誤差と浮動小数点

次の計算をしてみよう

①5.4-5.3=
②4.8-4.7=

計算結果は同じだが厳密には違う！
なぜこのようなことが生じるのか？

この原因は2進数です！

2進数小数を10進数に変換

①11.101

				2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
				2/1	4/1	16/1
桁の重み	2^1	2^0		(0.5)	(0.25)	(0.125)
	×	×		×	×	×
	1	1	.	1	0	1
	2 +	0	.	0.5 +	0 +	0.125

答え　2＋0.625=2.625

2進数小数を10進数に変換 | ②

② 1 0 1 . 0 $1_{(2)}$

2^2 2^1 2^0 0.5 0.25

$$2^2\times 1+2^1\times 0+2^0\times 1 + 0.5\times 0+0.25\times 1$$

$$= 4 + 0 + 1 + 0 + 0.25$$

$$=5.25$$

2進数小数を10進数に変換　|　③

③ $1\ 0\ 1\ 1.\ 1\ 0\ 1_{(2)}$

$2^3\quad 2^2\quad 2^1\quad 2^0\quad 0.5\quad 0.25\quad 0.125$

$$2^3\times 1+2^2\times 0+2^1\times 1+2^0\times 1+0.5\times 1+0.25\times 0+0.125\times 1$$

$$= 8+0+2+1+0.5+0+0.125$$

$$=11.625$$

10進数小数を2進法に変換

① 0．７５

↓

小数ではない場合はひたすら２で割りましたよね！

小数の場合は(0.0) 1.0になるまでひたすら２をかけます

10進数小数を2進法に変換

① 0. 7 5

$$
\begin{array}{r}
0.75 \\
\times\quad 2 \\
\hline
\cancel{1}.5 \\
\times\quad 2 \\
\hline
\cancel{1}.0
\end{array}
$$

0.75 ・・・ 0

0 1.5 ・・・ 1

0 1.0 ・・・ 1

＝0.11

10進数小数を2進法に変換

① 0. 7 5

	$\frac{1}{2}$ (0.5)	$\frac{1}{4}$ (0.25)	$\frac{1}{16}$ (0.125)	$\frac{1}{32}$ (0.03125)
➡ 0.	1	1		

10進数小数を2進法に変換

② 0．5

$$
\begin{array}{r}
0.5 \quad \cdots\ 0 \\
\times \quad 2 \\
\hline
0\ \cancel{1}.0 \quad \cdots\ 1
\end{array}
$$

＝0.1

10進数小数を2進法に変換

③ 0.125

$$
\begin{array}{r l}
0.125 & \cdots 0 \\
\times \quad\quad 2 & \\
\hline
0.25 & \cdots 0 \\
\times \quad 2 & \\
\hline
0.5 & \cdots 0 \\
\times \ 2 & \\
\hline
0\,\cancel{1}.0 & \cdots 1
\end{array}
$$

$=0.001$

誤差について

- 数学の正解でも1÷3=0.33333・・・
  と計算が続くものがありますが、
  コンピュータでも無限に計算が続いたときにビット数に
  限りがあるためにどこかで打ち切らないといけません！
  そのために誤差が生じます

