Mathematik Grundstudium – Prüfung vom 30.5.2020

Aufgabe 1.

1.1 Vereinfache so weit wie möglich.

$$\frac{12x+16}{3z-3y} : \frac{24x+32}{6z-6y}$$

1.2 Löse nach x auf.

$$\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-4} = \frac{6}{x^2-16}$$

Aufgabe 2. Bestimme die Lösungsmenge.

$I.\, 12y - 24x = 72$

$II.\, 34x - 10y = -18$

Aufgabe 3.

3.1 Berechne den Scheitelpunkt der Parabel durch umformen in die Scheitelpunktsform.

($p(x) = (x-r)^2 + s$)

$p(x) = x^2 - 6x + 10$

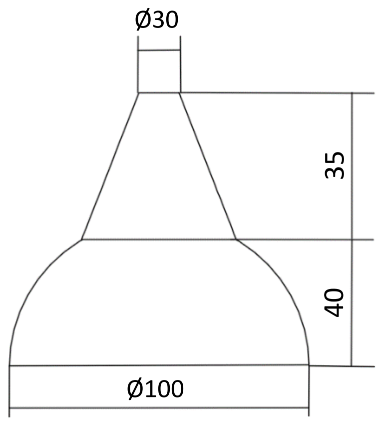
3.2 Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der Parabel P(x) aus Aufgabe 3.1 und

$g(x) = -x + 6$

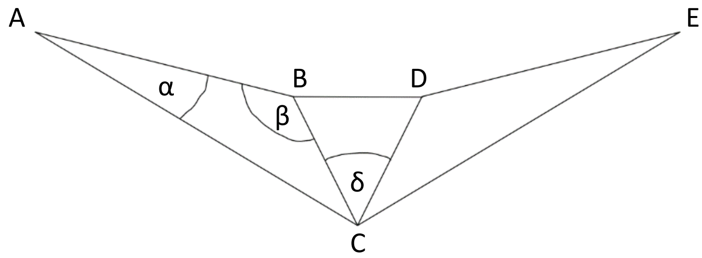
Aufgabe 4.

Von einer Halbkugel wird eine Kappe mit einer Höhe von 10mm abgeschliffen. Auf die entstandene Fläche wird ein Kegelstumpf mit $h_{Ke} = 35mm$ aufgeklebt.

Berechne das gesamte Volumen des Körpers.



Aufgabe 5.



$\overline{AB} = \overline{DE} = 4m$

$\overline{BC} = \overline{CD} = 3{,}52m$

$\overline{AC} = \overline{CE} = 7m$

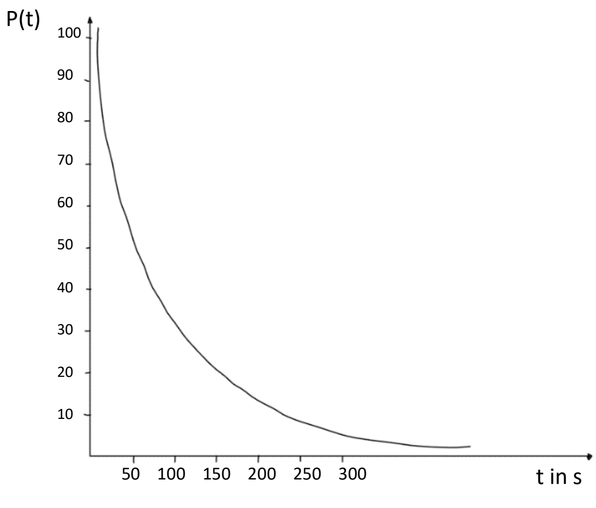
$\overline{BD} = 4{,}25m$

Ges. α,β,δ

Aufgabe 6.

