

Disclaimer

Содержание

1. Билет 1	3
1.1. Гармонические волны в линиях передачи. Выражение для векторного потенциала. Дифференциальное уравнение для поперечной волновой функции $\varphi(\vec{r}_\perp)$. Понятия продольного и поперечного волнового числа. Выражения для полей ТЕ, ТМ, ТЕМ. Импедансная связь между поперечными компонентами электрического и магнитного полей и понятие поперечного волнового сопротивления	3
2. Билет 2	7
2.1. Граничные условия для поперечных волновых функций волн ТЕ, ТМ, ТЕМ типов в идеальной линии передачи. Математическая формулировка задачи описания волн ТЕ, ТМ, ТЕМ типов.	7
3. Билет 3	9
3.1. МИНИМУМ Дисперсионное уравнение для волн в идеальной ЛП. Критические частоты и длины волн. Зависимости длины волны, фазовой и групповой скорости от частоты. Распространяющиеся и нераспространяющиеся волны.	9
4. Билет 4	14
4.1. Медленные волны, направляемые плоским диэлектрическим слоем. Дифференциальное уравнение для поперечной волновой функции и его решения для областей внутри и вне слоя. Выражения для полей, граничные условия и дисперсионные (характеристические) уравнения для симметричных (чётных) волн типа ТМ	14
4.2. Главные (ТЕМ) волны в линиях передач. Условие существования ТЕМ волны. ТЕМ волна в коаксиальной линии (Картинка силовых линий, зависимость полей от координат).	18
5. Билет 5	22
5.1. Волны в прямоугольном металлическом волноводе. Спектр собственных волновых чисел волн ТЕ и ТМ типов. Структура поля низших типов волн	22
5.2. Затухание собственных колебаний в полном резонаторе, обусловленное потерями энергии в заполняющей среде	26
6. Билет 6	27

6.1.	Волны в круглом металлическом волноводе. Спектр собственных функций и поперечных волновых чисел волн ТЕ и ТМ типов. Структура поля низших типов волн.	27
6.2.	Метод решения задачи о возбуждении идеального полого резонатора сторонними переменным токами. Потенциальные и вихревые поля. Ортогональность полей собственных мод	33
7.	Билет 7	37
7.1.	Телеграфные уравнения для идеальной линии. Погонные параметры линии. Волновое уравнения, общий вид его решения. Понятие волнового сопротивления линии в терминах тока и напряжения	37
8.	Билет 8	39
8.1.	39
9.	Билет 9	40
9.1.	Затухание волн в линии передач, обусловленное потерями энергии в металлической стенке.	40
9.2.	Лемма Лоренца и теорема взаимности для двух систем монохроматических источников.	42
10.	Билет 10	46
10.1.	46
11.	Билет 11	47
11.1.	47
12.	Билет 12	48
12.1.	Общая постановка задачи о собственных электромагнитных колебаниях в полых резонаторах с идеально проводящими стенками. Действительность собственных частот идеального резонатора.	48
13.	Билет 13	49
13.1.	49

1. Билет 1

1.1. Гармонические волны в линиях передачи. Выражение для векторного потенциала. Дифференциальное уравнение для поперечной волновой функции $\varphi(\vec{r}_\perp)$. Понятия продольного и поперечного волнового числа. Выражения для полей ТЕ, ТМ, ТЕМ. Импедансная связь между поперечными компонентами электрического и магнитного полей и понятие поперечного волнового сопротивления

Линия передач - это любая цилиндрическая система. В них различают продольное z и поперечное $\vec{r}_\perp = r_\perp(r, \theta)$ направление. При описании таких систем проще использовать векторный потенциал \vec{A} , который должен удовлетворять уравнению Гельмгольца (для амплитуд):

$$\Delta \vec{A}^e + k^2 \vec{A}^e = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}^e = 0$$
$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}^e$$

0 потому что случай, где нет сторонних источников. Запишем поля в ЛП, когда волна бежит вдоль оси Oz :

$$\vec{E}(\vec{r}_\perp, z, \theta) = \vec{E}_0(\vec{r}_\perp) e^{i(\omega t - h z)},$$

где h - **продольное волновое число** (постоянная распространения). Реальное поля в таком случае записывается как:

$$E_{R_x} = \text{Re}\{E_x\} = |E_x(\vec{r}_\perp)| \cos(\omega t - h z + \varphi(\vec{r}_\perp))$$

Запишем векторный потенциал в следующем виде:

$$\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp) e^{-i h z} \vec{z}_0,$$

где $\varphi^e(\vec{r}_\perp)$ - **поперечная волновая функция**. Запишем теперь поля \vec{E} и \vec{H} через $\varphi^e(\vec{r}_\perp)$. Вспомним выражение полей через векторный потенциал:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}^e$$
$$\vec{E} = -\nabla \varphi_{\text{пот}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}^e}{\partial t} = \frac{1}{i k_0 \varepsilon \mu} (\nabla \text{div} + k^2) \vec{A}^e,$$

где $k = \frac{w}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$, $k_0 = \frac{w}{c}$. При подстановке выражения для \vec{A}^e , для компонент векторов в случае **ТМ** - волны получим (надо расписать такие вещи как $\text{div } \vec{A}^e$, $\nabla \text{div } \vec{A}^e$, $\text{rot } \vec{A}^e$):

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\varkappa^2}{ik_0\varepsilon\mu}\varphi^e(\vec{r}_\perp) \cdot e^{i(wt-hz)} \\ \vec{E}_\perp &= -\frac{h}{k_0\varepsilon\mu}\nabla_\perp\varphi^e(\vec{r}_\perp) \cdot e^{i(wt-hz)} \\ \vec{H}_\perp &= \frac{1}{\mu}[\nabla_\perp\varphi^e(\vec{r}_\perp) \times \vec{z}_0] \cdot e^{i(wt-hz)} \\ H_z &= 0 \end{aligned}$$

ТМ-волна - поперечная магнитная волна (Магнитное поле имеет только поперечную компоненту. Поле \vec{E} имеет и поперечное и продольное направление).

Потенциал \vec{A}^e , при любой зависимости от времени, должен удовлетворять волновому уравнению:

$$\Delta\vec{A}^e - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}^e}{\partial t^2} = 0$$

В нашем случае, когда векторный потенциал имеет вид $\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp)e^{-ihz}\vec{z}_0$, для гармонических полей справедливы следующие переходы:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow iw, \quad \Delta\vec{A}^e + k^2\vec{A}^e = 0, \quad k^2 = \frac{w^2}{c^2}\varepsilon\mu$$

Рассмотри для z -компоненты:

$$\Delta A_z^e + k^2 A_z^e = 0, \quad \Delta = \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Rightarrow -h^2, \quad \text{т.к. } A_z^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp)e^{-ihz}$$

$$\Delta_\perp\varphi^e + \underbrace{(k^2 - h^2)}_{\varkappa^2}\varphi^e = 0$$

$$\Delta_\perp\varphi^e + \varkappa^2\varphi^e = 0$$

\varkappa^2 - **поперечное волновое число**. Если поле удовлетворяет уравнению выше, то такое поле удовлетворяет уравнениям Максвелла.

Аналогично сделаем для **ТЕ** - волны.

ТЕ-волна - поперечная электрическая волна (Электрическое поле имеет только поперечную компоненту. Магнитное поле имеет и поперечное и

продольное направление). По принципу двойственности производим замены:

$$\vec{E} \rightarrow \vec{H}, \quad \vec{H} \rightarrow -\vec{E}, \quad \varepsilon \leftrightarrow \mu$$

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{\kappa^2}{ik_0\varepsilon\mu} \varphi^m(\vec{r}_\perp) \cdot e^{i(wt-hz)} \\ \vec{H}_\perp &= -\frac{h}{k_0\varepsilon\mu} \nabla_\perp \varphi^m(\vec{r}_\perp) \cdot e^{i(wt-hz)} \\ \vec{E}_\perp &= -\frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \varphi^m(\vec{r}_\perp) \times \vec{z}_0] \cdot e^{i(wt-hz)} \\ E_z &= 0 \end{aligned}$$

Вообще говоря, φ^e и φ^m могут быть различными, поэтому выше вместо φ^e записано φ^m . Аналогично для φ^m требуется выполнение:

$$\Delta_\perp \varphi^m + \kappa^2 \varphi^m = 0$$

ТЕ, ТМ волны - это решения уравнений Максвелла. однак может быть еще один тип решений - **ТЕМ** - волны. Рассмотрим случай $\kappa = 0$, $h = k$:

$$\begin{aligned} H_z &= E_z = 0 \\ \vec{E}_\perp &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \nabla_\perp \varphi \cdot e^{i(wt-kz)} \\ \vec{H}_\perp &= \frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \varphi \times \vec{z}_0] \cdot e^{i(wt-kz)} \\ \Delta_\perp \varphi &= 0 \end{aligned}$$

ТЕМ-волна - чисто поперечная волна (Электрическое поле имеет только поперечную компоненту, как и магнитное).

Что имеем в итоге:

- Поля выражаются через поперечную волновую функцию
- Продольные компоненты полей пропорциональны φ
- Поперечные компоненты полей пропорциональны $\nabla_\perp \varphi$

Т.е. если заданы φ^e, φ^m , то можно полностью найти поля. Из формул также видно следующее соотношение:

$$\vec{E}_\perp = \eta_{\perp B} [\vec{H}_\perp \times \vec{z}_0],$$

где $\eta_{\perp B}$ - **поперечное волновое сопротивление** - отношение между поперечными компонентами полей в бегущей волне $\eta_{\perp B} = \frac{E_\perp}{H_\perp}$. Для различных

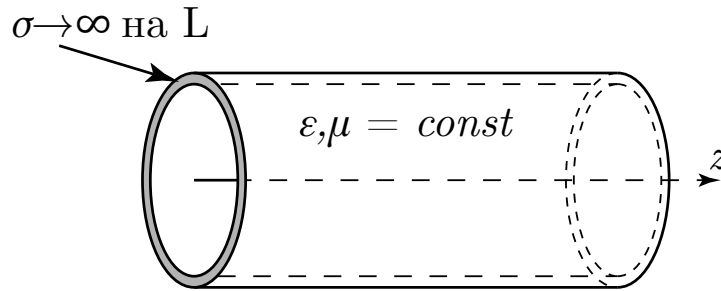
типов волн записывается как:

$$\text{TE}(+), \text{TM}(-) \text{ - волны: } \eta_{\perp\text{B}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(\frac{k}{h} \right)^{\pm 1}$$
$$\text{TEM} \text{ - волны: } \eta_{\perp\text{B}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Заметим, что в бегущей волне поля зависят от координат, а их отношение - $\eta_{\perp\text{B}}$ - нет. В стоячей волне это не так.

2. Билет 2

2.1. Граничные условия для поперечных волновых функций волн ТЕ, ТМ, ТЕМ типов в идеальной линии передачи. Математическая формулировка задачи описания волн ТЕ, ТМ, ТЕМ типов.



Рассмотрим случай идеального проводника, $\sigma \rightarrow \infty$ (Вообще говоря, идеальных проводников не бывает, однако условие идеальной проводимости можно записать в виде: $\sigma \gg w$ ($\delta \ll L$)). Вспомним граничные условия для полей на поверхности идеального проводника:

$$E_\tau|_S = 0, \quad H_n|_S = 0,$$

а также условие на поперечную волновую функцию:

$$\Delta_\perp \varphi^{e,m} + \kappa^2 \varphi^{e,m} = 0$$

Найдем граничные условия для $\varphi^{e,m}$ для идеальной ЛП.

ТМ-волна:

$$\text{т.к. } E_z \sim \varphi^e, \quad \vec{E}_{\perp\tau} \sim \frac{\partial \varphi^e}{\partial \tau}$$

$$\text{и } E_z = 0, \quad E_{\perp\tau} = 0$$

$$\text{то } \varphi^e(\vec{r}_\perp)|_S = 0$$

- это граничное условие Дирихле

ТЕ-волна:

$$\text{т.к. } \vec{E}_{\perp\tau} \sim [\nabla_\perp \varphi^m(\vec{r}_\perp) \times \vec{z}_0]_\tau$$

$$\text{и } E_{\perp\tau} = 0$$

$$\text{то } \frac{\partial \varphi^m}{\partial n}|_S = 0$$

ТЕМ-волна:

$$\text{т.к. } \vec{E}_{\perp\tau} \sim \nabla_\perp \varphi^m(\vec{r}_\perp)$$

$$\text{то } \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}|_S = 0 \Rightarrow \varphi|_S = \text{const} = C_i$$

Отметим, что на разных поверхностях проводников постоянная C_i может быть разной.

