

Лекции по прикладной электродинамике

Бугров А.В., Сарафанов Ф.Г.

sfg180@yandex.ru

Disclaimer. В данном документе нами набраны лекции по прикладной электродинамике, прочитанные на 3 курсе радиофизического факультета НН-ГУ Владимиром Борисовичем Гильденбургом. Разрешено копирование и распространение данного документа с обязательным указанием первоисточника.

28 февраля — 4 марта 2019 г.

Нижний Новгород

Оглавление

1. Электромагнитные волны в линиях передачи . . .	2
1. Волны в линиях передачи с идеально проводящими грани-	
цами	2
1.1. Математическая формулировка задачи отыскания волн в лини-	
ях передачи	3
1.2. Дисперсионное уравнение	3
1.3. Моды в линиях передачи	4
1.4. Кинематические соотношения	6
1.5. Потоки энергии в линии передачи	8
1.6. Главные (ТЕМ) волны в линиях передачи с идеальными грани-	
цами	9
1.6.1. Внутренняя задача	10
1.6.2. Внешняя задача	10
1.7. ТЕ и ТМ волны в идеальных линиях передачи закрытого типа .	13
1.7.1. ТЕ и ТМ волны в прямоугольном волноводе	13

Часть 1.

Электромагнитные волны в линиях передачи

1. Волны в линиях передачи с идеально проводящими границами

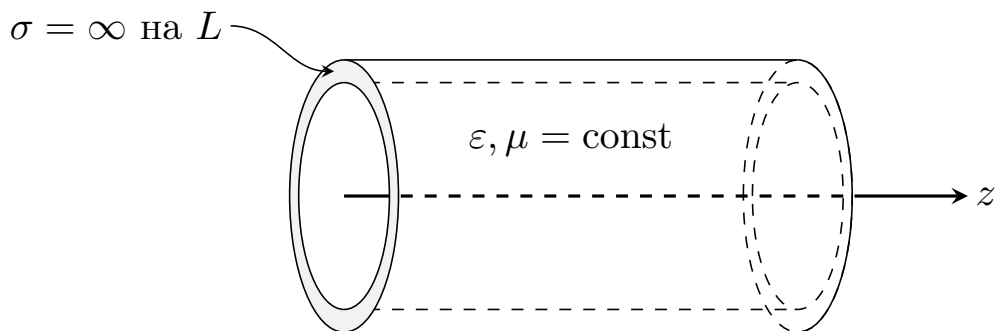


Рис. 1. Линия передачи

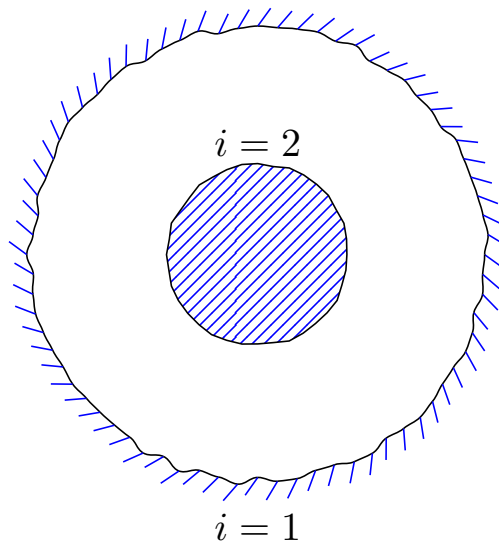


Рис. 2. Линия из разных проводников. Вид в разрезе

1.1. Математическая формулировка задачи отыскания волн в линиях передачи



Рис. 3. Граничные условия Дирихле и Неймана в матфизике

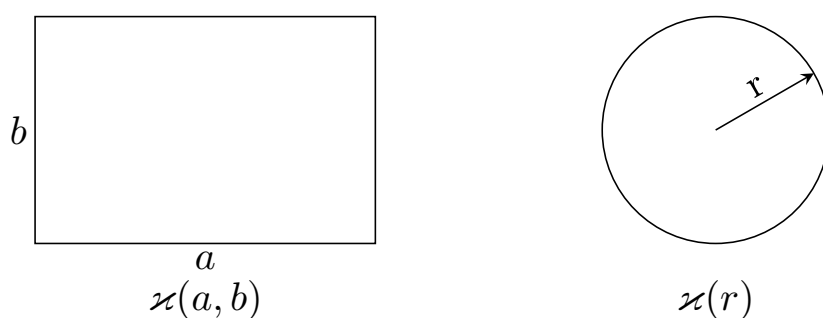


Рис. 4. Различная геометрия линии

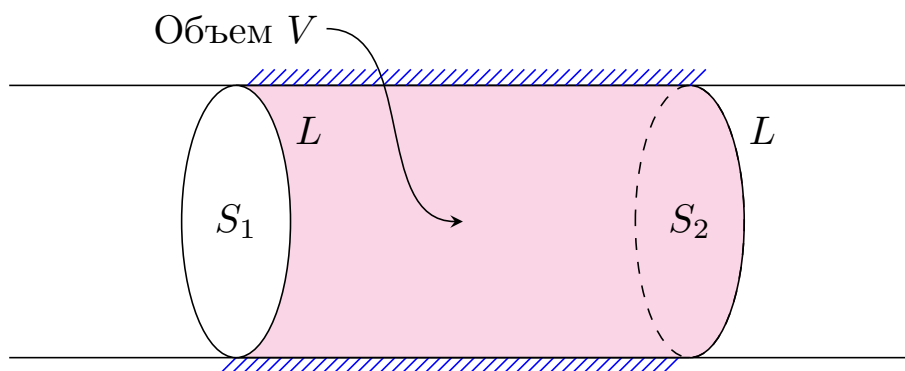


Рис. 5. Геометрия задачи

1.2. Дисперсионное уравнение

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat

nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

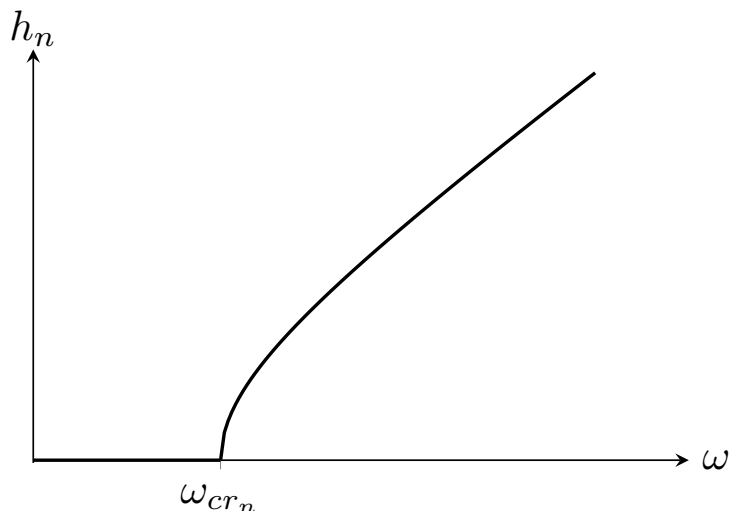


Рис. 6. Зависимость реальной части поперечного волнового числа от частоты

1.3. Моды в линиях передачи

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

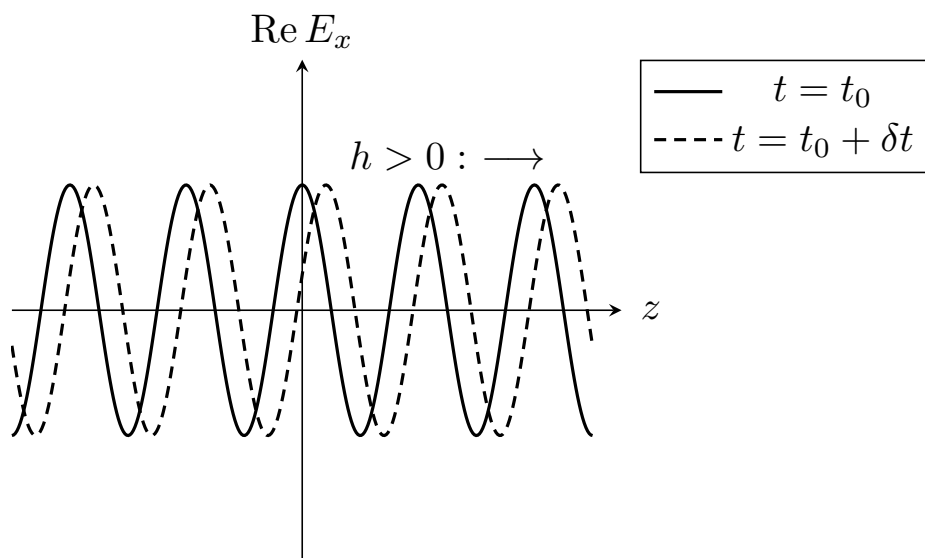
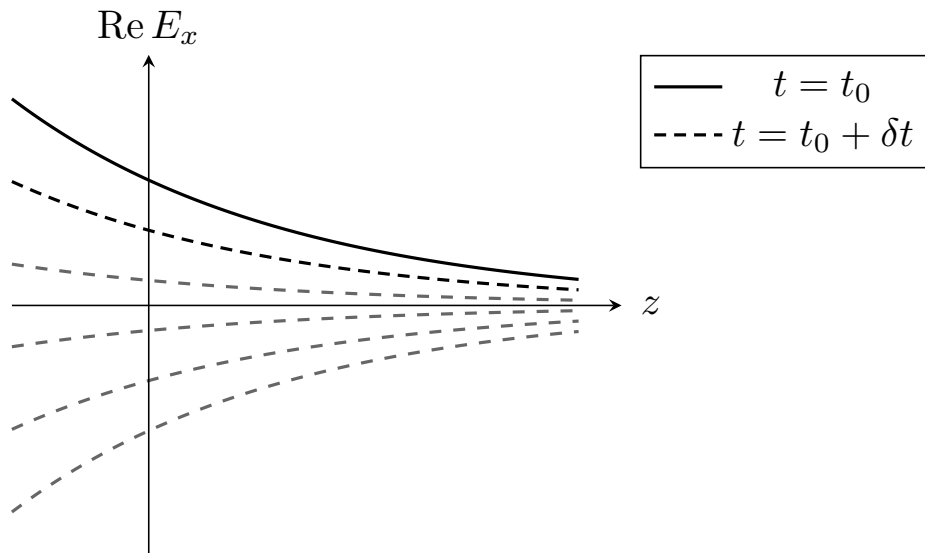
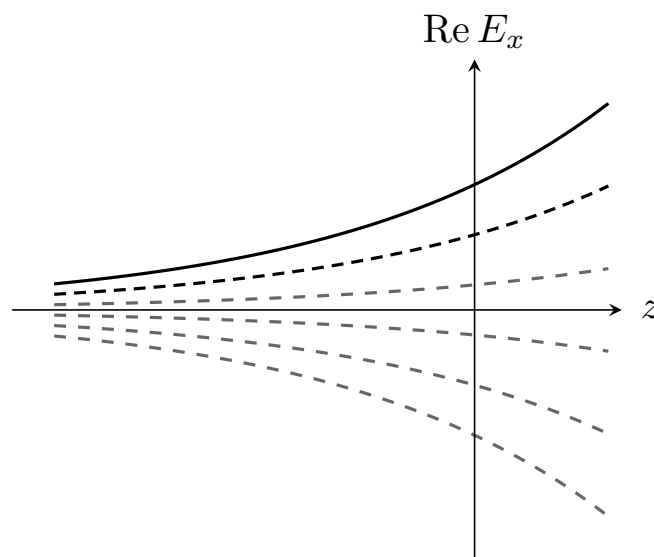


