Disclaimer

Содержание

1. Билет 1 . . . . **3**

1.1. Гармонические волны в линиях передачи. Выражение для векторного потенциала. Дифференциальное уравнение для поперечной волновой функции $\psi(\vec{r_\perp})$. Понятия продольного и поперечного волнового числа. Выражения для полей TE, TM, TEM. Импедансная связь между поперечными компонентаит электрического и магнитного полей и понятие поперечного волнового сопротивления 3

2. Билет 2 . . . . **6**

2.1. Граничные условия для поперечных волновых функций волн TE, TM, TEM типов в идеальной линии передачи. Математическая формулировка задачи описания волн TE, TM, TEM типов. 6

3. Билет 3 . . . . **8**

3.1. МИНИМУМ Дисперсионное уравнение для волн в идеальной ЛП. Критические частоты и длины волн. Зависимости длины волны, фазовой и групповой скорости от частоты. Распространяющиеся и нераспространяющиеся волны. 8

4. Билет 4 . . . . **13**

4.1. ПУСТО Медленные волны, направляемые плоским диэлектрическим слоем... 13

4.2. МИНИМУМ Главные (TEM) волны в линиях передач. Условие существования TEM волны. TEM волна в коаксиальной линии (Картинка силовых линий, зависимость полей от координат). . 13

5. Билет 5 . . . . **17**

6. Билет 6 . . . . **17**

7. Билет 7 . . . . **17**

8. Билет 8 . . . . **17**

9. Билет 9 . . . . **17**

9.1. ПУСТОЗатухание волн в линии передач, обусловленноепотерями энергии в металлической стенке. 17

9.2. Лемма Лоренца и теорема взаимности для двух систем монохроматических источников. 17

10. Билет 10 . . . . **20**

11. Билет 11 . . . . **20**

12. Билет 12 . . . . **20**

13. Билет 13 . . . . **20**

1. Билет 1

1.1. Гармонические волны в линиях передачи. Выражение для векторного потенциала. Дифференциальное уравнение для поперечной волновой функции $\psi(\vec{r_\perp})$. Понятия продольного и поперечного волнового числа. Выражения для полей TE, TM, TEM. Импедансная связь между поперечными компонентаит электрического и магнитного полей и понятие поперечного волнового сопротивления

Линия передач - это любая цилиндрическая система. В них различают продольное z и поперечное $\vec{r_\perp} = r_\perp(r, \theta)$ направление. При описании таких систем проще использовать векторный потенциал $\vec{A}$, который должен удовлетворять уравнению Гельмгольца (для амплитуд):

$$\Delta \vec{A}^e + k^2 \vec{A}^e = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}^e = 0$$
$$\vec{B} = rot\vec{A}^e$$

0 потому что случай, где нет сторонних источников. Запишем поля в ЛП, когда волна бежит вдоль оси Oz:

$$\vec{E}(\vec{r}_\perp, z, \theta) = \vec{E_0}(\vec{r}_\perp)e^{i(wt-hz)},$$

где h - **продольное волновое число** (постоянная распространения). Реальное поля в таком случае записывается как:

$$E_{R_x} = \mathrm{Re}\{E_x\} = |E_x(\vec{r}_\perp)|\cos(wt - hz + \varphi(\vec{r}_\perp))$$

Запишем веторный потенциал в следующем виде:

$$\vec{A^e} = \psi^e(\vec{r}_\perp)e^{-ihz}\vec{z_0},$$

где $\psi^e(\vec{r}_\perp)$ - **поперечная волновая функция**. Запишем теперь поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ через $\psi^e(\vec{r}_\perp)$. Вспомним выражение полей через векторный потенциал:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}rot\vec{A}^e$$
$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}^e}{\partial t} = \frac{1}{ik_0\varepsilon\mu}(\nabla div + k^2)\vec{A}^e,$$

где $k = \frac{w}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}, k_0 = \frac{w}{c}$. При подстановке выражения для $\vec{A}^e$, для компонент векторов в случае **TM** - волны получим(надо расписать такие вещи как $\operatorname{div}\vec{A}^e,\ \nabla\operatorname{div}\vec{A}^e,\ \operatorname{rot}\vec{A}^e$):

$$
\begin{aligned}
&E_z = \frac{\varkappa^2}{ik_0\varepsilon\mu}\psi^e(\vec{r}_\perp)\cdot e^{i(wt-hz)}\\
&\vec{E}_\perp = -\frac{h}{k_0\varepsilon\mu}\nabla_\perp\psi^e(\vec{r}_\perp)\cdot e^{i(wt-hz)}\\
&\vec{H}_\perp = \frac{1}{\mu}[\nabla_\perp\psi^e(\vec{r}_\perp)\times\vec{z}_0]\cdot e^{i(wt-hz)}\\
&H_z = 0
\end{aligned}
$$

TM-волна - поперечная магнитная волна (Магнитное поле имеет только поперечную компоненту. Поле $\vec{E}$ имеет и поперечное и продольное направление).

