

## Disclaimer

# Содержание

<b>1. Билет 1</b>	<b>2</b>
1.1. Гармонические волны в линиях передачи. Выражение для векторного потенциала. Дифференциальное уравнение для поперечной волновой функции $\psi(r_{\perp})$ . Понятия продольного и поперечного волнового числа. Выражения для полей ТЕ, ТМ, ТЕМ. Импедансная связь между поперечными компонентами электрического и магнитного полей и понятие поперечного волнового сопротивления	2
<b>2. Билет 2</b>	<b>5</b>
2.1. Граничные условия для поперечных волновых функций волн ТЕ, ТМ, ТЕМ типов в идеальной линии передачи. Математическая формулировка задачи описания волн ТЕ, ТМ, ТЕМ типов.	5
<b>3. Билет 3</b>	<b>7</b>
<b>4. Билет 4</b>	<b>7</b>
<b>5. Билет 5</b>	<b>7</b>
<b>6. Билет 6</b>	<b>7</b>
<b>7. Билет 7</b>	<b>7</b>
<b>8. Билет 8</b>	<b>7</b>
<b>9. Билет 9</b>	<b>7</b>
<b>10. Билет 10</b>	<b>7</b>
<b>11. Билет 11</b>	<b>7</b>
<b>12. Билет 12</b>	<b>7</b>
<b>13. Билет 13</b>	<b>7</b>

# 1. Билет 1

## 1.1. Гармонические волны в линиях передачи. Выражение для векторного потенциала. Дифференциальное уравнение для поперечной волновой функции $\psi(r_{\perp})$ . Понятия продольного и поперечного волнового числа. Выражения для полей ТЕ, ТМ, ТЕМ. Импедансная связь между поперечными компонентами электрического и магнитного полей и понятие поперечного волнового сопротивления

Линия передач - это любая цилиндрическая система. В них различают продольное  $z$  и поперечное  $r_{\perp} = r_{\perp}(r, \theta)$  направление. При описании таких систем проще использовать векторный потенциал  $\vec{A}$ , который должен удовлетворять уравнению Гельмгольца (для амплитуд):

$$\Delta \vec{A}^e + k^2 \vec{A}^e = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}^e = 0$$
$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}^e$$

0 потому что случай, где нет сторонних источников. Запишем поля в ЛП, когда волна бежит вдоль оси  $Oz$ :

$$\vec{E}(\vec{r}_{\perp}, z, \theta) = \vec{E}_0(\vec{r}_{\perp}) e^{i(\omega t - h z)},$$

где  $h$  - **продольное волновое число** (постоянная распространения). Реальное поля в таком случае записывается как:

$$E_{R_x} = \text{Re}\{E_x\} = |E_x(\vec{r}_{\perp})| \cos(\omega t - h z + \varphi(\vec{r}_{\perp}))$$

Запишем векторный потенциал в следующем виде:

$$\vec{A}^e = \psi^e(\vec{r}_{\perp}) e^{-i h z} \vec{z}_0,$$

где  $\psi^e(\vec{r}_{\perp})$  - **поперечная волновая функция**. Запишем теперь поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  через  $\psi^e(\vec{r}_{\perp})$ . Вспомним выражение полей через векторный потенциал:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A}^e$$
$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}^e}{\partial t} = \frac{1}{i k_0 \varepsilon \mu} (\nabla \text{div} + k^2) \vec{A}^e,$$

где  $k = \frac{w}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$ ,  $k_0 = \frac{w}{c}$ . При подстановке выражения для  $\vec{A}^e$ , для компонент векторов в случае **ТМ** - волны получим (надо расписать такие вещи как  $\text{div } \vec{A}^e$ ,  $\nabla \text{div } \vec{A}^e$ ,  $\text{rot } \vec{A}^e$ ):

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\kappa^2}{ik_0\varepsilon\mu}\psi^e(\vec{r}_\perp) \cdot e^{i(wt-hz)} \\ \vec{E}_\perp &= -\frac{h}{k_0\varepsilon\mu}\nabla_\perp\psi^e(\vec{r}_\perp) \cdot e^{i(wt-hz)} \\ \vec{H}_\perp &= \frac{1}{\mu}[\nabla_\perp\psi^e(\vec{r}_\perp) \times \vec{z}_0] \cdot e^{i(wt-hz)} \\ H_z &= 0 \end{aligned}$$

**ТМ-волна** - поперечная магнитная волна (Магнитное поле имеет только поперечную компоненту. Поле  $\vec{E}$  имеет и поперечное и продольное направление).

