

Лекции по прикладной электродинамике

Бугров А.В., Сарафанов Ф.Г.

sfg180@yandex.ru

Disclaimer. В данном документе нами набраны лекции по прикладной электродинамике, прочитанные на 3 курсе радиофизического факультета НН-ГУ Владимиром Борисовичем Гильденбургом. Разрешено копирование и распространение данного документа с обязательным указанием первоисточника.

28 февраля — 10 марта 2019 г.

Нижний Новгород

Оглавление

1. Электромагнитные волны в линиях передачи . . .	2
0.1. Волны в линиях передачи	2
1. Волны в линиях передачи с идеально проводящими грани-	
 цами	6
1.1. Математическая формулировка задачи отыскания волн в лини-	
ях передачи	7
1.2. Дисперсионное уравнение	8
1.3. Моды в линиях передачи	8
1.4. Кинематические соотношения	11
1.5. Потоки энергии в линии передачи	12
1.6. Главные (ТЕМ) волны в линиях передачи с идеальными грани-	
цами	13
1.6.1. Внутренняя задача	14
1.6.2. Внешняя задача	14
1.7. ТЕ и ТМ волны в идеальных линиях передачи закрытого типа .	17
1.7.1. ТЕ и ТМ волны в прямоугольном волноводе	17
1.7.2. ТЕ и ТМ волны в круглом волноводе	24

Часть 1.

Электромагнитные волны в линиях передачи

0.1. Волны в линиях передачи

Основное - передача электромагнитной волны от источника к приёмнику. Основная теория - уравнения Максвелла. Задача сволится к краевой задаче.

Для монохроматических полей (синусоидально зависящих от времени):

$$\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot \exp(i\omega t)$$

где $\vec{E}_0(\vec{r})$ - комплексная амплитуда. Зависимость от времени присутствует в виде отдельного слагаемого - это преимущество, помогает превратить уравнения Максвелла в алгебраическое выражение за счёт разделения переменных.

$$\vec{E}_{nast} = Re(\vec{E}_0(\vec{r})) \cdot \exp(i\omega t)$$

$$E_x = |E_x(\vec{r})| \exp(i\omega t)$$

Чаще всего будем писать так : $\vec{E}_0(\vec{r}), \vec{H}_0(\vec{r})$ - комплексные амплитуды (чтобы перейти к реальным нужно домножить на $\exp(i\omega t)$ и взять реальную часть)

Уравнения Максвелла

$$rot(\vec{H}(\vec{r})) = \frac{4\pi}{c} \cdot (\vec{j})^e + \frac{i\omega}{c} \cdot \epsilon \vec{E}$$

$$rot(\vec{E}) = -\frac{i\omega\mu}{c} \vec{H}$$

$$\text{div}(\epsilon \vec{E}) +$$

$$frac{4\pi(i\omega)}{c} \cdot (\vec{j})^e = 0$$

$$\text{div}(\mu \vec{H}) = 0$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = rot(\vec{A}_e)$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - (1/c) \frac{\partial \vec{A}^e}{\partial t} = -\nabla\varphi - \frac{i\omega}{c} \vec{A}^e$$

$\frac{\partial}{\partial t}$ заменяется на $i\omega$ где φ - скалярный потенциал, \vec{A}^e - векторный потенциал;

Одно можно выразить через другое из условия нормировки Лоренца:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c} i\omega\Phi &= 0 \\ \varphi &= -\frac{c}{i\omega\varepsilon\mu} \operatorname{div} \vec{A} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} \\ \vec{E} &= \frac{1}{ik\varepsilon\omega} (\nabla \operatorname{Div} - \Delta) \vec{A} \\ &\vec{A}^e\end{aligned}$$

$\varepsilon\mu$ во всём курсе будут рассматриваться, как не зависящие от времени и координат. Линия передачи - ... Существуют два направления: продольное и поперечное. При описании через векторный потенциал проще перейти к уравнению Гемгольца:

$$\Delta \vec{A}_e + K^2 \vec{A}_e = 0$$

Сначала рассмотрим без источников (поэтому в формуле справа 0) свободные волны. Как записывается поле для электромагнитной волны в линии передачи?

$$\vec{E}(\vec{r}_\perp, z, t) = \vec{E}_0(\vec{r}_\perp) \exp\{i\omega t - hz\}$$

h - продольное волновое число (постоянная распространения)

Мы рассмотрим волну бегущую по оси z .

$$E_{x, \text{наст}} = \operatorname{Re} E_x = |E_x(\vec{r}_\perp)| \cos(\omega t - hz + \varphi(\vec{r}_\perp))$$

Самый простой метод - нужно задать векторный потенциал в виде:

$$\vec{A}_e = \varphi^e(\vec{r}_\perp) \exp(-ihz) \vec{z}_0$$

Мы его задаём проще: направляем по оси z , зависимость такая же, как и у поля, а как зависит от \vec{r}_\perp не знаем. $\varphi^e(\vec{r}_\perp)$ поперечная волновая функция.

Покажем, что решение уравнения Максвелла можно найти в таком виде:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{A}_e) &= -ih\varphi^e(\vec{r}_\perp)\exp(-ihz) \\ \nabla(\operatorname{div}(\vec{A}_e)) &= (-h^2\varphi^e(\vec{r}_\perp)\vec{z}_0 - ih\nabla_\perp\varphi^e(\vec{r}_\perp)\exp(-ihz) \\ \operatorname{rot}(\vec{A}_e)) &= [\nabla(A_z^e, \vec{z}_0)] = [\nabla_\perp\varphi^e(\vec{r}_\perp, \vec{z}_0] \\ \nabla &= \nabla_\perp + \vec{z}_0\frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

ТМ - волна- поперечная магнитная волна(магнитное чисто поперечное, а Е и продольное и поперечное)

$$\begin{aligned}E_z &= \frac{\kappa^2}{ik_0\varepsilon\mu}\nabla_\perp\varphi^e(\vec{r}_\perp\exp\{i\omega - hz\}) \\ \vec{E}_\perp &= -\frac{h}{k_0\varepsilon\mu}\nabla_\perp\varphi^e(\vec{r}_\perp\exp\{i\omega - hz\}) \\ \vec{H}_\perp &= \frac{1}{\mu}[\nabla_\perp\varphi^e(\vec{r}_\perp, \vec{z}_0]\exp\{i\omega - hz\} \\ H_z &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp \\ \vec{E}_\parallel &= \vec{z}_0 E_z\end{aligned}$$

$$\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}_e}{\partial t^2} = 0$$

Это уравнение Гемгольца при произвольной зависимости от времени.

$$\begin{aligned}\nabla(A_z) + k^2 A_z &= 0 \\ K^2 &= \frac{\omega}{c^2}\varepsilon \\ \nabla &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \nabla_\perp &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\end{aligned}$$

Это уравнение Гемгольца при гармонической зависимости от времени.

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = -h^2$$

$$\begin{aligned} A_z^e &= \varphi^e(\vec{r}_\perp \exp\{i\omega - hz\}) \\ \delta_\perp + (k^2 - h^2)\varphi^e &= 0 \end{aligned}$$

Функция φ^e должна удовлетворять двумерному уравнению Гемгольца.

$$\varkappa^2 = k^2 - h^2 = K_0^2 \varepsilon \mu - h^2 \delta_\perp \varphi^e + \varkappa^2 \varphi^e = 0$$

где \varkappa^2 - поперечное волновое число. Если φ^e удовлетворяет уравнению выше, то и удовлетворяет уравнению Максвелла.

ТЕ - волна - поперечная электрическая волна.

Уравнения Максвелла симметричны относительно полей, но мы получили неравноправие векторов. Это просто одно из решений. Но есть ещё одно решение. И чтобы его получить воспользуемся принципом двойственности.

ТЕ - волна - поперечная электрическая волна.

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{\varkappa^2}{ik_0 \varepsilon \mu} \nabla_\perp \varphi^m(\vec{r}_\perp \exp\{i\omega - hz\}) \\ \vec{H}_\perp &= -\frac{h}{k_0 \varepsilon \mu} \nabla_\perp \varphi^m(\vec{r}_\perp \exp\{i\omega - hz\}) \\ \vec{E}_\perp &= -\frac{1}{\varepsilon} [\nabla_\perp \varphi^m(\vec{r}_\perp, \vec{z}_0) \exp\{i\omega - hz\}] \\ E_z &= 0 \end{aligned}$$

φ не обязано быть таким же, поэтому мы ставим индексы m и n , но должно удовлетворять уравнению:

$$\delta_\perp \varphi^m + \varkappa^2 \varphi^m = 0$$

ТЕМ - волна. Когда $\varkappa = 0, h = k$ тогда $H_z = E_z = 0$. Это чисто поперечная

волна(ТЕМ)

$$\begin{aligned}
 H_z = E_z &= 0 \\
 \vec{E}_\perp &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \nabla_\perp \varphi(\vec{r}_\perp \exp\{i\omega - hz\}) \\
 \vec{H}_\perp &= \frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \varphi(\vec{r}_\perp), \vec{z}_0] \\
 &\exp\{i\omega - hz\}
 \end{aligned}$$

Эта волна удовлетворяет уравнению:

$$\nabla_\perp \varphi = 0$$

Свойства уравнений (не знаю каких)

- 1) Поля выражены через скалярные функции
- 2) Продольные компоненты пропорциональны этой волновой функции
- 3) Поперечные компоненты пропорциональны градиенту этой волновой функции
- 4) Нужно задать $\varphi^e \varphi^m$, чтобы можно было полностью описать поля.

