

Отчет по лабораторной работе №1  
**Синтез и реализация цифрового целочисленного  
фильтра на микроконтроллере**

Выполнили студенты 440 группы  
Карусевич А.А., Шиков А.П., Виноградов И.Д., Понур К.А.

Нижний Новгород, 2019

## 1. Введение

## 2. Экспериментальная часть

В настоящей работе изучается моделирование и проектирование целочисленных цифровых фильтров на примере синтеза рекурсивных и нерекурсивных цифровых фильтров и реализации рекурсивного фильтра на микроконтроллере MSP430F1611.

Цифровые фильтры синтезируются с учетом требований по АЧХ и ФЧХ (т.н. многофункциональный синтез). По результатам измерений выходного сигнала оценивается селективная способность и рабочий диапазон частот фильтра.

Выбор целочисленной реализации фильтра (т.е. все коэффициенты фильтра целочисленны) обусловлен меньшей вычислительной сложностью, чем при вычислениях с плавающей точкой, а следовательно, более высоким быстродействием и меньшим потреблением памяти. В таком случае задача решается на базе целочисленного нелинейного программирования (ЦНП), а проектируемые фильтры называют ЦНП-фильтрами.

## 3. Математическое описание фильтров

**ЦНП-фильтр.** Это дискретная линейная система, определяемая разностным уравнением, например

$$y_n = - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} \cdot y_{n-k} + \sum_{k=0}^N \frac{b_k}{a_0} \cdot x_{n-k}, \quad (1)$$

где  $y_n$  – выходная временная последовательность, а  $x_n$ , соответственно, входная.

Так как фильтр целочисленный, то коэффициенты  $b_k$ ,  $a_k$  составляют ряд целых чисел, который может быть как натуральным, так и биномиальным (для нормирующего коэффициента  $a_0$ ).

### 3.1. Рекурсивные фильтры

Если при вычислении текущих выходных значений участвуют не только входные данные, но и значения выходной последовательности, вычисленные в предшествующих циклах расчетов, как это производится в (1), фильтр будет рекурсивным.

Наличие обратной связи определяет бесконечный характер импульсной характери-

ки рекурсивного фильтра<sup>1</sup>, причём его частотный коэффициент передачи

$$H(z) = A \frac{\prod_{i=1}^N (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})}, \quad (2)$$

где  $z = e^{j\omega}$ , полностью описывается распределением полюсов и нулей в комплексной плоскости. Если система устойчива, то все полюсы  $p_i$  должны лежать внутри единичного круга [3, 4, 6]. Тогда условие устойчивости рекурсивного фильтра может быть записано в виде системы неравенств

$$|p_i| < 1 \quad \forall i. \quad (3)$$

**Каскадная схема.** Уравнение (1) соответствует прямой форме аппаратной реализации фильтра. Для качественной нормировки всей совокупности требуемых частотных характеристик прямая форма наименее выгодна, т.к. одним нормирующим коэффициентом  $a_0$  этого сделать обычно не удаётся. Наиболее выгодной как для рекурсивного, так и для нерекурсивного фильтров является последовательная форма построения в виде каскадного включения  $m = \frac{N}{2}$  звеньев второго порядка, при этом передаточная функция такого каскада

$$H(z) = \prod_{i=1}^m \frac{b_{0i} + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}}{a_{0i} + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}. \quad (4)$$

Заметим, что такой вид передаточной функции более выгоден в плане нормировки отдельных коэффициентов, так как нормирующий коэффициент  $a_{0i}$  есть в каждом звене.

Для одного звена каскадного рекурсивного фильтра разностное уравнение можно записать в виде

$$y_n = \frac{b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2} - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2}}{a_0}. \quad (5)$$

Деление на целочисленный коэффициент  $a_0$  может быть выполнено сдвигом, если  $a_{0i} \in \{2^q\}, q = \overline{0, R-1} \quad i = \overline{1, m}$ , где  $R$  – разрядность микропроцессора.

На рис. 4 приведена типичная структура звеньев рекурсивного целочисленного фильтра, соответствующая уравнению (5). Как нетрудно видеть, при вычислении отклика фильтра используется операция сдвига на  $B = \log_2 a_0$  бит для деления на  $a_0$ .

---

<sup>1</sup>Поэтому рекурсивные фильтры называют БИХ-фильтрами (бесконечная импульсная характеристика) или IIR-фильтрами (infinite impulse response).

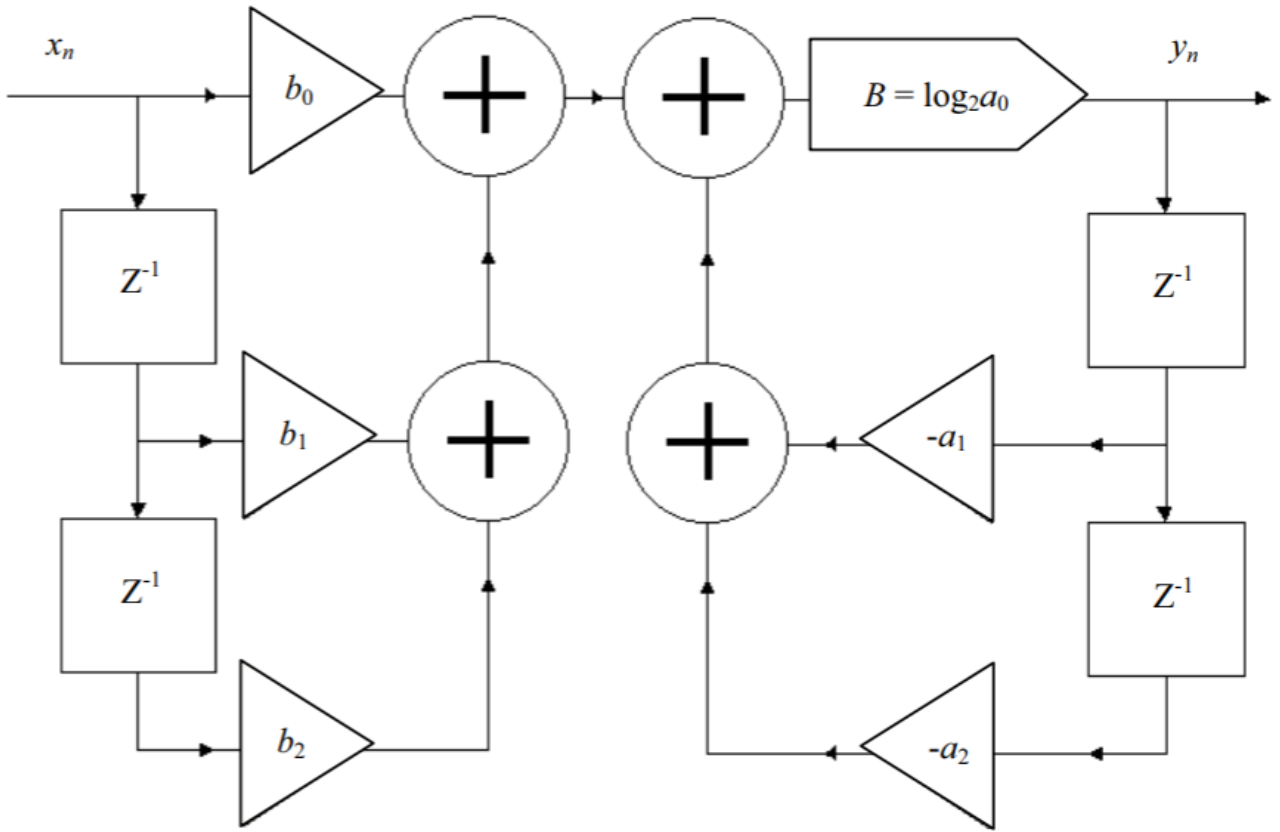


Рис. 1: Структура звена рекурсивного ЦНП-фильтра

Формально задача машинного синтеза рекурсивного фильтра описывается системой

$$\begin{cases} F^o(\mathbf{IX}^o) = \min F(\mathbf{IX}), & \mathbf{IX} \in I^{6m}, \\ -2^{R-1} \leq a_{di} \leq 2^{R-1} - 1, & d = 0, 2, \quad i = 1, \dots, m \\ a_{0i} \leq 2^{R-1} - 1, & d = 0, 2, \quad i = 1, \dots, m \\ a_{0i} \in \{2^q\}, & q = 0, \dots, R-1 \\ (|b_{0i}| + |b_{1i}| + |b_{2i}| + |a_{1i}| + |a_{2i}|) < 2^{R-1}, & i = 1, \dots, m \end{cases} \quad (6)$$

где  $I^{6m}$  – целочисленное пространство параметров фильтра,  $m$  – число звеньев второго порядка,  $d$  – индекс коэффициента передаточной функции звена (4).

Общая экстремальная задача синтеза записана относительно целочисленного пространства  $I^{6m}$  параметров (коэффициентов фильтра). Поисковое итеративное решение экстремальной задачи ЦНП в заданном пространстве параметров осуществляет программный алгоритмический комплекс через модельный блок программы для расчёта текущих функциональных характеристик фильтра.

Вектор  $\mathbf{IX}^o$ , минимизирующий скалярную целевую функцию  $F$ , является эффективным решением задачи параметрического синтеза рекурсивного ЦНП-фильтра.

### 3.2. Некурсивные фильтры

В некурсивных ЦНП-фильтрах отклик фильтра вычисляется через прямую линейную свёртку значений входной КИХ-последовательности  $x_n$

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b_k}{a_0} \cdot x_{n-k}, \quad (7)$$

поэтому такие фильтры всегда устойчивы и имеют конечную импульсную характеристику (finite impulse response – FIR). Входное окно КИХ-фильтра составляет  $N$  отсчётов, при этом значение  $N$  определяет порядок некурсивного фильтра.

Передаточная функция каскадного соединения  $m$ -звеньев второго порядка некурсивного ЦНП-фильтра может быть записана так:

$$H(z) = \prod_{i=1}^m \frac{b_{0i} + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}}{a_{0i}}. \quad (8)$$

Уравнение одного звена некурсивного фильтра имеет вид:

$$y_n = \frac{b_0x_n + b_1x_{n-1} + b_2x_{n-2}}{a_0}, \quad (9)$$

где коэффициент  $a_0$  во всех  $m$  звеньях также принадлежит биномиальному целочисленному ряду  $a_{0i} \in \{2^q\}, q = \overline{0, R-1} \quad i = \overline{1, m}$ . На рис. 2 приведена типичная структура звеньев некурсивного цифрового фильтра.

