**Disclaimer**

# Содержание

# 1. Билет 1

## 1.1. Гармонические волны в линиях передачи. Выражение для векторного потенциала. Дифференциальное уравнение для поперечной волновой функции $\varphi(\vec{r}_\perp)$. Понятия продольного и поперечного волнового числа. Выражения для полей TE, TM, TEM. Импедансная связь между поперечными компонентаит электрического и магнитного полей и понятие поперечного волнового сопротивления

Линия передач - это любая цилиндрическая система. В них различают продольное $z$ и поперечное $\vec{r}_\perp = r_\perp(r, \theta)$ направление. При описании таких систем проще использовать векторный потенциал $\vec{A}$, который должен удовлетворять уравнению Гельмгольца (для амплитуд):

$$\Delta\vec{A}^e + k^2\vec{A}^e = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}^e = 0$$
$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}^e$$

0 потому что случай, где нет сторонних источников. Запишем поля в ЛП, когда волна бежит вдоль оси $Oz$:

$$\vec{E}(\vec{r}_\perp, z, \theta) = \vec{E}_0(\vec{r}_\perp)e^{i(wt-hz)},$$

где h - **продольное волновое число** (постоянная распространения). Реальное поля в таком случае записывается как:

$$E_{R_x} = \operatorname{Re}\{E_x\} = |E_x(\vec{r}_\perp)|\cos(wt - hz + \varphi(\vec{r}_\perp))$$

Запишем веторный потенциал в следующем виде:

$$\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp)e^{-ihz}\vec{z}_0,$$

где $\varphi^e(\vec{r}_\perp)$ - **поперечная волновая функция**. Запишем теперь поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ через $\varphi^e(\vec{r}_\perp)$. Вспомним выражение полей через векторный потенциал:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{A}^e$$
$$\vec{E} = -\nabla\varphi_{\text{пот}} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}^e}{\partial t} = \frac{1}{ik_0\varepsilon\mu}(\nabla\operatorname{div} + k^2)\vec{A}^e,$$

где $k = \frac{w}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}, k_0 = \frac{w}{c}$. При подстановке выражения для $\vec{A}^e$, для компонент векторов в случае **TM** - волны получим(надо расписать такие вещи как $\operatorname{div}\vec{A}^e,\ \nabla\operatorname{div}\vec{A}^e,\ \operatorname{rot}\vec{A}^e$):

$$
\begin{aligned}
&E_z = \frac{\varkappa^2}{ik_0\varepsilon\mu}\varphi^e(\vec{r}_\perp)\cdot e^{i(wt-hz)}\\
&\vec{E}_\perp = -\frac{h}{k_0\varepsilon\mu}\nabla_\perp\varphi^e(\vec{r}_\perp)\cdot e^{i(wt-hz)}\\
&\vec{H}_\perp = \frac{1}{\mu}[\nabla_\perp\varphi^e(\vec{r}_\perp)\times\vec{z}_0]\cdot e^{i(wt-hz)}\\
&H_z = 0
\end{aligned}
$$

**TM-волна** - поперечная магнитная волна (Магнитное поле имеет только поперечную компоненту. Поле $\vec{E}$ имеет и поперечное и продольное направление).

Потенциал $\vec{A}^e$, при любой зависимости от времени, должен удовлетворять волновому уравнению:

$$\Delta\vec{A}^e - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}^e}{\partial t^2} = 0$$

В нашем случае, когда векторный потенциал имеет вид $\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp)e^{-ihz}\vec{z}_0$, для гармонических полей справедливы следующие переходы:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow iw,\ \Delta\vec{A}^e + k^2\vec{A}^e = 0,\ k^2 = \frac{w^2}{c^2}\varepsilon\mu$$

Рассмотри для $z$-компоненты:

$$\Delta A_z^e + k^2A_z^e = 0,\ \Delta = \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Rightarrow -h^2,\ \text{т.к.} A_z^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp)e^{-ihz}$$

$$\Delta_\perp\varphi^e + \underbrace{(k^2-h^2)}_{\varkappa^2}\varphi^e = 0$$

$$\Delta_\perp\varphi^e + \varkappa^2\varphi^e = 0$$

$\varkappa^2$ - **поперечное волновое число**. Если поле удовлетворяет уравнению выше, то такое поле удоветворяет уравнениям Максвелла.

Аналогично сделаем для **TE** - волны.

**TE-волна** - поперечная электрическая волна (Электрическое поле имеет только поперечную компоненту. Магнитное поле имеет и поперечное и продольное направление). По принципу двойственности производим замены:

$$\vec{E} \to \vec{H},\ \vec{H} \to -\vec{E},\ \varepsilon \leftrightarrow \mu$$

$$\begin{aligned}
&H_z = \frac{\varkappa^2}{ik_0\varepsilon\mu}\varphi^m(\vec{r}_\perp)\cdot e^{i(wt-hz)}\\
&\vec{H_\perp} = -\frac{h}{k_0\varepsilon\mu}\nabla_\perp\varphi^m(\vec{r}_\perp)\cdot e^{i(wt-hz)}\\
&\vec{E_\perp} = -\frac{1}{\mu}[\nabla_\perp\varphi^m(\vec{r}_\perp)\times\vec{z_0}]\cdot e^{i(wt-hz)}\\
&E_z = 0
\end{aligned}$$

Вообще говоря, $\varphi^e$ и $\varphi^m$ могут быть различными, поэтому выше вместо $\varphi^e$ записано $\varphi^m$ . Аналогично для $\varphi^m$ требуется выполнение:

$$\Delta_\perp\varphi^m + \varkappa^2\varphi^m = 0$$

TE, TM волны - это решения уравнений Максвелла. однак может быть еще один тип решений - **TEM** - волны. Рассмотрим случай $\varkappa = 0,\ h = k$:

$$\begin{aligned}
&H_z = E_z = 0\\
&\vec{E_\perp} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\nabla_\perp\varphi\cdot e^{i(wt-kz)}\\
&\vec{H_\perp} = \frac{1}{\mu}[\nabla_\perp\varphi\times\vec{z_0}]\cdot e^{i(wt-kz)}\\
&\Delta_\perp\varphi = 0
\end{aligned}$$

**TEM-волна** - чисто поперечная волна (Электрическое поле имеет только поперечную компоненту, как и магнитное).

Что имеем в итоге:

- Поля выражаются через поперечную волновую функцию
- Продольные компоненты полей пропорциональны $\varphi$
- Поперечные компоненты полей пропорциональны $\nabla_\perp\varphi$

Т.е. если заданы $\varphi^e, \varphi^m$, то можно полностью найти поля. Из формул также видно следующее соотношение:

$$\vec{E}_\perp = \eta_{\perp\text{в}}[\vec{H}_\perp\times\vec{z_0}],$$

где $\eta_{\perp\text{в}}$ - **поперечное волновое сопротивление** - отношение между поперечными компонентами полей в бегущей волне $\eta_{\perp\text{в}} = \frac{E_\perp}{H_\perp}$. Для различных типов волн записывается как:

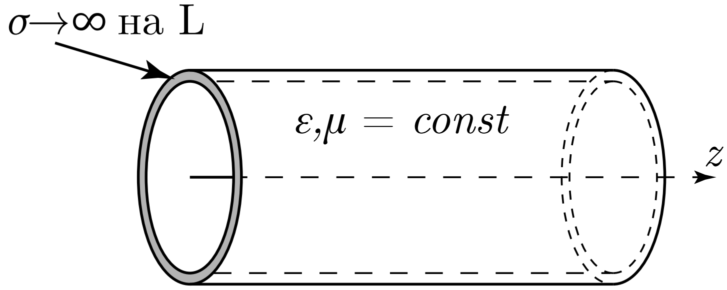
$$\text{TE(+),TM(-) - волны: } \eta_{\perp \text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(\frac{k}{h}\right)^{\pm 1}$$

$$\text{TEM - волны: } \eta_{\perp \text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Заметим, что в бегущей волне поля зависят от координат, а их отношение - $\eta_{\perp \text{в}}$ - нет. В стоячей волне это не так.

# 2. Билет 2

## 2.1. Граничные условия для поперечных волновых функций волн TE, TM, TEM типов в идеальной линии передачи. Математическая формулировка задачи описания волн TE, TM, TEM типов.




Рассмотрим случай идеального проводника, $\sigma \to \infty$(Вообще говоря, идеальных проводников не бывает, однако условие идеальной проводимости можно записать в виде: $\sigma \gg w$ $(\delta \ll L)$ ). Вспомним граничные условия для полей на поверхности идеального проводника:

$$E_\tau|_S = 0,\ H_n|_S = 0,$$

а также условие на поперечную волновую функцию:

$$\Delta_\perp \varphi^{e,m} + \varkappa^2 \varphi^{e,m} = 0$$

Найдем граничные условия для $\varphi^{e,m}$ для идеальной ЛП.

**TM-волна**:

$$\text{т.к. } E_z \sim \varphi^e,\ \vec{E}_{\perp\tau} \sim \frac{\partial \varphi^e}{\partial \tau}$$

$$\text{и } E_z = 0,\ E_{\perp\tau} = 0$$

$$\text{то } \varphi^e(\vec{r}_\perp)|_S = 0$$

- это граничное условие Дирихле

**TE-волна**:

$$\text{т.к. } \vec{E}_{\perp\tau} \sim [\nabla_\perp \varphi^m(\vec{r}_\perp) \times \vec{z}_0]_\tau$$

$$\text{и } E_{\perp\tau} = 0$$

$$\text{то } \frac{\partial \varphi^m}{\partial n}|_S = 0$$

**TEM-волна**:

$$\text{т.к. } \vec{E}_{\perp\tau} \sim \nabla_\perp \varphi^m(\vec{r}_\perp)$$

$$\text{то } \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}|_S = 0 \Rightarrow \varphi|_S = const = C_i$$

Отметим, что на разных поверхностях проводников постоянная $C_i$ может быть разной.

**Математическая формулировка задач для описания волн.**

**ТМ**. Необходимо решить:

$$\Delta_\perp \varphi^e + \varkappa^2 \varphi^e = 0$$
$$\varphi^e|_L = 0, L \text{ - граничный контур}$$

**ТЕ**. Необходимо решить:

$$\Delta_\perp \varphi^m + \varkappa^2 \varphi^m = 0$$
$$\frac{\partial \varphi^m}{\partial n}|_L = 0$$

**ТЕМ**. Необходимо решить:

$$\Delta_\perp \varphi^m = 0$$
$$\varphi|_{L_i} = C_i$$

Задачи ТЕ, ТМ волн - аналогичны задачам с мембраной, где граница мембраны закреплена неподвижно, а ТЕМ задачу можно назвать «электростатической». Это задачи на нахождение собственных функций

$$\varphi_1^{e,m}(\vec{r}_\perp), \varphi_2^{e,m}(\vec{r}_\perp), \ldots \varphi_i^{e,m}(\vec{r}_\perp)$$

и собственных чисел

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_i$$

Если ЛП идеальна, то спектр сбственных значений и функций бесконечен.

# 3. Билет 3

## 3.1. МИНИМУМ Дисперсионное уравнение для волн в идеальной ЛП. Критические частоты и длины волн. Зависимости длины волны, фазовой и групповой скорости от частоты. Распространяющиеся и нераспространяющиеся волны.

Дисперсионное соотношение

$$\varkappa^2 = k^2 - h^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - h^2$$

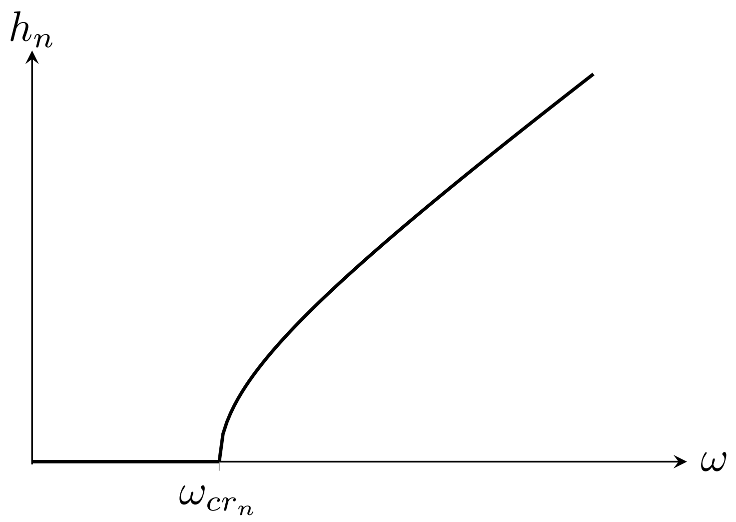



Рис. 1. Зависимость реальной части поперечного волнового числа от частоты

Где $\varkappa$ – поперечное волновое число, а $h$ - продольное волновое число.

