装订线

西安邮电大学期末考试试题（A 卷）

（2017——2018 学年第一学期）

课程名称：高等数学 AI

考试专业、年级：通院、电院、计算机院、自动化院各专业及物理专业 2017 级

考核方式：闭卷 可使用计算器： 否

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
评卷人										

得分：_____ 一、选择题（每题 2 分，共 8 分）

1、若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\tan(2\Delta x)}=1$，则 $f'(x_0)=$ ___D___。

A. 2 B. -2 C. $\dfrac{1}{2}$ D. $-\dfrac{1}{2}$

2、设 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin x$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=b$，则有________。

A. $a=1$，$b=1$ B. $a=1$，$b=0$ C. $a=0$，$b=1$ D. $a=0$，$b=0$

3、函数 $y=x^2+2x-1$ 在 $[0,1]$ 满足拉格朗日中值定理的点 $\xi=$________。

A. $\dfrac{1}{3}$ B. $\dfrac{1}{2}$ C. $\dfrac{2}{3}$ D. $\dfrac{3}{4}$

4、下列积分中不是反常积分的是________。

A. $\int_1^e \dfrac{1}{x\ln x}dx$ B. $\int_1^2 \dfrac{1}{x}dx$ C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\cos x}dx$ D. $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{1+x^2}dx$

得分：_____ 二、填空题（每题 2 分，共 8 分）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n}{2n^2+5n+3}=$________。

2、已知函数 f 可导，$y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$________。

3、已知函数 $x^3+\dfrac{1}{x}$ 为函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)=$________。

4、在沿 x 轴方向变力 $F(x)$ 作用下，物体从 $x=a$ 移到 $x=b$，变力所做的功 $W=$________。

得分：_____ 三、解下列各题（每题 4 分，共 16 分）

得分：_____1、求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{2x}$。

得分：_____2、$y=(x+1)\arctan x$，求 $y'|_{x=1}$。

得分：_____3、$y=\int_2^{e^x}\dfrac{1}{\ln t}dt$，求 dy。

得分：_____4、计算不定积分 $\int\cos^2 x\sin x dx$。

得分：______四、解下列各题（每题 5 分，共 20 分）

得分：______1、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3+x^4}$。

得分：______2、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 所确定，求 y' 及 $y'(0)$。

得分：______3、设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}, 0\le x\le 1,\\ e^{-x}, 1<x\le 3,\end{cases}$ 求 $\int_0^3 f(x)dx$。

得分：______4、求微分方程 $xdy-y\ln ydx=0$ 的通解。

得分：______五、解下列各题（每题 6 分，共 18 分）

得分：______1、设 $\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=t\cos t-\sin t,\end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

得分：______2、求函数 $y=xe^{x^2+3x+1}$ 的单调区间和极值。

得分：______3、计算 $\int\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}dx$。

得分：_____六、（9 分）作曲线 $y=e^x$ 在点 $(1,e)$ 的切线，该切线与 $y=e^x$ 及 y 轴围成平面图形 D。

（1）求平面图形 D 的面积。

（2）求 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积。

得分：_____七、（8 分）求微分方程 $y''-10y'+9y=e^{2x}$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=\dfrac{6}{7},y'\big|_{x=0}=\dfrac{33}{7}$ 的特解。

得分：_____八、（7 分）设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，$f'(0)=2,f'(3)=-2$，曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,0)$ 和点 $(3,2)$，且点 $(3,2)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点，计算 $\int_0^3(x^2+x)f'''(x)dx$。

得分：_____九、（6 分）一高速摄像机在距火箭发射塔底部 900 米处，瞄准火箭跟拍火箭铅直上升，当火箭上升到距发射塔底部 1200 米的高空时，其速率为 275 米/秒，求摄像机仰角增加的速率是多大？

西安邮电大学——2017-18 学年第一学期期末试题（A）卷

标准答案

课程：<u>高等数学 AI</u>　类型：<u>A</u> 卷　专业、年级：理工科个专业、2017 级

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分	8	8	16	20	18	9	8	7	6	100

一、选择题（每题 2 分，共 8 分）

1、A，　2、C，　3、B，　4、B。

二、填空题（每题 2 分，共 8 分）

1、$\frac{1}{2}$，　2、$-\frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x})$，　3、$3x^2-\frac{1}{x^2}$，　4、$\int_a^b F(x)\,dx$。