Рис. 7. Распространение волны ($h > 0$)

Рис. 8. Режим нераспространения ($h < 0$)Рис. 9. Экспоненциальное нарастание амплитуды (при $h < 0$)

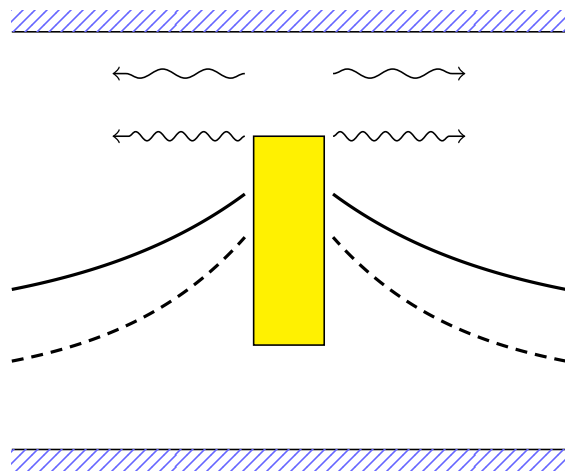
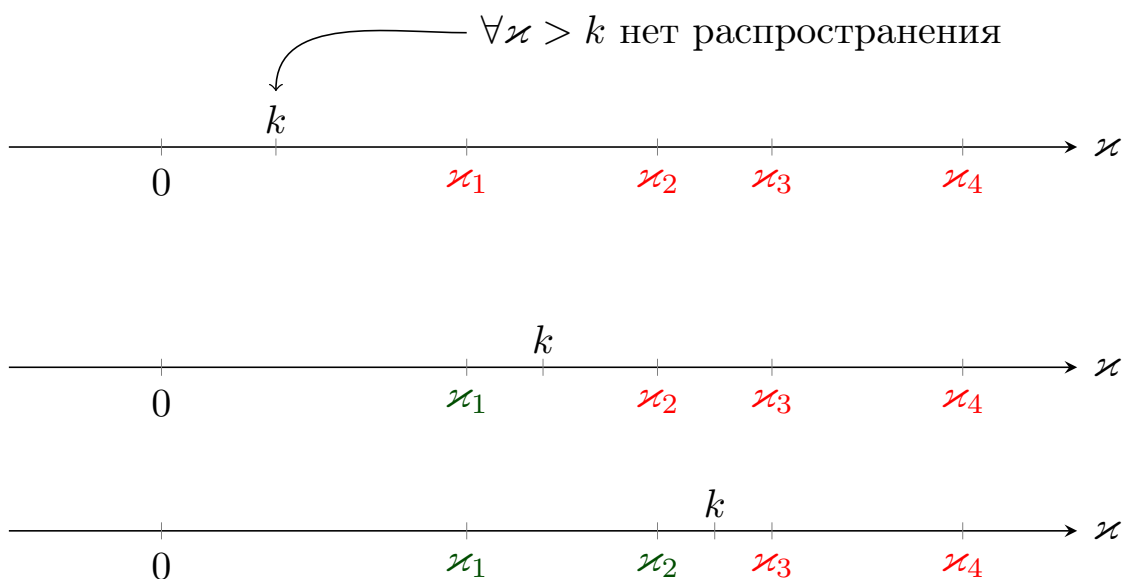


