Matheprüfung Grundstudium 27.05.2018

Aufgabe 1.1:

Vereinfachen Sie nachstehenden Ausdruck so weit wie möglich.

$$\frac{2-2x}{x^2-2x+1}$$

Aufgabe 1.2:

Lösen Sie nachstehende Gleichung nach x auf.

$$\frac{1}{3}\cdot(-2x+4)=\frac{12x-6}{9}$$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge. Dokumentieren Sie die den Lösungsweg vollständig.

Kontrollieren Sie das Ergebnis durch Einsetzen.

$$2x+3=2y+5$$

$$2y+1=x+2$$

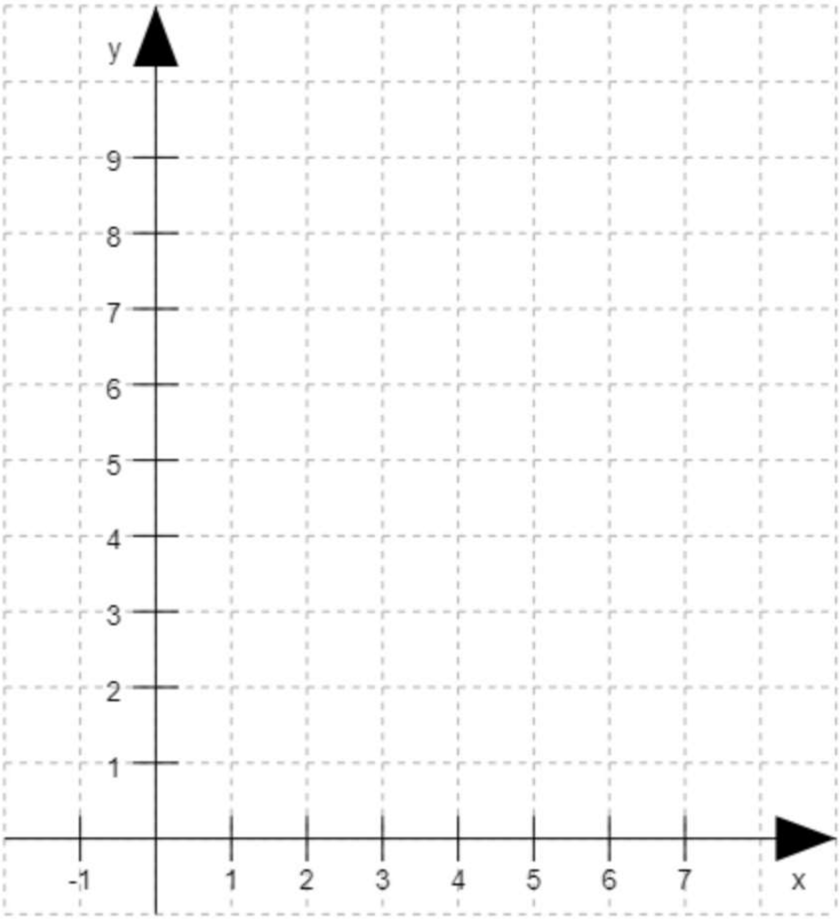
Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion $f_{(x)} = -x^2 + 4x + 5$ und die Gerade $g_{(x)} = x + 1$

Aufgabe 3.1:

Tragen Sie die Funktionswerte in die Wertetabelle ein und zeichnen Sie die Funktion f(x) und g(x) in das Koordinatensystem ein.

