

西安邮电大学期末考试试题 (A 卷)

(2020—2021 学年第一学期)

课程名称: 高等数学 A1

考试专业、年级: 通院、电院、自动化院、计算机院及网安院各专业与物理、信管及商务等专业等

考核方式: 闭卷

可使用计算器: 否

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
评卷人										

注意事项: 1. 答题必须使用黑色字迹签字笔书写, 不许用铅笔答卷; 2. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

得分: _____ 一、选择题 (每小题 2 分, 共 6 分): 每小题只有一个正确选项, 请将所选项前面的字母填在题中的括号内。

1. 考察函数:

① e^{-x^2} ; ② e^{-x} ; ③ e^{x^2} ; ④ $\arctan x^2$; ⑤ $\arctan x$,当 $x \rightarrow \infty$ 时, 上述五个函数中, 极限存在的函数是 ()

A. ③④⑤; B. ②④; C. ①②④; D. ①④.

2. 下列函数在自变量的给定变化过程中不是无穷小的是 ()

A. $\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}$ ($x \rightarrow \infty$); B. $1-2^{-x}$ ($x \rightarrow 0$); C. $e^{\frac{1}{x}}$ ($x \rightarrow 0^+$); D. $\frac{\sin x}{x}$ ($x \rightarrow \infty$).

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} ae^{2x}, & x \geq 0, \\ (1-2x)^{\frac{1}{2}}, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a =$ ().

A. e^{-2} ; B. e ; C. 1; D. e^{-1} .

得分: _____ 二、填空题 (每空 2 分, 共 10 分)

1. 曲线 $y = 1 - 2x^2$ 上点 $(0, 1)$ 处的曲率为 _____.2. 设 $y = \int_0^x xe^t dt$, 则 $y'' =$ _____.3. 设 $y = f(\tan x)$, 其中 $y = f(u)$ 可微, 则 $dy =$ _____.4. 已知 $y_1 = e^{-x}$ 和 $y_2 = e^{2x}$ 是二阶常系数齐次线性微分方程的两个解, 则该微分方程是 _____.5. 微分方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^x$ 的一个特解可设为 _____ (不求待定常数).

得分: _____ 三、计算下列各题 (每小题 4 分, 共 16 分)

得分: _____ 1. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+3n+1} - \sqrt{n^2-2n-2})$.得分: _____ 2. 已知 $y = |x+1|^x$ ($x \neq -1$), 计算 y' .得分: _____ 3. 设 $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = \arcsin(3t) \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.得分: _____ 4. 求 $\int \frac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{2}} x} dx$.

扫描全能王 创建



扫描全能王 创建

A3

得分: _____ 四、解答下列各题 (每小题 5 分, 共 20 分)

得分: _____ 1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)e^{\cos x}}{\sqrt{1+x^3} - 1}$.得分: _____ 2. 求 $\int_{-1}^1 \frac{2x^2 + x \cos x}{1+x^2} dx$.得分: _____ 3. 判别反常积分 $\int_1^{+\infty} (x-1)e^{-x} dx$ 的收敛性, 如果收敛, 求出其值.得分: _____ 4. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$.

填空题、图解及特殊要求外, 一般不留答题空间。2. 装订试卷、考生答卷时不得拆开或在框外留有任何标记。



扫描全能王 创建

A4

得分: _____ 五、解答下列各题 (每小题 6 分, 共 18 分)

得分: _____ 1. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 e^x , 求 $\int x f'(x) dx$.得分: _____ 2. 设 $e^x + e^y = xy + e + 1$, 求 $y'|_{x=0}$.得分: _____ 3. 证明: $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$, 由此计算 $\int_0^1 x(1-x)^7 dx$.

扫描全能王 创建

A5

得分: _____ 六、解答下列各题 (共 13 分)

得分: _____ 1. (7 分) 求函数 $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ 的单调区间与极值.得分: _____ 2. (6 分) 求曲线 $y = \int_0^{2x} \ln \sqrt{1+t^2} dt$ 的凹凸区间与拐点.

除填空题、图解及特殊要求外, 一般不留答题空间. 在框外留有任何标记, 否则按零分计.