オーバフロー

● ８ビットで表現できるのは0～255にあたる256通り$2^8=256$

▼

0～255は$0 \sim 2^8-1$とも表現する

● ２の補数表現（符号ビット）をつかうとーも表現できる

ので-128～127の256通りになる。

▼

-128～127は$-2^7 \sim 2^7-1$とも表現する

オーバフロー

- ２の補数表現（符号ビット）をつかうと－も表現できるので-128~127の256通りになる。

▼

-128～127は-2^7～2^7-1とも表現する

- 正の整数で表現できるのは127までなので$2^7=128$を表現しようとすると表示できる範囲を超える

▶ このことを（① オーバーフロー　　　）という

アンダーフロー

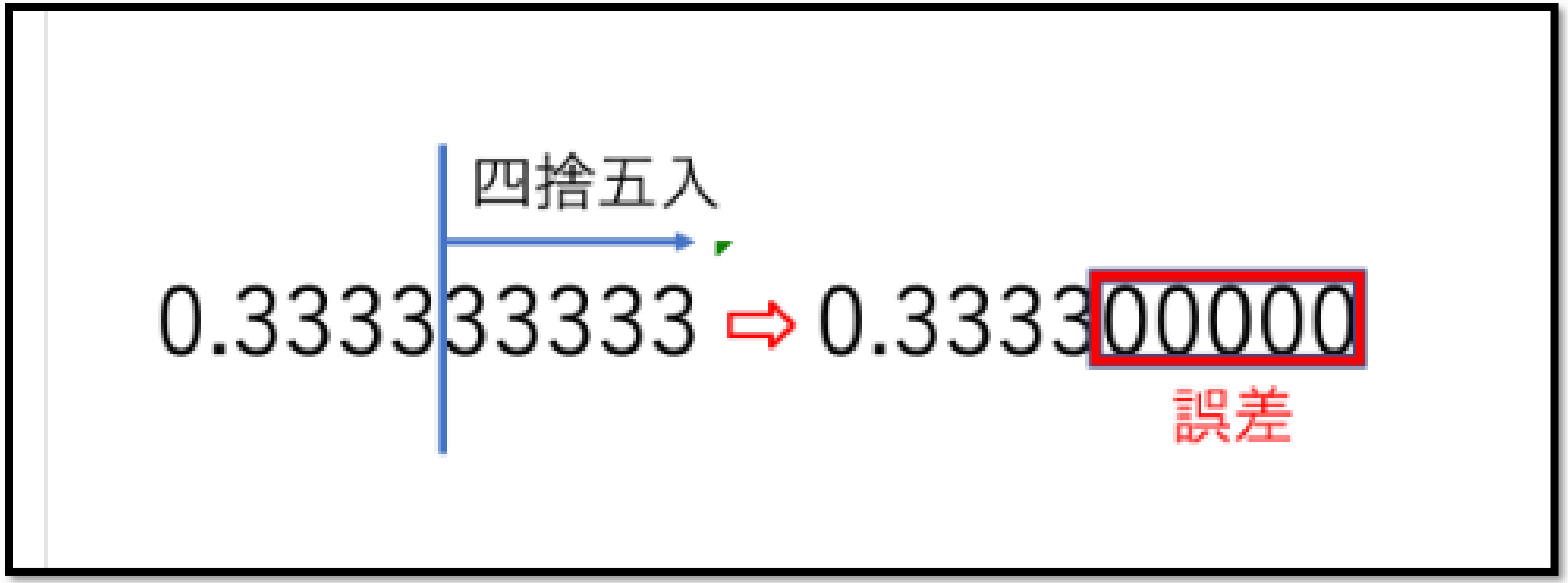
- 値が大きすぎるオーバーフローに対して、表現できる最小値を超えてしまい

値が0に近い値(0.000001など)になってしまい生じる誤差を

（② アンダーフロー　）という

（③ 丸め誤差　）・・・

切り捨て・切り上げ・四捨五入することで発生する誤差



打ち切り誤差

（③打ち切り誤差）・・・

計算結果を打ち切ることで発生する誤差

桁落ち誤差

（④ 桁落ち誤差　）・・・

有効桁数が減少することで発生する誤差

（有効数字の桁数が変わってしまう）

小数点を含む数の内部表現

有効数字の部分を**仮数**という

例）10進法の　12.34　⇨　① $\underline{1.234}$ × 10^1

有効数字の部分

例）２進法の　$101.11_{(2)}$　⇨　② $1.0111 \times 2^2{}_{(2)}$

● このような数は、小数点の位置を移動させて表現するため、

浮動小数点数　**正規化**　という

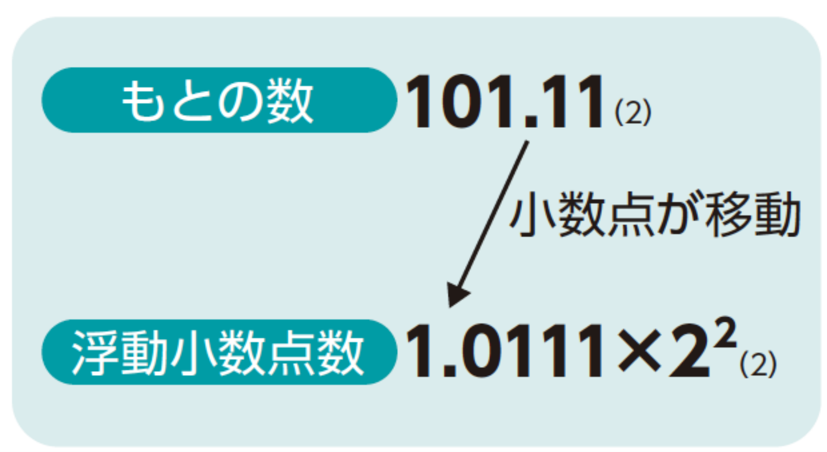


図12　浮動小数点数

次の10進数で表現された数を浮動小数点で表せ

①11.23

答え　1.123×10^1

②123.245

答え　1.23245×10^2

③-240.234

答え　-2.40234×10^2

④123

答え　1.23×10^2

次の2進数で表現された数を浮動小数点で表せ

①111.11

答え 1.11×2^2

②10.11

答え 1.011×2^1

③-101.01

