西安邮电大学----2021-2022 学年第一学期试题卷 A

标准答案

课程：概率论与数理统计 B　类型：A 卷　专业、年级：通工（含卓越、拔尖班）、信工、广电、电科、物联网工程、电信工程及管理、人工智能 20 级

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

一、判断题：对的打“√”；错的打“×”（每小题 2 分，共 6 分）

1. √　2. √　3. ×

二、填空题（每空 3 分，共 24 分）

1. $N(0,1)$　2. 5/7　3. $\frac{\pi^2}{12}$　4. $\chi^2(2)$

5. 有效性　6. $\chi^2<\chi^2_{0.1}(n-1)$　7. 2/3　8. $N(n\mu,n\sigma^2)$

三、计算题（共 60 分）

1. （本小题 11 分）

解：设 A_1、A_2、A_3 分别表示事件“产品出自甲、乙、丙车间”，B 表示事件“产品是次品”，则

（1）由全概率公式：

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(B|A_i)P(A_i)$$ ……2 分

$$=0.03\times0.1+0.02\times0.4+0.01\times0.5$$

$$=0.016$$ ……3 分

（2）根据贝叶斯公式：

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)}$$ ……5 分

$$=\frac{0.03\times0.1}{0.016}$$

$$=\frac{3}{16}=0.1875$$ ……7 分

（3）根据贝叶斯公式：

$$P(A_3|\overline{B})=\frac{P(\overline{B}|A_3)P(A_3)}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{B}|A_3)P(A_3)}{1-P(B)}$$ ……9 分

$$=\frac{0.99\times0.5}{1-0.016}=\frac{0.495}{0.984}$$

$$=\frac{495}{984}=\frac{165}{328}\approx0.503$$ ……11 分

2. （本小题 11 分）

解：由卷积公式得：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$， ……4 分

被积函数不等于零当且仅当 $\begin{cases}0\le x\le1\\ z-x>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}0\le x\le1\\ x<z\end{cases}$ ……6 分

所以 $f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_0^z e^{-(z-x)}dx, & 0<z<1,\\ \int_0^1 f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_0^1 e^{-(z-x)}dx, & z\ge1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$ ……9 分

即 $f_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}, & 0<z<1,\\ (e-1)e^{-z}, & z\ge1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$ ……11 分

3. （本小题 11 分）

解：

（1）① $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^2 axdx+\int_2^4 bx+cdx=2a+6b+2c=1$ ……2 分

② $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^2 ax^2dx+\int_2^4 bx^2+cxdx=\frac{8}{3}a+\frac{56}{3}b+6c=2$ ……3 分

③ $P\{1<X<3\}=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^2 axdx+\int_2^3 bx+cdx=\frac{3}{2}a+\frac{5}{2}b+c=\frac{3}{4}$ ……4 分

由①②③解得 $a=\frac{1}{4},b=-\frac{1}{4},c=1$ ……6 分

（2）由（1）得 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x, & 0\le x<2\\ -\frac{1}{4}x+1, & 2\le x\le4\\ 0, & 其他\end{cases}$ ……7 分

则 $E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}e^x f(x)dx$ ……8 分

$=\int_0^2 0.25xe^xdx+\int_2^4(-0.25x+1)e^xdx$

$=\frac{1}{4}\int_0^2 xde^x-\frac{1}{4}\int_2^4 xde^x+\int_2^4 e^xdx$

$=\frac{1}{4}xe^x\Big|_0^2-\frac{1}{4}\int_0^2 e^xdx-\frac{1}{4}xe^x\Big|_2^4+\frac{1}{4}\int_2^4 e^xdx+\int_2^4 e^xdx$

$=\frac{1}{4}e^4-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{4}$ ……11 分

说明：1．标准答案务必正确无误。　2．将每道大题得分和总分填入得分栏中。

4. （本小题 9 分）

解：

(1) 由已知，有 $X\sim B(100,0.2)$ ……2 分

(2) 由拉普拉斯中心极限定理，知：

$X\sim N(100\times0.2,100\times0.2\times0.8)$ ……4 分

因此有：

$P\{14\le X\le 30\}$ ……5 分

$=P\left\{\frac{14-100\times0.2}{\sqrt{100\times0.2\times0.8}}\le\frac{X-100\times0.2}{\sqrt{100\times0.2\times0.8}}\le\frac{30-100\times0.2}{\sqrt{100\times0.2\times0.8}}\right\}$ ……6 分