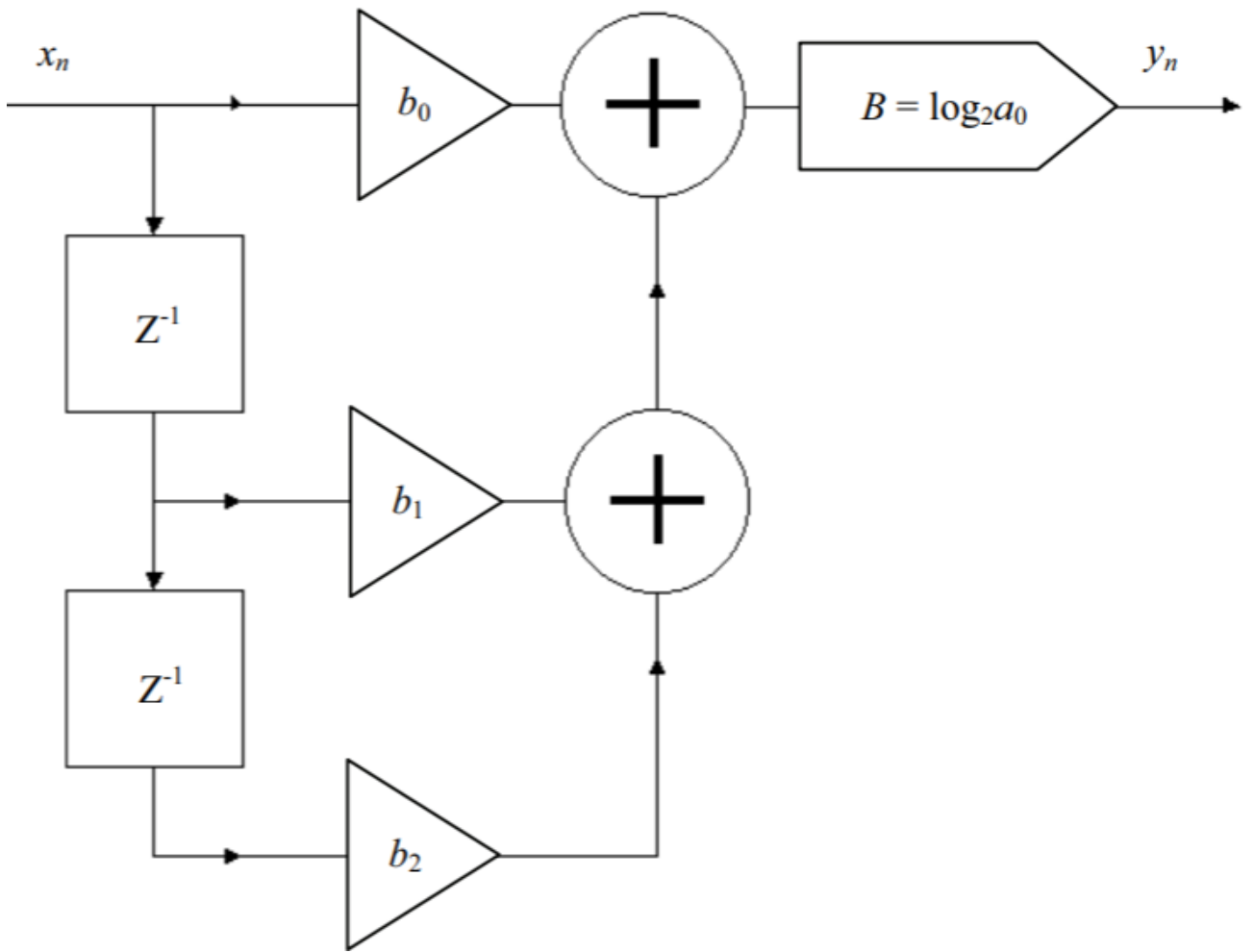


Рис. 2: Структура звена нерекурсивного ЦНП-фильтра

Постановка задачи целочисленного нелинейного программирования для машинного синтеза нерекурсивного фильтра выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} F^o(\mathbf{IX}^o) = \min F(\mathbf{IX}), & \mathbf{IX} \in I^{4m}, \\ -2^{R-1} \leq b_{di} \leq 2^{R-1} - 1, & d = 0, 2, \quad i = 1, \dots, m \\ a_{0i} \in \{2^q\}, & q = 0, \dots, R-1 \\ (|b_{0i}| + |b_{1i}| + |b_{2i}|) < 2^{R-1}, & i = 1, \dots, m \end{cases} \quad (10)$$

где  $I^{4m}$  – целочисленное пространство параметров фильтра,  $m$  – число КИХ-звеньев второго порядка,  $d$  – индекс коэффициента передаточной функции одного звена КИХ-фильтра,  $R$  – разрядность микропроцессора.

## 4. Лабораторная установка

Для выполнения лабораторной работы используются три программных модуля:

- программа параметрического синтеза и анализа ЦНП-фильтров,
- среда программирования микроконтроллера IAR,
- панорамный измеритель частотных характеристик фильтра.

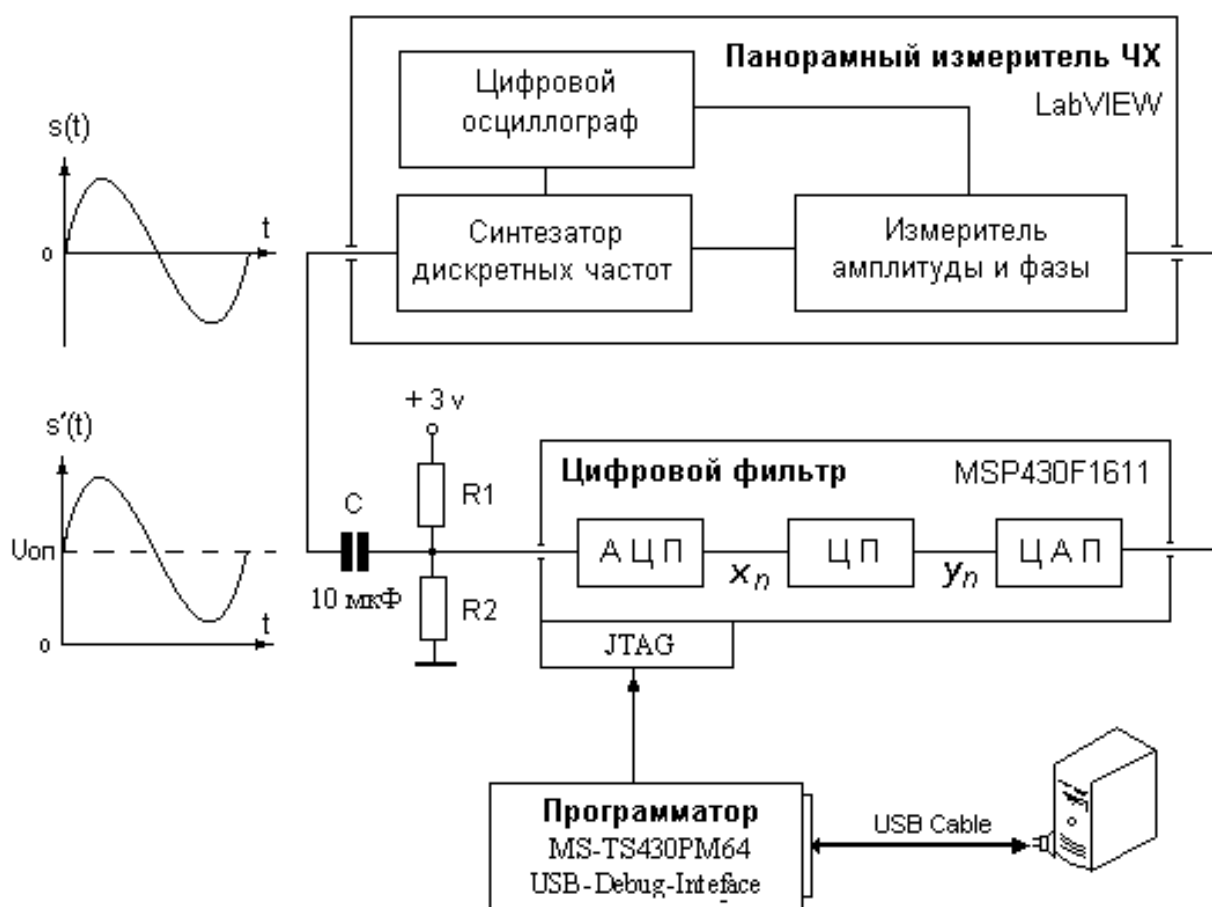


Рис. 3: Схема лабораторной установки

В лабораторную установку входят отладочная плата MSP-FET430UIF с микроконтроллером MSP430F1611, на котором реализован исследуемый ЦЦФ. Программирование микроконтроллера осуществляется с помощью программатора MSP-TS430PM64 через интерфейс JTAG.

Измерение частотных характеристик фильтра осуществляется на реальном сигнале с помощью автоматизированной панорамной измерительной системы, разработанной в сре-

де виртуальных приборов LabVIEW. Синтезатор частоты генерирует качественный гармонический сигнал амплитудой 0,5 вольта на дискретных частотах заданного пользователем интервала измерения от частоты  $f_{\min}$  до частоты  $f_{\max}$  с шагом  $f_s$  (все частоты задаются в Гц). Сигнал с синтезатора частоты в положительной полярности подаётся на вход АЦП цифрового фильтра, а выходной сигнал ЦАП – на измеритель амплитуды и фазы. Время генерации входного гармонического сигнала – 10 периодов на каждой дискретной частоте. Этого вполне достаточно для полного установления колебаний в исследуемой системе. В конце каждого интервала генерации производится измерение амплитуды и фазы выходного сигнала.

Форма входного и выходного сигналов на каждой дискретной частоте отображается на панели цифрового осциллографа, входящего в состав панорамного измерителя частотных характеристик. После завершения измерений в заданном интервале частот производится построение графиков АЧХ и ФЧХ исследуемого фильтра. Эти графики могут быть распечатаны или сохранены в файле средствами LabVIEW.

