포항공대 수학경시대회 모음

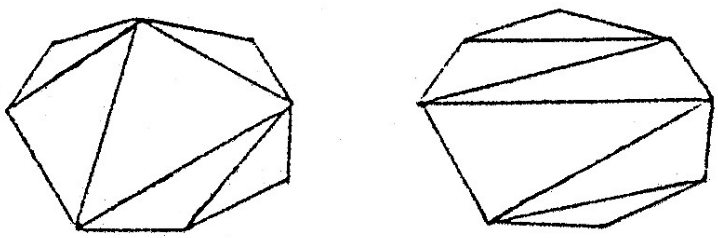
- 목 차 -

인터넷 상에서 구할 수 있는 파일들은 혼글파일도 있습니다만, PDF 및 이미지 파일들도 상당수 있습니다. 이것들을 일일이 혼글파일로 변환하느라고 시간이 상당히 지체되어버렸습니다. 이 자료가 수험생 여러분들의 포스텍 진학에 조금이라도 도움이 된다면 저 또한 기쁘겠습니다.
그리고 제 13회 분밖에 풀이를 구할 수 없었습니다. 나머지는 스스로 풀어 보십시오.

– 이 명환 올림 –

제 5회(1990년) 포항공대 수학경시대회

1. 3차원 공간상에 n 개의 서로 다른 점 $P_1, \cdots, P_n$이 있을 때, 직교좌표축 xyz를 알맞게 잡으면 임의의 두 점 P_i, P_j 의 이 좌표축에 대한 x 좌표 x_i, x_j와 y 좌표 y_i, y_j와 z 좌표 z_i, z_j가 모두 틀림을 보여라.



2. 구간 $(0,\infty)$에서 연속이며 모든 $y>0$에 대해서 $\int_y^{y^2} f(x)dx = \int_1^y f(x)dx$를 만족하는 실함수 $f(x)$를 모두 구하시오.

3. 임의의 볼록 팔각형을 내부에서 서로 만나지 않는 대각선을 그어 삼각형으로 분할하는 방법의 수를 구하시오.

분할 예 :

4. n 차 다항식 $f(x)$가 서로 다른 근 $a_1, \cdots, a_n$ 을 가질 때 $f_i(x)$를 $f(x)=f'(a_i)(x-a_i)f_1(x)$를 만족하는$(n-1)$차 다항식이라 하자. $g(x)$가 임의의 $(n-1)$차 다항식일 때 $g(x)=A_1f_1(x)+\cdots+A_nf_n(x)$가 항등식이 되도록 상수 $A_{1,}\ \cdots, A_n$을 항상 잡을 수 있음을 보이시오.

5. 반경이 1인 구면 $x^2+y^2+z^2=1$ 위에 두 점 $A(x_1,y_1,z_1)$와 $B(x_2,y_2,z_2)$를 잡자. A 와B를 통과하는 임의의 평면은 주어진 구와 만나 곡선을 이루게 되는데 이 곡선의 A 와B사이의 거리가 최소가 되게 하는 평면의 방정식과 그 때의 최소길이를 구하고 답의 타당성을 증명하시오.

6. 양수 위에서 정의된 실수함수 g가 임의의 양수 x, y에 대해 부등식 $|g(x)-g(y)| \leqq 1+|\log\frac{x}{y}|$을 만족한다고 하고, $f(x)=xg(x)$라 정의하면 $|f(x+y)-f(x)-f(y)| \leqq (1+\log 2)(x+y)$ 임을 보이시오.

제 7회(1992년) 포항공대 수학경시대회

1. 유리수 전체의 집합 위에서 정의되고 유리수 값을 갖는 함수f 가 있어서 다음의 두 식이 임의의 유리수 p , q 에 대하여 $f(1)=2$, $f(pq)=f(p)f(q)-f(p+q)+1$ 을 항상 만족한다고 한다. 이러한 함수 f 를 모두 구하시오.

2. 1에서 n까지의 수를 순서 있게 나열하는 모든 경우의 집합을 $S_n=\{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in \{1,\cdots,n\}, i=1, \cdots, n, a_i \neq a_j\,(i \neq j)\}$ 이라 표현하자. 이 때 S_n의 임의의 원소 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$을 다음의 $(n-1)$가지 방법 $(a_2, a_1, a_3, \cdots, a_n)$, $(a_3, a_2, a_1, a_4, \cdots, a_n)$, $(a_4, a_3, a_2, a_1, a_5, \cdots, a_n)$, $\cdots$, $(a_{n-1}, \cdots, a_1, a_n)$, $(a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1)$ 만을 사용하여 바꾸기로 한다. $L(n)$을 $(1, 2, \cdots, n)$으로부터 S_n의 모든 원소를 얻기 위하여 필요한 최소한의 바꿈의 개수라 하자. 즉, S_n의 어떠한 원소도 $L(n)$번 이하의 바꿈으로 $(1,2,3,\cdots,n)$으로부터 얻을 수가 있다.

(1) $L(4)=4$임을 보이시오.

(2) $n \geqq 4$일 때 $L(n) \leqq 2n-4$ 임을 보이시오.

3. α, β, γ, δ를 방정식 $x^4+ax+b=0$ $(b \neq 0)$의 네 근이라 할 때 $\dfrac{1}{\alpha^4}, \dfrac{1}{\beta^4}, \dfrac{1}{\gamma^4}, \dfrac{1}{\delta^4}$의 네 근을 갖는 4차 방정식을 구하시오.

4. (1) sin을 k번 합성한 함수를 $\sin_k$, 즉, $\sin_k(x)=\underbrace{\sin \circ \cdots \circ \sin}_{k}(x)$ 라고 정의할 때에 극한값 $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{\sin_k(2)}{\sin_k(1)}$을 구하시오.

(2) 극한 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\sin x}^{\sin(x+h)} e^{\cos((x+h)t)}dt$을 구하시오.

5. $a < b$ 라 하고 임의의 연속인 두 함수 f_1, f_2 에 대하여

$$\int_a^b \left| f_1(x)+f_2(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b (f_1(y)+f_2(y))dy \right| dx \leqq 2\left[\int_a^b |f_1(x)-1|\,dx+\int_a^b |f_2(x)-2|\,dx\right]$$ 임을 보이시오.

