

Disclaimer

Содержание

1. Билет 1	3
1.1. Гармонические волны в линиях передачи. Выражение для векторного потенциала. Дифференциальное уравнение для поперечной волновой функции $\psi(r_{\perp})$. Понятия продольного и поперечного волнового числа. Выражения для полей ТЕ, ТМ, ТЕМ. Импедансная связь между поперечными компонентами электрического и магнитного полей и понятие поперечного волнового сопротивления	3
2. Билет 2	6
2.1. Граничные условия для поперечных волновых функций волн ТЕ, ТМ, ТЕМ типов в идеальной линии передачи. Математическая формулировка задачи описания волн ТЕ, ТМ, ТЕМ типов.	6
3. Билет 3	8
3.1. МИНИМУМ Дисперсионное уравнение для волн в идеальной ЛП. Критические частоты и длины волн. Зависимости длины волны, фазовой и групповой скорости от частоты. Распространяющиеся и нераспространяющиеся волны.	8
4. Билет 4	13
4.1. ПУСТО Медленные волны, направляемые плоским диэлектрическим слоем...	13
4.2. МИНИМУМ Главные (ТЕМ) волны в линиях передач. Условие существования ТЕМ волны. ТЕМ волна в коаксиальной линии (Картинка силовых линий, зависимость полей от координат).	13
5. Билет 5	17
6. Билет 6	17
7. Билет 7	17
8. Билет 8	17
9. Билет 9	17
9.1. Затухание волн в линии передач, обусловленное потерями энергии в металлической стенке.	17
9.2. Лемма Лоренца и теорема взаимности для двух систем монохроматических источников.	19

10.Билет 10	22
11.Билет 11	22
12.Билет 12	22
13.Билет 13	22

1. Билет 1

1.1. Гармонические волны в линиях передачи. Выражение для векторного потенциала. Дифференциальное уравнение для поперечной волновой функции $\psi(r_{\perp})$. Понятия продольного и поперечного волнового числа. Выражения для полей ТЕ, ТМ, ТЕМ. Импедансная связь между поперечными компонентами электрического и магнитного полей и понятие поперечного волнового сопротивления

Линия передач - это любая цилиндрическая система. В них различают продольное z и поперечное $r_{\perp} = r_{\perp}(r, \theta)$ направление. При описании таких систем проще использовать векторный потенциал \vec{A} , который должен удовлетворять уравнению Гельмгольца (для амплитуд):

$$\Delta \vec{A}^e + k^2 \vec{A}^e = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}^e = 0$$
$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}^e$$

0 потому что случай, где нет сторонних источников. Запишем поля в ЛП, когда волна бежит вдоль оси Oz :

$$\vec{E}(\vec{r}_{\perp}, z, \theta) = \vec{E}_0(\vec{r}_{\perp}) e^{i(\omega t - h z)},$$

где h - **продольное волновое число** (постоянная распространения). Реальное поля в таком случае записывается как:

$$E_{R_x} = \text{Re}\{E_x\} = |E_x(\vec{r}_{\perp})| \cos(\omega t - h z + \varphi(\vec{r}_{\perp}))$$

Запишем векторный потенциал в следующем виде:

$$\vec{A}^e = \psi^e(\vec{r}_{\perp}) e^{-i h z} \vec{z}_0,$$

где $\psi^e(\vec{r}_{\perp})$ - **поперечная волновая функция**. Запишем теперь поля \vec{E} и \vec{H} через $\psi^e(\vec{r}_{\perp})$. Вспомним выражение полей через векторный потенциал:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A}^e$$
$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}^e}{\partial t} = \frac{1}{i k_0 \varepsilon \mu} (\nabla \text{div} + k^2) \vec{A}^e,$$

где $k = \frac{w}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$, $k_0 = \frac{w}{c}$. При подстановке выражения для \vec{A}^e , для компонент векторов в случае **ТМ** - волны получим (надо расписать такие вещи как $\text{div } \vec{A}^e$, $\nabla \text{div } \vec{A}^e$, $\text{rot } \vec{A}^e$):

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\kappa^2}{ik_0\varepsilon\mu} \psi^e(\vec{r}_\perp) \cdot e^{i(wt-hz)} \\ \vec{E}_\perp &= -\frac{h}{k_0\varepsilon\mu} \nabla_\perp \psi^e(\vec{r}_\perp) \cdot e^{i(wt-hz)} \\ \vec{H}_\perp &= \frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \psi^e(\vec{r}_\perp) \times \vec{z}_0] \cdot e^{i(wt-hz)} \\ H_z &= 0 \end{aligned}$$

ТМ-волна - поперечная магнитная волна (Магнитное поле имеет только поперечную компоненту. Поле \vec{E} имеет и поперечное и продольное направление).

Потенциал \vec{A}^e , при любой зависимости от времени, должен удовлетворять волновому уравнению:

$$\Delta \vec{A}^e - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}^e}{\partial t^2} = 0$$

В нашем случае, когда векторный потенциал имеет вид $\vec{A}^e = \psi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz} \vec{z}_0$, для гармонических полей справедливы следующие переходы:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow iw, \quad \Delta \vec{A}^e + k^2 \vec{A}^e = 0, \quad k^2 = \frac{w^2}{c^2} \varepsilon\mu$$

Рассмотри для z -компоненты:

$$\Delta A_z^e + k^2 A_z^e = 0, \quad \Delta = \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Rightarrow -h^2, \quad \text{т.к. } A_z^e = \psi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz}$$

$$\Delta_\perp \psi^e + \underbrace{(k^2 - h^2)}_{\kappa^2} \psi^e = 0$$

$$\Delta_\perp \psi^e + \kappa^2 \psi^e = 0$$

κ^2 - **поперечное волновое число**. Если поле удовлетворяет уравнению выше, то такое поле удовлетворяет уравнениям Максвелла.

