西安邮电大学试题卷标准答案专用纸
装　订　线

西安邮电大学----2020-2021 学年第一学期试题卷 A

标准答案

课程：概率论与数理统计 B　类型：A 卷　专业、年级：通工(含卓越,拔尖班),信工,广电,电科,物联网工程,电信工程及管理 19 级

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分	6	24	60	10						100

一、判断题：对的打“√”；错的打“×”（每小题 2 分，共 6 分）

1.（√）；2.（√）；3.（√）；

二、填空题（每空 3 分，共 24 分）

1．离散；　2．$c=\frac{21}{4}$；　3．2；　4．$t(9)$；

5．$\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$；　6．$\chi^2<{\chi_{\alpha}}^2(n-1)$；　7．8/9；　8．$\Phi(x)$或$\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$；

三、计算题（6 小题，1-3 每题 11 分，4-6 每题 9 分，共 60 分）

1．（本小题 11 分）

解：设 A、B、C 分别表示事件“选取的是地区 A、B、C”，M_1 和 M_2 分别表示事件“第一和第二次选取到的是男生的报名表”，则

（1）$P(M_1\overline{M_2}\,|\,C)=\frac{C_{12}^1}{C_{16}^1}\frac{C_4^1}{C_{15}^1}=\frac{12}{16}\times\frac{4}{15}=\frac{1}{5}$ ………3 分

（2）根据全概率公式：

$$P(M_1)=P(M_1|A)P(A)+P(M_1|B)P(B)+P(M_1|C)P(C)$$

$$=\frac{C_6^1}{C_{10}^1}\frac{C_1^1}{C_3^1}+\frac{C_3^1}{C_6^1}\frac{C_1^1}{C_3^1}+\frac{C_{12}^1}{C_{16}^1}\frac{C_1^1}{C_3^1}$$ ………2 分

$$=\frac{6}{10}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{12}{16}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{12}{60}+\frac{10}{60}+\frac{15}{60}$$

$$=\frac{37}{60}$$ ………4 分

（3）根据条件概率的定义：

$$P(M_1\,|\,\overline{M_2})=\frac{P(M_1\overline{M_2})}{P(\overline{M_2})}$$ ………1 分

$$P(M_1\overline{M_2})=P(M_1\overline{M_2}\,|\,A)P(A)+P(M_1\overline{M_2}\,|\,B)P(B)+P(M_1\overline{M_2}\,|\,C)P(C)$$

$$=\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{12}{16}\times\frac{4}{15}\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{8}{90}+\frac{9}{90}+\frac{6}{90}=\frac{23}{90}$$ ………2 分

$$P(\overline{M_2})=P(\overline{M_2}|A)P(A)+P(\overline{M_2}|B)P(B)+P(\overline{M_2}|C)P(C)=\frac{23}{60}$$ ………3 分

所以 $P(M_1\,|\,\overline{M_2})=\frac{P(M_1\overline{M_2})}{P(\overline{M_2})}=\frac{23}{90}\times\frac{60}{23}=\frac{2}{3}$ ………4 分

2．（本小题 11 分）

解：（1）由　$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\int_0^1 be^{-(x+y)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

$$=b\left[\int_0^{\infty}e^{-y}\,\mathrm{d}y\right]\left[\int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x\right]=b\left(1-e^{-1}\right),$$

得　$b=\frac{1}{1-e^{-1}}.$ ………2 分

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\frac{1}{1-e^{-1}}\int_0^{\infty}e^{-x}e^{-y}\mathrm{d}y=\frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ ……… 2 分

$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{1-e^{-1}}\int_0^{1}e^{-x}e^{-y}\mathrm{d}x=e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ ………4 分

（3）由（2）知 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故 X，Y 相互独立. ………1 分

分别记 $Z=\max\{X,Y\}$，X 和 Y 的分布函数为 $F_Z(z)$，因为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 相互独立，则有：

$F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z).$　记为 A 式 ………2 分

由（2）知

$$F_X(z)=\int_{-\infty}^{z}f_X(x)dx=\begin{cases}0, & z<0,\\ \int_0^z\frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}\mathrm{d}x, & 0\le z\le 1,\\ 1, & z\ge 1\end{cases}$$ ………3 分

$$=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{1-e^{-z}}{1-e^{-1}}, & 0\le z<1,\\ 1, & z\ge 1.\end{cases}$$

说明：1．标准答案务必正确无误。　2．将每道大题得分和总分填入得分栏中。

$$F_Y(z)=\int_{-\infty}^{z} f_Y(y)dy=\begin{cases}0, & z<0,\\ \int_0^z e^{-y}\,\mathrm{dy}, & z\ge 0\end{cases}$$ ……… 4 分

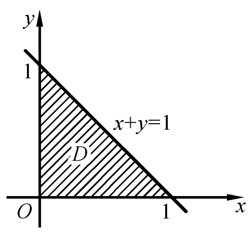
$$=\begin{cases}0, & z<0,\\ 1-e^{-z}, & z\ge 0.\end{cases}$$

将 $F_X(x),F_Y(y)$ 的表达式代入 A 式，得到 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{(1-e^{-z})^2}{1-e^{-1}}, & 0\le z<1,\\ 1-e^{-z}, & z\ge 1.\end{cases}$$ ………5 分

