2014-2015 学年第一学期《高等数学 AI》试卷（A）

授课班号__________ 年级专业 机电、物联网 学号__________ 姓名__________

题型	填空题	计算题	综合题	总分	审 核
得分					

一、填空题(每小题 4 分，共 32 分)

得分	阅卷人

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1-3x}}{x^2+2x}=$ 2 .

2. 设当 $x\to 1^+$ 时，$\sqrt{3x^2-2x-1}\cdot\ln x$ 与 $(x-1)^n$ 为同阶无穷小，则 $n=$ $\frac{3}{2}$.　　令 $x-1=t$. $t\to 0^+$

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\cos 2x, & x<0\\ 2x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$，则 $f'(0)=$ 0 .

✓4. 曲线 $y=e^{\arctan x}$ 的凹区间为 $(-\infty,\frac{1}{2}]$.　　写开区间扣一分

✓5. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处具有二阶导数，且 $f(0)=0$, $f'(0)=1$,
原题
$f''(0)=3$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=$ $\frac{3}{2}$.

6. 若 $F(x)+C=\int f(x)\mathrm{d}x$，则 $\int e^{-x^2}\cdot x\cdot f(e^{-x^2})\mathrm{d}x=$ ____ .　　$-\frac{1}{2}F(e^{-x^2})+C$　（令 $e^{-x^2}=t$）

7. $\int_{-\pi}^{\pi}\left(\dfrac{\sin x}{1+x^2}+\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=$ π .　　奇

8. $\int_{e}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}=$ 1 .

二、计算题(每小题 7 分，共 35 分)

得分	阅卷人

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(e^t-e^{-t})\mathrm{d}t}{1-\cos x}$.

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(e^t-e^{-t})dt}{\frac{1}{2}x^2}$ "$\frac{0}{0}$" (1')

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$ "$\frac{0}{0}$" (2')

$=\lim\limits_{x\to 0}(e^x+e^{-x})=2$ (2')

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ (3')

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}$ (3')

$=2$ (1')

或 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\cdots$
(2')　(5')

2. 设$\begin{cases} x=\int_1^t \sqrt{\ln u}\,du \\ y=\int_1^{t^2} \sqrt{\ln u}\,du \end{cases}$ $(t>1)$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sqrt{\ln t^2}\cdot 2t}{\sqrt{\ln t}}=2\sqrt{2}t \qquad (3')$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\ln t}} \qquad (4')$$

写对公式给2′

3. 求$\int e^x\left(3^x+\dfrac{e^{-x}}{x\ln x}\right)dx$.

$$原式=\int (3e)^x\,dx+\int\frac{dx}{x\ln x}$$

$$=\frac{(3e)^x}{\ln(3e)}+\int\frac{d\ln x}{\ln x}$$

$$=\frac{(3e)^x}{1+\ln 3}+\ln|\ln x|+C$$

各3′ 1′

4. 求$\int \sin^2\sqrt{x}\,dx$.

令$\sqrt{x}=t$

$$原式=\int 2\sin^2 t\cdot t\,dt=\int(1-\cos 2t)\cdot t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}\int t\,d\sin 2t$$

$$=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}\left(t\sin 2t-\int\sin 2t\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t\sin 2t-\frac{1}{4}\cos 2t+C$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}-\frac{1}{4}\cos 2\sqrt{x}+C$$

方法：换元 1′

分部 3′

计算 3′

也可$\int\frac{1-\cos 2\sqrt{x}}{2}dx$凑出

5. 已知 $f(x)=xe^{-x}+2\int_0^1 f(t)\,dt$，求 $f(x)$ 的具体表达式.

设 $\int_0^1 f(t)\,dt = A$. 定积分是一个常数.

则 $f(x)=xe^{-x}+2A$. 从而:

$$A=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (xe^{-x}+2A)\,dx=\int_0^1 x\,d(-e^{-x})+2A$$

$$=\left[-xe^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{-x}\,dx+2A$$

$$=-\frac{1}{e}+\left[-e^{-x}\right]_0^1+2A$$

$$=-\frac{1}{e}+1-\frac{1}{e}+2A \quad (5')$$

$\therefore A=\frac{2}{e}-1$. (1′)

$\therefore f(x)=xe^{-x}+\frac{4}{e}-2$. (1′)

三、综合题(满分 33 分)

1. (11 分)

设 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是满足 $a_0+\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}a_2+\cdots+\frac{1}{n+1}a_n=0$ 的实数，试证：方程 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

得分	阅卷人

设 $f(x)=a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2+\frac{1}{3}a_2x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ (5′)

则 $f(x)\in C[0,1]$，$f(x)\in D(0,1)$

且 $f(0)=f(1)=0$. (3′)

由 Rolle Th. $\exists\,\xi\in(0,1)$ s.t. $f'(\xi)=0$

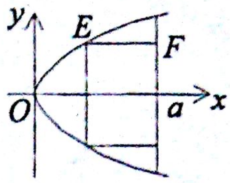
而 $f'(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$

$\therefore$ ξ 是方程 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内

的一个根. 得证. (3′)

Scanned by CamScanner

2. (11 分) 抛物线 $y^2=2px\,(p>0)$ 和直线 $x=a\,(a>0)$ 的内接矩形（一边在 $x=a$ 上）的宽度 EF 多少时，其面积最大？



设 $E(x, \sqrt{2px})$

则 $S=2(a-x)\sqrt{2px} = 2\sqrt{2p}\,(a\sqrt{x}-x\sqrt{x})$，$0<x<a$.　(5')

$S'=2\sqrt{2p}\left(\frac{a}{2\sqrt{x}}-\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)=\sqrt{2p}\cdot\frac{a-3x}{\sqrt{x}}$

令 $S'=0$，$x=\frac{a}{3}$

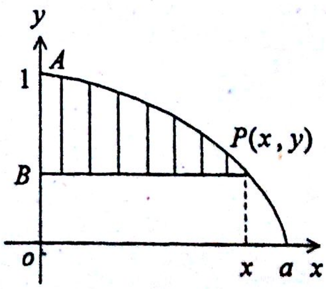
x	$(0,\frac{a}{3})$	$\frac{a}{3}$	$(\frac{a}{3},a)$
S'	+	0	−
S	↗	极大值	↘

(5')

从而 $x=\frac{a}{3}$，$EF=\frac{2}{3}a$ 时，矩形面积最大.

(1')

3. (11 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上满足条件 $f(x)>0$，$f''(x)<0$，且 $f(0)=1$，又曲边三角形 PAB（如图）中阴影部分面积 $S=\frac{2}{3}x^3$，试求 $f(x)$.



$S=\int_0^x f(t)\,dt - x f(x) = \frac{2}{3}x^3$，$x\in(0,a]$

(5')

求导：$f(x)-f(x)-xf'(x)=2x^2$

$\therefore f'(x)=-2x$，$x\in(0,a]$

从而 $f(x)=-x^2+C$，$x\in[0,a]$　(4')

又 $f(0)=1$．$\therefore C=1$　(1')

$\therefore f(x)=-x^2+1$，$x\in[0,a]$.

又 $f(a)=0$　$\therefore a=1$

故 $f(x)=-x^2+1$，$x\in[0,1]$.　(1')