#### 4.1. Программа синтеза и анализа цифровых фильтров

Программа позволяет осуществлять параметрический синтез как рекурсивных (IIR), так и нерекурсивных (FIR) цифровых фильтров различного порядка в широкой области допустимых изменений целочисленных параметров (коэффициентов) фильтра, проводить подробный анализ полученного оптимального решения в частотной области, выводить на печать графики частотных характеристик синтезированного фильтра, а также формировать файл протокола решения текущей задачи синтеза. Рассмотрим взаимодействие основных модулей программы в контексте выполнения основных этапов решения конкретной задачи синтеза цифрового фильтра.

**На первом этапе** формируется типовой топологический файл задания на синтез `name.top`, имя которого определяет пользователь. В данных файлах содержится описание структуры синтезируемого фильтра, определяются границы изменения его варьируемых коэффициентов и их начальное значения, указывается порядок и тип синтезируемого фильтра.

**На втором этапе** необходимо осуществить ввод требуемых характеристик синтезируемого фильтра и сформировать целевую функцию. Для этого служит графический редактор функциональных характеристик (функциональный редактор), который необходимо вызвать из основного меню программы.

**На третьем этапе** программный алгоритмический комплекс осуществляет поисковое итеративное решение экстремальной задачи ЦНП-синтеза в заданном пространстве



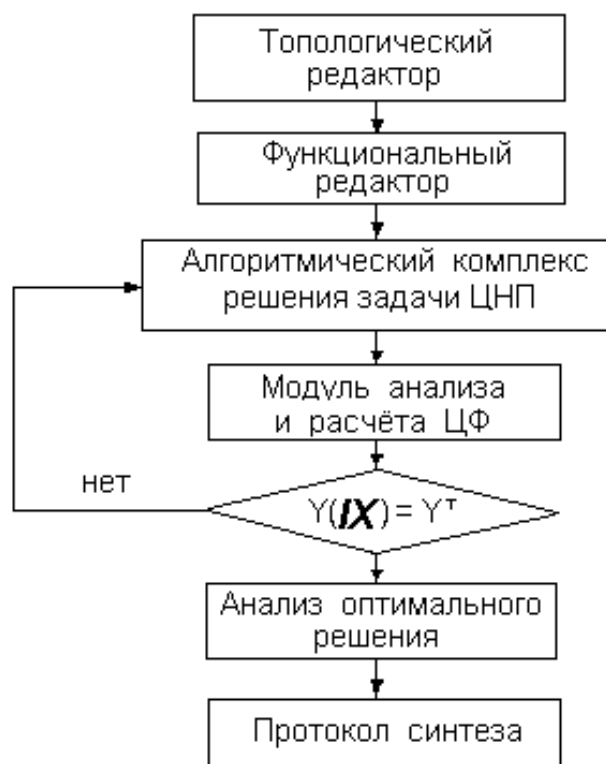


Рис. 4: Блок-схема учебной программы синтеза

целочисленных варьируемых коэффициентов фильтра, обращаясь к модельному блоку программы для расчёта текущих функциональных характеристик фильтра по заданной его модели. Старт синтеза осуществляется нажатием соответствующей «горячей» кнопкой основного меню программы.

**На четвёртом этапе** осуществляется подробное исследование найденного эффективного решения задачи ЦНП-синтеза в модуле анализа пакета (кнопка основного меню «Анализ») с построением графиков всех характеристик цифрового фильтра, их распечаткой и формированием стандартного протокола решения задачи синтеза.

## 4.2. Микроконтроллер и его программирование

В данной лабораторной работе изучаются вопросы программной реализации синтезированного целочисленного фильтра на микропроцессорном контроллере, широко используемом в современной радиоэлектронике в качестве встроенного средства контроля, цифровой обработки или управления характеристиками различных объектов или процессов.

На кристалле такого контроллера, кроме микропроцессора, находятся весь набор необходимых компонентов вычислительного комплекса, таких как АЦП, системный контрол-

лер, устройства постоянной и перепрограммируемой памяти, аппаратные умножители и сумматоры, ЦАП и др.

Реализация синтезированного ЦНП-фильтра сводится к программированию микроконтроллера, т.е. занесению в ПЗУ найденных целочисленных коэффициентов фильтра и программы их обработки — расчёта выходного отклика фильтра по его линейно-разностному уравнению для рекурсивного фильтра либо по прямой свёртке для нерекурсивного.

Программирование микроконтроллера ведётся в среде IAR Embedded Workbench for MSP430 на языке C++. В состав среды программирования входят компилятор, редактор с подсветкой синтаксиса, менеджер проектов, инструментальные средства отладки. Компилятор, входящий в пакет, представляет собой узкоспециализированный компилятор C, который генерирует код на ассемблере TI/IAR MSP430. Загрузка программы в память контроллера осуществляется с помощью встроенного в эту среду FET-Debugger, использующего интерфейс JTAG.

