2011-2012 学年第一学期《高等数学 I》期末试卷

授课班号________ 年级专业________ 学号________ 姓名________

题型	选择题	填空题	计算题	综合题	总 分	审 核
得分						

一. 填空题（8×4 分）

得分	阅卷人

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+1}=$ <u>e^4</u>.

$\left(1+\dfrac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}\cdot\frac{(x+1)\cdot 4}{x-1}}$

2. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3nx}{1-nx}$，则其连续区间是 <u>$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$</u>.

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x\sin y+ye^x=0$ 所确定，则 $y'(0)=$ <u>0</u>.

$x=0,\ y=0.$

$\sin y+x\cdot\cos y\cdot y'+y'\cdot e^x+y\cdot e^x=0.$

4. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)-f(1)}{x^2}=2$，则

$f'(1)=$ <u>-4</u>.

$\dfrac{f(\cos x)-f(1)}{\cos x-1}\cdot\dfrac{\cos x-1}{x^2}$

5. 曲线 $y=xe^{3x}$ 的拐点坐标是 <u>$\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}e^{-2}\right)$</u>

$y'=e^{3x}+3xe^{3x}=(3x+1)e^{3x}$

$y''=3e^{3x}+3(3x+1)e^{3x}=3(3x+2)e^{3x} \Rightarrow x=-\frac{2}{3}$

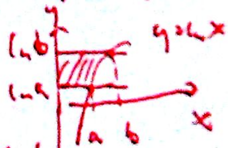
6. 设 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x\ \ (|x|<1)$，则

$f(x)=$ <u>$x-\frac{1}{2}x^2+C$</u>.

$f'(t)=1-t,\ f'(x)=1-x$

7. 设 $\varphi(x)$ 可导，则 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\varphi(x)}^{\varphi(x^2)}\sin t^2\,dt=$ <u>$\sin\varphi^2(x^2)\cdot\varphi'(x^2)\cdot 2x-\sin\varphi^2(x)\cdot\varphi'(x)$</u>

8. 由曲线 $y=\ln x$ 与直线 $x=0$，$y=\ln a$，$y=\ln b\ (b>a>0)$ 所围成图形的面积 $S=$ <u>$b-a$</u>.



$\displaystyle\int_{\ln a}^{\ln b}e^y\,dy=e^y\Big|_{\ln a}^{\ln b}$

二. 计算题（6×6 分）

得分	阅卷人

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

$\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+1}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+1}$ 与 $\dfrac{1}{n^2+n+n}+\dfrac{2}{n^2+n+n}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}$

易知 $\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\le\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\le\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$

极限为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\dfrac{1}{2}$

Scanned by CamScanner

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2\ln x}{x-1-\sin(x-1)}$.

令 $x-1=t$

$$原式=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\ln(1+t)}{t-\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^3}{t-\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{3t^2}{1-\cos t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{3t^2}{\frac{1}{2}t^2}=6.$$

3. 设 $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases}x=2te^{-t}+1\\ y=t^3-3t\end{cases}$ 所确定, 求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ 和 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}$.

$x=1$ 时. $t=0$.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\left.\frac{3t^2-3}{2e^{-t}-2te^{-t}}\right|_{t=0}=\left.\frac{-3(t+1)e^{t}}{2}\right|_{t=0}=-\frac{3}{2}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}=\left.\frac{-\frac{3}{2}\left[e^t+(t+1)e^t\right]}{2(1-t)e^{-t}}\right|_{t=0}=\left.-\frac{3}{4}\cdot\frac{t+2}{1-t}e^{2t}\right|_{t=0}=-\frac{3}{2}$$

4. 研究函数 $y=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ 的极值(n 为自然数).

$$y'=\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]e^{-x}-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\cdot e^{-x}$$

$$=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}\Rightarrow 驻点\ x=0.$$

1) n 为奇数时. y' 在 $x=0$ 两侧异号

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$
y	↗	极大	↘

极大值 $y(0)=1$.

2) n 为偶数时. y' 在 $x=0$ 两侧同号. 无极值.

5. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\ln^2 x}{x^2}dx$.

$$原式=\int\ln^2x\,d\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}\ln^2x+\int\frac{1}{x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=-\frac{1}{x}\ln^2x+2\int\ln x\,d\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{1}{x}\ln^2x-\frac{2}{x}\ln x+2\int\frac{1}{x^2}dx$$

$$=-\frac{1}{x}\ln^2x-\frac{2}{x}\ln x-\frac{2}{x}+C$$

6. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 1, \\ 2-x, & 1<x<2, \end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

原式 $= \int_0^1 x^2 dx + \underbrace{\int_1^2 (2-x) dx}$　几何意义更简单.

$= \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{2}x^2\Big|_1^2 = \frac{1}{3} + 2 - \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$.

三. 综合题（满分 32 分）

得分	阅卷人

1.（7 分）　设不恒为零的奇函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，试说明 $x=0$ 为函数 $f(x)/x$ 的何种间断点.

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在.

∴ 为第一类间断点.

2.（6 分）　若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内有二阶导数，且

$$f(a)=f(b)=0,\ f''(x)\le 0,$$

求证：在 $[a, b]$ 上，$f(x)\ge 0$.

法一：由 Rolle 定理. $\exists f'(\xi)=0$　$\xi\in(a,b)$.

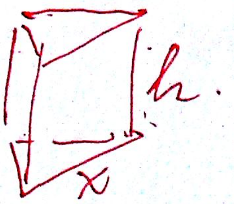
$f''(x)\le 0 \Rightarrow f'(x)\downarrow$. ∴ $f'(x)\ge 0$. $x\in[a,\xi]$.

$f'(x)\le 0$. $x\in[\xi,b]$

$\Rightarrow \begin{cases} f(x)\uparrow .\ x\in[a,\xi] \text{ 又∵ } f(a)=0. \text{ ∴ } f(x)\ge 0.\ x\in[a,\xi]. \\ f(x)\downarrow\ x\in[\xi,b] \text{ 又∵ } f(b)=0 \text{ ∴ } f(x)\ge 0.\ x\in[\xi,b] \end{cases}$

法二：凸函数.

3. （6 分） 设有底为等边三角形的直柱体，体积为V，要使其总面积为最小，问底边的长应为多少？



设底边长为x，高为h.

$$V=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\cdot h \Rightarrow h=\frac{4V}{\sqrt{3}x^2}$$

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\cdot 2+3xh=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{4\sqrt{3}V}{x}$$

$$S'=\sqrt{3}x-\frac{4\sqrt{3}V}{x^2} \Rightarrow x=\sqrt[3]{4V}$$

$$S''=\sqrt{3}+\frac{8\sqrt{3}}{x^3}V \Rightarrow S''(\sqrt[3]{4V})>0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{4V}$$ 为极小值点.（最小值）

4. （6 分） 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，证明：

$$\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)\,dx.$$

法一：$T=\pi$. $\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx \xlongequal{偶函数} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx$.

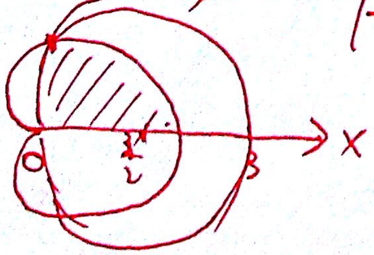
法二：$T=\pi$ $\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx=2\int_0^{\pi} f(|\cos x|)dx=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(|\cos x|)dx\right]$

而 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(|\cos x|)dx \xlongequal{令x=\pi-t} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(|\cos t|)\cdot(-1)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos t|)dt$

∴ $\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx$.

5. （7 分） 求由不等式$r\le 3\cos\theta$和$r\le 1+\cos\theta$所确定的公共部分的面积.

$3\cos\theta=1+\cos\theta$
$\Rightarrow 2\cos\theta=1$



$$A=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\cdot(1+\cos\theta)^2d\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cdot(3\cos\theta)^2d\theta\right]$$

$$=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{9}{2}\cos^2\theta\,d\theta\right]$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}9\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{\pi}{3}+2\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{4}\sin2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{9}{4}\sin2\theta\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{5}{4}\pi$$