

Disclaimer

Содержание

1. Билет 1	3
1.1. Гармонические волны в линиях передачи. Выражение для векторного потенциала. Дифференциальное уравнение для поперечной волновой функции $\psi(r_{\perp})$. Понятия продольного и поперечного волнового числа. Выражения для полей ТЕ, ТМ, ТЕМ. Импедансная связь между поперечными компонентами электрического и магнитного полей и понятие поперечного волнового сопротивления	3
2. Билет 2	7
2.1. Граничные условия для поперечных волновых функций волн ТЕ, ТМ, ТЕМ типов в идеальной линии передачи. Математическая формулировка задачи описания волн ТЕ, ТМ, ТЕМ типов.	7
3. Билет 3	9
3.1. МИНИМУМ Дисперсионное уравнение для волн в идеальной ЛП. Критические частоты и длины волн. Зависимости длины волны, фазовой и групповой скорости от частоты. Распространяющиеся и нераспространяющиеся волны.	9
4. Билет 4	14
4.1. Медленные волны, направляемые плоским диэлектрическим слоем. Дифференциальное уравнение для поперечной волновой функции и его решения для областей внутри и вне слоя. Выражения для полей, граничные условия и дисперсионные (характеристические) уравнения для симметричных (чётных) волн типа ТМ	14
4.2. Главные (ТЕМ) волны в линиях передач. Условие существования ТЕМ волны. ТЕМ волна в коаксиальной линии (Картинка силовых линий, зависимость полей от координат).	18
5. Билет 5	22
5.1. Волны в прямоугольном металлическом волноводе. Спектр собственных волновых чисел волн ТЕ и ТМ типов. Структура поля низших типов волн	22
5.2. Затухание собственных колебаний в полном резонаторе, обусловленное потерями энергии в заполняющей среде	26
6. Билет 6	27

6.1.	Волны в круглом металлическом волноводе. Спектр собственных функций и поперечных волновых чисел волн ТЕ и ТМ типов. Структура поля низших типов волн.	27
6.2.	Метод решения задачи о возбуждении идеального полого резонатора сторонними переменным токами. Потенциальные и вихревые поля. Ортогональность полей собственных мод	33
7.	Билет 7	37
7.1.	37
8.	Билет 8	38
8.1.	38
9.	Билет 9	39
9.1.	Затухание волн в линии передач, обусловленное потерями энергии в металлической стенке.	39
9.2.	Лемма Лоренца и теорема взаимности для двух систем монохроматических источников.	41
10.	Билет 10	45
10.1.	45
11.	Билет 11	46
11.1.	46
12.	Билет 12	47
12.1.	47
13.	Билет 13	48
13.1.	48
13.2.	48

1. Билет 1

1.1. Гармонические волны в линиях передачи. Выражение для векторного потенциала. Дифференциальное уравнение для поперечной волновой функции $\psi(r_{\perp})$. Понятия продольного и поперечного волнового числа. Выражения для полей ТЕ, ТМ, ТЕМ. Импедансная связь между поперечными компонентами электрического и магнитного полей и понятие поперечного волнового сопротивления

Линия передач - это любая цилиндрическая система. В них различают продольное z и поперечное $r_{\perp} = r_{\perp}(r, \theta)$ направление. При описании таких систем проще использовать векторный потенциал \vec{A} , который должен удовлетворять уравнению Гельмгольца (для амплитуд):

$$\Delta \vec{A}^e + k^2 \vec{A}^e = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}^e = 0$$
$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}^e$$

0 потому что случай, где нет сторонних источников. Запишем поля в ЛП, когда волна бежит вдоль оси Oz :

$$\vec{E}(\vec{r}_{\perp}, z, \theta) = \vec{E}_0(\vec{r}_{\perp}) e^{i(\omega t - h z)},$$

где h - **продольное волновое число** (постоянная распространения). Реальное поля в таком случае записывается как:

$$E_{R_x} = \text{Re}\{E_x\} = |E_x(\vec{r}_{\perp})| \cos(\omega t - h z + \varphi(\vec{r}_{\perp}))$$

Запишем векторный потенциал в следующем виде:

$$\vec{A}^e = \psi^e(\vec{r}_{\perp}) e^{-i h z} \vec{z}_0,$$

где $\psi^e(\vec{r}_{\perp})$ - **поперечная волновая функция**. Запишем теперь поля \vec{E} и \vec{H} через $\psi^e(\vec{r}_{\perp})$. Вспомним выражение полей через векторный потенциал:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A}^e$$
$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}^e}{\partial t} = \frac{1}{i k_0 \varepsilon \mu} (\nabla \text{div} + k^2) \vec{A}^e,$$

где $k = \frac{w}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$, $k_0 = \frac{w}{c}$. При подстановке выражения для \vec{A}^e , для компонент векторов в случае **ТМ** - волны получим (надо расписать такие вещи как $\text{div } \vec{A}^e$, $\nabla \text{div } \vec{A}^e$, $\text{rot } \vec{A}^e$):

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\varkappa^2}{ik_0\varepsilon\mu} \psi^e(\vec{r}_\perp) \cdot e^{i(wt-hz)} \\ \vec{E}_\perp &= -\frac{h}{k_0\varepsilon\mu} \nabla_\perp \psi^e(\vec{r}_\perp) \cdot e^{i(wt-hz)} \\ \vec{H}_\perp &= \frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \psi^e(\vec{r}_\perp) \times \vec{z}_0] \cdot e^{i(wt-hz)} \\ H_z &= 0 \end{aligned}$$

ТМ-волна - поперечная магнитная волна (Магнитное поле имеет только поперечную компоненту. Поле \vec{E} имеет и поперечное и продольное направление).

Потенциал \vec{A}^e , при любой зависимости от времени, должен удовлетворять волновому уравнению:

$$\Delta \vec{A}^e - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}^e}{\partial t^2} = 0$$

В нашем случае, когда векторный потенциал имеет вид $\vec{A}^e = \psi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz} \vec{z}_0$, для гармонических полей справедливы следующие переходы:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow iw, \quad \Delta \vec{A}^e + k^2 \vec{A}^e = 0, \quad k^2 = \frac{w^2}{c^2} \varepsilon\mu$$

Рассмотри для z -компоненты:

$$\Delta A_z^e + k^2 A_z^e = 0, \quad \Delta = \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Rightarrow -h^2, \quad \text{т.к. } A_z^e = \psi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz}$$

$$\Delta_\perp \psi^e + \underbrace{(k^2 - h^2)}_{\varkappa^2} \psi^e = 0$$

$$\Delta_\perp \psi^e + \varkappa^2 \psi^e = 0$$

\varkappa^2 - **поперечное волновое число**. Если поле удовлетворяет уравнению выше, то такое поле удовлетворяет уравнениям Максвелла.

Аналогично сделаем для **ТЕ** - волны.

ТЕ-волна - поперечная электрическая волна (Электрическое поле имеет только поперечную компоненту. Магнитное поле имеет и поперечное и

продольное направление). По принципу двойственности производим замены:

$$\vec{E} \rightarrow \vec{H}, \quad \vec{H} \rightarrow -\vec{E}, \quad \varepsilon \leftrightarrow \mu$$

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{\varkappa^2}{ik_0\varepsilon\mu} \psi^m(\vec{r}_\perp) \cdot e^{i(wt-hz)} \\ \vec{H}_\perp &= -\frac{h}{k_0\varepsilon\mu} \nabla_\perp \psi^m(\vec{r}_\perp) \cdot e^{i(wt-hz)} \\ \vec{E}_\perp &= -\frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \psi^m(\vec{r}_\perp) \times \vec{z}_0] \cdot e^{i(wt-hz)} \\ E_z &= 0 \end{aligned}$$

Вообще говоря, ψ^e и ψ^m могут быть различными, поэтому выше вместо ψ^e записано ψ^m . Аналогично для ψ^m требуется выполнение:

$$\Delta_\perp \psi^m + \varkappa^2 \psi^m = 0$$

ТЕ, ТМ волны - это решения уравнений Максвелла. однак может быть еще один тип решений - **ТЕМ** - волны. Рассмотрим случай $\varkappa = 0$, $h = k$:

$$\begin{aligned} H_z &= E_z = 0 \\ \vec{E}_\perp &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \nabla_\perp \psi \cdot e^{i(wt-kz)} \\ \vec{H}_\perp &= \frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \psi \times \vec{z}_0] \cdot e^{i(wt-kz)} \\ \Delta_\perp \psi &= 0 \end{aligned}$$

ТЕМ-волна - чисто поперечная волна (Электрическое поле имеет только поперечную компоненту, как и магнитное).

Что имеем в итоге:

- Поля выражаются через поперечную волновую функцию
- Продольные компоненты полей пропорциональны ψ
- Поперечные компоненты полей пропорциональны $\nabla_\perp \psi$

Т.е. если заданы ψ^e, ψ^m , то можно полностью найти поля. Из формул также видно следующее соотношение:

$$\vec{E}_\perp = \eta_{\perp B} [\vec{H}_\perp \times \vec{z}_0],$$

где $\eta_{\perp B}$ - **поперечное волновое сопротивление** - отношение между поперечными компонентами полей в бегущей волне $\eta_{\perp B} = \frac{E_\perp}{H_\perp}$. Для различных

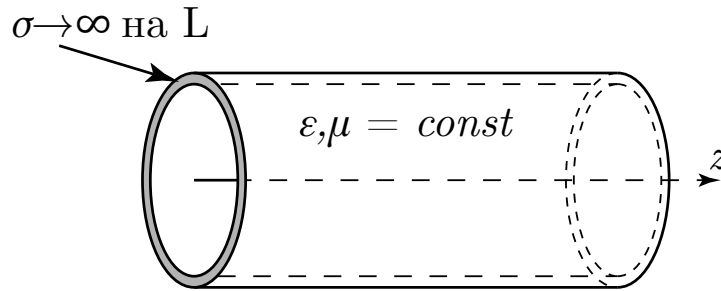
ТИПОВ ВОЛН ЗАПИСЫВАЕТСЯ КАК:

$$\text{TE}(+), \text{TM}(-) \text{ - ВОЛНЫ: } \eta_{\perp\text{B}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(\frac{k}{h} \right)^{\pm 1}$$
$$\text{TEM} \text{ - ВОЛНЫ: } \eta_{\perp\text{B}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Заметим, что в бегущей волне поля зависят от координат, а их отношение - $\eta_{\perp\text{B}}$ - нет. В стоячей волне это не так.

2. Билет 2

2.1. Граничные условия для поперечных волновых функций волн ТЕ, ТМ, ТЕМ типов в идеальной линии передачи. Математическая формулировка задачи описания волн ТЕ, ТМ, ТЕМ типов.



Рассмотрим случай идеального проводника, $\sigma \rightarrow \infty$ (Вообще говоря, идеальных проводников не бывает, однако условие идеальной проводимости можно записать в виде: $\sigma \gg w$ ($\delta \ll L$)). Вспомним граничные условия для полей на поверхности идеального проводника:

$$E_\tau|_S = 0, \quad H_n|_S = 0,$$

а также условие на поперечную волновую функцию:

$$\Delta_\perp \psi^{e,m} + \kappa^2 \psi^{e,m} = 0$$

Найдем граничные условия для $\psi^{e,m}$ для идеальной ЛП.

ТМ-волна:

$$\text{т.к. } E_z \sim \psi^e, \quad \vec{E}_{\perp\tau} \sim \frac{\partial \psi^e}{\partial \tau}$$

$$\text{и } E_z = 0, \quad E_{\perp\tau} = 0$$

$$\text{то } \psi^e(\vec{r}_\perp)|_S = 0$$

- это граничное условие Дирихле

ТЕ-волна:

$$\text{т.к. } \vec{E}_{\perp\tau} \sim [\nabla_\perp \psi^m(\vec{r}_\perp) \times \vec{z}_0]_\tau$$

$$\text{и } E_{\perp\tau} = 0$$

$$\text{то } \frac{\partial \psi^m}{\partial n}|_S = 0$$

ТЕМ-волна:

$$\text{т.к. } \vec{E}_{\perp\tau} \sim \nabla_\perp \psi^m(\vec{r}_\perp)$$

$$\text{то } \frac{\partial \psi}{\partial \tau}|_S = 0 \Rightarrow \psi|_S = \text{const} = C_i$$

Отметим, что на разных поверхностях проводников постоянная C_i может быть разной.