Потенциал $\vec{A}^e$, при любой зависимости от времени, должен удовлетворять волновому уравнению:

$$\Delta\vec{A}^e - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}^e}{\partial t^2} = 0$$

В нашем случае, когда векторный потенциал имеет вид $\vec{A}^e = \psi^e(\vec{r}_\perp)e^{-ihz}\vec{z}_0$, для гармонических полей справедливы следующие переходы:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Rightarrow iw,\ \Delta\vec{A}^e + k^2\vec{A}^e = 0,\ k^2 = \frac{w^2}{c^2}\varepsilon\mu$$

Рассмотри для z-компоненты:

$$\Delta A_z^e + k^2A_z^e = 0,\ \Delta = \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Rightarrow -h^2,\ \text{т.к.}A_z^e = \psi^e(\vec{r}_\perp)e^{-ihz}$$

$$\Delta_\perp\psi^e + \underbrace{(k^2-h^2)}_{\varkappa^2}\psi^e = 0$$

$$\Delta_\perp\psi^e + \varkappa^2\psi^e = 0$$

$\varkappa^2$ - **поперечное волновое число**. Если поле удовлетворяет уравнению выше, то такое поле удоветворяет уравнениям Максвелла.

Аналогично сделаем для **TE** - волны.

TE-волна - поперечная электрическая волна (Электрическое поле имеет только поперечную компоненту. Магнитное поле имеет и поперечное и продольное направление). По принципу двойственности производим замены:

$$\vec{E} \to \vec{H},\ \vec{H} \to -\vec{E},\ \varepsilon \leftrightarrow \mu$$

$$\begin{aligned}
&H_z = \frac{\varkappa^2}{ik_0\varepsilon\mu}\psi^m(\vec{r}_\perp) \cdot e^{i(wt-hz)}\\
&\vec{H_\perp} = -\frac{h}{k_0\varepsilon\mu}\nabla_\perp\psi^m(\vec{r}_\perp) \cdot e^{i(wt-hz)}\\
&\vec{E_\perp} = -\frac{1}{\mu}[\nabla_\perp\psi^m(\vec{r}_\perp) \times \vec{z_0}] \cdot e^{i(wt-hz)}\\
&E_z = 0
\end{aligned}$$

Вообще говоря, ψ^e и ψ^m могут быть различными, поэтому выше вместо ψ^e записано ψ^m . Аналогично для ψ^m требуется выполнение:

$$\Delta_\perp\psi^m + \varkappa^2\psi^m = 0$$

TE, TM волны - это решения уравнений Максвелла. однак может быть еще один тип решений - **TEM** - волны. Рассмотрим случай $\varkappa = 0,\ h = k$:

$$\begin{aligned}
&H_z = E_z = 0\\
&\vec{E_\perp} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\nabla_\perp\psi \cdot e^{i(wt-kz)}\\
&\vec{H_\perp} = \frac{1}{\mu}[\nabla_\perp\psi \times \vec{z_0}] \cdot e^{i(wt-kz)}\\
&\Delta_\perp\psi = 0
\end{aligned}$$

TEM-волна - чисто поперечная волна (Электрическое поле имеет только поперечную компоненту, как и магнитное).

Что имеем в итоге:

- Поля выражаются через поперечную волновую функцию
- Продольные компоненты полей пропорциональны ψ
- Поперечные компоненты полей пропорциональны $\nabla_\perp\psi$

Т.е. если заданы ψ^e, ψ^m, то можно полностью найти поля. Из формул также видно следующее соотношение:

$$\vec{E}_\perp = \eta_{\perp\text{в}}[\vec{H}_\perp \times \vec{z_0}],$$

где $\eta_{\perp\text{в}}$ - **поперечное волновое сопротивление** - отношение между поперечными компонентами полей в бегущей волне $\eta_{\perp\text{в}} = \frac{E_\perp}{H_\perp}$. Для различных типов волн записывается как:

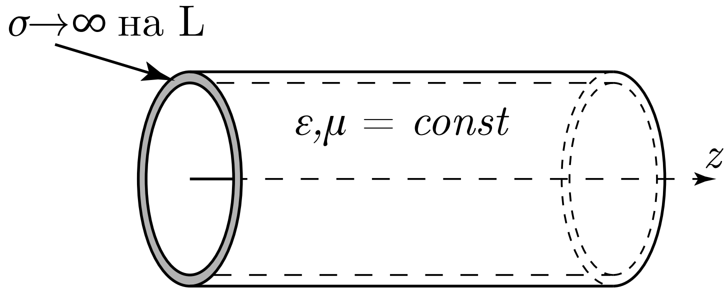
$$\text{TE(+),TM(-) - волны: } \eta_{\perp\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(\frac{k}{h}\right)^{\pm 1}$$

$$\text{TEM - волны: } \eta_{\perp\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Заметим, что в бегущей волне поля зависят от координат, а их отношение - $\eta_{\perp\text{в}}$ - нет. В стоячей волне это не так.