## 5. Синтез цифровых целочисленных фильтров

### 5.1. Полосовые фильтры

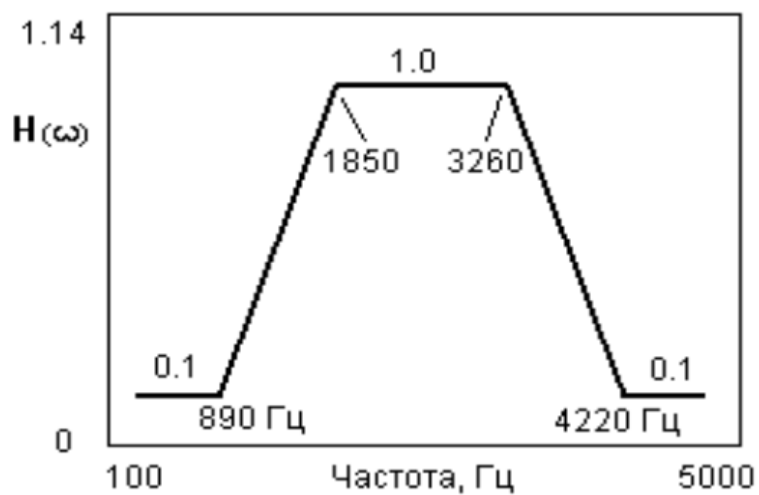


Рис. 5: Требуемая АЧХ полосового фильтра

#### 5.1.1 Полосовой FIR-фильтр

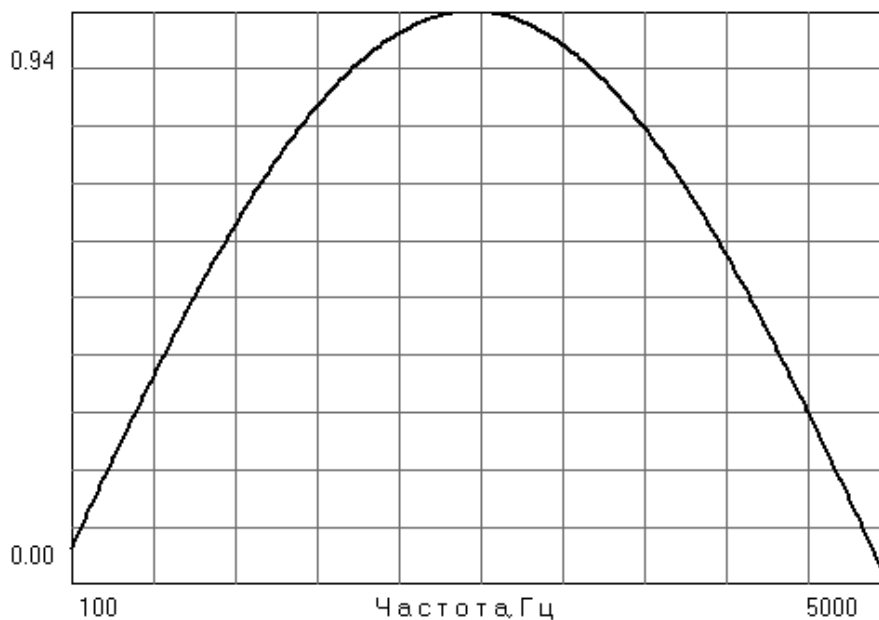


Рис.1 АЧХ цифрового фильтра

Рис. 6: АЧХ полосового FIR-фильтра второго порядка, СКО=0.137

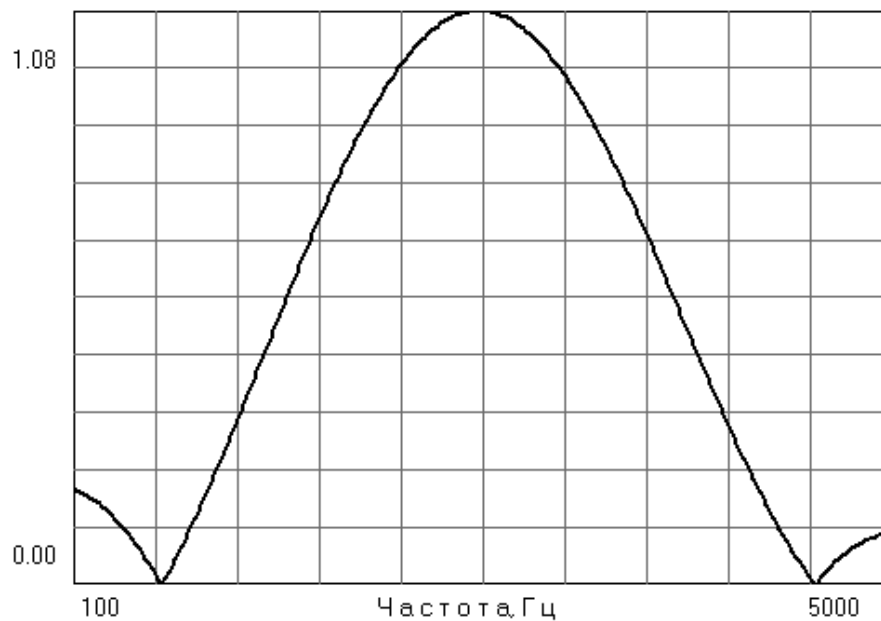


Рис.1 АЧХ цифрового фильтра

Рис. 7: АЧХ полосового FIR-фильтра четвёртого порядка, СКО=0.048

### 5.1.2 Полосовой IIR-фильтр

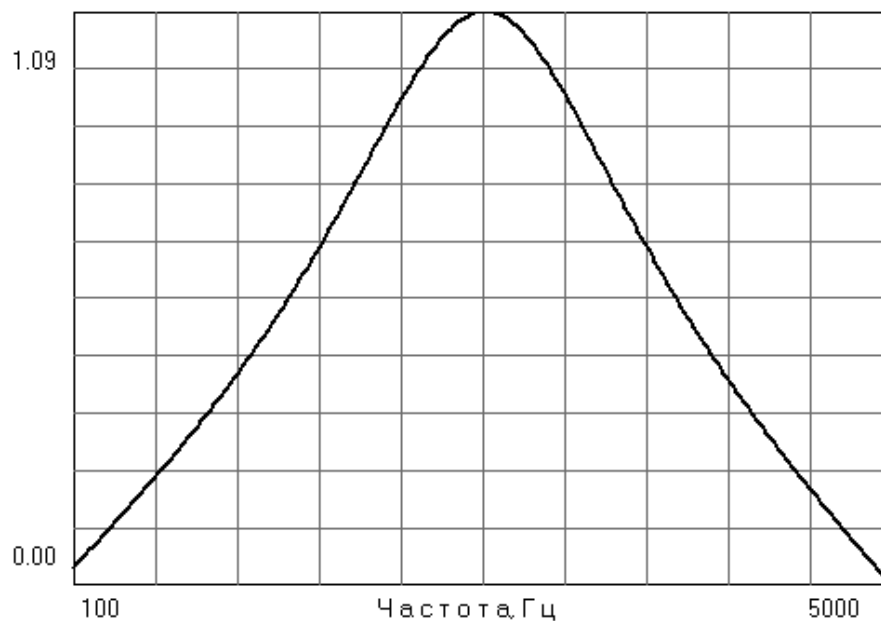


Рис.1 АЧХ цифрового фильтра

Рис. 8: АЧХ полосового IIR-фильтра второго порядка, СКО=0.084

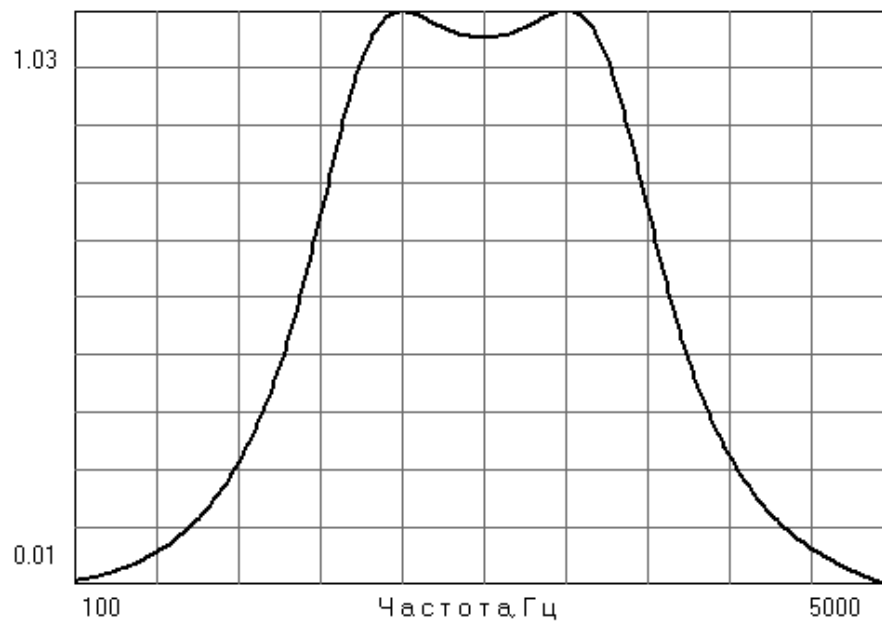


Рис.1 АЧХ цифрового фильтра

Рис. 9: АЧХ полосового IIR-фильтра четвёртого порядка,  $\text{СКО}=0.013$

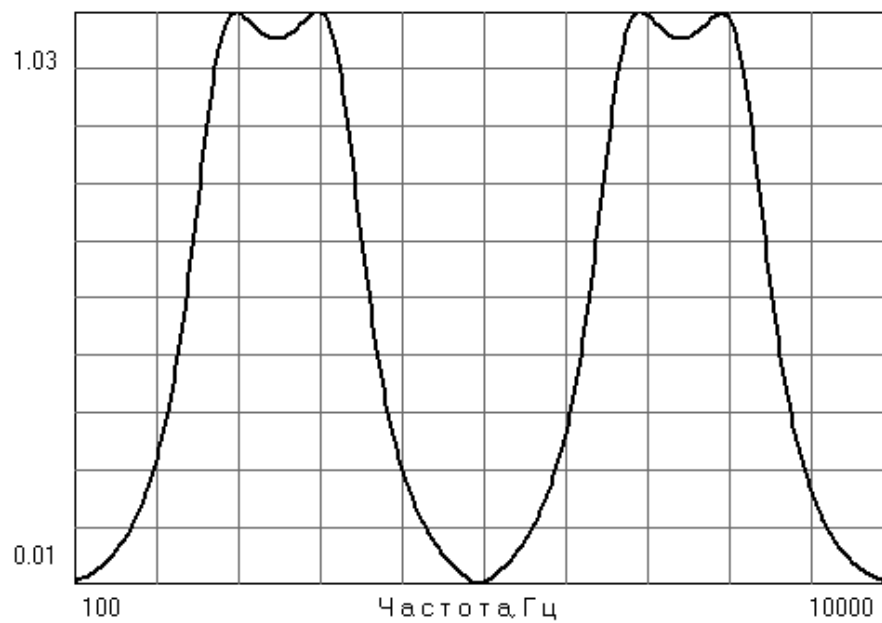


Рис.1 АЧХ цифрового фильтра

Рис. 10: АЧХ полосового IIR-фильтра четвёртого порядка,  $f_{\max} = f_d$

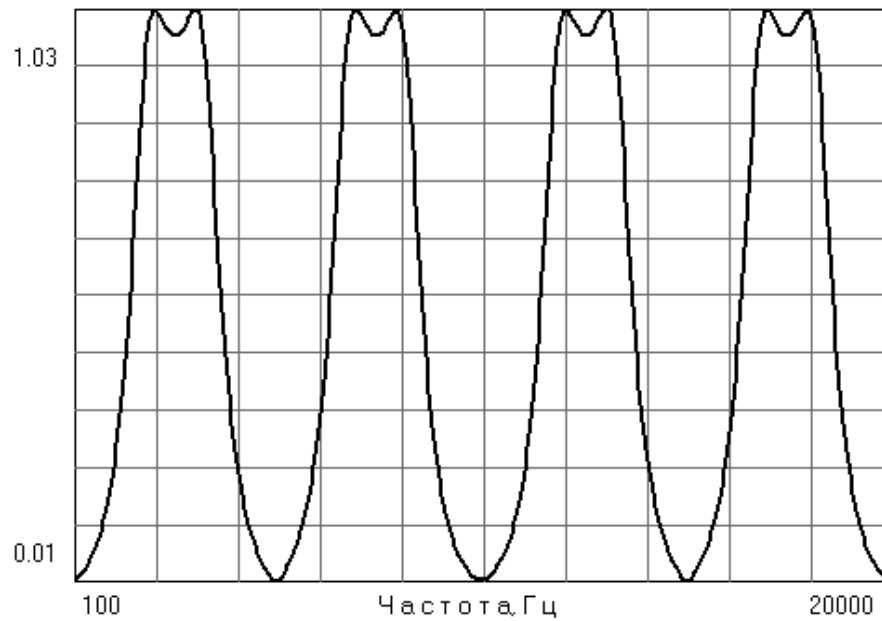


Рис.1 АЧХ цифрового фильтра

Рис. 11: АЧХ полосового IIR-фильтра четвёртого порядка,  $f_{\max} = 2f_d$

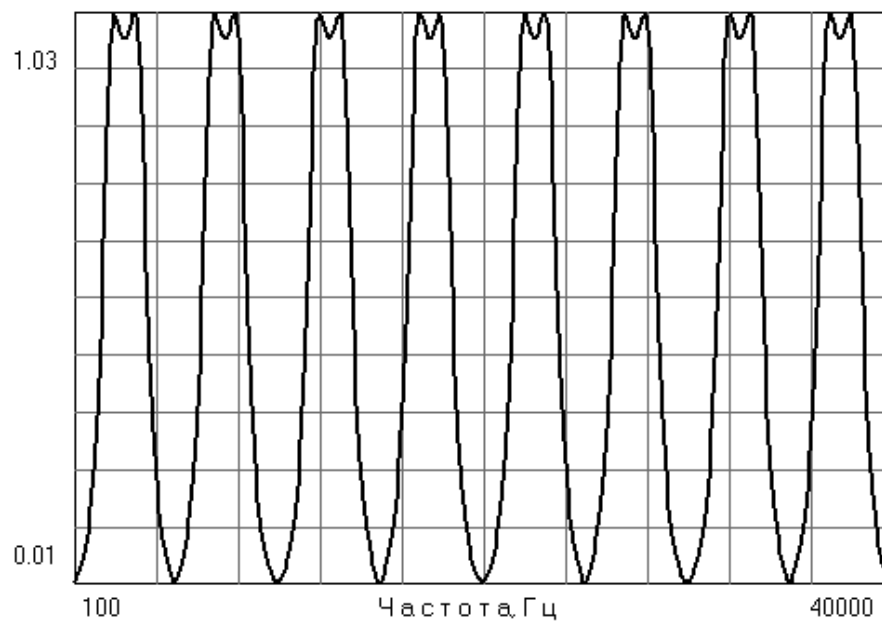


Рис.1 АЧХ цифрового фильтра