Математическая формулировка задач для описания волн.

ТМ. Необходимо решить:

$$\Delta_{\perp} \psi^e + \varkappa^2 \psi^e = 0$$

$$\psi^e|_L = 0, L - \text{граничный контур}$$

ТЕ. Необходимо решить:

$$\Delta_{\perp} \psi^m + \varkappa^2 \psi^m = 0$$

$$\frac{\partial \psi^m}{\partial n}|_L = 0$$

ТЕМ. Необходимо решить:

$$\Delta_{\perp} \psi^m = 0$$

$$\psi|_{L_i} = C_i$$

Задачи ТЕ, ТМ волн - аналогичны задачам с мембраной, где граница мембраны закреплена неподвижно, а ТЕМ задачу можно назвать «электростатической». Это задачи на нахождение собственных функций

$$\psi_1^{e,m}(\vec{r}_{\perp}), \psi_2^{e,m}(\vec{r}_{\perp}), \dots, \psi_i^{e,m}(\vec{r}_{\perp})$$

и собственных чисел

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_i$$

Если ЛП идеальна, то спектр собственных значений и функций бесконечен.

3. Билет 3

3.1. **МИНИМУМ** Дисперсионное уравнение для волн в идеальной ЛП. Критические частоты и длины волн. Зависимости длины волны, фазовой и групповой скорости от частоты. Распространяющиеся и нераспространяющиеся волны.

Дисперсионное соотношение

$$\kappa^2 = k^2 - h^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu - h^2$$

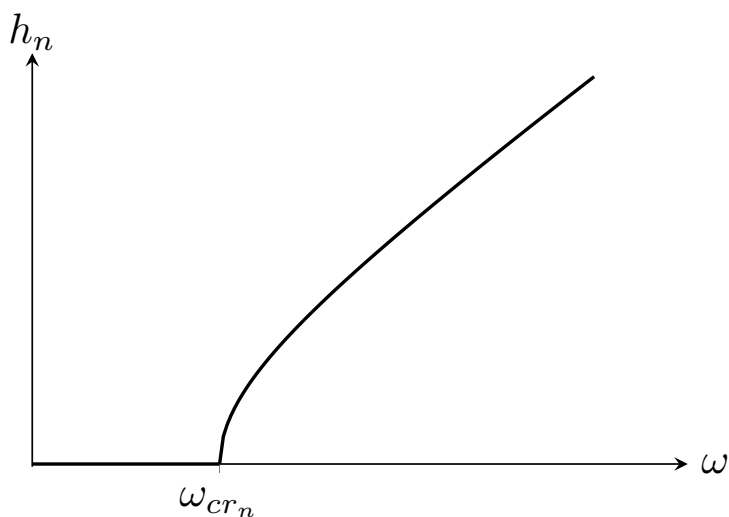


Рис. 1. Зависимость реальной части поперечного волнового числа от частоты

Где κ – поперечное волновое число, а h – продольное волновое число.

Любая мода в линии передачи характеризуется поперечным волновым числом, а поперечное волновое число определяет продольное.

Можем ввести критическую длину волны (продольное волновое число h равно нулю):

$$\begin{aligned}\kappa^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \\ \omega_{cr} &= \frac{\kappa c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \\ \lambda &= \frac{2\pi c}{\omega_{cr}} = \frac{2\pi}{\kappa \sqrt{\varepsilon \mu}}\end{aligned}$$

$\omega < \omega_{cr}$ дисперсионное уравнения не имеет действительных решений – режим нераспространяющейся волны.

При $\omega > \omega_{cr}$ – режим распространяющейся волны.

Если волна бежит вправо, то $h > 0$; если бежит влево, то $h < 0$

$$Re\vec{E}, Re\vec{H} \sim \cos(\omega t - hz)$$

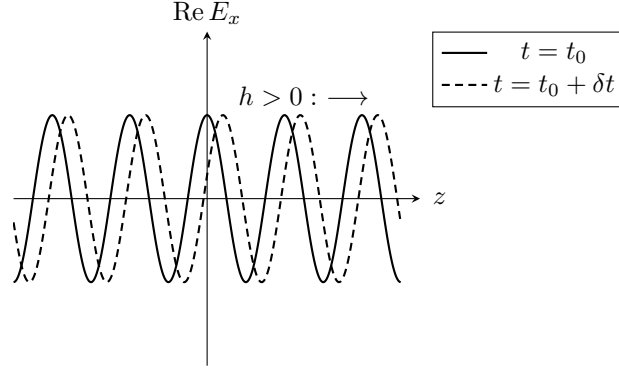


Рис. 2. Распространение волны ($h > 0$)

При $\omega < \omega_{cr}$

$$h = \pm i|h|$$

$$Re E_x \sim \cos(\omega t + \phi_0) \exp\{\mp |h|z\}$$

Бегучести нет. Зависимость экспонентальная

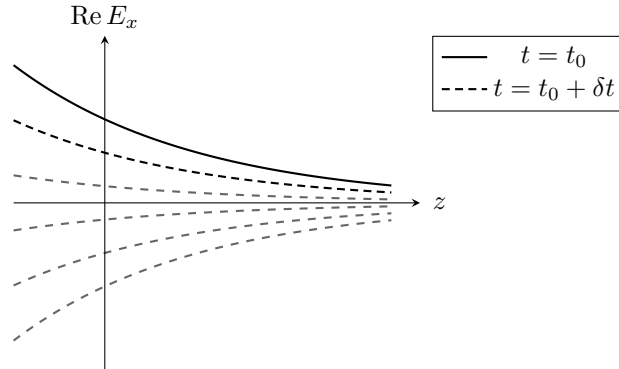


Рис. 3. Режим нераспространения ($h < 0$)

Картинка зависит от способа создания волны, то есть у экспоненты «+» или «-». В зависимости от того, где источник можем сказать, куда бежит волна. То есть определить знак.

Источник может порождать несколько мод, но не все, а какие-то конкретные. Изобразим числовую ось. Пусть задана ω , а то есть $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu}$

Если $k < \kappa_1$ - все моды нераспространяющиеся.

Когда k перейдёт через κ_1 появится низшая мода.

Когда перейдём через κ_2 появится ещё одна критическая частота.

!!Можно дополнить описание числовой прямой!!

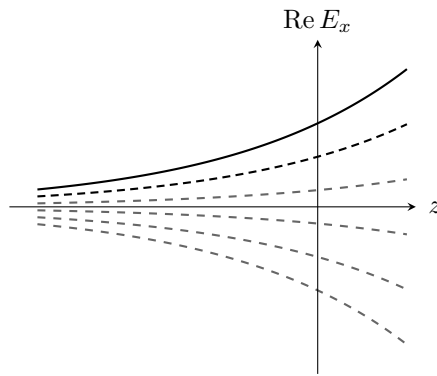


Рис. 4. Экспоненциальное нарастание амплитуды (при $h < 0$)

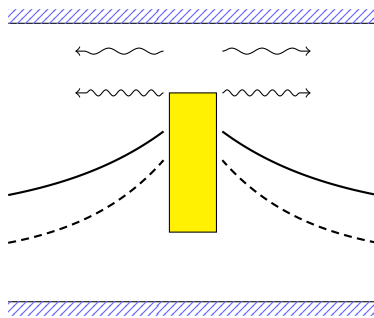
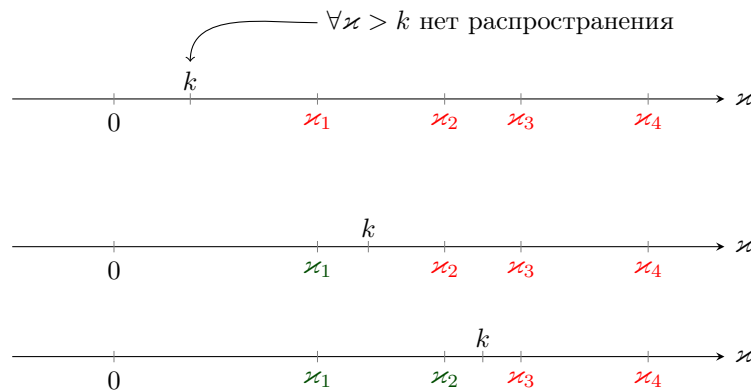


Рис. 5. Моды в линии передачи с источником



Кинематические соотношения - определяют кинематические параметры волны.

1) Временной период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

2) Длина волны в волновом (подразумевают линию передачи или трубу, когда говорят волновод)

$$\lambda_v = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \kappa^2}} = \frac{2\pi}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{k^2}}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2 r^2}{\omega^2}}} > \lambda_0$$

Когда $\omega \rightarrow \omega_{cr}$ $\lambda_v \rightarrow \infty$

λ_0 - длина волны в пространстве без волновода в той же среде.

λ_v - пространственный период.

3) Фазовая скорость - скорость перемещения плоскости постоянной фазы.

Поверхность постоянной фазы - это когда фаза константа.

$$\Phi = \omega t - hz + \phi_0 = \text{const}$$

При данном времени можно найти выражение для поверхности постоянной фазы:

$$z = \frac{\omega t + \phi_0}{h}$$

Координата будет перемещаться со скоростью:

$$v_f = \frac{\omega}{h}$$

$$v_f = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - \varkappa^2}} = \frac{\omega}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{\varkappa^2}}} = \frac{\omega}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{cr}^2}{\omega^2}}} > v_f^{(0)}$$

$$v_f^{(0)} = \frac{c}{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{k}$$

Фазовая скорость может быть больше скорости света.

4) Групповая скорость - скорость перемещения квазимонохроматического волнового пакета.

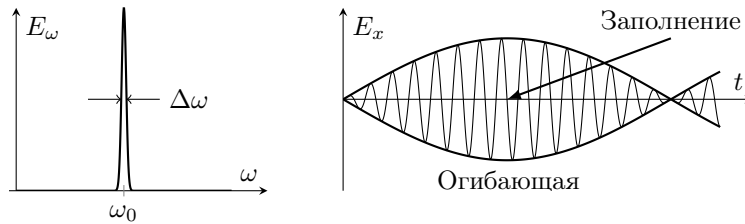


Рис. 6. Квазимонохроматический волновой пакет

Сигнал характеризуется высокочастотным заполнением и огибающей.

По сути это радиоимпульс.

Пакет движется со скоростью $v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k}|_{\omega=\omega_0}$ - это при малом или отсутствующем поглощении. (Это в пространстве, а не в линии передачи). При большом поглощении это понятие теряет смысл. По мере перемещения по волноводу форма сигнала будет меняться.

$v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial h}|_{\omega=\omega_0}$ - формула для волновода.

$$k^2 = h^2 + \kappa^2$$

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}$$

Берём дифференциал от правой и левой части. κ не зависит от частоты.

$$2kdk = 2h dh$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial h} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \frac{h}{k}$$

$$h = + \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu - \kappa_n^2}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial h} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \frac{c}{\omega \sqrt{\varepsilon \mu}} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu - \kappa_n^2} = \frac{v_f^{(0)^2}}{v_f}$$

$$v_f = \frac{\omega}{h}$$

$$v_f^{(0)} = \frac{c}{\omega \sqrt{\varepsilon \mu}}$$

$$v_f v_{gr} = v_f^{(0)^2}$$

$$v_{gr} = v_f^{(0)} \sqrt{1 - \frac{\omega_{cr}^2}{\omega^2}}$$

Всё это справедливо для сред без временной дисперсии.

$$\varepsilon \neq f(\omega), \mu \neq f(\omega)$$

$v_{gr} < c$ - она несёт информацию.