2. Билет 2

2.1. Граничные условия для поперечных волновых функций волн TE, TM, TEM типов в идеальной линии передачи. Математическая формулировка задачи описания волн TE, TM, TEM типов.



Рассмотрим случай идеального проводника, $\sigma \to \infty$(Вообще говоря, идеальных проводников не бывает, однако условие идеальной проводимости можно записать в виде: $\sigma \gg w$ $(\delta \ll L)$). Вспомним граничные условия для полей на поверхности идеального проводника:

$$E_\tau|_S = 0,\ H_n|_S = 0,$$

а также условие на поперечную волновую функцию:

$$\Delta_\perp \psi^{e,m} + \varkappa^2 \psi^{e,m} = 0$$

Найдем граничные условия для $\psi^{e,m}$ для идеальной ЛП.

TM-волна:

$$\text{т.к. } E_z \sim \psi^e,\ \vec{E}_{\perp\tau} \sim \frac{\partial \psi^e}{\partial \tau}$$

$$\text{и } E_z = 0,\ E_{\perp\tau} = 0$$

$$\text{то } \psi^e(\vec{r}_\perp)|_S = 0$$

- это граничное условие Дирихле

TE-волна:

$$\text{т.к. } \vec{E}_{\perp\tau} \sim [\nabla_\perp \psi^m(\vec{r}_\perp) \times \vec{z}_0]_\tau$$
$$\text{и } E_{\perp\tau} = 0$$
$$\text{то } \frac{\partial \psi^m}{\partial n}|_S = 0$$

TEM-волна:

$$\text{т.к. } \vec{E}_{\perp\tau} \sim \nabla_\perp \psi^m(\vec{r}_\perp)$$

$$\text{то } \frac{\partial \psi}{\partial \tau}|_S = 0 \Rightarrow \psi|_S = const = C_i$$

Отметим, что на разных поверхностях проводников постоянная C_i может быть разной.

Математическая формулировка задач для описания волн.

TM. Необходимо решить:

$$\Delta_\perp \psi^e + \varkappa^2 \psi^e = 0$$
$$\psi^e|_L = 0, L \text{ - граничный контур}$$

TE. Необходимо решить:

$$\Delta_\perp \psi^m + \varkappa^2 \psi^m = 0$$
$$\frac{\partial \psi^m}{\partial n}|_L = 0$$

TEM. Необходимо решить:

$$\Delta_\perp \psi^m = 0$$
$$\psi|_{L_i} = C_i$$

Задачи TE, TM волн - аналогичны задачам с мембраной, где граница мембраны закреплена неподвижно, а TEM задачу можно назвать «электростатической». Это задачи на нахождение собственных функций

$$\psi_1^{e,m}(\vec{r}_\perp), \psi_2^{e,m}(\vec{r}_\perp), \dots \psi_i^{e,m}(\vec{r}_\perp)$$

и собственных чисел

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_i$$

Если ЛП идеальна, то спектр сбственных значений и функций бесконечен.

3. Билет 3

3.1. МИНИМУМ Дисперсионное уравнение для волн в идеальной ЛП. Критические частоты и длины волн. Зависимости длины волны, фазовой и групповой скорости от частоты. Распространяющиеся и нераспространяющиеся волны.

Дисперсионное соотношение

$$\varkappa^2 = k^2 - h^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - h^2$$

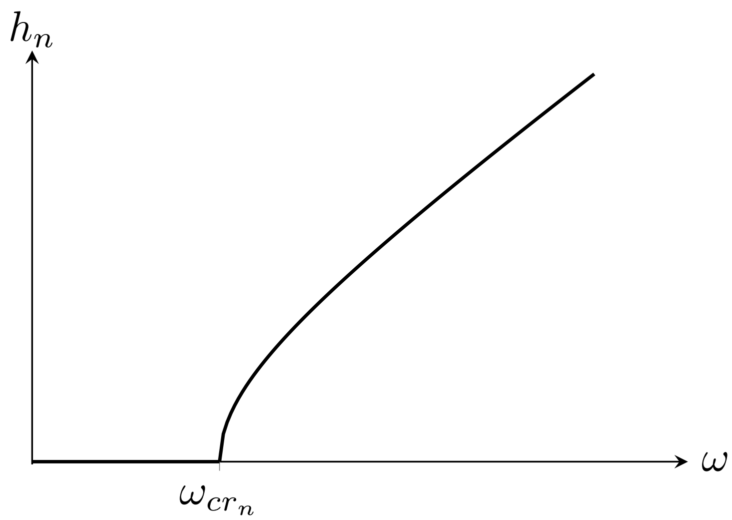


Рис. 1. Зависимость реальной части поперечного волнового числа от частоты

Где $\varkappa$ – поперечное волновое число, а h - продольное волновое число.

Любая мода в линии передачи характеризуется поперечным волновым числом, а поперечное волновое число определяет продольное.