Любая мода в линии передачи характеризуется поперечным волновым числом, а поперечное волновое число определяет продольное.

Можем ввести критическую длину волны (продольное волновое число $h$ равно нулю):

$$\varkappa^2 = \frac{\omega^2}{c}\varepsilon\mu$$

$$\omega_{cr} = \frac{\varkappa c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_{cr}} = \frac{2\pi}{\varkappa\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$\omega < \omega_{cr}$ дисперсионное уравнения не имеет действительных решений – режим нераспространяющейся волны.

При $\omega > \omega_{cr}$ – режим распространяющейся волны.
Если волна бежит вправо, то $h > 0$; если бежит влево, то $h < 0$

$$Re\vec{E}, Re\vec{H} \sim \cos(\omega t - hz)$$

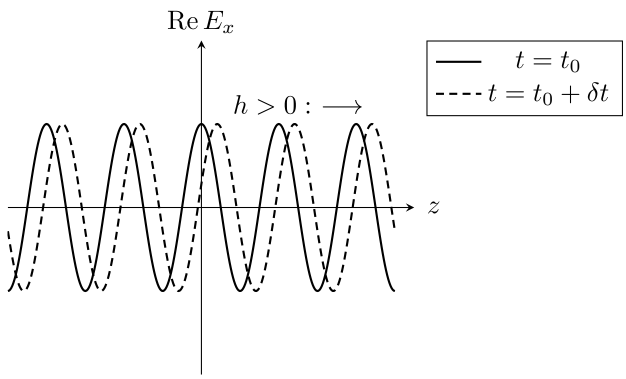



Рис. 2. Распространение волны $(h > 0)$

При $\omega < \omega_{cr}$

$$h = \pm i|h|$$

$$ReE_x \sim \cos(\omega t + \varphi_0)\exp\{\mp|h|z\}$$

Бегучести нет. Зависимость экспонентальная

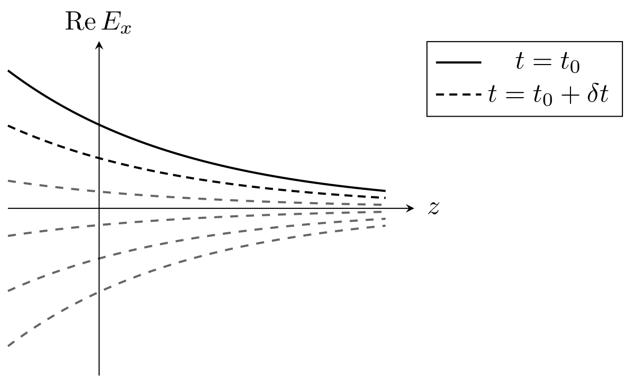



Рис. 3. Режим нераспространения $(h < 0)$

Картинка зависит от способа создания волны, то есть у экспоненты «$+$» или «$-$». В зависимости от того, где источник можем сказать, куда бежит волна. То есть определить знак.

Источник может порождать несколько мод, но не все, а какие-то конкретные. Изобразим числовую ось. Пусть задана $\omega$, а то есть $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$

Если $k < \varkappa_1$ - все моды нераспространяющиеся.

Когда $k$ перейдёт через $\varkappa_1$ появится низшая мода.

Когда перейдём через $\varkappa_2$ появится ещё одна критическая частота.

!!Можно дополнить описание числовой прямой!!

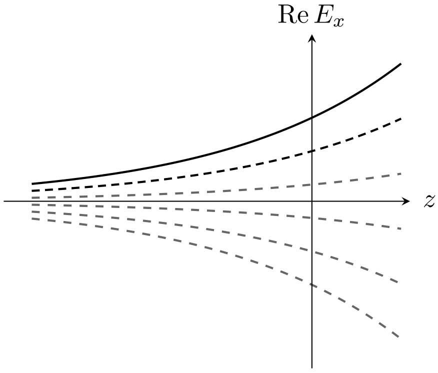



Рис. 4. Экспоненциальное нарастание амплитуды (при $h < 0$)

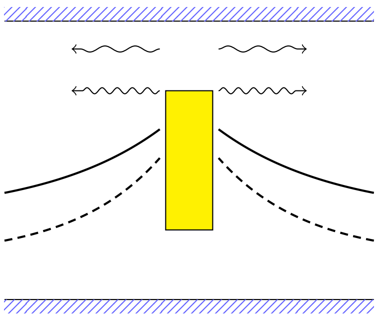
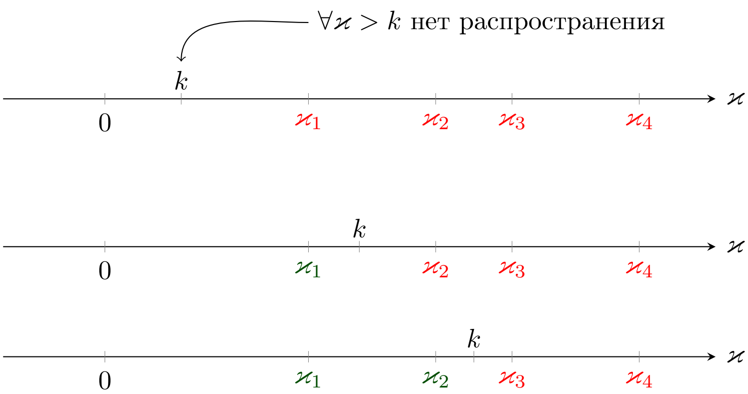


Рис. 5. Моды в линии передачи с источником




**Кинематические соотношения** - определяют кинематические параметры волны.

1) Временной период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

2) Длина волны в волноводе (подразумевают линию передачи или трубу, когда говорят волновод)

$$\lambda_v = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \varkappa^2}} = \frac{2\pi}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{k^2}}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c r^2}{\omega}}} > \lambda_0$$

Когда $\omega \to \omega_{cr}$ $\lambda_v \to \infty$

$\lambda_0$ - длина волны в пространстве без волновода в той же среде.

$\lambda_v$ - пространственный период.

3) Фазовая скорость - скорость перемещения плоскости постоянной фазы.

Поверхность постоянной фазы - это когда фаза константа.

$$\Phi = \omega t - hz + \varphi_0 = \text{const}$$

При данном времени можно найти выражение для поверхности постоянной фазы:

$$z = \frac{\omega t + \varphi_0}{h}$$

Координата будет перемещаться со скоростью:

$$v_f = \frac{\omega}{h}$$

$$v_f = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - \varkappa^2}} = \frac{\omega}{k}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k}{\varkappa}^2}} = \frac{\omega}{k}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{cr}}{\omega}^2}} > v_f^{(0)}$$

$$v_f^{(0)} = \frac{c}{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{k}$$

Фазовая скорость может быть больше скорости света.

4) Групповая скорость - скорость перемещения квазимонохроматического волнового пакета.

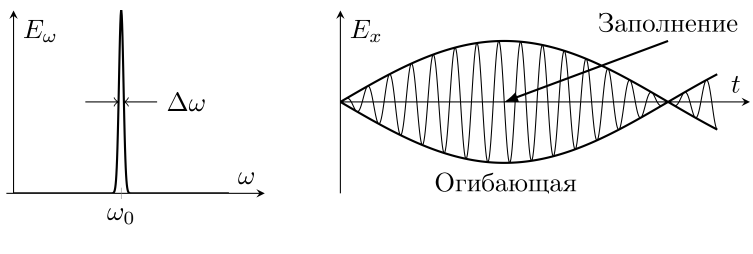



Рис. 6. Квазимонохроматический волновой пакет

Сигнал характеризуется высокочастотным заполнением и огибающей.

По сути это радиоимпульс.

Пакет движется со скоростью $v_{gr} = \frac{\partial\omega}{\partial k}|_{\omega=\omega_0}$ - это при малом или отсутствующем поглощении.(Это в пространстве, а не в линии передачи). При большом поглощении это понятие теряет смысл. По мере перемещения по волноводу форма сигнала будет меняться.

$v_{gr} = \frac{\partial\omega}{\partial h}|_{\omega=\omega_0}$ - формула для волновода.

$$k^2 = h^2 + \varkappa^2$$
$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$$

Берём дифференциал от правой и левой части.$\varkappa$ не зависит от частоты.

$$2kdk = 2hdh$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial h} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{h}{k}$$
$$h = +\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \varkappa_n^2}$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial h} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{c}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \varkappa_n^2} = \frac{{v_f^{(0)}}^2}{v_f}$$

$$v_f = \frac{\omega}{h}$$
$$v_f^{(0)} = \frac{c}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}$$
$$v_f v_{gr} = {v_f^{(0)}}^2$$

$$v_{gr} = v_f^{(0)}\sqrt{1 - \frac{{\omega_{cr}}^2}{\omega}}$$

Всё это справедливо для сред без временной дисперсии.

$$\varepsilon \neq f(\omega), \mu \neq f(\omega)$$

$v_{gr} < c$ - она несёт информацию.

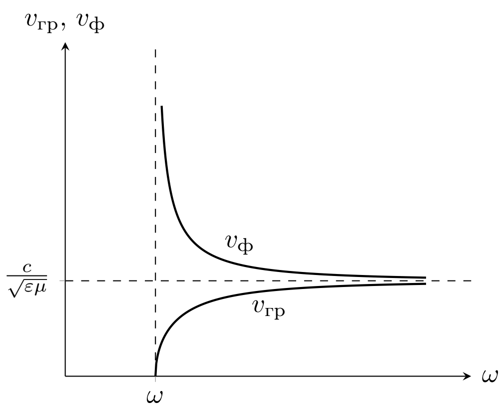



Рис. 7. Распространение волнового пакета

# 4. Билет 4

## 4.1. Медленные волны, направляемые плоским диэлектрическим слоем. Дифференциальное уравнение для поперечной волновой функции и его решения для областей внутри и вне слоя. Выражения для полей, граничные условия и дисперсионные (характеристические) уравнения для симметричных (чётных) волн типа TM

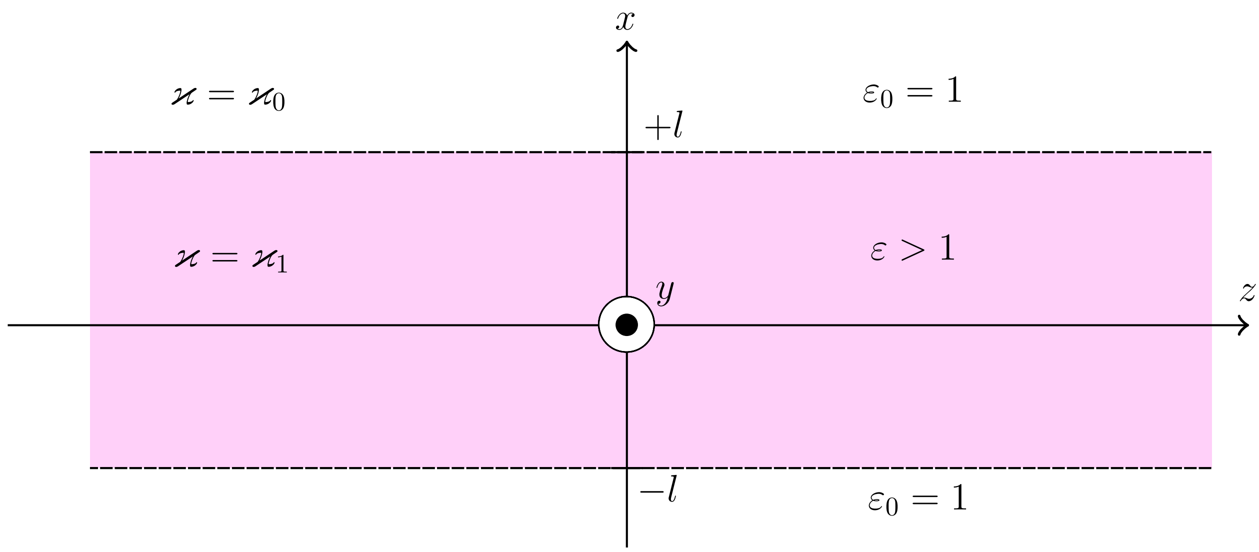



Рис. 8. Диэлектрический слой

Рассмотрим задачу о распространении волны вдоль плоского диэлектрического слоя. Так как это бесконечный плоский слой, то $\frac{\partial}{\partial y} = 0$: $\vec{E}, \vec{H} =$

$\vec{E}(t,x,z), \vec{H}(t,x,z)$. Будем искать решение в виде

$$\vec{E} = \vec{F}(x) \cdot e^{i(\omega t - hz)}$$

Теперь у нас будут другие граничные условия. Нам придётся решать уравнения Максвелла во всей среде – в трёх областях: вне слоя сверху, снизу и в слое, а затем сшивать решения.