Аналогично сделаем для **ТЕ** - волны.

ТЕ-волна - поперечная электрическая волна (Электрическое поле имеет только поперечную компоненту. Магнитное поле имеет и поперечное и

продольное направление). По принципу двойственности производим замены:

$$\vec{E} \rightarrow \vec{H}, \quad \vec{H} \rightarrow -\vec{E}, \quad \varepsilon \leftrightarrow \mu$$

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{\varkappa^2}{ik_0\varepsilon\mu} \psi^m(\vec{r}_\perp) \cdot e^{i(wt-hz)} \\ \vec{H}_\perp &= -\frac{h}{k_0\varepsilon\mu} \nabla_\perp \psi^m(\vec{r}_\perp) \cdot e^{i(wt-hz)} \\ \vec{E}_\perp &= -\frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \psi^m(\vec{r}_\perp) \times \vec{z}_0] \cdot e^{i(wt-hz)} \\ E_z &= 0 \end{aligned}$$

Вообще говоря, ψ^e и ψ^m могут быть различными, поэтому выше вместо ψ^e записано ψ^m . Аналогично для ψ^m требуется выполнение:

$$\Delta_\perp \psi^m + \varkappa^2 \psi^m = 0$$

ТЕ, ТМ волны - это решения уравнений Максвелла. однак может быть еще один тип решений - **ТЕМ** - волны. Рассмотрим случай $\varkappa = 0$, $h = k$:

$$\begin{aligned} H_z &= E_z = 0 \\ \vec{E}_\perp &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \nabla_\perp \psi \cdot e^{i(wt-kz)} \\ \vec{H}_\perp &= \frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \psi \times \vec{z}_0] \cdot e^{i(wt-kz)} \\ \Delta_\perp \psi &= 0 \end{aligned}$$

ТЕМ-волна - чисто поперечная волна (Электрическое поле имеет только поперечную компоненту, как и магнитное).

Что имеем в итоге:

- Поля выражаются через поперечную волновую функцию
- Продольные компоненты полей пропорциональны ψ
- Поперечные компоненты полей пропорциональны $\nabla_\perp \psi$

Т.е. если заданы ψ^e, ψ^m , то можно полностью найти поля. Из формул также видно следующее соотношение:

$$\vec{E}_\perp = \eta_{\perp B} [\vec{H}_\perp \times \vec{z}_0],$$

где $\eta_{\perp B}$ - **поперечное волновое сопротивление** - отношение между поперечными компонентами полей в бегущей волне $\eta_{\perp B} = \frac{E_\perp}{H_\perp}$. Для различных

типов волн записывается как:

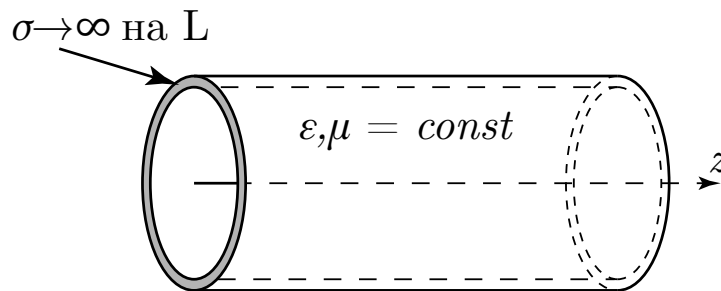
$$\text{TE}(+), \text{TM}(-) \text{ - волны: } \eta_{\perp\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(\frac{k}{h} \right)^{\pm 1}$$

$$\text{ТЕМ - волны: } \eta_{\perp\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Заметим, что в бегущей волне поля зависят от координат, а их отношение - $\eta_{\perp\text{в}}$ - нет. В стоячей волне это не так.

2. Билет 2

2.1. Граничные условия для поперечных волновых функций волн ТЕ, ТМ, ТЕМ типов в идеальной линии передачи. Математическая формулировка задачи описания волн ТЕ, ТМ, ТЕМ типов.



Рассмотрим случай идеального проводника, $\sigma \rightarrow \infty$ (Вообще говоря, идеальных проводников не бывает, однако условие идеальной проводимости можно записать в виде: $\sigma \gg w$ ($\delta \ll L$)). Вспомним граничные условия для полей на поверхности идеального проводника:

$$E_{\tau}|_S = 0, \quad H_n|_S = 0,$$

а также условие на поперечную волновую функцию:

$$\Delta_{\perp} \psi^{e,m} + \kappa^2 \psi^{e,m} = 0$$

Найдем граничные условия для $\psi^{e,m}$ для идеальной ЛП.

ТМ-волна:

$$\text{т.к. } E_z \sim \psi^e, \quad \vec{E}_{\perp\tau} \sim \frac{\partial \psi^e}{\partial \tau}$$

$$\text{и } E_z = 0, \quad E_{\perp\tau} = 0$$

$$\text{то } \psi^e(\vec{r}_{\perp})|_S = 0$$

- это граничное условие Дирихле

ТЕ-волна:

$$\text{т.к. } \vec{E}_{\perp\tau} \sim [\nabla_{\perp} \psi^m(\vec{r}_{\perp}) \times \vec{z}_0]_{\tau}$$

$$\text{и } E_{\perp\tau} = 0$$

$$\text{то } \frac{\partial \psi^m}{\partial n} \Big|_S = 0$$

ТЕМ-волна:

$$\text{т.к. } \vec{E}_{\perp\tau} \sim \nabla_{\perp} \psi^m(\vec{r}_{\perp})$$

$$\text{то } \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \Big|_S = 0 \Rightarrow \psi|_S = \text{const} = C_i$$

Отметим, что на разных поверхностях проводников постоянная C_i может быть разной.