	-1	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
f(x)							
g(x)							



Aufgabe 3.2:

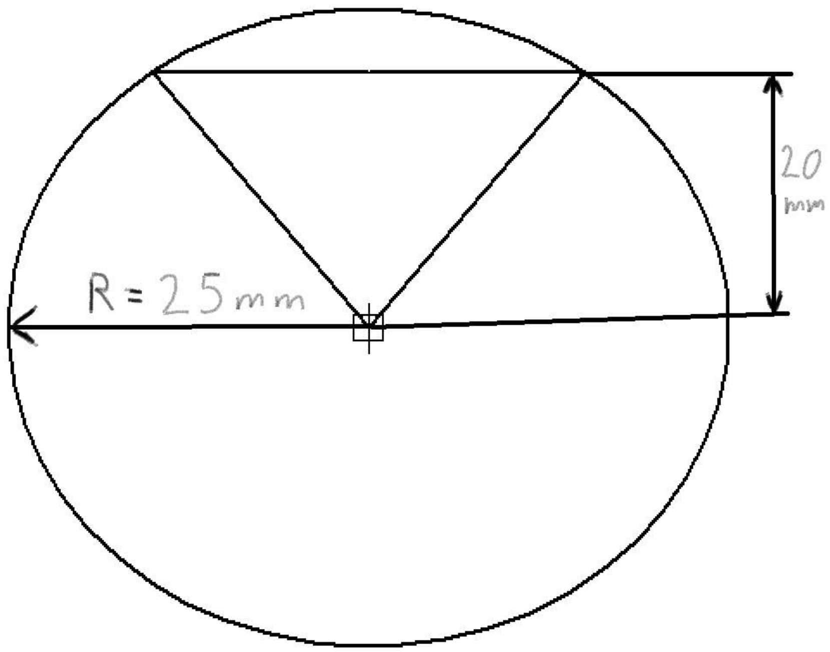
Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Funktionen.

Geben Sie den gesamten Rechenweg an.

Aufgabe 4:

Gegeben ist eine Kugel an welcher eine Kugelkappe abgefräst wurde.

Anschließend wurde ein Kegel auf diese Fläche eingebracht.



(Neben der Zeichnung lag eine 3D Zeichnung des Objektes vor)

Aufgabe 4.1:

Berechnen Sie das Materialvolumen der Kugelkappe

Aufgabe 4.2:

Berechnen Sie das Volumen des Kegelausschnitts

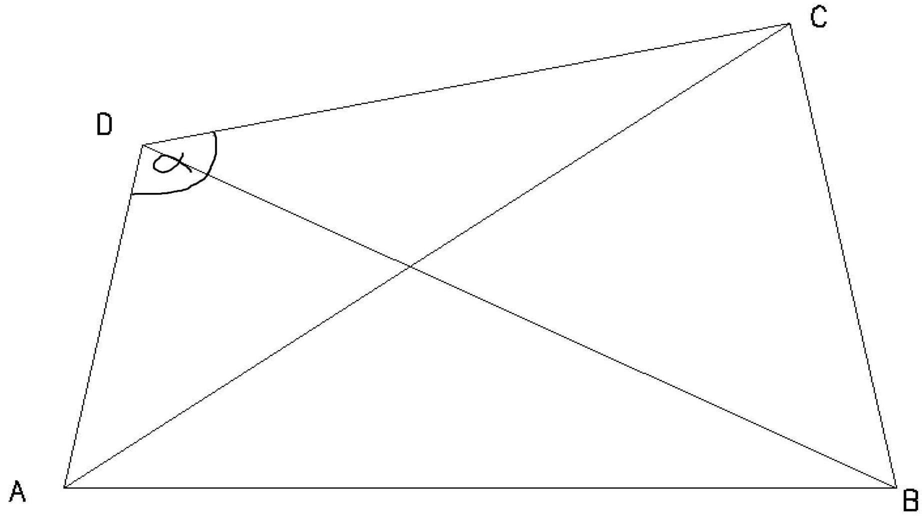
Aufgabe 4.3:

Geben Sie das gesamte prozentual verbliebene Material der bearbeiteten Kugel an.