6. 순위가 정해진 $2n$ $(n \geqq 2)$명의 탁구 선수가 2팀으로 나뉘어져 있다. A 팀은 홀수 순위, B 팀은 짝수 순위인 선수들로 구성되어 있다. 두 팀이 임의로 짝을 지어 n번의 단식 경기를 했을 때 A 팀이 단 한 경기만 지고 나머지 $n-1$ 경기를 이길 확률을 구하시오. 단, 각 단식 경기 결과는 순위에 의해 결정된다. (예 : 순위 3인 선수는 순위 4인 선수를 이긴다.)

제 8회(1993년) 포항공대 수학경시대회

1. 0이 아닌 다항식 $p(x)$들 중에서 임의의 실수 x에 대하여 $p(\sin x) = \sin(p(x))$을 만족하는 $p(x)$를 전부 찾고 그 이유를 설명하여라.

2. 자연수 n에 대하여 a_n을 n을 1 또는 2의 합으로 표시할 수 있는 방법의 수로 정의한다(예 : 3 = 1+1 +1 = 2+1 = 1+2이므로 $a_3 = 3$). 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+2}}$의 값을 구하여라.

3. 0이 아닌 실수 x에 대하여 극한 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1+\cos x + i\sin x)}{2}\frac{\left(1+\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right)}{2}\cdots\frac{\left(1+\cos\frac{x}{2^n}+i\sin\frac{x}{2^n}\right)}{2}\right)$을 구하여라.

4. 서로 다른 양수 a, b에 대하여 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 내접하는 삼각형 중 밑변이 X축과 평행한 삼각형 중에 최대 면적을 갖는 삼각형이 있음을 보여라. 그리고 그 최대 면적을 구하여라.

5. 임의의 자연수 $1 \leqq i \leqq n$에 대하여 T_i는 n개의 정수 성분을 갖는 벡터를 n개의 정수 성분을 갖는 벡터로 바꾸는 일차변환으로 $T_i\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_{i-1}+x_i \\ -x_i \\ x_{i+1}+x_i \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}$, $1 < i < n$, 그리고 $T_1\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-x_1\\ x_2+x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}$,

$T_n\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_{n-1}+x_n \\ -x_n\end{bmatrix}$으로 정의된다.

(1) 벡터 $\vec{x}$의 첫 번째 성분 x_1이 음의 정수라 하자. 벡터 $T_M T_{M-1}\cdots T_1(\vec{x})$의 음의 정수가 아닌 성분의 개수가 벡터 $\vec{x}$의 음의 정수가 아닌 성분의 개수보다 하나 더 많게 되도록 하는 수 M을 구하고 그 이유를 설명하여라.

(2) n개의 정수 성분으로 된 임의의 벡터 $\vec{x}$에 유한번의 일차변환 T_i들을 작용시켜서 음의 정수 성분을 갖지 않는 벡터로 바꿀 수 있음을 증명하여라.

6. 1, 2, 4, 8, 19의 다섯 숫자를 써서 2×2 행렬을 만들 때 같은 숫자를 중복하여 쓸 수 있다고 하자. 이렇게 만든 행렬이 역행렬을 가질 확률을 구하여라.

제 9회(1994년) 포항공대 수학경시대회

1. $\sqrt{2}$ 는 무리수이다. $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{8}$,$\beta=\sqrt[3]{2}+\sqrt[5]{2}+\sqrt[4]{8}$,$\gamma=\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[5]{2}$ 라 할 때, α,β,γ 중 적어도 1개는 무리수임을 보여라.

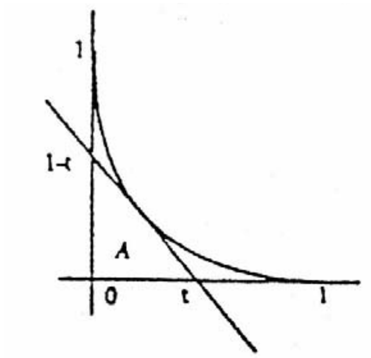
2. 두 번 미분 가능한 함수 f 가 $f(0)=0$ 이고 모든 실수 x 에 대하여 $|f''(x)|\leqq 1$ 이라고 하자.

(1) 임의의 양수 a 에 대하여 $\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^1\left|f\dfrac{(ax)}{a}-f'(0)x\right|dx\leqq\dfrac{1}{3}$ 임을 보여라.

(2) 임의의 양수 a 에 대하여 $\dfrac{\log(a+1)}{a^3}-\dfrac{1}{2a}\leqq\dfrac{1}{3}$ 임을 보여라. (단, log는 자연 대수이다.)

3. 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{2^{3^n}}+\frac{1}{2^{2\cdot 3^n}}\right)$ 의 값을 구하여라. (단, log는 자연 대수이다.)

4. x 절편과 y 절편의 합이 1이 되는 직선은 $(1-t)x+ty=t(1-t)$ 로 표현될 수 있다. t가 0에서 1까지 변할 때 만들어지는 모든 직선들의 자취 중 제 1사분면 부분 A 의 면적을 구하라.



5. 중심이 원점에 있는 공의 표면에서 P,Q,R 을 임의로 잡을 때 세 벡터 $\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR}$ 이 만드는 세 사잇각이 모두 예각일 확률을 구하여라.

6. p_n을 n번째 소수라 하고,

$$a_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\right)\times\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{p_n}+\frac{1}{p_n^2}+\frac{1}{p_n^3}+\cdots\right)$$ 라고 하자.

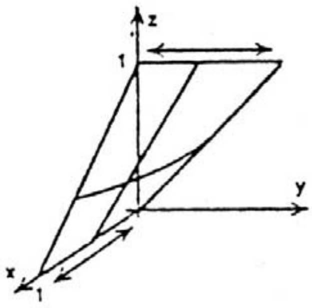
(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 이 발산함을 이용하여 수열 $\{a_n\}$ 은 발산함을 보여라.

(2) $\log n-\log(n-1)\leqq\dfrac{2}{n}$ 을 이용하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ 도 발산함을 보여라. (단, log는 자연 대수이다.)