Математическая формулировка задач для описания волн.

ТМ. Необходимо решить:

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} \varphi^e + \kappa^2 \varphi^e &= 0 \\ \varphi^e|_L &= 0, L - \text{граничный контур} \end{aligned}$$

ТЕ. Необходимо решить:

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} \varphi^m + \kappa^2 \varphi^m &= 0 \\ \frac{\partial \varphi^m}{\partial n}|_L &= 0 \end{aligned}$$

ТЕМ. Необходимо решить:

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} \varphi^m &= 0 \\ \varphi|_{L_i} &= C_i \end{aligned}$$

Задачи ТЕ, ТМ волн - аналогичны задачам с мембраной, где граница мембраны закреплена неподвижно, а ТЕМ задачу можно назвать «электростатической». Это задачи на нахождение собственных функций

$$\varphi_1^{e,m}(\vec{r}_{\perp}), \varphi_2^{e,m}(\vec{r}_{\perp}), \dots, \varphi_i^{e,m}(\vec{r}_{\perp})$$

и собственных чисел

$$\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_i$$

Если ЛП идеальна, то спектр собственных значений и функций бесконечен.

3. Билет 3

3.1. **МИНИМУМ** Дисперсионное уравнение для волн в идеальной ЛП. Критические частоты и длины волн. Зависимости длины волны, фазовой и групповой скорости от частоты. Распространяющиеся и нераспространяющиеся волны.

Дисперсионное соотношение

$$\kappa^2 = k^2 - h^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu - h^2$$

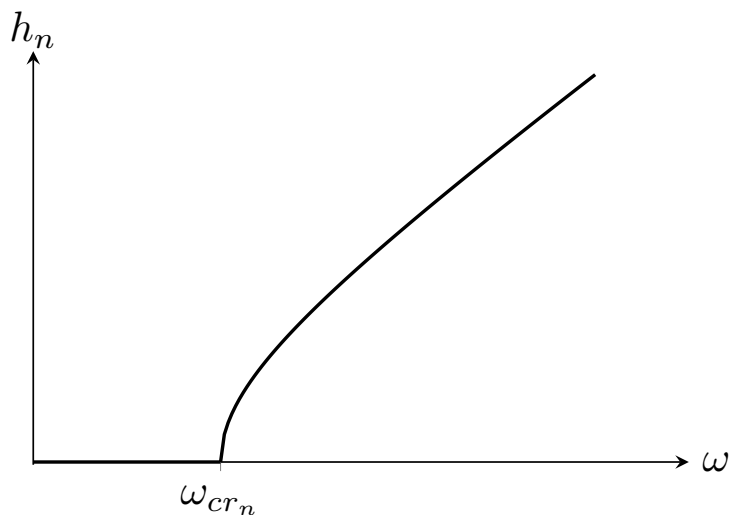


Рис. 1. Зависимость реальной части поперечного волнового числа от частоты

Где κ – поперечное волновое число, а h – продольное волновое число.

Любая мода в линии передачи характеризуется поперечным волновым числом, а поперечное волновое число определяет продольное.

Можем ввести критическую длину волны (продольное волновое число h равно нулю):

$$\begin{aligned}\kappa^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \\ \omega_{cr} &= \frac{\kappa c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \\ \lambda &= \frac{2\pi c}{\omega_{cr}} = \frac{2\pi}{\kappa \sqrt{\varepsilon \mu}}\end{aligned}$$

$\omega < \omega_{cr}$ дисперсионное уравнения не имеет действительных решений – режим нераспространяющейся волны.

При $\omega > \omega_{cr}$ – режим распространяющейся волны.

Если волна бежит вправо, то $h > 0$; если бежит влево, то $h < 0$

$$Re\vec{E}, Re\vec{H} \sim \cos(\omega t - hz)$$

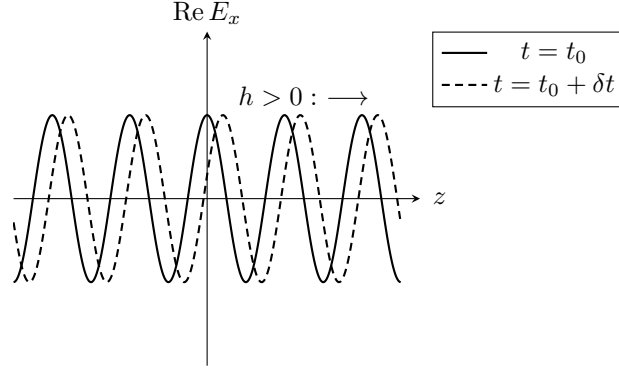


Рис. 2. Распространение волны ($h > 0$)

При $\omega < \omega_{cr}$

$$h = \pm i|h|$$

$$Re E_x \sim \cos(\omega t + \varphi_0) \exp\{\mp|h|z\}$$

Бегучести нет. Зависимость экспонентальная

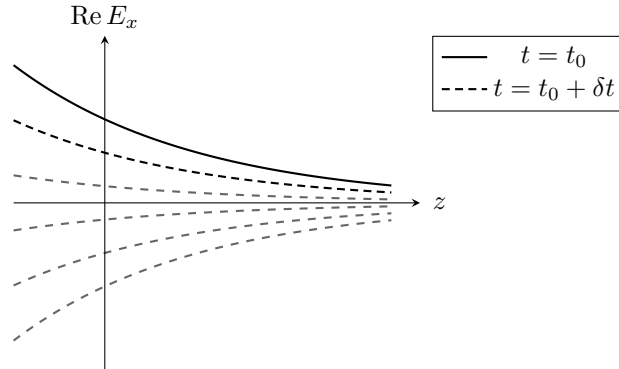


Рис. 3. Режим нераспространения ($h < 0$)

Картинка зависит от способа создания волны, то есть у экспоненты «+» или «-». В зависимости от того, где источник можем сказать, куда бежит волна. То есть определить знак.

Источник может порождать несколько мод, но не все, а какие-то конкретные. Изобразим числовую ось. Пусть задана ω , а то есть $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu}$

Если $k < \kappa_1$ - все моды нераспространяющиеся.

Когда k перейдёт через κ_1 появится низшая мода.

Когда перейдём через κ_2 появится ещё одна критическая частота.

!!Можно дополнить описание числовой прямой!!

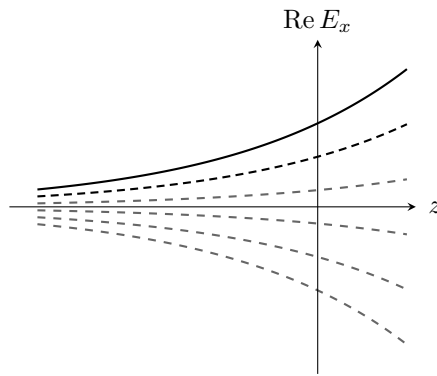


Рис. 4. Экспоненциальное нарастание амплитуды (при $h < 0$)

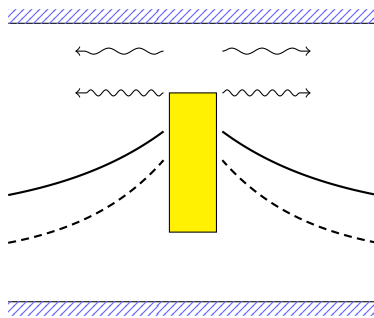
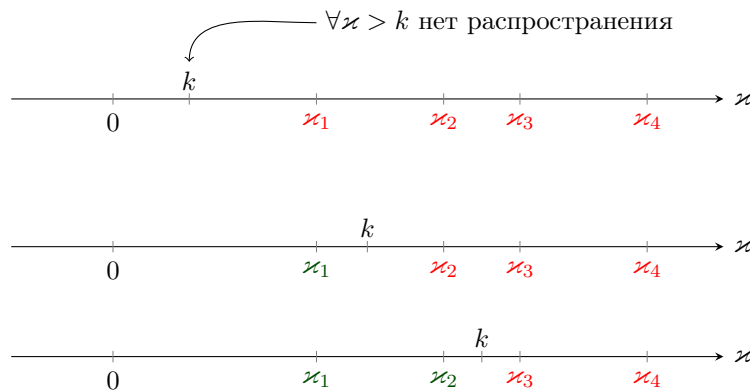


Рис. 5. Моды в линии передачи с источником



Кинематические соотношения - определяют кинематические параметры волны.

- 1) Временной период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- 2) Длина волны в волноводе (подразумевают линию передачи или трубу, когда говорят волновод)

$$\lambda_v = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \kappa^2}} = \frac{2\pi}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{k^2}}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2 r^2}{\omega^2}}} > \lambda_0$$

Когда $\omega \rightarrow \omega_{cr}$ $\lambda_v \rightarrow \infty$

λ_0 - длина волны в пространстве без волновода в той же среде.

λ_v - пространственный период.

- 3) Фазовая скорость - скорость перемещения плоскости постоянной фазы.

Поверхность постоянной фазы - это когда фаза константа.

$$\Phi = \omega t - hz + \varphi_0 = \text{const}$$

При данном времени можно найти выражение для поверхности постоянной фазы:

$$z = \frac{\omega t + \varphi_0}{h}$$

Координата будет перемещаться со скоростью:

$$v_f = \frac{\omega}{h}$$

$$v_f = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - \varkappa^2}} = \frac{\omega}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{\varkappa^2}}} = \frac{\omega}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{cr}^2}{\omega^2}}} > v_f^{(0)}$$

$$v_f^{(0)} = \frac{c}{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{k}$$

Фазовая скорость может быть больше скорости света.

- 4) Групповая скорость - скорость перемещения квазимонохроматического волнового пакета.

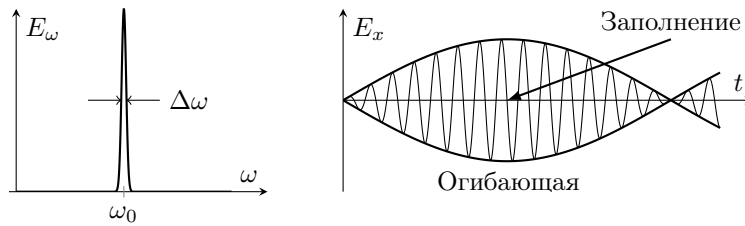


Рис. 6. Квазимонохроматический волновой пакет

Сигнал характеризуется высокочастотным заполнением и огибающей.

По сути это радиоимпульс.

Пакет движется со скоростью $v_{gr} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{\omega=\omega_0}$ - это при малом или отсутствующем поглощении. (Это в пространстве, а не в линии передачи). При большом поглощении это понятие теряет смысл. По мере перемещения по волноводу форма сигнала будет меняться.

$v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial h}|_{\omega=\omega_0}$ - формула для волновода.

$$k^2 = h^2 + \kappa^2$$

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}$$

Берём дифференциал от правой и левой части. κ не зависит от частоты.

$$2kdk = 2h dh$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial h} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \frac{h}{k}$$

$$h = + \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu - \kappa_n^2}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial h} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \frac{c}{\omega \sqrt{\varepsilon \mu}} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu - \kappa_n^2} = \frac{v_f^{(0)^2}}{v_f}$$

$$v_f = \frac{\omega}{h}$$

$$v_f^{(0)} = \frac{c}{\omega \sqrt{\varepsilon \mu}}$$

$$v_f v_{gr} = v_f^{(0)^2}$$

$$v_{gr} = v_f^{(0)} \sqrt{1 - \frac{\omega_{cr}^2}{\omega^2}}$$

Всё это справедливо для сред без временной дисперсии.

$$\varepsilon \neq f(\omega), \mu \neq f(\omega)$$

$v_{gr} < c$ - она несёт информацию.

