

Отчет по лабораторной работе №2  
**Электромагнитное экранирование**

Выполнили студенты 440 группы  
Карусевич А.А., Шиков А.П.

Нижний Новгород, 2019

## Введение

В данной работе исследуется **электромагнитное экранирование**<sup>1</sup> переменного магнитного поля стальными ( $\sigma \simeq 0.7 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}$ ,  $\mu \sim 10^2 \div 10^3$  при  $H \sim 10$  эрстед) и латунными ( $\sigma \simeq 1.5 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}$ ,  $\mu \cong 1$ ) цилиндрическими экранами на частотах экранируемого поля  $20 \div 10^4$  Гц.

Внутренние размеры всех экранов одинаковы (высота и радиус основания  $h = R = 5$  см), а толщина стенок различна ( $d = 0.2$  см,  $0.5$  см,  $1$  см).

Строгий аналитический расчет экранирования цилиндрическими замкнутыми экранами невозможен. Простыми моделями, допускающими точное решение задачи в аналитических функциях являются, например, модель плоского, цилиндрического и сферического слоя.

Среди этих моделей замкнутый экран можно описать только сферическим слоем. Кроме того, характерные размеры используемого экрана малы по сравнению с длиной волны экранируемого поля ( $\lambda_0 \sim 10$  км  $\Rightarrow h, D \ll \lambda_0$ ). Поэтому адекватным выбором для качественных оценок является именно сферическая модель. Для того, чтобы получить близкие и количественные результаты, логично взять для сферической модели же объем внутренней полости, что и у используемого экрана, и ту же толщину стенки.

Если замкнутая однородная сферическая оболочка помещена в квазистатическое внешнее поле с комплексным вектором напряженности  $\vec{H}_0 e^{i\omega t}$ , которое в ее отсутствие является однородным, то поле в ограничиваемой ею области  $\vec{H}_1 e^{i\omega t}$  также однородно. Эффективность экранирования удобно характеризовать величиной отношения комплексных амплитуд этих полей:

$$\eta_m = \frac{H_0}{H_1} \quad (1)$$

Безразмерная величина  $|\eta_m|$  показывает, в какое число раз ослабляется поле

---

<sup>1</sup>Под **электромагнитным экранированием** понимается изоляция некоторой области пространства от проникновения электромагнитных полей, существующих в соседних областях. Если  $\lambda_0 \gg l$ , где  $\lambda_0$  – длина волны экранируемого поля,  $l$  – характерный размер экранируемой области, то такая изоляция осуществляется обычно с помощью замкнутых металлических оболочек – экранов.

в экранированной области, и может быть названа **коэффициентом ослабления**.

По результатам эксперимента вычисляется коэффициент ослабления для всех экранов на всех частотах указанного диапазона, и сравнивается с теоретическим результатом для модели сферического слоя.

# 1. Модель сферического слоя

Полное решение задачи о сферическом экране в переменном магнитном поле рассмотрено в методическом пособии [1]. Рассмотрим только логическое построение решения, опуская выкладки, и ключевые результаты.

## 1.1. План решения задачи о сферическом экране

**Постановка задачи.** Рассмотрим однородный сферический слой внешним радиусом  $a$ , толщиной  $d$ . Считаем, что  $a \ll \lambda_0$ . Выкладки производятся в сферической системе координат  $(r, \theta, \phi)$ , где полярная ось выбрана параллельно внешнему полю  $\vec{H}_0$ .

Задача разбивается на три области:

$$\begin{cases} \varepsilon = \mu = 1, k = k_0 & \text{при } r < a - d \\ k = k_0 \sqrt{\varepsilon \mu} & \text{при } a - d \leq r \leq a \\ \varepsilon = \mu = 1, k = k_0 & \text{при } r > a \end{cases} \quad (2)$$

**Определение вида  $\vec{A}(\vec{H}_0)$ .** Значения полей  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{H}$  (где  $\vec{B} = \mu \vec{H} = \text{rot } \vec{A}$ ) всюду должны полностью определяться вектором  $\vec{H}_0$ . Так как поля  $\vec{B}, \vec{H}, \vec{H}_0$  - псевдовектора, а вектор  $\vec{A}$  – истинный вектор, то зависимость  $\vec{A}(\vec{H}_0)$  можно получить только векторным произведением (векторное произведение псевдовектора на истинный дает истинный вектор):

$$\vec{A} = \vec{F} \times \vec{H}_0 \quad (3)$$

В силу отсутствия выделенных направлений, кроме  $\vec{H}_0$ , можно предположить радиальность  $\vec{F}$ , т.е.

$$\vec{F} = \vec{r}_0 F(r) = \nabla f(r) \quad (4)$$

Подставляя вектор  $\vec{A}$ , выраженный через  $f(r)$  в уравнение Гельмгольца  $\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = 0$ , получим

$$\Delta f + k^2 f = 0 \quad (5)$$

Общее решение такого уравнения известно:

$$f(r) = C_1 \frac{e^{ikr}}{r} + C_2 \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (6)$$

Здесь  $\pm$  в экспоненте определяет расходящуюся и сходящуюся сферические волны.