제 10회(1995년) 포항공대 수학경시대회

1. A 회사에서 생산되는 모든 과자 봉지에는 n 종류의 장난감 중 하나가 임의로 선택되어 들어 있다. 모든 종류의 장난감을 다 모으려면 과자 봉지를 평균적으로 몇 개 사야 하겠는가?

2. 좌표공간에 길이가 $\sqrt{2}$ 이고, 양끝이 $(0,0,1)$과 $(1,0,0)$에 위치한 막대가 있다. 이 막대의 한 끝이 점 $(0,0,1)$과 점 $(0,1,1)$을 잇는 선분 위에 있고, 다른 한 끝이 점 $(1,0,0)$과 점 $(0,0,0)$을 잇는 선분 위에 있도록 하며 움직인다. 막대의 자취와 xz 평면 및 yz 평면으로 둘러싸인 공간도형의 부피를 구하여라.



3. $A=\{(x,y) \mid y \geq |x|^p\}, B=\{(x,y) \mid x^2+(y-r)^2 \leq r^2\}$ $1 < p < 2$ 라 하자. 양수 r 의 어떤 값에 대하여도 B가 A 의 부분집합이 될 수 없음을 보여라.

4. 임의의 자연수 n 에 대하여

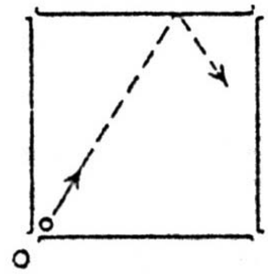
(1) $A_n = {}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots$, $B_n = {}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \cdots$ 이라 할 때, $A_n = B_n$ 임을 보여라. (단, $r > n$ 일 때, ${}_nC_r = 0$ 으로 정의한다.)

(2) $C_n = {}_nC_0 + {}_nC_3 + {}_nC_6 + \cdots$, $D_n = {}_nC_1 + {}_nC_4 + {}_nC_7 + \cdots$, $E_n = {}_nC_2 + {}_nC_5 + {}_nC_8 + \cdots$ 이라 할 때, C_n, D_n, E_n 중 둘은 값이 같고 나머지 하나는 이들과 차이가 1임을 보여라. (힌트 : $x^3=1$ 의 한 허근을 이용할 수 있다.)

5. 평면상의 점 $P(x,\ y)$ 중 $x,\ y$가 모두 정수인 점을 격자점이라 한다.

(1) $0 \leq y \leq 100$ 이라 하자. 격자점 $P(100,\ y)$와 원점 O를 잇는 선분이 양 끝점 외에 다른 격자점을 포함하지 않게 하는 y 값의 개수를 구하여라.

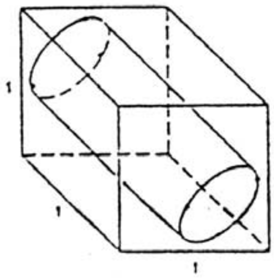
(2) 오른쪽 그림과 같이 각 꼭지점에 구멍이 나있고 각 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 당구대가 있다. 당구공이 움직이다 꼭지점에 닿으면 구멍을 통하여 빠져 나온다 하자. 점 O에서 당구공을 칠 때, 공이 움직인 거리가 7 이하가 되는 경로는 몇 가지 있는가?(단, 당구공의 크기와 구멍의 크기는 무관하다.)



6. 모서리의 길이가 1인 정육면체 속에 직원기둥을 정육면체의 각 면과 점으로 만나도록 넣는다.

(1) 직원기둥의 부피의 최대값을 구하여라.

(2) 부피가 최대인 직원기둥을 정육면체의 밑면에 투영하였을 때, 정사영의 넓이를 구하여라.



제 11회(1996년) 포항공대 수학경시대회

1. 공간상에 길이가 1이고 서로 수직인 두 벡터 $\overline{u}=(a,u_1,u_2)$, $\overline{v}=(b,v_1,v_2)$가 있을 필요충분조건은 $a^2+b^2 \leqq 1$ 임을 보여라.

2. $f''(x) \geqq 0$인 함수$y=f(x)$와 직선 $y=l(x)$가 $a<b$인 두 실수 a,b에 대하여 $f(a)=l(a), f(b)=l(b)$를 만족한다면 구간$[a,\ b]$에서 항상 $l(x) \geqq f(x)$임을 보여라.

3. A와 B가 가위 바위 보를 하여 높은 계단을 먼저 올라가는 시합을 한다. 보로 이기면 5칸을, 가위로 이기면 2칸을, 바위로 이기면 1칸을 오르고, 비기거나 지면 제자리에 서 있는다. B는 A가 가위$\frac{1}{3}$, 바위$\frac{1}{6}$, 보$\frac{1}{2}$의 빈도로 내는 것을 안다. B가 선택할 최선의 방법을 구하여라.

4. $X=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 8\}$이라 할 때, $f:X \to X$ 중 $f(f(f(x)))=x$를 만족하는 함수 f의 개수를 구하여라.

5. $|z|=1$인 어떠한 복소수 z를 대입하여도 부등식 $|1+z|^3+A|1-z|^2 \leqq 8$을 만족시키는 실수 A 중에서 최대인 것을 구하여라.

6. 여러 번 미분 가능한 함수 $y=f(x)$가 조건 $f(0)=f'(0)=0$와 $f''(0)=3$을 만족한다. 충분히 작은 양수t에 대하여 좌표 평면 위의 세 점$(t, f(t)), (0,0), (-t, f(-t))$를 지나는 원의 반지름을 $R(t)$라 할 때, $\lim_{t \to 0} R(t)$를 구하여라.

7. 한 변의 길이가 1인 정사면체의 꼬인 위치에 있는 두 모서리의 중점 A, B를 지나는 직선 l이 있다. 이 직선 l을 축으로 정사면체를 회전시켜 생긴 입체 u의 부피를 구하여라.

