西安邮电大学----2021-2022 学年第一学期试题卷 B

标准答案

课程：概率论与数理统计 B 类型：B 卷 专业、年级：通工（含卓越、拔尖班）、信工、电科、物联网工程、电信工程及管理、人工智能 20 级

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

一、判断题：对的打“√”；错的打“×”（每小题 2 分，共 6 分）

1. × 2. × 3. ×

二、填空题（每空 3 分，共 24 分）

1. $C_8^2(0.3)^2(0.7)^6 \approx 0.2965$ 2. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$ 3. 2 4. $t(n)$

5. 无偏性 6. $\chi^2 > \chi^2_{0.1}(n\text{-}1)$ 7. 0.975 或 39/40 8. 0.2119

三、计算题（共 60 分）

1. （本小题 11 分）

解： 设 A 表示事件“此人是女性”“此人患有该疾病”，B 表示事件“此人患有该疾病”，则有

(1) 由全概率公式：

$$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})$$ （3 分）

$$=0.002\times0.5+0.005\times0.5$$ （2 分）

$$=0.0035$$

此人患有该疾病的概率是 0.0035.

（2）根据贝叶斯公式：

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$ （3 分）

$$=\frac{0.002\times0.5}{0.0035}$$ （3 分）

$$=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}\approx0.2857$$

此人是女性的概率约为 0.2857.

2. （本小题 11 分）

(1) 由连续型随机变量的分布函数 $F(X)$ 为连续函数可得

$$\begin{cases}F(0-0)=F(0)\\F(1-0)=F(1)\end{cases} \text{ 即 } \begin{cases}A=B\\B=1-A\end{cases},$$ （2 分）

解得：$\begin{cases}A=\frac{1}{2}.\\B=\frac{1}{2}\end{cases}$. （1 分）

(2) 因为 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^x, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-(x-1)}, & x\ge1.\end{cases}$ （2 分）

所以 $f(x)=F'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^x, & x<0,\\ 0, & 0\le x<1,\\ \frac{1}{2}e^{-(x-1)}, & x\ge1.\end{cases}$ （3 分）

(3) $P\{X>\frac{1}{3}\}=1-P\{X\le\frac{1}{3}\}=1-F(\frac{1}{3})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$ （3 分）

3. （本小题 11 分）

（1）由已知可得

① $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1 kx^{\alpha}dx=\frac{k}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\Big|_0^1=\frac{k}{a+1}=1$ （2 分）

② $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 kx^{\alpha+1}dx=\frac{k}{\alpha+2}x^{\alpha+2}\Big|_0^1=\frac{k}{a+2}=0.75$ （2 分）

由①②解得 $\alpha=2, k=3$ （2 分）

（2）由（1）可知 X 的概率密度是 $f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则 （1 分）

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$ （2 分）

$$=\int_0^1 x^2\cdot3x^2\mathrm{d}x-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{5}-\frac{9}{16}=\frac{3}{80}$$ （2 分）

说明：1．标准答案务必正确无误。 2．将每道大题得分和总分填入得分栏中。

4. （本小题 9 分）

（1）由已知，$X\sim B(100,0.2)$ （2 分）

（2）由拉普拉斯中心极限定理，知：

$$X\sim B(100\times0.2,100\times0.2\times0.8)$$ （2 分）

因此有：

$$P\{14\le X\le 30\}$$ （1 分）

$$=P\left\{\frac{14-100\times0.2}{\sqrt{100\times0.2\times0.8}}\le\frac{X-100\times0.2}{\sqrt{100\times0.2\times0.8}}\le\frac{30-100\times0.2}{\sqrt{100\times0.2\times0.8}}\right\}$$ （1 分）

$$=P\left\{-1.5\le\frac{X-100\times0.2}{\sqrt{100\times0.2\times0.8}}\le 2.5\right\}$$

$$=\Phi(2.5)-\Phi(-1.5)$$ （1 分）

$$=\Phi(2.5)-(1-\Phi(-1.5))$$ （1 分）

$$=0.927$$ （1 分）

5. （本小题 9 分）

解：由已知 $\chi_1^2=\sum_{i=1}^{5}X_i^2\sim\chi^2(5)$ （2 分）

$$\chi_2^2=\sum_{i=6}^{n}X_i^2\sim X^2(n-5)$$ （2 分）

χ_1^2 与 χ_2^2 相互独立 （1 分）

所以 $Y=\dfrac{X_1^2/5}{X_2^2/n-5}\sim F(5,n-5)$ （4 分）

6. （本小题 9 分）

解：（1）已知对于参数为 λ 的泊松分布总体 X，有 $E(X)=\lambda,D(X)=\lambda$，于是 $E(X_i)=\lambda,D(X_i)=\lambda,i=1,2,3$，所以 （2 分）

$$E(\hat{\lambda}_1)=\frac{1}{3}E(X_1)+\frac{2}{3}E(X_2)=\frac{1}{3}\lambda+\frac{2}{3}\lambda=\lambda$$ （1 分）

$$E(\hat{\lambda}_2)=\frac{1}{5}E(X_1)+\frac{4}{5}E(X_2)=\frac{1}{5}\lambda+\frac{4}{5}\lambda=\lambda$$ （1 分）

$$E(\hat{\lambda}_3)=\frac{1}{4}E(X_1)+\frac{1}{2}E(X_2)=\frac{1}{4}\lambda+\frac{1}{2}\lambda=\frac{3}{4}\lambda$$ （1 分）

由于 $E(\hat{\lambda}_1)=\lambda$，$E(\hat{\lambda}_2)=\lambda$，$E(\hat{\lambda}_3)\ne\lambda$，因此 $\hat{\lambda}_1$ 和 $\hat{\lambda}_2$ 是 λ 的无偏估计量。 （1 分）

（2）分别计算 $\hat{\lambda}_1$ 和 $\hat{\lambda}_2$ 的方差如下：

$$D(\hat{\lambda}_1)=D(\frac{1}{3}X_1+\frac{2}{3}X_2)$$
$$=\frac{1}{9}D(X_1)+\frac{4}{9}D(X_2)=\frac{5}{9}\lambda$$ （1 分）

$$D(\hat{\lambda}_2)=D(\frac{1}{5}X_1+\frac{4}{5}X_2)$$
$$=\frac{1}{25}D(X_1)+\frac{16}{25}D(X_2)$$ （1 分）
$$=\frac{1}{25}\lambda+\frac{16}{25}\lambda=\frac{17}{25}\lambda$$

由于 $D(\hat{\lambda}_1)<D(\hat{\lambda}_2)$，因此估计量 $\hat{\lambda}_1$ 更为有效。 （1 分）

四、分析计算题（共 1 题, 10 分）

解：假设：H_0：$\mu=70$，H_1：$\mu\ne70$ （2 分）

因为方差 σ^2 已知，故采用 Z 检验法，检验统计量为：

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\bar{X}-70}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$ （2 分）

拒绝域为：$|z|=\left|\dfrac{\bar{x}-70}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\ge z_{\alpha/2}$ （2 分）

由于 $n=36,\bar{x}=65$，$\sigma=15$，$\alpha=0.05$，$z_{0.025}=1.96$，得

$$|z|=\left|\frac{\bar{x}-70}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{65-70}{15/\sqrt{36}}\right|=2>1.96$$ （3 分）

所以，拒绝 H_0，不可以认为全体考生的平均成绩是 70 分。 （1 分）

说明：1．标准答案务必要正确无误。 2．将每道大题得分和总分填入得分栏中。