Математическая формулировка задач для описания волн.

ТМ. Необходимо решить:

$$\Delta_{\perp} \psi^e + \varkappa^2 \psi^e = 0$$

$$\psi^e|_L = 0, L - \text{граничный контур}$$

ТЕ. Необходимо решить:

$$\Delta_{\perp} \psi^m + \varkappa^2 \psi^m = 0$$

$$\frac{\partial \psi^m}{\partial n} \Big|_L = 0$$

ТЕМ. Необходимо решить:

$$\Delta_{\perp} \psi^m = 0$$

$$\psi|_{L_i} = C_i$$

Задачи ТЕ, ТМ волн - аналогичны задачам с мембраной, где граница мембраны закреплена неподвижно, а ТЕМ задачу можно назвать «электростатической». Это задачи на нахождение собственных функций

$$\psi_1^{e,m}(\vec{r}_{\perp}), \psi_2^{e,m}(\vec{r}_{\perp}), \dots, \psi_i^{e,m}(\vec{r}_{\perp})$$

и собственных чисел

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_i$$

Если ЛП идеальна, то спектр собственных значений и функций бесконечен.

3. Билет 3

3.1. **МИНИМУМ** Дисперсионное уравнение для волн в идеальной ЛП. Критические частоты и длины волн. Зависимости длины волны, фазовой и групповой скорости от частоты. Распространяющиеся и нераспространяющиеся волны.

Дисперсионное соотношение

$$\kappa^2 = k^2 - h^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu - h^2$$

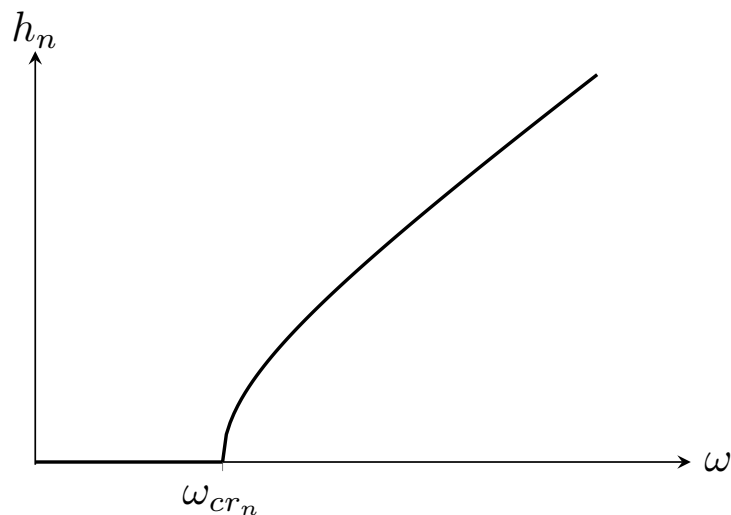


Рис. 1. Зависимость реальной части поперечного волнового числа от частоты

Где κ – поперечное волновое число, а h – продольное волновое число.

Любая мода в линии передачи характеризуется поперечным волновым числом, а поперечное волновое число определяет продольное.

Можем ввести критическую длину волны (продольное волновое число h равно нулю):

$$\begin{aligned}\kappa^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \\ \omega_{cr} &= \frac{\kappa c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \\ \lambda &= \frac{2\pi c}{\omega_{cr}} = \frac{2\pi}{\kappa \sqrt{\varepsilon \mu}}\end{aligned}$$

$\omega < \omega_{cr}$ дисперсионное уравнения не имеет действительных решений – режим нераспространяющейся волны.

При $\omega > \omega_{cr}$ – режим распространяющейся волны.

Если волна бежит вправо, то $h > 0$; если бежит влево, то $h < 0$

$$Re\vec{E}, Re\vec{H} \sim \cos(\omega t - hz)$$

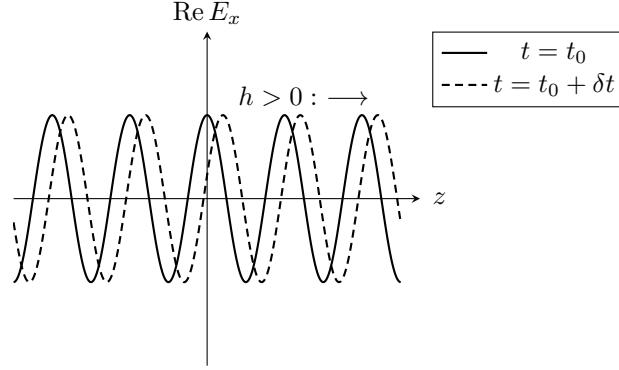


Рис. 2. Распространение волны ($h > 0$)

При $\omega < \omega_{cr}$

$$h = \pm i|h|$$

$$Re E_x \sim \cos(\omega t + \phi_0) \exp\{\mp |h|z\}$$

Бегучести нет. Зависимость экспонентальная

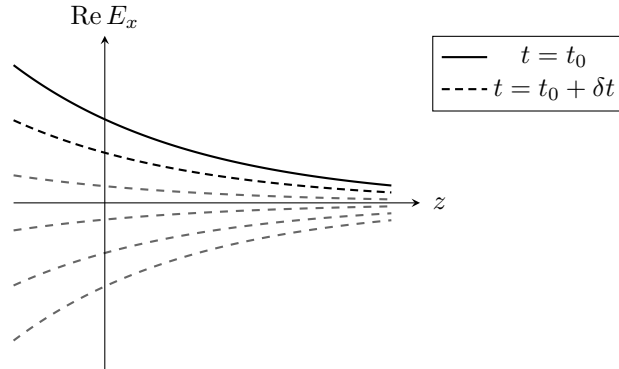


Рис. 3. Режим нераспространения ($h < 0$)

Картинка зависит от способа создания волны, то есть у экспоненты «+» или «-». В зависимости от того, где источник можем сказать, куда бежит волна. То есть определить знак.