Можем ввести критическую длину волны (продольное волновое число h равно нулю):

$$\varkappa^2 = \frac{\omega}{c}^2\varepsilon\mu$$

$$\omega_{cr} = \frac{\varkappa c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_{cr}} = \frac{2\pi}{\varkappa\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$\omega < \omega_{cr}$ дисперсионное уравнения не имеет действительных решений – режим нераспространяющейся волны.

При $\omega > \omega_{cr}$ – режим распространяющейся волны.
Если волна бежит вправо, то $h > 0$; если бежит влево, то $h < 0$

$$Re\vec{E}, Re\vec{H} \sim \cos(\omega t - hz)$$

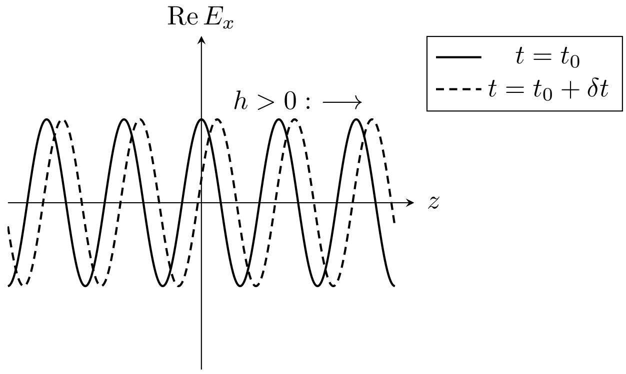


Рис. 2. Распространение волны ($h > 0$)

При $\omega < \omega_{cr}$

$$h = \pm i|h|$$

$$ReE_x \sim \cos(\omega t + \phi_0)\exp\{\mp|h|z\}$$

Бегучести нет. Зависимость экспонентальная

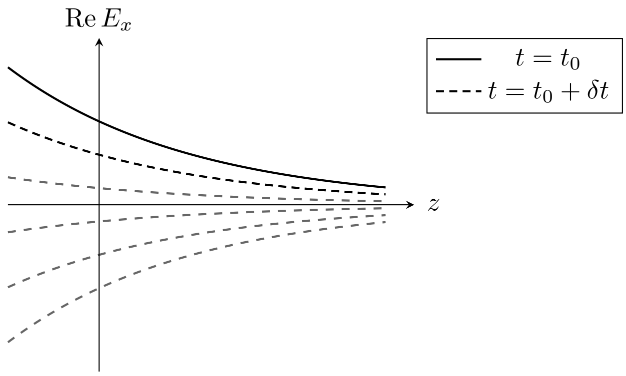


Рис. 3. Режим нераспространения ($h < 0$)

Картинка зависит от способа создания волны, то есть у экспоненты « +» или «–». В зависимости от того, где источник можем сказать, куда бежит волна. То есть определить знак.

Источник может порождать несколько мод, но не все, а какие-то конкретные. Изобразим числовую ось. Пусть задана ω, а то есть $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$

Если $k < \varkappa_1$ - все моды нераспространяющиеся.

Когда k перейдёт через $\varkappa_1$ появится низшая мода.

Когда перейдём через $\varkappa_2$ появится ещё одна критическая частота.

!!Можно дополнить описание числовой прямой!!

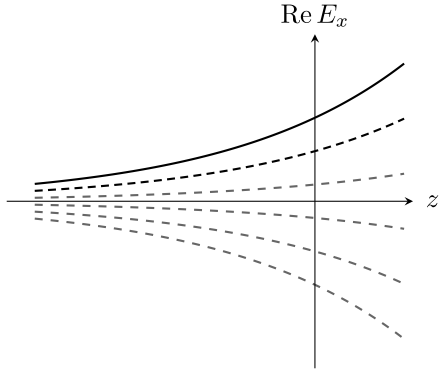


Рис. 4. Экспоненциальное нарастание амплитуды (при $h < 0$)

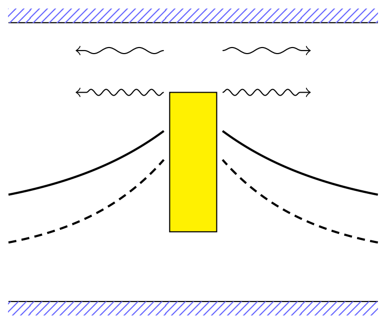
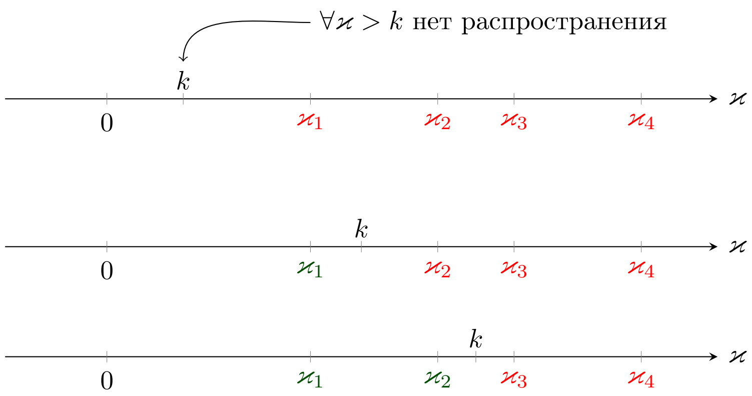


Рис. 5. Моды в линии передачи с источником



Кинематические соотношения - определяют кинематические параметры волны.