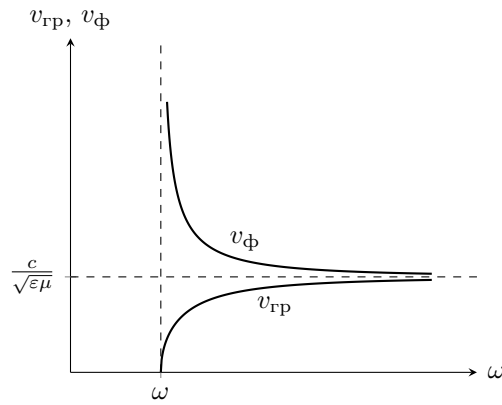


Рис. 7. Распространение волнового пакета

4. Билет 4

4.1. Медленные волны, направляемые плоским диэлектрическим слоем. Дифференциальное уравнение для поперечной волновой функции и его решения для областей внутри и вне слоя. Выражения для полей, граничные условия и дисперсионные (характеристические) уравнения для симметричных (чётных) волн типа ТМ

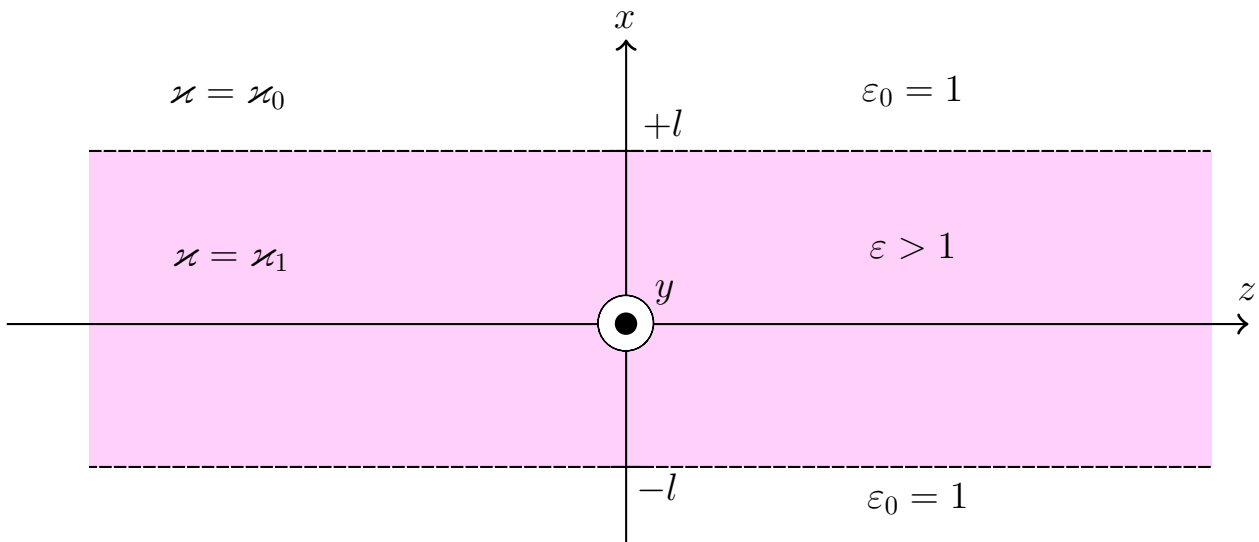


Рис. 8. Диэлектрический слой

Рассмотрим задачу о распространении волны вдоль плоского диэлектрического слоя. Так как это бесконечный плоский слой, то $\frac{\partial}{\partial y} = 0$: $\vec{E}, \vec{H} =$

$\vec{E}(t, x, z), \vec{H}(t, x, z)$. Будем искать решение в виде

$$\vec{E} = \vec{F}(x) \cdot e^{i(\omega t - hz)}$$

Теперь у нас будут другие граничные условия. Нам придётся решать уравнения Максвелла во всей среде – в трёх областях: вне слоя сверху, снизу и в слое, а затем сшивать решения.

Введём поперечную волновую функцию $\phi(x)$:

$$\Delta_{\perp} \phi + \kappa^2 \phi = 0, \quad \kappa^2 = k_0^2 \varepsilon \mu - h^2$$

h должно быть одинаковым в областях 0 (вне слоя) и 1 (в слое), иначе мы заведомо не сможем удовлетворить граничным условиям: количество гребней волн в разных областях не совпадёт. Значит, $h = \text{const}$.

В области 1:

$$\kappa_1^2 = k_0^2 \varepsilon - h^2, \quad \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \kappa_1^2 \phi = 0$$

В области 2:

$$\kappa_0^2 = k_0^2 - h^2, \quad \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \kappa_0^2 \phi = 0$$

Отсюда сразу следует, что $\kappa_1^2 = \kappa_0^2 + k_0^2(\varepsilon - 1)$.

Сначала найдём решение вне слоя. Волна должна быть локализована – не переносить энергию в поперечном направлении. Для этого нужно потребовать, чтобы

$$\kappa_0^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa_0^2 = -p^2, \quad \kappa_0^2 = ip \quad \Rightarrow \quad \phi \sim e^{\pm px}$$

Чтобы удовлетворить локализованности, над слоем должно быть $\phi = c_2 e^{-px}$, а под слоем $\phi = c_2 e^{px}$.

Теперь найдём решение в слое. Пусть $\kappa_1^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon > 1$. Тогда

$$\phi = A_1 \cos \kappa_1 x + A_2 \sin \kappa_1 x$$

ТМ волны в плоском слое. Запишем поля через волновую функцию, как мы это делали в самом начале курса:

$$E_z = \frac{\kappa^2}{ik_0 \varepsilon} \phi, \quad E_x = -\frac{h}{k_0 \varepsilon} \frac{d\phi}{dx}, \quad H_y = -dv \phi$$

E_y, H_x нет, так как они пропорциональны $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$. На границе диэлектрика у нас должны быть непрерывны тангенциальные компоненты полей E, H в точках $x = \pm l$.

Граничные условия для E_z (первая формула) и для H_y (вторая):

$$\frac{\kappa_1^2 \phi(l-0)}{\varepsilon}, \quad \frac{d\phi(l-0)}{dx} = \frac{d\phi(l+0)}{dx}$$

Чётные и нечётные волны. Целесообразно для упрощения расчётов разделять чётные волны ($f(x) = f(-x) \Rightarrow \phi = A \sin \kappa_1 x$), и нечётные ($f(x) = -f(x) \Rightarrow \phi = A \cos \kappa_1 x$). Тогда для чётных волн граничные условия примут вид

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \kappa_1^2 A \sin \kappa_1 l = -p^2 C e^{-pl} \\ \kappa_1^2 A \cos \kappa_1 l = -p C e^{-pl} \end{cases}$$

Условие разрешимости этой системы – определитель её равен нулю:

$$\begin{cases} \frac{\kappa_1 l}{\varepsilon} \operatorname{tg} \kappa_1 l = pl \\ (\kappa_1 l)^2 + (pl)^2 = (k_0 l)^2 (\varepsilon - 1) \end{cases}$$

Без вывода приведём такие же выражения для нечётных волн:

$$\begin{cases} -\frac{\kappa_1 l}{\varepsilon} \operatorname{ctg} \kappa_1 l = pl \\ (\kappa_1 l)^2 + (pl)^2 = (k_0 l)^2 (\varepsilon - 1) \end{cases}$$

Это трансцендентные уравнения, и просто так их решить нельзя. Но в этом случае оказывается целесообразным применить графический метод решения, который даст нам ключевую информацию о появлении мод. Построим оба уравнения в координатах $(pl, \kappa_1 l)$:

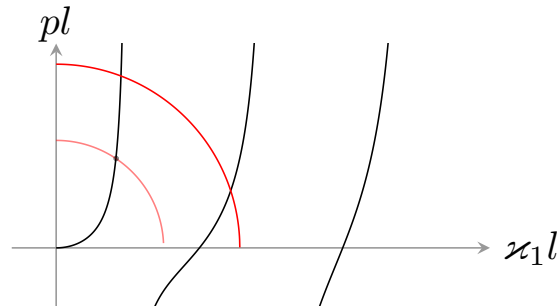


Рис. 9. Появление мод

Здесь радиус окружности $E = k_0 l \sqrt{\varepsilon - 1}$. Если $R < \pi$, то есть только один корень: мода TM_{00} . Когда окружность пересекает функцию в $pl = 0$, это критическая частота данной моды: так как $p = 0$ отвечает нелокализованной моде. Первый индекс моды связан с количеством корней уравнения, а второй у нас будет всегда 0 – мы не рассматривали зависимость от y .

Низшая мода TM_{00} . Построим графики поперечного распределения поля:

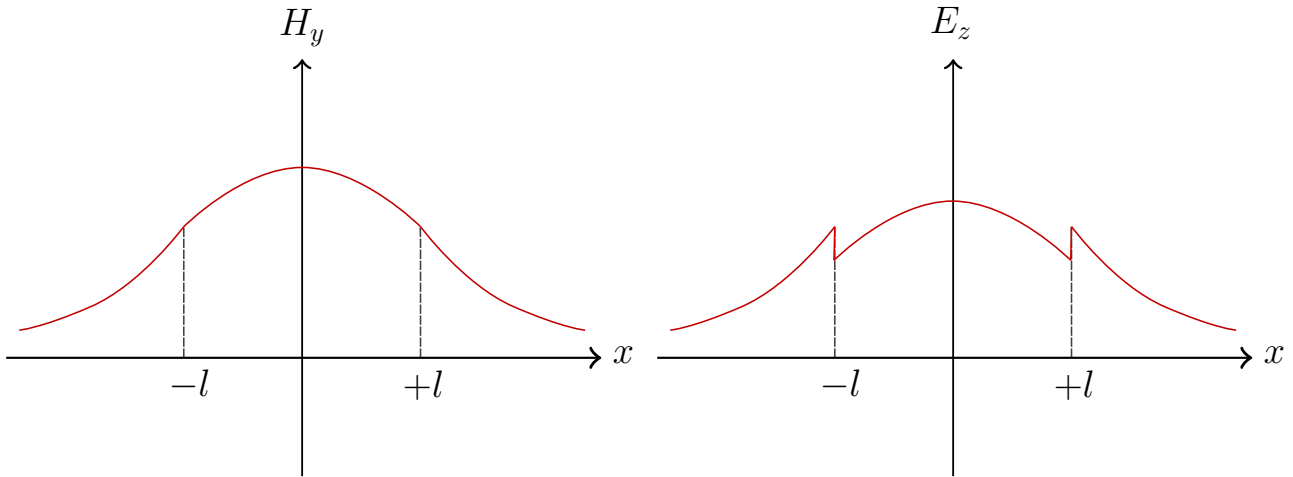


Рис. 10. Поле H_y непрерывно, а E_z терпит скачок, так как непрерывна D_n

ТЕ-волны. Для них

$$\text{чет: } \kappa_1 l \operatorname{tg} \kappa_1 l = pl, \quad \text{нечет: } -\kappa_1 l \operatorname{ctg} \kappa_1 l = pl$$

ТЕ волны возможны, только если $R > \frac{m\pi}{2}$.

Медленные волны. Почему мы называем эти волны медленными? Посмотрим на дисперсионное уравнение:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu + p^2 > k^2 \quad \Rightarrow \quad v_f = \frac{\omega}{h} < \frac{\omega}{k} = c.$$

Эти волны медленные относительно волн в вакууме: фазовая скорость меньше скорости света.

4.2. Главные (ТЕМ) волны в линиях передач. Условие существования ТЕМ волны. ТЕМ волна в коаксиальной линии (Картинка силовых линий, зависимость полей от координат).

У ТЕМ-волн поперечное волновое число $\kappa = 0$:

$$\kappa = 0 \Rightarrow h = k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}$$

Поля таких волн выражаются следующим образом через функцию φ :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\perp} &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \nabla_{\perp} \varphi \\ \vec{H}_{\perp} &= -\frac{1}{\mu} [\nabla_{\perp} \varphi, \vec{z}_0] \end{aligned}$$

При этом выполняются **граничные условия**: на каждом из проводников (допустим, есть набор проводников, вдоль которых распространяется волна)

$$\varphi|_{l_i} = C_i,$$

причем константа не обязана быть одна для всех проводников.