Введём поперечную волновую функцию $\varphi(x)$:

$$\Delta_\perp \varphi + \varkappa^2 \varphi = 0, \quad \varkappa^2 = k_0^2 \varepsilon \mu - h^2$$

$h$ должно быть одинаковым в областях 0 (вне слоя) и 1 (в слое), иначе мы заведомо не сможем удовлетворить граничным условиям: количество гребней волн в разных областях не совпадёт. Значит, $h = \mathrm{const}$.

В области 1:

$$\varkappa_1^2 = k_0^2 \varepsilon - h^2, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d}x^2} + \varkappa_1^2 \varphi = 0$$

В области 2:

$$\varkappa_0^2 = k_0^2 - h^2, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d}x^2} + \varkappa_0^2 \varphi = 0$$

Отсюда сразу следует, что $\varkappa_1^2 = \varkappa_0^2 + k_0^2(\varepsilon - 1)$.

Сначала найдём решение вне слоя. Волна должна быть локализована – не переносить энергию в поперечном направлении. Для этого нужно потребовать, чтобы

$$\varkappa_0^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \varkappa_0^2 = -p^2, \quad \varkappa_0^2 = ip \quad \Rightarrow \quad \varphi \sim e^{\pm px}$$

Чтобы удовлетворить локализованности, над слоем должно быть $\varphi = c_2 e^{-px}$, а под слоем $\varphi = c_2 e^{px}$.

Теперь найдём решение в слое. Пусть $\varkappa_1^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon > 1$. Тогда

$$\varphi = A_1 \cos \varkappa_1 x + A_2 \sin \varkappa_1 x$$

**ТМ волны в плоском слое.** Запишем поля через волновую функцию, как мы это делали в самом начале курса:

$$E_z = \frac{\varkappa^2}{ik_0\varepsilon}\varphi, \qquad E_x = -\frac{h}{k_0\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}, \qquad H_y = -dv\varphi x$$

$E_y, H_x$ нет, так как они пропорциональны $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$. На границе диэлектрика у нас должны быть непрерывны тангенциальные компоненты полей $E, H$ в точках $x = \pm l$.

Граничное условия для $E_z$ (первая формула) и для $H_y$ (вторая):

$$\frac{\varkappa_1^2\varphi(l-0)}{\varepsilon} = -\frac{p^2\varphi(l+0)}{1}, \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi(l-0)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\varphi(l+0)}{\mathrm{d}x}$$

**Чётные и нечётные волны.** Целесообразно для упрощения расчётов разделять чётные волны $\{E_x, H_y\}(x) = \{E_x, H_y\}(-x)$ и нечётные $\{E_x, H_y\}(x) = -\{E_x, H_y\}(x)$. При этом для чётных волн $\varphi = A\sin\varkappa_1 x$, для нечётных $\varphi = A\cos\varkappa_1 x$. Тогда для чётных волн граничные условия примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}\varkappa_1^2 A\sin\varkappa_1 l = -p^2 Ce^{-pl} \\ \varkappa_1^2 A\cos\varkappa_1 l = -pCe^{-pl} \end{cases}$$

Условие разрешимости этой системы – определитель её равен нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\varkappa_1 l}{\varepsilon}\operatorname{tg}\varkappa_1 l = pl \\ (\varkappa_1 l)^2 + (pl)^2 = (k_0 l)^2(\varepsilon - 1) \end{cases}$$

Без вывода приведём такие же выражения для нечётных волн:

$$\begin{cases} -\dfrac{\varkappa_1 l}{\varepsilon}\operatorname{ctg}\varkappa_1 l = pl \\ (\varkappa_1 l)^2 + (pl)^2 = (k_0 l)^2(\varepsilon - 1) \end{cases}$$

Это трансцендентные уравнения, и просто так их решить нельзя. Но в этом случае оказывается целесообразным применить графический метод решения, который даст нам ключевую информацию о появлении мод. Построим оба уравнения в координатах $(pl, \varkappa_1 l)$:

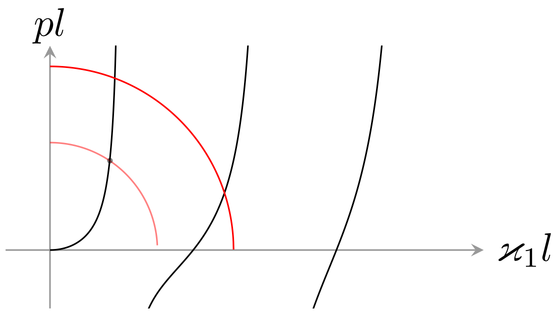



Рис. 9. Появление мод

Здесь радиус окружности $R = k_0 l\sqrt{\varepsilon - 1}$. Если $R < \pi$, то есть только один корень: мода $\mathrm{TM}_{00}$. Когда окружность пересекает функцию в $pl = 0$, это критическая частота данной моды: так как $p = 0$ отвечает нелокализованной моде. Первый индекс моды связан с количеством корней уравнения, а второй у нас будет всегда 0 – мы не рассматривали зависимость от $y$.

**Низшая мода TM$_{00}$.** Построим графики поперечного распределения поля:

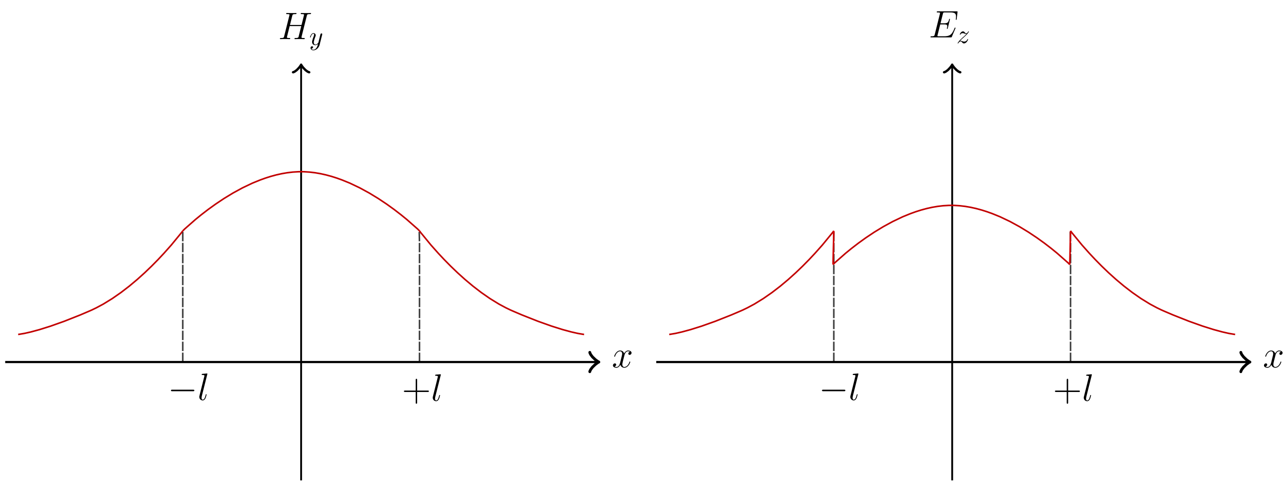



Рис. 10. Поле $H_y$ непрерывно, а $E_z$ терпит скачок, так как непрерывна $D_n$

**TE-волны.** Для них

$$\text{чет:} \quad \varkappa_1 l \operatorname{tg} \varkappa_1 l = pl, \qquad \text{нечет:} \quad -\varkappa_1 l \operatorname{ctg} \varkappa_1 l = pl$$

TE волны возможны, только если $R > \frac{m\pi}{2}$.

**Медленные волны.** Почему мы называем эти волны медленными? Посмотрим на дисперсионное уравнение:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu + p^2 > k^2 \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{f}} = \frac{\omega}{h} < \frac{\omega}{k} = c.$$

Эти волны медленные относительно волн в вакууме: фазовая скорость меньше скорости света.

## 4.2. Главные (ТЕМ) волны в линиях передач. Условие существования ТЕМ волны. ТЕМ волна в коаксиальной линии (Картинка силовых линий, зависимость полей от координат).

У ТЕМ-волн поперечное волновое число $\varkappa = 0$:

$$\varkappa = 0 \Rightarrow h = k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$$

Поля таких волн выражаются следующим образом через функцию $\varphi$:

$$\vec{E}_\perp = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\nabla_\perp\varphi$$

$$\vec{H}_\perp = -\frac{1}{\mu}[\nabla_\perp\varphi, \vec{z}_0]$$

При этом выполняются **граничные условия**: на каждом из проводников (допустим, есть набор проводников, вдоль которых распространяется волна)

$$\varphi|_{l_i} = C_i,$$

причем константа не обязана быть одна для всех проводников.

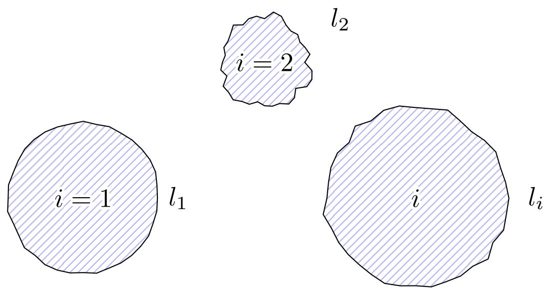



Рис. 11. Набор проводников в задаче

**Внутренняя задача.** Пусть у нас есть только один проводник, в котором есть цилиндрическая полость (рис. 12). Рассмотрим внутреннюю задачу, т.е. распространение волны внутри цилиндрической полости.

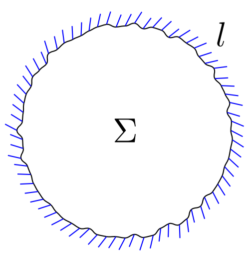



Рис. 12. Случай одного проводника

Оказывается, для граничного условия $\varphi_\perp|_l = C_1$ существует только тривиальное решение $\varphi_\perp = C_1$. Для доказательства необходимо воспользоваться теоремой и минимуме и максимуме для гармонической функции.

**Внешняя задача.** Зададимся вопросом о решении той же задачи:

$$\Delta_\perp \varphi = 0, \quad \varphi|_l = \mathrm{const}$$

Только теперь будем рассматривать её в области вне проводника

Для начала рассмотрим задачу попроще, поле нити (рис. 13). Её решение известно:

$$\Delta_\perp \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \sim \ln r$$

Характер убывания полей здесь $E_r \sim \dfrac{1}{r}$, а для магнитного поля в силу импедансного соотношения $\dfrac{E_r}{H_\varphi} = \eta_{\perp\text{в}} = 1, \quad H_\varphi \sim \dfrac{1}{r}$:

$$E_r = H_\varphi \sim \frac{1}{r}$$

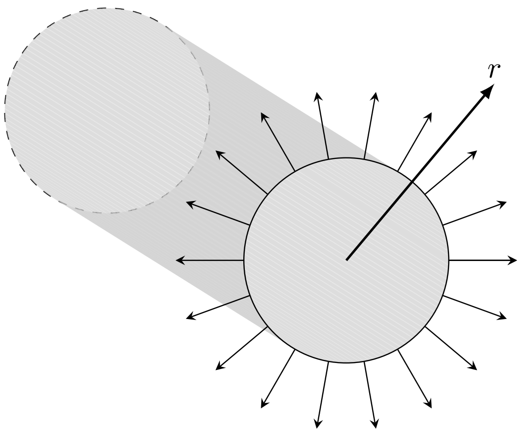



Рис. 13. Поле бесконечной проводящей нити

Посмотрим на поведение полей при $r \to \infty$. Говорят, нужно поставить граничные условия (или закон убывания) на бесконечности. Чем плох закон $\frac{1}{r}$?

Посчитаем средний по времени поток энергии через поперечное сечение, в котором распространяется волна. Сечение бесконечно, за исключением конечной площади проводника.

Сначала вычислим вектор Пойнтинга (средний по времени и в проекции на $z$):

$$\overline{S}_z = \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}\big(E_r \cdot H_\varphi^*\big) \sim \frac{1}{r^2}$$

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma} \overline{S}_z ds \sim \iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{r^2}(2\pi r\,\mathrm{d}r) \sim \int\limits_a^{\infty} = \ln\frac{\infty}{a} = \infty$$

Интеграл расходится на бесконечности. Говорят, что расходимость носит логарифмический характер. Получили бесконечную мощность волны: такую волну невозможно создать реальным источником — волна не удовлетворяет критерию энергетической реализуемости.

Можно сделать важный вывод: **вдоль одиночного проводника ТЕМ-волна с конечной энергией распространятся не может**. Распространение возможно, если количество проводников будет больше одного. Например, в линии из двух проводников (рис. 14) ТЕМ-волна уже возможна.