1) Временной период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

2) Длина волны в волноводе (подразумевают линию передачи или трубу, когда говорят волновод)

$$\lambda_v = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \varkappa^2}} = \frac{2\pi}{k}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{k^2}}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c r^2}{\omega}}} > \lambda_0$$

Когда $\omega \to \omega_{cr}$ $\lambda_v \to \infty$

λ_0 - длина волны в пространстве без волновода в той же среде.

λ_v - пространственный период.

3) Фазовая скорость - скорость перемещения плоскости постоянной фазы.

Поверхность постоянной фазы - это когда фаза константа.

$$\Phi = \omega t - hz + \phi_0 = \mathrm{const}$$

При данном времени можно найти выражение для поверхности постоянной фазы:

$$z = \frac{\omega t + \phi_0}{h}$$

Координата будет перемещаться со скоростью:

$$v_f = \frac{\omega}{h}$$

$$v_f = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - \varkappa^2}} = \frac{\omega}{k}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k}{\varkappa}^2}} = \frac{\omega}{k}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{cr}}{\omega}^2}} > v_f^{(0)}$$

$$v_f^{(0)} = \frac{c}{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{k}$$

Фазовая скорость может быть больше скорости света.

4) Групповая скорость - скорость перемещения квазимонохроматического волнового пакета.

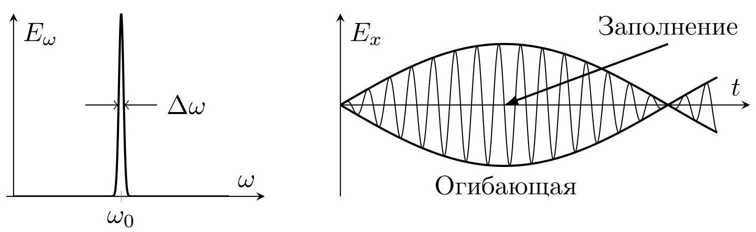


Рис. 6. Квазимонохроматический волновой пакет

Сигнал характеризуется высокочастотным заполнением и огибающей.

По сути это радиоимпульс.

Пакет движется со скоростью $v_{gr} = \frac{\partial\omega}{\partial k}|_{\omega=\omega_0}$ - это при малом или отсутствующем поглощении.(Это в пространстве, а не в линии передачи). При большом поглощении это понятие теряет смысл. По мере перемещения по волноводу форма сигнала будет меняться.

$v_{gr} = \frac{\partial\omega}{\partial h}|_{\omega=\omega_0}$ - формула для волновода.

$$k^2 = h^2 + \varkappa^2$$
$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$$

Берём дифференциал от правой и левой части.$\varkappa$ не зависит от частоты.

$$2kdk = 2hdh$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial h} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{h}{k}$$
$$h = +\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \varkappa_n^2}$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial h} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{c}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \varkappa_n^2} = \frac{{v_f^{(0)}}^2}{v_f}$$

$$v_f = \frac{\omega}{h}$$
$$v_f^{(0)} = \frac{c}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}$$
$$v_f v_{gr} = {v_f^{(0)}}^2$$
$$v_{gr} = v_f^{(0)}\sqrt{1 - \frac{{\omega_{cr}}^2}{\omega}}$$

Всё это справедливо для сред без временной дисперсии.

$$\varepsilon \neq f(\omega), \mu \neq f(\omega)$$

$v_{gr} < c$ - она несёт информацию.

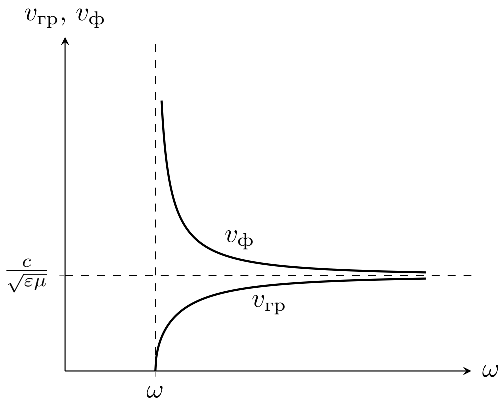


Рис. 7. Распространение волнового пакета

4. Билет 4

4.1. ПУСТО Медленные волны, направляемые плоским диэлектрическим слоем...

4.2. МИНИМУМ Главные (TEM) волны в линиях передач. Условие существования TEM волны. TEM волна в коаксиальной линии (Картинка силовых линий, зависимость полей от координат).