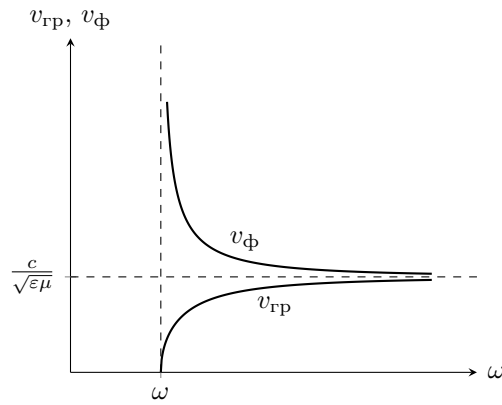


Рис. 7. Распространение волнового пакета

4. Билет 4

4.1. Медленные волны, направляемые плоским диэлектрическим слоем. Дифференциальное уравнение для поперечной волновой функции и его решения для областей внутри и вне слоя. Выражения для полей, граничные условия и дисперсионные (характеристические) уравнения для симметричных (чётных) волн типа ТМ

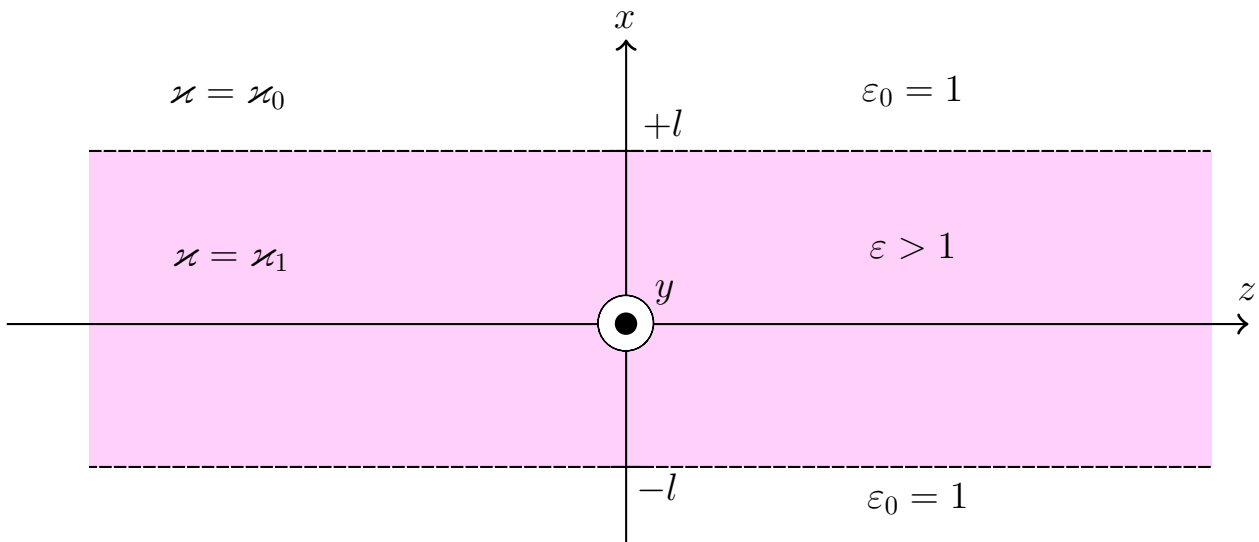


Рис. 8. Диэлектрический слой

Рассмотрим задачу о распространении волны вдоль плоского диэлектрического слоя. Так как это бесконечный плоский слой, то $\frac{\partial}{\partial y} = 0$: $\vec{E}, \vec{H} =$

$\vec{E}(t, x, z), \vec{H}(t, x, z)$. Будем искать решение в виде

$$\vec{E} = \vec{F}(x) \cdot e^{i(\omega t - hz)}$$

Теперь у нас будут другие граничные условия. Нам придётся решать уравнения Максвелла во всей среде – в трёх областях: вне слоя сверху, снизу и в слое, а затем сшивать решения.

Введём поперечную волновую функцию $\varphi(x)$:

$$\Delta_{\perp} \varphi + \kappa^2 \varphi = 0, \quad \kappa^2 = k_0^2 \varepsilon \mu - h^2$$

h должно быть одинаковым в областях 0 (вне слоя) и 1 (в слое), иначе мы заведомо не сможем удовлетворить граничным условиям: количество гребней волн в разных областях не совпадёт. Значит, $h = \text{const}$.

В области 1:

$$\kappa_1^2 = k_0^2 \varepsilon - h^2, \quad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \kappa_1^2 \varphi = 0$$

В области 2:

$$\kappa_0^2 = k_0^2 - h^2, \quad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \kappa_0^2 \varphi = 0$$

Отсюда сразу следует, что $\kappa_1^2 = \kappa_0^2 + k_0^2(\varepsilon - 1)$.

Сначала найдём решение вне слоя. Волна должна быть локализована – не переносить энергию в поперечном направлении. Для этого нужно потребовать, чтобы

$$\kappa_0^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa_0^2 = -p^2, \quad \kappa_0^2 = ip \quad \Rightarrow \quad \varphi \sim e^{\pm px}$$

Чтобы удовлетворить локализованности, над слоем должно быть $\varphi = c_2 e^{-px}$, а под слоем $\varphi = c_2 e^{px}$.

Теперь найдём решение в слое. Пусть $\kappa_1^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon > 1$. Тогда

$$\varphi = A_1 \cos \kappa_1 x + A_2 \sin \kappa_1 x$$

ТМ волны в плоском слое. Запишем поля через волновую функцию, как мы это делали в самом начале курса:

$$E_z = \frac{\kappa^2}{ik_0 \varepsilon} \varphi, \quad E_x = -\frac{h}{k_0 \varepsilon} \frac{d\varphi}{dx}, \quad H_y = -dv \varphi$$

E_y, H_x нет, так как они пропорциональны $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$. На границе диэлектрика у нас должны быть непрерывны тангенциальные компоненты полей E, H в точках $x = \pm l$.

Граничные условия для E_z (первая формула) и для H_y (вторая):

$$\frac{\kappa_1^2 \varphi(l-0)}{\varepsilon}, \quad \frac{d\varphi(l-0)}{dx} = \frac{d\varphi(l+0)}{dx}$$

Чётные и нечётные волны. Целесообразно для упрощения расчётов разделять чётные волны ($f(x) = f(-x) \Rightarrow \varphi = A \sin \kappa_1 x$), и нечётные ($f(x) = -f(x) \Rightarrow \varphi = A \cos \kappa_1 x$). Тогда для чётных волн граничные условия примут вид

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \kappa_1^2 A \sin \kappa_1 l = -p^2 C e^{-pl} \\ \kappa_1^2 A \cos \kappa_1 l = -p C e^{-pl} \end{cases}$$

Условие разрешимости этой системы – определитель её равен нулю:

$$\begin{cases} \frac{\kappa_1 l}{\varepsilon} \operatorname{tg} \kappa_1 l = pl \\ (\kappa_1 l)^2 + (pl)^2 = (k_0 l)^2 (\varepsilon - 1) \end{cases}$$

Без вывода приведём такие же выражения для нечётных волн:

$$\begin{cases} -\frac{\kappa_1 l}{\varepsilon} \operatorname{ctg} \kappa_1 l = pl \\ (\kappa_1 l)^2 + (pl)^2 = (k_0 l)^2 (\varepsilon - 1) \end{cases}$$

Это трансцендентные уравнения, и просто так их решить нельзя. Но в этом случае оказывается целесообразным применить графический метод решения, который даст нам ключевую информацию о появлении мод. Построим оба уравнения в координатах $(pl, \kappa_1 l)$:

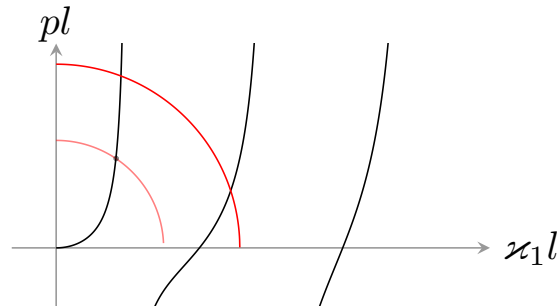


Рис. 9. Появление мод

Здесь радиус окружности $E = k_0 l \sqrt{\varepsilon - 1}$. Если $R < \pi$, то есть только один корень: мода TM_{00} . Когда окружность пересекает функцию в $pl = 0$, это критическая частота данной моды: так как $p = 0$ отвечает нелокализованной моде. Первый индекс моды связан с количеством корней уравнения, а второй у нас будет всегда 0 – мы не рассматривали зависимость от y .

Низшая мода TM_{00} . Построим графики поперечного распределения поля:

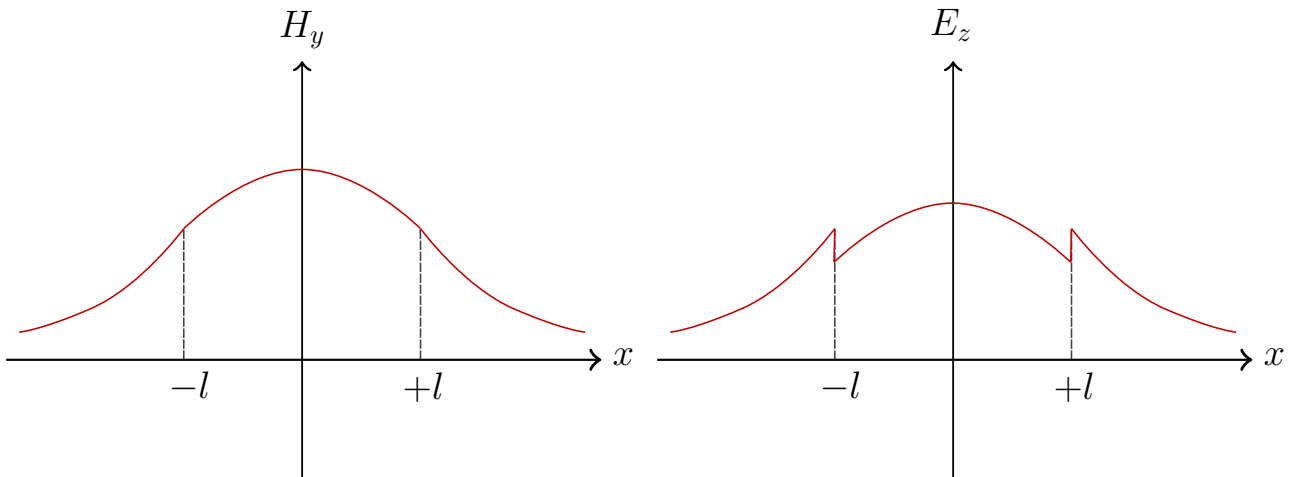


Рис. 10. Поле H_y непрерывно, а E_z терпит скачок, так как непрерывна D_n

ТЕ-волны. Для них

$$\text{чет: } \kappa_1 l \operatorname{tg} \kappa_1 l = pl, \quad \text{нечет: } -\kappa_1 l \operatorname{ctg} \kappa_1 l = pl$$

ТЕ волны возможны, только если $R > \frac{m\pi}{2}$.

Медленные волны. Почему мы называем эти волны медленными? Посмотрим на дисперсионное уравнение:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu + p^2 > k^2 \quad \Rightarrow \quad v_f = \frac{\omega}{h} < \frac{\omega}{k} = c.$$

Эти волны медленные относительно волн в вакууме: фазовая скорость меньше скорости света.

4.2. Главные (ТЕМ) волны в линиях передач. Условие существования ТЕМ волны. ТЕМ волна в коаксиальной линии (Картинка силовых линий, зависимость полей от координат).

У ТЕМ-волн поперечное волновое число $\kappa = 0$:

$$\kappa = 0 \Rightarrow h = k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}$$

Поля таких волн выражаются следующим образом через функцию φ :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\perp} &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \nabla_{\perp} \varphi \\ \vec{H}_{\perp} &= -\frac{1}{\mu} [\nabla_{\perp} \varphi, \vec{z}_0] \end{aligned}$$

При этом выполняются **граничные условия**: на каждом из проводников (допустим, есть набор проводников, вдоль которых распространяется волна)

$$\varphi|_{l_i} = C_i,$$

причем константа не обязана быть одна для всех проводников.

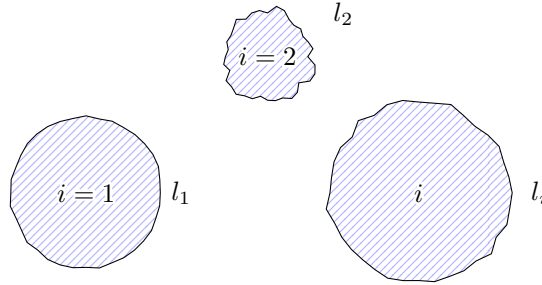


Рис. 11. Набор проводников в задаче

Внутренняя задача. Пусть у нас есть только один проводник, в котором есть цилиндрическая полость (рис. 12). Рассмотрим внутреннюю задачу, т.е. распространение волны внутри цилиндрической полости.