扫描全能王 创建

(附卷纸 1 页)

A6

得分: _____ 七、解答下列各题 (共 17 分)

得分: _____ 1. (9 分) 设曲线 $y = 1 - x^2$ 与其在点 $(1, 0)$ 处的切线和 y 轴所围成的平面图形为 D .(1) 求平面图形 D 的面积 S ;(2) 求 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 V .得分: _____ 2. (8 分) 已知可导函数 $f(x)$ 满足方程 $f(x) \cos x + 2 \int_0^x f(t) \sin t dt = x + 1$, 求 $f(x)$.

扫描全能王 创建

课程: 高等数学 A1 类型: A 卷

专业、年级: 通院、电院、自动化院、计算机院及网安院各专业与物理、信管及商务等专业

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分	6	10	16	20	18	13	17			100

一、选择题 (每小题 2 分, 共 6 分): 1.D; 2.C; 3.A.

二、填空题 (每空 2 分, 共 10 分):

1. 4; 2. $2(1+x^2)e^{x^2}$; 3. $f'(\tan x)\sec^2 x dx$; 4. $y'' - y' - 2y = 0$; 5. $y'' = (b_0x + b_1)e^x$.

三、计算下列各题 (每小题 4 分, 共 16 分):

1. 解: 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+3}{\sqrt{n^2+3n+1} + \sqrt{n^2-2n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}} \quad (3 \text{ 分}) = \frac{5}{2}.$ (4 分)

2. 解: 取对数, 得 $\ln y = x \ln |x+1|$, 两端求导, 得 $\frac{y'}{y} = \ln |x+1| + \frac{x}{1+x}$ (3 分), 解得

$$y' = |x+1|^x \left(\ln |x+1| + \frac{x}{1+x} \right) \quad (4 \text{ 分})$$

3. 解: 由 $x'(t) = 3t^2 + 3$, $y'(t) = \frac{3}{\sqrt{1-9t^2}}$ (2 分), 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1}{(t^2+1)\sqrt{1-9t^2}}.$$

4. 解: $\int \frac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{2}} x} dx = -\int (\cos x)^{-\frac{1}{2}} d \cos x \quad (2 \text{ 分}) = \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C.$

四、解答下列各题 (每小题 5 分, 共 20 分):

1. 解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)e^{\cos x}}{\frac{1}{2}x^3} = 2e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (2 \text{ 分}) = 2e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = 2e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{e}{3}.$ (5 分)

2. 解: $\int_{-1}^1 \frac{2x^2 + x \cos x}{1+x^2} dx = 4 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \quad (2 \text{ 分}) = 4 \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = 4[x - \arctan x]_0^1 = 4 - \pi.$ (5 分)

3. 解: 由于 $\int_1^{+\infty} (x-1)e^{-x} dx = -\int_1^{+\infty} (x-1)de^{-x} = [-(x-1)e^{-x}]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_1^{+\infty} = \frac{1}{e}$ (4 分), 所以积分收敛, 且其值为 $\frac{1}{e}$. (5 分)

4. 解: 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right)' = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ (2 分), 由导数的定义,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

综上所述, $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ (5 分)

五、解答下列各题 (每小题 6 分, 共 18 分):

1. 解: 由已知可得 $f(x) = (e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$ (2 分), 于是

$$\int xf'(x) dx = \int x df(x) = xf(x) - \int f(x) dx = 2x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + C = (2x^2 - 1)e^{x^2} + C. \quad (6 \text{ 分})$$

2. 解: 将 $x=0$ 代入所给方程, 得 $y=1$ (1 分). 方程两端对 x 求导, 得

$$e^x + e^y \cdot y' = y + xy' \quad (1)$$

将 $x=0, y=1$ 代入式 (1), 得 $y'(0)=0$ (4 分). 式 (1) 两端再对 x 求导, 得

$$e^x + e^y \cdot (y')^2 + e^y \cdot y'' = 2y' + xy'' \quad (2)$$

将 $x=0, y=1$ 及 $y'(0)=0$ 代入式 (2), 解得 $y''(0) = -\frac{1}{e}$, 即 $y''|_{x=0} = -\frac{1}{e}$. (6 分)