Главные (TEM) волны в линиях передачи с идеальными границами
У TEM-волн поперечное волновое число $\varkappa = 0$:

$$\varkappa = 0 \Rightarrow h = k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$$

Поля таких волн выражаются следующим образом через функцию φ:

$$\vec{E}_\perp = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\nabla_\perp\varphi$$
$$\vec{H}_\perp = -\frac{1}{\mu}[\nabla_\perp\varphi, \vec{z}_0]$$

При этом выполняются **граничные условия**: на каждом из проводников (допустим, есть набор проводников, вдоль которых распространяется волна)

$$\varphi|_{l_i} = C_i,$$

причем константа не обязана быть одна для всех проводников.

Внутренняя задача

Пусть у нас есть только один проводник, в котором есть цилиндрическая полость (рис. 9). Рассмотрим внутреннюю задачу, т.е. распространение

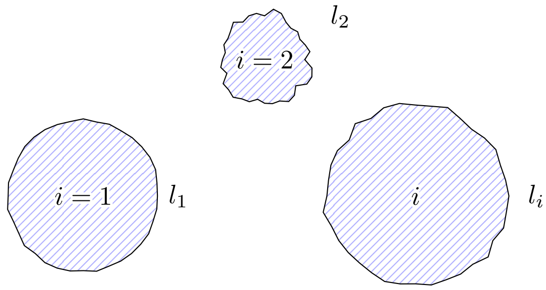


Рис. 8. Набор проводников в задаче

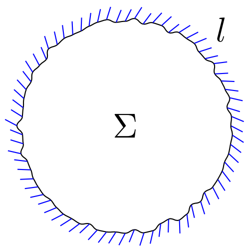


Рис. 9. Случай одного проводника

волны внутри цилиндрической полости. Оказывается, для граничного условия $\varphi_\perp|_l = C_1$ существует только тривиальное решение $\varphi_\perp = C_1$. Для доказательства необходимо воспользоваться теоремой и минимуме и максимуме для гармонической функции.

Внешняя задача

Зададимся вопросом о решении той же задачи:

$$\Delta_\perp \varphi = 0, \quad \varphi|_l = \mathrm{const}$$

Только теперь будем рассматривать её в области вне проводника

Для начала рассмотрим задачу попроще, поле нити (рис. 10). Её решение известно:

$$\Delta_\perp \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \sim \ln r$$

Характер убывания полей здесь $E_r \sim \dfrac{1}{r}$, а для магнитного поля в силу импедансного соотношения $\dfrac{E_r}{H_\phi} = \eta_{\perp\text{в}} = 1, \quad H_\varphi \sim \dfrac{1}{r}$:

$$E_r = H_\phi \sim \frac{1}{r}$$

Посмотрим на поведение полей при $r \to \infty$. Говорят, нужно поставить граничные условия (или закон убывания) на бесконечности. Чем плох закон $\frac{1}{r}$?

Посчитаем средний по времени поток энергии через поперечное сечение, в котором распространяется волна. Сечение бесконечно, за исключением ко-

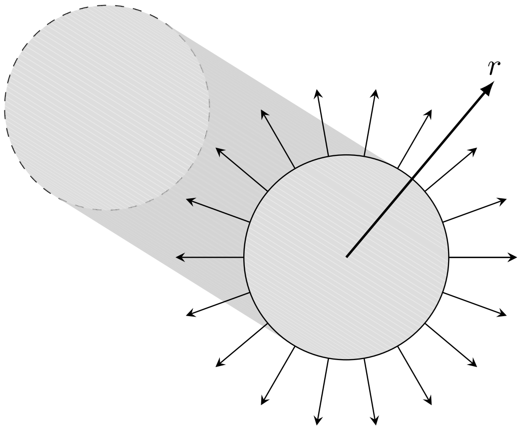


Рис. 10. Поле бесконечной проводящей нити

нечной площади проводника.

Сначала вычислим вектор Пойнтинга (средний по времени и в проекции на z):

$$\overline{S}_z = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\big(E_r \cdot H_\phi^*\big) \sim \frac{1}{r^2}$$

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma} \overline{S}_z ds \sim \iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{r^2}(2\pi r\, \mathrm{d}r) \sim \int\limits_a^\infty = \ln\frac{\infty}{a} = \infty$$

Интеграл расходится на бесконечности. Говорят, что расходимость носит логарифмический характер. Получили бесконечную мощность волны: такую волну невозможно создать реальным источником — волна не удовлетворяет критерию энергетической реализуемости.

Можно сделать важный вывод: **вдоль одиночного проводника ТЕМ-волна с конечной энергией распространятся не может**. Распространение возможно, если количество проводников будет больше одного. Например, в линии из двух проводников (рис. 11) ТЕМ-волна уже возможна.