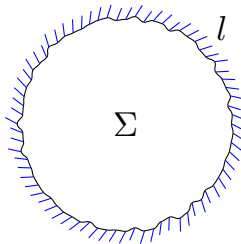


Рис. 12. Случай одного проводника

Оказывается, для граничного условия $\varphi_{\perp}|_l = C_1$ существует только тривиальное решение $\varphi_{\perp} = C_1$. Для доказательства необходимо воспользоваться теоремой о минимуме и максимуме для гармонической функции.

Внешняя задача. Зададимся вопросом о решении той же задачи:

$$\Delta_{\perp}\varphi = 0, \quad \varphi|_l = \text{const}$$

Только теперь будем рассматривать её в области вне проводника

Для начала рассмотрим задачу попроще, поле нити (рис. 13). Её решение известно:

$$\Delta_{\perp}\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \sim \ln r$$

Характер убывания полей здесь $E_r \sim \frac{1}{r}$, а для магнитного поля в силу импедансного соотношения $\frac{E_r}{H_{\varphi}} = \eta_{\perp\text{в}} = 1$, $H_{\varphi} \sim \frac{1}{r}$:

$$E_r = H_{\varphi} \sim \frac{1}{r}$$

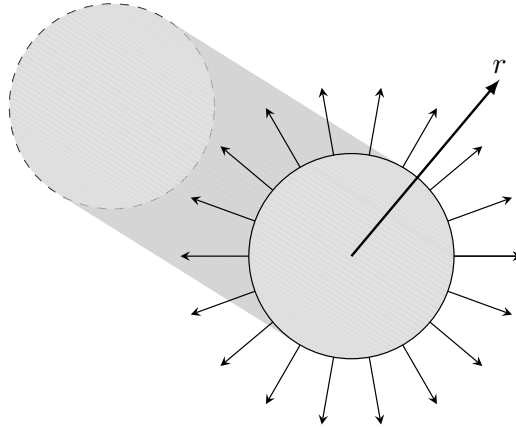


Рис. 13. Поле бесконечной проводящей нити

Посмотрим на поведение полей при $r \rightarrow \infty$. Говорят, нужно поставить граничные условия (или закон убывания) на бесконечности. Чем плох закон $\frac{1}{r}$?

Посчитаем средний по времени поток энергии через поперечное сечение, в котором распространяется волна. Сечение бесконечно, за исключением конечной площади проводника.

Сначала вычислим вектор Пойнтинга (средний по времени и в проекции на z):

$$\overline{S}_z = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(E_r \cdot H_{\varphi}^*) \sim \frac{1}{r^2}$$

$$\Pi = \iint_{\Sigma} \bar{S}_z ds \sim \iint_{\Sigma} \frac{1}{r^2} (2\pi r dr) \sim \int_a^{\infty} = \ln \frac{\infty}{a} = \infty$$

Интеграл расходится на бесконечности. Говорят, что расходимость носит логарифмический характер. Получили бесконечную мощность волны: такую волну невозможно создать реальным источником — волна не удовлетворяет критерию энергетической реализуемости.

Можно сделать важный вывод: **вдоль одиночного проводника ТЕМ-волна с конечной энергией распространяться не может**. Распространение возможно, если количество проводников будет больше одного. Например, в линии из двух проводников (рис. 14) ТЕМ-волна уже возможна.

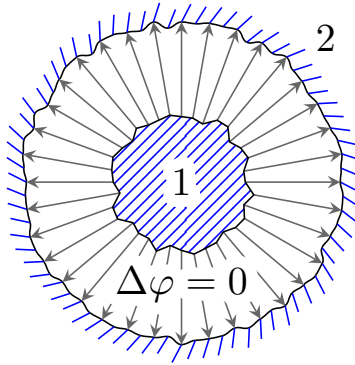


Рис. 14. Закрытая линия из двух проводников

Можно модифицировать задачу с нитью (рис. 15):

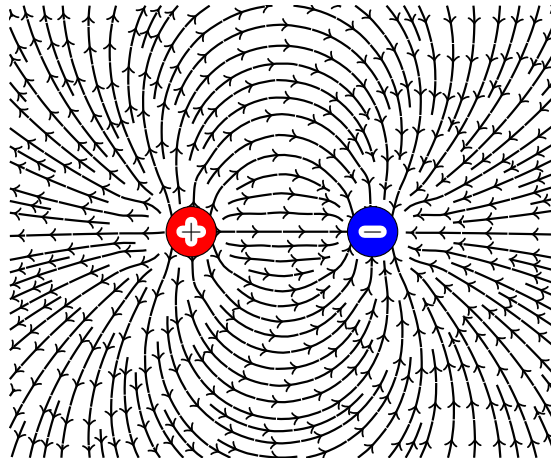


Рис. 15. Поле двухпроводной линии

В поперечном разрезе это поле диполя, а оно спадает быстрее, $\sim \frac{1}{r^2}$. Тогда

$$E_{\perp} \sim H_{\perp} \sim \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_z \sim \frac{1}{r^4}, \quad \Pi \sim \int_{L_{\text{харак}}}^{\infty} \frac{1}{r^3} dr$$

Мощность волны конечна, значит, в модифицированной задаче ТЕМ-волна энергетически реализуема.

Конечный вывод: ТЕМ-волна в идеальной линии передачи возможна, если число проводников ≥ 2 .

Например, в коаксиальной линии (рис. 16) ТЕМ-волна возможна.

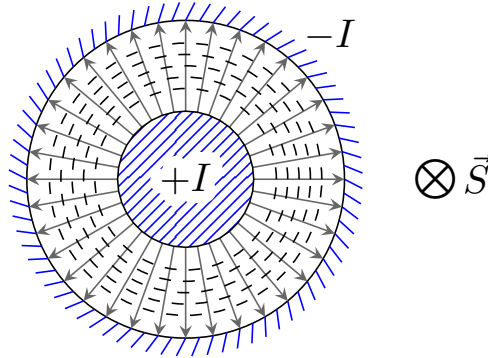


Рис. 16. Поле в коаксиальном кабеле

Зададимся вопросом: возможны ли в такой линии ТЕ и ТМ волны? Сформулируем утверждение, пока без доказательства: **в открытых линиях передачи ТЕ и ТМ волны не существуют.**

5. Билет 5

5.1. Волны в прямоугольном металлическом волноводе. Спектр собственных волновых чисел волн ТЕ и ТМ типов. Структура поля низших типов волн

Решение для ТМ-волн. Займемся решением ТМ-волны в прямоугольном волноводе (рис. 17). Условимся что $a > b$. Эта задача поиска собственных функций φ^e и собственных значений κ :

$$\Delta_{\perp} \varphi^e + \kappa^2 \varphi^e = 0, \quad \varphi^e|_l = 0$$

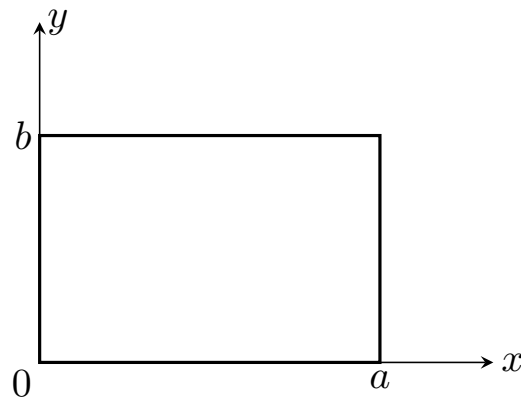


Рис. 17. Прямоугольный волновод

В матфизике эта задача о колебании мембраны с закрепленным краем. Она решается разделением переменных:

$$\varphi^e = X(x) \cdot Y(y)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial y^2} + \kappa^2 \varphi^e = 0 \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{XY} \quad \Rightarrow \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \kappa^2 = 0$$

Тут надо произнести магическую фразу: так как первое слагаемое функция от x , второе функция от y , и их сумма равна константе для любых x, y , значит – сами слагаемые тоже какие-то константы:

$$\frac{X''}{X} = -\kappa_x^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -\kappa_y^2$$

Определив таким образом константы, мы получаем:

$$\kappa_x^2 + \kappa_y^2 = \kappa^2$$

Пока мы не нашли само κ . Это собственное число, и оно подлежит определе-

нию. Прежде чем его найти, найдем собственные функции, решая уравнения

$$X'' + \kappa_x^2 X = 0, \quad Y'' + \kappa_y^2 Y = 0$$

Это уравнения известного вида, их решение

$$X = C_1 \cdot \cos \kappa_x x + C_2 \cdot \sin \kappa_x x \quad Y = A_1 \cdot \cos \kappa_y y + A_2 \cdot \sin \kappa_y y$$

Нужно удовлетворить граничным условиям:

$$\varphi^e|_{y=0} = 0 \Rightarrow X(x)Y(0) = 0 \quad \forall x \Rightarrow Y(0) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

$$\varphi^e|_{x=0} = 0 \Rightarrow X(0)Y(y) = 0 \quad \forall y \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \varphi^e|_{x=a} = 0 &\Rightarrow X(a)Y(y) = 0 \quad \forall y \Rightarrow \\ \Rightarrow X(a) = 0 &\Rightarrow \kappa_x a = m\pi, \quad m = \emptyset, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Поскольку $m = 0$ дает тривиальное решение, мы его откидываем.

$$\begin{aligned} \varphi^e|_{y=b} = 0 &\Rightarrow X(x)Y(b) = 0 \quad \forall x \Rightarrow \\ \Rightarrow Y(b) = 0 &\Rightarrow \kappa_y b = n\pi, \quad n = \emptyset, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Теперь мы получили выражения для X и Y :

$$\begin{aligned} X_m(x) &= C_2 \cdot \sin \frac{\pi m x}{a} \\ Y_n(x) &= A_2 \cdot \sin \frac{\pi n y}{b} \end{aligned}$$

Теперь можем окончательно записать выражения для собственных функций и собственных значений в решении ТМ-волн:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{mn}^e &= B_{mn} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} \\ \kappa_{mn}^2 &= \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \end{aligned} \right\}, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Решение для ТЕ-волн. Приведем решение без вывода:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{mn}^m &= B_{mn} \cos \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b} \\ \kappa_{mn}^2 &= \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \end{aligned} \right\}, \quad m, n = (0), 1, 2, \dots \quad (1)$$

Важным отличием является то, что теперь одно из чисел m, n может быть равно нулю (решение от этого не станет тривиальным).

Низшая мода. По определению, низшая мода – та, у которой минимальное поперечное волновое число. Так как мы предполагали, что $a > b$, то в нашем случае это мода TE_{10} :

$$\kappa_{10} = \frac{\pi}{a} \quad \rightarrow \quad \omega_{cr10} = \frac{\kappa_{10} \cdot c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Именно моду TE_{10} чаще всего используют на практике в линиях передачи.

Рассмотрим перпендикулярную структуру поля TE_{10} -волны. Нарисуем силовые линии полей E и H в плоскости (x, y) – перпендикулярной распространению волны (рис. 18)

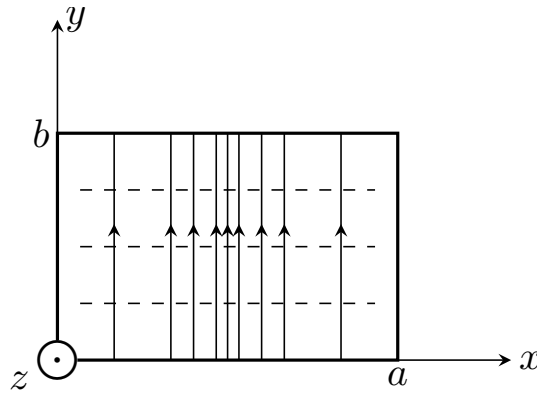


Рис. 18. Структура полей \vec{E} и \vec{H} (\vec{H} изображено пунктиром)

На границах волновода поле E равно нулю (в силу условия $E_\tau = 0$). Поле \vec{E} можем получить из уравнений (1),(4.2):

$$\vec{E} = \vec{E}_\perp = \vec{y}_0 E_0 \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \exp[i(\omega t - hz)],$$

где

$$h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

Поле H можно найти из импедансного соотношения (для TE -волны):

$$\frac{E_y}{H_x} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{k}{h}$$

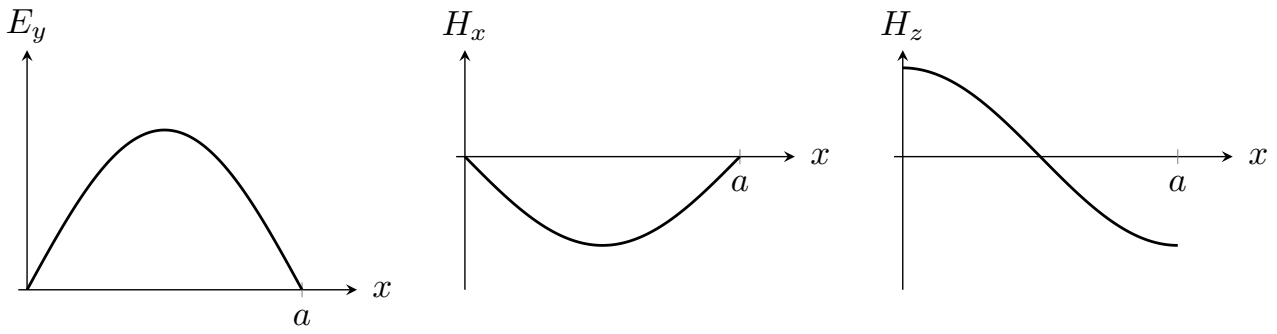


Рис. 19. Поперечная структура полей \vec{E} и \vec{H} (мода TE)

За перенос энергии отвечают именно поперечные компоненты поля. Компонента поля $H_z \sim \cos \frac{\pi a}{x}$, а также сдвинута по фазе во времени.