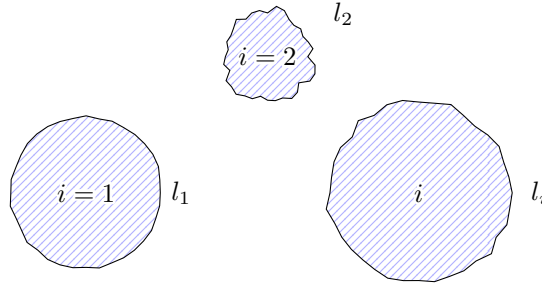


Рис. 11. Набор проводников в задаче

Внутренняя задача. Пусть у нас есть только один проводник, в котором есть цилиндрическая полость (рис. 12). Рассмотрим внутреннюю задачу, т.е. распространение волны внутри цилиндрической полости.

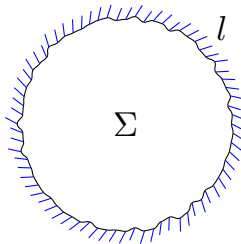


Рис. 12. Случай одного проводника

Оказывается, для граничного условия $\varphi_{\perp}|_l = C_1$ существует только тривиальное решение $\varphi_{\perp} = C_1$. Для доказательства необходимо воспользоваться теоремой о минимуме и максимуме для гармонической функции.

Внешняя задача. Зададимся вопросом о решении той же задачи:

$$\Delta_{\perp}\varphi = 0, \quad \varphi|_l = \text{const}$$

Только теперь будем рассматривать её в области вне проводника

Для начала рассмотрим задачу попроще, поле нити (рис. 13). Её решение известно:

$$\Delta_{\perp}\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \sim \ln r$$

Характер убывания полей здесь $E_r \sim \frac{1}{r}$, а для магнитного поля в силу импедансного соотношения $\frac{E_r}{H_{\phi}} = \eta_{\perp\text{в}} = 1$, $H_{\phi} \sim \frac{1}{r}$:

$$E_r = H_{\phi} \sim \frac{1}{r}$$

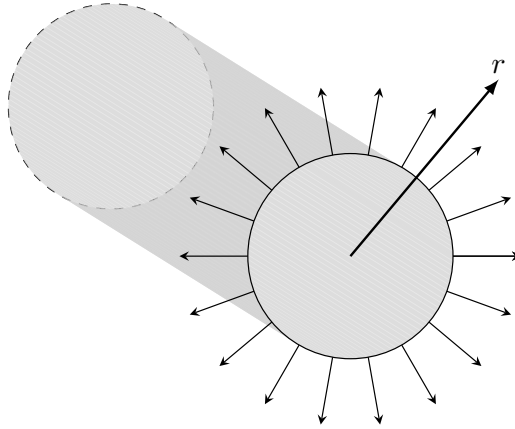


Рис. 13. Поле бесконечной проводящей нити

Посмотрим на поведение полей при $r \rightarrow \infty$. Говорят, нужно поставить граничные условия (или закон убывания) на бесконечности. Чем плох закон $\frac{1}{r}$?

Посчитаем средний по времени поток энергии через поперечное сечение, в котором распространяется волна. Сечение бесконечно, за исключением конечной площади проводника.

Сначала вычислим вектор Пойнтинга (средний по времени и в проекции на z):

$$\overline{S}_z = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(E_r \cdot H_{\phi}^*) \sim \frac{1}{r^2}$$

$$\Pi = \iint_{\Sigma} \bar{S}_z ds \sim \iint_{\Sigma} \frac{1}{r^2} (2\pi r dr) \sim \int_a^{\infty} = \ln \frac{\infty}{a} = \infty$$

Интеграл расходится на бесконечности. Говорят, что расходимость носит логарифмический характер. Получили бесконечную мощность волны: такую волну невозможно создать реальным источником — волна не удовлетворяет критерию энергетической реализуемости.

Можно сделать важный вывод: **вдоль одиночного проводника ТЕМ-волна с конечной энергией распространяться не может**. Распространение возможно, если количество проводников будет больше одного. Например, в линии из двух проводников (рис. 14) ТЕМ-волна уже возможна.

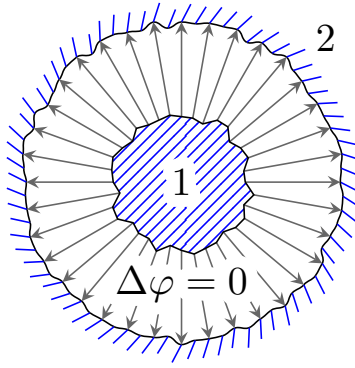


Рис. 14. Закрытая линия из двух проводников

Можно модифицировать задачу с нитью (рис. 15):

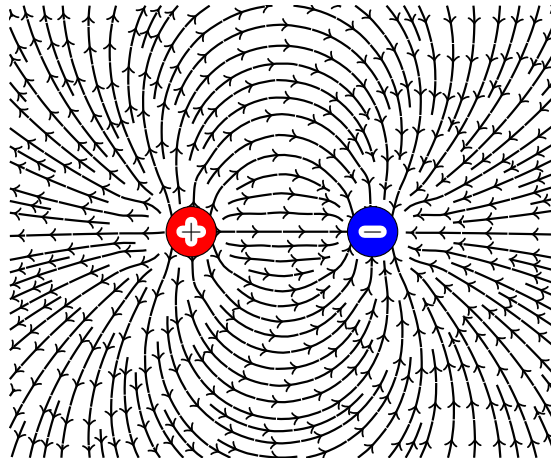


Рис. 15. Поле двухпроводной линии

В поперечном разрезе это поле диполя, а оно спадает быстрее, $\sim \frac{1}{r^2}$. Тогда

$$E_{\perp} \sim H_{\perp} \sim \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_z \sim \frac{1}{r^4}, \quad \Pi \sim \int_{L_{\text{характ}}}^{\infty} \frac{1}{r^3} dr$$

Мощность волны конечна, значит, в модифицированной задаче ТЕМ-волна энергетически реализуема.

Конечный вывод: ТЕМ-волна в идеальной линии передачи возможна, если число проводников ≥ 2 .

Например, в коаксиальной линии (рис. 16) ТЕМ-волна возможна.

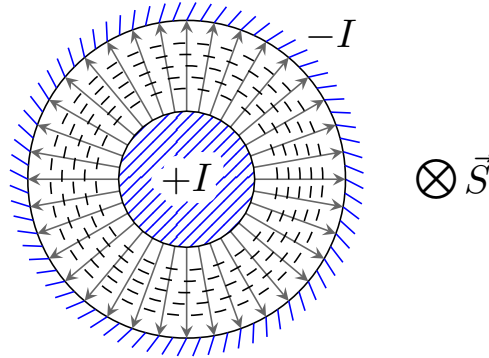


Рис. 16. Поле в коаксиальном кабеле

Зададимся вопросом: возможны ли в такой линии ТЕ и ТМ волны? Сформулируем утверждение, пока без доказательства: **в открытых линиях передачи ТЕ и ТМ волны не существуют.**

5. Билет 5

5.1. Волны в прямоугольном металлическом волноводе. Спектр собственных волновых чисел волн ТЕ и ТМ типов. Структура поля низших типов волн

Решение для ТМ-волн. Займемся решением ТМ-волны в прямоугольном волноводе (рис. 17). Условимся что $a > b$. Эта задача поиска собственных функций ϕ^e и собственных значений κ :

$$\Delta_{\perp} \phi^e + \kappa^2 \phi^e = 0, \quad \phi^e|_l = 0$$

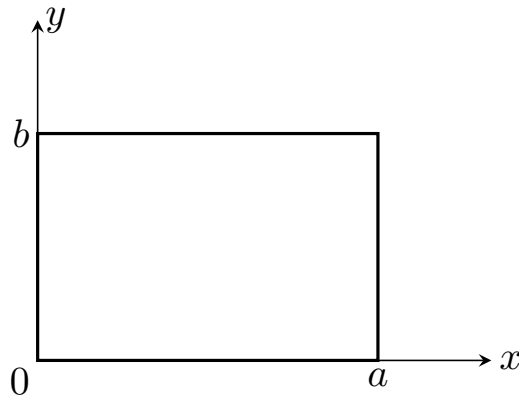


Рис. 17. Прямоугольный волновод

В матфизике эта задача о колебании мембраны с закрепленным краем. Она решается разделением переменных:

$$\phi^e = X(x) \cdot Y(y)$$

$$\frac{\partial^2 \phi^e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial y^2} + \kappa^2 \phi^e = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{XY} \right. \Rightarrow \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \kappa^2 = 0$$

Тут надо произнести магическую фразу: так как первое слагаемое функция от x , второе функция от y , и их сумма равна константе для любых x, y , значит – сами слагаемые тоже какие-то константы:

$$\frac{X''}{X} = -\kappa_x^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -\kappa_y^2$$

Определив таким образом константы, мы получаем:

$$\kappa_x^2 + \kappa_y^2 = \kappa^2$$

Пока мы не нашли само κ . Это собственное число, и оно подлежит определе-

нию. Прежде чем его найти, найдем собственные функции, решая уравнения

$$X'' + \kappa_x^2 X = 0, \quad Y'' + \kappa_y^2 Y = 0$$

Это уравнения известного вида, их решение

$$X = C_1 \cdot \cos \kappa_x x + C_2 \cdot \sin \kappa_x x \quad Y = A_1 \cdot \cos \kappa_y y + A_2 \cdot \sin \kappa_y y$$

Нужно удовлетворить граничным условиям:

$$\phi^e|_{y=0} = 0 \Rightarrow X(x)Y(0) = 0 \quad \forall x \Rightarrow Y(0) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

$$\phi^e|_{x=0} = 0 \Rightarrow X(0)Y(y) = 0 \quad \forall y \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \phi^e|_{x=a} = 0 &\Rightarrow X(a)Y(y) = 0 \quad \forall y \Rightarrow \\ \Rightarrow X(a) = 0 &\Rightarrow \kappa_x a = m\pi, \quad m = \emptyset, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Поскольку $m = 0$ дает тривиальное решение, мы его откидываем.

$$\begin{aligned} \phi^e|_{y=b} = 0 &\Rightarrow X(x)Y(b) = 0 \quad \forall x \Rightarrow \\ \Rightarrow Y(b) = 0 &\Rightarrow \kappa_y b = n\pi, \quad n = \emptyset, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Теперь мы получили выражения для X и Y :

$$\begin{aligned} X_m(x) &= C_2 \cdot \sin \frac{\pi m x}{a} \\ Y_n(x) &= A_2 \cdot \sin \frac{\pi n y}{b} \end{aligned}$$

Теперь можем окончательно записать выражения для собственных функций и собственных значений в решении ТМ-волн:

$$\left. \begin{aligned} \phi_{mn}^e &= B_{mn} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} \\ \kappa_{mn}^2 &= \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \end{aligned} \right\}, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Решение для ТЕ-волн. Приведем решение без вывода:

$$\left. \begin{aligned} \phi_{mn}^m &= B_{mn} \cos \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b} \\ \kappa_{mn}^2 &= \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \end{aligned} \right\}, \quad m, n = (0), 1, 2, \dots \quad (1)$$

Важным отличием является то, что теперь одно из чисел m, n может быть равно нулю (решение от этого не станет тривиальным).

Низшая мода. По определению, низшая мода – та, у которой минимальное поперечное волновое число. Так как мы предполагали, что $a > b$, то в нашем случае это мода TE_{10} :

$$\kappa_{10} = \frac{\pi}{a} \quad \rightarrow \quad \omega_{cr10} = \frac{\kappa_{10} \cdot c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Именно моду TE_{10} чаще всего используют на практике в линиях передачи.