1. Волны в линиях передачи с идеально проводящими границами

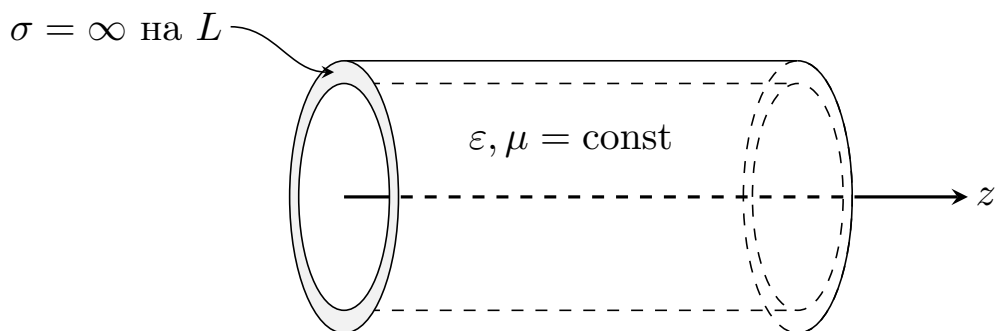


Рис. 1. Линия передачи

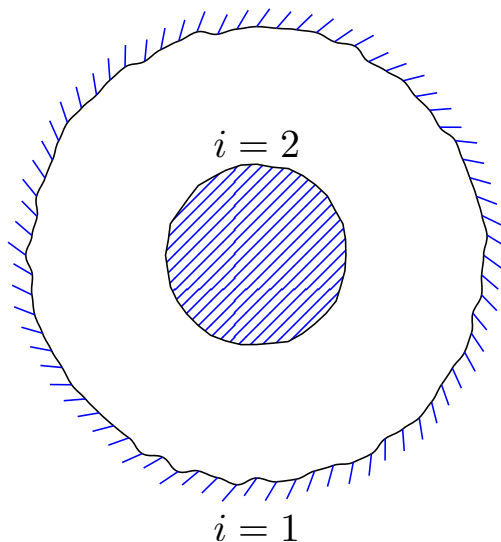


Рис. 2. Линия из разных проводников. Вид в разрезе

1.1. Математическая формулировка задачи отыскания волн в линиях передачи

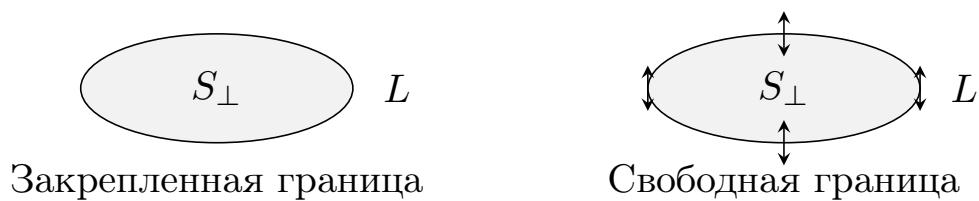


Рис. 3. Граничные условия Дирихле и Неймана в матфизике

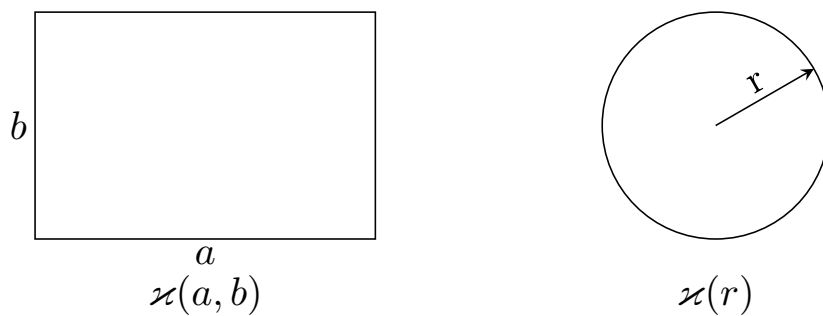


Рис. 4. Различная геометрия линии

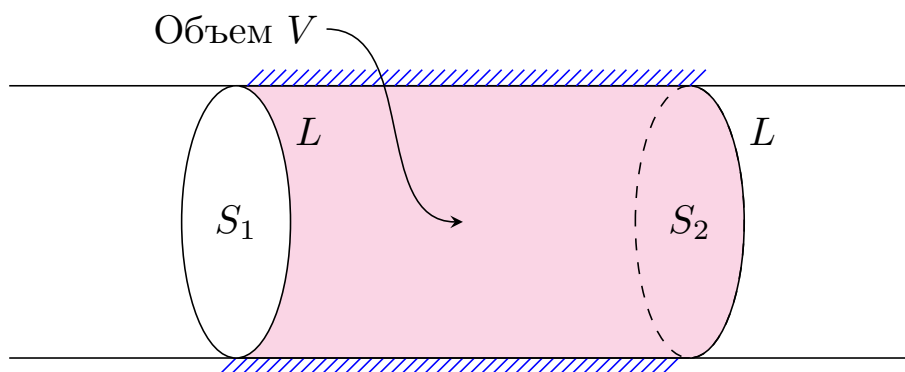


Рис. 5. Геометрия задачи

1.2. Дисперсионное уравнение

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

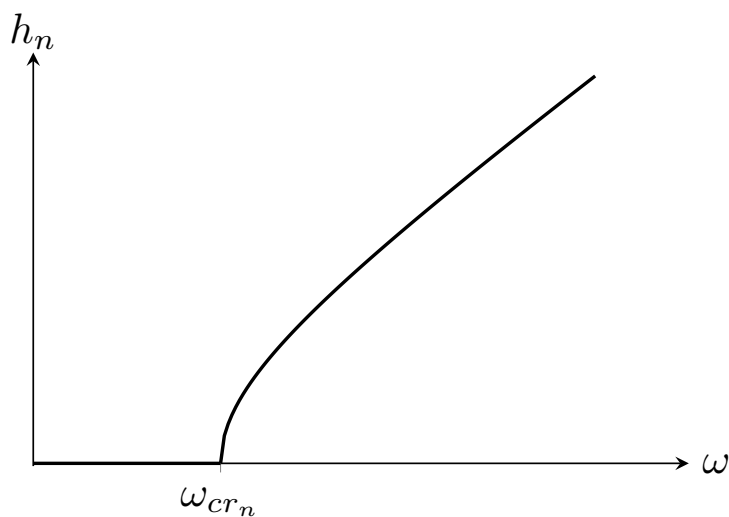


Рис. 6. Зависимость реальной части поперечного волнового числа от частоты

1.3. Моды в линиях передачи

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam,

quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

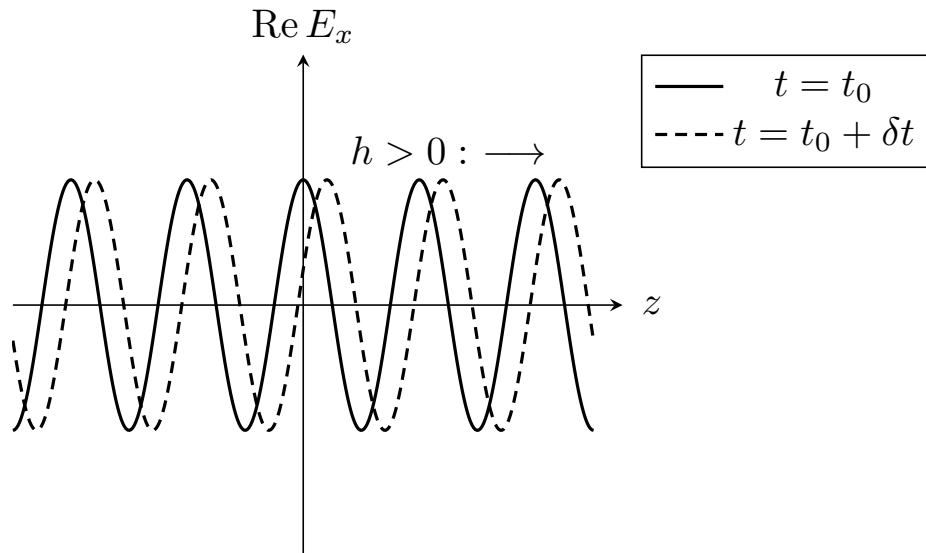


Рис. 7. Распространение волны ($h > 0$)

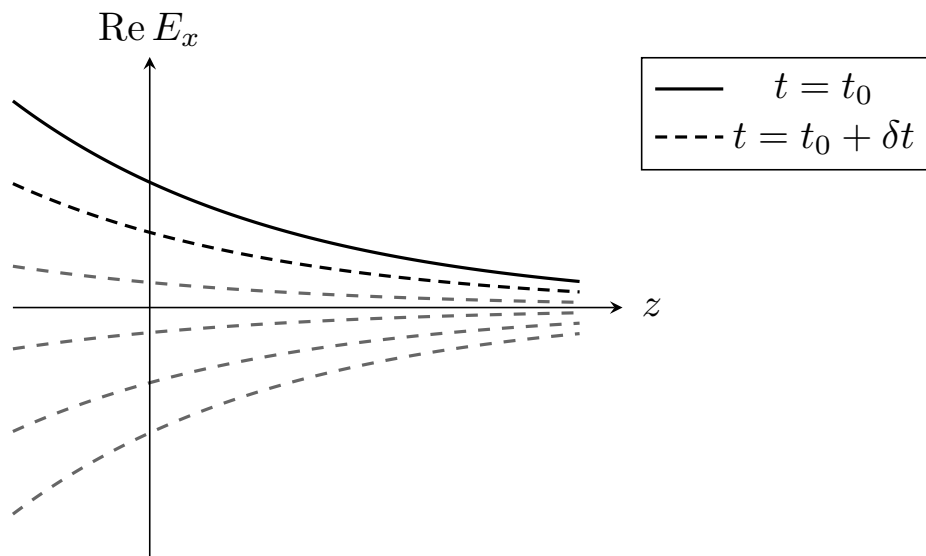


Рис. 8. Режим нераспространения ($h < 0$)

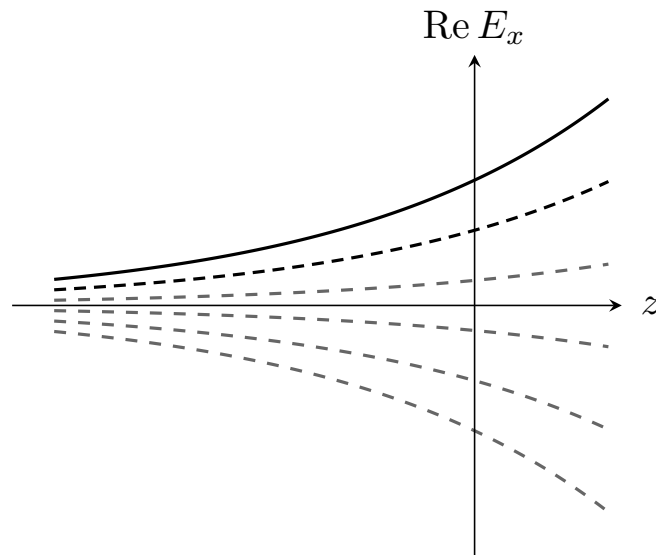
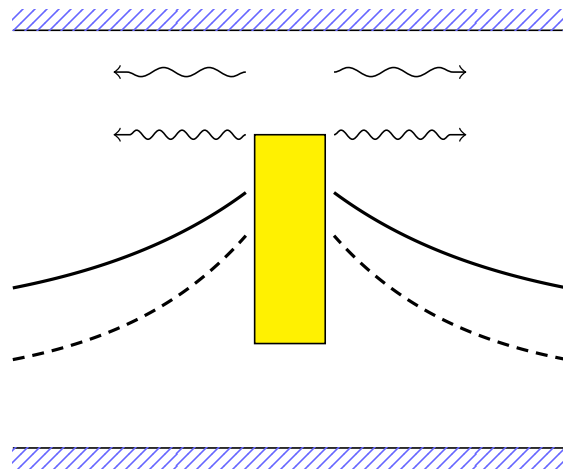
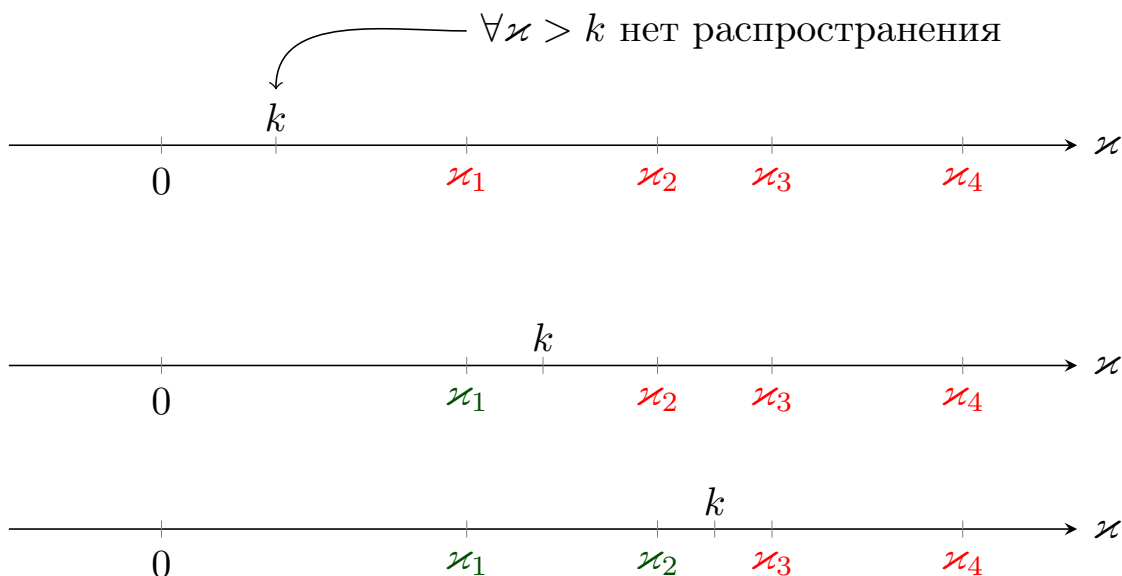
Рис. 9. Экспоненциальное нарастание амплитуды (при $h < 0$)