제 13회(1998) 포항공대 수학경시대회 문제

1. 정사각형 4개를 면과 면을 임의로 붙여서 정삼각형 4개로 이루어진 도형을 만들 때, 이 도형이 정사면체의 전개도가 될 확률을 구하여라. (12점)

2. 정육면체 모양의 두부를 가로 13모, 세로 9모, 높이 5모씩 쌓아 직육면체를 만들었다. 철사로 이 직육면체의 대각선을 관통할 때 철사가 통과하는 두부의 갯수를 구하여라. 단 철사의 굵기는 무시한다. (17점)

3. 실수 a와 x에 대하여 함수 $(x-a)^3 = \begin{cases}(x-a)^3, & x-a \ge 0\text{일 때} \\ 0, & x-a < 0\text{일 때}\end{cases}$ 로 정의한다. 함수 $K(x)=\frac{2}{3}\left\{2\left(-\frac{1}{2}-x\right)^3-(-x)^3+2\left(\frac{1}{2}-x\right)^3\right\}-\int_{-1}^{1}(t-x)^3dt$라 할 때, 구간 $[-1,1]$에서 $K(x)\le 0$임을 증명하여라. (12점)

4. 함수 $f(x)=(1+x)^3$에 대하여 함수 $g(y)=f^{(1998)}(0)$를 $x=0$에서 $f(x)$를 1998번 미분한 값으로 정의할 때, $\int_0^1 g(-y-1)\left(\frac{1}{y+1}+\cdots+\frac{1}{y+1998}\right)dy$의 값을 계산하여라. (15점)

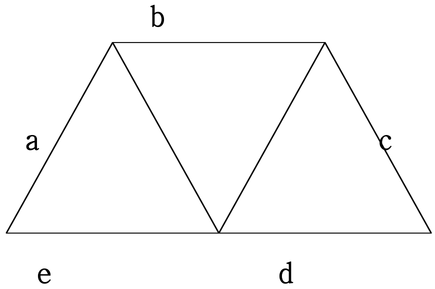
5. 공간상에 삼각형 ABC의 꼭지점 좌표가 (0,0,0),(1,0,0),(0,1,0)으로 주어지고 선분 DE의 양 끝점의 좌표가 (0,0,1),(1,1,2)로 주어져 있다. 삼각형 ABC의 각 내부 점과 선분 DE상의 각 점을 모두 연결하여 만들어지는 입체의 체적을 구하여라. (17점)

6. 22,222보다 작은 자연수 중 각 자리의 숫자의 합이 10이 되는 자연수의 갯수를 구하여라. (12점)

7. 어느 공장에서 사용하는 기계의 수명은 a 단위시간이고, 가격은 b 단위 원이다. 만일 $t(0 \le t \le a)$ 단위시간 사용한 기계의 유지비용이 단위 시간당 $\frac{bt^2}{a^2}$ 단위 원이 들고, 중고 가격은 $t^2-\left(a+\frac{b}{a}\right)t+b$ 단위 원이라면, 이 공장에서는 얼마 간격으로 기계를 새 것으로 교체하는 것이 장기적으로 최적인가? (15점)

제 13회(1998) 포항공대 수학경시대회 풀이

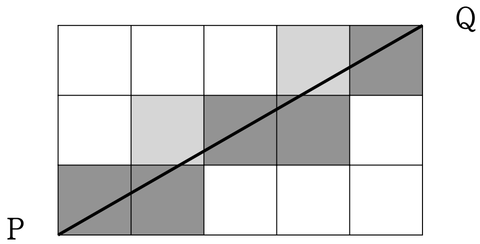
문제1 풀이) 3개의 정삼각형을 붙인 도형은 확률 1로 다음과 같이 된다.



네 번째 정삼각형이 d, e에 붙지 않으면 정사면체의 전개도가 된다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{5}$이다.

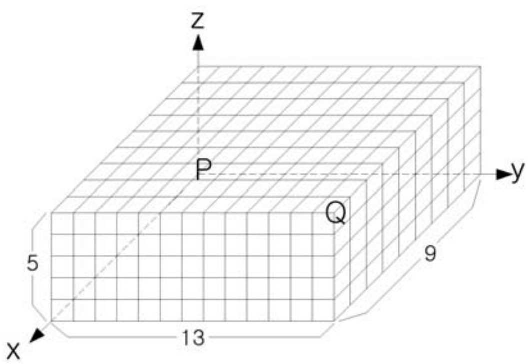
(답) $\frac{3}{5}$

문제2 풀이) 우선 평면상에서 이와 유사한 문제를 생각해 보자.



PQ를 연결할 때 통과하는 정사각형 개수 = 5+3−1(직선 PQ가 직선 y=1, y=2를 만날 때 만나는 점이 격자점이 아니므로 정사각형이 하나 더 생김)

위의 논리를 확장하면 주어진 직사각형의 가로가 m개 세로가 n개(m,n은 서로소)의 정사각형으로 이루어졌다하고 대각선을 연결하면 m+n+1개의 사각형을 통과함을 알 수 있다. 본문제로 들어가서,



PQ를 연결할 때 통과하는 정육면체 개수

$= 13 + \underline{(9-1)} + \underline{(5-1)} = 25$

직선 PQ가 평면
x=1,…, x=8와
만나는 점이 격자점이
아니라 증가하는 갯수

직선 PQ가 평면
z=1,…, z=4와
만나는 점이 격자점이
아니라 증가하는 갯수

(답) 25개

문제3 풀이) $\int_{-1}^{1}(t-x)^3+dt=\int_{-1}^{x}(t-x)^3dt+\int_{x}^{1}(t-x)^3dt \;=\; \int_{x}^{1}(t-x)^3dt \;=\; \frac{1}{4}(t-x)^4 \;=\; \frac{1}{4}(x-1)^4$이므로, $K(x)=\frac{2}{3}\left\{2\left(-\frac{1}{2}-x\right)^3-(-x)^3+2\left(\frac{1}{2}-x\right)^3\right\}-\frac{1}{4}(x-1)^4$

$-1\le x\le -\frac{1}{2}$인 경우;

$$K(x)=\frac{2}{3}\left\{2\left(-\frac{1}{2}-x\right)^3-(-x)^3+2\left(\frac{1}{2}-x\right)^3\right\}-\frac{1}{4}(x-1)^4 \;=\; \frac{1}{4}(x-1)^4$$

$-\frac{1}{2}\le x\le 0$인 경우;

$$K(x)=\frac{2}{3}\left\{2\left(-\frac{1}{2}-x\right)^3-(-x)^3+2\left(\frac{1}{2}-x\right)^3\right\}-\frac{1}{4}(x-1)^4$$

비슷한 방법으로 $0\le x\le\frac{1}{2}$인 경우, $\frac{1}{2}\le x\le 1$인 경우를 나누어 생각하면,

$$K(x)=\begin{cases} -\frac{1}{4}(x+1)^4, & -1\le x\le -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{12}\left(3x^4-4x^3-6x^2+1\right), & -\frac{1}{2}\le x\le 0 \\ 1\frac{1}{12}\left(3x^4+4x^3-6x^2+1\right), & 0\le x\le\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}(1-x)^4, & \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$$

임을 알 수 있다.