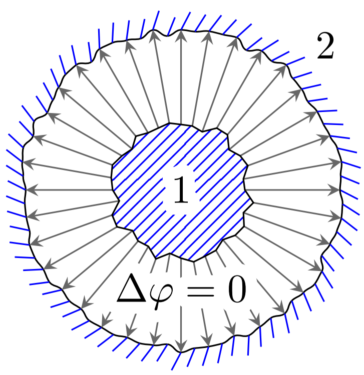


Рис. 11. Закрытая линия из двух проводников

Можно модифицировать задачу с нитью (рис. 12):
В поперечном разрезе это поле диполя, а оно спадает быстрее, $\sim \frac{1}{r^2}$.

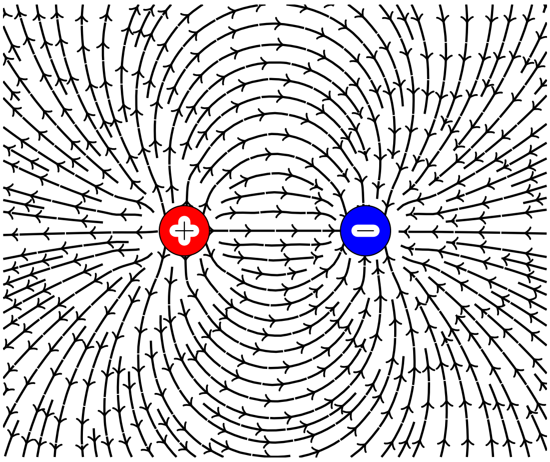


Рис. 12. Поле двухпроводной линии

Тогда

$$E_\perp \sim H_\perp \sim \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \overline{S}_z \sim \frac{1}{r^4}, \quad \Pi \sim \int\limits_{L_{\text{характ}}}^{\infty} \frac{1}{r^3}\,\mathrm{d}r$$

Мощность волны конечна, значит, в модифицированной задаче TEM-волна энергетически реализуема.

Конечный вывод: TEM-волна в идеальной линии передачи возможна, если число проводников ≥ 2.

Например, в коаксиальной линии (рис. 13) TEM-волна возможна.

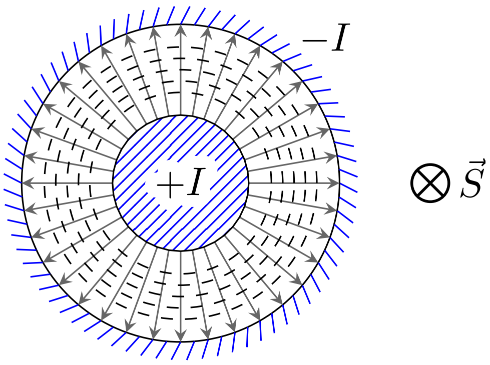


Рис. 13. Поле в коаксиальном кабеле

Зададимся вопросом: возможны ли в такой линии TE и TM волны? Сформулируем утверждение, пока без доказательства: **в открытых линиях передачи TE и TM волны не существуют**.

5. Билет 5

6. Билет 6

7. Билет 7

8. Билет 8

9. Билет 9

9.1. ПУСТОЗатухание волн в линии передач, обусловленноепотерями энергии в металлической стенке.

9.2. Лемма Лоренца и теорема взаимности для двух систем монохроматических источников.

Лемма Лоренца

Эта лемма относится к гармоническим полям и токам

$$\vec{E}, \vec{H}, \vec{j} \sim e^{iwt}$$

Рассмотрим две системы источников (токи, в общем случае, и магнитные $\vec{j}^m$) в одинаковой среде ε, μ. Токи пораждают соответствующе поля:

$$\vec{j}_1^{e,m} \sim e^{iwt} \to \vec{E}_1, \vec{H}_1, \vec{j} \sim e^{iwt}$$
$$\vec{j}_2^{e,m} \sim e^{iwt} \to \vec{E}_2, \vec{H}_2, \vec{j} \sim e^{iwt}$$

Частота w этих источников одинаковая - эти источники **монохроматические**. Мы можем записать уравнения Максвелла в общем виде, с учетом фихтивных токов:

$$\operatorname{rot} \vec{H}_1 = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_1^e + \frac{iw}{c}\varepsilon\vec{E}_1 | \cdot \vec{E}_2$$
$$\operatorname{rot} \vec{E}_1 = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_1^m - \frac{iw}{c}\varepsilon\vec{H}_1 | \cdot \vec{H}_2$$
$$\operatorname{rot} \vec{H}_2 = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_2^e + \frac{iw}{c}\varepsilon\vec{E}_2 | \cdot \vec{E}_1$$
$$\operatorname{rot} \vec{E}_2 = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_2^m - \frac{iw}{c}\varepsilon\vec{H}_2 | \cdot \vec{H}_1$$

Используя соотношение:

$$\operatorname{div}\left[\vec{A}\times\vec{B}\right]=\vec{B}\operatorname{rot}\vec{A}-\vec{A}\operatorname{rot}\vec{B}$$