Рассмотрим перпендикулярную структуру поля TE_{10} -волны. Нарисуем силовые линии полей E и H в плоскости (x, y) – перпендикулярной распространению волны (рис. 18)

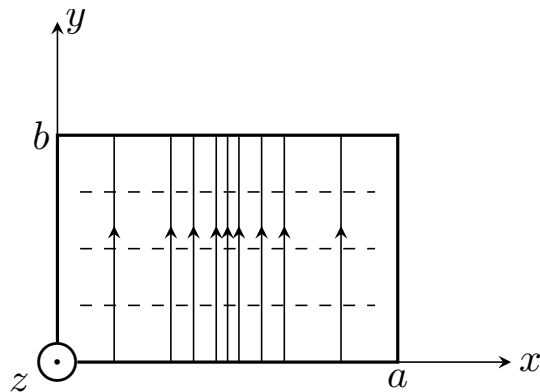


Рис. 18. Структура полей \vec{E} и \vec{H} (\vec{H} изображено пунктиром)

На границах волновода поле E равно нулю (в силу условия $E_\tau = 0$). Поле \vec{E} можем получить из уравнений (1),(4.2):

$$\vec{E} = \vec{E}_\perp = \vec{y}_0 E_0 \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \exp[i(\omega t - hz)],$$

где

$$h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

Поле H можно найти из импедансного соотношения (для TE -волны):

$$\frac{E_y}{H_x} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{k}{h}$$

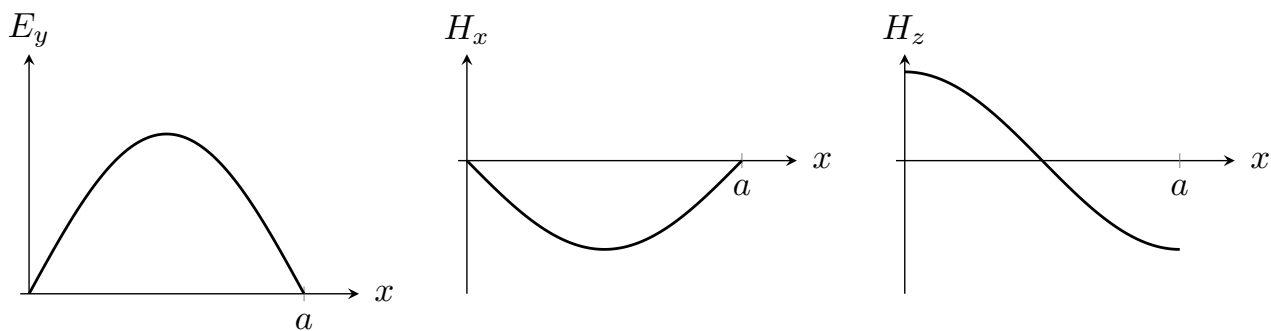


Рис. 19. Поперечная структура полей \vec{E} и \vec{H} (мода TE)

За перенос энергии отвечают именно поперечные компоненты поля. Компонента поля $H_z \sim \cos \frac{\pi a}{x}$, а также сдвинута по фазе во времени.

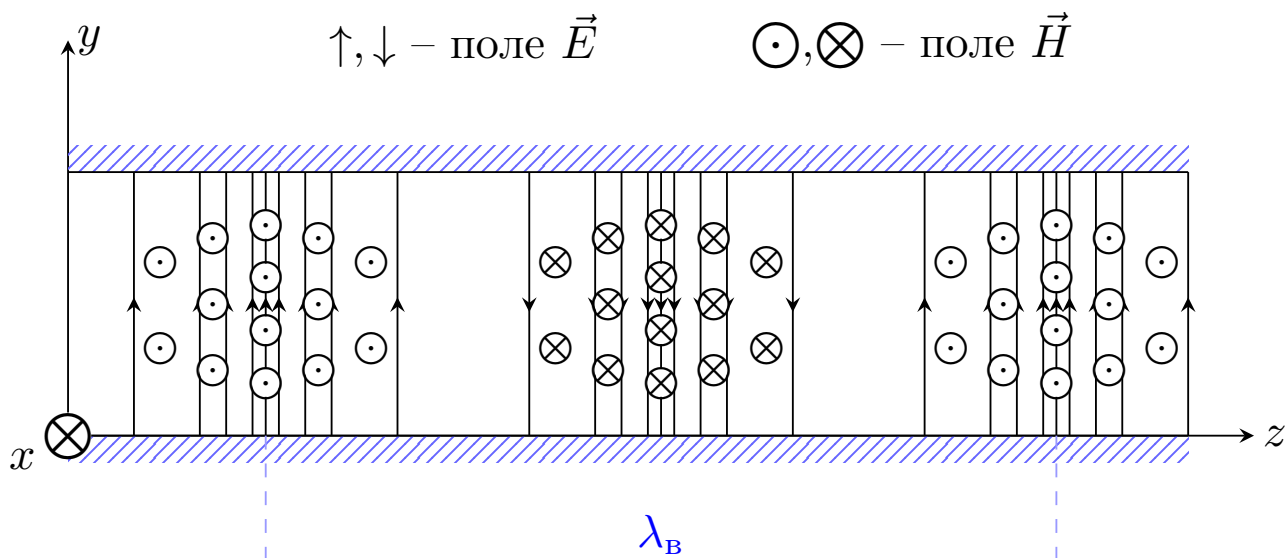


Рис. 20. Продольная структура полей \vec{E} и \vec{H} (мода TE₁₀)

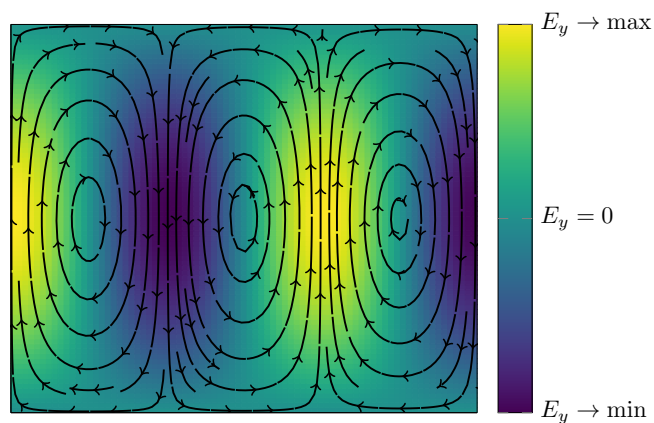


Рис. 21. Структура поля \vec{H} (изображены силовые линии) и поля \vec{E} (напряженность изображена цветом) волны TE₁₀ в прямоугольном волноводе

Высшие моды. В зависимости от соотношения между a и b , порядок мод может быть разным (он определяется величиной поперечного волнового числа). Некоторые высшие моды:

$$\begin{aligned} \text{TE}_{11} : \quad \kappa_{11} &= \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} \\ \text{TE}_{20} : \quad \kappa_{20} &= \frac{2\pi}{a} \\ \text{TE}_{01} : \quad \kappa_{11} &= \frac{\pi}{b} \end{aligned}$$

5.2. Затухание собственных колебаний в полном резонаторе, обусловленное потерями энергии в заполняющей среде

Чтобы его найти, нужно действовать стандартно: представить $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$, аналогично $\mu = \dots$. Связь частот определяется формулой

$$\omega = \frac{\omega^{(0)}}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где $\omega^{(0)}$ – спектр незаполненного резонатора. Отсюда найдется ω'' ($\omega = \omega' + i\omega''$), и тогда затухание будет происходить как

$$E, H \sim e^{i\omega t} \sim e^{i\omega' t} \cdot e^{-i\omega'' t}$$

При $\mu = 1$ оказывается, что $\omega'' \sim -\varepsilon''$. Это не ошибка, так как $\varepsilon'' < 0$. Для прямоугольного резонатора можно построить $\text{Re } E_x(t)$, это будет синусоида, вписанная в огибающую – убывающую экспоненту:

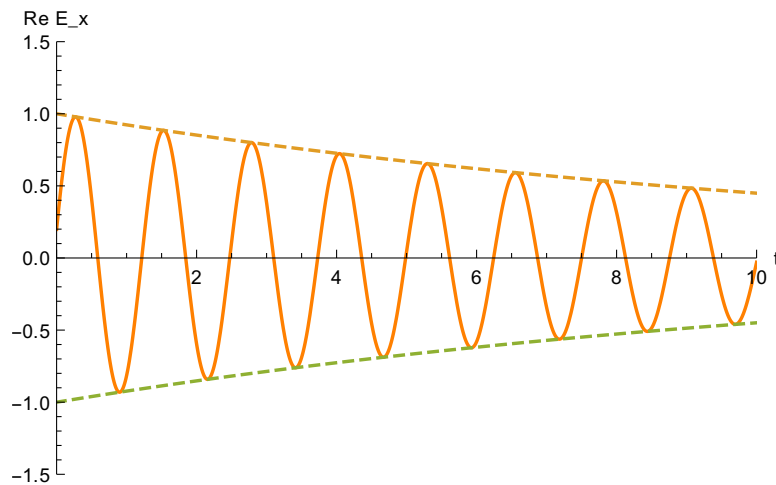


Рис. 22. Затухание поля в резонаторе со временем

6. Билет 6

6.1. Волны в круглом металлическом волноводе. Спектр собственных функций и поперечных волновых чисел волн ТЕ и ТМ типов. Структура поля низших типов волн.

Наиболее часто на практике используются прямоугольные, круглые и коаксиальные волноводы. Займемся изучением круглых волноводов.

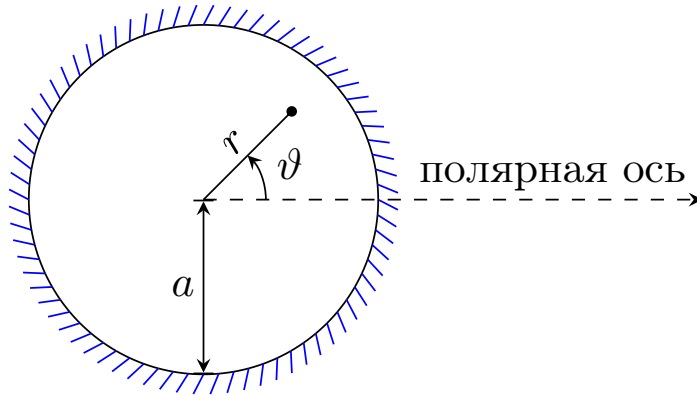


Рис. 23. Геометрия круглого волновода

Область определения задачи $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Каждая точка в сечении волновода задается двумя координатами (r, ϑ) .

Будем решать задачу (пока в общем виде, без граничных условий):

$$\Delta_{\perp} \phi + \kappa^2 \phi = 0$$

Здесь лапласиан в цилиндрических координатах

$$\Delta_{\perp} \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2}$$

Также как и при поиске поля в прямоугольном волноводе, воспользуемся методом разделения переменных:

$$\phi = R(r) \cdot \Theta(\vartheta)$$

Применив стандартным образом разделение переменных (подставив ϕ как $R \cdot \Theta$ в решаемое уравнение и домножив уравнение слева и справа на $\frac{r^2}{R\Theta}$), получим

$$\underbrace{r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \kappa^2 r^2}_{f(r)=+C_1} + \underbrace{\frac{\Theta''}{\Theta}}_{g(\vartheta)=-C_1} = 0$$

Заметим, что комбинация из первых трех слагаемых может зависеть только от r , последнее слагаемое может зависеть только от ϑ , а их сумма ни от чего не зависит - значит и первые три слагаемых в сумме ни от чего не зависят и равны некой константе $-C_1$, тогда последнее слагаемое (которое тоже ни от чего не зависит) равно $+C_1$.

Таким образом, разделение переменных успешно завершилось.

Уравнение относительно Θ . Такое уравнение запишется в виде

$$\Theta'' + C_1\Theta = 0$$

Решение этого уравнения (гармонического осциллятора) нам хорошо известно:

$$\Theta = A_1 \cos(\sqrt{C_1}\vartheta) + A_2 \sin(\sqrt{C_1}\vartheta)$$

Сразу заметим, что отсюда следует, что $\sqrt{C_1} = m$ – целое число. Действительно, в силу симметрии задачи

$$\Theta(\vartheta) = \Theta(\vartheta + 2\pi),$$

а такое возможно только при целой частоте $\sqrt{C_1}$.