따라서 $K(x)=K(-x)$이고 $0\le x\le 1$에 대하여 $K(x)\le 0$임을 증명하면 충분하다.

(i) $0\le x\le\frac{1}{2}$인 경우,

$K(x)=-\left(x^3+x^2-x\right)=-x\left(x^2+x-1\right)>0, K\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{64}$

따라서 $K(x)\le 0$

(ii) $\frac{1}{2}\le x\le 1$인 경우

$K(x)=-\frac{1}{4}(x-1)^4\le 0$

문제4 풀이) $g(-y-1) = \dfrac{d^{1998}}{dx^{1998}}(1+x)^{-y-1}$

$= (-y-1)(-y-2)\cdots(-y-1998)(1+x)^{-y-1-1998}$

$=(y+1)(y+2)\cdots(y+1998)$

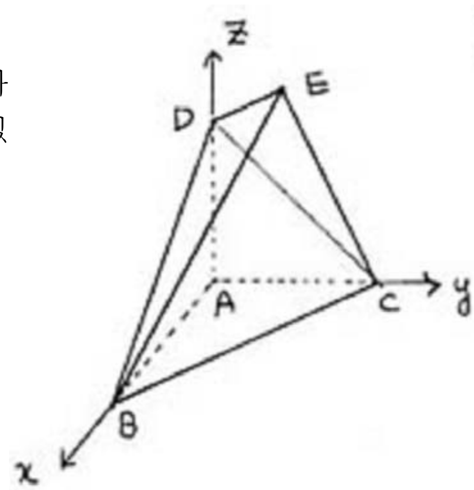
따라서,

$$\int_0^1 g(-y-1)\left(\frac{1}{y+1}+\cdots+\frac{1}{y+1998}\right)dy$$

$$\int_0^1 (y+1)(y+2)\cdots(y+1998)\left(\frac{1}{y+1}+\cdots+\frac{1}{y+1998}\right)dy$$

$$\int_0^1 \frac{d}{dy}((y+1)(y+2)\cdots(y+1998))dy = [(y+1)(y+2)\cdots(y+1998)]^1$$

$= 1999! - 1998! = (1998!)\bullet(1998)!$



문제5 풀이) 구하는 도형은 아래 모양과 같이 △BCD를 밑변으로 하는 두 개의 사면체(사면체 ABCD, 사면체 BCDE)의 합으로 되어있다.

사면체 ABCD의 부피 $= 1\times1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

사면체 BCDE의 부피 $= \frac{1}{3}\times$밑면적$\times$높이$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=\frac{1}{2}$

밑면적 $= \frac{\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

높이 $= \frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ ($\because$ 평면 BCD의 방정식은 $x+y+z=1$이 된다.)

따라서 구하는 부피 $= \frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$ (답) $\frac{2}{3}$

문제6 풀이) 구하는 숫자를 $a_1a_2a_3a_4a_5$라 쓸 때 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=10$이고 $0\le a_1\le9$를 만족해야 한다.

(i) $a_1=0$인 경우

부정방정식 $a_2+a_3+a_4+a_5=10,\ a_1\ge0$의 해의 갯수는 ${}_4H_{10}$

이 중 $a_2=10, a_3=a_4=a_5=0$인 것 등은 제외해야 하므로 $a_1=0$인 경우에 가능한 가지수는 ${}_4H_{10}$=4이다.

(ii) $a_1=1$인 경우

$a_2+a_3+a_4+a_5=9$ $\therefore$ 가지수 $= {}_4H_9$

(iii) $a_1=2$인 경우 $\Rightarrow$ $a_2+a_3+a_4+a_5=8$, $a_2=0,1,2$

(iii)-① $a_2=0$ $a_3+a_4+a_5=8$ $\therefore$ ${}_3\mathrm{H}_8$ 가지

(iii)-② $a_2=1$ $a_3+a_4+a_5=7$ $\therefore$ ${}_3\mathrm{H}_7$ 가지

(iii)-③ $a_2=2$ $a_3+a_4+a_5=6$, $a_3=0,1,2$

$a_3=0$ $\Rightarrow$ ${}_2\mathrm{H}_6$ 가지

$a_3=1$ $\Rightarrow$ ${}_2\mathrm{H}_5$ 가지

$a_3=2$ $\Rightarrow$ $a_4+a_5=4$ $\left((a_4,a_5)=(0,4),(1,3)\text{인 두가지}\right)$

따라서 구하는 경우의 수는

$2+{}_2\mathrm{H}_5+{}_2\mathrm{H}_6+{}_3\mathrm{H}_7+{}_3\mathrm{H}_8+{}_4\mathrm{H}_9+{}_4\mathrm{H}_{10}-4$

$=2+{}_6\mathrm{C}_5+{}_7\mathrm{C}_6+{}_5\mathrm{C}_7+{}_{10}\mathrm{C}_8+{}_{12}\mathrm{C}_9+{}_{13}\mathrm{C}_{10}-4$

$=2+6+7+36+45+220+286-4$

$=598$

(답) 598개

문제7 풀이) t 단위시간 사용 후 교체한다고 하자. (따라서 $0\le t\le a$), 이 기간 동안 들어간 비용은

$$b+\int_0^1 \frac{b}{a^2}x^2dx-\left(t^2-\left(a+\frac{b}{a}\right)t+b\right) = \frac{b}{3a^2}t^3-t^2+\left(a+\frac{b}{a}\right)t$$