Aufgabe 5:

Gegeben sind folgende Werte:

$\overline{AB} = 110\,mm$
$\overline{AD} = 60\,mm$
$\overline{BD} = 102{,}16\,mm$
$\overline{DC} = 70\,mm$
$\alpha = 133{,}17$



(Zeichnung ist nicht Maßstäblich)

Berechnen Sie die Länge $\overline{AC}\ und\ \overline{BC}$

Aufgabe 6:

Gegeben ist die Funktion $f_{(x)} = 50 \cdot e^{-0{,}1 \cdot x}$

Aufgabe 6.1:

Berechnen Sie den Wert für x=10

Aufgabe 6.2:

Berechnen Sie den Wert für x bei f(x) = 15

Aufgabe 6.3:

Berechnen Sie den Schnittpunkt der Funktion f(x) mit der Funktion $g_{(x)} = 5 \cdot e^{0{,}1 \cdot x}$

Die Aufgaben wurden aus dem Gedächtnis rekonstruiert. Daher keine Garantie auf Richtigkeit.

Lösungen:

Aufgabe 1.1:

$$\frac{2-2x}{x^2-2x+1} \quad \textit{hier dürfte jeder eine binomische Formel entdecken!}$$

$$\frac{2-2x}{(x-1)^2} \quad \textit{Fragestellung: Was muss hier gemacht werden um irgendwas kürzen zu können.}$$

$$-2\ \textit{ausklammern}$$

$$\frac{-2\cdot(x-1)}{(x-1)^2} \quad \textit{nun kann gekürzt werden}$$

$$\frac{-2\cdot\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}}$$

$$\frac{-2}{x-1}$$

Aufgabe 1.2:

$$\frac{1}{3}\cdot(-2x+4) = \frac{12x-6}{9} \quad \textit{Klammer auflösen}$$

$$\frac{-2x}{3}+\frac{4}{3} = \frac{12x-6}{9} \quad \textit{die rechte Seite kann} \div 3 \textit{ gerechnet werden, um einen gemeinsamen}$$

$$\textit{Nenner zu erhalten (Genauso könnte links alles mal 3 gerechnen werden)}$$

$$\frac{-2x}{3}+\frac{4}{3} = \frac{4x-2}{3}$$

$$\frac{-2x+4}{3} = \frac{4x-2}{3} \quad |\cdot 3$$

$$-2x+4 = 4x-2 \quad |+2x \quad |+2$$

$$4x+2x = 4+2$$

$$6x = 6 \quad |\div 6$$

$$x = 1$$

Aufgabe 2:

$I:\ 2x+3=2y+5$
$II:\ 2y+1=x+2 \qquad x\ und\ y\ hole\ ich\ auf\ die\ selbe\ Seite\ zur\ besseren\ Übersicht$

$I:\ 2x+3=2y+5$
$II:\ x+2=2y+1 \qquad |\cdot(-1)$

$II':\ -x-2=-2y-1$

$I+II'$
$2x+3-x-2=2y+5-2y-1$

$x+1=4 \qquad |-1$
$x=3$

Einsetzen in I
$2\cdot 3+3=2y+5 \qquad |-5$
$4=2y \qquad |\div 2$
$y=2$

Probe in I:

$2\cdot 3+3=2\cdot 2+5$
$9=9 \quad Richtig$

Probe in II:

$3+2=2\cdot 2+1$
$5=5 \quad Richtig$

Aufgabe 3.1:

Tipp für alle mit einem Casio fx-87DE Plus Taschenrechner oder ähnlichen:

Ihr könnt euch eine Wertetabelle anzeigen lassen in dem ihr einmal auf „MODE“ drückt (links neben dem „ON“- Knopf. Dort auf „TABEL“ (Nummer 3)