3. （本小题 11 分）

解：如图，$S_D=\dfrac{1}{2}$，故 (X,Y) 的概率密度为



$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$ ………2 分

$$E(X)=\iint_D xf(x,y)\mathrm{dxdy}=\int_0^1\mathrm{dx}\int_0^{1-x}x\cdot 2\mathrm{dy}=\frac{1}{3}$$ ………3 分

$$E(X^2)=\iint_D x^2f(x,y)\mathrm{dxdy}=\int_0^1\mathrm{dx}\int_0^{1-x}2x^2\mathrm{dy}=\frac{1}{6}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18}.$$ ………4 分

同理 $E(Y)=\dfrac{1}{3}$ ………5 分

$D(Y)=\dfrac{1}{18}$ ………6 分

$$E(XY)=\iint_D xyf(x,y)\mathrm{dxdy}=\iint_D 2xy\mathrm{dxdy}=\int_0^1\mathrm{dx}\int_0^{1-x}2xy\mathrm{dy}=\frac{1}{12}.$$ ………7 分

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{36}.$$ ………9 分

从而

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{-\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18}}\times\sqrt{\frac{1}{18}}}=-\frac{1}{2}$$ ………11 分

4. （本小题 9 分）

解：由已知容易得到 $\mu=EX_k=110,\ \sigma^2=DX_k=110^2$ 。 ………2 分

根据独立同分布的中心极限定理，可知总寿命

$$X=\sum_{k=1}^{n}X_k\sim N(n\mu,n\sigma^2)$$

$$=\sum_{k=1}^{18}X_k\sim N(18\times 110,18\times 110^2)$$ ………4 分

本题要求的是事件{X>2498}的概率。

根据定理的结果，有

$P\{X>2498\}$ ………6 分

$$=P\left\{\frac{X-18\times 110}{\sqrt{18\times 110^2}}>\frac{2498-18\times 110}{\sqrt{18\times 110^2}}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{X-18\times 110}{\sqrt{18\times 110^2}}>1.11\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{X-18\times 110}{\sqrt{18\times 110^2}}\le 1.11\right\}$$ ………8 分

$\approx 1-\Phi(1.11)$

$=0.1335$ ………9 分

说明：1．标准答案务必要正确无误。 2．将每道大题得分和总分填入得分栏中。

5．（本小题 9 分）

解：因为 $X \sim N(10,3^2)$，所以 $\bar{X} \sim N(10,\frac{3^2}{36})$，即 $\bar{X} \sim N(10,(\frac{1}{2})^2)$ ………3 分

可得，

$$P(9<\bar{X}<11)=P(\frac{9-10}{\frac{1}{2}}<\frac{\bar{X}-10}{\frac{1}{2}}<\frac{11-10}{\frac{1}{2}})=P(-2<\frac{\bar{X}-10}{\frac{1}{2}}<2)$$ ………6 分

$$=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1=0.9544$$ ………9 分

6．（本小题 9 分）

解：（1） $A_1=\mu_1$ ………1 分

$$A_1=\bar{X}=\frac{1+2+1}{3}=\frac{4}{3}$$ ………2 分

$$\mu_1=E(X)=1\cdot\theta^2+2\cdot 2\theta(1-\theta)+3\cdot(1-\theta)^2=3-2\theta$$ ………3 分

由 $\frac{4}{3}=3\text{-}2\theta$，得 $\hat{\theta}_1=\frac{5}{6}$ ………4 分

（2）似然函数为

$$\begin{aligned}L(\theta)&=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)\\&=P\{X_1=x_1\}P\{X_2=x_2\}P\{X_3=x_3\}\\&=P\{X_1=1\}P\{X_2=2\}P\{X_3=3\}\\&=\theta^2\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot\theta^2\\&=2\theta^5(1-\theta)\end{aligned}$$ ………2 分

$$\ln L(\theta)=\ln 2+5\ln\theta+\ln(1-\theta)$$ ………3 分

令 $\frac{d\ln L}{d\theta}=0$，得 $\frac{5}{\theta}\text{-}\frac{1}{1\text{-}\theta}=0$ ………4 分

所以最大似然估计值为：$\hat{\theta}_2=\frac{5}{6}$ ………5 分

四、分析计算题（1 小题，10 分）

解：检验假设：H_0：μ=250，H_1：$\mu\neq 250$； ………2 分

因为方差 σ^2 未知，故采用 t 检验法，检验统计量为：

$$t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{\bar{X}-250}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)；$$ ………4 分

拒绝域为：$|t|=\left|\frac{\bar{x}-250}{s/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\alpha/2}(n-1)$； ………6 分

由于 $n=16$，$\bar{x}=252$，$s=4$，$\alpha=0.05$，$t_{0.025}(15)$=2.1314，得：

$$|t|=\left|\frac{\bar{x}-250}{s/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{252-250}{4/\sqrt{16}}\right|=2<2.1314；$$ ………9 分

所以，接受 H_0，可以认为该机器工作正常。 ………10 分

说明：1．标准答案务必要正确无误。　2．将每道大题得分和总分填入得分栏中。