Рис. 10. Моды в линии передачи с источником



1.4. Кинематические соотношения

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

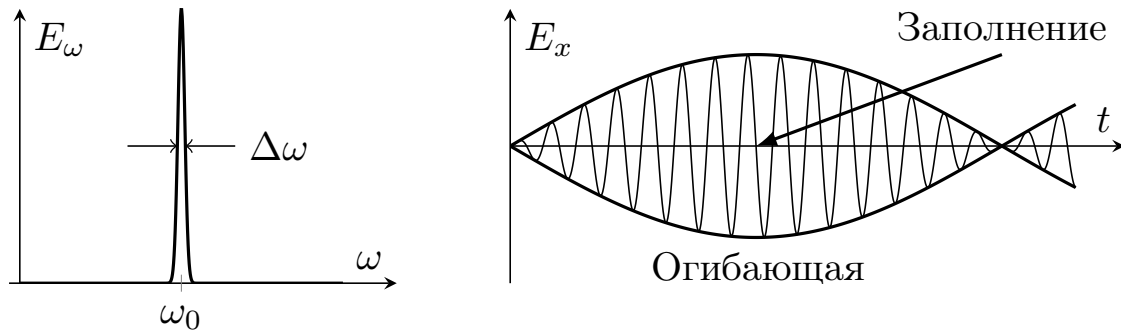


Рис. 11. Квазимонохроматический волновой пакет

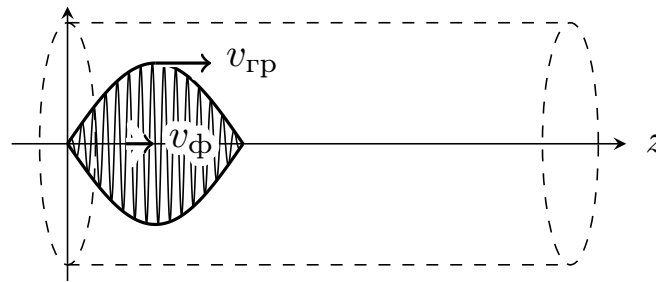


Рис. 12. Распространение волнового пакета

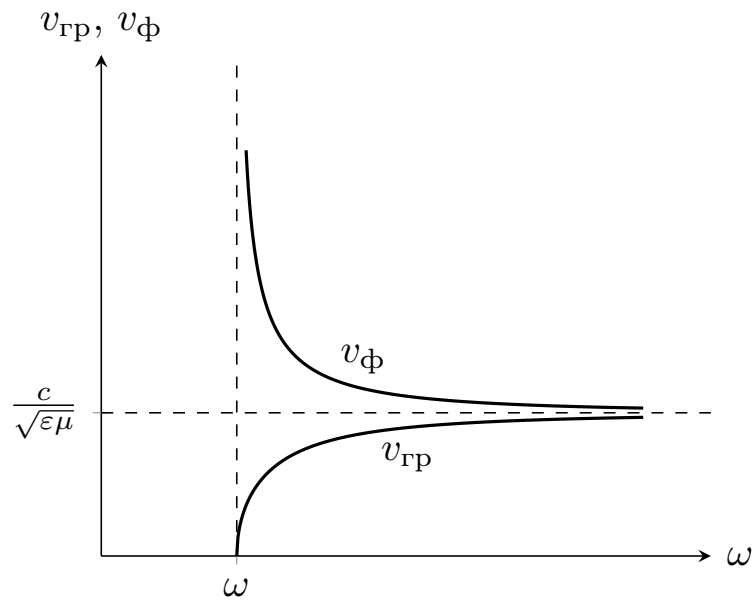


Рис. 13. Распространение волнового пакета



Рис. 14. Поток энергии через площадки в линии передачи

1.5. Потоки энергии в линии передачи

1.6. Главные (ТЕМ) волны в линиях передачи с идеальными границами

У ТЕМ-волн поперечное волновое число $\kappa = 0$:

$$\kappa = 0 \Rightarrow h = k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}$$

Поля таких волн выражаются следующим образом через функцию φ :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\perp} &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \nabla_{\perp} \varphi \\ \vec{E}_{\perp} &= -\frac{1}{\mu} [\nabla_{\perp} \varphi, \vec{z}_0] \end{aligned} \quad (1)$$

При этом выполняются **граничные условия**: на каждом из проводников (допустим, есть набор проводников, вдоль которых распространяется волна)

$$\varphi|_{l_i} = C_i,$$

причем константа не обязана быть одна для всех проводников.