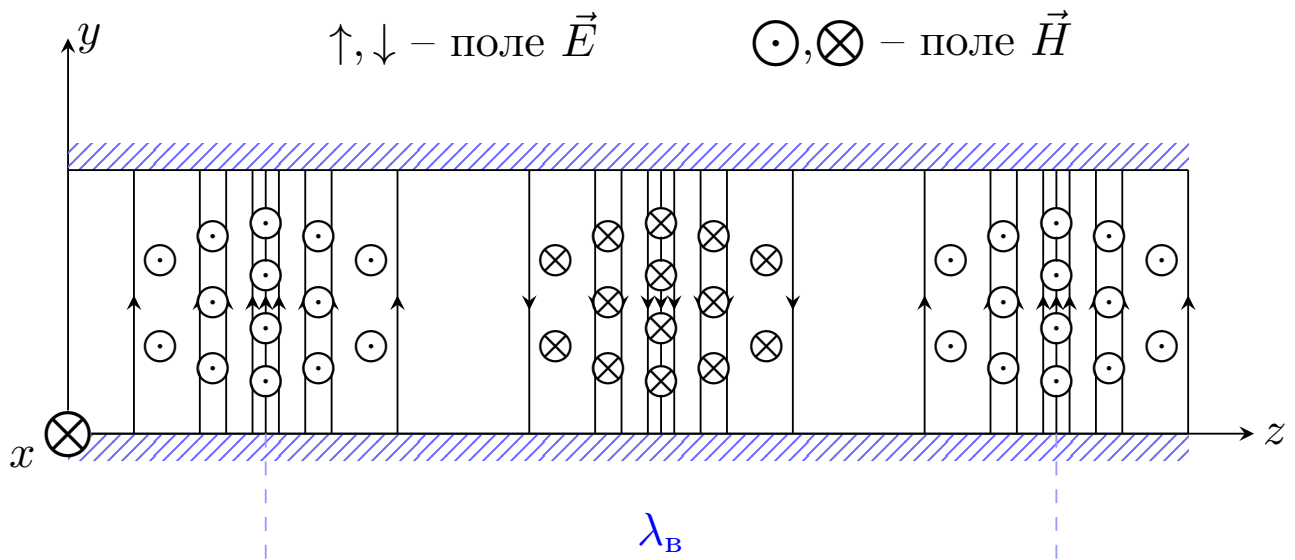


Рис. 20. Продольная структура полей \vec{E} и \vec{H} (мода TE₁₀)

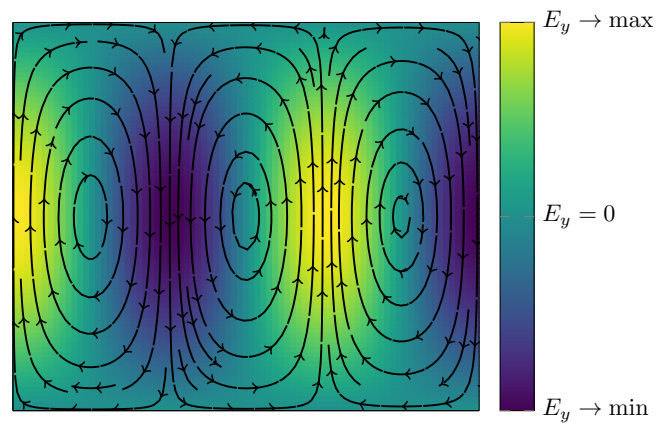


Рис. 21. Структура поля \vec{H} (изображены силовые линии) и поля \vec{E} (напряженность изображена цветом) волны TE₁₀ в прямоугольном волноводе

Высшие моды. В зависимости от соотношения между a и b , порядок мод может быть разным (он определяется величиной поперечного волнового числа). Некоторые высшие моды:

$$\begin{aligned} \text{TE}_{11} : \quad \kappa_{11} &= \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} \\ \text{TE}_{20} : \quad \kappa_{20} &= \frac{2\pi}{a} \\ \text{TE}_{01} : \quad \kappa_{11} &= \frac{\pi}{b} \end{aligned}$$

5.2. Затухание собственных колебаний в полном резонаторе, обусловленное потерями энергии в заполняющей среде

Чтобы его найти, нужно действовать стандартно: представить $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$, аналогично $\mu = \dots$. Связь частот определяется формулой

$$\omega = \frac{\omega^{(0)}}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где $\omega^{(0)}$ – спектр незаполненного резонатора. Отсюда найдется ω'' ($\omega = \omega' + i\omega''$), и тогда затухание будет происходить как

$$E, H \sim e^{i\omega t} \sim e^{i\omega' t} \cdot e^{-i\omega'' t}$$

При $\mu = 1$ оказывается, что $\omega'' \sim -\varepsilon''$. Это не ошибка, так как $\varepsilon'' < 0$. Для прямоугольного резонатора можно построить $\text{Re } E_x(t)$, это будет синусоида, вписанная в огибающую – убывающую экспоненту:

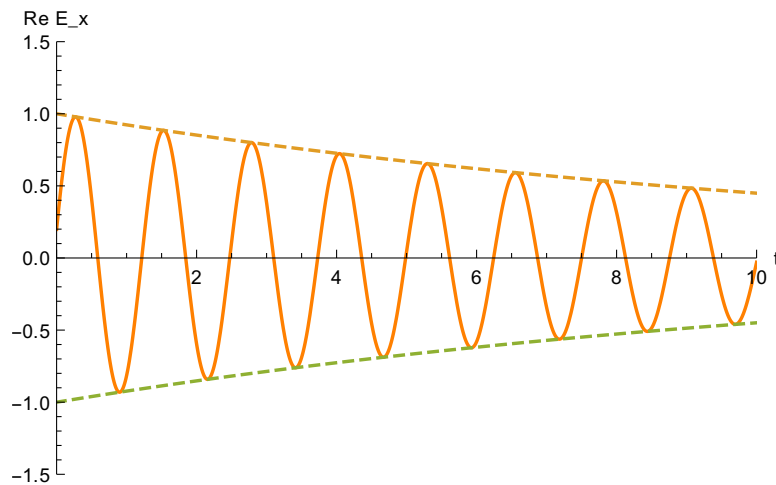


Рис. 22. Затухание поля в резонаторе со временем

6. Билет 6

6.1. Волны в круглом металлическом волноводе. Спектр собственных функций и поперечных волновых чисел волн ТЕ и ТМ типов. Структура поля низших типов волн.

Наиболее часто на практике используются прямоугольные, круглые и коаксиальные волноводы. Займемся изучением круглых волноводов.

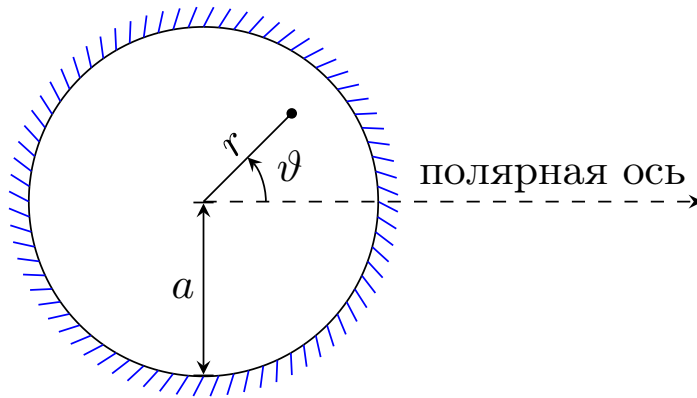


Рис. 23. Геометрия круглого волновода

Область определения задачи $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Каждая точка в сечении волновода задается двумя координатами (r, ϑ) .

Будем решать задачу (пока в общем виде, без граничных условий):

$$\Delta_{\perp} \varphi + \kappa^2 \varphi = 0$$

Здесь лапласиан в цилиндрических координатах

$$\Delta_{\perp} \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2}$$

Также как и при поиске поля в прямоугольном волноводе, воспользуемся методом разделения переменных:

$$\varphi = R(r) \cdot \Theta(\vartheta)$$

Применив стандартным образом разделение переменных (подставив φ как $R \cdot \Theta$ в решаемое уравнение и домножив уравнение слева и справа на $\frac{r^2}{R\Theta}$), получим

$$\underbrace{r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \kappa^2 r^2}_{f(r)=+C_1} + \underbrace{\frac{\Theta''}{\Theta}}_{g(\vartheta)=-C_1} = 0$$

Заметим, что комбинация из первых трех слагаемых может зависеть только от r , последнее слагаемое может зависеть только от ϑ , а их сумма ни от чего не зависит - значит и первые три слагаемых в сумме ни от чего не зависят и равны некой константе $-C_1$, тогда последнее слагаемое (которое тоже ни от чего не зависит) равно $+C_1$.

Таким образом, разделение переменных успешно завершилось.

Уравнение относительно Θ . Такое уравнение запишется в виде

$$\Theta'' + C_1\Theta = 0$$

Решение этого уравнения (гармонического осциллятора) нам хорошо известно:

$$\Theta = A_1 \cos(\sqrt{C_1}\vartheta) + A_2 \sin(\sqrt{C_1}\vartheta)$$

Сразу заметим, что отсюда следует, что $\sqrt{C_1} = m$ - целое число. Действительно, в силу симметрии задачи

$$\Theta(\vartheta) = \Theta(\vartheta + 2\pi),$$

а такое возможно только при целой частоте $\sqrt{C_1}$.

Уравнение относительно r . Его можно переписать, если учесть что $\sqrt{C_1} = m$, тогда

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(\kappa^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R = 0$$

Можно ввести замену переменных $x = \kappa r$, тогда

$$R''_{xx} + \frac{1}{x}R'_x + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)R = 0, \quad R = R(x)$$

Это известное уравнение Бесселя. Его решение получается в виде специальных, цилиндрических функций Бесселя:

$$R = B_q \cdot J_m(x) + B_2 \cdot N_m(x)$$

J_m называют функциями Бесселя первого рода, или просто функциями Бесселя, а N_m функциями Бесселя второго рода, или функциями Неймана. Их поведение хорошо изучено, не хуже чем поведение синуса и косинуса. Рассмотрим некоторые характерные моменты. Первый максимум функции Бесселя второго порядка лежит на пересечении функций Бесселя первого и нулевого порядков. Это свойство функций Бесселя. Еще одно свойство заключается в том, что ноль функции Бесселя первого порядка совпадает с точкой минимума функции Бесселя нулевого порядка. Функции Неймана мы пока не

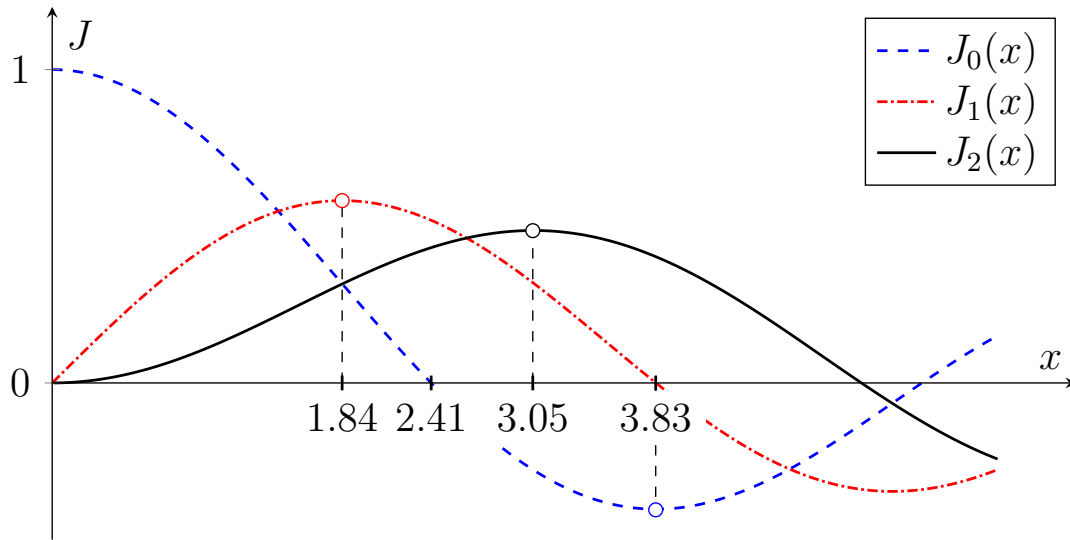


Рис. 24. Функции Бесселя первого рода

будем рассматривать подробно. Это вызвано тем, что у всех функций Неймана есть особенность: в нуле они расходятся, и поэтому в нашем решении, чтобы решение в нуле было конечно, придется положить $B_2 = 0$.