$\mathrm{p(t)} = 100\% * \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_H}}$

$t_H = 57{,}3s$



6.1 Bestimmen Sie rechnerisch die Zeit, in der der Prozentwert P(t) der Exponentialfunktion auf 25% abgesunken ist.

6.2 Berechnen Sie den Wert von P(t) nach einer Zeit von $t = 200s$

Lösungsvorschlag:

1.1

$$\frac{12x+16}{3z-3y} : \frac{24x+32}{6z-6y}$$

$$= \frac{12x+16}{3z-3y} \cdot \frac{6z-6y}{24x+32}$$

$$= \frac{4(3x+4)}{3(z-y)} \cdot \frac{6(z-y)}{8(3x+4)}$$

$$= \frac{4\cancel{(3x+4)}}{3\cancel{(z-y)}} \cdot \frac{6\cancel{(z-y)}}{8\cancel{(3x+4)}}$$

$$= \frac{4\cdot 6}{3\cdot 8}$$

$$= \frac{4\cdot 3}{3\cdot 4}$$

$$= \frac{4\cdot \cancel{3}}{\cancel{3}\cdot 4}$$

$$= \frac{4}{4}$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

1.2

$$\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-4} = \frac{6}{x^2-16} \qquad \text{HN: } (x+4)(x-4)$$

$$\frac{1(x-4)}{(x+4)(x-4)} + \frac{1(x+4)}{(x+4)(x-4)} = \frac{6(x+4)(x-4)}{(x+4)(x-4)}$$

$$\frac{1(x-4)+1(x+4)}{(x+4)(x-4)} = \frac{6}{(x+4)(x-4)}$$

$$\frac{1x\cancel{-4}+1x\cancel{+4}}{(x+4)(x-4)} = \frac{6}{(x+4)(x-4)}$$

$$\frac{2x}{\cancel{(x+4)(x-4)}} = \frac{6}{\cancel{(x+4)(x-4)}}$$

$$2x = 6 \quad |:2$$

$$\underline{\underline{x = 3}}$$

2.

$$\text{I} \quad 12y - 24x = 72$$
$$\text{II} \quad 34x - 10y = -18$$

$$\text{I} \quad -24x + 12y = 72 \quad |\cdot 10\ /\cdot 5$$
$$\text{II} \quad 34x - 10y = -18 \quad |\cdot 12\ /\cdot 6$$

$$\text{I} \quad -120x + 60y = 360$$
$$\text{II} \quad 204x - 60y = -108$$

$$\text{I} + \text{II} =$$
$$\text{III} \quad 84x = 252 \quad |:84$$
$$\underline{x = 3}$$

x in I oder II einsetzen:

x in I: $12y - 24\cdot 3 = 72$

$$12y - 72 = 72 \quad |+72$$
$$12y = 144 \quad |:12$$
$$\underline{y = 12} \ \checkmark$$

Probe: x; y in II einsetzen

$$34\cdot 3 - 10\cdot 12 = -18$$
$$102 - 120 = -18$$
$$\underline{-18 = -18} \ \checkmark$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(x;y) \mid x = 3;\ y = 12\}}}$$

3. 1

$$p(x) = x^2 \underbrace{-6x}_{:2} + 10$$

$$= \underbrace{(x-3)^2}_{-(\ )^2} - 9 + 10$$

$$p(x) = (x-3)^2 + 1$$

Sp. (3/1)

3.2

$p(x) = x^2 - 6x + 10$ $\qquad$ $g(x) = -x + 6$

$p(x) = g(x)$

$x^2 - 6x + 10 = -x + 6 \quad | +x \quad | -6$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ $\qquad$ $p = -5 \quad q = 4$

$x_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4}$

$x_1 = 4$

$x_2 = 1$

x_1 in $g(x)$ einsetzen

$g(x) = -x + 6$

$y_1 = -4 + 6$

$y_1 = 2$

$S_1(4/2)$

x_2 in $g(x)$ einsetzen

$g(x) = -x + 6$

$y_2 = -1 + 6$

$y_2 = 5$

$S_2(1/5)$

4.

$$V_{ges.} = V_{Kegelst.} + \left(\frac{V_{Kugel}}{2} - V_{Kappe}\right)$$

$$d_1 = r \cdot 2$$

$$r = \sqrt{h(2 \cdot R - h)}$$

$$= \sqrt{10(2 \cdot 50 - 10)}$$

$$r = 30$$

$$d_1 = 30 \cdot 2 = \underline{60}$$

$$V_{Kegelst.} = \frac{\pi}{12} \cdot h\left(d_1^2 + d_1 \cdot d_2 + d_2^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{12} \cdot 35\left(60^2 + 60 \cdot 30 + 30^2\right)$$

$$\underline{V_{Kegelst.} = 57726{,}77\ mm^3}$$

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot 50^3$$

$$\underline{V_{Kugel} = 523598{,}78\ mm^3}$$

$$V_{Kappe} = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h)$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot 10^2 (3 \cdot 50 - 10)$$