Уравнение относительно r . Его можно переписать, если учесть что $\sqrt{C_1} = m$, тогда

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(\kappa^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R = 0$$

Можно ввести замену переменных $x = \kappa r$, тогда

$$R''_{xx} + \frac{1}{x}R'_x + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)R = 0, \quad R = R(x)$$

Это известное уравнение Бесселя. Его решение получается в виде специальных, цилиндрических функций Бесселя:

$$R = B_q \cdot J_m(x) + B_2 \cdot N_m(x)$$

J_m называют функциями Бесселя первого рода, или просто функциями Бесселя, а N_m функциями Бесселя второго рода, или функциями Неймана. Их поведение хорошо изучено, не хуже чем поведение синуса и косинуса. Рассмотрим некоторые характерные моменты. Первый максимум функции Бесселя второго порядка лежит на пересечении функций Бесселя первого и нулевого порядков. Это свойство функций Бесселя. Еще одно свойство заключается в том, что ноль функции Бесселя первого порядка совпадает с точкой минимума функции Бесселя нулевого порядка. Функции Неймана мы пока не

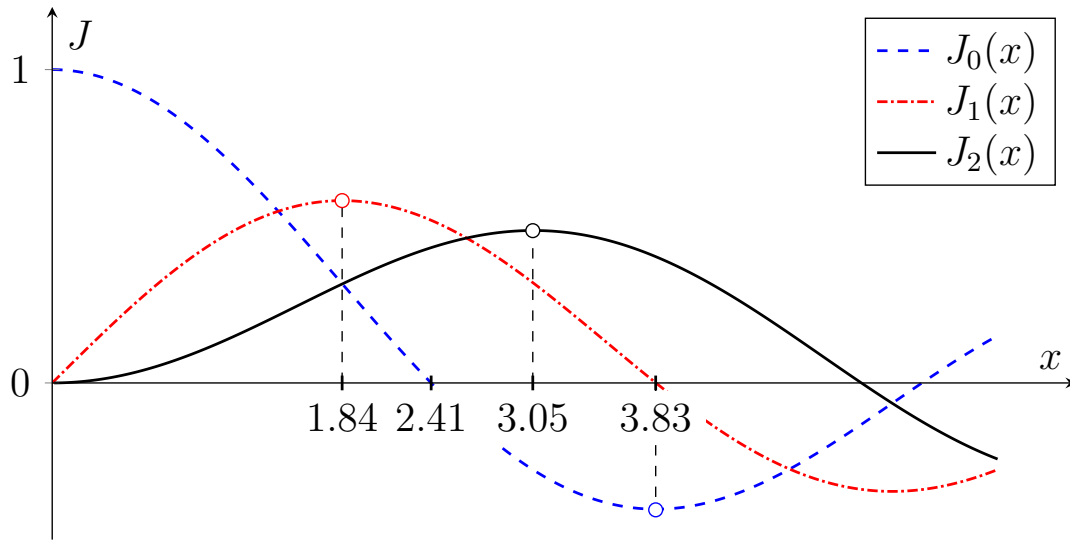


Рис. 24. Функции Бесселя первого рода

будем рассматривать подробно. Это вызвано тем, что у всех функций Неймана есть особенность: в нуле они расходятся, и поэтому в нашем решении, чтобы решение в нуле было конечно, придется положить $B_2 = 0$.

Вообще говоря, в коаксиальной линии это будет не так, потому что там область определения задачи не включает $r = 0$, и будет $B_2 \neq 0$.

Итак, наше решение теперь можно переписать в виде

$$\phi_m = J_m(\kappa r)(A_1 \cos(m\vartheta) + A_2 \sin(m\vartheta))$$

Здесь константу B_1 мы уже не пишем, предполагая что она сидит в константах A_1, A_2 . Иногда, для краткости, комбинацию синуса и косинуса пишут так:

$$A_1 \cos(m\vartheta) + A_2 \sin(m\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos m\vartheta \\ \sin m\vartheta \end{pmatrix}$$

Перейдем к удовлетворению граничных условий.

Граничные условия ТЕ-волн. На границе волновода должна зануляться производная поперечной функции:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial J_m(\kappa r)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0$$

Это значит, что

$$J'_m(x) = 0, \quad x = \kappa a$$

Мы можем пронумеровать все нули производной, и обозначить эти точки $x = \mu_{mn}$, где m – порядок функции Бесселя, а n – номер нуля производной. Например, $\mu_{11} = 1.84$.

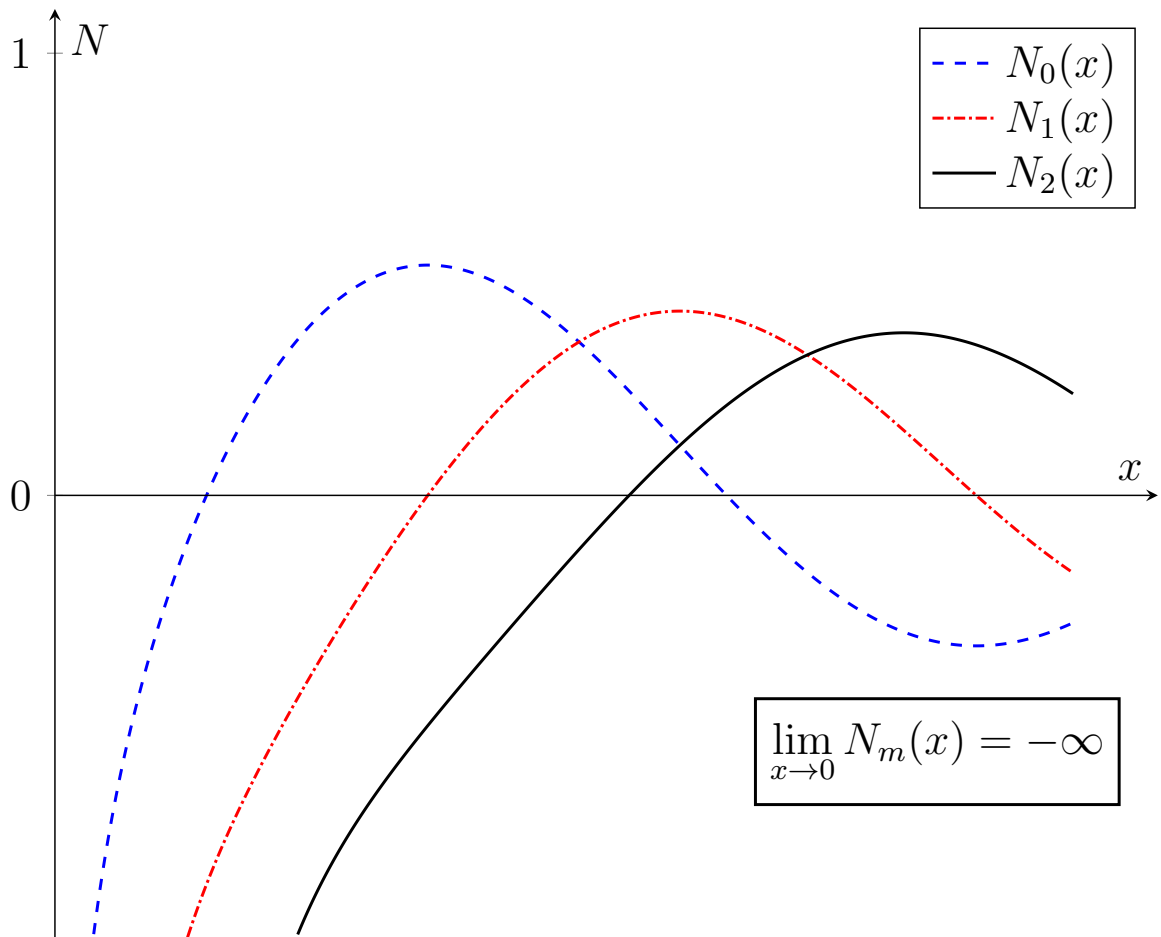


Рис. 25. Функции Бесселя второго рода

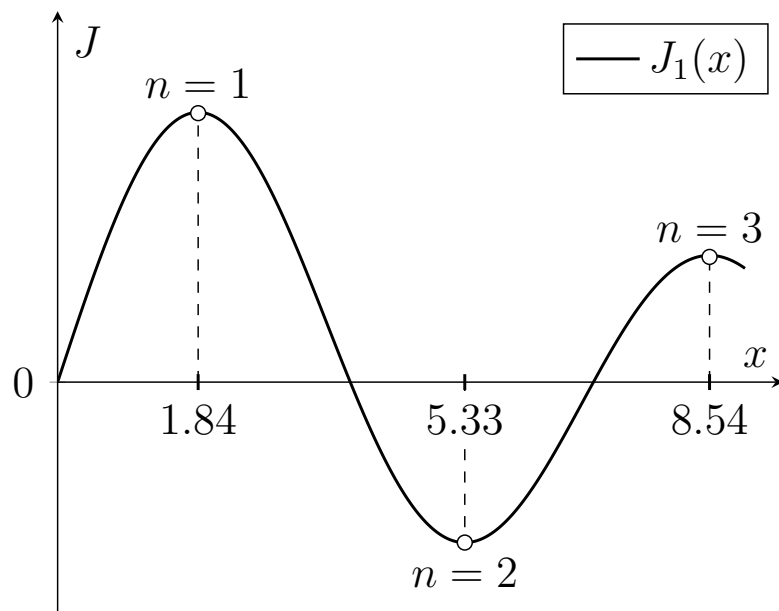


Рис. 26. Нули производной функции Бесселя

Тогда можем выразить через μ и волновое число:

$$\kappa_{mn}^{TE} = \frac{\mu_{mn}}{a}$$

В итоге получаем решение для ТЕ-волн:

$$\phi_m = C_{mn} J_m(\kappa_{mn} r) \begin{pmatrix} \cos m\vartheta \\ \sin m\vartheta \end{pmatrix}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad n = 1, 2, \dots$$

Некоторые значения:

$$\mu_{11} = 1.84, \quad \kappa_{11} = \frac{1.84}{a}$$

$$\mu_{21} = 3.05, \quad \kappa_{21} = \frac{3.05}{a}$$

$$\mu_{01} = 3.83, \quad \kappa_{01} = \frac{3.83}{a}$$

Граничные условия ТМ-волн. Теперь на границе зануляется поперечная функция:

$$\phi|_{r=a} = 0 \quad \Rightarrow \quad J_m(\kappa r) = 0$$

Также, как мы это делали для ТЕ-волн, пронумеруем нули функции Бесселя:

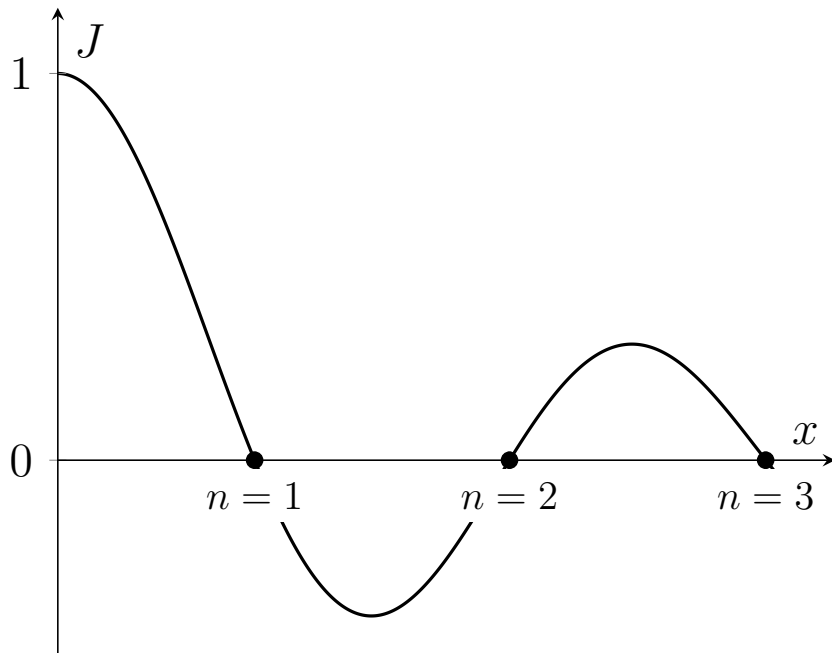


Рис. 27. Нули функции Бесселя

И обозначим нули

$$x = \nu_{mn},$$

И тогда

$$\kappa_{mn}^{TM} = \frac{\nu_{mn}}{a}$$

Некоторые значения:

$$\nu_{01} = 2.405, \quad \kappa_{01}^{TM} = \frac{2.405}{a}$$

$$\mu_{11} = 3.83, \quad \kappa_{11}^{TM} = \frac{3.83}{a}$$

Полное решение задачи. Если мы введем волновое число как

$$\kappa_{mn} = \begin{cases} \frac{\mu_{mn}}{a}, & \text{TE,} \\ \frac{\nu_{mn}}{a}, & \text{TM} \end{cases}$$

Тогда полное решение задачи запишется в виде

$$\phi_m = C_{mn} J_m(\kappa_{mn} r) \begin{pmatrix} \cos m\vartheta \\ \sin m\vartheta \end{pmatrix}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad n = 1, 2, \dots$$

Низшая мода. У низшей моды наименьшее волновое число. В случае круглого волновода низшей модой будет TE_{11} : $\kappa_{11} = \frac{1.84}{a}$.

