装 订 线

班内序号＿＿＿＿

学号＿＿＿＿

姓名＿＿＿＿

专业班级＿＿＿＿

装 订 线

西安邮电大学期中考试试题答案 (B 卷)
(2021—2022 学年第一学期)

课程名称：高等数学 A1　　考试专业、年级：通工、电子、计算机、自动化等专业 2021 级

考核方式：　闭卷　　　　可使用计算器：否

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
评卷人										

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、学号、班内序号填写清楚；
2. 答题时，必须用黑色字迹签字笔书写，字体工整、字迹清楚；
3. 作图时可先用铅笔画出，确定后再用黑色字迹的签字笔描黑；
4. 不许使用涂改液、修正带及刮纸刀，不许使用铅笔答卷.

得分＿＿＿一、填空题：每空 2 分，共 16 分.

1.函数 $y=\arccos\frac{x+1}{x-1}$ 的定义域为 $\underline{x\le 0}$.

2.当 $x\to 0$ 时，无穷小量 2^x-1 关于 x 的阶为$\underline{1}$阶.

3.函数 $y=\cos^2 2x$ 的微分 $\mathrm{d}y=\underline{-2\sin 4x\,\mathrm{d}x}$.

4.曲线 $y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$ 的渐近线为 $\underline{y=x-\frac{1}{3}}$.

5. 函数 $y=\sin|x|$ 在 $x=0$ 处的左导数为 $y'_-(0)=\underline{-1}$.

6.函数 $y=x\ln x$ 的最小值为 $\underline{-\frac{1}{\mathrm{e}}}$.

7. 抛物线 $x=4y-y^2$ 在其顶点处的曲率为$\underline{2}$.

8. 方程 $3^x=4x$ 恰有$\underline{2}$个实根.

得分＿＿＿二、选择题：每小题 3 分，共 18 分. 下列每小题给出的四个选项 A、B、C、D 中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前面的字母填在题中的括号内.

9. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义是函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的（　B　）条件。

A. 充分；　　B. 必要；　　C. 充要；　　D. 无关.

10. 设极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，则下列说法正确的是（　A　）

A. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]$ 不存在；　　B. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 不存在；

C. $\lim\limits_{x\to x_0} f\left[g(x)\right]$ 不存在；　　D. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\div g(x)\right]$ 不存在.

11. 下列函数在自变量的给定变化过程中为无穷大的是（　B　）

A. $x\mathrm{e}^x\ (x\to\infty)$；　B. $\ln x\ (x\to 0^+)$；　C. $\mathrm{e}^{\csc x}\ (x\to 0^-)$；　D. $\frac{1}{x}\sin x\ (x\to\infty)$.

12.设函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 1, \\ x-1, & x>1, \end{cases}$ 则下列结论正确的是（　B　）

A. $f'(1)=1$；　B. $f'_-(1)=1$；　C. $f'_+(1)=1$；　D. 以上说法均不正确.

13.设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 (a,b) 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点，则下列结论正确的是（　A　）

A. $f'(x)$ 在 $x=a$ 处取得极值；　　B. $f'(x)$ 在 $x=a$ 处不取得极值；

C. $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得极值；　　D. 以上说法均不正确.

14. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶、二阶及三阶导数，且 $f'(0)=f''(0)=0$，$f^{(3)}(0)=-1$，则下列结论正确的是（　B　）

A. $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极大值；　　B. $(0, f(0))$ 一定是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

C. $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极小值；　　D. $(0, f(0))$ 不一定是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

专业班级________　姓名________　学号________

得分______三、解答题：共 60 分．解答应写出文字说明及演算步骤．请将答案写在试题预留的空白处．

得分______13. （6 分）设函数 $f(x)=\begin{cases} axe^x+1, & x<0, \\ a+2b, & x=0, \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，求常数 a .

解　由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $f(0)=\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x+1)=1$. 又

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{axe^x+1-1}{x}=a\,,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x+1-1}{x}=1,$$

所以 $a=1$.

得分______14. （6 分）求函数 $f(x)=\dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x^2-x}$ 的间断点，并指出其类型.

解　函数 $f(x)$ 的间断点为 $x_1=0$，$x_2=1$.

由 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x-1}=0$，知 $x=0$ 为第一类间断点.

由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{\sin\left(x^2\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{0}{\sin1}=0$，知 $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\infty$，所以 $x=1$ 为第二类间断点.

得分______15. （6 分）计算 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$.