答え -1.0101×2^2

④1001

答え 1.001×2^3

問題

●次の計算のうち、演算結果がもとの数（3.14×10^5）と変わらずに表現できるものはどれか。
（サポートノートP.59より）

①$3.14\times10^5 \times 1.57\times10^2$　　②$3.14\times10^5 - 1.57\times10^2$

③$3.14\times10^5 + 1.57\times10^2$　　④$3.14\times10^5 \div 1.57\times10$

答え　③

情報落ち誤差

③$3.14 \times 10^5 + 1.57 \times 10^2$

⇩

③$314000+157=314157$ ⇨ ③$3.14 \times 10^5$

上のように小さな数値が計算結果に反映されないことで発生する誤差を（ 情報落ち誤差 ）という

浮動小数点数のデータの形式

浮動小数点数を表すデータは・・・

ビットの列を３つの部分に分けて表現する

- 正か負かを表す部分（符号ビット）
- 「2 の何乗か」を表す部分（指数部）
- 仮数を表す部分（仮数部）

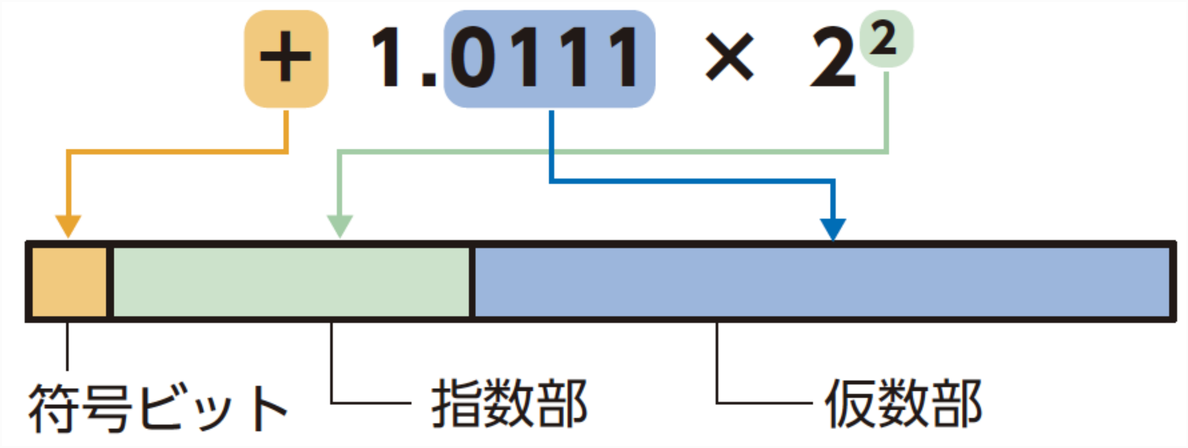
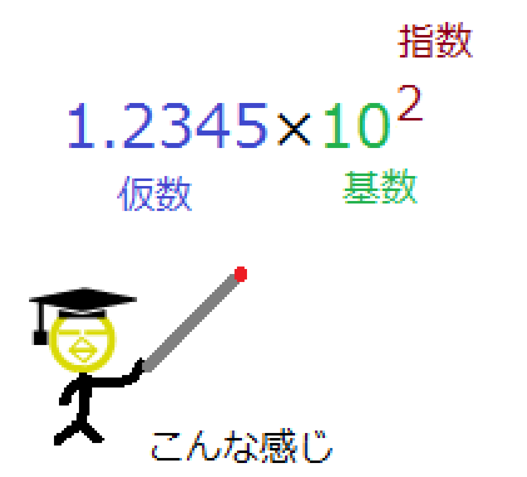


図14　浮動小数点数とビット列



問題

- 10進数2.75を16ビットの2進数の浮動小数点で表せ。ただし、浮動小数点は、符号部1ビット、指数部8ビット、仮数部7ビットとする。

手順①　10進数を2.75を2進数になおす　⇨　10.11

手順②　浮動小数点数になおす（正規化する）　⇨　1.011×2^1

問題

●次のルールに従う

符号部（1ビット）	●正なら「0」、負なら「-1」
指数部（8ビット）	● 「指数＋127」を8ビットの2進数に変換する（バイアス値）

- この場合指数が1なので128
- 8ビットの2進数にすると10000000

仮数部（7ビット）	● 最上位ビットが「1」の場合は省略して左2桁目から書き始める

問題

●ルール通りに書き写す

0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0

符号部

（1ビット）

指数部

（8ビット）

仮数部

（7ビット）

答え

0100000000110000