Рис. 12: АЧХ полосового IIR-фильтра четвёртого порядка,  $f_{\max} = 4f_d$

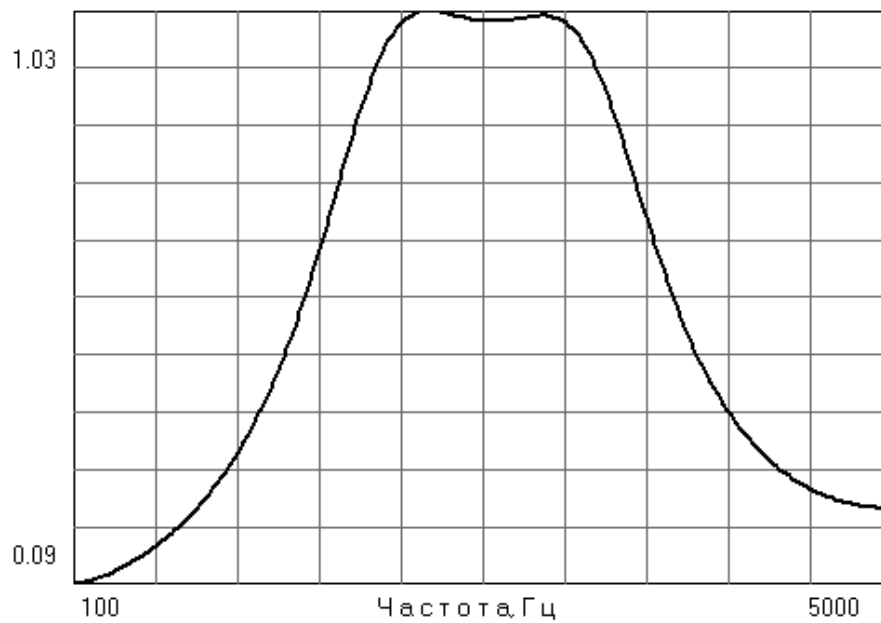


Рис.1 АЧХ цифрового фильтра

Рис. 13: АЧХ полосового IIR-фильтра четвёртого порядка,  $R = 4$  СКО=0.058

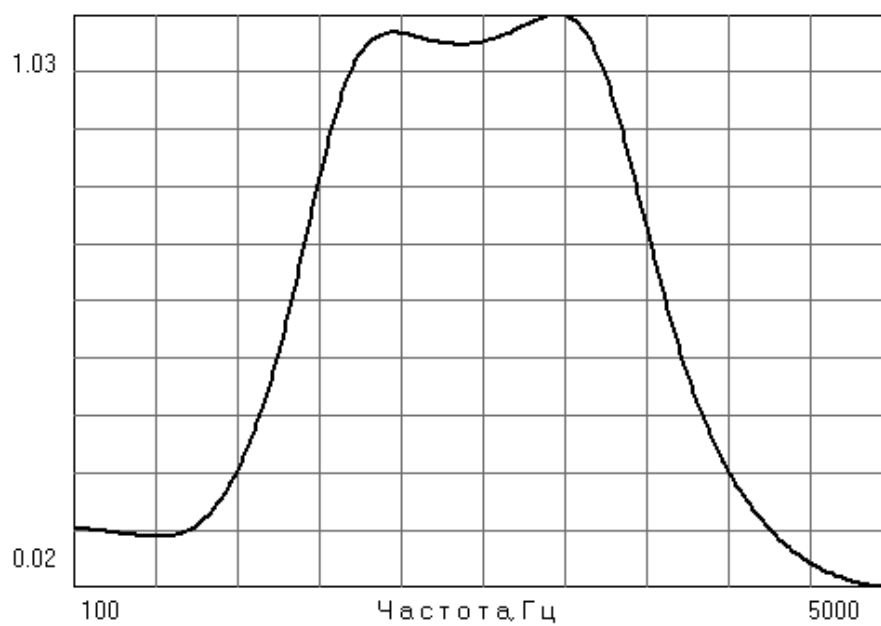


Рис.1 АЧХ цифрового фильтра

Рис. 14: АЧХ полосового IIR-фильтра четвёртого порядка,  $R = 8$  СКО=0.026

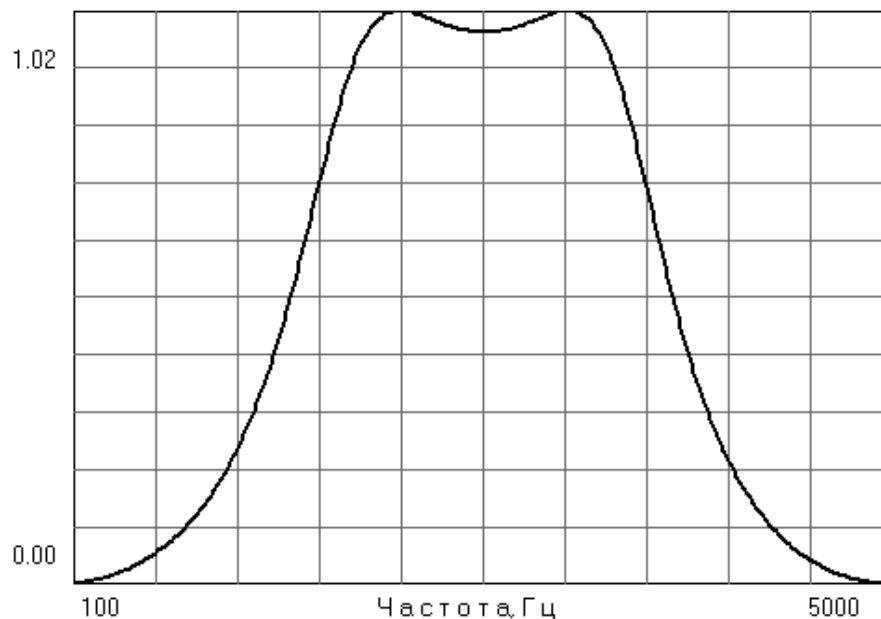


Рис.1 АЧХ цифрового фильтра

Рис. 15: АЧХ полосового IIR-фильтра четвёртого порядка,  $R = 16$  СКО=0.011

Таблица 1: Оптимальные коэффициенты полосового рекурсивного фильтра четвёртого порядка

Номер звена	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$b_0$	$b_1$	$b_2$
1	8192	5999	4553	2758	931	-2014
2	8192	-5237	4571	5840	-1869	-2956

По результатам анализа синтеза фильтров сделали вывод о том, что селективные свойства цифровых фильтров увеличиваются:

1. при переходе от нерекурсивных фильтров к рекурсивным;
2. с увеличением порядка;
3. с увеличением разрядности.

Частотные характеристики фильтра являются непрерывными, периодическими функциями и наблюдается чётная симметрия АЧХ относительно частоты Найквиста.