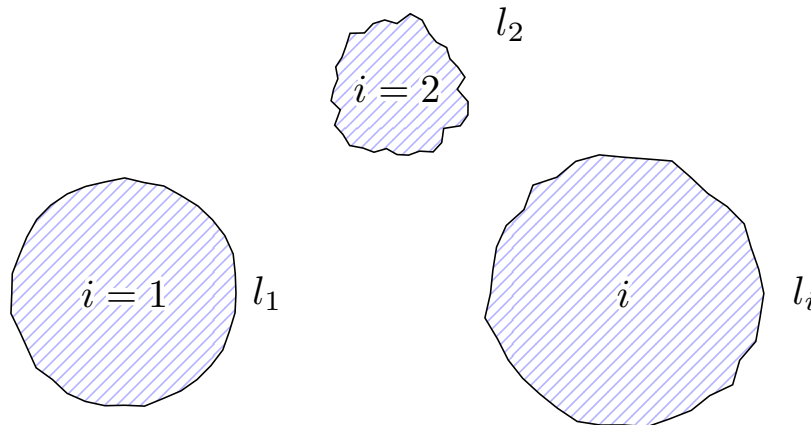


Рис. 15. Набор проводников в задаче

1.6.1 Внутренняя задача

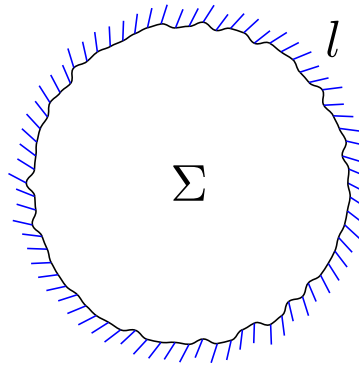


Рис. 16. Случай одного проводника

Пусть у нас есть только один проводник, в котором есть цилиндрическая полость (рис. 16). Рассмотрим внутреннюю задачу, т.е. распространение волны внутри цилиндрической полости. Оказывается, для граничного условия $\varphi_{\perp}|_l = C_1$ существует только тривиальное решение $\varphi_{\perp} = C_1$. В матфизике это доказывается. Начало доказательства такое:

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}(\varphi\nabla\varphi) = 0 \quad \left| \iint_{\Sigma}$$

Это такая задача, которую проще доказать самому. Попробуйте это сделать сами.

1.6.2 Внешняя задача

Зададимся вопросом о решении той же задачи:

$$\Delta_{\perp}\varphi = 0, \quad \varphi|_l = \text{const}$$

Только теперь будем рассматривать её в области вне проводника, т.н. внешняя задача.

Для начала рассмотрим задачу попроще, поле нити (рис. 17). Решение её известно:

$$\Delta_{\perp}\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \sim \ln r$$

Характер убывания полей здесь $E_r \sim \frac{1}{r}$, а для магнитного поля в силу

импедансного соотношения $\frac{E_r}{H_\varphi} = \eta_{\perp\text{в}} = 1 \text{ } H_\varphi \sim \frac{1}{r}$:

$$E_r = H_\varphi \sim \frac{1}{r}$$

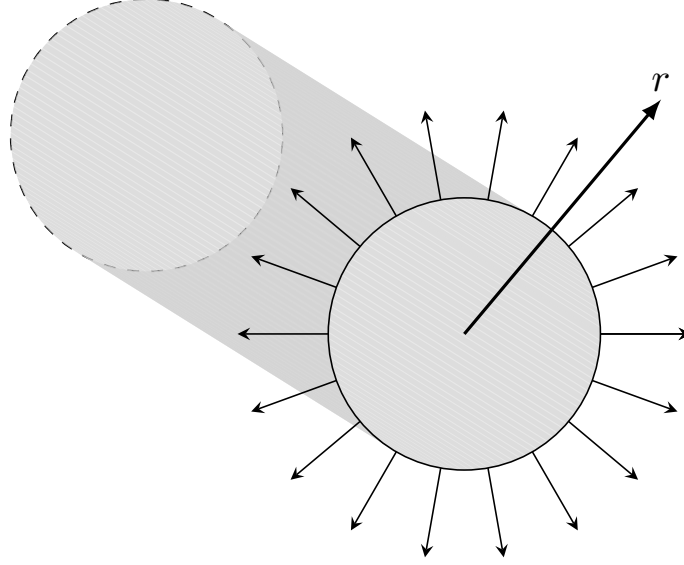


Рис. 17. Поле бесконечной проводящей нити

Посмотрим на поведение полей при $r \rightarrow \infty$. Говорят, нужно поставить граничные условия (или закон убывания) на бесконечности. Чем плох закон $\frac{1}{r}$?

Посчитаем средний по времени поток энергии через поперечное сечение, в котором распространяется волна. Сечение бесконечно, за исключением конечной площади проводника.

Сначала вычислим вектор Пойнтинга (средний по времени и в проекции на z):

$$\bar{S}_z = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(E_r \cdot H_\varphi^*) \sim \frac{1}{r^2}$$

$$\Pi = \iint_{\Sigma} \bar{S}_z ds \sim \iint_{\Sigma} \frac{1}{r^2} (2\pi r dr) \sim \int_a^\infty = \ln \frac{\infty}{a} = \infty$$

Интеграл расходится на бесконечности. Говорят, что расходимость носит логарифмический характер. Получили бесконечную мощность волны: такую волну невозможно создать реальным источником — волна не удовлетворяет критерию энергетической реализуемости.

Можно сделать важный вывод: **вдоль одиночного проводника ТЕМ-волна с конечной энергией распространяться не может.** А может, если проводников больше. Например, в линии из двух проводников (рис. 18) ТЕМ-волна уже возможна.