Источник может порождать несколько мод, но не все, а какие-то конкретные. Изобразим числовую ось. Пусть задана ω , а то есть $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu}$

Если $k < \kappa_1$ - все моды нераспространяющиеся.

Когда k перейдёт через κ_1 появится низшая мода.

Когда перейдём через κ_2 появится ещё одна критическая частота.

!!Можно дополнить описание числовой прямой!!

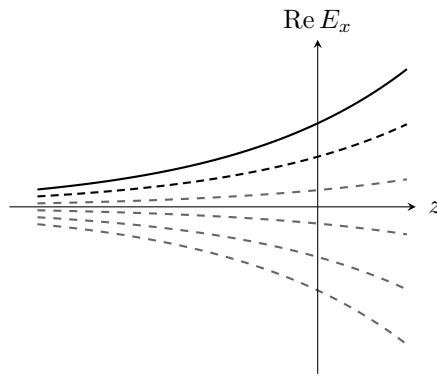


Рис. 4. Экспоненциальное нарастание амплитуды (при $h < 0$)

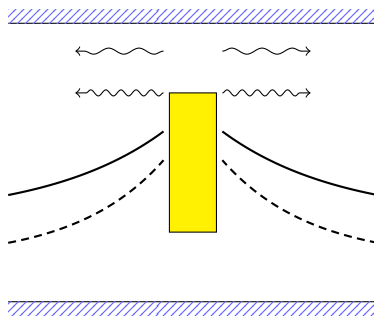
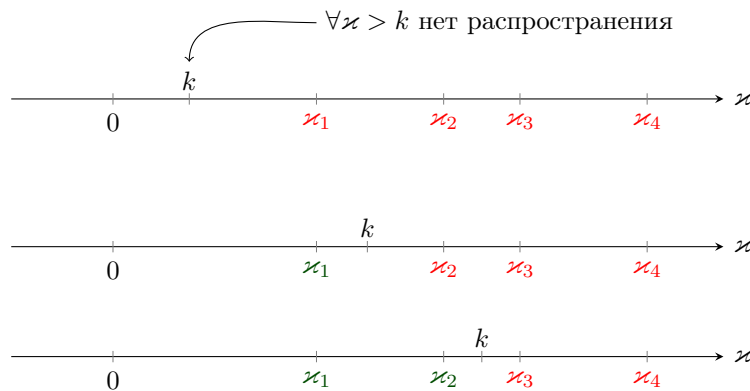


Рис. 5. Моды в линии передачи с источником



Кинематические соотношения - определяют кинематические параметры волны.

1) Временной период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

2) Длина волны в волновод (подразумевают линию передачи или трубу, когда говорят волновод)

$$\lambda_v = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \kappa^2}} = \frac{2\pi}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{k^2}}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2 r^2}{\omega^2}}} > \lambda_0$$

Когда $\omega \rightarrow \omega_{cr}$ $\lambda_v \rightarrow \infty$

λ_0 - длина волны в пространстве без волновода в той же среде.

λ_v - пространственный период.

- 3) Фазовая скорость - скорость перемещения плоскости постоянной фазы.

Поверхность постоянной фазы - это когда фаза константа.

$$\Phi = \omega t - hz + \phi_0 = \text{const}$$

При данном времени можно найти выражение для поверхности постоянной фазы:

$$z = \frac{\omega t + \phi_0}{h}$$

Координата будет перемещаться со скоростью:

$$v_f = \frac{\omega}{h}$$

$$v_f = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - \kappa^2}} = \frac{\omega}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{\kappa^2}}} = \frac{\omega}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{cr}^2}{\omega^2}}} > v_f^{(0)}$$

$$v_f^{(0)} = \frac{c}{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{k}$$

Фазовая скорость может быть больше скорости света.

- 4) Групповая скорость - скорость перемещения квазимонохроматического волнового пакета.

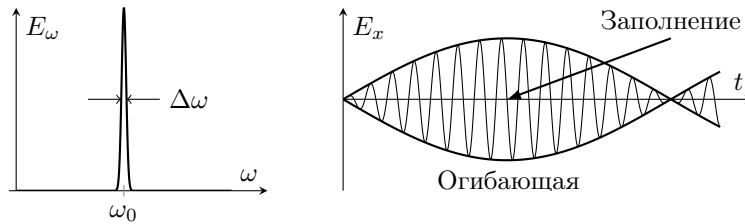


Рис. 6. Квазимонохроматический волновой пакет

Сигнал характеризуется высокочастотным заполнением и огибающей.

По сути это радиоимпульс.

Пакет движется со скоростью $v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k}|_{\omega=\omega_0}$ - это при малом или отсутствующем поглощении. (Это в пространстве, а не в линии передачи). При большом поглощении это понятие теряет смысл. По мере перемещения по волноводу форма сигнала будет меняться.