Рис. 10. Моды в линии передачи с источником



1.4. Кинематические соотношения

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

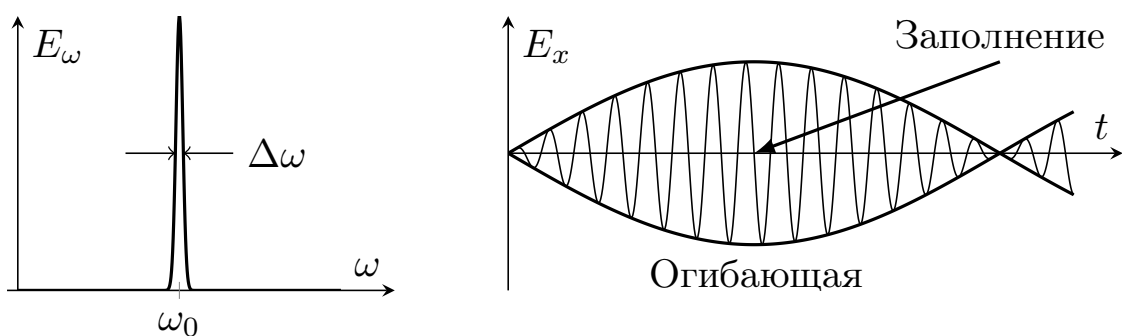


Рис. 11. Квазимонохроматический волновой пакет

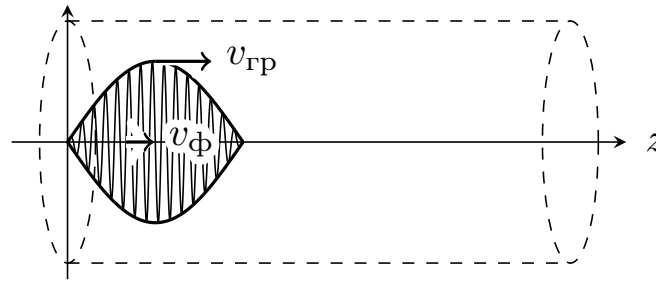


Рис. 12. Распространение волнового пакета

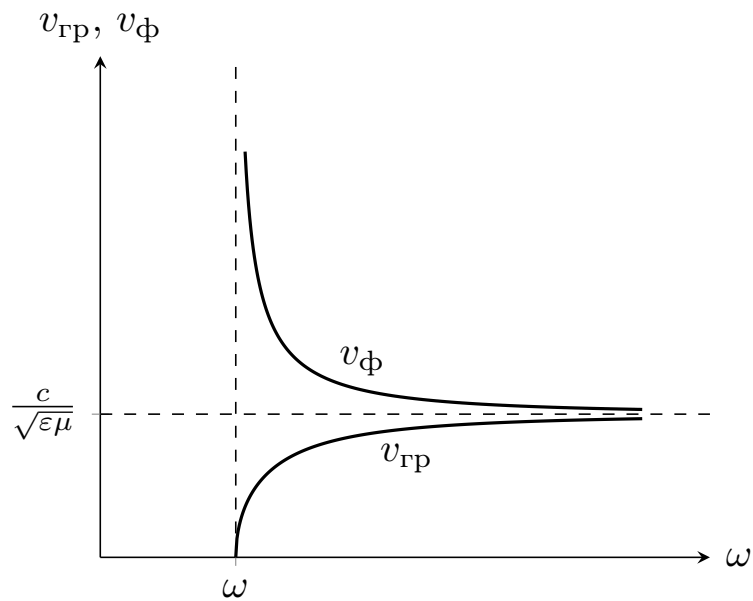


Рис. 13. Распространение волнового пакета

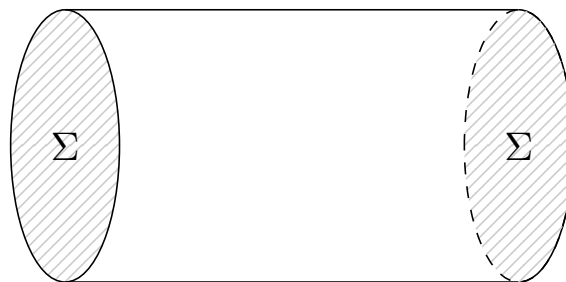


Рис. 14. Поток энергии через площадки в линии передачи

1.5. Поток энергии в линии передачи

1.6. Главные (ТЕМ) волны в линиях передачи с идеальными границами

У ТЕМ-волн поперечное волновое число $\varkappa = 0$:

$$\varkappa = 0 \Rightarrow h = k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}$$

Поля таких волн выражаются следующим образом через функцию φ :

$$\begin{aligned} \vec{E}_\perp &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \nabla_\perp \varphi \\ \vec{E}_\perp &= -\frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \varphi, \vec{z}_0] \end{aligned} \quad (1)$$

При этом выполняются **граничные условия**: на каждом из проводников (допустим, есть набор проводников, вдоль которых распространяется волна)

$$\varphi|_{l_i} = C_i,$$

причем константа не обязана быть одна для всех проводников.

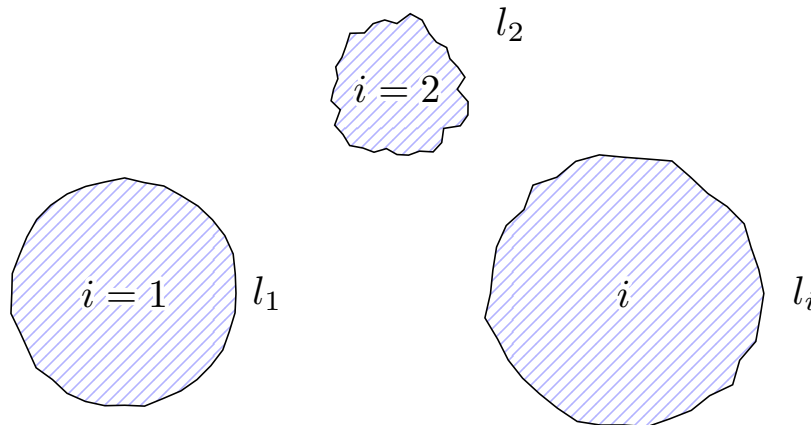


Рис. 15. Набор проводников в задаче

1.6.1 Внутренняя задача

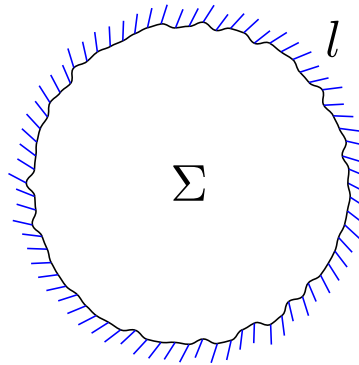


Рис. 16. Случай одного проводника

Пусть у нас есть только один проводник, в котором есть цилиндрическая полость (рис. 16). Рассмотрим внутреннюю задачу, т.е. распространение волны внутри цилиндрической полости. Оказывается, для граничного условия $\varphi_{\perp}|_l = C_1$ существует только тривиальное решение $\varphi_{\perp} = C_1$. В матфизике это доказывается. Начало доказательства такое:

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}(\varphi\nabla\varphi) = 0 \quad \left| \iint_{\Sigma} \right.$$

Это такая задача, которую проще доказать самому. Попробуйте это сделать сами.

1.6.2 Внешняя задача

Зададимся вопросом о решении той же задачи:

$$\Delta_{\perp}\varphi = 0, \quad \varphi|_l = \text{const}$$

Только теперь будем рассматривать её в области вне проводника, т.н. внешняя задача.

Для начала рассмотрим задачу попроще, поле нити (рис. 17). Решение её известно:

$$\Delta_{\perp}\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \sim \ln r$$

Характер убывания полей здесь $E_r \sim \frac{1}{r}$, а для магнитного поля в силу

импедансного соотношения $\frac{E_r}{H_\varphi} = \eta_{\perp\text{в}} = 1 \text{ H}_\varphi \sim \frac{1}{r}$:

$$E_r = H_\varphi \sim \frac{1}{r}$$

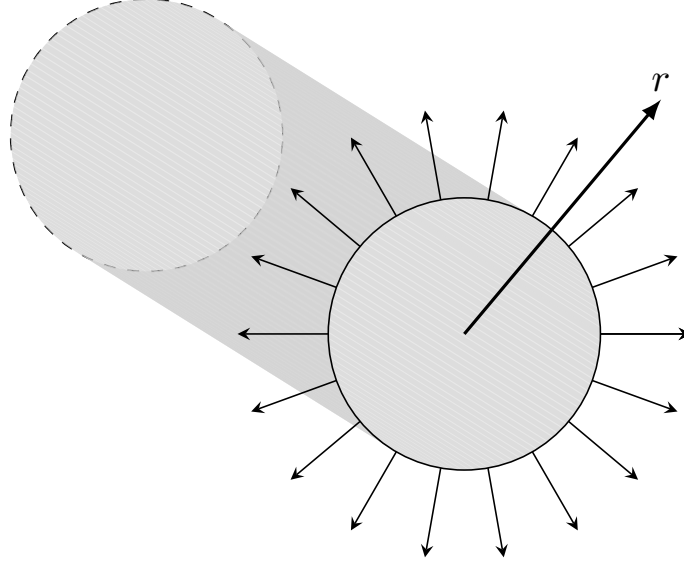


Рис. 17. Поле бесконечной проводящей нити

Посмотрим на поведение полей при $r \rightarrow \infty$. Говорят, нужно поставить граничные условия (или закон убывания) на бесконечности. Чем плох закон $\frac{1}{r}$?

Посчитаем средний по времени поток энергии через поперечное сечение, в котором распространяется волна. Сечение бесконечно, за исключением конечной площади проводника.

Сначала вычислим вектор Пойнтинга (средний по времени и в проекции на z):

$$\begin{aligned} \bar{S}_z &= \frac{c}{8\pi} \text{Re}(E_r \cdot H_\varphi^*) \sim \frac{1}{r^2} \\ \Pi &= \iint_{\Sigma} \bar{S}_z ds \sim \iint_{\Sigma} \frac{1}{r^2} (2\pi r dr) \sim \int_a^\infty = \ln \frac{\infty}{a} = \infty \end{aligned}$$

Интеграл расходится на бесконечности. Говорят, что расходимость носит логарифмический характер. Получили бесконечную мощность волны: такую волну невозможно создать реальным источником — волна не удовлетворяет критерию энергетической реализуемости.

