Disclaimer

Содержание

1. Билет 1

1.1. Гармонические волны в линиях передачи. Выражение для векторного потенциала. Дифференциальное уравнение для поперечной волновой функции $\psi(\vec{r_\perp})$. Понятия продольного и поперечного волнового числа. Выражения для полей TE, TM, TEM. Импедансная связь между поперечными компонентаит электрического и магнитного полей и понятие поперечного волнового сопротивления

Линия передач - это любая цилиндрическая система. В них различают продольное z и поперечное $\vec{r_\perp} = r_\perp(r, \theta)$ направление. При описании таких систем проще использовать векторный потенциал $\vec{A}$, который должен удовлетворять уравнению Гельмгольца (для амплитуд):

$$\Delta \vec{A}^e + k^2 \vec{A}^e = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}^e = 0$$
$$\vec{B} = rot\vec{A}^e$$

0 потому что случай, где нет сторонних источников. Запишем поля в ЛП, когда волна бежит вдоль оси Oz:

$$\vec{E}(\vec{r}_\perp, z, \theta) = \vec{E_0}(\vec{r}_\perp)e^{i(wt-hz)},$$

где h - **продольное волновое число** (постоянная распространения). Реальное поля в таком случае записывается как:

$$E_{R_x} = Re(E_x) = |E_x(\vec{r}_\perp)|\cos(wt - hz + \varphi(\vec{r}_\perp))$$

Запишем веторный потенциал в следующем виде:

$$\vec{A^e} = \psi^e(\vec{r}_\perp)e^{-ihz}\vec{z_0},$$

где $\psi^e(\vec{r}_\perp)$ - **поперечная волновая функция**. Запишем теперь поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ через $\psi^e(\vec{r}_\perp)$. Вспомним выражение полей через векторный потенциал:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}rot\vec{A}^e$$
$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}^e}{\partial t} = \frac{1}{ik_0\varepsilon\mu}(\nabla div + k^2)\vec{A}^e,$$

где $k = \frac{w}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}, k_0 = \frac{w}{c}$. При подстановке выражения для $\vec{A}^e$, для компонент векторов в случае **TM** - волны получим(надо расписать такие вещи как $div(\vec{A}^e),\ \nabla div(\vec{A}^e),\ rot\vec{A}^e$):

$$E_z = \frac{\varkappa^2}{ik_0\varepsilon\mu}\psi^e(\vec{r}_\perp)\cdot e^{i(wt-hz)}$$
$$\vec{E}_\perp = -\frac{h}{k_0\varepsilon\mu}\nabla_\perp\psi^e(\vec{r}_\perp)\cdot e^{i(wt-hz)}$$
$$\vec{H}_\perp = \frac{1}{\mu}[\nabla_\perp\psi^e(\vec{r}_\perp)\times\vec{z_0}]\cdot e^{i(wt-hz)}$$
$$H_z = 0$$

TM-волна - поперечная магнитная волна (Магнитное поле имеет только поперечную компоненту. Поле $\vec{E}$ имеет и поперечное и продольное направление).

Потенциал $\vec{A}^e$, при любой зависимости от времени, должен удовлетворять волновому уравнению:

$$\Delta\vec{A}^e - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}^e}{\partial t^2} = 0$$

В нашем случае, когда векторный потенциал имеет вид $\vec{A}^e = \psi^e(\vec{r}_\perp)e^{-ihz}\vec{z_0}$, для гармонических полей справедливы следующие переходы:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow iw,\ \Delta\vec{A}^e + k^2\vec{A}^e = 0,\ k^2 = \frac{w^2}{c^2}\varepsilon\mu$$

Рассмотри для z-компоненты:

$$\Delta A_z^e + k^2 A_z^e = 0,\ \Delta = \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Rightarrow -h^2,\ \text{т.к.} A_z^e = \psi^e(\vec{r}_\perp)e^{-ihz}$$

$$\Delta_\perp\psi^e + \underbrace{(k^2 - h^2)}_{\varkappa^2}\psi^e = 0$$

$$\Delta_\perp\psi^e + \varkappa^2\psi^e = 0$$

$\varkappa^2$ - **поперечное волновое число**. Если поле удовлетворяет уравнению выше, то такое поле удоветворяет уравнениям Максвелла.

Аналогично сделаем для **TE** - волны.

TE-волна - поперечная электрическая волна (Электрическое поле имеет только поперечную компоненту. Магнитное поле имеет и поперечное и продольное направление). По принципу двойственности производим замены:

$$\vec{E} \to \vec{H},\ \vec{H} \to -\vec{E},\ \varepsilon \leftrightarrow \mu$$

$$\begin{aligned}
&H_z = \frac{\varkappa^2}{ik_0\varepsilon\mu}\psi^m(\vec{r}_\perp) \cdot e^{i(wt-hz)} \\
&\vec{H_\perp} = -\frac{h}{k_0\varepsilon\mu}\nabla_\perp\psi^m(\vec{r}_\perp) \cdot e^{i(wt-hz)} \\
&\vec{E_\perp} = -\frac{1}{\mu}[\nabla_\perp\psi^m(\vec{r}_\perp) \times \vec{z_0}] \cdot e^{i(wt-hz)} \\
&E_z = 0
\end{aligned}$$

Вообще говоря, ψ^e и ψ^m могут быть различными, поэтому выше вместо ψ^e записано ψ^m . Аналогично для ψ^m требуется выполнение:

$$\Delta_\perp\psi^m + \varkappa^2\psi^m = 0$$

TE, TM волны - это решения уравнений Максвелла. однак может быть еще один тип решений - **TEM** - волны. Рассмотрим случай $\varkappa = 0,\ h = k$:

$$\begin{aligned}
&H_z = E_z = 0 \\
&\vec{E_\perp} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\nabla_\perp\psi \cdot e^{i(wt-kz)} \\
&\vec{H_\perp} = \frac{1}{\mu}[\nabla_\perp\psi \times \vec{z_0}] \cdot e^{i(wt-kz)} \\
&\Delta_\perp\psi = 0
\end{aligned}$$

TEM-волна - чисто поперечная волна (Электрическое поле имеет только поперечную компоненту, как и магнитное).