$v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial h}|_{\omega=\omega_0}$ - формула для волновода.

$$k^2 = h^2 + \kappa^2$$

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}$$

Берём дифференциал от правой и левой части. κ не зависит от частоты.

$$2kdk = 2h dh$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial h} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \frac{h}{k}$$

$$h = + \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu - \kappa_n^2}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial h} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \frac{c}{\omega \sqrt{\varepsilon \mu}} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu - \kappa_n^2} = \frac{v_f^{(0)^2}}{v_f}$$

$$v_f = \frac{\omega}{h}$$

$$v_f^{(0)} = \frac{c}{\omega \sqrt{\varepsilon \mu}}$$

$$v_f v_{gr} = v_f^{(0)^2}$$

$$v_{gr} = v_f^{(0)} \sqrt{1 - \frac{\omega_{cr}^2}{\omega^2}}$$

Всё это справедливо для сред без временной дисперсии.

$$\varepsilon \neq f(\omega), \mu \neq f(\omega)$$

$v_{gr} < c$ - она несёт информацию.

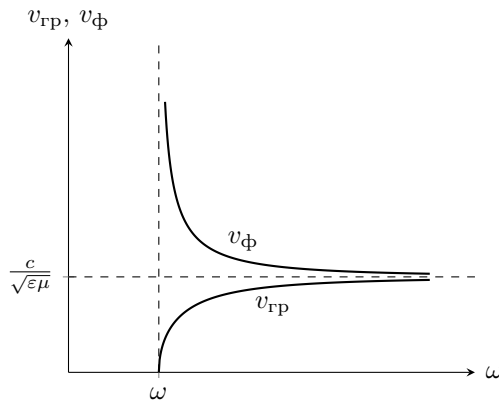


Рис. 7. Распространение волнового пакета

4. Билет 4

4.1. **ПУСТО** Медленные волны, направляемые плоским диэлектрическим слоем...

4.2. **МИНИМУМ** Главные (ТЕМ) волны в линиях передач. Условие существования ТЕМ волны. ТЕМ волна в коаксиальной линии (Картинка силовых линий, зависимость полей от координат).

Главные (ТЕМ) волны в линиях передачи с идеальными границами
У ТЕМ-волн поперечное волновое число $\kappa = 0$:

$$\kappa = 0 \Rightarrow h = k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu}$$

Поля таких волн выражаются следующим образом через функцию φ :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\perp} &= -\frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \nabla_{\perp} \varphi \\ \vec{H}_{\perp} &= -\frac{1}{\mu} [\nabla_{\perp} \varphi, \vec{z}_0] \end{aligned}$$

При этом выполняются **граничные условия**: на каждом из проводников (допустим, есть набор проводников, вдоль которых распространяется волна)

$$\varphi|_{l_i} = C_i,$$

причем константа не обязана быть одна для всех проводников.

Внутренняя задача

Пусть у нас есть только один проводник, в котором есть цилиндрическая полость (рис. 9). Рассмотрим внутреннюю задачу, т.е. распространение

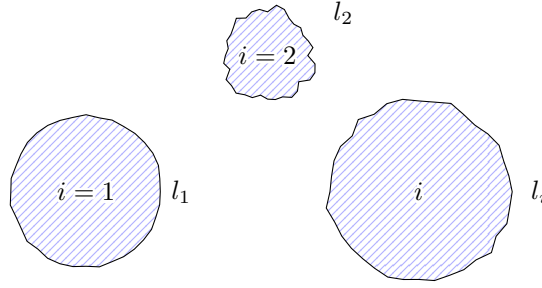


Рис. 8. Набор проводников в задаче

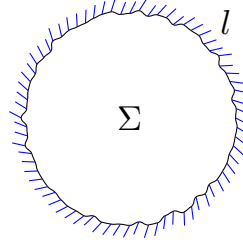


Рис. 9. Случай одного проводника

волны внутри цилиндрической полости. Оказывается, для граничного условия $\varphi_{\perp}|_l = C_1$ существует только тривиальное решение $\varphi_{\perp} = C_1$. Для доказательства необходимо воспользоваться теоремой и минимуме и максимуме для гармонической функции.

Внешняя задача

Зададимся вопросом о решении той же задачи:

$$\Delta_{\perp}\varphi = 0, \quad \varphi|_l = \text{const}$$

Только теперь будем рассматривать её в области вне проводника

Для начала рассмотрим задачу попроще, поле нити (рис. 10). Её решение известно:

$$\Delta_{\perp}\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \sim \ln r$$

Характер убывания полей здесь $E_r \sim \frac{1}{r}$, а для магнитного поля в силу импедансного соотношения $\frac{E_r}{H_{\phi}} = \eta_{\perp\text{в}} = 1$, $H_{\phi} \sim \frac{1}{r}$:

$$E_r = H_{\phi} \sim \frac{1}{r}$$

Посмотрим на поведение полей при $r \rightarrow \infty$. Говорят, нужно поставить граничные условия (или закон убывания) на бесконечности. Чем плох закон $\frac{1}{r}$?

Посчитаем средний по времени поток энергии через поперечное сечение, в котором распространяется волна. Сечение бесконечно, за исключением ко-

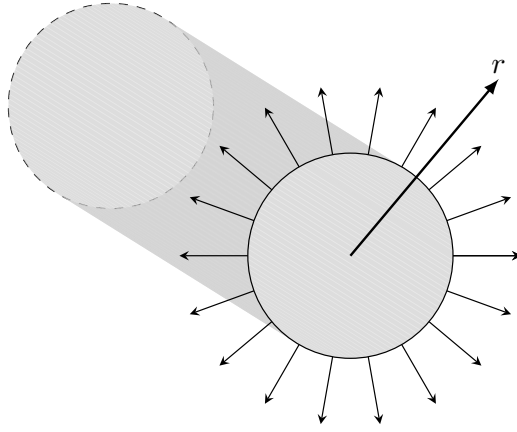


Рис. 10. Поле бесконечной проводящей нити

нечной площади проводника.