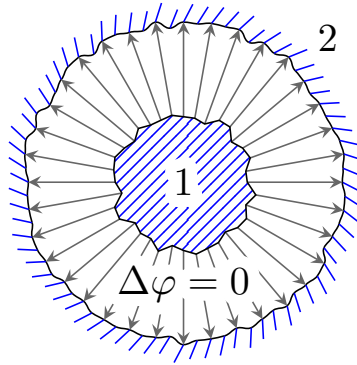


Рис. 18. Закрытая линия из двух проводников

Можно модифицировать задачу с нитью, если сделать нити две (рис. 19):

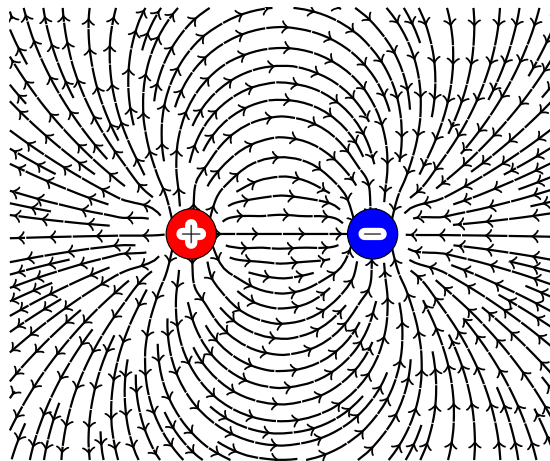


Рис. 19. Поле двухпроводной линии

В поперечном разрезе это поле диполя, а оно спадает быстрее, $\sim \frac{1}{r^2}$. Тогда

$$E_{\perp} \sim H_{\perp} \sim \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_z \sim \frac{1}{r^4}, \quad \Pi \sim \int_{L_{\text{характ}}}^{\infty} \frac{1}{r^3} dr$$

Мощность волны получится уже конечным числом, значит, в модифицированной задаче ТЕМ-волна энергетически реализуема.

Конечный вывод: ТЕМ-волна в идеальной линии передачи возможна, если число проводников ≥ 2 .

Например, в коаксиальной линии (рис. 20) ТЕМ-волна возможна.

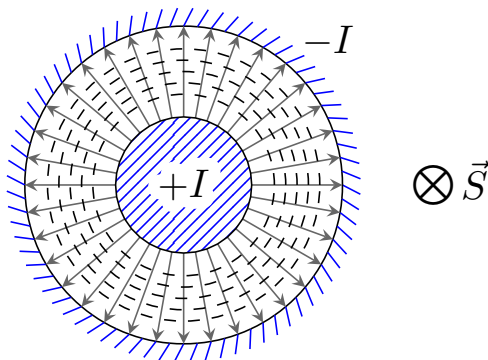


Рис. 20. Поле в коаксиальном кабеле

Зададимся вопросом: возможны ли в такой линии ТЕ и ТМ волны? Сформулируем утверждение, пока без доказательства: **в открытых линиях передачи ТЕ и ТМ волны не существуют.**

1.7. ТЕ и ТМ волны в идеальных линиях передачи закрытого типа

1.7.1 ТЕ и ТМ волны в прямоугольном волноводе

Решение для ТМ-волн. Займемся решением ТМ-волны в прямоугольном волноводе (рис. 21). Условимся что $a > b$. Эта задача поиска собственных функций φ^e и собственных значений κ :

$$\Delta_{\perp} \varphi^e + \kappa^2 \varphi^e = 0, \quad \varphi^e|_l = 0$$

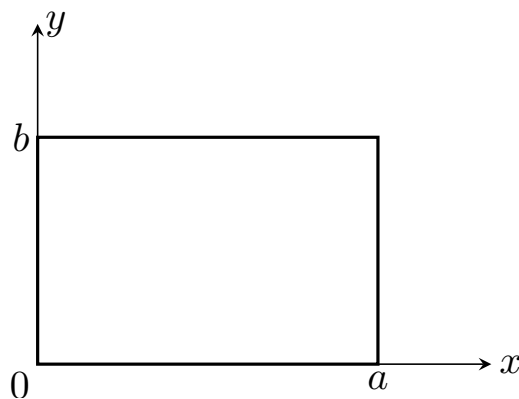


Рис. 21. Прямоугольный волновод

В матфизике эта задача о колебании мембраны с закрепленным краем. Она решается разделением переменных:

$$\varphi^e = X(x) \cdot Y(y)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial y^2} + \kappa^2 \varphi^e = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{XY} \right. \Rightarrow \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \kappa^2 = 0$$

Тут надо произнести магическую фразу: так как первое слагаемое функция от x , второе функция от y , и их сумма равна константе для любых x, y , значит – сами слагаемые тоже какие-то константы:

$$\frac{X''}{X} = -\kappa_x^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -\kappa_y^2$$

Определив таким образом константы, мы получаем:

$$\kappa_x^2 + \kappa_y^2 = \kappa^2$$

Пока мы не нашли само κ . Это собственное число, и оно подлежит определению. Прежде чем его найти, найдем собственные функции, решая уравнения

$$X'' + \kappa_x^2 X = 0, \quad Y'' + \kappa_y^2 Y = 0$$

Это уравнения известного вида, их решение

$$X = C_1 \cdot \cos \kappa_x x + C_2 \cdot \sin \kappa_x x \quad Y = A_1 \cdot \cos \kappa_y y + A_2 \cdot \sin \kappa_y y$$

Нужно удовлетворить граничным условиям:

$$\varphi^e|_{y=0} = 0 \Rightarrow X(x)Y(0) = 0 \quad \forall x \Rightarrow Y(0) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

$$\varphi^e|_{x=0} = 0 \Rightarrow X(0)Y(y) = 0 \quad \forall y \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \varphi^e|_{x=a} = 0 &\Rightarrow X(a)Y(y) = 0 \quad \forall y \Rightarrow \\ \Rightarrow X(a) = 0 &\Rightarrow \kappa_x a = m\pi, \quad m = \emptyset, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Поскольку $m = 0$ дает тривиальное решение, мы его откидываем.