Можно сделать важный вывод: **вдоль одиночного проводника ТЕМ-волна с конечной энергией распространяться не может.** А может, если проводников больше. Например, в линии из двух проводников (рис. 18) ТЕМ-волна уже возможна.

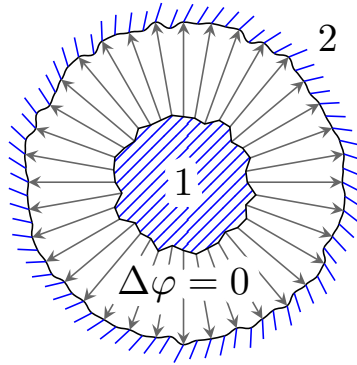


Рис. 18. Закрытая линия из двух проводников

Можно модифицировать задачу с нитью, если сделать нити две (рис. 19):

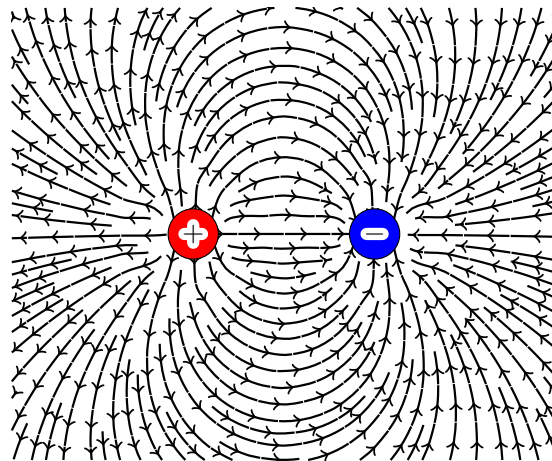


Рис. 19. Поле двухпроводной линии

В поперечном разрезе это поле диполя, а оно спадает быстрее, $\sim \frac{1}{r^2}$. Тогда

$$E_{\perp} \sim H_{\perp} \sim \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_z \sim \frac{1}{r^4}, \quad \Pi \sim \int_{L_{\text{характ}}}^{\infty} \frac{1}{r^3} dr$$

Мощность волны получится уже конечным числом, значит, в модифицированной задаче ТЕМ-волна энергетически реализуема.

Конечный вывод: ТЕМ-волна в идеальной линии передачи возможна, если число проводников ≥ 2 .

Например, в коаксиальной линии (рис. 20) ТЕМ-волна возможна.

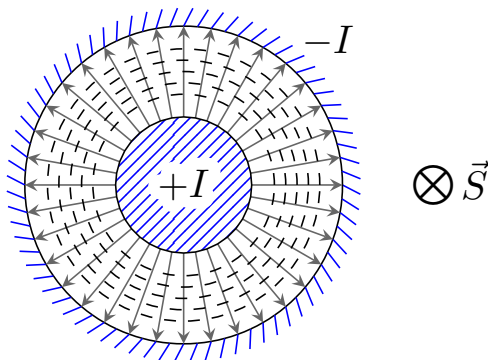


Рис. 20. Поле в коаксиальном кабеле

Зададимся вопросом: возможны ли в такой линии ТЕ и ТМ волны? Сформулируем утверждение, пока без доказательства: **в открытых линиях передачи ТЕ и ТМ волны не существуют.**

1.7. ТЕ и ТМ волны в идеальных линиях передачи закрытого типа

1.7.1 ТЕ и ТМ волны в прямоугольном волноводе

Решение для ТМ-волн. Займемся решением ТМ-волны в прямоугольном волноводе (рис. 21). Условимся что $a > b$. Эта задача поиска собственных функций φ^e и собственных значений κ :

$$\Delta_{\perp} \varphi^e + \kappa^2 \varphi^e = 0, \quad \varphi^e|_l = 0$$

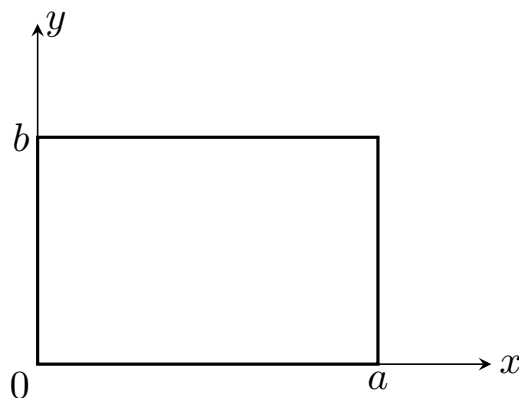


Рис. 21. Прямоугольный волновод

В матфизике эта задача о колебании мембраны с закрепленным краем. Она решается разделением переменных:

$$\varphi^e = X(x) \cdot Y(y)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial y^2} + \kappa^2 \varphi^e = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{XY} \right. \Rightarrow \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \kappa^2 = 0$$

Тут надо произнести магическую фразу: так как первое слагаемое функция от x , второе функция от y , и их сумма равна константе для любых x, y , значит – сами слагаемые тоже какие-то константы:

$$\frac{X''}{X} = -\kappa_x^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -\kappa_y^2$$

Определив таким образом константы, мы получаем:

$$\kappa_x^2 + \kappa_y^2 = \kappa^2$$

Пока мы не нашли само κ . Это собственное число, и оно подлежит определению. Прежде чем его найти, найдем собственные функции, решая уравнения

$$X'' + \kappa_x^2 X = 0, \quad Y'' + \kappa_y^2 Y = 0$$

Это уравнения известного вида, их решение

$$X = C_1 \cdot \cos \kappa_x x + C_2 \cdot \sin \kappa_x x \quad Y = A_1 \cdot \cos \kappa_y y + A_2 \cdot \sin \kappa_y y$$

Нужно удовлетворить граничным условиям:

$$\varphi^e|_{y=0} = 0 \Rightarrow X(x)Y(0) = 0 \quad \forall x \Rightarrow Y(0) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

$$\varphi^e|_{x=0} = 0 \Rightarrow X(0)Y(y) = 0 \quad \forall y \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \varphi^e|_{x=a} = 0 &\Rightarrow X(a)Y(y) = 0 \quad \forall y \Rightarrow \\ \Rightarrow X(a) = 0 &\Rightarrow \kappa_x a = m\pi, \quad m = \emptyset, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Поскольку $m = 0$ дает тривиальное решение, мы его откидываем.

$$\begin{aligned}\varphi^e|_{y=b} = 0 &\Rightarrow X(x)Y(b) = 0 \quad \forall x \Rightarrow \\ \Rightarrow Y(b) = 0 &\Rightarrow \kappa_y b = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Теперь мы получили выражения для X и Y :

$$\begin{aligned}X_m(x) &= C_2 \cdot \sin \frac{\pi m x}{a} \\ Y_n(x) &= A_2 \cdot \sin \frac{\pi n y}{b}\end{aligned}$$

Теперь можем окончательно записать выражения для собственных функций и собственных значений в решении ТМ-волн:

$$\left. \begin{aligned}\varphi_{mn}^e &= B_{mn} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} \\ \kappa_{mn}^2 &= \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\end{aligned} \right\}, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Решение для ТЕ-волн. Приведем решение без вывода:

$$\left. \begin{aligned}\varphi_{mn}^m &= B_{mn} \cos \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b} \\ \kappa_{mn}^2 &= \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\end{aligned} \right\}, \quad m, n = (0), 1, 2, \dots \quad (2)$$

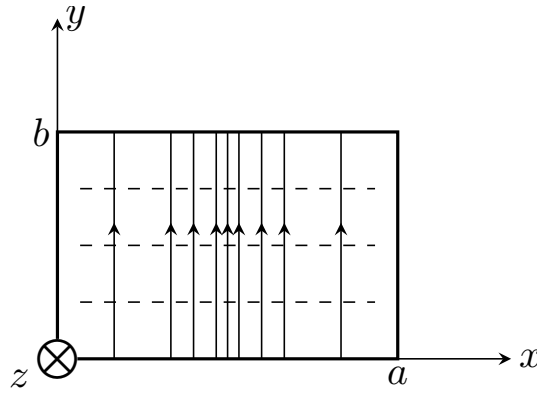
Важным отличием является то, что теперь одно из чисел m, n может быть равно нулю (решение от этого не станет тривиальным).

Низшая мода. По определению, низшая мода – та, у которой минимальное поперечное волновое число. Так как мы предполагали, что $a > b$, то в нашем случае это мода TE_{10} :

$$\kappa_{10} = \frac{\pi}{a} \quad \rightarrow \quad \omega_{cr 10} = \frac{\kappa_{10} \cdot c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

Именно моду TE_{10} чаще всего используют на практике в линиях передачи.

Рассмотрим перпендикулярную структуру поля TE_{10} -волны. Нарисуем силовые линии полей E и H в плоскости (x, y) – перпендикулярной распространению волны (рис. 22)

Рис. 22. Структура полей \vec{E} и \vec{H} (\vec{H} изображено пунктиром)

На границах волновода поле E равно нулю (в силу условия $E_\tau = 0$). Поле \vec{E} можем получить из уравнений (2),(1):

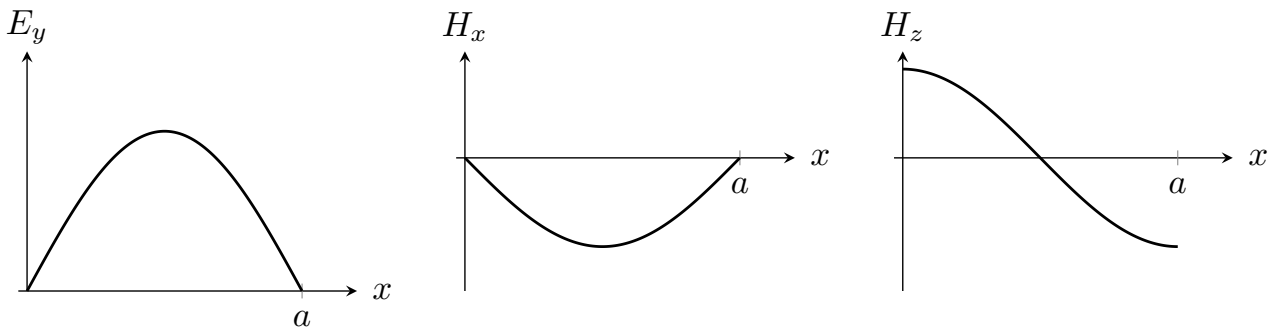
$$\vec{E} = \vec{E}_\perp = \vec{y}_0 E_0 \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \exp[i(\omega t - hz)],$$

где

$$h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

Поле H можно найти из импедансного соотношения (для ТЕ-волны):

$$\frac{E_y}{H_x} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{k}{h}$$

Рис. 23. Поперечная структура полей \vec{E} и \vec{H} (мода ТЕ)

За перенос энергии отвечают именно поперечные компоненты поля. Компонента поля $H_z \sim \cos \frac{\pi x}{a}$ также сдвинута по фазе во времени.