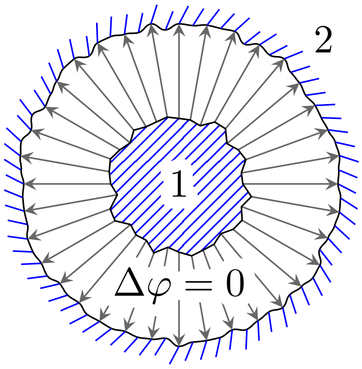



Рис. 14. Закрытая линия из двух проводников

Можно модифицировать задачу с нитью (рис. 15):

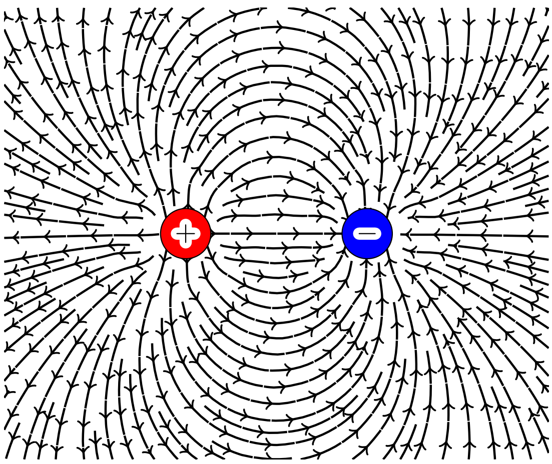


Рис. 15. Поле двухпроводной линии

В поперечном разрезе это поле диполя, а оно спадает быстрее, $\sim \frac{1}{r^2}$. Тогда

$$E_\perp \sim H_\perp \sim \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \overline{S}_z \sim \frac{1}{r^4}, \quad \Pi \sim \int\limits_{L_{\text{характ}}}^{\infty} \frac{1}{r^3}\,\mathrm{d}r$$

Мощность волны конечна, значит, в модифицированной задаче TEM-волна энергетически реализуема.

**Конечный вывод:** TEM-волна в идеальной линии передачи возможна, если число проводников $\geq 2$.

Например, в коаксиальной линии (рис. 16) TEM-волна возможна.

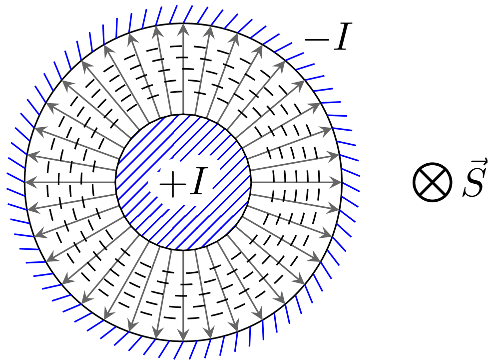



Рис. 16. Поле в коаксиальном кабеле

Зададимся вопросом: возможны ли в такой линии TE и TM волны? Сформулируем утверждение, пока без доказательства: **в открытых линиях передачи TE и TM волны не существуют**.

# 5. Билет 5

## 5.1. Волны в прямоугольном металлическом волноводе. Спектр собственных волновых чисел волн TE и TM типов. Структура поля низших типов волн

**Решение для TM-волн.** Займемся решением TM-волны в прямоугольном волноводе (рис. 17). Условимся что $a > b$. Эта задача поиска собственных функций $\varphi^e$ и собственных значений $\varkappa$:

$$\Delta_\perp \varphi^e + \varkappa^2 \varphi^e = 0, \quad \varphi^e|_l = 0$$

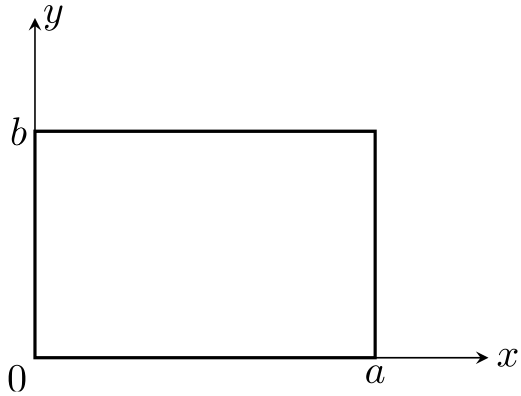



Рис. 17. Прямоугольный волновод

В матфизике эта задача о колебании мембраны с закрепленным краем. Она решается разделением переменных:

$$\varphi^e = X(x) \cdot Y(y)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial y^2} + \varkappa^2 \varphi^e = 0 \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{XY} \quad \Rightarrow \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \varkappa^2 = 0$$

Тут надо произнести магическую фразу: так как первое слагаемое функция от $x$, второе функция от $y$, и их сумма равна константе для любых $x, y$, значит – сами слагаемые тоже какие-то константы:

$$\frac{X''}{X} = -\varkappa_x^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -\varkappa_y^2$$

Определив таким образом константы, мы получаем:

$$\varkappa_x^2 + \varkappa_y^2 = \varkappa^2$$

Пока мы не нашли само $\varkappa$. Это собственное число, и оно подлежит определению. Прежде чем его найти, найдем собственные функции, решая уравнения

$$X'' + \varkappa_x^2 X = 0, \quad Y'' + \varkappa_y^2 Y = 0$$

Это уравнения известного вида, их решение

$$X = C_1 \cdot \cos \varkappa_x x + C_2 \cdot \sin \varkappa_x x \qquad Y = A_1 \cdot \cos \varkappa_y y + A_2 \cdot \sin \varkappa_y y$$

Нужно удовлетворить граничным условиям:

$$\varphi^e|_{y=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x)Y(0) = 0 \quad \forall x \Rightarrow Y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = 0$$

$$\varphi^e|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0)Y(y) = 0 \quad \forall y \Rightarrow X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$\begin{gathered} \varphi^e|_{x=a} = 0 \quad \Rightarrow \quad X(a)Y(y) = 0 \quad \forall y \Rightarrow \\ \Rightarrow X(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varkappa_x a = m\pi, \quad m = \cancel{0}, 1, 2, \ldots \end{gathered}$$

Поскольку $m = 0$ дает тривиальное решение, мы его откидываем.

$$\begin{gathered} \varphi^e|_{y=b} = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x)Y(b) = 0 \quad \forall x \Rightarrow \\ \Rightarrow Y(b) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varkappa_y b = n\pi, \quad n = \cancel{0}, 1, 2, \ldots \end{gathered}$$

Теперь мы получили выражения для $X$ и $Y$:

$$\begin{gathered} X_m(x) = C_2 \cdot \sin \frac{\pi m x}{a} \\ Y_n(x) = A_2 \cdot \sin \frac{\pi n y}{b} \end{gathered}$$

Теперь можем окончательно записать выражения для собственных функций и собственных значений в решении ТМ-волн:

$$\left.\begin{aligned} \varphi^e_{mn} &= B_{mn} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} \\ \varkappa^2_{mn} &= \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \end{aligned}\right\}, \quad m, n = 1, 2, \ldots$$

**Решение для ТЕ-волн.** Приведем решение без вывода:

$$\left.\begin{aligned} \varphi^m_{mn} &= B_{mn} \cos \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b} \\ \varkappa^2_{mn} &= \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \end{aligned}\right\}, \quad m, n = (0), 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Важным отличием является то, что теперь одно из чисел $m, n$ может быть равно нулю (решение от этого не станет тривиальным).

**Низшая мода.** По определению, низшая мода – та, у которой минимальное поперечное волновое число. Так как мы предполагали, что $a > b$, то в нашем случае это мода $\mathrm{TE}_{10}$:

$$\varkappa_{10} = \frac{\pi}{a} \quad \rightarrow \quad \omega_{cr\,10} = \frac{\varkappa_{10} \cdot c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Именно моду $\mathrm{TE}_{10}$ чаще всего используют на практике в линиях передачи.

Рассмотрим перпендикулярную структуру поля $\mathrm{TE}_{10}$-волны. Нарисуем силовые линии полей $E$ и $H$ в плоскости $(x, y)$ – перпендикулярной распространению волны (рис. 18)

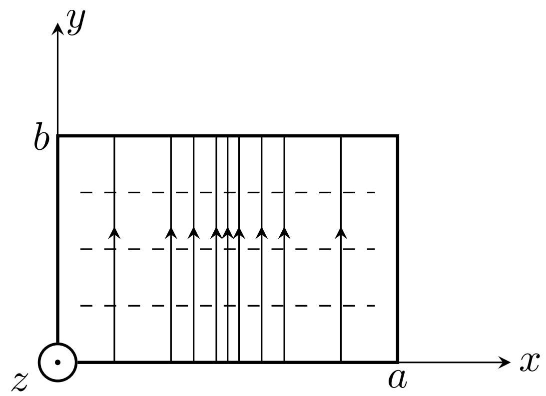



Рис. 18. Структура полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ ($\vec{H}$ изображено пунктиром)

На границах волновода поле $E$ равно нулю (в силу условия $E_\tau = 0$). Поле $\vec{E}$ можем получить из уравнений (1),(4.2):

$$\vec{E} = \vec{E}_\perp = \vec{y}_0 E_0 \cdot \sin\frac{\pi x}{a} \exp[i(\omega t - hz)],$$

где

$$h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

Поле $H$ можно найти из импедансного соотношения (для TE-волны):

$$\frac{E_y}{H_x} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{k}{h}$$

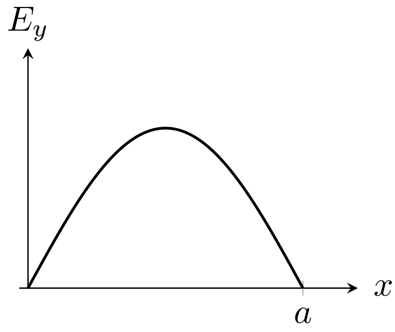



Рис. 19. Поперечная структура полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ (мода TE)

За перенос энергии отвечают именно поперечные компоненты поля. Компонента поля $H_z \sim \cos\frac{\pi a}{x}$, а также сдвинута по фазе во времени.

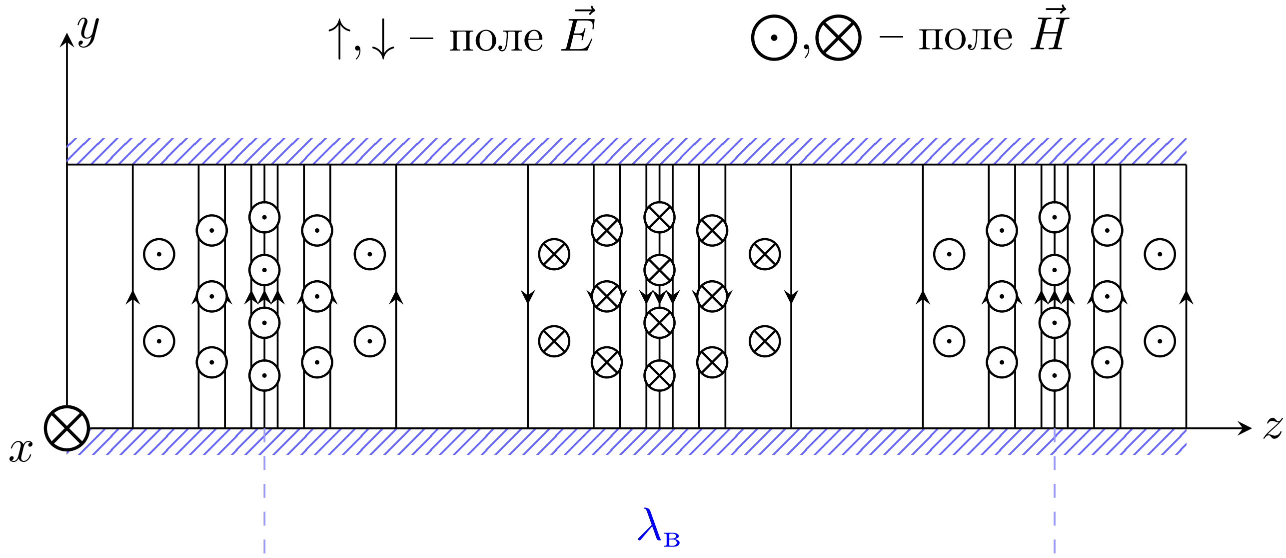



Рис. 20. Продольная структура полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ (мода $TE_{10}$)