Вообще говоря, в коаксиальной линии это будет не так, потому что там область определения задачи не включает $r = 0$, и будет $B_2 \neq 0$.

Итак, наше решение теперь можно переписать в виде

$$\varphi_m = J_m(\kappa r)(A_1 \cos(m\vartheta) + A_2 \sin(m\vartheta))$$

Здесь константу B_1 мы уже не пишем, предполагая что она сидит в константах A_1, A_2 . Иногда, для краткости, комбинацию синуса и косинуса пишут так:

$$A_1 \cos(m\vartheta) + A_2 \sin(m\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos m\vartheta \\ \sin m\vartheta \end{pmatrix}$$

Перейдем к удовлетворению граничных условий.

Граничные условия ТЕ-волн. На границе волновода должна зануляться производная поперечной функции:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial J_m(\kappa r)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0$$

Это значит, что

$$J'_m(x) = 0, \quad x = \kappa a$$

Мы можем пронумеровать все нули производной, и обозначить эти точки $x = \mu_{mn}$, где m – порядок функции Бесселя, а n – номер нуля производной. Например, $\mu_{11} = 1.84$.

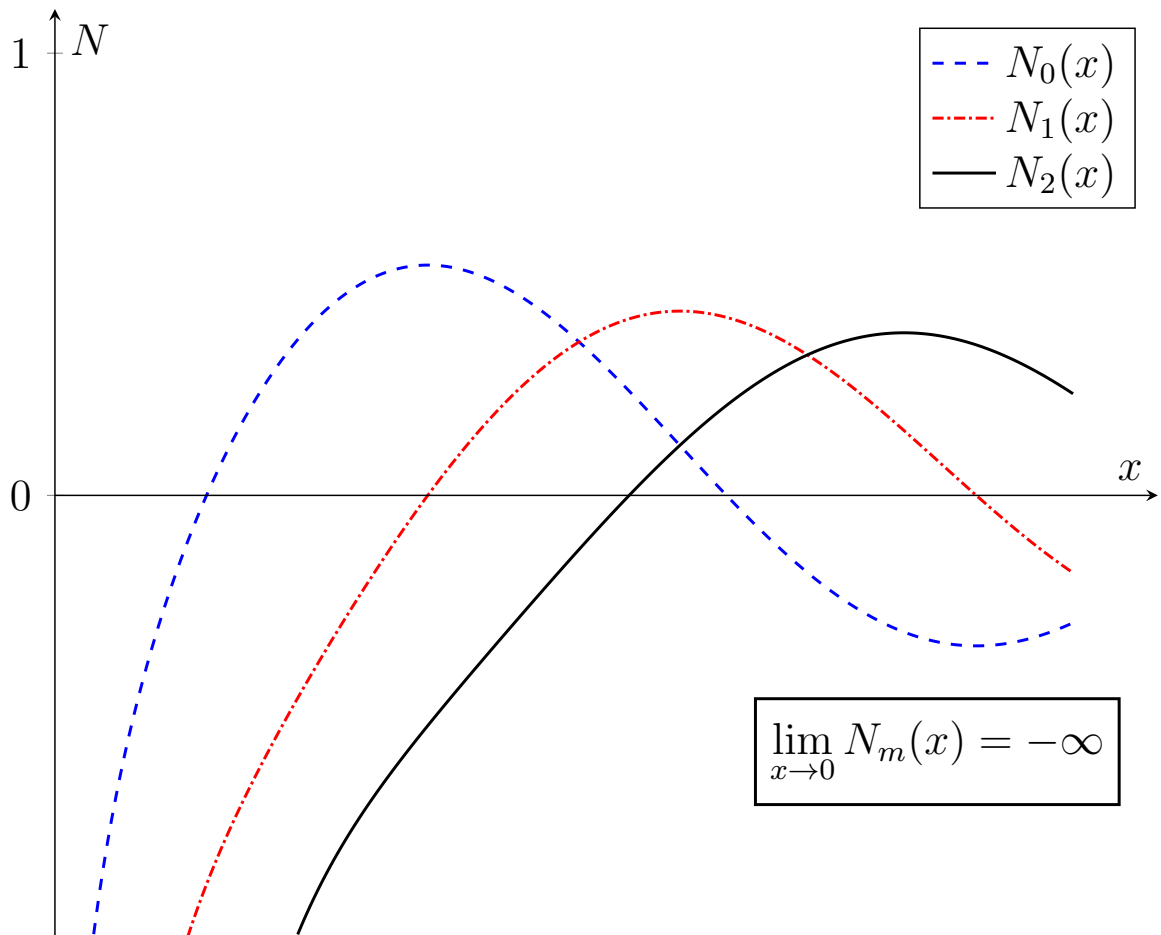


Рис. 25. Функции Бесселя второго рода

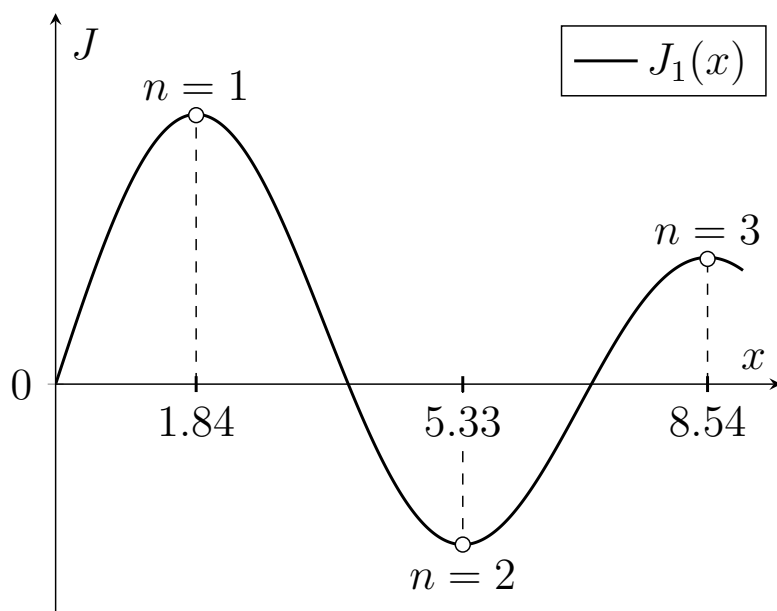


Рис. 26. Нули производной функции Бесселя

Тогда можем выразить через μ и волновое число:

$$\kappa_{mn}^{TE} = \frac{\mu_{mn}}{a}$$

В итоге получаем решение для ТЕ-волн:

$$\varphi_m = C_{mn} J_m(\kappa_{mn} r) \begin{pmatrix} \cos m\vartheta \\ \sin m\vartheta \end{pmatrix}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad n = 1, 2, \dots$$

Некоторые значения:

$$\mu_{11} = 1.84, \quad \kappa_{11} = \frac{1.84}{a}$$

$$\mu_{21} = 3.05, \quad \kappa_{21} = \frac{3.05}{a}$$

$$\mu_{01} = 3.83, \quad \kappa_{01} = \frac{3.83}{a}$$

Граничные условия ТМ-волн. Теперь на границе зануляется поперечная функция:

$$\varphi|_{r=a} = 0 \quad \Rightarrow \quad J_m(\kappa r) = 0$$

Также, как мы это делали для ТЕ-волн, пронумеруем нули функции Бесселя:

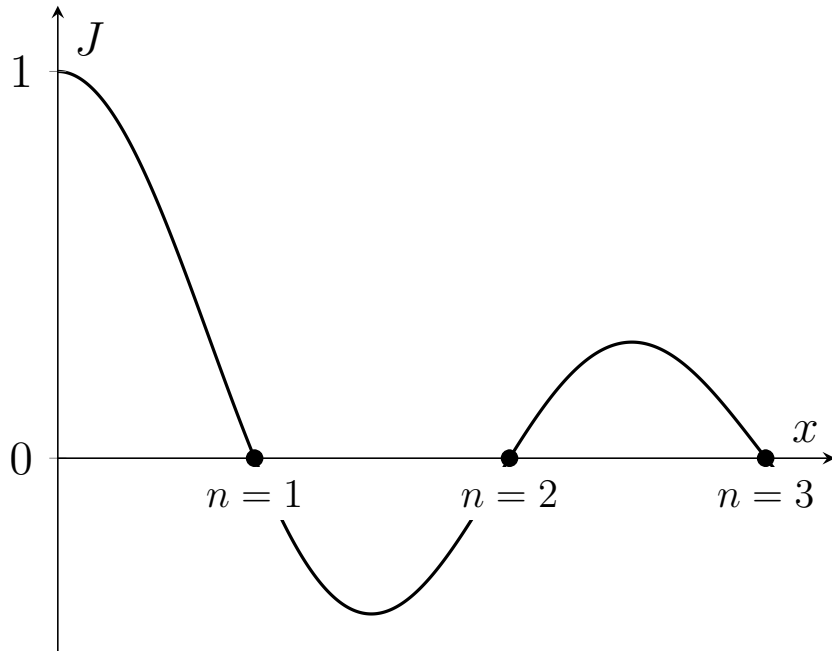


Рис. 27. Нули функции Бесселя

И обозначим нули

$$x = \nu_{mn},$$

И тогда

$$\kappa_{mn}^{TM} = \frac{\nu_{mn}}{a}$$

Некоторые значения:

$$\nu_{01} = 2.405, \quad \kappa_{01}^{TM} = \frac{2.405}{a}$$

$$\mu_{11} = 3.83, \quad \kappa_{11}^{TM} = \frac{3.83}{a}$$

Полное решение задачи. Если мы введем волновое число как

$$\kappa_{mn} = \begin{cases} \frac{\mu_{mn}}{a}, & \text{TE,} \\ \frac{\nu_{mn}}{a}, & \text{TM} \end{cases}$$

Тогда полное решение задачи запишется в виде

$$\varphi_m = C_{mn} J_m(\kappa_{mn} r) \begin{pmatrix} \cos m\vartheta \\ \sin m\vartheta \end{pmatrix}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad n = 1, 2, \dots$$

Низшая мода. У низшей моды наименьшее волновое число. В случае круглого волновода низшей модой будет TE_{11} : $\kappa_{11} = \frac{1.84}{a}$.

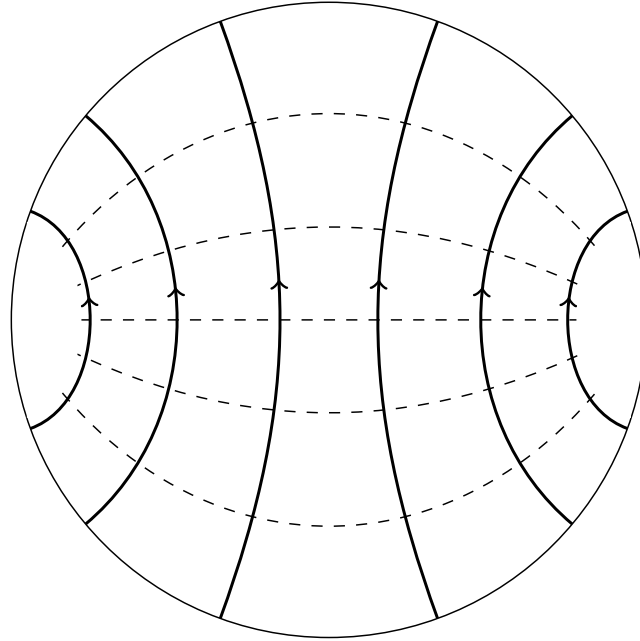


Рис. 28. Электрическое и магнитное поле в волне TE_{11}

Замечание. Можно сформулировать некоторое правило рисования силовых линий. Если построить линии уровня $\varphi = \text{const}$, то это будут силовые линии чисто поперечного поля.