$=P\left\{-1.5\le\frac{X-100\times0.2}{\sqrt{100\times0.2\times0.8}}\le2.5\right\}$

$=\Phi(2.5)-\Phi(-1.5)$ ……7 分

$=\Phi(2.5)-(1-\Phi(1.5))$ ……8 分

$=0.927$ ……9 分

5. （本小题 9 分）

解：因为 $\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，

所以，$U=\sum_{i=1}^{4}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(4)$ ……3 分

而根据定理 2 ，$W=\sum_{i=1}^{4}\frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{4}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}=\frac{3S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(3)$ ……6 分

因为 $D(W)=D(\frac{3S^2}{\sigma^2})=6$，所以 $D(S^2)=6\times\sigma^4/9=\frac{2\sigma^4}{3}$ ……9 分

6. （本小题 9 分）

解：

(1) 已知对于参数为 λ 的泊松分布总体 X，有 $E(X)=\lambda,D(X)=\lambda$，

于是 $E(X_i)=\lambda,D(X_i)=\lambda,i=1,2,3$，所以 ……2 分

$E(\hat{\lambda}_1)=\frac{1}{3}[E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)]=\frac{1}{3}\times3\lambda=\lambda$ ……3 分

$E(\hat{\lambda}_2)=\frac{1}{5}E(X_1)+\frac{2}{5}E(X_2)+\frac{3}{5}E(X_3)=\frac{1}{5}\lambda+\frac{2}{5}\lambda+\frac{3}{5}\lambda=\frac{6}{5}\lambda$ ……4 分

$E(\hat{\lambda}_3)=\frac{1}{4}E(X_1)+\frac{1}{2}E(X_2)+\frac{1}{4}E(X_3)=\frac{1}{4}\lambda+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{4}\lambda=\lambda$ ……5 分

由于 $E(\hat{\lambda}_1)=\lambda$， $E(\hat{\lambda}_2)\ne\lambda$， $E(\hat{\lambda}_3)=\lambda$，因此 $\hat{\lambda}_1$ 和 $\hat{\lambda}_2$ 是 λ 的无偏估计量。 ……6 分

(2) 分别计算 $\hat{\lambda}_1$ 和 $\hat{\lambda}_3$ 的方差如下：

$D(\hat{\lambda}_1)=D[\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)]$

$=\frac{1}{9}[D(X_1)+D(X_2)+D(X_3)]$

$=\frac{1}{9}\times3\lambda=\frac{1}{3}\lambda$ ……7 分

$D(\hat{\lambda}_3)=D(\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{2}X_2+\frac{1}{4}X_3)$

$=\frac{1}{16}D(X_1)+\frac{1}{4}D(X_2)+\frac{1}{16}D(X_3)$

$=\frac{1}{16}\lambda+\frac{1}{4}\lambda+\frac{1}{16}\lambda=\frac{3}{8}\lambda$ ……8 分

由于 $D(\hat{\lambda}_1)<D(\hat{\lambda}_3)$，因此估计量 $\hat{\lambda}_1$ 更为有效。 ……9 分

四、分析计算题（10 分）

解：

假设：H_0：$\mu=20$， H_1：$\mu\ne20$； ……**2 分**

因为方差 σ^2 未知，故采用 t 检验法，检验统计量为：

$t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{\bar{X}-20}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$； ……**4 分**

拒绝域为：$|t|=\left|\frac{\bar{x}-20}{s/\sqrt{n}}\right|\ge t_{\alpha/2}(4)$； ……**6 分**

由于 $\bar{x}=19.8,s=0.8$， $n=5$， $n-1=4$， $\alpha=0.05$， $t_{0.025}(4)$=2.7764，得：

$|t|=\left|\frac{19.8-20}{0.8/\sqrt{5}}\right|$=0.559<2.7764； ……9 分

所以，接受 H_0, 认为表壳的均值正常。 ……**10 分**

说明：1．标准答案务必要正确无误。 2．将每道大题得分和总分填入得分栏中。