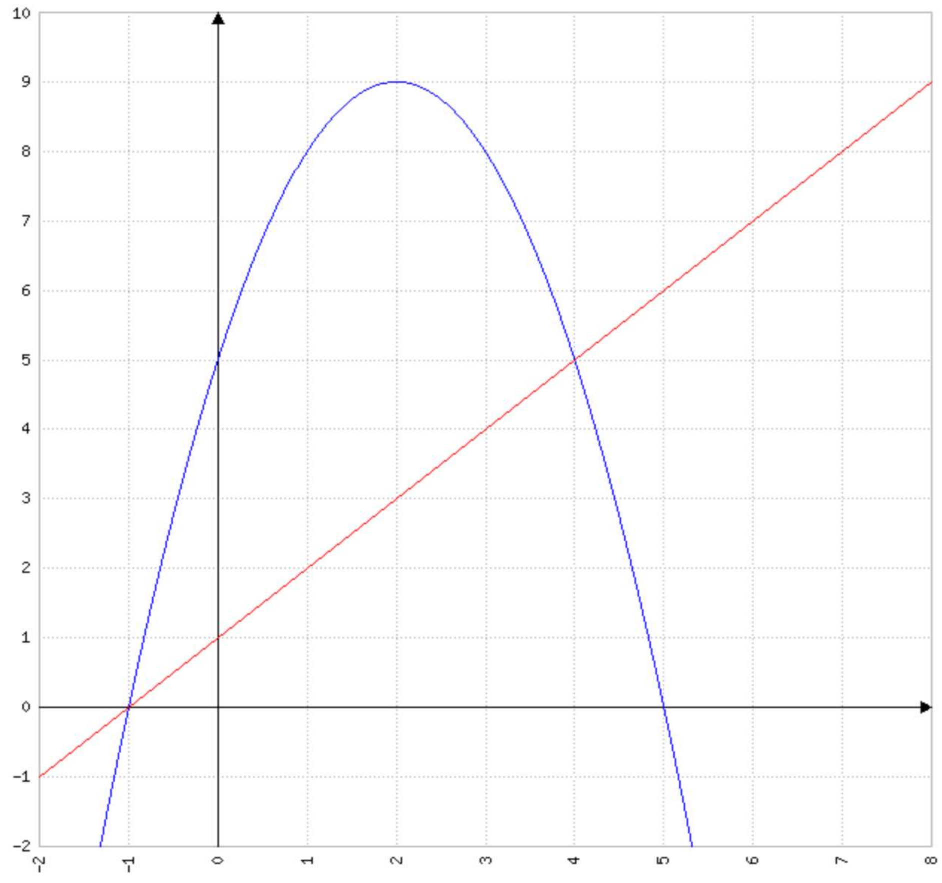
Hier könnt Ihr die Funktion eingeben, und anschließend die obere und untere Grenze sowie die Schrittweite angeben.

Hier Untere Grenze -1, Obere Grenze 5, Schrittweite 1.

Schon habt Ihr eine Wertetabelle und müsst nur noch die Werte übertragen.

Dannach einfach wieder zurückstellen durch „MODE“ und „COMP“ (Nummer 1)

	-1	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
f(x)	**0**	**5**	**8**	**9**	**8**	**5**	**0**
g(x)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**



Aufgabe 3.2:

$f_{(x)} = g_{(x)}$

$-x^2+4x+5 = x+1 \quad | -x \quad | -1$

$-x^2+3x+4 = 0 \quad | \cdot (-1)$

$x^2-3x-4 = 0$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_{1/2} = -\frac{(-3)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(-3)}{2}\right)^2 - (-4)}$$

$$x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right) + 4}$$

$$x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)}$$

$$x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$x_1 = 4$

$x_2 = -1$

Einsetzen

$g_{(4)} = 4+1$

$g_{(4)} = 5$

$g_{(-1)} = -1+1$

$g_{(-1)} = 0$

$Schnittpunkt_1 (4/5)$

$Schnittpunkt_2 (-1/0)$

Aufgabe 4.1:

$$V_{Kugelanschnitt} = \frac{\pi}{3} \cdot h^2 \cdot (3R - h)$$

$$V_{Kugelanschnitt} = \frac{\pi}{3} \cdot 5^2 \cdot (3 \cdot 25 - 5)$$

$$V_{Kugelabschnitt} = \frac{1750}{3} \cdot \pi$$

Am besten immer mit diesem Wert rechnen, nicht mit 1832,6, um nachher ein exaktes Ergebnis zu erhalten.
Als Tipp: wenn das Ergebnis am Taschenrechner angezeigt wird einfach SHIFT
und RCL (STO) tippen, und dann einen Buchstaben (abcd...)
so wird das aktuelle Ergebnis unter dem Buchstaben gespeichert.