Вообще говоря, поле моды TE_{11} круглого волновода топологически подобно моде TE_{10} прямоугольного волновода. Если постепенно деформировать стенки прямоугольного волновода, скругляя их, то линии поля постепенно будут переходить в линии поля круглого волновода.

Кроме того, мода TE_{11} круглого волновода **двукратно вырождена**: имеет место так называемое **поляризационное вырождение**.

Действительно, если повернуть волновод на 90 градусов, то получаем другое решение. Их не бесконечно много, а всего два фундаментальных, а все остальные образуются как их суперпозиция.

6.2. Метод решения задачи о возбуждении идеального полого резонатора сторонними переменным токами. Потенциальные и вихревые поля. Ортогональность полей собственных мод

Будем решать задачу, пользуясь разложением поля по собственным модам резонатора $\left\{ \vec{E}_p(\vec{r}), \vec{H}_p(\vec{r}) \right\} \cdot e^{i\omega_p t}$, где $p = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{rot } \vec{H}_p = \frac{i\omega_p}{c} \varepsilon \vec{E}_p, \quad \text{rot } \vec{E}_p = -\frac{i\omega_p}{c} \mu \vec{H}_p$$

Тогда полное поле можно представить как суперпозицию полей собственных мод. Кроме того, учтём, что $\text{div} \left\{ \vec{E}_p, \vec{H}_p \right\} = 0$, тогда можем прибавить еще и потенциальные поля:

$$\vec{E} = \sum_{p=0}^{\infty} e_p \vec{E}_p + \vec{E}_{\text{п}}, \quad \vec{H} = \sum_{p=0}^{\infty} h_p \vec{H}_p + \vec{H}_{\text{п}} \quad (2)$$

Докажем свойство **ортогональности полей собственных мод**. Для этого воспользуемся векторным тождеством:

$$\text{div} \left[\vec{E}_p \times \vec{H}_q \right] = \vec{H}_q \text{rot } \vec{E}_p - \vec{E}_p \text{rot } \vec{H}_q$$

Теперь подставим сюда выражения роторов из уравнений Максвелла:

$$\text{div} \left[\vec{E}_p \times \vec{H}_q \right] = \vec{H}_q \left(-\frac{i\omega_p}{c} \mu \vec{H}_p \right) - \vec{E}_p \left(\frac{i\omega_p}{c} \varepsilon \vec{E}_p \right)$$

Проинтегрируем левую и правую части равенства по объёму резонатора и

воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S [\vec{E}_p, \vec{H}_q] \vec{n} dS = \int_V [\mu\omega_p \vec{H}_p \vec{H}_q + \varepsilon\omega_q \vec{E}_p \vec{E}_q] dV$$

Заметим, что в левой части стоит ноль, так как $[\vec{E}_p, \vec{H}_q] \equiv [\vec{E}_{\tau_p}, \vec{H}_q] = 0$. Тогда введя обозначения $a = \int \mu \vec{H}_q \vec{H}_p dV$, $b = \int \varepsilon \vec{E}_q \vec{E}_p dV$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \omega_p a + \omega_q b = 0 \\ \omega_q a + \omega_p b = 0 \end{cases}$$

Отсюда видно, что $a, b \neq 0$, когда определитель системы ноль – значит, если нет вырождения, то $\omega_p = \omega_q$ ($q = p$), а $a = -b$. Это и есть условие ортогональности: интеграл по объёму от произведения полей мод не равен нулю, только если они совпадают.

Введём понятие **нормы моды**:

$$N_p = \frac{1}{4\pi} \int_V \varepsilon (\vec{E}_p)^2 dV = -\frac{1}{4\pi} \int_V \mu (\vec{H}_p)^2 dV$$

Теперь займёмся подставкой полученных результатов в уравнения Максвелла. Запишем их в случае гармонических полей:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{i\omega\mu}{c} \vec{H} - \frac{4\pi}{c} \vec{j}^m \\ \text{rot } \vec{H} = \frac{i\omega\varepsilon}{c} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}^e \end{cases}$$

Отсюда получается

$$\begin{cases} \sum_{p=0}^{\infty} e_p \text{rot } \vec{E}_p + \cancel{\text{rot } \vec{E}_{\text{н}}} = -\frac{i\omega\mu}{c} \left(\sum h_p \vec{H}_p + \vec{H}_{\text{н}} \right) - \frac{4\pi}{c} \vec{j}^m \\ \sum_{p=0}^{\infty} h_p \text{rot } \vec{H}_p + \cancel{\text{rot } \vec{H}_{\text{н}}} = \frac{i\omega\varepsilon}{c} \left(\sum e_p \vec{E}_p + \vec{E}_{\text{н}} \right) + \frac{4\pi}{c} \vec{j}^e \end{cases}$$

Наконец, подставим выражения для $\text{rot } \vec{E}_p, \text{rot } \vec{H}_p$:

$$\begin{cases} \sum_{p=0}^{\infty} e_p \left(-\frac{i\omega_p\mu}{c} \vec{H}_p \right) = -\frac{i\omega\mu}{c} \left(\sum h_p \vec{H}_p + \vec{H}_{\text{н}} \right) - \frac{4\pi}{c} \vec{j}^m \\ \sum_{p=0}^{\infty} h_p \left(\frac{i\omega_p\varepsilon}{c} \vec{E}_p \right) = \frac{i\omega\varepsilon}{c} \left(\sum e_p \vec{E}_p + \vec{E}_{\text{н}} \right) + \frac{4\pi}{c} \vec{j}^e \end{cases}$$

Перепишем полученные выражения в более удобном виде:

$$\begin{cases} -i\varepsilon \sum_p (\omega e_p - \omega_p h_p) \vec{E}_p = 4\pi \vec{j}^e + i\omega\varepsilon \vec{E}_\Pi \\ -i\mu \sum_p (\omega_p e_p - \omega h_p) \vec{H}_p = -4\pi \vec{j}^m - i\omega\mu \vec{H}_\Pi \end{cases} \quad (3)$$

Возьмём дивергенцию от левой и правой частей равенств (3). Левая часть обратится в ноль, так как \vec{E}_p, \vec{H}_p – вихревые поля, и тогда

$$\operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}_\Pi) = -\frac{4\pi}{i\omega} \operatorname{div} \vec{j}^e, \quad \operatorname{div}(\mu \vec{H}_\Pi) = -\frac{4\pi}{i\omega} \operatorname{div} \vec{j}^m$$

Зададим потенциальные поля через функции потенциала:

$$\vec{E}_\Pi = -\operatorname{grad} \varphi^e, \quad \vec{H}_\Pi = -\operatorname{grad} \varphi^m$$

Тогда в изотропном случае (когда ε, μ можно вытащить из-под дивергенции) получим, с учётом уравнения непрерывности ($\frac{\partial}{\partial t} \rho = i\omega \rho = -\operatorname{div} \vec{j}$):

$$\Delta \varphi^e = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho^e, \quad \Delta \varphi^m = -\frac{4\pi}{\mu} \rho^m \quad (4)$$

Граничные условия найдутся из полей:

$$\vec{E}_\tau = 0 \Rightarrow \varphi^e \Big|_S = 0, \quad H_n = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi^m}{\partial n} \Big|_S = 0$$

Теперь займёмся нахождением коэффициентов в разложении по собственным модам. Для этого домножим первое уравнение системы (3) на \vec{E}_q , второе на \vec{H}_q и проинтегрируем по области резонатора. В силу ортогональности сумма выродится в одно слагаемое с $q = p$. Заметим, что интегралы $\int \vec{E}_\Pi \vec{E}_q dV = 0$ и тоже самое для поля \vec{H} . Это нетрудно доказать самим. После несложных преобразований получим

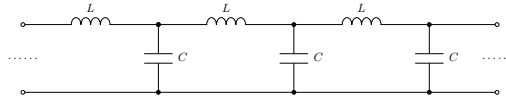
$$\begin{aligned} e_p &= \frac{i}{\omega^2 - \omega_p^2} \frac{1}{N_p} \int_V \left(\omega \vec{j}^e \vec{E}_p - \omega_p \vec{j}^m \vec{H}_p \right) dV, \\ h_p &= \frac{i}{\omega^2 - \omega_p^2} \frac{1}{N_p} \int_V \left(\omega_p \vec{j}^e \vec{E}_p - \omega \vec{j}^m \vec{H}_p \right) dV \end{aligned} \quad (5)$$

Итак, мы решили задачу о возбуждении токами в резонаторе. При этом поле получилось суммой двух полей: вихревого и потенциального. Вихревое мы находим как ряд, коэффициенты которого находятся интегрированием

(5). Потенциальное же находится через решение уравнения Пуассона на потенциалы (4). А результирующее возбуждённое поле запишется в виде (2).

7. Билет 7

7.1. Телеграфные уравнения для идеальной линии. Погонные параметры линии. Волновое уравнения, общий вид его решения. Понятие волнового сопротивления линии в терминах тока и напряжения



Теория в первую очередь применяется для $ТЕМ$ -волн. В описании применяются цепочки. $\lambda \gg l$, l – размер одного звена цепи. C – погонная емкость, L – погонная индуктивность.

Рассмотрим двупроводную линию. Q – заряд на единицу длины этой линии. Рассмотрим сечение этой двупроводной линии $z = \text{const}$. Напряжение между двумя проводами в этом сечении запишется как:

$$V(z) = \int_{(1)}^{(2)} E_l dl,$$

этот интеграл в сечении $z = \text{const}$ **не будет** зависеть от формы контура, поскольку структура поля \vec{E} в $ТЕМ$ -волне электростатична.

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_\perp \\ \vec{E}_\perp &= -\nabla_\perp \varphi \\ \Delta_\perp \varphi &= 0 + \text{гр.усл.}\end{aligned}$$

А это и означает, что поле \vec{E} потенциально в перпендикулярном направлении. При этом

$$\text{rot } \vec{E} = \text{rot } [\nabla_\perp \varphi(\vec{r}_\perp) e^{-ihz}] \neq 0$$

Уравнения, связывающие ток I и напряжение V называются телеграфными. Они получаются из законов Кирхгофа.

Приращение заряда $\Delta q = Q \Delta z$ на участке Δz за время Δt равно:

$$\Delta(\Delta q) = \Delta q(t + \Delta t) - \Delta q(t)$$

С другой стороны, изменение заряда есть разность подтекающих и оттекаю-

щих токов:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta q) = I(z) - I(z + \Delta z) = \frac{\partial}{\partial t}(Q\Delta z)$$

Осталось только выполнить предельный переход. Из закона сохранения заряда следует **первое телеграфное уравнение**:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial z}$$

Второе уравнение получим из закона электромагнитной индукции

$$\oint E_l \, dl = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\iint \vec{B} \, d\vec{S}}_{\Delta\psi} = V(z + \Delta z) - V(z)$$

По определению индуктивности:

$$\Delta\psi = \frac{\Delta L}{c} I = \frac{L\Delta z}{c} I$$

Получаем **второе телеграфное уравнение**

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{c^2} L \frac{\partial I}{\partial t}$$

8. Билет 8

8.1.

9. Билет 9

9.1. Затухание волн в линии передач, обусловленное потерями энергии в металлической стенке.