Потенциал  $\vec{A}^e$ , при любой зависимости от времени, должен удовлетворять волновому уравнению:

$$\Delta\vec{A}^e - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}^e}{\partial t^2} = 0$$

В нашем случае, когда векторный потенциал имеет вид  $\vec{A}^e = \psi^e(\vec{r}_\perp)e^{-ihz}\vec{z}_0$ , для гармонических полей справедливы следующие переходы:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow iw, \quad \Delta\vec{A}^e + k^2\vec{A}^e = 0, \quad k^2 = \frac{w^2}{c^2}\varepsilon\mu$$

Рассмотри для  $z$ -компоненты:

$$\Delta A_z^e + k^2 A_z^e = 0, \quad \Delta = \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Rightarrow -h^2, \quad \text{т.к. } A_z^e = \psi^e(\vec{r}_\perp)e^{-ihz}$$

$$\Delta_\perp\psi^e + \underbrace{(k^2 - h^2)}_{\kappa^2}\psi^e = 0$$

$$\Delta_\perp\psi^e + \kappa^2\psi^e = 0$$

$\kappa^2$  - **поперечное волновое число**. Если поле удовлетворяет уравнению выше, то такое поле удовлетворяет уравнениям Максвелла.

Аналогично сделаем для **ТЕ** - волны.

**ТЕ-волна** - поперечная электрическая волна (Электрическое поле имеет только поперечную компоненту. Магнитное поле имеет и поперечное и

продольное направление). По принципу двойственности производим замены:

$$\vec{E} \rightarrow \vec{H}, \quad \vec{H} \rightarrow -\vec{E}, \quad \varepsilon \leftrightarrow \mu$$

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{\varkappa^2}{ik_0\varepsilon\mu} \psi^m(\vec{r}_\perp) \cdot e^{i(wt-hz)} \\ \vec{H}_\perp &= -\frac{h}{k_0\varepsilon\mu} \nabla_\perp \psi^m(\vec{r}_\perp) \cdot e^{i(wt-hz)} \\ \vec{E}_\perp &= -\frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \psi^m(\vec{r}_\perp) \times \vec{z}_0] \cdot e^{i(wt-hz)} \\ E_z &= 0 \end{aligned}$$

Вообще говоря,  $\psi^e$  и  $\psi^m$  могут быть различными, поэтому выше вместо  $\psi^e$  записано  $\psi^m$ . Аналогично для  $\psi^m$  требуется выполнение:

$$\Delta_\perp \psi^m + \varkappa^2 \psi^m = 0$$

ТЕ, ТМ волны - это решения уравнений Максвелла. однак может быть еще один тип решений - **ТЕМ** - волны. Рассмотрим случай  $\varkappa = 0$ ,  $h = k$ :

$$\begin{aligned} H_z &= E_z = 0 \\ \vec{E}_\perp &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \nabla_\perp \psi \cdot e^{i(wt-kz)} \\ \vec{H}_\perp &= \frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \psi \times \vec{z}_0] \cdot e^{i(wt-kz)} \\ \Delta_\perp \psi &= 0 \end{aligned}$$

**ТЕМ-волна** - чисто поперечная волна (Электрическое поле имеет только поперечную компоненту, как и магнитное).

Что имеем в итоге:

- Поля выражаются через поперечную волновую функцию
- Продольные компоненты полей пропорциональны  $\psi$
- Поперечные компоненты полей пропорциональны  $\nabla_\perp \psi$

Т.е. если заданы  $\psi^e, \psi^m$ , то можно полностью найти поля. Из формул также видно следующее соотношение:

$$\vec{E}_\perp = \eta_{\perp B} [\vec{H}_\perp \times \vec{z}_0],$$

где  $\eta_{\perp B}$  - **поперечное волновое сопротивление** - отношение между поперечными компонентами полей в бегущей волне  $\eta_{\perp B} = \frac{E_\perp}{H_\perp}$ . Для различных

типов волн записывается как:

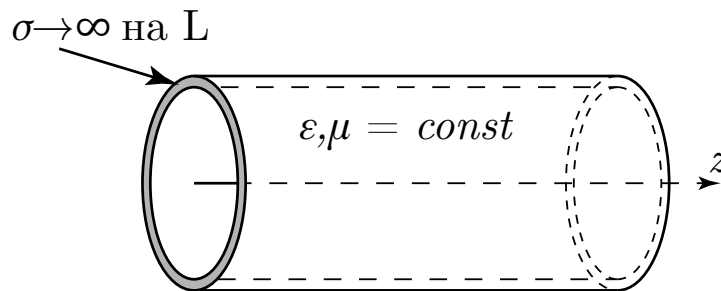
$$\text{TE}(+), \text{TM}(-) \text{ - волны: } \eta_{\perp\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left( \frac{k}{h} \right)^{\pm 1}$$

$$\text{ТЕМ - волны: } \eta_{\perp\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Заметим, что в бегущей волне поля зависят от координат, а их отношение -  $\eta_{\perp\text{в}}$  - нет. В стоячей волне это не так.

## 2. Билет 2

**2.1. Граничные условия для поперечных волновых функций волн ТЕ, ТМ, ТЕМ типов в идеальной линии передачи. Математическая формулировка задачи описания волн ТЕ, ТМ, ТЕМ типов.**



Рассмотрим случай идеального проводника,  $\sigma \rightarrow \infty$  (Вообще говоря, идеальных проводников не бывает, однако условие идеальной проводимости можно записать в виде:  $\sigma \gg w$  ( $\delta \ll L$ )). Вспомним граничные условия для полей на поверхности идеального проводника:

$$E_{\tau}|_S = 0, \quad H_n|_S = 0,$$

а также условие на поперечную волновую функцию:

$$\Delta_{\perp} \psi^{e,m} + \kappa^2 \psi^{e,m} = 0$$

Найдем граничные условия для  $\psi^{e,m}$  для идеальной ЛП.

**ТМ-волна:**

$$\text{т.к. } E_z \sim \psi^e, \quad \vec{E}_{\perp\tau} \sim \frac{\partial \psi^e}{\partial \tau}$$

$$\text{и } E_z = 0, \quad E_{\perp\tau} = 0$$

$$\text{то } \psi^e(\vec{r}_{\perp})|_S = 0$$

- это граничное условие Дирихле

**ТЕ-волна:**

$$\text{т.к. } \vec{E}_{\perp\tau} \sim [\nabla_{\perp} \psi^m(\vec{r}_{\perp}) \times \vec{z}_0]_{\tau}$$

$$\text{и } E_{\perp\tau} = 0$$

$$\text{то } \frac{\partial \psi^m}{\partial n}|_S = 0$$

**ТЕМ-волна:**

$$\text{т.к. } \vec{E}_{\perp\tau} \sim \nabla_{\perp} \psi^m(\vec{r}_{\perp})$$

$$\text{то } \frac{\partial \psi}{\partial \tau}|_S = 0 \Rightarrow \psi|_S = \text{const} = C_i$$

Отметим, что на разных поверхностях проводников постоянная  $C_i$  может быть разной.

**Математическая формулировка задач для описания волн.**

**ТМ.** Необходимо решить:

$$\Delta_{\perp} \psi^e + \kappa^2 \psi^e = 0$$

$$\psi^e|_L = 0, L - \text{граничный контур}$$

**ТЕ.** Необходимо решить:

$$\Delta_{\perp} \psi^m + \kappa^2 \psi^m = 0$$

$$\frac{\partial \psi^m}{\partial n}|_L = 0$$

**ТЕМ.** Необходимо решить:

$$\Delta_{\perp} \psi^m = 0$$

$$\psi|_{L_i} = C_i$$

Задачи ТЕ, ТМ волн - аналогичны задачам с мембраной, где граница мембраны закреплена неподвижно, а ТЕМ задачу можно назвать «электростатической». Это задачи на нахождение собственных функций

$$\psi_1^{e,m}(\vec{r}_{\perp}), \psi_2^{e,m}(\vec{r}_{\perp}), \dots, \psi_i^{e,m}(\vec{r}_{\perp})$$

и собственных чисел

$$\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_i$$

Если ЛП идеальна, то спектр собственных значений и функций бесконечен.

3. Билет 3

4. Билет 4

5. Билет 5

6. Билет 6

7. Билет 7

8. Билет 8

9. Билет 9

10. Билет 10

11. Билет 11

12. Билет 12

13. Билет 13