## 5.2. Гауссов фильтр

### 5.2.1 Гауссов FIR-фильтр

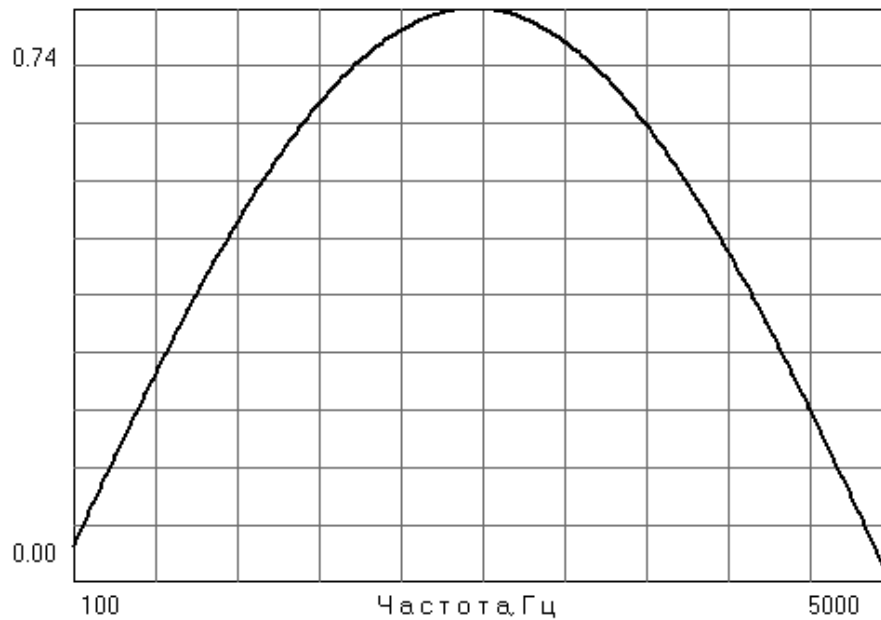


Рис.1 АЧХ цифрового фильтра

Рис. 16: АЧХ гауссова FIR-фильтра второго порядка, СКО=0.209

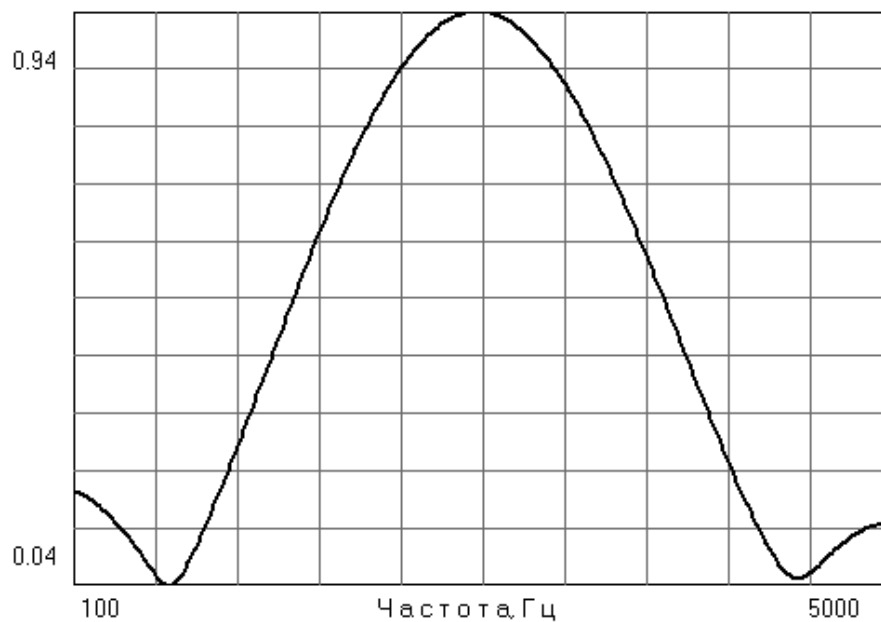


Рис.1 АЧХ цифрового фильтра

Рис. 17: АЧХ гауссова FIR-фильтра четвёртого порядка, СКО=0.093

### 5.2.2 Гауссов IIR-фильтр

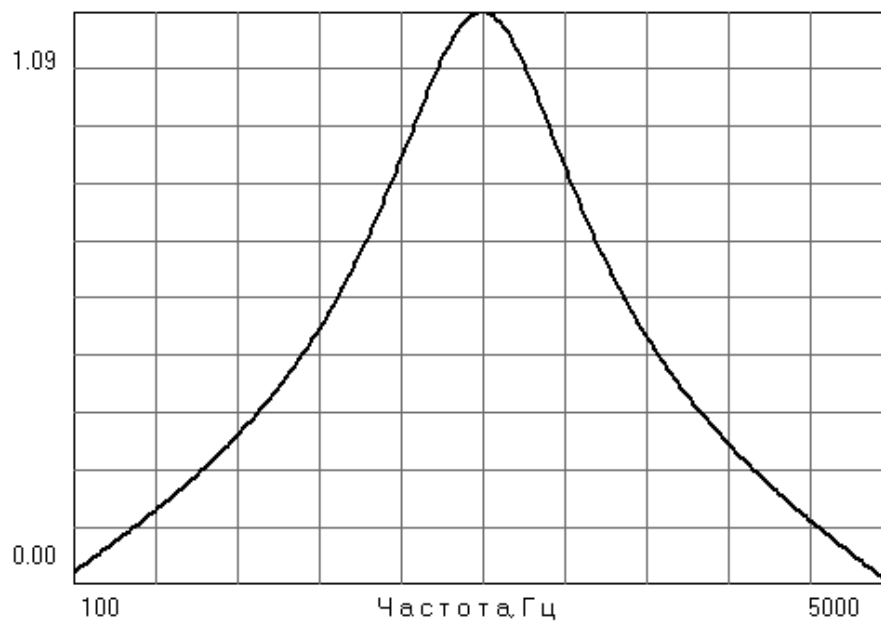


Рис.1 АЧХ цифрового фильтра

Рис. 18: АЧХ гауссова IIR-фильтра второго порядка, СКО=0.055

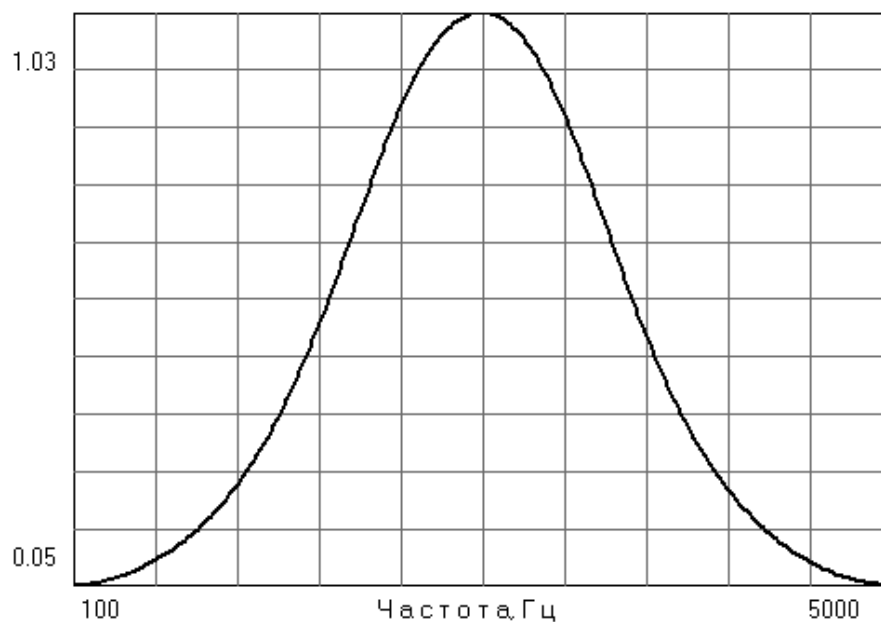


Рис.1 АЧХ цифрового фильтра

Рис. 19: АЧХ гауссова IIR-фильтра четвёртого порядка, СКО=0.007

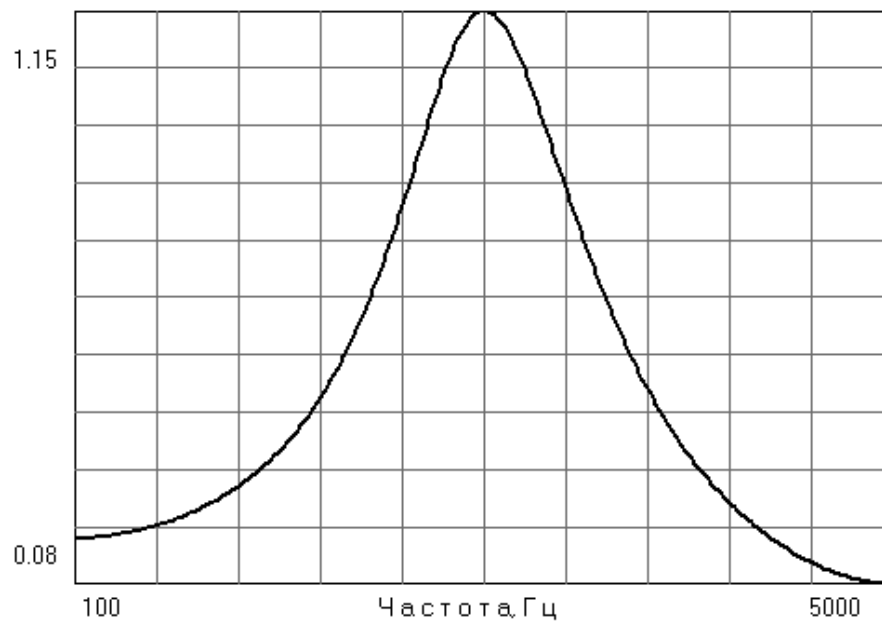


Рис.1 АЧХ цифрового фильтра

Рис. 20: АЧХ гауссова IIR-фильтра четвёртого порядка,  $R = 4$  СКО=0.047

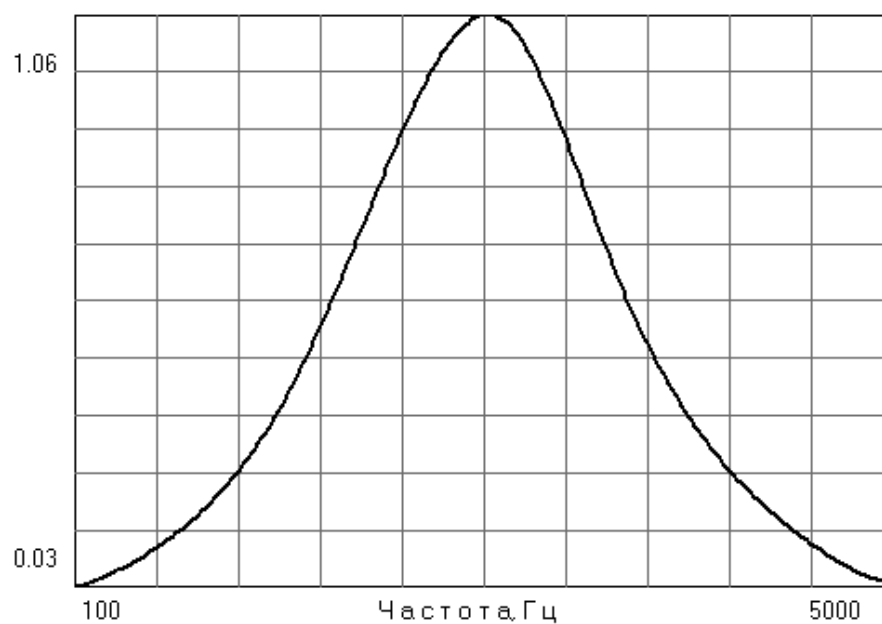


Рис.1 АЧХ цифрового фильтра

Рис. 21: АЧХ гауссова IIR-фильтра четвёртого порядка,  $R = 8$  СКО=0.017

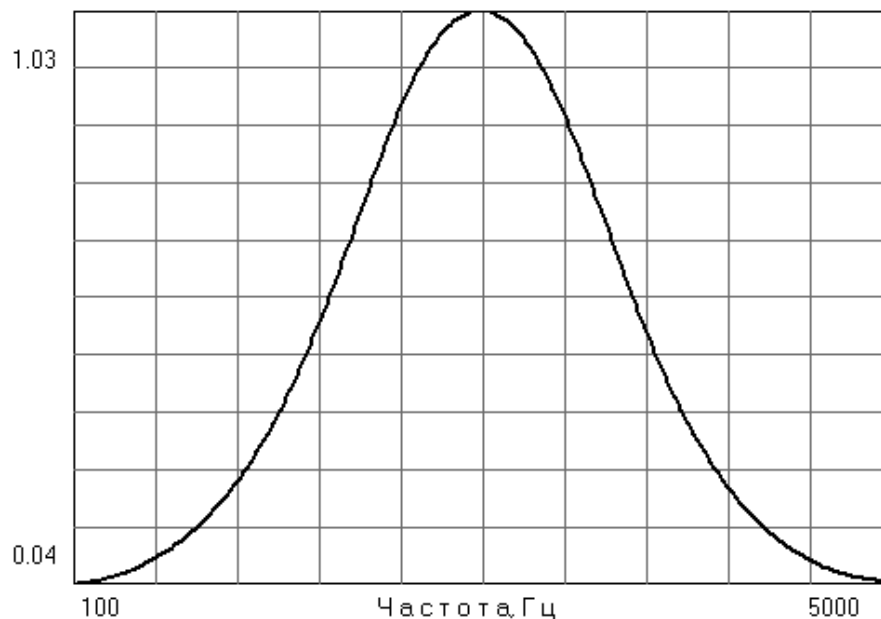


Рис.1 АЧХ цифрового фильтра

Рис. 22: АЧХ гауссова IIR-фильтра четвёртого порядка,  $R = 16$  СКО=0.009

Для IIR-фильтра 4-го порядка ( $R = 16$ ) были определены по АЧХ центральная частота  $f_0$ , полоса пропускания  $\Pi$ , добротность  $Q$  и коэффициент прямоугольности  $\zeta$ :

$$f_0 = 2500 \text{ Гц}, \quad \Pi = 2\Delta f_{0.7} = 1559.4 \text{ Гц}, \quad Q = \frac{f_0}{2\Delta f_{0.7}} = 2.06, \quad (11)$$

$$\text{КП} = \frac{2\Delta f_{0.7}}{2\Delta f_{0.1}} = 0.36 \text{ Гц} \quad (12)$$

Таблица 2: Оптимальные коэффициенты гауссова рекурсивного фильтра четвёртого порядка

Номер звена	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$b_0$	$b_1$	$b_2$
1	8192	-2909	3405	4170	8675	3833
2	16384	5793	7153	-5020	6826	-2695

В этом задании было получено, что селективные свойства фильтра увеличиваются при переходе от нерекурсивного фильтра к рекурсивному, при увеличении порядка и разрядности. Для исследованных фильтров частотная характеристика - периодическая и непрерывная функция, симметричная относительно частоты Найквиста.