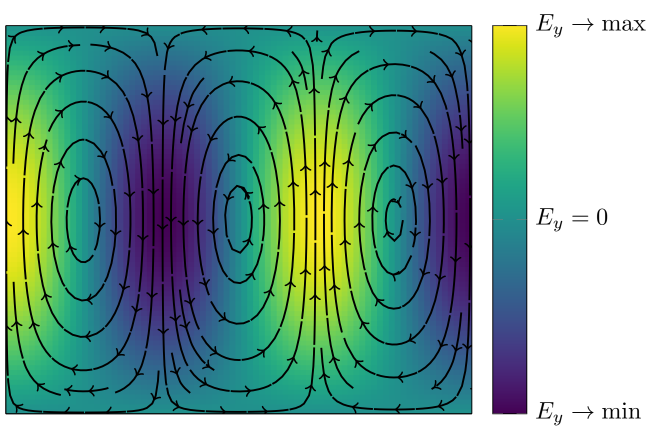



Рис. 21. Структура поля $\vec{H}$ (изображены силовые линии) и поля $\vec{E}$ (напряженность изображена цветом) волны $TE_{10}$ в прямоугольном волноводе

**Высшие моды.** В зависимости от соотношения между $a$ и $b$, порядок мод может быть разным (он определяется величиной поперечного волнового числа). Некоторые высшие моды:

$$\begin{aligned}
\mathrm{TE}_{11}: &\quad \varkappa_{11} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} \\
\mathrm{TE}_{20}: &\quad \varkappa_{20} = \frac{2\pi}{a} \\
\mathrm{TE}_{01}: &\quad \varkappa_{11} = \frac{\pi}{b}
\end{aligned}$$

## 5.2. Затухание собственных колебаний в полом резонаторе, обусловленное потерями энергии в заполняющей среде

Чтобы его найти, нужно действовать стандартно: представить $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$, аналогично $\mu = \ldots$. Связь частот определяется формулой

$$\omega = \frac{\omega^{(0)}}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где $\omega^{(0)}$ – спектр незаполненного резонатора. Отсюда найдется $\omega''$ ($\omega = \omega' + i\omega''$), и тогда затухание будет происходить как

$$E, H \sim e^{i\omega t} \sim e^{i\omega' t} \cdot e^{-i\omega'' t}$$

При $\mu = 1$ оказывается, что $\omega'' \sim -\varepsilon''$. Это не ошибка, так как $\varepsilon'' < 0$. Для прямоугольного резонатора можно построить $\operatorname{Re} E_x(t)$, это будет синусоида, вписанная в огибающую – убывающую экспоненту:

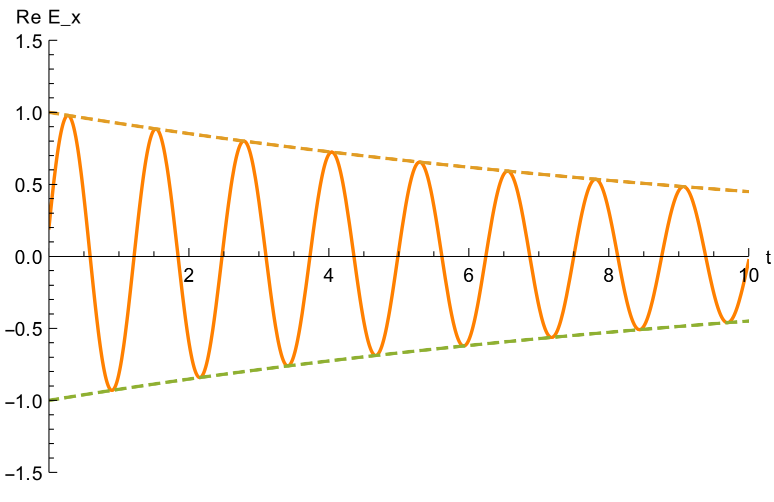



Рис. 22. Затухание поля в резонаторе со временем

# 6. Билет 6

## 6.1. Волны в круглом металлическом волноводе. Спектр собственных функций и поперечных волновых чисел волн TE и TM типов. Структура поля низших типов волн.

Наиболее часто на практике используются прямоугольные, круглые и коаксиальные волноводы. Займемся изучением круглых волноводов.

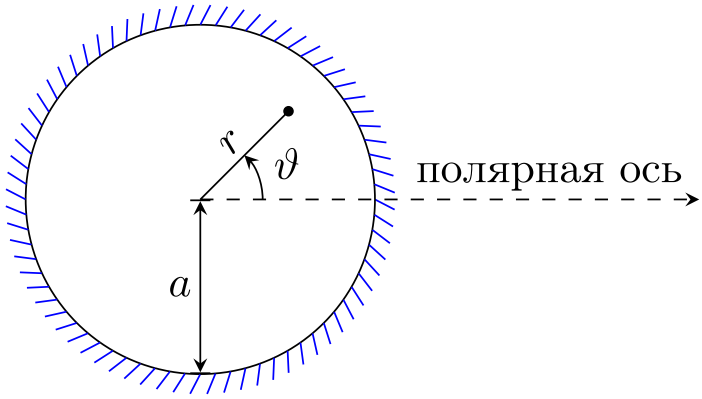



Рис. 23. Геометрия круглого волновода

Область определения задачи $0 \le r \le a$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$. Каждая точка в сечении волновода задается двумя координатами $(r, \vartheta)$.

Будем решать задачу (пока в общем виде, без граничных условий):

$$\Delta_\perp \varphi + \varkappa^2 \varphi = 0$$

Здесь лаплассиан в цилиндрических координатах

$$\Delta_\perp \varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2}$$

Также как и при поиске поля в прямоугольном волноводе, воспользуемся методом разделения переменных:

$$\varphi = R(r) \cdot \Theta(\vartheta)$$

Применив стандартным образом разделение переменных (подставив $\varphi$ как $R \cdot \Theta$ в решаемое уравнение и домножив уравнение слева и справа на $\frac{r^2}{R\Theta}$), получим

$$\underbrace{r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \varkappa^2 r^2}_{f(r)=+C_1} + \underbrace{\frac{\Theta''}{\Theta}}_{g(\vartheta)=-C_1} = 0$$

Заметим, что комбинация из первых трех слагаемых может зависеть только от $r$, последнее слагаемое может зависеть только от $\vartheta$, а их сумма ни от чего не зависит - значит и первые три слагаемых в сумме ни от чего не зависят и равны некой константе $-C_1$, тогда последнее слагаемое (которое тоже ни от чего не зависит) равно $+C_1$.

Таким образом, разделение переменных успешно завершилось.

**Уравнение относительно $\Theta$.** Такое уравнение запишется в виде

$$\Theta'' + C_1\Theta = 0$$

Решение этого уравнения (гармонического осциллятора) нам хорошо известно:

$$\Theta = A_1 \cos\left(\sqrt{C_1}\vartheta\right) + A_2 \sin\left(\sqrt{C_1}\vartheta\right)$$

Сразу заметим, что отсюда следует, что $\sqrt{C_1} = m$ – целое число. Действительно, в силу симметрии задачи

$$\Theta(\vartheta) = \Theta(\vartheta + 2\pi),$$

а такое возможно только при целой частоте $\sqrt{C_1}$.

**Уравнение относительно $r$.** Его можно переписать, если учесть что $\sqrt{C_1} = m$, тогда

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(\varkappa^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R = 0$$

Можно ввести замену переменных $x = \varkappa r$, тогда

$$R''_{xx} + \frac{1}{x}R'_x + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)R = 0, \quad R = R(x)$$

Это известное уравнение Бесселя. Его решение получается в виде специальных, цилиндрических функций Бесселя:

$$R = B_q \cdot J_m(x) + B_2 \cdot N_m(x)$$

$J_m$ называют функциями Бесселя первого рода, или просто функциями Бесселя, а $N_m$ функциями Бесселя второго рода, или функциями Неймана. Их поведение хорошо изучено, не хуже чем поведение синуса и косинуса. Рассмотрим некоторые характерные моменты. Первый максимум функции Бесселя второго порядка лежит на пересечении функций Бесселя первого и нулевого порядков. Это свойство функций Бесселя. Еще одно свойство заключается в том, что ноль функции Бесселя первого порядка совпадает с точкой минимума функции Бесселя нулевого порядка. Функции Неймана мы пока не

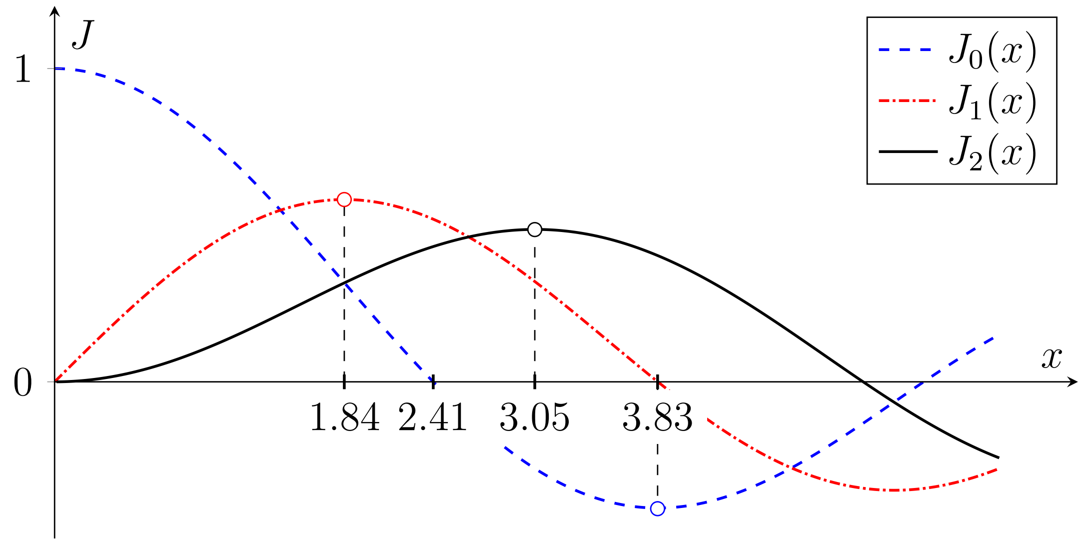



Рис. 24. Функции Бесселя первого рода

будем рассматривать подробно. Это вызвано тем, что у всех функций Неймана есть особенность: в нуле они расходятся, и поэтому в нашем решении, чтобы решение в нуле было конечно, придется положить $B_2 = 0$.

Вообще говоря, в коаксиальной линии это будет не так, потому что там область определения задачи не включает $r = 0$, и будет $B_2 \neq 0$.

Итак, наше решение теперь можно переписать в виде

$$\varphi_m = J_m(\varkappa r)(A_1 \cos(m\vartheta) + A_2 \sin(m\vartheta))$$

Здесь константу $B_1$ мы уже не пишем, предпологая что она сидит в константах $A_1, A_2$. Иногда, для краткости, комбинацию синуса и косинуса пишут так:

$$A_1 \cos(m\vartheta) + A_2 \sin(m\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos m\vartheta \\ \sin m\vartheta \end{pmatrix}$$

Перейдем к удовлетворению граничных условий.

**Граничные условия TE-волн.** На границе волновода должна занулятся производная поперечной функции:

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial J_m(\varkappa r)}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$$

Это значит, что

$$J_m'(x) = 0, \quad x = \varkappa a$$

Мы можем пронумеровать все нули производной, и обозначить эти точки $x = \mu_{mn}$, где $m$ – порядок функции Бесселя, а $n$ – номер нуля производной. Например, $\mu_{11} = 1.84$.