단위시간 당 비용은 $\frac{b}{3a^2}t^3-t^2+\left(a+\frac{b}{a}\right)$이며, 이를 최소화하는 t의 값이 장기적으로 최적이 된다.

$$\frac{b}{3a^2}t^3-t^2+\left(a+\frac{b}{a}\right)-\frac{b}{3a^2}\left(t-\frac{3a^2}{2b}\right)^2-\frac{3a^2}{4b}+a+\frac{b}{a}$$

$f(t)=\frac{b}{3a^2}t^2-t+\left(a+\frac{b}{a}\right)$의 그래프를 $0\le t\le a$에서 그려서 생각하면,

$\frac{3a^2}{2b}\le a$인 경우 $t=\frac{3a^2}{2b}$

$\frac{3a^2}{2b}\le a$인 경우 $t=a$

에서 최소값을 갖는다.

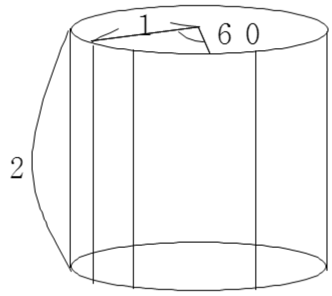
(답) $\begin{cases} 3a\le 2b\text{인 경우 } t=\frac{3a^2}{2b} \\ 3a>2b\text{인 경우 } t=a(\text{끝까지 사용함}) \end{cases}$

제16회(2001년) 포항공대 수학경시대회

1. (10점) $0<t<1$인 양수 t에 대하여 두 복소수 α, β가 $|\alpha|+|\beta| \leqq 1+t$, $|\alpha| \leqq 1$, $|\beta| \leqq 1$을 만족한다. 부등식 $|t\alpha-\beta|^3+(1+t^2)|\alpha+t\beta|^2 \leqq (1+t^2)^3$가 성립함을 보여라.

2. (15점) 삼각형 ABC의 꼭지점 A,B,C를 중심으로 하여 반경이 각각 $x,y,z \geqq 0$인 원판 D_A, D_B, D_C를 그린다. D_A, D_B, D_C는 다른 꼭지점을 내부에 포함하지 않고(단, 원주상에는 있을 수 있음), 서로 만나지 않거나 접할 수 있다. 원판 D_A, D_B, D_C의 넓이의 합이 최대가 되려면 $xyz=0$임을 보여라. (단, 반경이 0인 원판은 한 점으로 이해한다.)

3. (15점) 반경이 1인 두개의 원판이 수직거리 2로 평행하게 놓여 있다. 각 원주점들은 길이가 2인 실로 수직으로 팽팽하게 연결한 후 위의 원판을 60°회전시켰을 때, 두 원판과 실로 둘러싸인 입체의 부피를 구하여라.



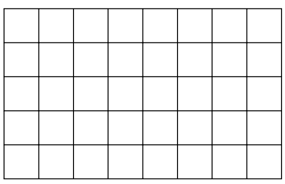
4. (15점) a,b는 복소수이고, $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$라고 하자. 음이 아닌 정수 n에 대하여 $\mathrm{A}^{2^{n+1}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$을 만족하는 A의 개수를 구하여라.

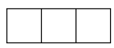
5. (15점) $x_1=\dfrac{1}{100}$, $x_n=-x_{n-1}^2+2x_{n-1}$, $n \geqq 2$이라고 정의할 때 부등식

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(x_{n+1}-x_n)^2+(x_{n+1}-x_n)(x_{n+2}-x_{n+1})]<\frac{1}{3}$$
이 성립함을 보여라.

6. (15점) 일방통행로에 일렬로 배열되어 있는 주차장소 1,2,3,4가 있다. 네 대의 차 C_1, C_2, C_3, C_4가 이 길로 들어서서 주차하려고 한다. 차 C_i는 자기가 선호하는 주차장소 번호 a_i가 있다$(1 \leqq i \leqq 4)$. 각 차는 자기가 선호하는 번호의 주차 장소까지 가서 그 주차장소가 비어 있으면 그 곳에 주차하고, 아니면 가능한 가장 가까운 그 앞의 주차 장소에 주차한다(단, 후진은 불가함). 네 대중 어느 한 대라고 주차에 실패하면 주차 실패이고, 네 대가 모두 주차하면 주차 성공이다. 주차 성공하게 되는 주차 장소 선호 번호열 (a_1,a_2,a_3,a_4)의 경우의 수를 구하여라.

7. (15점) 아래 그림과 같이 5×8의 정사각형들로 이루어진 장기판이 있다. 정사각형 3개로 이루어진 일자형의 3×1의 직사각형 13개와 1×1의 정사각형 1개를 가지고 이 장기판을 덮는다. 1×1 정사각형이 놓일 수 있는 가능한 위치를 모두 찾고 그 이유를 설명하여라.





18회(2003년) 포항공대 수학경시대회 문제

1. 실수 a,b,c,d로 이루어진 행렬 $A=\begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix}$가 $a+d \geqq 2$를 만족한다. 어떤 자연수 n에 대해서 $A^{2n+1}=I$ (I는 단위행렬)을 만족할 때, $A=I$임을 보이시오.

2. 감소하는 양의 실수 수열 $\{a_n,\{b_n$(세 수열은 모두 수렴)이 있다. $A=\{1,2,\cdots,n$에 대해 함수 f,g는 각각 $f:A \to A, g:A \to A$이고 모두 전단사함수이다. 다음을 증명하시오.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_{f(n)} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_{f(n)} c_{g(n)} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n$

3. $S=\{(m,n)|1 \leqq m \leqq N, 1 \leqq n \leqq N\}$에 대해 $f:S \to S$인 전단사함수 f가 있다. $f(m,n)=(x(m,n),y(m,n))$이라고 표현한다. 다음을 증명하시오.

(i) N이 짝수일 때, 모든 $m,n(1 \leqq m \leqq N, 1 \leqq n \leqq N)$에 대해 $|x(m,n)-m|+|y(m,n)-n|=1$을 만족하는 f를 하나만 구하시오.