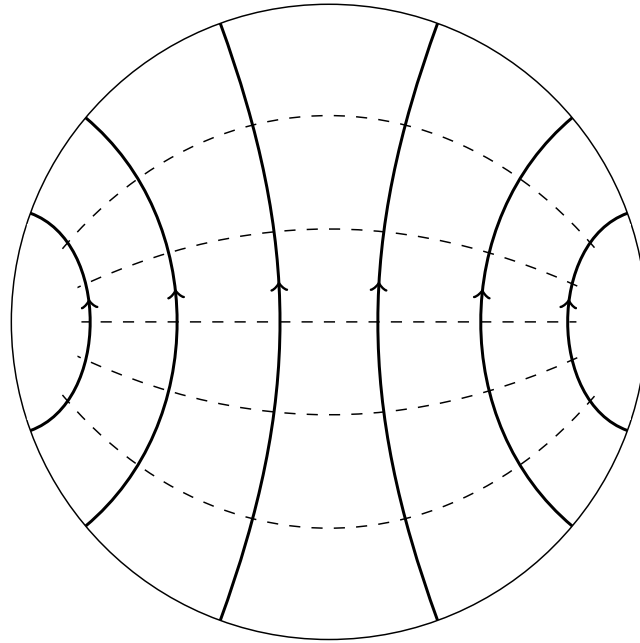


Рис. 28. Электрическое и магнитное поле в волне TE_{11}

Замечание. Можно сформулировать некоторое правило рисования силовых линий. Если построить линии уровня $\phi = \text{const}$, то это будут силовые линии чисто поперечного поля.

Вообще говоря, поле моды TE_{11} круглого волновода топологически подобно моде TE_{10} прямоугольного волновода. Если постепенно деформировать стенки прямоугольного волновода, скругляя их, то линии поля постепенно будут переходить в линии поля круглого волновода.

Кроме того, мода TE_{11} круглого волновода **двукратно вырождена**: имеет место так называемое **поляризационное вырождение**.

Действительно, если повернуть волновод на 90 градусов, то получаем другое решение. Их не бесконечно много, а всего два фундаментальных, а все остальные образуются как их суперпозиция.

6.2. Метод решения задачи о возбуждении идеального полого резонатора сторонними переменным токами. Потенциальные и вихревые поля. Ортогональность полей собственных мод

Будем решать задачу, пользуясь разложением поля по собственным модам резонатора $\left\{ \vec{E}_p(\vec{r}), \vec{H}_p(\vec{r}) \right\} \cdot e^{i\omega_p t}$, где $p = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{rot } \vec{H}_p = \frac{i\omega_p}{c} \varepsilon \vec{E}_p, \quad \text{rot } \vec{E}_p = -\frac{i\omega_p}{c} \mu \vec{H}_p$$

Тогда полное поле можно представить как суперпозицию полей собственных мод. Кроме того, учтём, что $\text{div} \left\{ \vec{E}_p, \vec{H}_p \right\} = 0$, тогда можем прибавить еще и потенциальные поля:

$$\vec{E} = \sum_{p=0}^{\infty} e_p \vec{E}_p + \vec{E}_{\text{п}}, \quad \vec{H} = \sum_{p=0}^{\infty} h_p \vec{H}_p + \vec{H}_{\text{п}} \quad (2)$$

Докажем свойство **ортогональности полей собственных мод**. Для этого воспользуемся векторным тождеством:

$$\text{div} \left[\vec{E}_p \times \vec{H}_q \right] = \vec{H}_q \text{rot } \vec{E}_p - \vec{E}_p \text{rot } \vec{H}_q$$

Теперь подставим сюда выражения роторов из уравнений Максвелла:

$$\text{div} \left[\vec{E}_p \times \vec{H}_q \right] = \vec{H}_q \left(-\frac{i\omega_p}{c} \mu \vec{H}_p \right) - \vec{E}_p \left(\frac{i\omega_p}{c} \varepsilon \vec{E}_p \right)$$

Проинтегрируем левую и правую части равенства по объёму резонатора и

воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S [\vec{E}_p, \vec{H}_q] \vec{n} dS = \int_V [\mu \omega_p \vec{H}_p \vec{H}_q + \varepsilon \omega_q \vec{E}_p \vec{E}_q] dV$$

Заметим, что в левой части стоит ноль, так как $[\vec{E}_p, \vec{H}_q] \equiv [\vec{E}_{\tau_p}, \vec{H}_q] = 0$. Тогда введя обозначения $a = \int \mu \vec{H}_q \vec{H}_p dV$, $b = \int \varepsilon \vec{E}_q \vec{E}_p dV$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \omega_p a + \omega_q b = 0 \\ \omega_q a + \omega_p b = 0 \end{cases}$$

Отсюда видно, что $a, b \neq 0$, когда определитель системы ноль – значит, если нет вырождения, то $\omega_p = \omega_q$ ($q = p$), а $a = -b$. Это и есть условие ортогональности: интеграл по объёму от произведения полей мод не равен нулю, только если они совпадают.

Введём понятие **нормы моды**:

$$N_p = \frac{1}{4\pi} \int_V \varepsilon (\vec{E}_p)^2 dV = -\frac{1}{4\pi} \int_V \mu (\vec{H}_p)^2 dV$$

Теперь займёмся подставкой полученных результатов в уравнения Максвелла. Запишем их в случае гармонических полей:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{i\omega\mu}{c} \vec{H} - \frac{4\pi}{c} \vec{j}^m \\ \text{rot } \vec{H} = \frac{i\omega\varepsilon}{c} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}^e \end{cases}$$

Отсюда получается

$$\begin{cases} \sum_{p=0}^{\infty} e_p \text{rot } \vec{E}_p + \cancel{\text{rot } \vec{E}_{\text{н}}} = -\frac{i\omega\mu}{c} \left(\sum h_p \vec{H}_p + \vec{H}_{\text{н}} \right) - \frac{4\pi}{c} \vec{j}^m \\ \sum_{p=0}^{\infty} h_p \text{rot } \vec{H}_p + \cancel{\text{rot } \vec{H}_{\text{н}}} = \frac{i\omega\varepsilon}{c} \left(\sum e_p \vec{E}_p + \vec{E}_{\text{н}} \right) + \frac{4\pi}{c} \vec{j}^e \end{cases}$$

Наконец, подставим выражения для $\text{rot } \vec{E}_p, \text{rot } \vec{H}_p$:

$$\begin{cases} \sum_{p=0}^{\infty} e_p \left(-\frac{i\omega_p\mu}{c} \vec{H}_p \right) = -\frac{i\omega\mu}{c} \left(\sum h_p \vec{H}_p + \vec{H}_{\text{н}} \right) - \frac{4\pi}{c} \vec{j}^m \\ \sum_{p=0}^{\infty} h_p \left(\frac{i\omega_p\varepsilon}{c} \vec{E}_p \right) = \frac{i\omega\varepsilon}{c} \left(\sum e_p \vec{E}_p + \vec{E}_{\text{н}} \right) + \frac{4\pi}{c} \vec{j}^e \end{cases}$$

Перепишем полученные выражения в более удобном виде:

$$\begin{cases} -i\varepsilon \sum_p (\omega e_p - \omega_p h_p) \vec{E}_p = 4\pi \vec{j}^e + i\omega\varepsilon \vec{E}_\Pi \\ -i\mu \sum_p (\omega_p e_p - \omega h_p) \vec{H}_p = -4\pi \vec{j}^m - i\omega\mu \vec{H}_\Pi \end{cases} \quad (3)$$

Возьмём дивергенцию от левой и правой частей равенств (3). Левая часть обратится в ноль, так как \vec{E}_p, \vec{H}_p – вихревые поля, и тогда

$$\operatorname{div} (\varepsilon \vec{E}_\Pi) = -\frac{4\pi}{i\omega} \operatorname{div} \vec{j}^e, \quad \operatorname{div} (\mu \vec{H}_\Pi) = -\frac{4\pi}{i\omega} \operatorname{div} \vec{j}^m$$

Зададим потенциальные поля через функции потенциала:

$$\vec{E}_\Pi = -\operatorname{grad} \varphi^e, \quad \vec{H}_\Pi = -\operatorname{grad} \varphi^m$$

Тогда в изотропном случае (когда ε, μ можно вытащить из-под дивергенции) получим, с учётом уравнения непрерывности ($\frac{\partial}{\partial t} \rho = i\omega \rho = -\operatorname{div} \vec{j}$):

$$\Delta \varphi^e = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho^e, \quad \Delta \varphi^m = -\frac{4\pi}{\mu} \rho^m \quad (4)$$

Граничные условия найдутся из полей:

$$\vec{E}_\tau = 0 \Rightarrow \varphi^e \Big|_S = 0, \quad H_n = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi^m}{\partial n} \Big|_s = 0$$

Теперь займёмся нахождением коэффициентов в разложении по собственным модам. Для этого домножим первое уравнение системы (3) на \vec{E}_q , второе на \vec{H}_q и проинтегрируем по области резонатора. В силу ортогональности сумма выродится в одно слагаемое с $q = p$. Заметим, что интегралы $\int \vec{E}_\Pi \vec{E}_q dV = 0$ и тоже самое для поля \vec{H} . Это нетрудно доказать самим. После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} e_p &= \frac{i}{\omega^2 - \omega_p^2} \frac{1}{N_p} \int_V \left(\omega \vec{j}^e \vec{E}_p - \omega_p \vec{j}^m \vec{H}_p \right) dV, \\ h_p &= \frac{i}{\omega^2 - \omega_p^2} \frac{1}{N_p} \int_V \left(\omega_p \vec{j}^e \vec{E}_p - \omega \vec{j}^m \vec{H}_p \right) dV \end{aligned} \quad (5)$$

Итак, мы решили задачу о возбуждении токами в резонаторе. При этом поле получилось суммой двух полей: вихревого и потенциального. Вихревое мы находим как ряд, коэффициенты которого находятся интегрированием

(5). Потенциальное же находится через решение уравнения Пуассона на потенциалы (4). А результирующее возбуждённое поле запишется в виде (2).

7. Билет 7

7.1.

8. Билет 8

8.1.

9. Билет 9

9.1. Затухание волн в линии передач, обусловленное потерями энергии в металлической стенке.