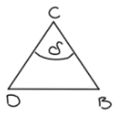
$$\underline{V_{Kappe} = 14660{,}77\ mm^3}$$

$$V_{ges.} = V_{Kegelst.} + \left(\left(\frac{V_{Kugel}}{2}\right) - V_{Kappe}\right)$$

$$= 57726{,}77 + \left(\left(\frac{523598{,}78}{2}\right) - 14660{,}77\right)$$

$$\underline{\underline{V_{ges.} = 304865{,}39\ mm^3}}$$

5.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

$$\overline{DB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2 - 2ab \cdot \cos\delta \quad \left| - \overline{DB}^2 \right| + 2ab \cdot \cos\delta$$

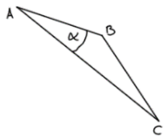
$$2ab \cdot \cos\delta = \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2 - \overline{DB}^2 \quad \left| : 2ab \right.$$

$$\cos\delta = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{DC}^2 - \overline{DB}^2}{2ab}$$

$$\cos\delta = \frac{3{,}52^2 + 3{,}52^2 - 4{,}25^2}{2 \cdot 3{,}52 \cdot 3{,}52}$$

$$\cos\delta = 0{,}271 \quad \left| \cos^{-1} \right.$$

$$\underline{\underline{\delta = 74{,}27^\circ}}$$



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos\alpha \quad \left| - \overline{BC}^2 \right| + 2\,\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos\alpha$$

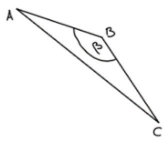
$$2\,\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos\alpha = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 \quad \left| : 2\,\overline{AB} \cdot \overline{AC} \right.$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{2\,\overline{AB} \cdot \overline{AC}}$$

$$= \frac{4^2 + 7^2 - 3{,}52^2}{2 \cdot 4 \cdot 7}$$

$$\cos\alpha = 0{,}939 \quad \left| \cos^{-1} \right.$$

$$\underline{\underline{\alpha = 20{,}12^\circ}}$$



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,\overline{BC} \cdot \overline{AB} \cdot \cos\beta \quad \left| - \overline{AC}^2 \right| + 2\,\overline{BC} \cdot \overline{AB} \cdot \cos\beta$$

$$2\,\overline{BC} \cdot \overline{AB} \cdot \cos\beta = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 \quad \left| : 2\,\overline{BC} \cdot \overline{AB} \right.$$

$$\cos\beta = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2}{2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AB}}$$

$$\cos\beta = \frac{3{,}52^2 + 4^2 - 7^2}{2 \cdot 3{,}52 \cdot 4}$$

$$\cos\beta = -0{,}731 \quad \left| \cos^{-1} \right.$$

$$\underline{\underline{\beta = 137{,}04^\circ}}$$

6.1

$$P(t) = 100\% \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_H}}$$

$$25\% = 100\% \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{57{,}3}} \quad \Big| : 100\%$$

$$\frac{25\%}{100\%} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{57{,}3s}}$$

$$0{,}25 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{57{,}3s}} \quad \Big| \lg$$

$$\lg 0{,}25 = \frac{t}{57{,}3s} \lg\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Big| : \lg\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\lg(0{,}25)}{\lg\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{t}{57{,}3s} \quad \Big| \cdot 57{,}3s$$

$$\frac{\lg(0{,}25) \cdot 57{,}3s}{\lg\left(\frac{1}{2}\right)} = t$$

$$\underline{\underline{114{,}6\,s = t}}$$

6.2

$$P(t) = 100\% \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{57{,}3\,s}}$$

$$P(t) = 100\% \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{200}{57{,}3s}}$$

$$\underline{\underline{P(t) = 8{,}89\%}}$$

Alle Angaben der Aufgaben und Lösungen sind aus dem Gedächtnis aufgeschrieben. Keine Gewähr auf Inhaltliche Korrektheit.

Viel Erfolg. 😊