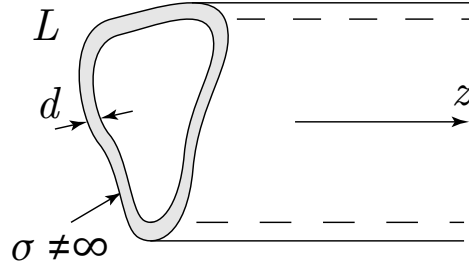


Рис. 29. ЛП с неидеальными стенками

Имеется полая ЛП, заполненная либо ε, μ , либо ничем. Стенки сделаны из хорошего, но не идеального проводника:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{wall} &= \varepsilon' + i\varepsilon'' \\ w \ll 4\pi\sigma, \varepsilon'' &= -\frac{4\pi\sigma}{w} \Rightarrow |\varepsilon''_{wall}| > |\varepsilon'_{wall}| \\ \varepsilon &\approx -i\frac{4\pi\sigma}{w}, |\varepsilon''| \gg 1\end{aligned}$$

На поверхности хорошего проводника выполняется граничное условие Леонтовича.

$$\vec{E}_\tau = \eta_s \left[\vec{H}_\tau \times \vec{n} \right],$$

η_s - поверхностный импеданс. В проводнике волна быстро затухает:

$$E_x \sim e^{-\frac{1+i}{\delta}x} e^{i\omega t}, \quad \delta = \frac{c}{\sqrt{8\pi\sigma\mu\omega}},$$

где δ - толщина скин-слоя, $k = \frac{1+i}{\delta}$ - волновое число в стенке. Поля слева от границы удовлетворяют граничному условию:

$$\vec{E}_\tau = \eta_s \left[\vec{H}_\tau \times \vec{n} \right],$$

\vec{n} - нормаль вглубь проводника. При этом:

$$\eta_s = \sqrt{\frac{\mu_{wall}}{\varepsilon_{wall}}} = \sqrt{i\frac{w\mu_{wall}}{4\pi\sigma}}$$

Это точное решение в случае, когда рассматривается бесконечная металлическая полуплоскость. У нас толщина проводника конечная, и для исполь-

зования г.у. Леонтовича нужны дополнительные ограничения на параметры стенки d .

Во-первых, толщина стенки должна быть много больше толщины скин-слоя, чтобы волны успели затухнуть. Во-вторых, так как мы изначально не накладывали ограничений на форму стенки, она может быть произвольной формы, а значит и структура поля внутри проводника будет различной для разных участков поверхности. Чтобы рассматривать малые участки как линейные, необходимо, чтобы радиус кривизны поверхности был много больше толщины скин-слоя. В итоге получаем 3 условия:

$$\sigma \gg w, \delta \ll R_{кр}, \delta \ll d$$

В таком случае можно пользоваться г.у. Леонтовича.

Рассмотрим участок ЛП от z до $z + \Delta z$. При распространении, часть энергии волны диссипатирует в стенках:

$$\begin{aligned} \Pi(z) &= \Pi(z + \Delta z) + \Delta P_{wall} \\ \Delta P_{wall} &= P_{wall} \Delta z, \end{aligned}$$

где P_{wall} - количество энергии, потерянное в стенках на единицу длины (погонная мощность потерь), а Π - мощность волны.

$$P_{wall} = -\frac{\Pi(z + \Delta z) - \Pi(z)}{\Delta z}, \Delta z \rightarrow 0,$$

$$P_{wall} = -\frac{d\Pi}{dz} - \text{дифференциальный ЗСЭ}$$

Рассмотрим поля в ЛП:

$$\begin{aligned} \vec{E}, \vec{H} &\sim e^{-ihz}, \quad h = h' + ih'' \\ |\vec{E}|, |\vec{H}| &\sim e^{h''z} \end{aligned}$$

Здесь везде речь идет о среднем потоке энергии!

$$\begin{aligned} \Pi &\sim |\vec{E}|, |\vec{H}| \sim e^{2h''z} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d\Pi}{dz} &= 2h''\Pi \Rightarrow h'' = -\frac{P_{wall}}{2\Pi} \end{aligned}$$

При переходе здесь пользуясь граничным условием Леонтовича получим:

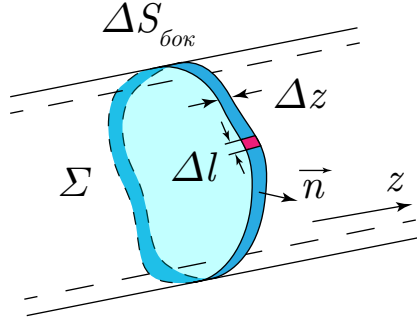


Рис. 30. иллюстрация к интегралу по площади

$$\begin{aligned}\Delta P_{wall} &= \iint_{S_{бок}} \bar{S}_n dS = \iint_{S_{бок}} \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left\{ \left[\vec{E} \times \vec{H}^* \right]_n \right\} dS = \\ &= \frac{c}{8\pi} \oint_L \operatorname{Re} \{ \eta_s \} |\vec{H}_\tau|^2 dl \Delta z,\end{aligned}$$

и тогда выражение для h'' принимает вид:

$$h'' = -\frac{P_{wall}}{2\Pi} = -\frac{\operatorname{Re} \{ \eta_s \} \oint_L |\vec{H}_\tau|^2 dl}{2 \operatorname{Re} \{ \eta_{\perp_b} \} \iint_{\Sigma} |\vec{H}_\perp|^2 dS}$$

Можно ввести $L_{затух}$ - расстояние, на котором амплитуда колебания спадает в e раз:

$$|h''| = \frac{1}{L_{затух}}$$

9.2. Лемма Лоренца и теорема взаимности для двух систем монохроматических источников.

Лемма Лоренца

Эта лемма относится к гармоническим полям и токам

$$\vec{E}, \vec{H}, \vec{j} \sim e^{i\omega t}$$

Рассмотрим две системы источников (токи, в общем случае, и магнитные \vec{j}^m) в одинаковой среде ϵ, μ . Токи порождают соответствующие поля:

$$\begin{aligned}\vec{j}_1^{e,m} \sim e^{i\omega t} &\rightarrow \vec{E}_1, \vec{H}_1, \vec{j} \sim e^{i\omega t} \\ \vec{j}_2^{e,m} \sim e^{i\omega t} &\rightarrow \vec{E}_2, \vec{H}_2, \vec{j} \sim e^{i\omega t}\end{aligned}$$

Частота ω этих источников одинаковая - эти источники **монохроматиче-**

ские. Мы можем записать уравнения Максвелла в общем виде, с учетом фиктивных токов:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H}_1 &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_1^e + \frac{i\omega}{c} \varepsilon \vec{E}_1 \mid \cdot \vec{E}_2 \\ \operatorname{rot} \vec{E}_1 &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_1^m - \frac{i\omega}{c} \varepsilon \vec{H}_1 \mid \cdot \vec{H}_2 \\ \operatorname{rot} \vec{H}_2 &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_2^e + \frac{i\omega}{c} \varepsilon \vec{E}_2 \mid \cdot \vec{E}_1 \\ \operatorname{rot} \vec{E}_2 &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_2^m - \frac{i\omega}{c} \varepsilon \vec{H}_2 \mid \cdot \vec{H}_1\end{aligned}$$

Используя соотношение:

$$\operatorname{div} [\vec{A} \times \vec{B}] = \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B}$$

преобразуем 4 уравнения выше, складывая все уравнения. В итоге получим:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} [\vec{E}_1 \times \vec{H}_2] - \operatorname{div} [\vec{E}_2 \times \vec{H}_1] &= \\ &= \frac{4\pi}{c} \left(\vec{j}_1^e \vec{E}_2 - \vec{j}_1^m \vec{H}_2 - \vec{j}_2^e \vec{E}_1 + \vec{j}_2^m \vec{H}_1 \right)\end{aligned}$$

Далее, интегрируем по произвольному объему, охватывающему эти источники, и применяя формулу Гаусса-Остроградского получим:

$$\begin{aligned}\oint_S [\vec{E}_1 \times \vec{H}_2] - [\vec{E}_2 \times \vec{H}_1] \vec{n} dS &= \\ &= \frac{4\pi}{c} \int_V \left(\vec{j}_1^e \vec{E}_2 - \vec{j}_1^m \vec{H}_2 - \vec{j}_2^e \vec{E}_1 + \vec{j}_2^m \vec{H}_1 \right) dV\end{aligned}$$

Это соотношение и есть формулировка **леммы Лоренца**. Такие соотношения позволяют связывать решения двух разных задач, зная решение простой задачи, можно решить сложную.

Теорема взаимности

Распространим объем $V \rightarrow \infty$ в лемме Лоренца. В таком случае поверхностью интегрирования S может быть сфера радиуса $R \rightarrow \infty$.

Источники обеих систем ограничены в пространстве. При большом удалении, поля от источников представляют собой сферические волны. У сферической волны, на бесконечности можно рассматривать ее малый участок как плоский, тогда волны будут чисто поперечными. Волновое сопротивление среды:

$$\frac{E_{\perp}}{H_{\perp}} = \eta_{\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

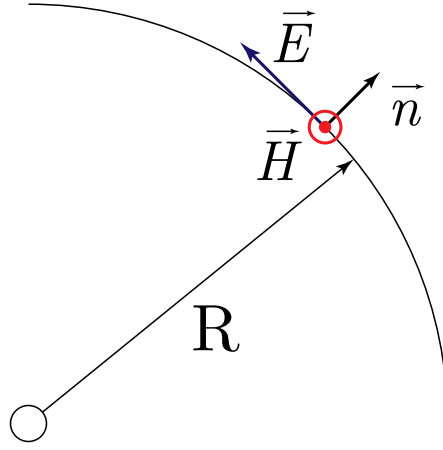


Рис. 31. К теореме взаимности

Выражение выше - приближение характер, однако при устремлении $R \rightarrow \infty$, его точность увеличивается. Тогда имеем:

$$\vec{E}_{1,2} = \eta_v \left[\vec{H}_{1,2} \times \vec{n} \right],$$

где \vec{n} - направление распространения волны (внешняя нормаль к S). η_v - одинакова для систем источников 1 и 2. Тогда справедливо:

$$\left[\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 \right] = \eta_v \left[\left[\vec{H}_1 \times \vec{n} \right] \times \vec{H}_2 \right] = \eta_v \left(\vec{n}(\vec{H}_1, \vec{H}_2) - \underbrace{\vec{H}_2(\vec{H}_1, \vec{n})}_{=0} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \left[\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 \right] &= \eta_v \vec{n}(\vec{H}_1, \vec{H}_2) \\ \left[\vec{E}_2 \times \vec{H}_1 \right] &= \eta_v \vec{n}(\vec{H}_2, \vec{H}_1) \end{aligned} \right\} \left[\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 \right] - \left[\vec{E}_2 \times \vec{H}_1 \right] \equiv 0$$

Т.е. левая часть в лемме Лоренца при большом расстоянии равна нулю. Это верно с точностью до членов порядка $\frac{1}{R^2}$. Оставшийся в правой части интеграл разделим на два, таким образом, получаем формулировку **теоремы взаимности**:

$$\begin{aligned} \int_V \left(\vec{j}_1^e \vec{E}_2 - \vec{j}_1^m \vec{H}_2 - \vec{j}_2^e \vec{E}_1 + \vec{j}_2^m \vec{H}_1 \right) dV &= 0 \\ \int_V \left((\vec{j}_1^e, \vec{E}_2) - (\vec{j}_1^m, \vec{H}_2) \right) dV &= \int_V \left((\vec{j}_2^e, \vec{E}_1) - (\vec{j}_2^m, \vec{H}_1) \right) dV \end{aligned}$$

Эта теорема также используется для сведения сложных задач к простым.

Условия выполнения теоремы:

- Среда должны быть линейными, ϵ, μ - не должны зависеть от полей.

- Рассматриваем изотропную среду

10. Билет 10

10.1.

11. Билет 11

11.1.

12. Билет 12

12.1. Общая постановка задачи о собственных электромагнитных колебаниях в полых резонаторах с идеально проводящими стенками. Действительность собственных частот идеального резонатора.

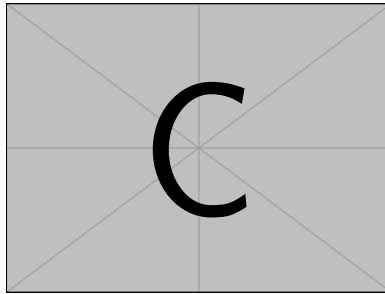


Рис. 32.

Рассматриваем любую металлическую полость произвольной формы. Для идеального проводника выполняются граничные условия на поверхности проводника S :

$$E_\tau|_S = 0, \quad H_n|_S = 0$$

Для собственных колебаний необходимо решить систему из уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = i \frac{\omega}{c} \varepsilon \vec{E} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -i \frac{\omega}{c} \mu \vec{H} \end{cases}$$

Возьмем ротор от второго уравнения, и подставим $\operatorname{rot} \vec{H}$ из первого, получим:

$$-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu \varepsilon}$$

Необходимо решить

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad \text{при условии} \quad \begin{cases} \operatorname{div} E = 0 \\ E_\tau|_S = 0 \end{cases}$$

13. Билет 13

13.1.