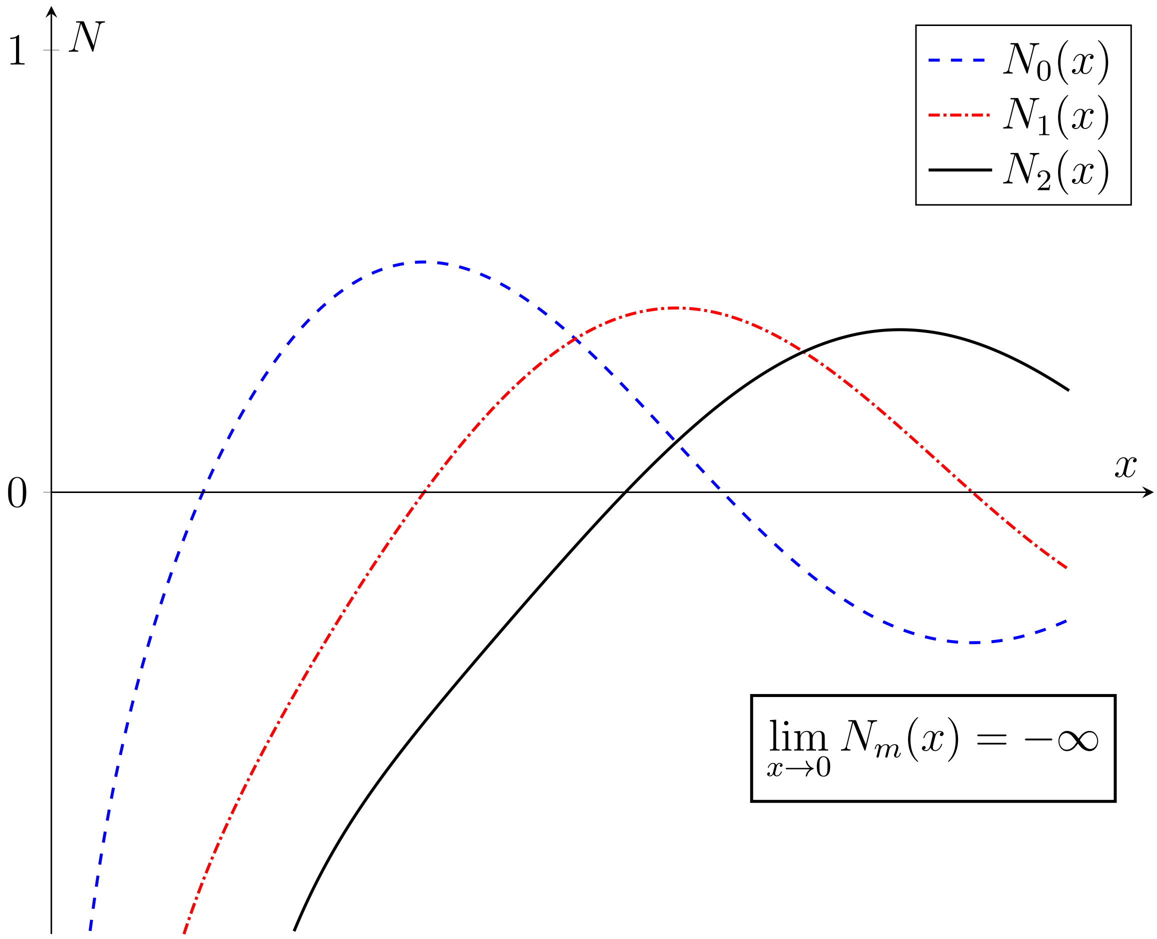



Рис. 25. Функции Бесселя второго рода

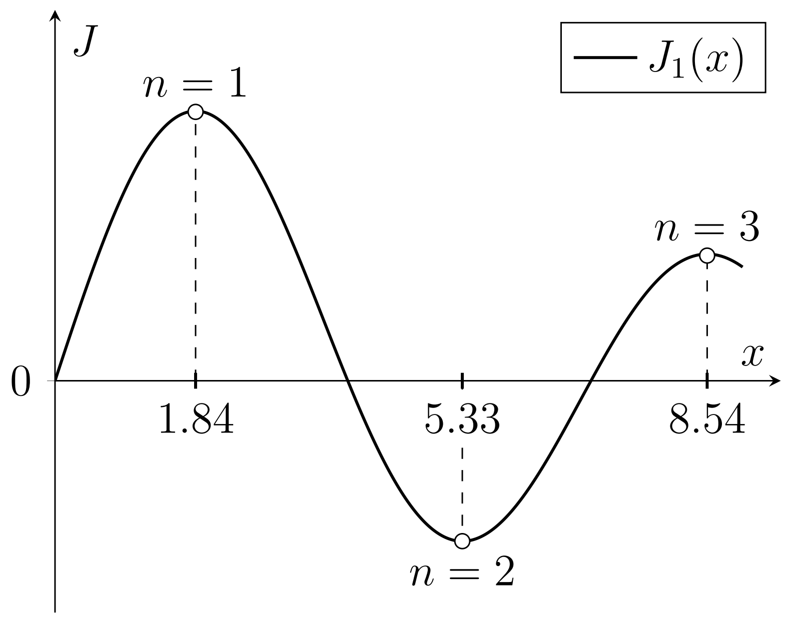



Рис. 26. Нули производной функции Бесселя

Тогда можем выразить через $\mu$ и волновое число:

$$\varkappa_{mn}^{TE} = \frac{\mu_{mn}}{a}$$

В итоге получаем решение для ТЕ-волн:

$$\varphi_m = C_{mn} J_m(\varkappa_{mn} r) \begin{pmatrix} \cos m\vartheta \\ \sin m\vartheta \end{pmatrix}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots \quad n = 1, 2, \ldots$$

Некоторые значения:

$$\mu_{11} = 1.84, \quad \varkappa_{11} = \frac{1.84}{a}$$

$$\mu_{21} = 3.05, \quad \varkappa_{21} = \frac{3.05}{a}$$

$$\mu_{01} = 3.83, \quad \varkappa_{01} = \frac{3.83}{a}$$

**Граничные условия ТМ-волн.** Теперь на границе зануляется поперечная функция:

$$\varphi\Big|_{r=a} = 0 \quad \Rightarrow \quad J_m(\varkappa r) = 0$$

Также, как мы это делали для ТЕ-волн, пронумеруем нули функции Бесселя:

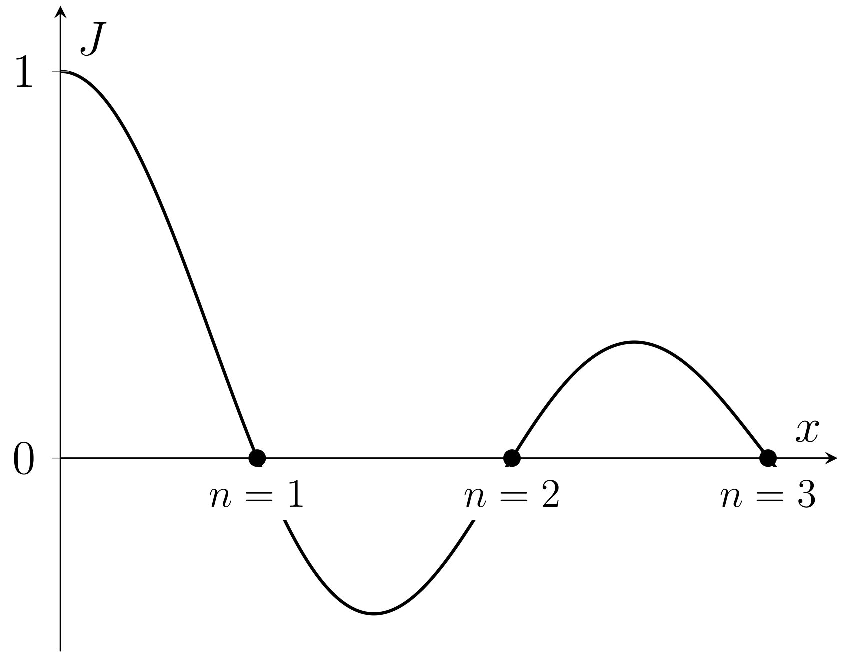



Рис. 27. Нули функции Бесселя

И обозначим нули

$$x = \nu_{mn},$$

И тогда

$$\varkappa_{mn}^{TM} = \frac{\nu_{mn}}{a}$$

Некоторые значения:

$$\nu_{01} = 2.405, \quad \varkappa_{01}^{TM} = \frac{2.405}{a}$$

$$\mu_{11} = 3.83, \quad \varkappa_{11}^{TM} = \frac{3.83}{a}$$

**Полное решение задачи.** Если мы введем волновое число как

$$\varkappa_{mn} = \begin{cases} \dfrac{\mu_{mn}}{a}, & \text{TE}, \\ \dfrac{\nu_{mn}}{a}, & \text{TM} \end{cases}$$

Тогда полное решение задачи запишется в виде

$$\varphi_m = C_{mn} J_m(\varkappa_{mn} r) \begin{pmatrix} \cos m\vartheta \\ \sin m\vartheta \end{pmatrix}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots \quad n = 1, 2, \ldots$$

**Низшая мода.** У низшей моды наименьшее волновое число. В случае круглого волновода низшей модой будет $\text{TE}_{11}$: $\varkappa_{11} = \frac{1.84}{a}$.

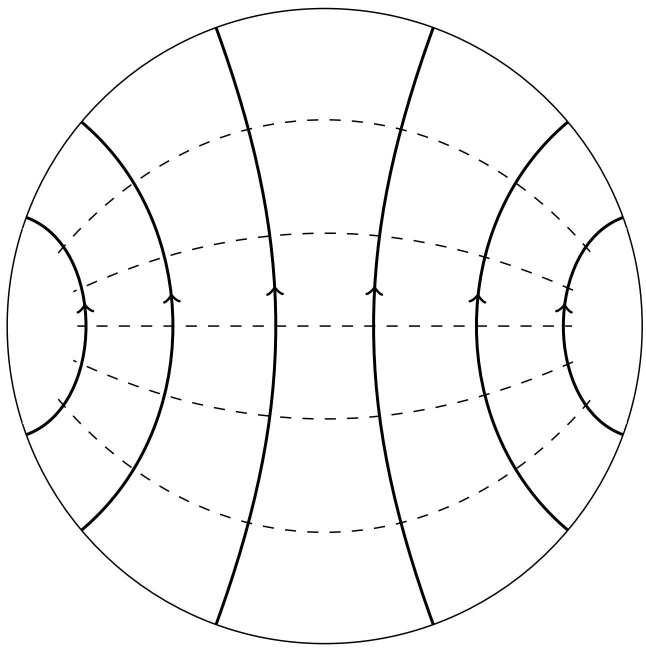


Рис. 28. Электрическое и магнитное поле в волне $\text{TE}_{11}$

**Замечание.** Можно сформулировать некоторое правило рисования силовых линий. Если построить линии уровня $\varphi = \text{const}$, то это будут силовые линии чисто поперечного поля.

Вообще говоря, поле моды $\mathrm{TE}_{11}$ круглого волновода топологически подобно моде $\mathrm{TE}_{10}$ прямоугольного волновода. Если постепенно деформировать стенки прямоугольного волновода, скругляя их, то линии поля постепенно будут переходить в линии поля круглого волновода.

Кроме того, мода $\mathrm{TE}_{11}$ круглого волновода **двукратно вырождена:** имеет место так называемое **поляризационное вырождение**.

Действительно, если повернуть волновод на 90 градусов, то получаем другое решение. Их не бесконечно много, а всего два фундаментальных, а все остальные образуются как их суперпозиция.

## 6.2. Метод решения задачи о возбуждении идеального полого резонатора сторонними переменным токами. Потенциальные и вихревые поля. Ортогональность полей собственных мод

Будем решать задачу, пользуясь разложением поля по собственным модам резонатора $\left\{\vec{E}_p(\vec{r}\,), \vec{H}_p(\vec{r}\,)\right\} \cdot e^{i\omega_p t}$, где $p = 1, 2, 3, \ldots$.

$$\operatorname{rot} \vec{H}_p = \frac{i\omega_p}{c}\varepsilon \vec{E}_p, \quad \operatorname{rot} \vec{E}_p = -\frac{i\omega_p}{c}\mu \vec{H}_p$$

Тогда полное поле можно представить как суперпозицию полей собственных мод. Кроме того, учтём, что $\operatorname{div}\left\{\vec{E}_p, \vec{H}_p\right\} = 0$, тогда можем прибавить еще и потенциальные поля:

$$\vec{E} = \sum_{p=0}^{\infty} e_p \vec{E}_p + \vec{E}_{\text{п}}, \quad \vec{H} = \sum_{p=0}^{\infty} h_p \vec{H}_p + \vec{H}_{\text{п}} \tag{2}$$

Докажем свойство **ортогональности полей собственных мод**. Для этого воспользуемся векторным тождеством:

$$\operatorname{div}\left[\vec{E}_p \times \vec{H}_q\right] = \vec{H}_q \operatorname{rot} \vec{E}_p - \vec{E}_p \operatorname{rot} \vec{H}_q$$

Теперь подставим сюда выражения роторов из уравнений Максвелла:

$$\operatorname{div}\left[\vec{E}_p \times \vec{H}_q\right] = \vec{H}_q\left(-\frac{i\omega_p}{c}\mu \vec{H}_p\right) - \vec{E}_p\left(\frac{i\omega_p}{c}\varepsilon \vec{E}_p\right)$$

Проинтегрируем левую и правую части равенства по объёму резонатора и воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса:

$$\oint\limits_S \left[\vec{E}_p, \vec{H}_q\right]\vec{n}\mathrm{d}S = \int\limits_V \left[\mu\omega_p\vec{H}_p\vec{H}_q + \varepsilon\omega_q\vec{E}_p\vec{E}_q\right]\mathrm{d}V$$

Заметим, что в левой части стоит ноль, так как $\left[\vec{E}_p, \vec{H}_q\right] \equiv \left[\vec{E}_{\tau_p}, \vec{H}_q\right] = 0$. Тогда введя обозначения $a = \int \mu\vec{H}_q\vec{H}_p\mathrm{d}V$, $b = \int \varepsilon\vec{E}_q\vec{E}_p\mathrm{d}V$, получим систему уравнений

$$\begin{cases}\omega_p a + \omega_q b = 0\\ \omega_q a + \omega_p b = 0\end{cases}$$

Отсюда видно, что $a, b \neq 0$, когда определитель системы ноль – значит, если нет вырождения, то $\omega_p = \omega_q$ $(q = p)$, а $a = -b$. Это и есть условие ортогональности: интеграл по объёму от произведения полей мод не равен нулю, только если они совпадают.