преобразуем 4 уравнения выше, складывая все уравнения. В итоге получим:

$$\operatorname{div}\left[\vec{E}_1\times\vec{H}_2\right]-\operatorname{div}\left[\vec{E}_2\times\vec{H}_1\right]=$$
$$=\frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}_1^{\,e}\vec{E}_2-\vec{j}_1^{\,m}\vec{H}_2-\vec{j}_2^{\,e}\vec{E}_1+\vec{j}_2^{\,m}\vec{H}_1\right)$$

Далее, интегрируем по произвольному объему, охватывающему эти источники, и применяя формулу Гаусса-Остроградского получим:

$$\oiint\limits_S\left[\vec{E}_1\times\vec{H}_2\right]-\left[\vec{E}_2\times\vec{H}_1\right]\vec{n}\mathrm{d}S=$$
$$=\frac{4\pi}{c}\int\limits_V\left(\vec{j}_1^{\,e}\vec{E}_2-\vec{j}_1^{\,m}\vec{H}_2-\vec{j}_2^{\,e}\vec{E}_1+\vec{j}_2^{\,m}\vec{H}_1\right)\mathrm{d}V$$

Это соотношение и есть формулировка **леммы Лоренца**. Такие соотношения позволяют связывать решения двух разных задач, зная решение простой задачи, можно решить сложную.

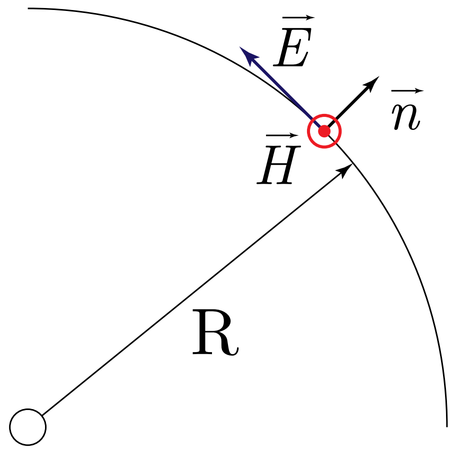


Рис. 14. К теореме взаимности

Теорема взаимности

Распространим объем $V\to\infty$ в лемме Лоренца. В таком случае поверхностью интегрирования S может быть сфера радиуса $R\to\infty$.

Источники обеих систем ограничены в пространстве. При большом удалении, поля от источников представляют собой сферические волны. У сферической волны, на бесконечности можно рассматривать ее малый участок как плоский, тогда волны будут чисто поперечными. Волновое сопротивление

среды:
$$\frac{E_\perp}{H_\perp} = \eta_{\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$
Выражение выше - приближение характер, однако при устремлении $R \to \infty$, его точность увеличивается. Тогда имеем:

$$\vec{E}_{1,2} = \eta_{\text{в}} \left[\vec{H}_{1,2} \times \vec{n}\right],$$

где $\vec{n}$ - направление распространения волны (внешняя нормаль к S). $\eta_{\text{в}}$ - одинакова для систем источников 1 и 2. Тогда справедливо:

$$\left[\vec{E}_1 \times \vec{H}_2\right] = \eta_{\text{в}} \left[\left[\vec{H}_1 \times \vec{n}\right] \times \vec{H}_2\right] = \eta_{\text{в}} \left(\vec{n}(\vec{H}_1, \vec{H}_2) - \vec{H}_2 \underbrace{(\vec{H}_1, \vec{n})}_{=0}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \left[\vec{E}_1 \times \vec{H}_2\right] &= \eta_{\text{в}}\vec{n}(\vec{H}_1, \vec{H}_2) \\ \left[\vec{E}_2 \times \vec{H}_1\right] &= \eta_{\text{в}}\vec{n}(\vec{H}_2, \vec{H}_1) \end{aligned}\right\} \left[\vec{E}_1 \times \vec{H}_2\right] - \left[\vec{E}_2 \times \vec{H}_1\right] \equiv 0$$

Т.е. левая часть в лемме Лоренца <u>при большом расстоянии</u> равна нулю. Это верно с точночтью до членов порядка $\frac{1}{R^2}$. Оставшийся в правой части интеграл разделим на два, таким образом, получаем формулировку **тоеремы взаимности**:

$$\int\limits_V \left(\vec{j}_1^e \vec{E}_2 - \vec{j}_1^m \vec{H}_2 - \vec{j}_2^e \vec{E}_1 + \vec{j}_2^m \vec{H}_1\right) \mathrm{d}V = 0$$
$$\int\limits_V \left((\vec{j}_1^e, \vec{E}_2) - (\vec{j}_1^m, \vec{H}_2)\right) \mathrm{d}V = \int\limits_V \left((\vec{j}_2^e, \vec{E}_1) - (\vec{j}_2^m, \vec{H}_1)\right) \mathrm{d}V$$

Эта теорема также используется для сведения сложных задач к простым. **Условия выполнения теоремы**:

- Среды должны быть линейными, ε, μ - не должны зависить от полей.
- Рассматриваем изотропную среду

10. Билет 10

11. Билет 11

12. Билет 12

13. Билет 13