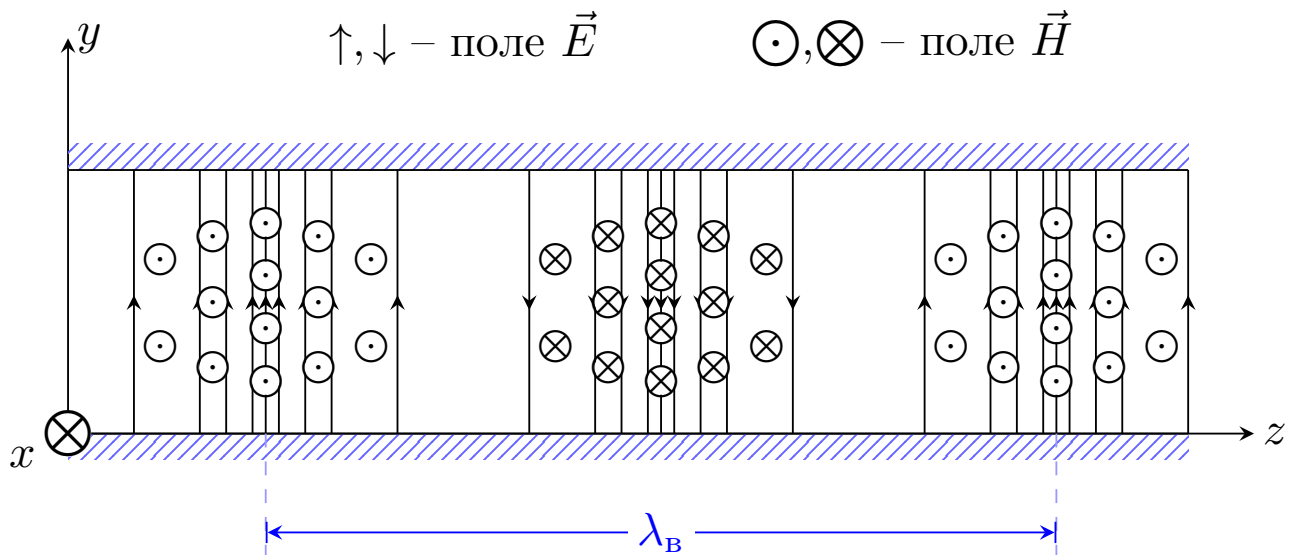


Рис. 24. Продольная структура полей \vec{E} и \vec{H} (мода TE)

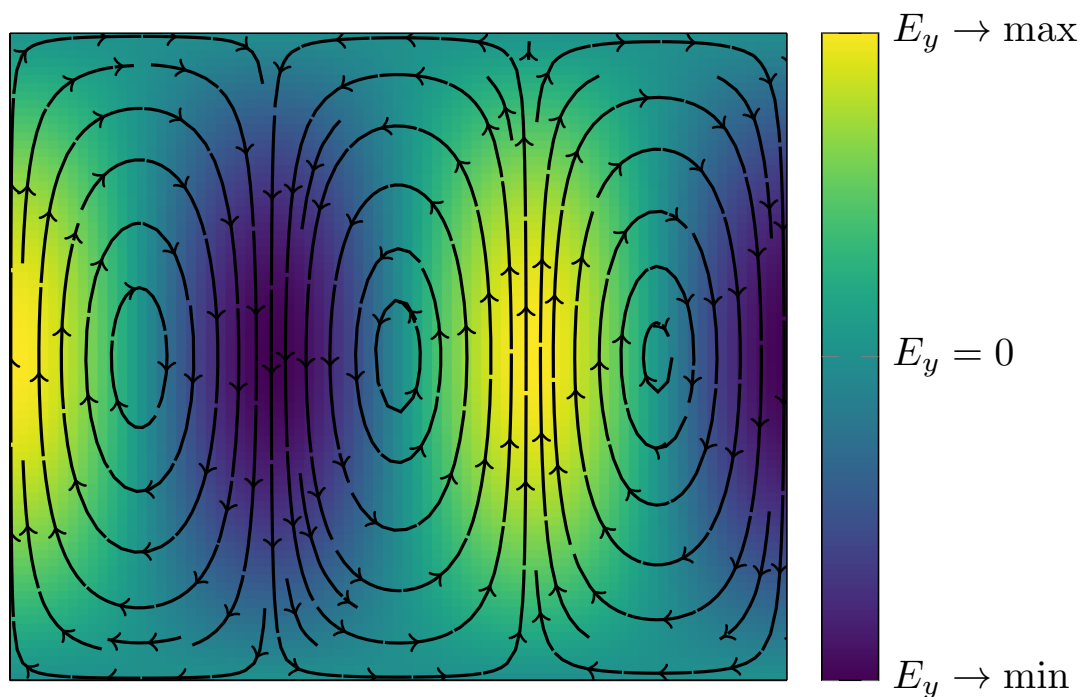


Рис. 25. Структура поля \vec{H} (изображены силовые линии) и поля \vec{E} (напряженность изображена цветом) волны TE_{10} в прямоугольном волноводе

Высшие моды. В зависимости от соотношения между a и b , порядок мод может быть разным (он определяется величиной поперечного волнового чис-

ла). Некоторые высшие моды:

$$\begin{aligned} \text{TE}_{11} : \quad \kappa_{11} &= \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} \\ \text{TE}_{20} : \quad \kappa_{20} &= \frac{2\pi}{a} \\ \text{TE}_{01} : \quad \kappa_{11} &= \frac{\pi}{b} \end{aligned}$$

Мода TE_{11} . В волне TE_{11} $\kappa_{11} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$

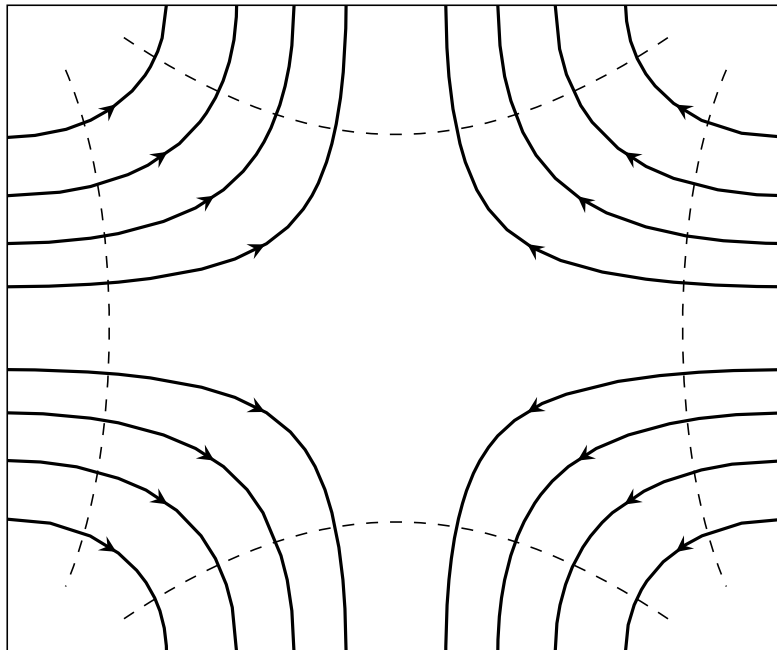
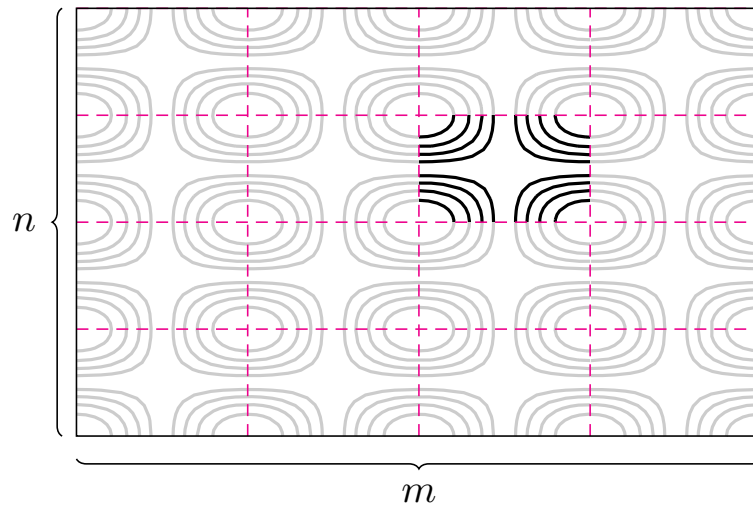


Рис. 26. Электрическое и магнитное поле в волне TE_{11}

Такую структуру поля называют «розеткой».

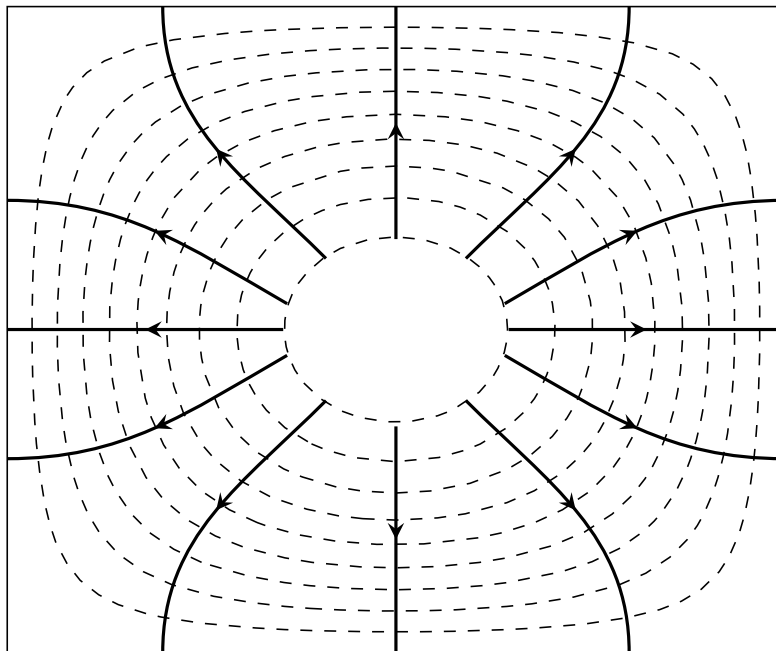
Мода TE_{mn} . А что будет, если мы посмотрим на структуру поля, например, $\text{TE}_{2019,1938}$? Для мод высоких порядков $m > 1, n > 1$, нужно разделить волновод на m частей по горизонтали и n по вертикали, и в каждой такой ячейке поле будет повторять структуру моды TE_{11} . При этом направление силовых линий в соседних ячейках должно быть согласовано.

Пример структуры поля приведен на рисунке 27, для случая $m = n = 4$.

Рис. 27. Электрическое поле в волне TE_{44}

Перейдем к описанию ТМ-волн.

Мода TM_{11} . Для волн в прямоугольном волноводе $\chi_{mn}^{(TE)} = \chi_{mn}^{(TM)}$, т.е. существует хотя бы двукратное вырождение волнового числа: одному волновому числу соответствует несколько мод.

Рис. 28. Электрическое и магнитное поле в волне TM_{11}

Мода TM_{21} . Аналогично моде TE_{mn} , для мод TM_{mn} нужно разделить волновод на m частей по горизонтали и n по вертикали, и в каждой такой ячейке

поле будет повторять структуру моды TM_{11} . При этом направление силовых линий в соседних ячейках должно быть согласовано.