三、解下列各题（每题 4 分，共 16 分）

1. 解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{-x}{2}(-4)}$ ……3 分

$=e^{-4}$。……4 分

2. 解：$y'=\arctan x+\frac{x+1}{1+x^2}$，……3 分

$y'|_{x=1}=\arctan 1+\frac{1+1}{1+1}=\frac{\pi}{4}+1$。……4 分

3. 解：$y'=\frac{1}{\ln e^x}\cdot e^x=\frac{e^x}{x}$，……3 分

$dy=y'dx=\frac{e^x}{x}dx$。……4 分

4. 解：$\int\cos^2 x\sin x dx=-\int\cos^2 x d\cos x$ ……2 分

$=-\frac{\cos^3 x}{3}+C$。……4 分

四、解下列各题（每题 5 分，共 20 分）

1、解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3+x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2+4x^3}$ ……2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{3x^2+4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}}{3+4x}=\frac{1}{6}$。……5 分

2、解：当 $x=0$ 时 $y=1$，……1 分

方程两端同时对 x 求导得　$e^y y'+y+xy'=0$，

$\Rightarrow y'=\frac{-y}{x+e^y}$，　……4 分

$y'(0)=\left.\frac{-y}{x+e^y}\right|_{x=0}=-\frac{1}{e}$。……5 分

3、解：$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx=\int_0^1\sqrt[3]{x}dx+\int_1^3 e^{-x}dx$ ……2 分

$=\left.\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right|_0^1-\left.e^{-x}\right|_1^3=\frac{3}{4}-e^{-3}+e^{-1}$。……5 分

4、解：$xdy-y\ln ydx=0\Rightarrow\frac{1}{y\ln y}dy=\frac{1}{x}dx$，……2 分

$\Rightarrow\int\frac{1}{y\ln y}dy=\int\frac{1}{x}dx$，

得通解：$\ln|\ln y|=\ln|x|+C$。

或：$\ln|\ln y|=\ln|x|+\ln|C|$，　$\Rightarrow\ln y=Cx$ 或 $y=e^{Cx}$　。……5 分

五、解下列各题（每题 6 分，共 18 分）

1、解：$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\cos t-t\sin t-\cos t}{-2\sin t}=\frac{t}{2}$，　……3 分

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\frac{t}{2}\right)'}{x'(t)}=\frac{\frac{1}{2}}{-2\sin t}=-\frac{1}{4\sin t}$。……6 分

2、解：$y'=e^{x^2+3x+1}(2x^2+3x+1)$，令 $y'=0$ 得驻点 $x=-1,x=-\frac{1}{2}$，……2 分

x	$(-\infty,-1)$	-1	$\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	极大值	↘	极小值	↗

单调减区间：$[-1,-\frac{1}{2}]$，单调增区间：$(-\infty,-1]\cup[-\frac{1}{2},+\infty)$；……4 分

极大值 $f(-1)=-e^{-1}$，极小值 $f(\frac{-1}{2})=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}}$。……6 分

3、解：$\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx \underline{\underline{t=\sqrt{x}}} \int\frac{1}{1+t}dt^2=\int\frac{2t}{1+t}dt$ ……2 分