Введём понятие **нормы моды**:

$$N_p = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \varepsilon\left(\vec{E}_p\right)^2\mathrm{d}V = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_V \mu\left(\vec{H}_p\right)^2\mathrm{d}V$$

Теперь займёмся подставкой полученных результатов в уравнения Максвелла. Запишем их в случае гармонических полей:

$$\begin{cases}\operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{i\omega\mu}{c}\vec{H} - \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}^m\\ \operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{i\omega\varepsilon}{c}\vec{E} + \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}^e\end{cases}$$

Отсюда получается

$$\begin{cases}\sum\limits_{p=0}^{\infty} e_p\operatorname{rot}\vec{E}_p + \cancel{\operatorname{rot}\vec{E}_\text{п}} = -\dfrac{i\omega\mu}{c}\left(\sum h_p\vec{H}_p + \vec{H}_\text{п}\right) - \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}^m\\ \sum\limits_{p=0}^{\infty} h_p\operatorname{rot}\vec{H}_p + \cancel{\operatorname{rot}\vec{H}_\text{п}} = \dfrac{i\omega\varepsilon}{c}\left(\sum e_p\vec{E}_p + \vec{E}_\text{п}\right) + \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}^e\end{cases}$$

Наконец, подставим выражения для $\operatorname{rot}\vec{E}_p, \operatorname{rot}\vec{H}_p$:

$$\begin{cases}\sum\limits_{p=0}^{\infty} e_p\left(-\dfrac{i\omega_p\mu}{c}\vec{H}_p\right) = -\dfrac{i\omega\mu}{c}\left(\sum h_p\vec{H}_p + \vec{H}_\text{п}\right) - \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}^m\\ \sum\limits_{p=0}^{\infty} h_p\left(\dfrac{i\omega_p\varepsilon}{c}\vec{E}_p\right) = \dfrac{i\omega\varepsilon}{c}\left(\sum e_p\vec{E}_p + \vec{E}_\text{п}\right) + \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}^e\end{cases}$$

Перепишем полученные выражения в более удобном виде:

$$\begin{cases} -i\varepsilon \sum\limits_p (\omega e_p - \omega_p h_p)\vec{E}_p = 4\pi \vec{j}^e + i\omega\varepsilon \vec{E}_{\text{п}} \\ -i\mu \sum\limits_p (\omega_p e_p - \omega h_p)\vec{H}_p = -4\pi \vec{j}^m - i\omega\mu \vec{H}_{\text{п}} \end{cases} \tag{3}$$

Возьмём дивергенцию от левой и правой частей равенств (3). Левая часть обратится в ноль, так как $\vec{E}_p, \vec{H}_p$ – вихревые поля, и тогда

$$\operatorname{div}\left(\varepsilon \vec{E}_{\text{п}}\right) = -\frac{4\pi}{i\omega} \operatorname{div} \vec{j}^e, \quad \operatorname{div}\left(\mu \vec{H}_{\text{п}}\right) = -\frac{4\pi}{i\omega} \operatorname{div} \vec{j}^m$$

Зададим потенциальные поля через функции потенциала:

$$\vec{E}_{\text{п}} = -\operatorname{grad}\varphi^e, \quad \vec{H}_{\text{п}} = -\operatorname{grad}\varphi^m$$

Тогда в изотропном случае (когда $\varepsilon, \mu$ можно вытащить из-под дивергенции) получим, с учётом уравнения непрерывности ($\frac{\partial}{\partial t}\rho = i\omega\rho = -\operatorname{div}\vec{j}$):

$$\Delta\varphi^e = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho^e, \quad \Delta\varphi^m = -\frac{4\pi}{\mu}\rho^m \tag{4}$$

Граничные условия найдутся из полей:

$$\vec{E}_\tau = 0 \Rightarrow \varphi^e\Big|_S = 0, \quad H_n = 0 \Rightarrow \frac{\partial\varphi^m}{\partial n}\Big|_s = 0$$

Теперь займёмся нахождением коэффициентов в разложении по собственным модам. Для этого домножим первое уравнение системы (3) на $\vec{E}_q$, второе на $\vec{H}_q$ и проинтегрируем по области резонатора. В силу ортогональности сумма выродится в одно слагаемое с $q = p$. Заметим, что интегралы $\int \vec{E}_{\text{п}}\vec{E}_q \mathrm{d}V = 0$ и тоже самое для поля $\vec{H}$. Это нетрудно доказать самим. После несложных преобразований получим

$$e_p = \frac{i}{\omega^2 - \omega_p^2}\frac{1}{N_p}\int\limits_V \left(\omega \vec{j}^e \vec{E}_p - \omega_p \vec{j}^m \vec{H}_p\right) \mathrm{d}V\,, \tag{5}$$

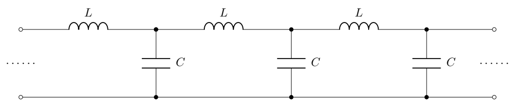
$$h_p = \frac{i}{\omega^2 - \omega_p^2}\frac{1}{N_p}\int\limits_V \left(\omega_p \vec{j}^e \vec{E}_p - \omega \vec{j}^m \vec{H}_p\right) \mathrm{d}V$$

Итак, мы решили задачу о возбуждении токами в резонаторе. При этом поле получилось суммой двух полей: вихревого и потенциального. Вихревое мы находим как ряд, коэффициенты которого находятся интегрированием

(5). Потенциальное же находится через решение уравнения Пуассона на потенциалы (4). А результирующее возбуждённое поле запишется в виде (2).

# 7. Билет 7

## 7.1. Телеграфные уравнения для идеальной линии. Погонные параметры линии. Волновое уравнения, общий вид его решения. Понятие волнового сопротивления линии в терминах тока и напряжения




Теория в первую очередь применяется для $TEM$-волн. В описании применяют цепочки. $\lambda \gg l$, $l$– размер одного звена цепи. $C$– погонная емкость, $L$– погонная индуктивность.

Рассмотрим двупроводную линию. $Q$– заряд на единицу длины этой линии. Рассмотрим сечение этой двупроводной линии $z = \text{const}$. Напряжение между двумя проводами в этом сечении запишется как:

$$V(z) = \int\limits_{(1)}^{(2)} E_l \, \mathrm{d}l \,,$$

этот интеграл в сечении $z = \text{const}$ **не будет** зависеть от формы контура, поскольку структура поля $\vec{E}$ в $TEM$-волне электростатична.

$$\vec{E} = \vec{E}_\perp$$
$$\vec{E}_\perp = -\boldsymbol{\nabla}_\perp \varphi$$
$$\Delta_\perp \varphi = 0 + \text{гр.усл.}$$

А это и означает, что поле $\vec{E}$ потенциально в перпендикулярном направлении. При этом

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot} \left[ \boldsymbol{\nabla}_\perp \varphi(\vec{r}_\perp) e^{-ihz} \right] \neq 0$$

Уравнения, связывающие ток $I$ и напряжение $V$ называются телеграфными. Они получаются из законов Кирхгофа.

Приращение заряда $\Delta q = Q \Delta z$ на участке $\Delta z$ за время $\Delta t$ равно:

$$\Delta(\Delta q) = \Delta q(t + \Delta t) - \Delta q(t)$$

С другой стороны, изменение заряда есть разность подтекающих и оттекающих токов:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta q) = I(z) - I(z + \Delta z) = \frac{\partial}{\partial t}(Q \Delta z)$$

Осталось только выполнить предельный переход. Из закона сохранения заряда следует **первое телеграфное уравнение**:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial z}$$

Второе уравнение получим из закона электромагнитной индукции

$$\oint E_l \,\mathrm{d}l = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\iint \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S}}_{\Delta\psi} = V(z + \Delta z) - V(z)$$

По определению индуктивности:

$$\Delta\psi = \frac{\Delta L}{c} I = \frac{L \Delta z}{c} I$$

Получаем **второе телеграфное уравнение**

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{c^2} L \frac{\partial I}{\partial t}$$

# 8. Билет 8

## 8.1.

# 9. Билет 9

## 9.1. Затухание волн в линии передач, обусловленное потерями энергии в металлической стенке.

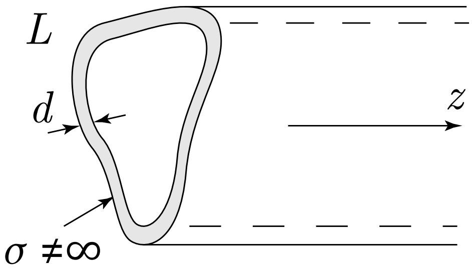



Рис. 29. ЛП с неидеальными стенками

Имеется полая ЛП, заполненная либо $\varepsilon, \mu$, либо ничем. Стенки сделаны из хорошего, но не идеального проводника:

$$\varepsilon_{wall} = \varepsilon' + i\varepsilon''$$
$$w \ll 4\pi\sigma, \varepsilon'' = -\frac{4\pi\sigma}{w} \Rightarrow |\varepsilon''_{wall}| > |\varepsilon'_{wall}|$$
$$\varepsilon \approx -i\frac{4\pi\sigma}{w}, |\varepsilon''| \gg 1$$

На поверхности хорошего проводника выполняется граничное условие Леонтовича.

$$\vec{E}_\tau = \eta_s \left[\vec{H}_\tau \times \vec{n}\right],$$

$\eta_s$ - поверхностный импеданс. В проводнике волна быстро затухает:

$$E_x \sim e^{-\frac{1+i}{\delta}x} e^{iwt}, \ \delta = \frac{c}{\sqrt{8\pi\sigma\mu w}},$$

где $\delta$ - толщина скин-слоя, $k = \frac{1+i}{\delta}$ - волновое число в стенке. Поля слева от границы удовлетворяют граничному условию:

$$\vec{E}_\tau = \eta_s \left[\vec{H}_\tau \times \vec{n}\right],$$

$\vec{n}$ - нормаль вглубь проводника. При этом:

$$\eta_s = \sqrt{\frac{\mu_{wall}}{\varepsilon_{wall}}} = \sqrt{i\frac{w\mu_{wall}}{4\pi\sigma}}$$

Это точное решение в случае, когда рассматривается бесконечная металлическая полуплоскость. У нас толщина проводника конечная, и для использования г.у. Леонтовича нужны дополнительные ограничения на параметры стенки $d$.

Во-первых, толщина стенки должна быть много больше толщины скин-слоя, чтобы волны успели затухнуть. Во-вторых, так как мы изначально не накладывали ограничений на форму стенки, она может быть произвольной формы, а значит и структура поля внутри проводника будет различной для разных участков поверхности. Чтобы рассматривать малые участки как линейные, необходимо, чтобы радиус кривизны поверхности был много больше толщины скин-слоя. В итоге получаем 3 условия:

$$\sigma \gg w,\ \delta \ll R_{\text{кр}},\ \delta \ll d$$

В таком случае можно пользоваться г.у. Леонтовича.