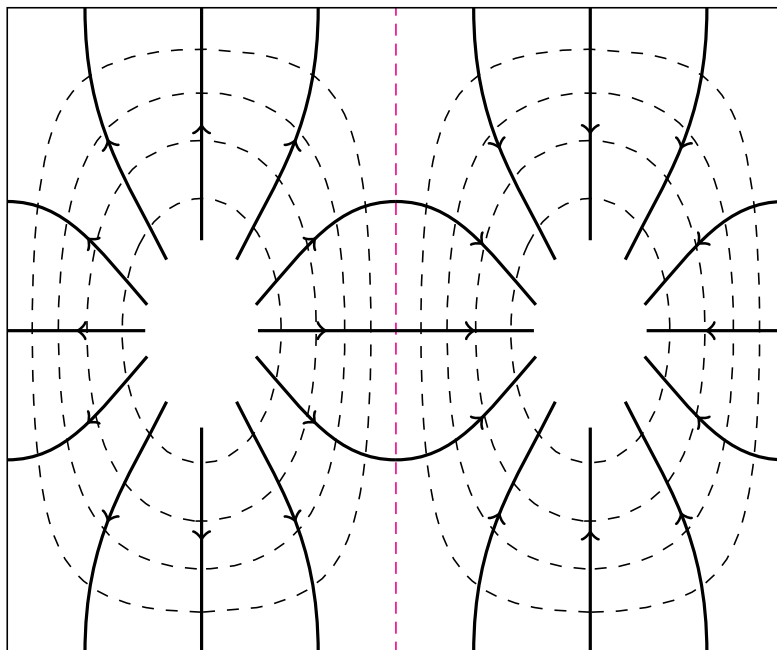


Рис. 29. Электрическое и магнитное поле в волне TM_{21}

Заметим, что линии электрического поля входят в стенки волновода под прямым углом. Иначе и быть не может, в силу граничного условия на проводнике $E_\tau = 0$.

1.7.2 ТЕ и ТМ волны в круглом волноводе

Наиболее часто на практике используются прямоугольные, круглые и коаксиальные волноводы. Займемся изучением круглых волноводов.

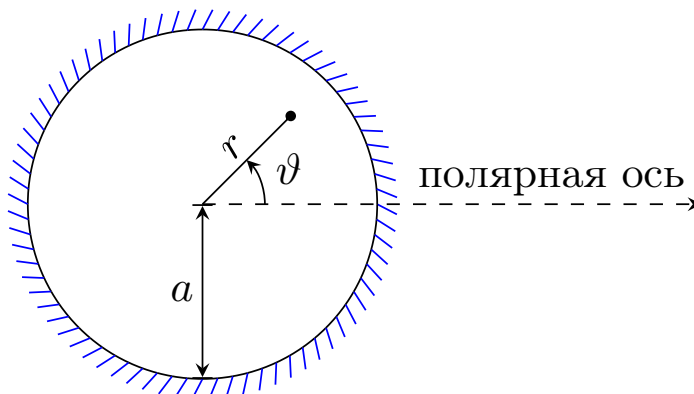


Рис. 30. Геометрия круглого волновода

Область определения задачи $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Каждая точка в сечении волновода задается двумя координатами (r, ϑ) .

Будем решать задачу (пока в общем виде, без граничных условий):

$$\Delta_{\perp} \varphi + \kappa^2 \varphi = 0$$

Здесь лапласиан в цилиндрических координатах

$$\Delta_{\perp} \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2}$$

Также как и при поиске поля в прямоугольном волноводе, воспользуемся методом разделения переменных:

$$\varphi = R(r) \cdot \Theta(\vartheta)$$

Применив стандартным образом разделение переменных (подставив φ как $R \cdot \Theta$ в решаемое уравнение и домножив уравнение слева и справа на $\frac{r^2}{R\Theta}$), получим

$$\underbrace{r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \kappa^2 r^2}_{f(r)=+C_1} + \underbrace{\frac{\Theta''}{\Theta}}_{g(\vartheta)=-C_1} = 0$$

Заметим, что комбинация из первых трех слагаемых может зависеть только от r , последнее слагаемое может зависеть только от ϑ , а их сумма ни от чего не зависит - значит и первые три слагаемых в сумме ни от чего не зависят и равны некой константе $-C_1$, тогда последнее слагаемое (которое тоже ни от чего не зависит) равно $+C_1$.

Таким образом, разделение переменных успешно завершилось.

Уравнение относительно Θ . Такое уравнение запишется в виде

$$\Theta'' + C_1 \Theta = 0$$

Решение этого уравнения (гармонического осциллятора) нам хорошо известно:

$$\Theta = A_1 \cos(\sqrt{C_1} \vartheta) + A_2 \sin(\sqrt{C_1} \vartheta)$$

Сразу заметим, что отсюда следует, что $\sqrt{C_1} = m$ – целое число. Действительно, в силу симметрии задачи

$$\Theta(\vartheta) = \Theta(\vartheta + 2\pi),$$

а такое возможно только при целой частоте $\sqrt{C_1}$.

Уравнение относительно r . Его можно переписать, если учесть что $\sqrt{C_1} = m$, тогда

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(\kappa^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R = 0$$

Можно ввести замену переменных $x = \kappa r$, тогда

$$R''_{xx} + \frac{1}{x}R'_x + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)R = 0, \quad R = R(x)$$

Это известное уравнение Бесселя. Его решение получается в виде специальных, цилиндрических функций Бесселя:

$$R = B_1 \cdot J_m(x) + B_2 \cdot N_m(x)$$

J_m называют функциями Бесселя первого рода, или просто функциями Бесселя, а N_m функциями Бесселя второго рода, или функциями Неймана. Их поведение хорошо изучено, не хуже чем поведение синуса и косинуса. Рассмотрим некоторые характерные моменты. Первый максимум функции Бесселя

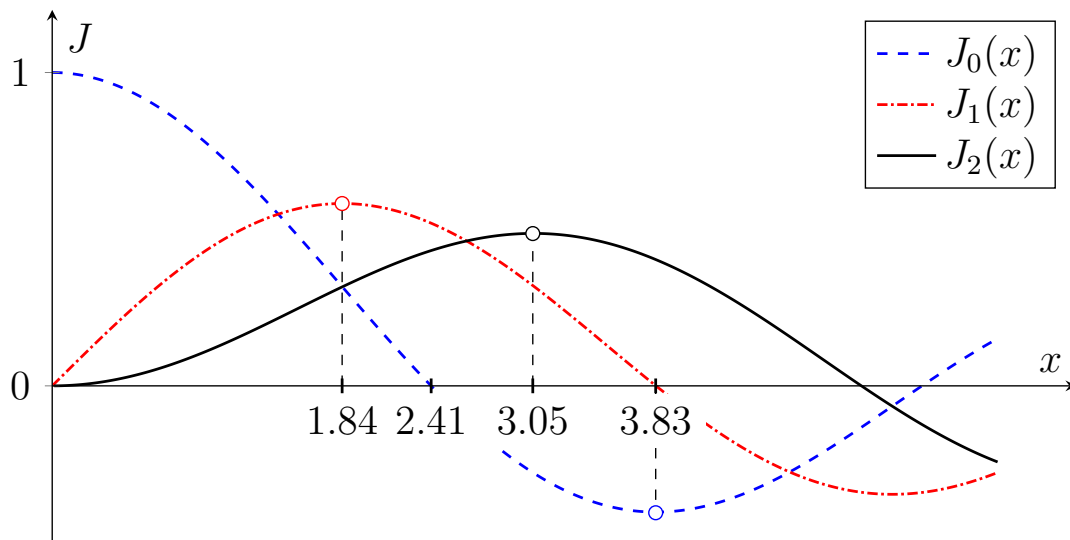


Рис. 31. Функции Бесселя первого рода

второго порядка лежит на пересечении функций Бесселя первого и нулевого порядков. Это свойство функций Бесселя. Еще одно свойство заключается в том, что ноль функции Бесселя первого порядка совпадает с точкой минимума функции Бесселя нулевого порядка. Функции Неймана мы пока не

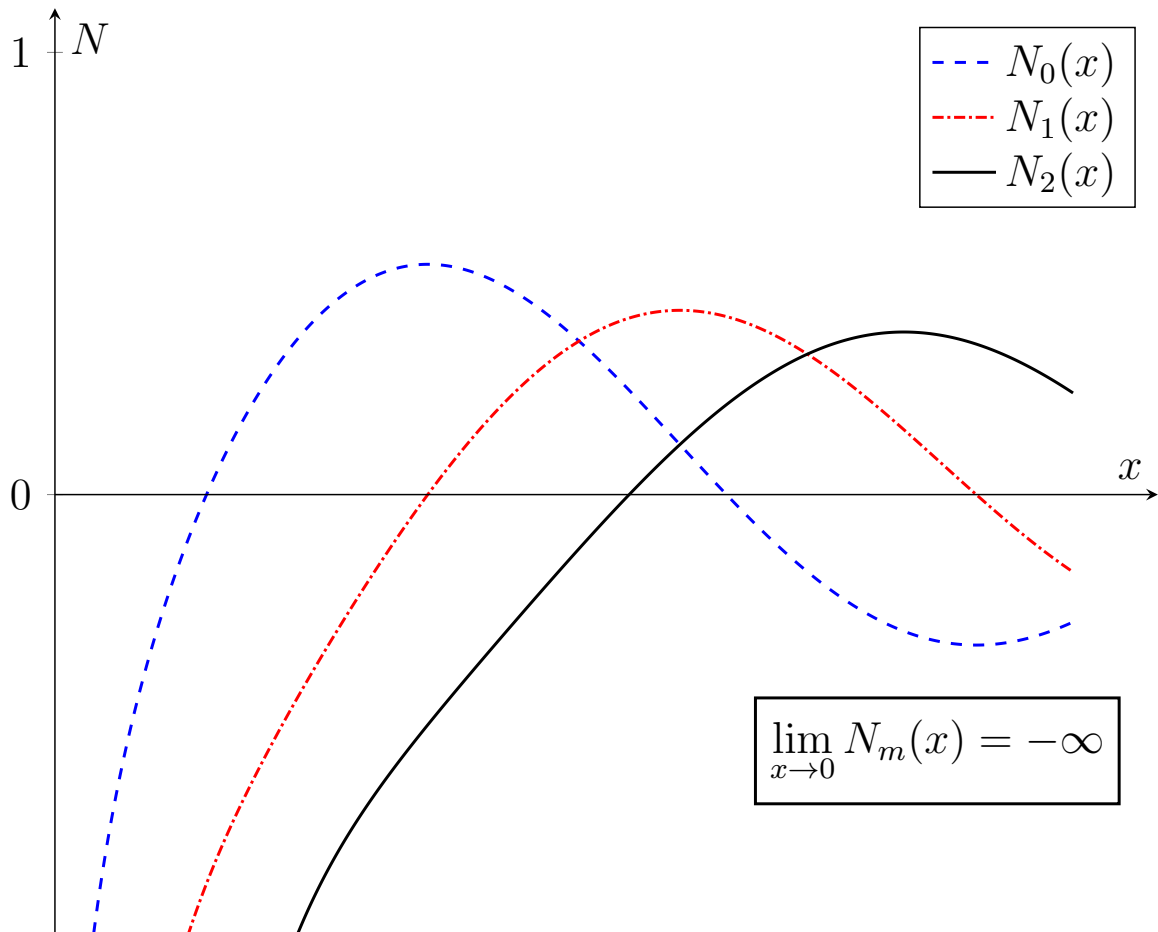


Рис. 32. Функции Бесселя второго рода

будем рассматривать подробно. Это вызвано тем, что у всех функций Неймана есть особенность: в нуле они расходятся, и поэтому в нашем решении, чтобы решение в нуле было конечно, придется положить $B_2 = 0$.