Что имеем в итоге:

- Поля выражаются через поперечную волновую функцию
- Продольные компоненты полей пропорциональны ψ
- Поперечные компоненты полей пропорциональны $\nabla_\perp\psi$

Т.е. если заданы ψ^e, ψ^m, то можно полностью найти поля. Из формул также видно следующее соотношение:

$$\vec{E}_\perp = \eta_{\perp\text{в}}[\vec{H}_\perp \times \vec{z_0}],$$

где $\eta_{\perp\text{в}}$ - **поперечное волновое сопротивление** - отношение между поперечными компонентами полей в бегущей волне $\eta_{\perp\text{в}} = \frac{E_\perp}{H_\perp}$. Для раличных типов волн записывается как:

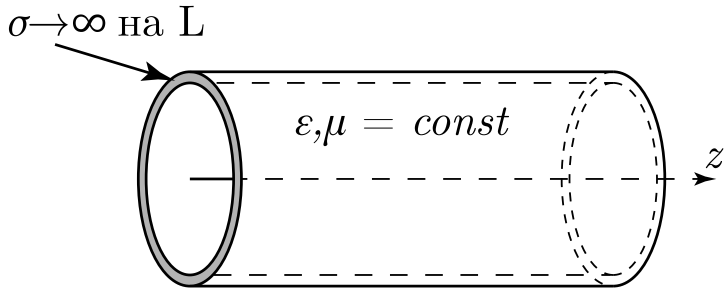
$$\text{TE(+),TM(-) - волны: } \eta_{\perp \text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(\frac{k}{h}\right)^{\pm 1}$$

$$\text{TEM - волны: } \eta_{\perp \text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Заметим, что в бегущей волне поля зависят от координат, а их отношение - $\eta_{\perp \text{в}}$ - нет. В стоячей волне это не так.

2. Билет 2

2.1. Граничные условия для поперечных волновых функций волн TE, TM, TEM типов в идеальной линии передачи. Математическая формулировка задачи описания волн TE, TM, TEM типов.



Рассмотрим случай идеального проводника, $\sigma \to \infty$(Вообще говоря, идеальных проводников не бывает, однако условие идеальной проводимости можно записать в виде: $\sigma \gg w$ $(\delta \ll L)$). Вспомним граничные условия для полей на поверхности идеального проводника:

$$E_\tau|_S = 0, \; H_n|_S = 0,$$

а также условие на поперечную волновую функцию:

$$\Delta_\perp \psi^{e,m} + \varkappa^2 \psi^{e,m} = 0$$

Найдем граничные условия для $\psi^{e,m}$ для идеальной ЛП.

TM-волна:

$$\text{т.к. } E_z \sim \psi^e, \; \vec{E}_{\perp\tau} \sim \frac{\partial \psi^e}{\partial \tau}$$

$$\text{и } E_z = 0, \; E_{\perp\tau} = 0$$

$$\text{то } \psi^e(\vec{r}_\perp)|_S = 0$$

- это граничное условие Дирихле

TE-волна:

$$\text{т.к. } \vec{E}_{\perp\tau} \sim [\nabla_\perp \psi^m(\vec{r}_\perp) \times \vec{z}_0]_\tau$$

$$\text{и } E_{\perp\tau} = 0$$

$$\text{то } \frac{\partial \psi^m}{\partial n}|_S = 0$$

TEM-волна:

$$\text{т.к. } \vec{E}_{\perp\tau} \sim \nabla_\perp \psi^m(\vec{r}_\perp)$$

$$\text{то } \frac{\partial \psi}{\partial \tau}|_S = 0 \Rightarrow \psi|_S = const = C_i$$

Отметим, что на разных поверхностях проводников постоянная C_i может быть разной.

Математическая формулировка задач для описания волн.

TM. Необходимо решить:

$$\Delta_\perp \psi^e + \varkappa^2 \psi^e = 0$$
$$\psi^e|_L = 0, L \text{ - граничный контур}$$

TE. Необходимо решить:

$$\Delta_\perp \psi^m + \varkappa^2 \psi^m = 0$$
$$\frac{\partial \psi^m}{\partial n}|_L = 0$$

TEM. Необходимо решить:

$$\Delta_\perp \psi^m = 0$$
$$\psi|_{L_i} = C_i$$

Задачи TE, TM волн - аналогичны задачам с мембраной, где граница мембраны закреплена неподвижно, а TEM задачу можно назвать «электростатической». Это задачи на нахождение собственных функций

$$\psi_1^{e,m}(\vec{r}_\perp), \psi_2^{e,m}(\vec{r}_\perp), \dots \psi_i^{e,m}(\vec{r}_\perp)$$

и собственных чисел

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_i$$

Если ЛП идеальна, то спектр сбственных значений и функций бесконечен.

3. Билет 3
4. Билет 4
5. Билет 5
6. Билет 6
7. Билет 7
8. Билет 8
9. Билет 9
10. Билет 10
11. Билет 11
12. Билет 12
13. Билет 13