 设 $y = \dfrac{4x^2-1}{x^2-1}$，求 $y^{(n)}$.

$$y = \frac{4(x^2-1)+3}{x^2-1} = 4 + \frac{3}{x^2-1} = 4 + \frac{3}{(x+1)(x-1)} = 4 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) \quad (2')$$

$$\therefore y^{(n)} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} \quad \text{n为小的估计} \quad (1')$$

$$= \frac{3}{2}\cdot(-1)^n\cdot n!\cdot\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right] \quad (4')$$

4. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{1+x^4}}\,dx$.

法：

$$\text{原式} = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx + \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^4}}\,dx \quad (1')$$

$$\text{其中} \int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}d(x^2)}{\sqrt{1+(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{1+x^4}) + C \quad (2')$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}} \overset{\text{令}x=\frac{1}{t}}{=\!=\!=} \int \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}}\,dt = \int \frac{-t}{\sqrt{t^4+1}}\,dt = \int \frac{-\frac{1}{2}d(t^2)}{\sqrt{(t^2)^2+1}}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(t^2+\sqrt{1+t^4}) + C = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\right) + C \quad (3')$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{1+x^4}) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\right) + C \quad (1')$$

法三：令 $x^2 = \tan t$ $\quad \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^2\sqrt{1+x^4}}\,d(x^2)$

$$\text{原式} = \frac{1}{2}\int \frac{\tan t+1}{\tan t\cdot\sec t}\cdot\sec^2 t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int(\sec t + \csc t)\,dt \quad (4')$$

$$= \frac{1}{2}(\ln|\sec t+\tan t| + \ln|\csc t-\cot t|) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(\sqrt{1+x^4}+x^2) + \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^4}-1}{x^2}\right)\right] + C \quad (3')$$

法二：① $x>0$ 时 $\text{原式} = \displaystyle\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+x^2}}\,dx \ (2') = \int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+2}} \ (3') = \ln\left|x-\frac{1}{x}+\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}\right| + C \ (2')$；② $x<0$ 时，令 $x=-t$ …

5. 计算 $\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$.

令 $\sqrt{x}=t$，原式 $=\int_0^1 \ln(1+t)\,d(t^2)$ （分部积分）

$=\left[t^2\ln(1+t)\right]_0^1-\int_0^1\frac{t^2}{1+t}\,dt$ （4′）

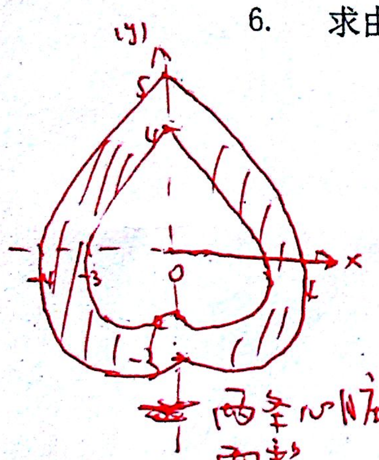
$=\ln 2-\int_0^1\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt$

$=\ln 2-\left[\frac{1}{2}t^2-t+\ln(1+t)\right]_0^1$

$=\ln 2-\left(-\frac{1}{2}+\ln 2\right)$

$=\frac{1}{2}$ （3′）

6. 求由不等式 $r\le 4+\sin\theta$ 和 $r\ge 3+\sin\theta$ 所确定的平面图形的面积.



$A=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(4+\sin\theta)^2\,d\theta-\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(3+\sin\theta)^2\,d\theta$ （4′）

$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{7}{2}+\sin\theta\right)d\theta=\left[\frac{7}{2}\theta-\cos\theta\right]_0^{2\pi}$

〈或几何意义 $\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta=0$

两条心脏线之间面积 $=7\pi$ （3′）

三、综合题(满分 28 分)

1. (9 分) 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2\ln x, & x>0\end{cases}$，试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，其导函数在 $x=0$ 处是否连续？

得分	阅卷人

1) $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2\ln x-0}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$ （2′）

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{0-0}{x}=0$ （1′） ∴ $f'(0)=0$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导. （1′）

2) $x<0$ 时，$f'(x)=0$，$x>0$ 时，$f'(x)=2x\ln x+x$ （2′）

$\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)=0=f'(0)$，$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(2x\ln x+x)=0=f'(0)$ （2′）

∴ $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续 （1′）

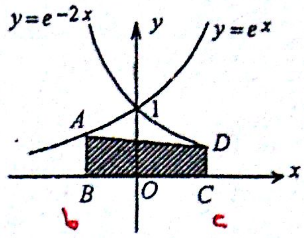
另解. 梯形面积 $g(c)=\frac{1}{2}(e^{-2c}+2e^{-2c})\cdot(c-b)=\frac{1}{2}\cdot 3e^{-2c}\cdot(3c-\ln 2)$

$g'(c)=0 \Rightarrow \frac{3}{2}e^{-2c}(3-6c+2\ln 2)=0 \Rightarrow c=\frac{2\ln 2+3}{6}$

2. (10 分) 如右图, A 和 D 分别是曲线 $y=e^x$ 和 $y=e^{-2x}$ 上的点, AB 和 DC 均垂直 x 轴, 且

$$|AB|:|DC|=2:1,\ |AB|<1,$$

求点 B 和 C 的横坐标, 使梯形 $ABCD$ 的面积最大.



设 B 和 C 横坐标分别为 b 和 c

由题: $\begin{cases} e^b=2e^{-2c} \\ e^b<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\ln 2-2c \\ b<0 \end{cases}$ (1′)

从而梯形面积为 $f(b)=\frac{1}{2}(e^b+\frac{1}{2}e^b)\cdot(c-b)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}e^b\cdot(\frac{\ln 2-b}{2}-b)$

$=\frac{3}{8}e^b(\ln 2-3b)$ (3′)

令 $f'(b)=\frac{3}{8}e^b(\ln 2-3b-3)=0$ (3′) 得 $b=\frac{\ln 2-3}{3}$

又

b	$(-\infty,\frac{\ln 2-3}{3})$	$\frac{\ln 2-3}{3}$	$(\frac{\ln 2-3}{3},0)$
$f'(b)$	+	0	−
$f(b)$	↗	极大值	↘

∴ $\begin{cases} b=\frac{\ln 2-3}{3} \\ c=\frac{2\ln 2+3}{6} \end{cases}$ (3′) 时, 梯形面积最大.

3. (9 分) 设函数 $f(x)$ 有一阶连续导数, 又 $a(a>0)$ 为函数

$$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f'(t)\,dt$$

的驻点. 试证: 在 $(0,a)$ 内至少有一点 c, 使 $f'(c)=0$.

$F(x)=x^2\int_0^x f'(t)\,dt-\int_0^x t^2f'(t)\,dt$

$F'(x)=2x\int_0^x f'(t)\,dt+x^2f'(x)-x^2f'(x)$

$=2x\int_0^x f'(t)\,dt=2x[f(t)]_0^x=2x[f(x)-f(0)]$

又 $F'(a)=0\ (a>0)$ ∴ $f(a)-f(0)=0$ (6′)

从而 $f(x)\in C[0,a]$, $f(x)\in D(0,a)$ 且 $f(0)=f(a)$

∴ 由 Rolle Th, $\exists\, c\in(0,a)$ s.t. $f'(c)=0$ (3′)