(ii) N이 홀수일 때, 모든 $m,n(1 \leqq m \leqq N, 1 \leqq n \leqq N)$에 대해 $|x(m,n)-m|+|y(m,n)-n| \leqq 1$을 만족하는 f가 있을 때, $f(a,b)=(a,b)$인 a,b가 존재함을 보이시오.

4. 무리수 α에 대해 $S(\alpha)=\{[n\alpha]\,|n=1,2,\cdots$라고 정의하자(단, 실수 x에 대해 $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수).

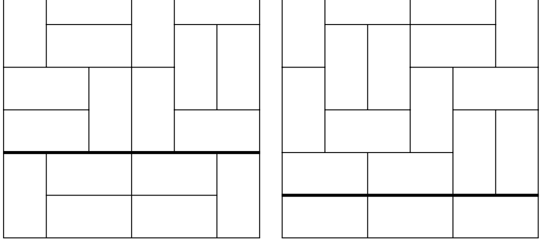
(i) 1보다 큰 무리수 α에 대해 $S(\alpha) \cup S(\beta)=N, S(\alpha) \cap S(\beta)=\varnothing$인 무리수 β가 존재함을 보여라.

(ii) $\sum_{i=1}^{100}[i\sqrt{2}]+\sum_{k=1}^{41}[k\sqrt{2}]$를 계산하여라. 필요하면 $1.414<\sqrt{2}<1.415$를 이용하여라.

5. 옆면만 존재하는 원기둥이 있는데, 밑면의 반지름의 길이는 1cm이고, 이 원기둥의 높이는 4cm이다. 밑면으로부터 2cm인 곳을 자른 단면을 생각할 때, 그 단면이 되는 원의 지름 중 하나를 잡아 그 직선을 축으로 이 원기둥을 회전시키자. 이 회전체의 부피를 구하여라. 옆면만 존재한다는 것은, 직사각형 모양의 종이 혹은 철판을 둘둘 말아서 원기둥을 만든 형태라는 뜻이다.

6. 6x6 짜리 판이 있고, 이것을 18개의 2x1 짜리 타일로 깔려고 한다(상식적으로 생각하시오). 그러면 어떻게 깔든 간에, 그림과 같이 한 변에서 마주보는 대변으로 이어지는 선이 적어도 하나 생김을 보여라.

(예시)



왼쪽 굵은 선과 같이, 두 대변을 잇는 선이 존재함을 보이는 문제임.

제 19회(2004년) 포항공대 수학 경시대회 문제

1. 2×2행렬 A의 행렬식이 양수이고, E가 2×2단위행렬이면 다음(a)와(b)중 하나가 항상 성립함을 보여라.

(a) 모든 $t\in(0,1)$에 대하여 $(1-t)E+tA$가 역행렬을 갖는다;

(b) 모든 $t\in(0,1)$에 대하여 $(t-1)E+tA$가 역행렬을 갖는다.

2. 한변의 길이가 1인 정육면체의 8개의 꼭지점들의 집합을 X라고 하자. 함수 $f:X\to X$중 모든 꼭지점 v에 대하여 v에서 $f(v)$까지의 거리가 1이되는 일대일 함수 f의 개수를 구하여라.

3. 주어진 실수 $a_1,a_2,......,a_5$와 임의의 양수 t에 대하여 6차방정식 $tx^6-(a_5x^5+a_4x^4+...+a_2x^2+a_1x)-1=0$을 생각한다. 다음 사실을 증명하여라.

(a) 양수 t가 충분히 클 때 위 방정식은 오직 2개의 실근을 가짐을 보여라.

(b) 위(a)에서 2개의 실근을 $x_1(t)$와 $x_2(t)$라고 할 때, $\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{6}}\ x_1(t)-x_2(t)\ =2$임을 보여라.

4. 함수 $f:[0,\infty)\to R$가$[0,\infty)$에서 연속이고, $(0,\infty)$에서 미분가능하다고 하자. 함수 f가 다음과 같은 세 가지 성질을 만족하면, $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$임을 증명하여라.

(a) $f(0)=1$;

(b) 모든 $x\in(0,\infty)$에 대하여 $f'(x)-\dfrac{1}{2}f(x)\geq 0$이다.;

(c) 모든 $x\in[0,\infty)$에 대하여 $[f(x)]^2\leq 1+\displaystyle\int_0^x [f(s)]^2 ds$이다.

5. 평면상의 세점 $(0,1),(-1,-1),(1,-1)$을 꼭지점으로 하는 삼각형을 T라고 하자. $\overline{T}=\ y=(x,y)$ 임의의 $X=(a,b)\in T$에 대하여 $X\cdot Y=ax+by\leq 1$라고 할 때, $\overline{T}$의 모양과 그 넓이를 구하여라.

6. 각 변의 길이가 1인 속이 꽉 찬 정사면체를 꼭지점은 꼭지점끼리, 모서리는 모서리끼리, 면은 면끼리만 닿도록 여러 개 붙인다. 이렇게 만들어진 입체를 깎아서 반지름이 2인 속이 꽉 찬 구를 만들 수 없음을 증명하여라.

제 20회(2005년) 포항공대 수학경시대회 문제

1. 모서리의 길이가 1인 정육면체의 모서리를 붓으로 칠하려고 한다. 주어진 붓은 공간의 단위벡터 e_1, e_2, e_3 방향으로만 움직일 때 칠해지며 단위벡터와 반대 방향으로 움직이면 칠해지지 않는다. 한 꼭지점에서 시작하여 붓을 떼지 않고 움직여 모서리를 다 칠하기 위하여 붓을 떼지 않고 움직여 모서리를 다 칠하기 위하여 붓을 움직여야 하는 최소거리를 구하고, 그것이 최소거리임을 보여라.

2. 수열 $\{a_n\}$은 점화식 $a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n$, $a_0 = a_1 = 1$을 만족한다. $|a_n| = 1$을 만족하는 n은 0, 1 뿐임을 보여라.