Вообще говоря, в коаксиальной линии это будет не так, потому что там область определения задачи не включает $r = 0$, и будет $B_2 \neq 0$.

Итак, наше решение теперь можно переписать в виде

$$\varphi_m = J_m(\kappa r)(A_1 \cos(m\vartheta) + A_2 \sin(m\vartheta))$$

Здесь константу B_1 мы уже не пишем, предполагая что она сидит в констан-

тах A_1, A_2 . Иногда, для краткости, комбинацию синуса и косинуса пишут так:

$$A_1 \cos(m\vartheta) + A_2 \sin(m\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos m\vartheta \\ \sin m\vartheta \end{pmatrix}$$

Перейдем к удовлетворению граничных условий.

Граничные условия ТЕ-волн. На границе волновода должна зануляться производная поперечной функции:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial J_m(\kappa r)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0$$

Это значит, что

$$J'_m(x) = 0, \quad x = \kappa a$$

Мы можем пронумеровать все нули производной, и обозначить эти точки $x = \mu_{mn}$, где m – порядок функции Бесселя, а n – номер нуля производной. Например, $\mu_{11} = 1.84$.

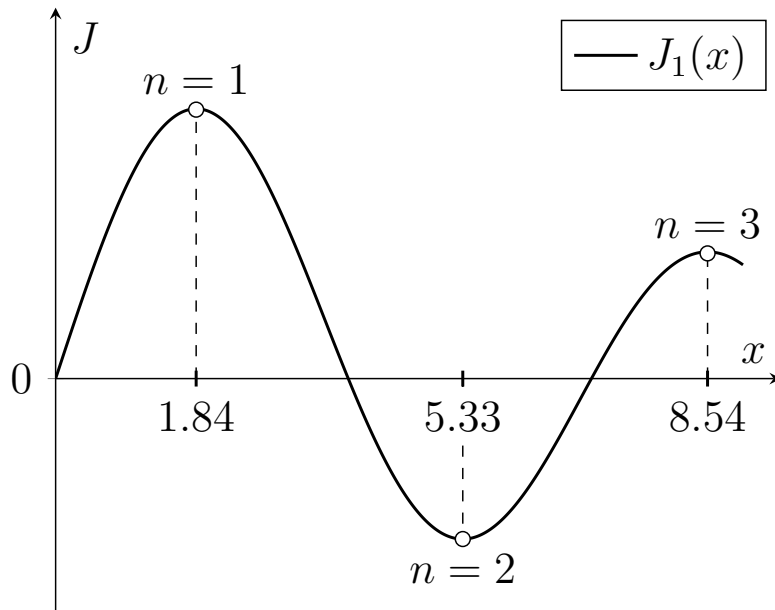


Рис. 33. Нули производной функции Бесселя

Тогда можем выразить через μ и волновое число:

$$\kappa_{mn}^{TE} = \frac{\mu_{mn}}{a}$$

В итоге получаем решение для ТЕ-волн:

$$\varphi_m = C_{mn} J_m(\kappa_{mn} r) \begin{pmatrix} \cos m\vartheta \\ \sin m\vartheta \end{pmatrix}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad n = 1, 2, \dots$$

Некоторые значения:

$$\mu_{11} = 1.84, \quad \kappa_{11} = \frac{1.84}{a}$$

$$\mu_{21} = 3.05, \quad \kappa_{21} = \frac{3.05}{a}$$

$$\mu_{01} = 3.83, \quad \kappa_{01} = \frac{3.83}{a}$$

Граничные условия ТМ-волн. Теперь на границе зануляется поперечная функция:

$$\varphi|_{r=a} = 0 \quad \Rightarrow \quad J_m(\kappa r) = 0$$

Также, как мы это делали для ТЕ-волн, пронумеруем нули функции Бесселя:

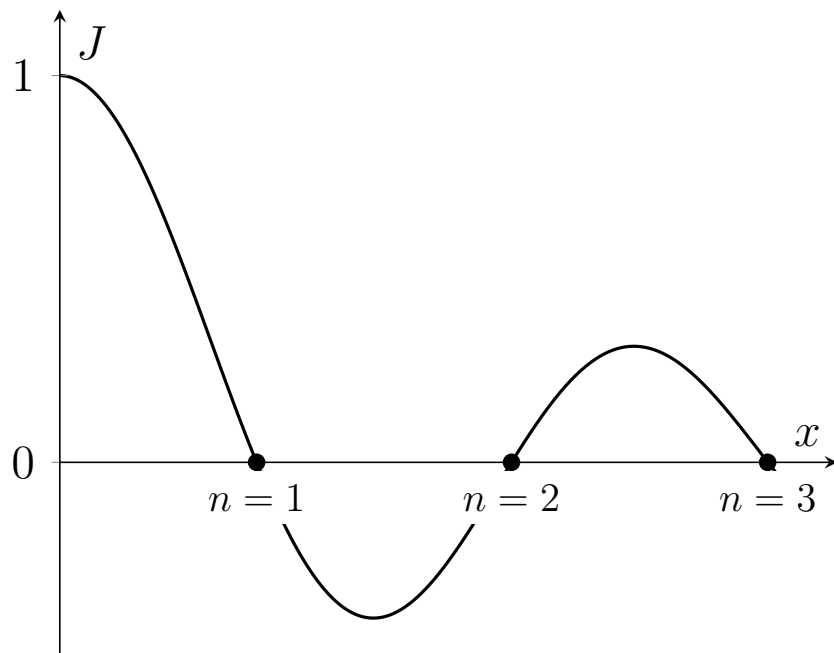


Рис. 34. Нули функции Бесселя

И обозначим нули

$$x = \nu_{mn},$$

И тогда

$$\chi_{mn}^{TM} = \frac{\nu_{mn}}{a}$$

Некоторые значения:

$$\nu_{01} = 2.405, \quad \chi_{01}^{TM} = \frac{2.405}{a}$$

$$\mu_{11} = 3.83, \quad \chi_{11}^{TM} = \frac{3.83}{a}$$

Полное решение задачи. Если мы введем волновое число как

$$\chi_{mn} = \begin{cases} \frac{\mu_{mn}}{a}, & \text{TE,} \\ \frac{\nu_{mn}}{a}, & \text{TM} \end{cases}$$

Тогда полное решение задачи запишется в виде

$$\varphi_m = C_{mn} J_m(\chi_{mn} r) \begin{pmatrix} \cos m\vartheta \\ \sin m\vartheta \end{pmatrix}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad n = 1, 2, \dots$$

Низшая мода. У низшей моды наименьшее волновое число. В случае круглого волновода низшей модой будет TE_{11} : $\chi_{11} = \frac{1.84}{a}$.

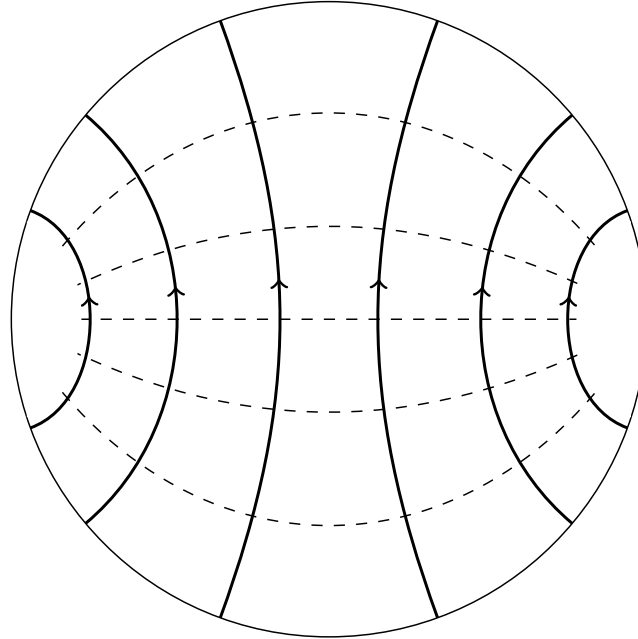


Рис. 35. Электрическое и магнитное поле в волне TE_{11}

Замечание. Можно сформулировать некоторое правило рисования силовых линий. Если построить линии уровня $\varphi = \text{const}$, то это будут силовые линии чисто поперечного поля.

Вообще говоря, поле моды TE_{11} круглого волновода топологически подобно моде TE_{10} прямоугольного волновода. Если постепенно деформировать стенки прямоугольного волновода, скругляя их, то линии поля постепенно будут переходить в линии поля круглого волновода.

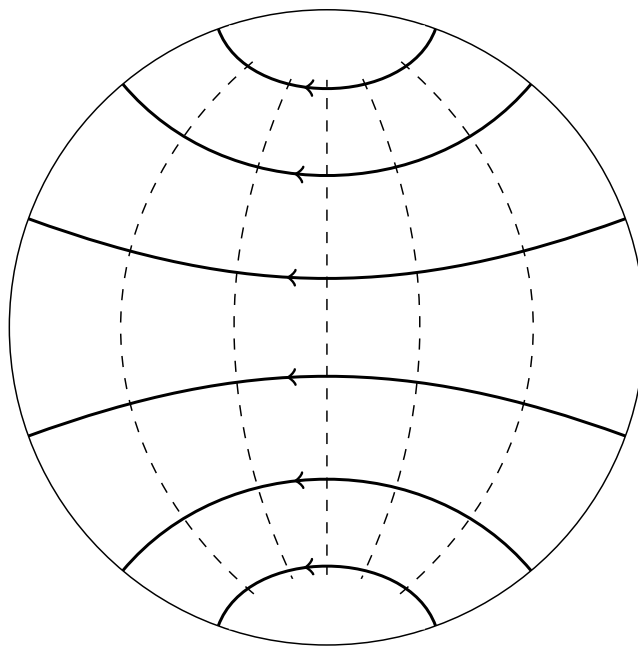


Рис. 36. Поляризационное вырождение моды TE_{11}

Кроме того, мода TE_{11} круглого волновода **двукратно вырождена**: имеет место так называемое **поляризационное вырождение** (рис. 36).

Действительно, если повернуть волновод на 90 градусов, то получаем другое решение. Их не бесконечно много, а всего два фундаментальных, а все остальные образуются как их суперпозиция.

Перейдем к рассмотрению следующих (по росту волнового числа) волн.

Мода TM_{01} . Вообще говоря, волны с первым индексом 0 TE_{0n} , TM_{0n} не зависят от координат и называются **симметричными модами**.