## 6. Исследование цифрового тракта

С помощью встроенного в панорамный измеритель осциллографа была зафиксирована форма входного и выходного (с ЦАП) сигналов на частотах  $f_{\max}=200, 500$  и  $1000$  Гц ( $f_{\min}=10$  Гц, шаг  $f_s=20$  Гц):

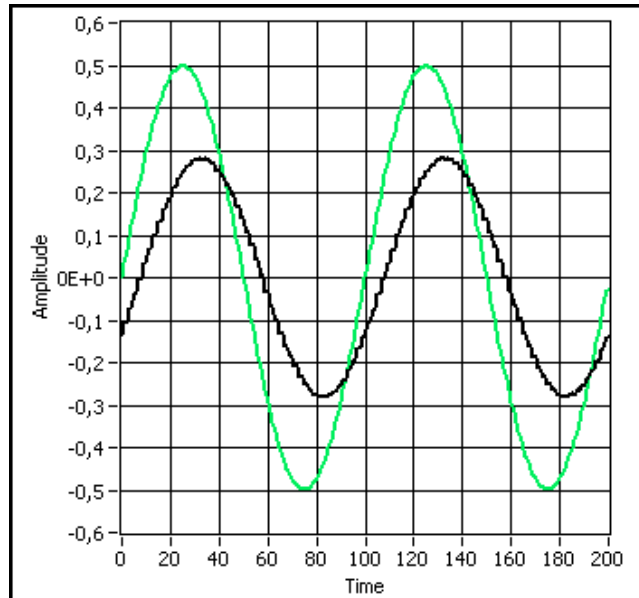


Рис. 23:  $f_{\max}=200$  Гц

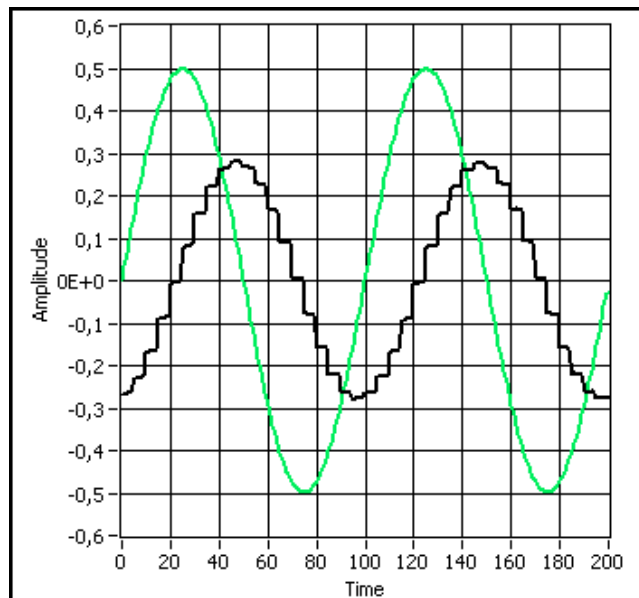


Рис. 24:  $f_{\max}=500$  Гц

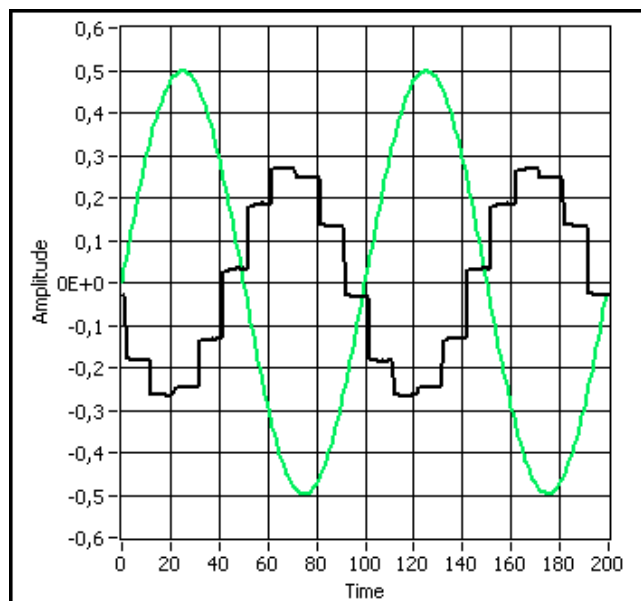


Рис. 25:  $f_{\max}=1000$  Гц

При приближении к частоте Найквиста форма сигнала становится более ступенчатой. Форма выходного сигнала отражает процесс дискретизации и квантования при обработке сигнала: количество ступенек в сигнале равно количеству выборок аналогового сигнала  $N$ , которое определяется по формуле

$$N = \frac{f_d}{f_s} \quad (13)$$

Где  $f_d$  – частота дискретизации сигнала, а  $f_s$  – частота сигнала на входе приемника.

## 7. Синтез ИР-ФНЧ с линейной фазой

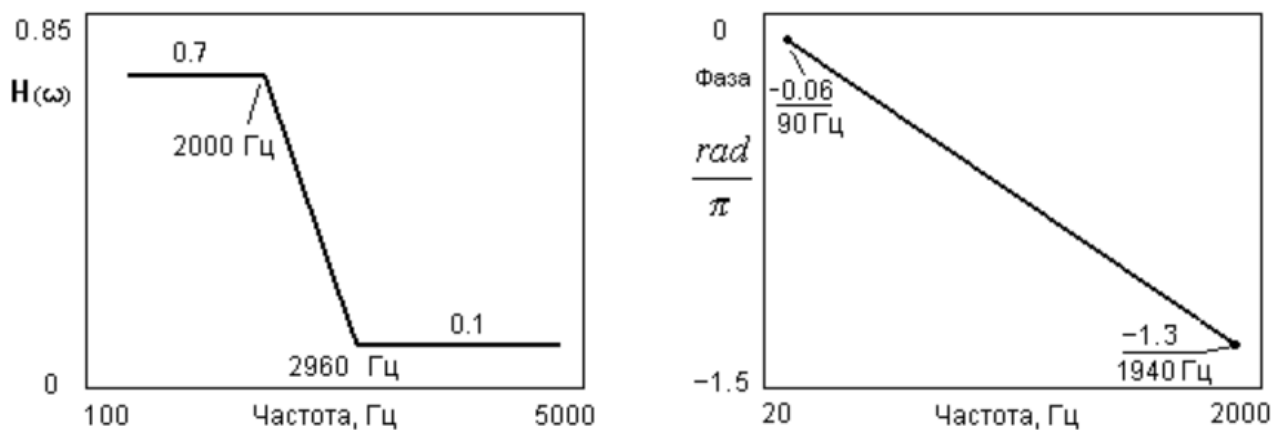


Рис. 26: Требуемые АЧХ и ФЧХ

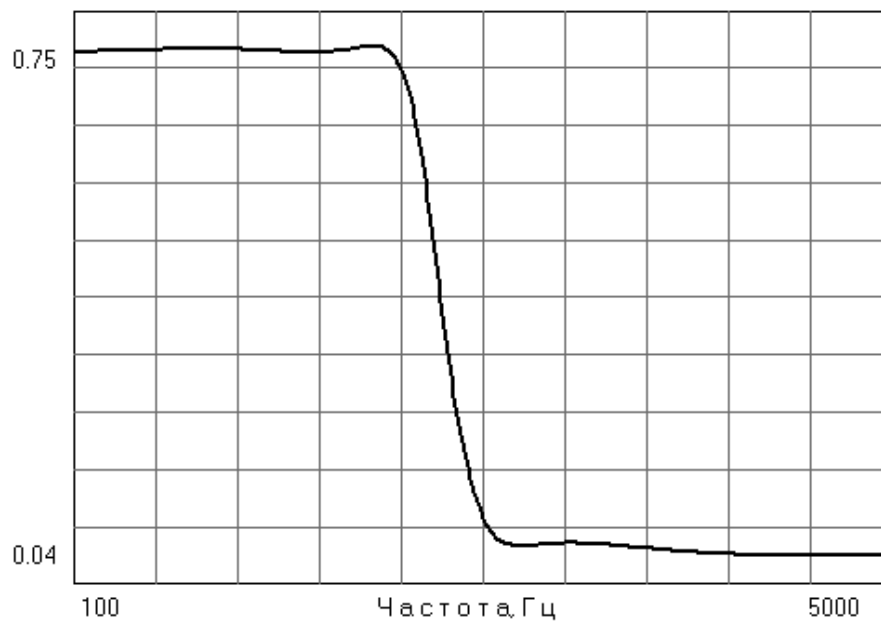


Рис.1 АЧХ цифрового фильтра

Рис. 27: АЧХ при синтезе без учета фазовых требований ( $\beta_2 = 0$ ) СКО=0.003