**Выражение  $A_\phi, B_r, B_\phi$  из  $\vec{A}(\vec{H}_0)$ .** Подставляя найденную в предыдущем пункте зависимость  $\vec{A}(\vec{H}_0)$  в выражения для полей и проецируя на оси, получим выражения для  $A_\phi, B_r, B_\phi$  (через константы  $C_1$  и  $C_2$ ). Эти формулы получены из общих соображений и должны давать значение поля в сферическом слое.

**Решение уравнения Гельмгольца в зонах квазистатики.** Рассмотрим решение задачи в первой (во внутренности сферического слоя) и третьей (вне слоя) областях. В силу наложенного условия  $a \ll \lambda_0 \Rightarrow k_0 a \ll 1$ , в этих областях поле имеет квазистатический характер, и уравнение Гельмгольца упрощается до  $\Delta \vec{A} = 0$ , откуда следует  $\Delta f = \text{const}$ .

Общее решение такого уравнения  $f(r) = A_1 r^2 + A_2 r^{-1}$ . Подставив его в выведенные ранее формулы для  $\vec{A}(f)$  и вычисляя ротор  $\vec{A}$ , получаются выражения в квазистатическом пределе для  $A_\phi, B_r, B_\phi$  через константы  $A_1, A_2$ . Эти формулы верны только в первой и третьей областях, причем лишь не очень далеко от слоя (выполнение условия квазистатики  $k_0 r \ll 1$ )

**Предельные и граничные условия.** Нужно наложить условия конечности поля в точке  $r = 0$ , а также стремление к внешнему полю  $\vec{H}_0$  при удалении от экрана, на формулы в зонах квазистатики. Эти два предельных условия позволяют избавиться от двух констант в этих зонах. Важным результатом будет также то, что константа  $A_1$  определяет отношение амплитуд полей ( $\eta_m = H_0/H_1 = -\frac{1}{4}A_1$ )

Далее, необходимо соблюсти граничные условия из условий непрерывности нормальной компоненты  $B_r$  на границах областей  $r = a$  и  $r = a - d$ ,

откуда получается система четырех линейных алгебраических уравнений относительно  $A_1, A_2, C_1, C_2$ . Из этой системы можно выразить  $A_1$ , а значит, и  $\eta_m$ :

$$\eta_m = (6i\mu k^3 a^3)^{-1} (F_+ e^{ikd} - F_- e^{-ikd}) \quad (7)$$

где

$$F_{\pm} = 2\mu^2(1 \mp ika)(1 \pm ikb) + \mu [(1 \pm ika)(1 \pm ikb - k^2 b^2) - 2(1 \pm ikb)(1 \mp ika - k^2 a^2)] \quad (8)$$

$$- (1 \mp ika - k^2 a^2)(1 \pm ikb - k^2 b^2) \quad (9)$$

По определению, **толщина скин-слоя**  $\delta$

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}} \quad (10)$$

Для металлов вплоть до частот оптического диапазона

$$k = \frac{1 - i}{\delta} \quad (11)$$

В двух предельных случаях ( $\delta \ll d$  и  $\delta \gg d$ ) выражение для  $\eta_m$  (в общем случае довольно громоздкое) существенно упрощается, принимая также во внимание дополнительное условие  $d \ll a$ .

## 1.2. Область сильного скин-эффекта

В пределе  $\delta \ll d \ll a$ , формула (7) упрощается до вида

$$\eta_m = \frac{1}{6} \left[ (1 - i) \frac{\mu\delta}{a} + 3 + (1 + i) \frac{a}{\mu\delta} \right] \exp \left[ (1 + i) \frac{d}{\delta} \right] \quad (12)$$

При  $\mu = 1$

$$\eta_m = \frac{1}{6} (1 + i) \frac{a}{\delta} \exp \left[ (1 + i) \frac{d}{\delta} \right] \quad (13)$$

### 1.3. Область отсутствия скин-эффекта

В пределе  $\delta \gg d \ll a$ , формула (7) упрощается до вида

$$\eta_m = 1 + \frac{2d(\mu - 1)^2}{3a\mu} + i\frac{2ad}{3\mu\delta^2} \quad (14)$$

При  $\mu = 1$

$$\eta_m = 1 + i\frac{2ad}{3\delta^2} \quad (15)$$

Для приближенных оценок величины  $\eta_m$  (с точностью  $\sim 10\%$ ) выражения (12)—(15) можно использовать и в промежуточном случае ( $\delta \simeq d$ ), разграничивая области применимости формул (12), (13), с одной стороны, и (14), (15), с другой стороны, точкой  $\delta = d$ .