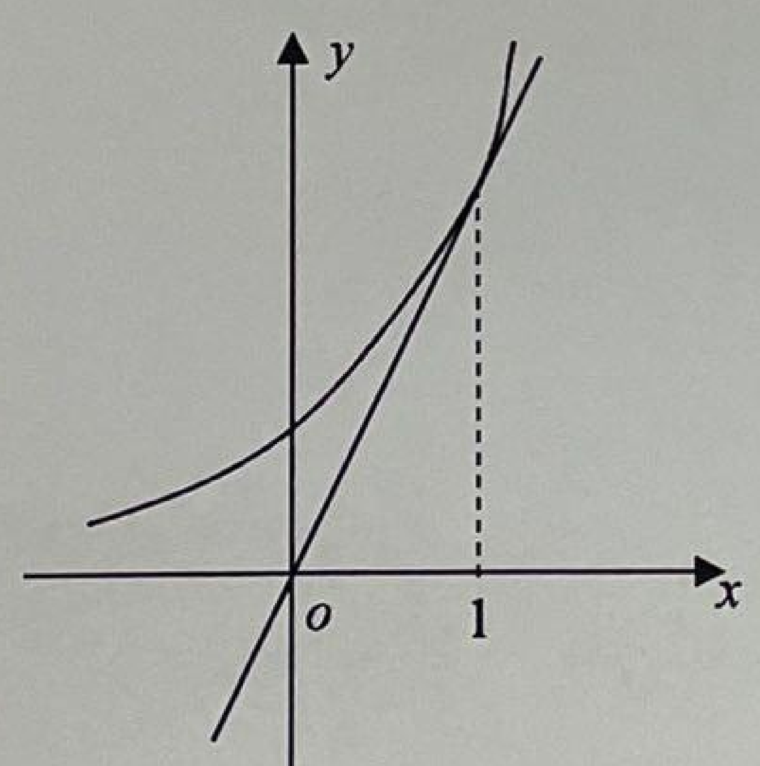
$$=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=2[t-\ln(1+t)]+C \text{ ……5 分}$$

$$=2[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]+C\text{。……6 分}$$

六、（9 分）

解：$y'=e^x\big|_{x=1}=e$，

切线：$y-e=e(x-1)$，即 $y=ex$。……3 分



（1） D 面积 $A=\int_0^1(e^x-ex)dx=\left(e^x-\frac{e}{2}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{e}{2}-1$。……6 分

（2） $V=\pi\int_0^1(e^x)^2dx-\pi\int_0^1(ex)^2dx$

$$=\pi\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1-\pi\cdot e^2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}(\frac{e^2}{3}-1)\text{。……9 分}$$

七、（8 分）

解：此微分方程对应的齐次微分方程的特征方程为：$r^2-10r+9=0$，特征根：$r_1=1, r_2=9$，

对应齐次微分方程的通解：$Y=C_1e^x+C_2e^{9x}$；……4 分

$\lambda=2$ 不是特征根，设所求微分方程的特解为 $y^*=Ae^{2x}$，代入原方程得 $-7A=1$，

则 $y^*=-\frac{1}{7}e^{2x}$， 原方程的通解为：$y=Y+y^*=C_1e^x+C_2e^{9x}-\frac{1}{7}e^{2x}$；……6 分

由 $y\big|_{x=0}=\frac{6}{7}, y'\big|_{x=0}=\frac{33}{7}$ 可解得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$，

故所求特解为 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{9x})-\frac{1}{7}e^{2x}$。……8 分

八、（7 分）

解：由题意知：$f(0)=0$，$f(3)=2$，$f''(3)=0$ ……2 分

$$\int_0^3(x^2+x)f'''(x)dx=\int_0^3(x^2+x)df''(x)$$

$$=(x^2+x)f''(x)\Big|_0^3-\int_0^3(2x+1)f''(x)\,dx \text{ ……4 分}$$

$$=12f''(3)-\int_0^3(2x+1)df'(x)$$

$$=-[(2x+1)f'(x)\Big|_0^3-2\int_0^3 f'(x)dx]$$

$$=-7f'(3)+f'(0)+2f(x)\Big|_0^3$$

$$=14+2+2[f(3)-f(0)]=20\text{，……7 分}$$

九、（6 分）

解：设火箭上升 t 秒后，其高度为 h，摄像机的仰角为 α，则

$$\tan\alpha=\frac{h}{900},$$

上式两边对 t 求导，得

$$\sec^2\alpha\cdot\frac{d\alpha}{dt}=\frac{1}{900}\frac{dh}{dt}$$

即 $\frac{d\alpha}{dt}=\frac{1}{900}\cdot\frac{dh}{dt}\cdot\frac{1}{\sec^2\alpha}$ ……4 分

当 $h=1200m$ 时，$\tan\alpha=\frac{1200}{900}=\frac{4}{3}$，$\sec^2\alpha=\tan^2\alpha+1=\frac{25}{9}$，$\frac{dh}{dt}=275m/s$，

代入上式得 $\frac{d\alpha}{dt}=\frac{1}{900}\cdot275\cdot\frac{9}{25}=0.11$（弧度/秒）。……6 分