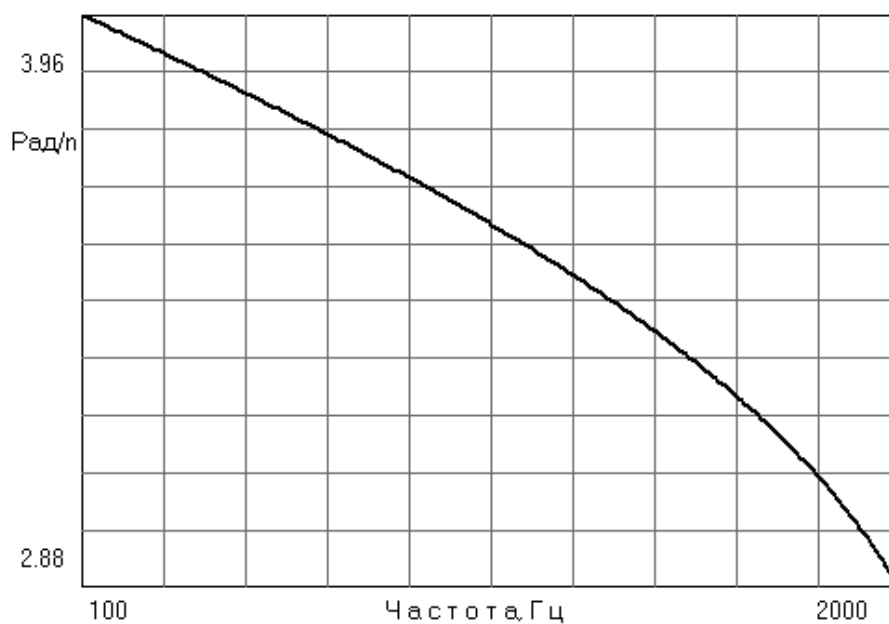


Рис.1 АЧХ цифрового фильтра

Рис. 28: ФЧХ при синтезе без учета фазовых требований ( $\beta_2 = 0$ ) СКО=15.23, max err=21.67

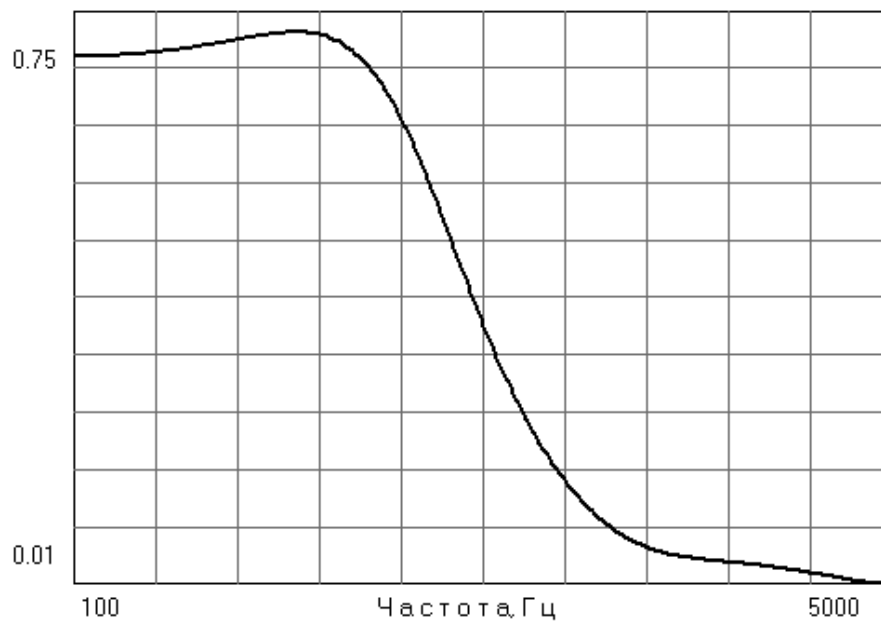


Рис.1 АЧХ цифрового фильтра

Рис. 29: АЧХ при синтезе с учетом фазовых требований ( $\beta_2 = 4$ ) СКО=0.012

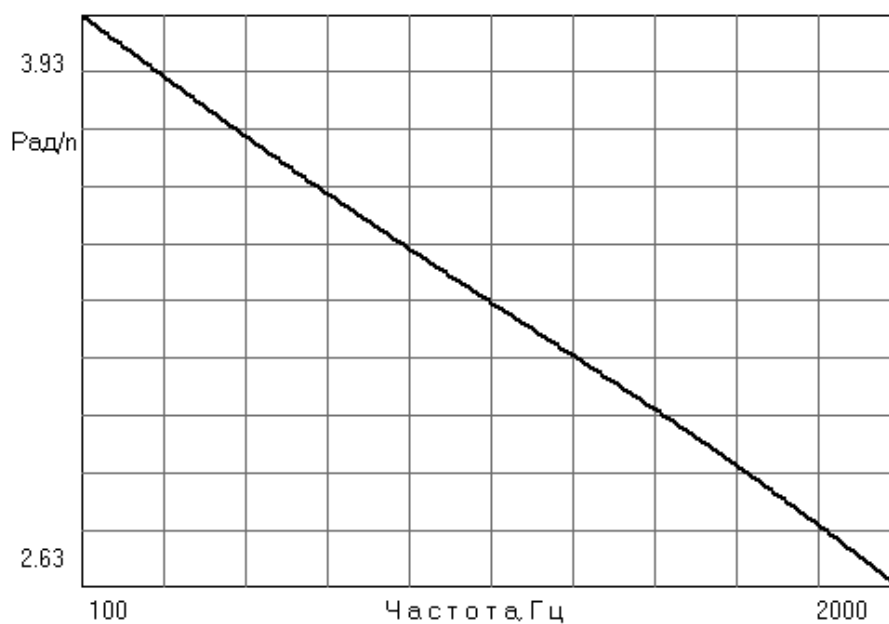


Рис.1 АЧХ цифрового фильтра

Рис. 30: ФЧХ при синтезе с учетом фазовых требований ( $\beta_2 = 4$ ) НЧХ=0.017

Из протокола синтеза в программу расчёта отклика были введены оптимальные коэффициенты синтезированного фильтра с учетом фазовых требований и осуществлены трансляция и загрузка программы в микроконтроллер. С помощью панорамного измерителя измерены АЧХ и ФЧХ синтезированного фильтра:



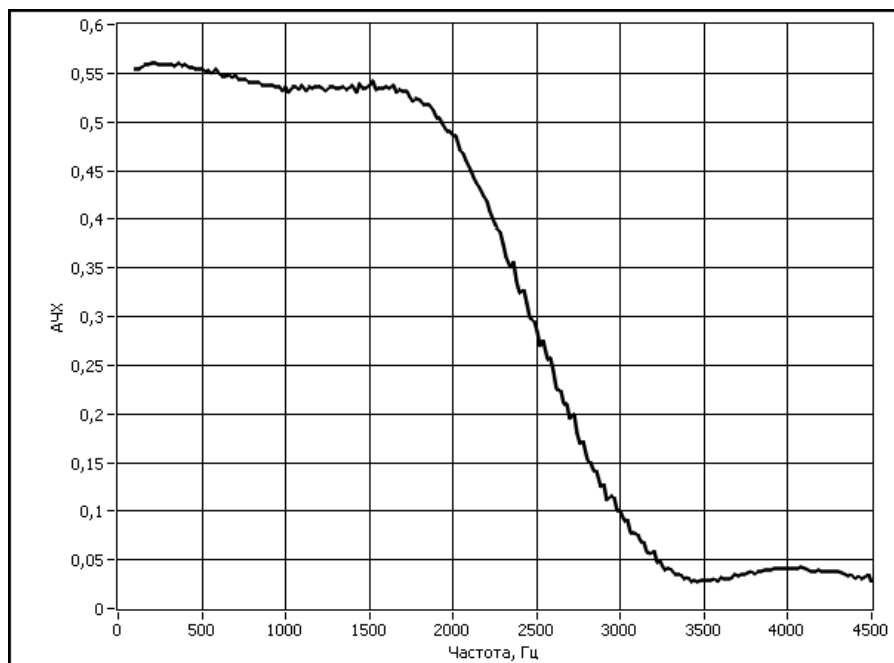


Рис. 31: АЧХ с панорамного измерителя

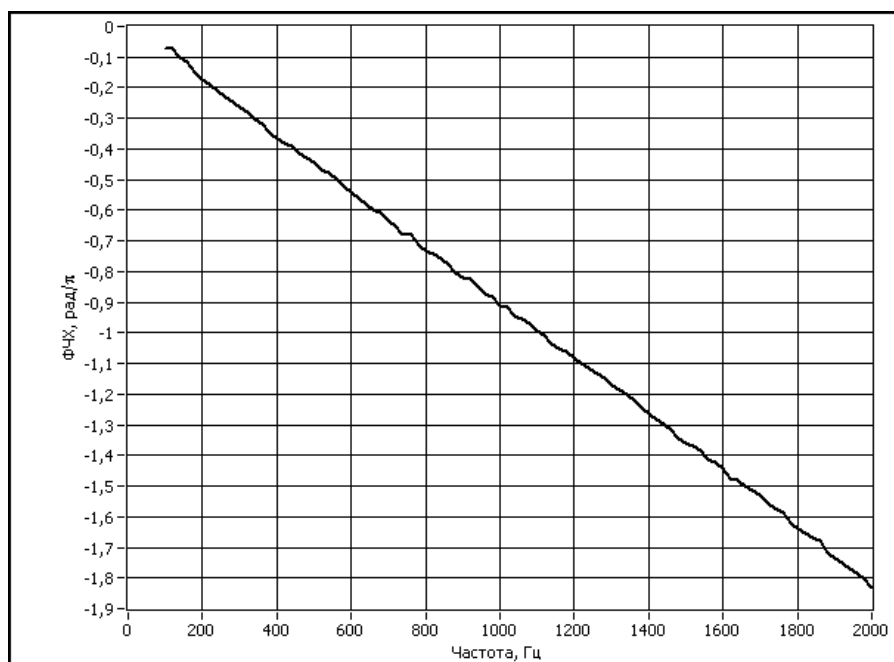


Рис. 32: ФЧХ с панорамного измерителя

При синтезе без учета фазовых требований СКО составляет 0.003, а нелинейность ФЧХ  $15^\circ$ . При синтезе с учётом фазовых требований селективность ухудшается ( $\text{СКО}=0.012$ ), но фазовые искажения уменьшаются до  $2.7^\circ$ . Это объясняется тем, что модуль и фаза коэффициента передачи связаны преобразованием Гильберта.

## Заключение

В процессе выполнения работы были синтезированы рекурсивные и не рекурсивные модельные ЦНП-фильтры и фильтры на микроконтроллере, оценены селективные свойства и рекомендуемый рабочий диапазон реализованного цифрового фильтра нижних частот.

Синтезирование рекурсивного фильтра проводилось с учетом и без учета фазовых требований. Если не учитывать фазовые требования, АЧХ практически совпадает с требуемой, однако появляется нелинейность ФЧХ в полосе пропускания.

При синтезе ФНЧ с учетом фазовых требований, селективность фильтра ухудшилась ( $СКО=2.776$ ), а фазовые искажения существенно уменьшились.