$$\begin{aligned}\varphi^e|_{y=b} = 0 &\Rightarrow X(x)Y(b) = 0 \quad \forall x \Rightarrow \\ \Rightarrow Y(b) = 0 &\Rightarrow \kappa_y b = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Теперь мы получили выражения для X и Y :

$$\begin{aligned}X_m(x) &= C_2 \cdot \sin \frac{\pi m x}{a} \\ Y_n(x) &= A_2 \cdot \sin \frac{\pi n y}{b}\end{aligned}$$

Теперь можем окончательно записать выражения для собственных функций и собственных значений в решении ТМ-волн:

$$\left. \begin{aligned}\varphi_{mn}^e &= B_{mn} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} \\ \kappa_{mn}^2 &= \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\end{aligned} \right\}, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Решение для ТЕ-волн. Приведем решение без вывода:

$$\left. \begin{aligned}\varphi_{mn}^m &= B_{mn} \cos \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b} \\ \kappa_{mn}^2 &= \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\end{aligned} \right\}, \quad m, n = (0), 1, 2, \dots \quad (2)$$

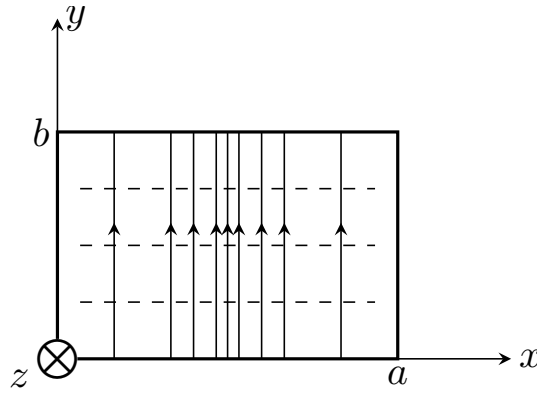
Важным отличием является то, что теперь одно из чисел m, n может быть равно нулю (решение от этого не станет тривиальным).

Низшая мода. По определению, низшая мода – та, у которой минимальное поперечное волновое число. Так как мы предполагали, что $a > b$, то в нашем случае это мода TE_{10} :

$$\kappa_{10} = \frac{\pi}{a} \quad \rightarrow \quad \omega_{cr 10} = \frac{\kappa_{10} \cdot c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

Именно моду TE_{10} чаще всего используют на практике в линиях передачи.

Рассмотрим перпендикулярную структуру поля TE_{10} -волны. Нарисуем силовые линии полей E и H в плоскости (x, y) – перпендикулярной распространению волны (рис. 22)

Рис. 22. Структура полей \vec{E} и \vec{H} (\vec{H} изображено пунктиром)

На границах волновода поле E равно нулю (в силу условия $E_\tau = 0$). Поле \vec{E} можем получить из уравнений (2),(1):

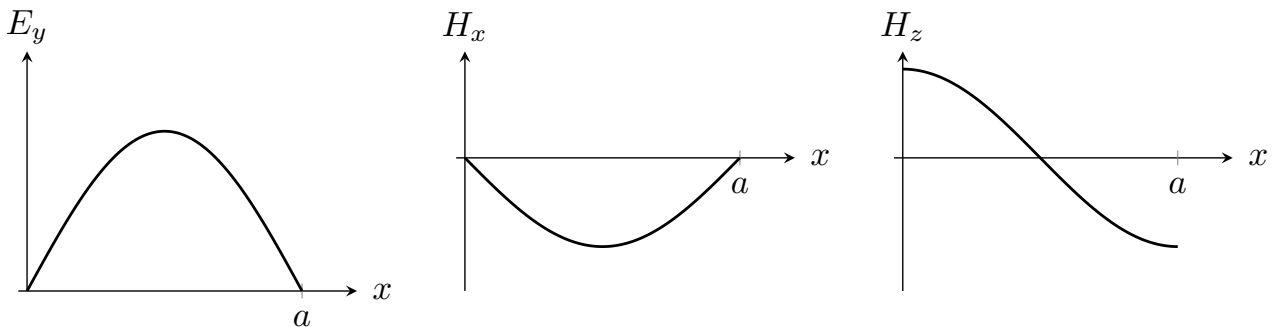
$$\vec{E} = \vec{E}_\perp = \vec{y}_0 E_0 \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \exp[i(\omega t - hz)],$$

где

$$h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

Поле H можно найти из импедансного соотношения (для ТЕ-волны):

$$\frac{E_y}{H_x} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{k}{h}$$

Рис. 23. Поперечная структура полей \vec{E} и \vec{H} (мода ТЕ)

За перенос энергии отвечают именно поперечные компоненты поля. Компонента поля $H_z \sim \cos \frac{\pi x}{a}$, а также сдвинута по фазе во времени.