3. 证明: 作变换 $x=1-t$, 则 $dx=-dt$, 于是

$$\int_0^1 x^n (1-x)^n dx = -\int_1^0 (1-t)^n t^n (-dt) = \int_0^1 t^n (1-t)^n dt = \int_0^1 x^n (1-x)^n dx.$$

利用上述结论, 得

$$\int_0^1 x(1-x)^7 dx = \int_0^1 x^7 (1-x) dx = \int_0^1 (x^7 - x^8) dx = \left[\frac{1}{8} x^8 - \frac{1}{9} x^9 \right]_0^1 = \frac{1}{72}.$$

六、解答下列各题 (共 13 分)

1(7 分). 函数在其定义域 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ 内连续. 求导, 得

$$y' = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} \quad (x \neq 1).$$

令 $y'=0$, 解得驻点为 $x=0$ 及 $x=3$ (3 分). 列表分析如下:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	+	-	0	+

由此表知, 函数在区间 $(-\infty, 1)$ 内及 $[3, +\infty)$ 上单调递增, 在区间 $(1, 3]$ 上单调递减. 函数在 $x=3$ 处取得极

小值 $f(3) = \frac{27}{4}$, 且没有其它极值.

2(6 分). 解: 函数在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内连续. 求导, 得

$$y' = 2 \ln \sqrt{1+4x^2}, \quad y'' = \frac{8x}{1+4x^2}.$$

令 $y''=0$, 解得 $x=0$ (2 分). 列表分析如下:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y''	-	0	+

由此表知, 曲线在区间 $(-\infty, 0]$ 上是凸的; 在区间 $[0, +\infty)$ 上是凹的. 注意 $x=0$ 时, $y=0$, 所以曲线的拐点为 $(0, 0)$.

七、解答下列各题 (共 17 分)

1(9 分). 解: 曲线 $y=1-x^2$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程为

$$y-0 = -2(x-1), \text{ 即 } y = -2(x-1).$$

题中平面图形如图.

$$(1) \quad S = \int_0^1 [-2x+2-(1-x^2)] dx = \int_0^1 (x^2-2x+1) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 + x \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$\text{或} \quad S = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 - \int_0^1 (1-x^2) dx = 1 - \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$(2) \quad V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 1 - \int_0^1 \pi (1-x^2)^2 dx = \frac{4}{3} \pi - \pi \int_0^1 (1-2x^2+x^4) dx \\ = \frac{4}{3} \pi - \pi \left[x - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{4}{5} \pi.$$

$$\text{或} \quad V = \int_0^1 \pi [-2(x-1)]^2 dx - \int_0^1 \pi (1-x^2)^2 dx = 4\pi \int_0^1 (x-1)^2 dx - \pi \int_0^1 (1-2x^2+x^4) dx \\ = \frac{4}{3} \pi - \pi \left[x - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{4}{5} \pi.$$

2(8 分). 解: 方程两边求导, 得 $f'(x) \cos x - f(x) \sin x + 2f(x) \sin x = 1$, 整理得

$$f'(x) \cos x + f(x) \sin x = 1, \text{ 即 } f'(x) + f(x) \tan x = \sec x$$

可见 $f(x)$ 满足一阶线性微分方程 $y' + \tan x \cdot y = \sec x$ (4 分). 由求解公式, 得

$$f(x) = e^{-\int \tan x dx} \left(\int \sec x \cdot e^{\int \tan x dx} dx + C_1 \right) = e^{\ln |\cos x|} \left(\int \sec x \cdot e^{-\ln |\cos x|} dx + C_1 \right) \\ = |\cos x| \left(\int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{|\cos x|} dx + C_1 \right) = \cos x \left(\int \frac{1}{\cos^2 x} dx + C \right) \quad (C = \pm C_1) \\ = \cos x (\tan x + C) = \sin x + C \cos x.$$

在方程中令 $x=0$, 得 $f(0)=1$, 将其代入上式解得 $C=1$, 于是所求函数 $f(x) = \sin x + \cos x$. (8 分)