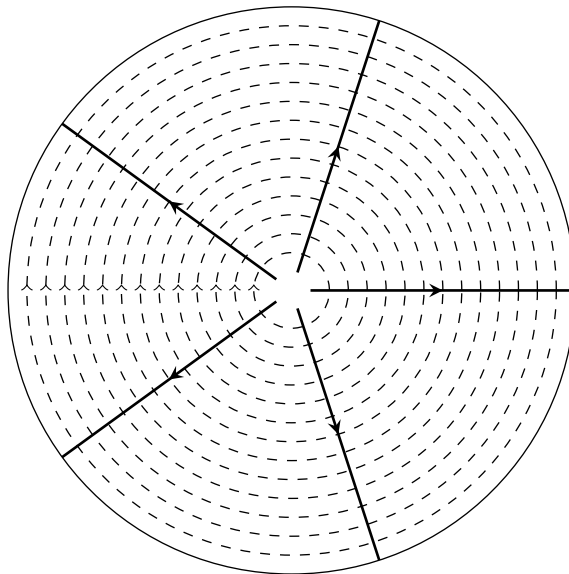


Рис. 37. Электрическое и магнитное поле в волне TM_{01}

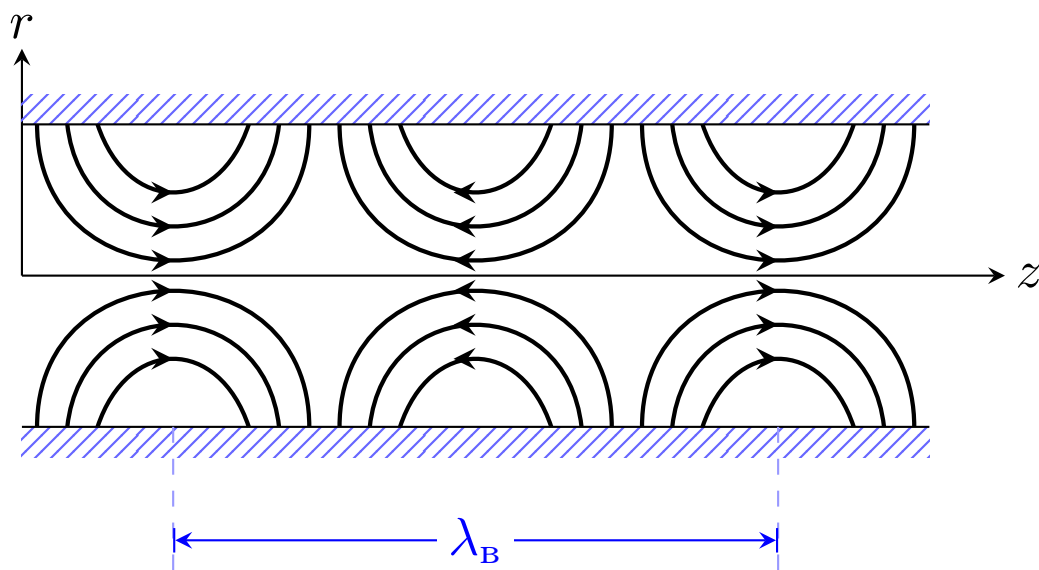


Рис. 38. Вид в продольном разрезе на волну TM_{01}

Мода TE_{21} . $\kappa_{21} = \frac{3.05}{a}$

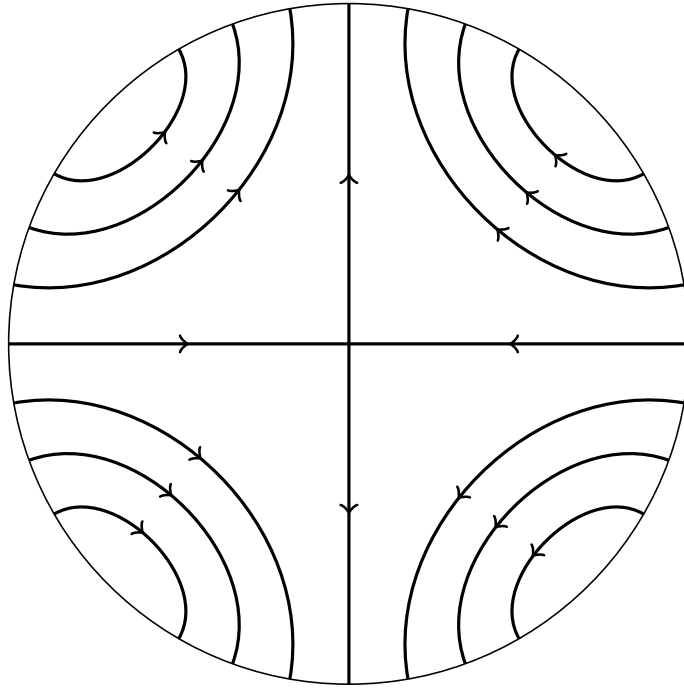


Рис. 39. Электрическое поле в волне TE_{21}

Мода TE_{01} . $\kappa_{01}^{TE} = \kappa_{11}^{TM} = \frac{3.83}{a}$

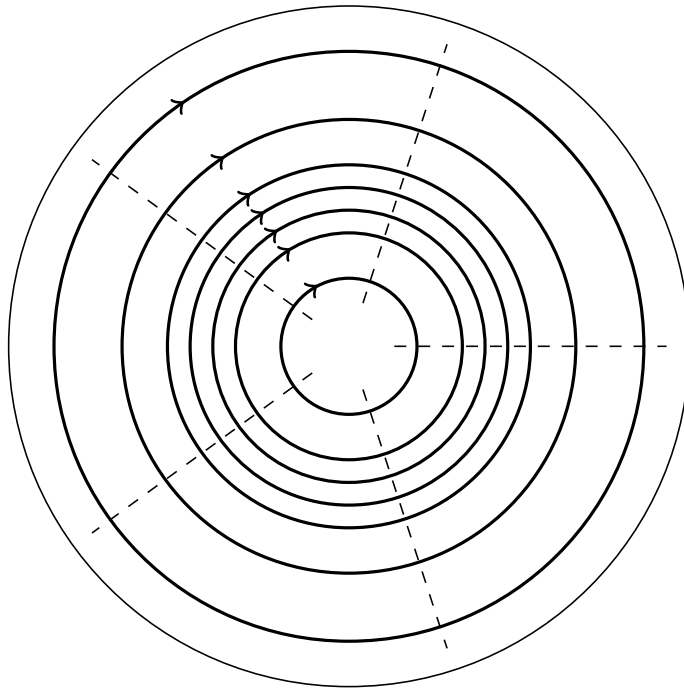


Рис. 40. Электрическое и магнитное поле в волне TE_{01}

Мода TM_{11} . $\chi_{01}^{TE} = \chi_{11}^{TM} = \frac{3.83}{a}$

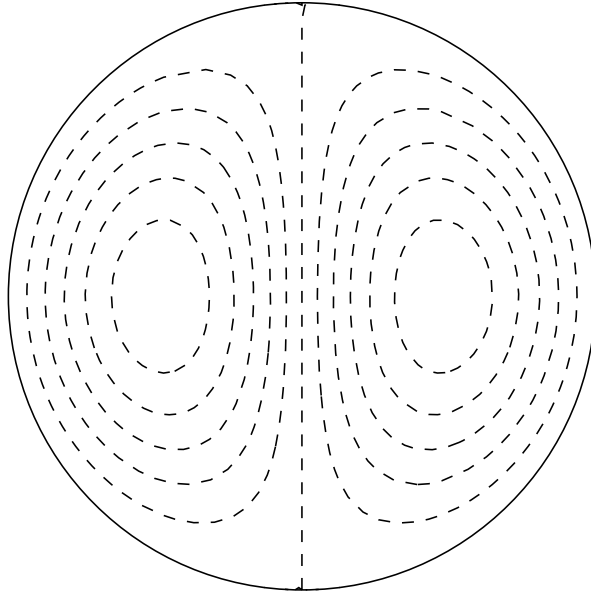


Рис. 41. Магнитное поле в волне TM_{11}

Высокая мода TM_{81} . Первый индекс определяет изрезанность по углу:

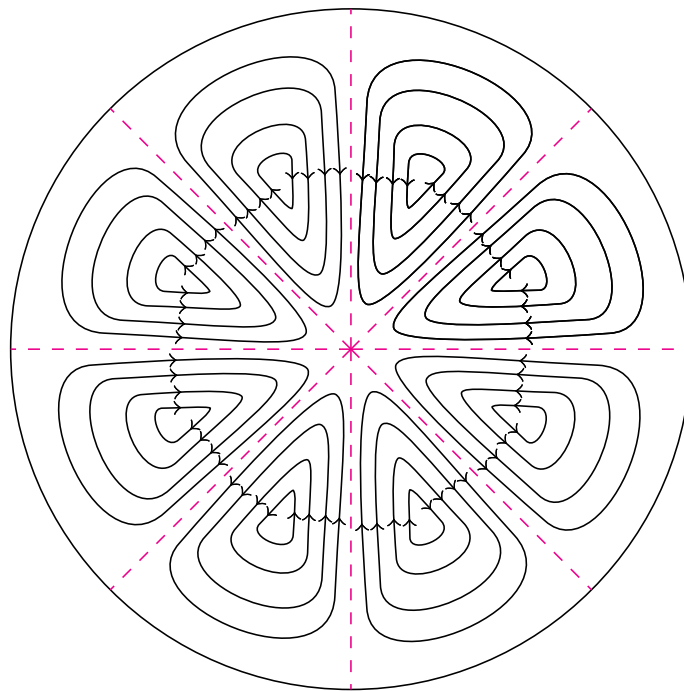


Рис. 42. Магнитное поле в волне TM_{81}

Высокая мода TE_{m1} , $m \geq 1$. Эту моду можно описать и на языке геометрической оптики. Её также называют модой шепчущей галереи.

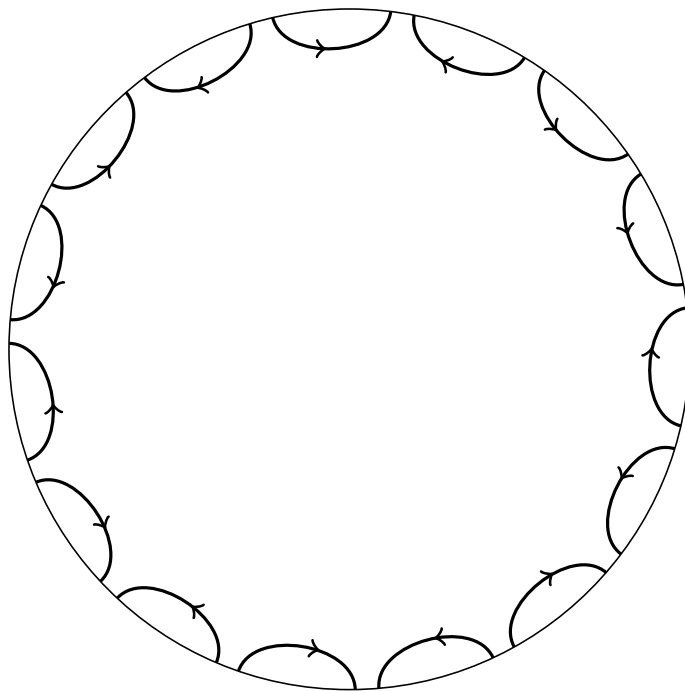


Рис. 43. Электрическое поле в волне TE_{m1}

Шепчущая галерея - это многократное переотражение волны вдоль стенки. Если два монаха стоят на противоположных концах диаметра, а настоятель в центре, то он не слышит разговор монахов, а они друг друга слышат: волна распространяется, двигаясь под малым углом к стене.