解

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{x-e^x+1}{x\left(e^x-1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x-e^x+1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(-\frac{e^x}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

得分______16. （6 分）设 $\begin{cases} x=t^3-3t+1 \\ y=t^2+2t+3 \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解

$$x'(t)=3t^2-3,\quad y'(t)=2t+2.$$

所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{2t+2}{3t^2-3}=\frac{2}{3(t-1)}\quad(t\neq1).$$

再求导，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left[\frac{2}{3(t-1)}\right]'\cdot\frac{1}{3t^2-3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{-1}{(t-1)^2}\cdot\frac{1}{3t^2-3}=-\frac{2}{9(t+1)(t-1)^3}\quad(t\neq\pm1).$$

得分______17. （6 分）设 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 求 $f''(0)$.

解　当 $x\neq0$ 时，$f'(x)=\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$. 又

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{u\to\infty}\frac{u}{e^{u^2}}=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{2ue^{u^2}}=0\,.$$

所以

$$f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{2}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}}=2\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{e^t}=2\lim_{t\to+\infty}\frac{2t}{e^t}=2\lim_{t\to+\infty}\frac{2}{e^t}=0\,.$$

得分______18. （6 分）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 确定，求 y'.

解　方程两端对 x 求导，得

$$\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{xy'-y}{x^2}=\frac{x+yy'}{x^2+y^2}.$$

解得

$$y'=\frac{x+y}{x-y}(x\neq0,\ x\neq y).$$

专业班级＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿

得分＿＿＿＿19. （6 分）计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+2^x}+x\sin\dfrac{1}{2|x|}\right)$.

解 由

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+2^x}+x\sin\frac{1}{2|x|}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+2^x}+\lim_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{2|x|}=0+\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{2x}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+2^x}+x\sin\frac{1}{2|x|}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+2^x}+\lim_{x\to-\infty}x\sin\frac{1}{2|x|}=1+\lim_{x\to-\infty}x\cdot\frac{1}{(-2x)}=\frac{1}{2},$$

知

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+2^x}+x\sin\frac{1}{2|x|}\right)=\frac{1}{2}.$$

得分＿＿＿＿20. （8 分）设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}x\left(1-\dfrac{1}{t}\right)^{2xt}$，求

（1）函数 $f(x)$ 的单调区间；（2）曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间；（3）曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

解 $f(x)=x\mathrm{e}^{-2x}$，$f'(x)=(1-2x)\mathrm{e}^{-2x}$，驻点为 $x=\dfrac{1}{2}$.

由表

x	$(-\infty,1/2)$	$(1/2,+\infty)$
$f'(x)$	+	–

知函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1/2]$ 上单调递增，在区间 $[1/2,+\infty)$ 上单调递减.

再求导，得 $f''(x)=4(x-1)\mathrm{e}^{2x}$. 令 $f''(x)=0$，解得 $x=1$. 由表

x	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	–	+

曲线 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,1]$ 上是凸的，在区间 $[1,+\infty)$ 上是凹的.

当 $x=1$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{-2}$，所以曲线 $y=f(x)$ 的拐点为 $(1,\ \mathrm{e}^{-2})$.

得分＿＿＿＿21. （10 分）在曲线 $x=y^2\,(0<y<6)$ 上求一点，使得曲线在该点的切线与直线 $x=0$ 及 $y=6$ 所围成的三角形的面积最大.

解 设所求点为 $(t^2,\ t)$，则切线方程为 $x-t^2=2t(y-t)$.

令 $x=0$，解得 $y=\dfrac{t}{2}$；令 $y=6$，解得 $y=12t-t^2$.

所以三角形的面积为 $s=\dfrac{1}{4}t(12-t)^2\ \ (0<t<6)$.

求导，得 $s'=\dfrac{3}{4}(12-t)(4-t)\ (0<t<6)$.

令 $s'=0$，解得驻点为 $t=4$.

由表

t	$(0,4)$	$(4,6)$
s'	+	–

知函数 s 在区间 $(0,4]$ 上单调递增，在区间 $[4,6)$ 上单调递减，从而在点 $t=4$ 处取得最大值.故所求点为 $(16,\ 4)$.

得分＿＿＿＿**四、证明题**

22. （6 分）设函数 $f(x)$ 满足：（1）$f(x)$ 在区间 $[x_0,\ x_0+\delta)$ 上连续；（2）$f(x)$ 在区间 $(x_0,\ x_0+\delta)$ 内可导；（3）极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=l$.求证： $f'_+(x_0)=l$.

证 由条件（1）知

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0).$$

由右导数的定义及洛必达法则，得

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}f'(x)=l.$$