Рассмотрим участок ЛП от $z$ до $z + \Delta z$. При распространении, часть энергии волны диссипатирует в стенках:

$$\begin{aligned} &\Pi(z) = \Pi(z + \Delta z) + \Delta P_{wall} \\ &\Delta P_{wall} = P_{wall} \Delta z, \end{aligned}$$

где $P_{wall}$ - количество энергии, потерянное в стенках на единицу длины (погонная мощност потерь), а $\Pi$ - мощность волны.

$$P_{wall} = -\frac{\Pi(z + \Delta z) - \Pi(z)}{\Delta z},\ \Delta z \to 0,$$

$$P_{wall} = -\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}z} - \text{дифференциальный ЗСЭ}$$

Рассмотрим поля в ЛП:

$$\begin{aligned} &\vec{E}, \vec{H} \sim e^{-ihz},\ h = h' + ih'' \\ &|\vec{E}|, |\vec{H}| \sim e^{h''z} \end{aligned}$$

Здесь везде речь идет о среднем потоке энергии!

$$\begin{aligned} &\Pi \sim |\vec{E}|, |\vec{H}| \sim e^{2h''z} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}z} = 2h''\Pi \Rightarrow h'' = -\frac{P_{wall}}{2\Pi} \end{aligned}$$

При переходе здесь пользуясь граничным условием Леонтовича получим:

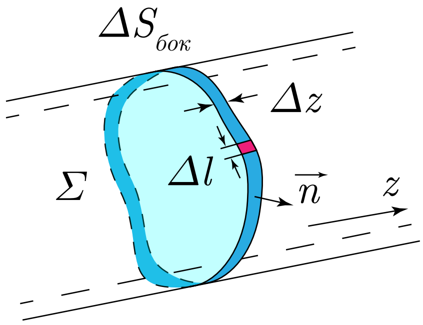



Рис. 30. иллюстрация к интегралу по площади

$$\Delta P_{wall} = \iint\limits_{S_{\text{бок}}} \bar{S}_n \mathrm{d}S = \iint\limits_{S_{\text{бок}}} \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}\left\{\left[\vec{E} \times \vec{H}^*\right]\right\}_n \mathrm{d}S =$$
$$= \frac{c}{8\pi} \oint\limits_L \mathrm{Re}\{\eta_s\} |\vec{H}_\tau|^2 \mathrm{d}l \Delta z,$$

и тогда выражение для $h''$ принимает вид:

$$h'' = -\frac{P_{wall}}{2\Pi} = -\frac{\mathrm{Re}\{\eta_s\} \oint\limits_L |\vec{H}_\tau|^2 \mathrm{d}l}{2\,\mathrm{Re}\{\eta_{\perp_{\text{в}}}\} \iint\limits_\Sigma |\vec{H}_\perp|^2 \mathrm{d}S}$$

Можно ввести $L_{\text{затух}}$ - расстояние, на котором амплитуда колебнаия спадает в $e$ раз:

$$|h''| = \frac{1}{L_{\text{затух}}}$$

## 9.2. Лемма Лоренца и теорема взаимности для двух систем монохроматических источников.

**Лемма Лоренца**

Эта лемма относится к гармоническим полям и токам

$$\vec{E}, \vec{H}, \vec{j} \sim e^{iwt}$$

Рассмотрим две системы источников (токи, в общем случае, и магнитные $\vec{j}^m$) в одинаковой среде $\varepsilon, \mu$. Токи пораждают соответствующе поля:

$$\vec{j}_1^{e,m} \sim e^{iwt} \to \vec{E}_1, \vec{H}_1, \vec{j} \sim e^{iwt}$$
$$\vec{j}_2^{e,m} \sim e^{iwt} \to \vec{E}_2, \vec{H}_2, \vec{j} \sim e^{iwt}$$

Частота $w$ этих источников одинаковая - эти источники **монохроматиче-**

**ские**. Мы можем записать уравнения Максвелла в общем виде, с учетом фихтивных токов:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{H}_1 &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}_1^{\,e} + \frac{iw}{c}\varepsilon\vec{E}_1 | \cdot \vec{E}_2 \\
\operatorname{rot}\vec{E}_1 &= -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_1^{\,m} - \frac{iw}{c}\mu\vec{H}_1 | \cdot \vec{H}_2 \\
\operatorname{rot}\vec{H}_2 &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}_2^{\,e} + \frac{iw}{c}\varepsilon\vec{E}_2 | \cdot \vec{E}_1 \\
\operatorname{rot}\vec{E}_2 &= -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_2^{\,m} - \frac{iw}{c}\mu\vec{H}_2 | \cdot \vec{H}_1
\end{aligned}$$

Используя соотношение:

$$\operatorname{div}\left[\vec{A}\times\vec{B}\right] = \vec{B}\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\operatorname{rot}\vec{B}$$

преобразуем 4 уравнения выше, складывая все уравнения. В итоге получим:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left[\vec{E}_1\times\vec{H}_2\right] - \operatorname{div}\left[\vec{E}_2\times\vec{H}_1\right] &= \\
&= \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}_1^{\,e}\vec{E}_2 - \vec{j}_1^{\,m}\vec{H}_2 - \vec{j}_2^{\,e}\vec{E}_1 + \vec{j}_2^{\,m}\vec{H}_1\right)
\end{aligned}$$

Далее, интегрируем по произвольному объему, охватывающему эти источники, и применяя формулу Гаусса-Остроградского получим:

$$\begin{aligned}
\oint\!\!\!\oint_S \left[\vec{E}_1\times\vec{H}_2\right] - \left[\vec{E}_2\times\vec{H}_1\right]\vec{n}\,\mathrm{d}S &= \\
&= \frac{4\pi}{c}\int_V \left(\vec{j}_1^{\,e}\vec{E}_2 - \vec{j}_1^{\,m}\vec{H}_2 - \vec{j}_2^{\,e}\vec{E}_1 + \vec{j}_2^{\,m}\vec{H}_1\right)\mathrm{d}V
\end{aligned}$$

Это соотношение и есть формулировка **леммы Лоренца**. Такие соотношения позволяют связывать решения двух разных задач, зная решение простой задачи, можно решить сложную.

**Теорема взаимности**

Распространим объем $V \to \infty$ в лемме Лоренца. В таком случае поверхностью интегрирования $S$ может быть сфера радиуса $R \to \infty$.

Источники обеих систем ограничены в пространстве. При большом удалении, поля от источников представляют собой сферические волны. У сферической волны, на бесконечности можно рассматривать ее малый участок как плоский, тогда волны будут чисто поперечными. Волновое сопротивление среды:

$$\frac{E_\perp}{H_\perp} = \eta_{\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

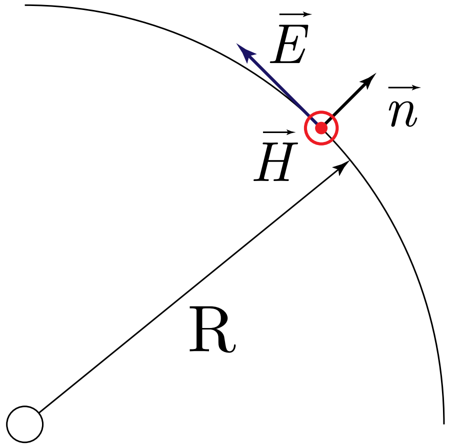



Рис. 31. К теореме взаимности

Выражение выше - приближение характер, однако при устремлении $R \to \infty$, его точность увеличивается. Тогда имеем:

$$\vec{E}_{1,2} = \eta_{\text{в}} \left[\vec{H}_{1,2} \times \vec{n}\right],$$

где $\vec{n}$ - направление распространения волны (внешняя нормаль к $S$). $\eta_{\text{в}}$ - одинакова для систем источников 1 и 2. Тогда справедливо:

$$\left[\vec{E}_1 \times \vec{H}_2\right] = \eta_{\text{в}} \left[\left[\vec{H}_1 \times \vec{n}\right] \times \vec{H}_2\right] = \eta_{\text{в}} \left(\vec{n}(\vec{H}_1, \vec{H}_2) - \vec{H}_2 \underbrace{(\vec{H}_1, \vec{n})}_{=0}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \left[\vec{E}_1 \times \vec{H}_2\right] &= \eta_{\text{в}}\vec{n}(\vec{H}_1, \vec{H}_2) \\ \left[\vec{E}_2 \times \vec{H}_1\right] &= \eta_{\text{в}}\vec{n}(\vec{H}_2, \vec{H}_1) \end{aligned}\right\} \left[\vec{E}_1 \times \vec{H}_2\right] - \left[\vec{E}_2 \times \vec{H}_1\right] \equiv 0$$

Т.е. левая часть в лемме Лоренца <u>при большом расстоянии</u> равна нулю. Это верно с точночтью до членов порядка $\frac{1}{R^2}$. Оставшийся в правой части интеграл разделим на два, таким образом, получаем формулировку **тоеремы взаимности**:

$$\int\limits_V \left(\vec{j}_1^e \vec{E}_2 - \vec{j}_1^m \vec{H}_2 - \vec{j}_2^e \vec{E}_1 + \vec{j}_2^m \vec{H}_1\right) \mathrm{d}V = 0$$

$$\int\limits_V \left((\vec{j}_1^e, \vec{E}_2) - (\vec{j}_1^m, \vec{H}_2)\right) \mathrm{d}V = \int\limits_V \left((\vec{j}_2^e, \vec{E}_1) - (\vec{j}_2^m, \vec{H}_1)\right) \mathrm{d}V$$

Эта теорема также используется для сведения сложных задач к простым. **Условия выполнения теоремы**:

- Среды должны быть линейными, $\varepsilon, \mu$ - не должны зависить от полей.

- Рассматриваем изотропную среду

# 10. Билет 10

## 10.1.

# 11. Билет 11

## 11.1.

# 12. Билет 12

## 12.1. Общая постановка задачи о собственных электромагнитных колебаниях в полых резонаторах с идеально проводящими стенками. Действительность собственных частот идеального резонатора.

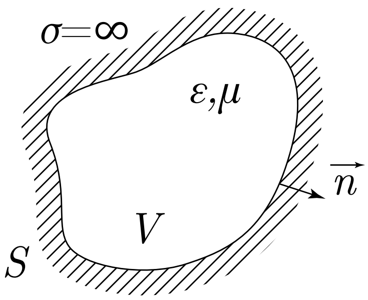



Рис. 32. Резонатор произвольной формы

Рассматриваем любую металлическую полость произвольной формы. Для идеального проводника выполняются граничные условия на поверхности проводника $S$:

$$E_\tau\big|_S = 0,\ \ H_n\big|_S = 0$$

Для собственных колебаний необходимо решить систему из уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{H} = i\dfrac{w}{c}\varepsilon\vec{E} \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -i\dfrac{w}{c}\mu\vec{H} \end{cases}$$

Возьмем ротор от второго уравнения, и подставим $\operatorname{rot}\vec{H}$ из первого, получим:

$$-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} + k^2\vec{E} = 0,\ \ k = \frac{w}{c}\sqrt{\mu\varepsilon}$$

Нас интересует решение

$$\Delta\vec{E} + k^2\vec{E} = 0,\ \text{ при условии} \begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = 0 \\ E_\tau\big|_S = 0 \end{cases}$$

$-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}$ представляется в виде:

$$-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \Delta\vec{A} - \boldsymbol{\nabla}\operatorname{div}\vec{A}$$

В декартовой системе координат:

$$\Delta E_{x,y,z} + k^2 E_{x,y,z} = 0$$

Докажем свойства решения этой задачи.

**Спектр собственных частот действителен**

$$\operatorname{div}\left[\vec{E}\times\vec{H}^*\right]=\vec{H}^*\operatorname{rot}\vec{E}-\vec{E}\operatorname{rot}\vec{H}^*$$

Подставим сюда выражения для ротора из уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left[\vec{E}\times\vec{H}^*\right]=&\vec{H}^*(-\frac{iw}{c}\mu\vec{H})-\frac{1}{ik_0\varepsilon}\operatorname{rot}\vec{H}\operatorname{rot}\vec{H}^*=\\&=-ik_0\mu|\vec{H}|^2-\frac{1}{ik_0\varepsilon}|\operatorname{rot}\vec{H}|^2\end{aligned}$$

Проинтегрируем по объему резонатора, пользуясь теоремой Остроградского-Гаусса:

$$\int\limits_V\operatorname{div}\left[\vec{E}\times\vec{H}^*\right]\mathrm{d}V=\oiint\limits_S\left[\vec{E}\times\vec{H}^*\right]_n\mathrm{d}S=0,\ \text{т.к.}E_\tau=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\limits_V-ik_0\mu|\vec{H}|^2-\frac{1}{ik_0\varepsilon}|\operatorname{rot}\vec{H}|^2\mathrm{d}V=0$$

Тогда

$$k_0^2=\frac{\int\limits_V\frac{1}{\varepsilon}|\operatorname{rot}\vec{H}|^2\mathrm{d}V}{\int\limits_V\mu|\vec{H}|^2\mathrm{d}V}>0,\ \text{при }\varepsilon,\mu>0$$

т.е. спектр частот действителен. Частота моды $p$ $w_p$ - действительна при $\sigma=\infty,\varepsilon,\mu>0$. Колебания происходят без затухания:

$$\underbrace{\int\limits_V\frac{\varepsilon|\vec{E}|^2}{16\pi}\mathrm{d}V}_{\overline{W^e}}=\underbrace{\int\limits_V\frac{\mu|\vec{H}|^2}{16\pi}\mathrm{d}V}_{\overline{W^m}}$$

Происходит перекачка энергии $\overline{W^e}\Leftrightarrow\overline{W^m}$. При пустом резонаторе $\varepsilon=\mu=1$:

$$k_p=\frac{w_p^{(0)}}{c}$$

Если $\varepsilon,\mu>0$:

$$w_p=\frac{k_pc}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{w_p^{(0)}}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

# 13. Билет 13

## 13.1.