Aufgabe 4.2:

$$V_{Kegel} = \frac{\pi}{12} \cdot d^2 \cdot h$$

um d zu erhalten kann die Formel bei dem Kugelabschnitt für r verwendet werden.

$$r = \sqrt{h(2R - h)}$$
$$r = \sqrt{5(2 \cdot 25 - 5)}$$
$$r = 15\text{mm} \qquad \cdot 2 \, \textit{um den Durchmesser zu erhalten.}$$
$$d = 30\text{mm}$$

$$V_{Kegel} = \frac{\pi}{12} \cdot 30^2 \cdot 20$$

$$V_{Kegel} = 1500\pi$$

Aufgabe 4.3:

$$V_{Kugel} = \frac{\pi}{6} \cdot d^3$$

$$V_{Kugel} = \frac{\pi}{6} \cdot 50^3$$

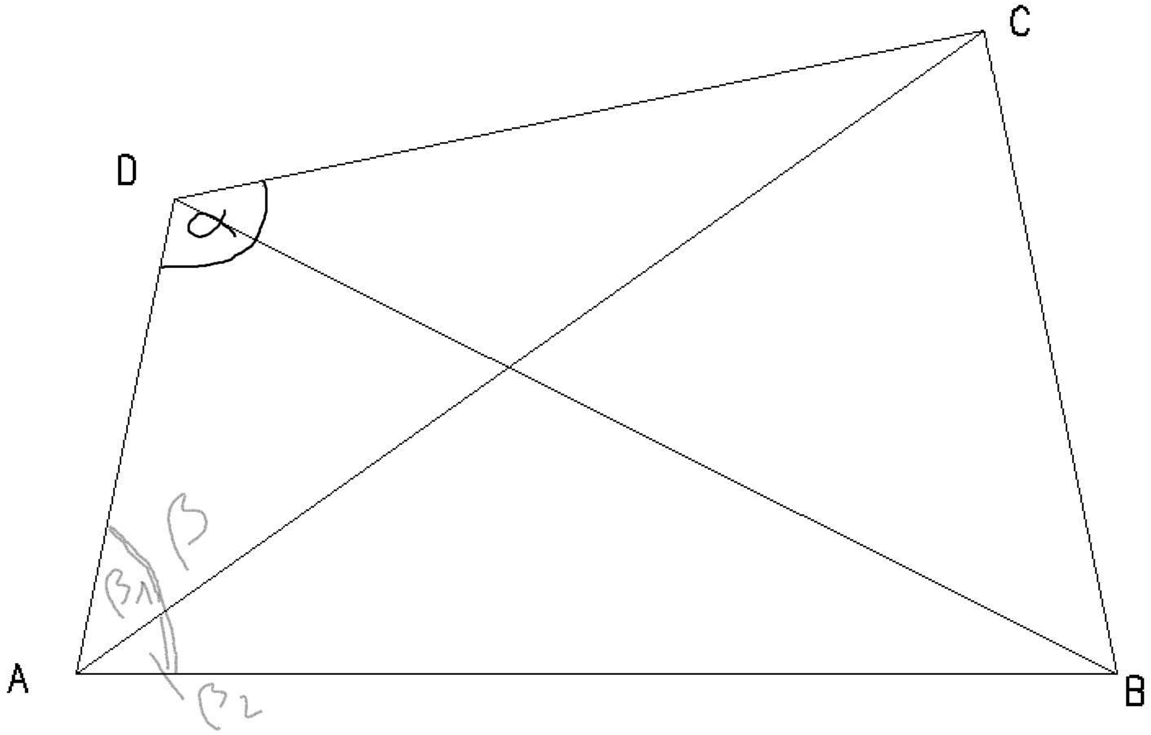
$$V_{Kugel} = \frac{62500}{3} \cdot \pi$$