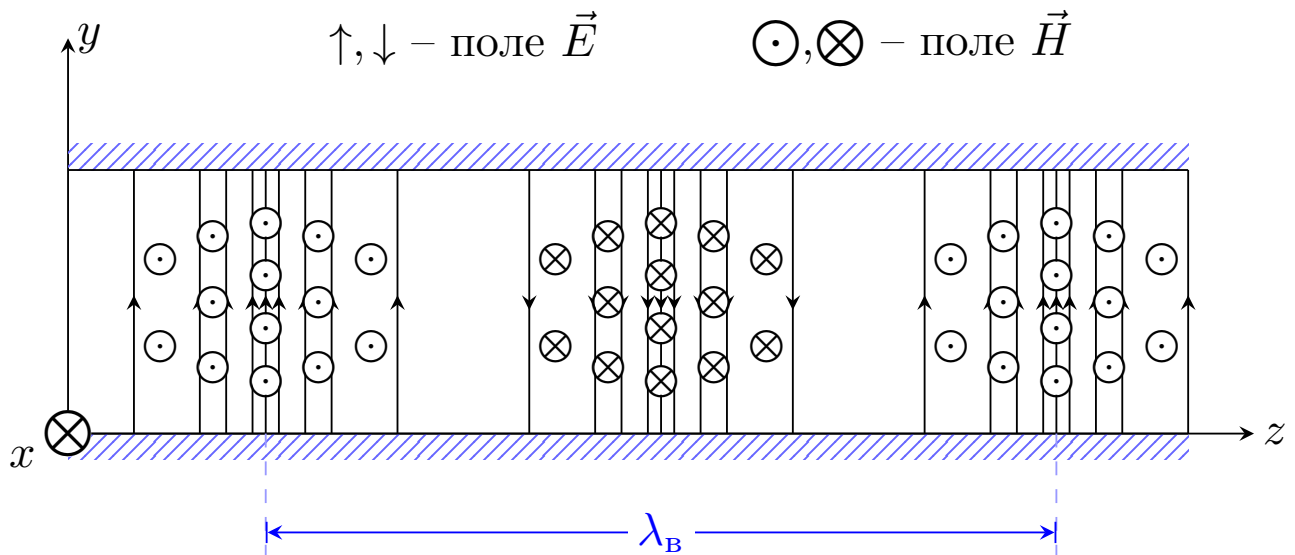


Рис. 24. Продольная структура полей \vec{E} и \vec{H} (мода TE)

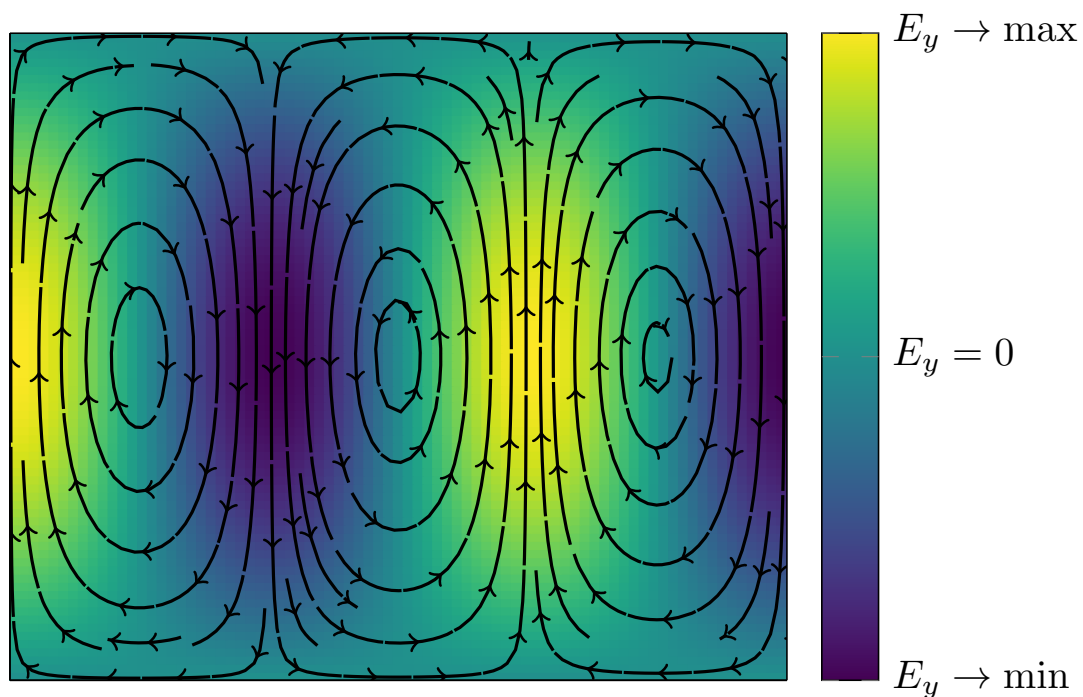


Рис. 25. Структура поля \vec{H} (изображены силовые линии) и поля \vec{E} (напряженность изображена цветом) волны TE_{10} в прямоугольном волноводе

Высшие моды. В зависимости от соотношения между a и b , порядок мод может быть разным (он определяется величиной поперечного волнового чис-

ла). Некоторые высшие моды:

$$\text{TE}_{11} : \quad \kappa_{11} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$$

$$\text{TE}_{20} : \quad \kappa_{20} = \frac{2\pi}{a}$$

$$\text{TE}_{01} : \quad \kappa_{11} = \frac{\pi}{b}$$