Сначала вычислим вектор Пойнтинга (средний по времени и в проекции на z):

$$\bar{S}_z = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(E_r \cdot H_\phi^*) \sim \frac{1}{r^2}$$

$$\Pi = \iint_{\Sigma} \bar{S}_z ds \sim \iint_{\Sigma} \frac{1}{r^2} (2\pi r dr) \sim \int_a^\infty = \ln \frac{\infty}{a} = \infty$$

Интеграл расходится на бесконечности. Говорят, что расходимость носит логарифмический характер. Получили бесконечную мощность волны: такую волну невозможно создать реальным источником — волна не удовлетворяет критерию энергетической реализуемости.

Можно сделать важный вывод: **вдоль одиночного проводника ТЕМ-волна с конечной энергией распространяться не может**. Распространение возможно, если количество проводников будет больше одного. Например, в линии из двух проводников (рис. 11) ТЕМ-волна уже возможна.

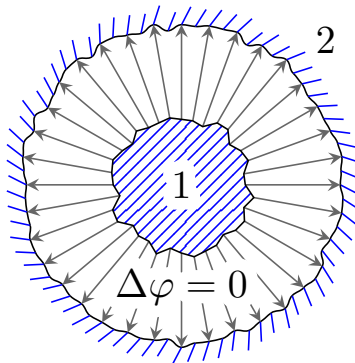


Рис. 11. Закрытая линия из двух проводников

Можно модифицировать задачу с нитью (рис. 12):

В поперечном разрезе это поле диполя, а оно спадает быстрее, $\sim \frac{1}{r^2}$.

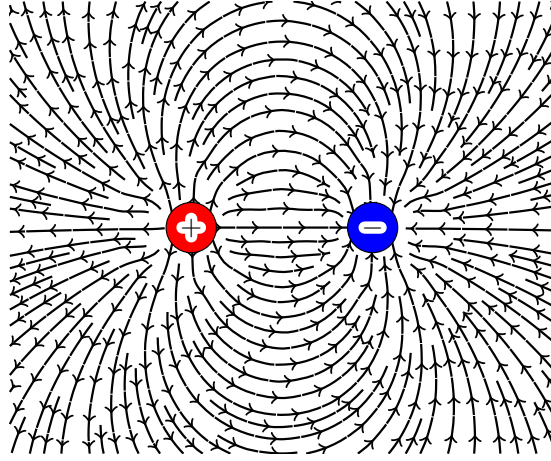


Рис. 12. Поле двухпроводной линии

Тогда

$$E_{\perp} \sim H_{\perp} \sim \frac{1}{r^2} \Rightarrow \bar{S}_z \sim \frac{1}{r^4}, \quad \Pi \sim \int_{L_{\text{характ}}}^{\infty} \frac{1}{r^3} dr$$

Мощность волны конечна, значит, в модифицированной задаче ТЕМ-волна энергетически реализуема.

Конечный вывод: ТЕМ-волна в идеальной линии передачи возможна, если число проводников ≥ 2 .

Например, в коаксиальной линии (рис. 13) ТЕМ-волна возможна.

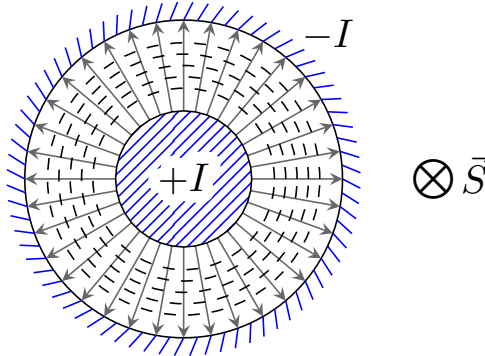


Рис. 13. Поле в коаксиальном кабеле

Зададимся вопросом: возможны ли в такой линии ТЕ и ТМ волны? Сформулируем утверждение, пока без доказательства: **в открытых линиях передачи ТЕ и ТМ волны не существуют.**

5. Билет 5

6. Билет 6

7. Билет 7

8. Билет 8

9. Билет 9

9.1. Затухание волн в линии передач, обусловленное потерями энергии в металлической стенке.

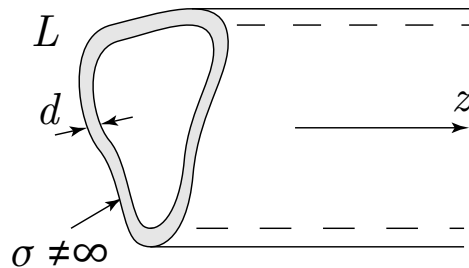


Рис. 14. ЛП с неидеальными стенками

Имеется полая ЛП, заполненная либо ε, μ , либо ничем. Стенки сделаны из хорошего, но не идеального проводника:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{wall} &= \varepsilon' + i\varepsilon'' \\ w \ll 4\pi\sigma, \varepsilon'' &= -\frac{4\pi\sigma}{w} \Rightarrow |\varepsilon''_{wall}| > |\varepsilon'_{wall}| \\ \varepsilon &\approx -i\frac{4\pi\sigma}{w}, |\varepsilon''| \gg 1\end{aligned}$$

На поверхности хорошего проводника выполняется граничное условие Леонтовича.