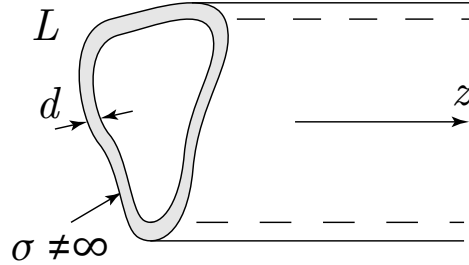


Рис. 29. ЛП с неидеальными стенками

Имеется полая ЛП, заполненная либо ε, μ , либо ничем. Стенки сделаны из хорошего, но не идеального проводника:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{wall} &= \varepsilon' + i\varepsilon'' \\ w \ll 4\pi\sigma, \varepsilon'' &= -\frac{4\pi\sigma}{w} \Rightarrow |\varepsilon''_{wall}| > |\varepsilon'_{wall}| \\ \varepsilon &\approx -i\frac{4\pi\sigma}{w}, |\varepsilon''| \gg 1\end{aligned}$$

На поверхности хорошего проводника выполняется граничное условие Леонтовича.

$$\vec{E}_\tau = \eta_s \left[\vec{H}_\tau \times \vec{n} \right],$$

η_s - поверхностный импеданс. В проводнике волна быстро затухает:

$$E_x \sim e^{-\frac{1+i}{\delta}x} e^{i\omega t}, \quad \delta = \frac{c}{\sqrt{8\pi\sigma\mu\omega}},$$

где δ - толщина скин-слоя, $k = \frac{1+i}{\delta}$ - волновое число в стенке. Поля слева от границы удовлетворяют граничному условию:

$$\vec{E}_\tau = \eta_s \left[\vec{H}_\tau \times \vec{n} \right],$$

\vec{n} - нормаль вглубь проводника. При этом:

$$\eta_s = \sqrt{\frac{\mu_{wall}}{\varepsilon_{wall}}} = \sqrt{i\frac{w\mu_{wall}}{4\pi\sigma}}$$

Это точное решение в случае, когда рассматривается бесконечная металлическая полуплоскость. У нас толщина проводника конечная, и для исполь-

зования г.у. Леонтовича нужны дополнительные ограничения на параметры стенки d .

Во-первых, толщина стенки должна быть много больше толщины скин-слоя, чтобы волны успели затухнуть. Во-вторых, так как мы изначально не накладывали ограничений на форму стенки, она может быть произвольной формы, а значит и структура поля внутри проводника будет различной для разных участков поверхности. Чтобы рассматривать малые участки как линейные, необходимо, чтобы радиус кривизны поверхности был много больше толщины скин-слоя. В итоге получаем 3 условия:

$$\sigma \gg w, \delta \ll R_{кр}, \delta \ll d$$

В таком случае можно пользоваться г.у. Леонтовича.

Рассмотрим участок ЛП от z до $z + \Delta z$. При распространении, часть энергии волны диссипатирует в стенках:

$$\begin{aligned}\Pi(z) &= \Pi(z + \Delta z) + \Delta P_{wall} \\ \Delta P_{wall} &= P_{wall} \Delta z,\end{aligned}$$

где P_{wall} - количество энергии, потерянное в стенках на единицу длины (погонная мощность потерь), а Π - мощность волны.

$$P_{wall} = -\frac{\Pi(z + \Delta z) - \Pi(z)}{\Delta z}, \Delta z \rightarrow 0,$$

$$P_{wall} = -\frac{d\Pi}{dz} - \text{дифференциальный ЗСЭ}$$

Рассмотрим поля в ЛП:

$$\begin{aligned}\vec{E}, \vec{H} &\sim e^{-ihz}, \quad h = h' + ih'' \\ |\vec{E}|, |\vec{H}| &\sim e^{h''z}\end{aligned}$$

Здесь везде речь идет о среднем потоке энергии!

$$\begin{aligned}\Pi &\sim |\vec{E}|, |\vec{H}| \sim e^{2h''z} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d\Pi}{dz} &= 2h''\Pi \Rightarrow h'' = -\frac{P_{wall}}{2\Pi}\end{aligned}$$

При переходе здесь пользуясь граничным условием Леонтовича получим:

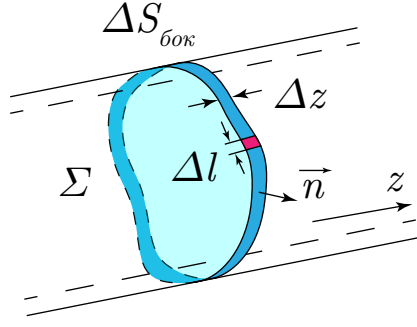


Рис. 30. иллюстрация к интегралу по площади

$$\begin{aligned}\Delta P_{wall} &= \iint_{S_{бок}} \bar{S}_n dS = \iint_{S_{бок}} \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left\{ \left[\vec{E} \times \vec{H}^* \right]_n \right\} dS = \\ &= \frac{c}{8\pi} \oint_L \operatorname{Re} \{ \eta_s \} |\vec{H}_\tau|^2 dl \Delta z,\end{aligned}$$

и тогда выражение для h'' принимает вид:

$$h'' = -\frac{P_{wall}}{2\Pi} = -\frac{\operatorname{Re} \{ \eta_s \} \oint_L |\vec{H}_\tau|^2 dl}{2 \operatorname{Re} \{ \eta_{\perp_b} \} \iint_{\Sigma} |\vec{H}_\perp|^2 dS}$$

Можно ввести $L_{затух}$ - расстояние, на котором амплитуда колебания спадает в e раз:

$$|h''| = \frac{1}{L_{затух}}$$

9.2. Лемма Лоренца и теорема взаимности для двух систем монохроматических источников.

Лемма Лоренца

Эта лемма относится к гармоническим полям и токам

$$\vec{E}, \vec{H}, \vec{j} \sim e^{i\omega t}$$

Рассмотрим две системы источников (токи, в общем случае, и магнитные \vec{j}^m) в одинаковой среде ϵ, μ . Токи порождают соответствующие поля:

$$\begin{aligned}\vec{j}_1^{e,m} \sim e^{i\omega t} &\rightarrow \vec{E}_1, \vec{H}_1, \vec{j} \sim e^{i\omega t} \\ \vec{j}_2^{e,m} \sim e^{i\omega t} &\rightarrow \vec{E}_2, \vec{H}_2, \vec{j} \sim e^{i\omega t}\end{aligned}$$

Частота ω этих источников одинаковая - эти источники **монохроматиче-**

ские. Мы можем записать уравнения Максвелла в общем виде, с учетом фиктивных токов:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H}_1 &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_1^e + \frac{i\omega}{c} \varepsilon \vec{E}_1 \mid \cdot \vec{E}_2 \\ \operatorname{rot} \vec{E}_1 &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_1^m - \frac{i\omega}{c} \varepsilon \vec{H}_1 \mid \cdot \vec{H}_2 \\ \operatorname{rot} \vec{H}_2 &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_2^e + \frac{i\omega}{c} \varepsilon \vec{E}_2 \mid \cdot \vec{E}_1 \\ \operatorname{rot} \vec{E}_2 &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_2^m - \frac{i\omega}{c} \varepsilon \vec{H}_2 \mid \cdot \vec{H}_1\end{aligned}$$

Используя соотношение:

$$\operatorname{div} [\vec{A} \times \vec{B}] = \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B}$$

преобразуем 4 уравнения выше, складывая все уравнения. В итоге получим:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} [\vec{E}_1 \times \vec{H}_2] - \operatorname{div} [\vec{E}_2 \times \vec{H}_1] &= \\ &= \frac{4\pi}{c} \left(\vec{j}_1^e \vec{E}_2 - \vec{j}_1^m \vec{H}_2 - \vec{j}_2^e \vec{E}_1 + \vec{j}_2^m \vec{H}_1 \right)\end{aligned}$$

Далее, интегрируем по произвольному объему, охватывающему эти источники, и применяя формулу Гаусса-Остроградского получим:

$$\begin{aligned}\oint_S [\vec{E}_1 \times \vec{H}_2] - [\vec{E}_2 \times \vec{H}_1] \vec{n} dS &= \\ &= \frac{4\pi}{c} \int_V \left(\vec{j}_1^e \vec{E}_2 - \vec{j}_1^m \vec{H}_2 - \vec{j}_2^e \vec{E}_1 + \vec{j}_2^m \vec{H}_1 \right) dV\end{aligned}$$

Это соотношение и есть формулировка **леммы Лоренца**. Такие соотношения позволяют связывать решения двух разных задач, зная решение простой задачи, можно решить сложную.

Теорема взаимности

Распространим объем $V \rightarrow \infty$ в лемме Лоренца. В таком случае поверхностью интегрирования S может быть сфера радиуса $R \rightarrow \infty$.

Источники обеих систем ограничены в пространстве. При большом удалении, поля от источников представляют собой сферические волны. У сферической волны, на бесконечности можно рассматривать ее малый участок как плоский, тогда волны будут чисто поперечными. Волновое сопротивление среды:

$$\frac{E_{\perp}}{H_{\perp}} = \eta_{\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

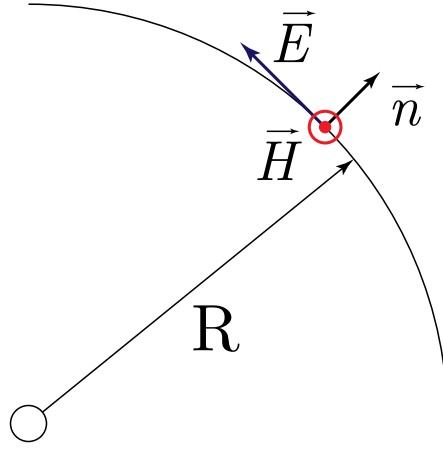


Рис. 31. К теореме взаимности

Выражение выше - приближение характер, однако при устремлении $R \rightarrow \infty$, его точность увеличивается. Тогда имеем:

$$\vec{E}_{1,2} = \eta_{\text{в}} \left[\vec{H}_{1,2} \times \vec{n} \right],$$

где \vec{n} - направление распространения волны (внешняя нормаль к S). $\eta_{\text{в}}$ - одинакова для систем источников 1 и 2. Тогда справедливо:

$$\left[\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 \right] = \eta_{\text{в}} \left[\left[\vec{H}_1 \times \vec{n} \right] \times \vec{H}_2 \right] = \eta_{\text{в}} \left(\vec{n}(\vec{H}_1, \vec{H}_2) - \underbrace{\vec{H}_2(\vec{H}_1, \vec{n})}_{=0} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \left[\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 \right] &= \eta_{\text{в}} \vec{n}(\vec{H}_1, \vec{H}_2) \\ \left[\vec{E}_2 \times \vec{H}_1 \right] &= \eta_{\text{в}} \vec{n}(\vec{H}_2, \vec{H}_1) \end{aligned} \right\} \left[\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 \right] - \left[\vec{E}_2 \times \vec{H}_1 \right] \equiv 0$$

Т.е. левая часть в лемме Лоренца при большом расстоянии равна нулю. Это верно с точностью до членов порядка $\frac{1}{R^2}$. Оставшийся в правой части интеграл разделим на два, таким образом, получаем формулировку **теоремы взаимности**:

$$\begin{aligned} \int_V \left(\vec{j}_1^e \vec{E}_2 - \vec{j}_1^m \vec{H}_2 - \vec{j}_2^e \vec{E}_1 + \vec{j}_2^m \vec{H}_1 \right) dV &= 0 \\ \int_V \left((\vec{j}_1^e, \vec{E}_2) - (\vec{j}_1^m, \vec{H}_2) \right) dV &= \int_V \left((\vec{j}_2^e, \vec{E}_1) - (\vec{j}_2^m, \vec{H}_1) \right) dV \end{aligned}$$

Эта теорема также используется для сведения сложных задач к простым.

Условия выполнения теоремы:

- Среда должны быть линейными, ϵ, μ - не должны зависеть от полей.

- Рассматриваем изотропную среду

10. Билет 10

10.1.

11. Билет 11

11.1.

12. Билет 12

12.1.

13. Билет 13

13.1.

13.2.