3. 중점에서 꼭지점까지 거리가 1인 정n각형이 있다. 이 정n각형위에 점 3개를 찍어 그려지는 삼각형 중 둘레의 길이가 가장 긴 삼각형의 둘레의 길이 L_n을 구하고 그것이 최대길이임을 보여라.

4. 정의역이 양의 실수인 실수함수 f에 대하여 $|f(x+y) - f(x) - f(y)| \le x + y$이고 $x > y > 0$일 때 $\left|\frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y}\right| \le M(1 + \log_2 \frac{x}{y})$이 성립함을 보여라. ($M$은 x, y와는 관련이 없는 상수이다.)

5. 변의 길이가 2인 정삼각형ABC의 밑변 $\overline{AB}$를 2^n등분하여 생긴 점들을 꼭지점 c와 연결하여 2^n개의 삼각형을 만든다. 이 삼각형들을 밑변 $\overline{AB}$를 포함하는 축을 따라 좌우로 평행이동 시켜서 서로 겹치게 만든 도형(삼각형들의 합집합)들을 생각한다. 자연수 m이 아무리 크더라도 자연수 n을 충분히 크게 잡아 넓이가 $\frac{1}{m}$보다 작은 도형을 만들어 낼 수 있음을 보여라.

제 21회(2006년) 포항공대 경시대회 문제

(3시간 동안 5문제, 5문제 모두 서술형)

1. 붓을 떼지 않고 정육면체의 변을 색칠하는데, e_1, e_2, e_3 방향으로 붓이 움직일 때는 변이 색칠이 되고, 반대방향으로 움직일 때는 색칠이 되지 않는다고 할 때 , 정육면체의 모든 변을 색칠하기 위해서는 적어도 몇 번 붓을 움직여야 하는지 구하시오.

2.$a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} - 4a_n$ 을 만족할 때, $|a_n| = 1$이 되는 항이 a_0, a_1밖에 없는 이유를 증명하시오.

3. 중심에서부터 꼭지점까지의 거리가 1인 정n각형이 있다. 이 정n각형 위에 3개의 점을 잡아 삼각형을 만들 때, 둘레의 길이가 최대가 되는 길이 L_n을 구하고 그 이유를 증명하시오.

4.$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \le x+y$일 때(단, $x > y > 0$), 이것을 만족하는 실수 함수 f가 항상 $\left| \frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y} \right| \le M\left(1 + \log_2 \frac{x}{y}\right)$을 만족하는 이유를 증명하시오.

5. 한 변의 길이가 2인 정삼각형ABC가 있다. 밑변 $\overline{AB}$ 를 2^n등분할 때 만들어지는 삼각형들을 평행이동하여 겹쳐진 삼각형들의 합집합의 넓이가n을 크게 하고 m을 크게 해도 $\frac{1}{m}$보다 작게 되는 삼각형을 만들 수 있음을 증명하시오.

제 22회 포항공대 수학경시대회(2007/7/30 시행)

시간 PM1:00~4:00 3시간, 문항:6문항 모두 서술형. 문제지, 답지 따로 시험 후 모두 회수
문제는 시험지와 100% 동일하며, 그림도 99% 같다고 보시면 됩니다.

1. 반지름이 1인 파란 공 15개와 검은 공 1개가 있다. 이 파란 공 15개가 동시에 검은 공에 접할 수 없음을 보여라.

2. 면적이 4인 삼각형이 있다. 이 삼각형 안에 점 다섯 개를 임의로 찍었다. 이 점들 다섯 개에서 세 개를 직선으로 이어서 면적이 1 이하인 삼각형을 그릴 수 있음을 보여라. (점 세 개가 직선 위에 있을 때 만들어지는 삼각형의 면적은 0으로 한다.)

3. 평면 위를 움직이는 두 대의 로봇 R2와 D2가 있다. 처음에 R2는 A에, D2는 B에 서 있다. 이 두 로봇은 다음과 같은 조건을 만족해야 동작이 유지된다.

- R2에서 A까지의 거리는 D2에서 B까지의 거리와 같아야 한다.
- R2에서 B까지의 거리는 D2에서 A까지의 거리와 같아야 한다.
- R2와 D2 사이의 거리는 항상 2m 이상 유지되어야 한다.

A와 B 사이의 거리는 4m 이다. 이 평면 위에서 R2를 B로, D2를 A로 이동시키기 위한 두 로봇들의 최소 이동 거리의 합은 얼마인가?

4. 함수 F : Z × Z -> R는 모든 양의 정수 k에 대해

$$f(n,m)=\frac{1}{8k}\sum_{1=k}^{k}\{f(n+1,m-k)+f(n+1,m+k)+f(n-k,m+1)+f(n+k,2m-1)\}$$

을 만족한다. (여기서 Z는 정수 전체의 집합이고, R은 실수 전체의 집합이다.)함수 f에 대해 양의 실수 M이 존재하여 임의의 정수 m,n에 대해 $|f(n.m)|< M$이라면 함수 f는 상수 함수임을 보여라.

5. 정수 m과 n은 홀수이다. n^2-1이 m^2+1-n^2의 배수이면 m^2+1-n^2은 제곱수임을 보여라.

6. 실수 c에 대해 Tc는 점(c,ec)에서 y=ex에 대한 접선이고 Nc는(c,ec)를 지나고, Tc에 수직인 직선이다. 실수 c와 양의 실수 r에 대해 다음 세 가지 조건을 동시에 만족하는 xy평면 위의 점(a,b)들의 집합을 B(c,r)이라고 하자.

- $b \geqq e^a$
- 점(a,b)에서 직선 Tc까지의 거리는 r이하이다.
- 점(a,b)에서 직선 Nc까지의 거리는 r이하이다.

집합 B(c,r)의 면적을 A(c,r)이라고 하자.

(a)다음을 보여라.

$$\lim_{|c|\to\infty} A(c,r) = 2r^2$$

(b) (a)의 결과는 주어진 양의 실수 r에 대해 면적 A(x,r)이 최소가 되는 실수 x가 존재함을 보여준다. 이 실수를 x(r)이라고 할 때, 다음 극한값을 구하여라.

$$\mathrm{Lim}_{r\to+0}\, x(r)$$