$$\frac{V_{Kugel} - V_{Kugelabschnitt} - V_{Kegel}}{V_{Kugel}} \cdot 100\%$$

$$\frac{\frac{62500}{3} \cdot \pi - \frac{1750}{3} \cdot \pi - 1500 \cdot \pi}{\frac{62500}{3} \cdot \pi} \cdot 100\%$$

90% *des Materials bleiben übrig*

Aufgabe 5:



$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{DC} \cdot \cos(\alpha)}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{60^2 + 70^2 - 2 \cdot 60 \cdot 70 \cdot \cos(133{,}17)}$$

$$\overline{AC} = 119{,}36\,mm$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{\overline{BD}^2 - \overline{AD}^2 - \overline{AB}^2}{-2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AB}}\right)$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{102{,}16^2 - 60^2 - 110^2}{-2 \cdot 60 \cdot 110}\right)$$

$$\beta = 66{,}5\,°$$

$$\beta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{\overline{DC}^2 - \overline{AD}^2 - \overline{AC}^2}{-2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AC}}\right)$$

$$\beta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{70^2 - 60^2 - 119{,}36^2}{-2 \cdot 60 \cdot 119{,}36}\right)$$

$$\beta_1 = 25{,}32\,°$$

$$\beta_2 = \beta - \beta_1$$

$$\beta_2 = 66{,}5\,° - 25{,}32\,°$$

$$\beta_2 = 41{,}18\,°$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot \cos(\beta_2)}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{119{,}36^2 + 110^2 - 2 \cdot 119.36 \cdot 110 \cdot \cos(41{,}18)}$$

$$\overline{BC} = 81{,}14\,mm$$

Aufgabe 6.1:

$f_{(x)} = 50 \cdot e^{-0{,}1 \cdot x}$

$f_{(10)} = 50 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 10}$

$f_{(10)} \approx 18{,}394$

Aufgabe 6.2:

$15 = 50 \cdot e^{-0{,}1 \cdot x} \quad | \div 50$

$\frac{15}{50} = e^{-0{,}1 \cdot x} \quad | \ln$

$\ln\left(\frac{15}{50}\right) = -0{,}1 \cdot x \cdot \ln(e) \quad | \div (-0{,}1) \quad (\ln(e) = 1 \ \textit{kann daher einfach wegfallen})$

$\frac{\ln\left(\frac{15}{50}\right)}{-0{,}1} = x$

$x = 12{,}04$

Aufgabe 6.3:

$f_{(x)} = g_{(x)}$

$50 \cdot e^{-0{,}1 \cdot x} = 5 \cdot e^{0{,}1 \cdot x} \quad | \cdot \ln$

$\ln(50) - 0{,}1 \cdot x \cdot \ln(e) = \ln(5) + 0{,}1 \cdot x \cdot \ln(e) \quad | -\ln(5) \quad |(+0{,}1 \cdot x \cdot \ln(e))$

$\ln(50) - \ln(5) = 0{,}1 \cdot x \cdot \ln(e) + 0{,}1 \cdot x \cdot \ln(e)$

Auch hier kann das $\ln(e)$ *wegfallen da* $\ln(e) = 1$

$\ln(50) - \ln(5) = 0{,}2 \cdot x \quad | \cdot 5$

$5 \cdot (\ln(50) - \ln(5)) = x$

$x = 11{,}513$

$g_{(11{,}513)} = 5 \cdot e^{0{,}1 \cdot 11.513}$

$g_{(11{,}513)} = 15{,}812$

Schnittpunkt $(11{,}513 / 15{,}812)$