$$\vec{E}_\tau = \eta_s \left[\vec{H}_\tau \times \vec{n} \right],$$

η_s - поверхностный импеданс. В проводнике волна быстро затухает:

$$E_x \sim e^{-\frac{1+i}{\delta}x} e^{iwt}, \quad \delta = \frac{c}{\sqrt{8\pi\sigma\mu w}},$$

где δ - толщина скин-слоя, $k = \frac{1+i}{\delta}$ - волновое число в стенке. Поля слева от

границы удовлетворяют граничному условию:

$$\vec{E}_\tau = \eta_s \left[\vec{H}_\tau \times \vec{n} \right],$$

\vec{n} - нормаль вглубь проводника. При этом:

$$\eta_s = \sqrt{\frac{\mu_{wall}}{\varepsilon_{wall}}} = \sqrt{i \frac{w \mu_{wall}}{4\pi\sigma}}$$

Это точное решение в случае, когда рассматривается бесконечная металлическая полуплоскость. У нас толщина проводника конечная, и для использования г.у. Леонтовича нужны дополнительные ограничения на параметры стенки d .

Во-первых, толщина стенки должна быть много больше толщины скин-слоя, чтобы волны успели затухнуть. Во-вторых, так как мы изначально не накладывали ограничений на форму стенки, она может быть произвольной формы, а значит и структура поля внутри проводника будет различной для разных участков поверхности. Чтобы рассматривать малые участки как линейные, необходимо, чтобы радиус кривизны поверхности был много больше толщины скин-слоя. В итоге получаем 3 условия:

$$\sigma \gg w, \quad \delta \ll R_{кр}, \quad \delta \ll d$$

В таком случае можно пользоваться г.у. Леонтовича.

Рассмотрим участок ЛП от z до $z + \Delta z$. При распространении, часть энергии волны диссипатирует в стенках:

$$\begin{aligned} \Pi(z) &= \Pi(z + \Delta z) + \Delta P_{wall} \\ \Delta P_{wall} &= P_{wall} \Delta z, \end{aligned}$$

где P_{wall} - количество энергии, потерянное в стенках на единицу длины (погонная мощность потерь), а Π - мощность волны.

$$P_{wall} = -\frac{\Pi(z + \Delta z) - \Pi(z)}{\Delta z}, \quad \Delta z \rightarrow 0,$$

$$P_{wall} = -\frac{d\Pi}{dz} - \text{дифференциальный ЗСЭ}$$

Рассмотрим поля в ЛП:

$$\begin{aligned} \vec{E}, \vec{H} &\sim e^{-ihz}, \quad h = h' + ih'' \\ |\vec{E}|, |\vec{H}| &\sim e^{h''z} \end{aligned}$$

Здесь везде речь идет о среднем потоке энергии!

$$\begin{aligned}\Pi &\sim |\vec{E}|, |\vec{H}| \sim e^{2h''z} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d\Pi}{dz} &= 2h''\Pi \Rightarrow h'' = -\frac{P_{wall}}{2\Pi}\end{aligned}$$

При переходе здесь пользуясь граничным условием Леонтовича получим:

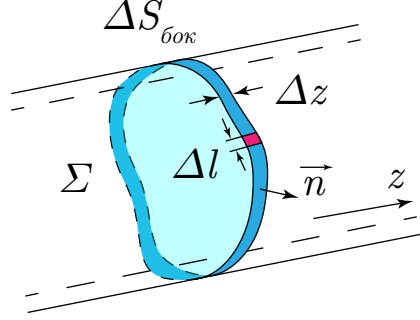


Рис. 15. иллюстрация к интегралу по площади

$$\begin{aligned}\Delta P_{wall} &= \iint_{S_{бок}} \bar{S}_n dS = \iint_{S_{бок}} \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left\{ \left[\vec{E} \times \vec{H}^* \right]_n \right\} dS = \\ &= \frac{c}{8\pi} \oint_L \operatorname{Re} \{ \eta_s \} |\vec{H}_\tau|^2 dl \Delta z,\end{aligned}$$

и тогда выражение для h'' принимает вид:

$$h'' = -\frac{P_{wall}}{2\Pi} = -\frac{\operatorname{Re} \{ \eta_s \} \oint_L |\vec{H}_\tau|^2 dl}{2 \operatorname{Re} \{ \eta_{\perp_b} \} \iint_{\Sigma} |\vec{H}_\perp|^2 dS}$$

Можно ввести $L_{затух}$ - расстояние, на котором амплитуда колебания спадает в e раз:

$$|h''| = \frac{1}{L_{затух}}$$

9.2. Лемма Лоренца и теорема взаимности для двух систем монохроматических источников.

Лемма Лоренца

Эта лемма относится к гармоническим полям и токам

$$\vec{E}, \vec{H}, \vec{j} \sim e^{i\omega t}$$

Рассмотрим две системы источников (токи, в общем случае, и магнитные \vec{j}^m) в одинаковой среде ε, μ . Токи порождают соответствующие поля:

$$\begin{aligned}\vec{j}_1^{e,m} &\sim e^{i\omega t} \rightarrow \vec{E}_1, \vec{H}_1, \vec{j} \sim e^{i\omega t} \\ \vec{j}_2^{e,m} &\sim e^{i\omega t} \rightarrow \vec{E}_2, \vec{H}_2, \vec{j} \sim e^{i\omega t}\end{aligned}$$

Частота ω этих источников одинаковая - эти источники **монохроматические**. Мы можем записать уравнения Максвелла в общем виде, с учетом фиктивных токов:

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{H}_1 &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_1^e + \frac{i\omega}{c} \varepsilon \vec{E}_1 \mid \cdot \vec{E}_2 \\ \text{rot } \vec{E}_1 &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_1^m - \frac{i\omega}{c} \varepsilon \vec{H}_1 \mid \cdot \vec{H}_2 \\ \text{rot } \vec{H}_2 &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_2^e + \frac{i\omega}{c} \varepsilon \vec{E}_2 \mid \cdot \vec{E}_1 \\ \text{rot } \vec{E}_2 &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_2^m - \frac{i\omega}{c} \varepsilon \vec{H}_2 \mid \cdot \vec{H}_1\end{aligned}$$

Используя соотношение:

$$\text{div} [\vec{A} \times \vec{B}] = \vec{B} \text{ rot } \vec{A} - \vec{A} \text{ rot } \vec{B}$$

преобразуем 4 уравнения выше, складывая все уравнения. В итоге получим:

$$\begin{aligned}\text{div} [\vec{E}_1 \times \vec{H}_2] - \text{div} [\vec{E}_2 \times \vec{H}_1] &= \\ &= \frac{4\pi}{c} (\vec{j}_1^e \vec{E}_2 - \vec{j}_1^m \vec{H}_2 - \vec{j}_2^e \vec{E}_1 + \vec{j}_2^m \vec{H}_1)\end{aligned}$$

Далее, интегрируем по произвольному объему, охватывающему эти источники, и применяя формулу Гаусса-Остроградского получим:

$$\begin{aligned}\oint_S [\vec{E}_1 \times \vec{H}_2] - [\vec{E}_2 \times \vec{H}_1] \vec{n} dS &= \\ &= \frac{4\pi}{c} \int_V (\vec{j}_1^e \vec{E}_2 - \vec{j}_1^m \vec{H}_2 - \vec{j}_2^e \vec{E}_1 + \vec{j}_2^m \vec{H}_1) dV\end{aligned}$$

Это соотношение и есть формулировка **леммы Лоренца**. Такие соотношения позволяют связывать решения двух разных задач, зная решение простой задачи, можно решить сложную.

Теорема взаимности

Распространим объем $V \rightarrow \infty$ в лемме Лоренца. В таком случае поверхностью интегрирования S может быть сфера радиуса $R \rightarrow \infty$.

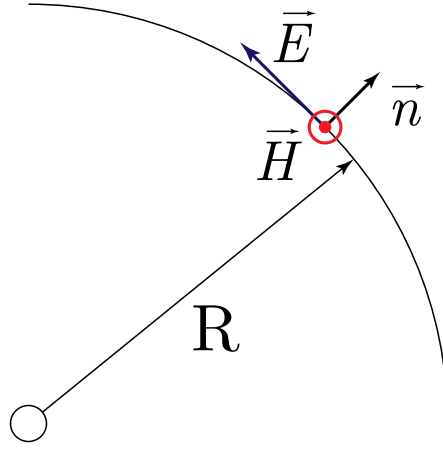


Рис. 16. К теореме взаимности

Источники обеих систем ограничены в пространстве. При большом удалении, поля от источников представляют собой сферические волны. У сферической волны, на бесконечности можно рассматривать ее малый участок как плоский, тогда волны будут чисто поперечными. Волновое сопротивление среды:

$$\frac{E_{\perp}}{H_{\perp}} = \eta_{\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Выражение выше - приближение характер, однако при устремлении $R \rightarrow \infty$, его точность увеличивается. Тогда имеем:

$$\vec{E}_{1,2} = \eta_{\text{в}} \left[\vec{H}_{1,2} \times \vec{n} \right],$$

где \vec{n} - направление распространения волны (внешняя нормаль к S). $\eta_{\text{в}}$ - одинакова для систем источников 1 и 2. Тогда справедливо:

$$\begin{aligned} \left[\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 \right] &= \eta_{\text{в}} \left[\left[\vec{H}_1 \times \vec{n} \right] \times \vec{H}_2 \right] = \eta_{\text{в}} \left(\vec{n}(\vec{H}_1, \vec{H}_2) - \underbrace{\vec{H}_2(\vec{H}_1, \vec{n})}_{=0} \right) \\ \left. \begin{aligned} \left[\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 \right] &= \eta_{\text{в}} \vec{n}(\vec{H}_1, \vec{H}_2) \\ \left[\vec{E}_2 \times \vec{H}_1 \right] &= \eta_{\text{в}} \vec{n}(\vec{H}_2, \vec{H}_1) \end{aligned} \right\} \left[\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 \right] - \left[\vec{E}_2 \times \vec{H}_1 \right] &\equiv 0 \end{aligned}$$

Т.е. левая часть в лемме Лоренца при большом расстоянии равна нулю. Это верно с точностью до членов порядка $\frac{1}{R^2}$. Оставшийся в правой части интеграл разделим на два, таким образом, получаем формулировку **тоеремы**

взаимности:

$$\int_V \left(\vec{j}_1^e \vec{E}_2 - \vec{j}_1^m \vec{H}_2 - \vec{j}_2^e \vec{E}_1 + \vec{j}_2^m \vec{H}_1 \right) dV = 0$$
$$\int_V \left((\vec{j}_1^e, \vec{E}_2) - (\vec{j}_1^m, \vec{H}_2) \right) dV = \int_V \left((\vec{j}_2^e, \vec{E}_1) - (\vec{j}_2^m, \vec{H}_1) \right) dV$$

Эта теорема также используется для сведения сложных задач к простым.

Условия выполнения теоремы:

- Среды должны быть линейными, ε, μ - не должны зависеть от полей.
- Рассматриваем изотропную среду

10. Билет 10

11. Билет 11

12. Билет 12

13. Билет 13