## 2. Метод измерений $|\eta_m|$

Лабораторная установка предусматривает проведение измерений коэффициентов ослабления для трех латунных и трех стальных экранов цилиндрической формы.

Схема измерения  $|\eta_m|$  заключалась в следующем: переменное магнитное поле создается внутри соленоида, подключенного к выходу генератора.

В качестве индикатора поля используется второй соленоид меньших размеров (индикаторный), с выхода которого переменное напряжение подается на усилитель вольтметра.

Надевая генераторный соленоид сначала на неэкранированный индикаторный, а затем на индикаторный соленоид, закрываемый экраном, и измеряя, как изменяются при этом показания вольтметра, можно по ним вычислить коэффициент ослабления  $|\eta_m|$ . Кроме этого, необходимо также измерять амплитуду напряжения на осциллографе, подключенного к сопротивлению, которое стоит последовательно генераторному соленоиду.

## 2.1. Учет в $|\eta_m|$ искажения $L_{gen}$ экраном

Поле в соленоиде пропорционально току, который в нем течет:  $H \sim I$  (это нетрудно вывести на примере бесконечного соленоида с непрерывной обмоткой). Прикладывая к генераторному соленоиду напряжение постоянной амплитуды  $u_0$ , мы получаем

$$u_0 = Z \cdot I = i\omega L \cdot I \Rightarrow H_{ext} \sim \frac{u_0}{\omega L} \quad (16)$$

Когда мы измеряем напряжение на индикаторном соленоиде, находящемся в поле  $H_{in}$ , оно равно

$$V = i\omega L_{ind} \cdot I_{ind} \sim \omega L_{ind} H_{in} \quad (17)$$

Индуктивность индикаторного соленоида не зависит от наличия экрана, поэтому

$$\frac{H_{in}^{(0)}}{H_{in}^{(e)}} = \frac{V_0}{V_e}, \quad (18)$$

где  $H_{in}^{(0)}$  – поле в индикаторном соленоиде без надетого экрана,  $H_{in}^{(e)}$  – поле в индикаторном соленоиде с надетым экраном.

Очевидно, поле  $H_{in}^{(0)} = H_{ext}^{(0)}$ . Но поле  $H_{in}^{(e)}$  – это не ослабленное поле  $H_{ext}^{(0)}$ , потому что при внесении экрана в генераторный соленоид  $H_{ext} = H_{ext}^{(e)} = H_{ext}^{(0)} \cdot \frac{L_0}{L_e}$ , где  $L_0$  – индуктивность генераторного соленоида без экрана,  $L_e$  – с экраном.

Значит, если бы при внесенном экране генераторный соленоид создавал поле  $H_{ext}^{(0)}$ , то внутри экрана бы было поле  $H_{in}^{(e)} \cdot \frac{L_e}{L_0}$  (в линейном приближении).

Отсюда следует, что

$$|\eta_m| = \frac{H_{ext}^{(0)}}{H_{in}^{(e)} \cdot \frac{L_e}{L_0}} = \frac{V_0}{V_e} \cdot \frac{L_0}{L_e} \quad (19)$$

Так как мы измеряем напряжение  $U$  на резисторе в цепи генераторного соленоида (допустим, что резистор не искажает импеданс:  $R \ll \omega L$ )



$$U_e = I_e R, \quad \Rightarrow \quad L_e \sim \frac{u_0}{\omega I_e} = \frac{u_0 R}{\omega U_e} \quad (20)$$

С другой стороны,

$$L_0 \sim \frac{u_0}{\omega I_0} = \frac{u_0 R}{\omega U_0} \quad (21)$$

Тогда окончательно

$$|\eta_m| = \frac{V_0 U_e}{V_e U_0} \quad (22)$$

где  $V$  и  $U$  - соответственно показания вольтметра и осциллографа, индексы 0 и  $e$  относятся соответственно к величинам измеренным без экрана и с экраном.

### 3. Экспериментальные результаты

#### 3.1. Измерение $|\eta_m|$ латунных и стальных экранов

При измерении каждого экрана производилась подстройка напряжения на генераторном соленоиде, чтобы оно было одно и тоже при отсутствии экрана и его внесении, чтобы можно было применять формулу (22).

Таблица 1: Измерение экранирования латунными экранами

|          | Без экрана |       | Латунь 2 |       |            | Латунь 5 |       |            | Латунь 10 |       |            |
|----------|------------|-------|----------|-------|------------|----------|-------|------------|-----------|-------|------------|
| $f$ , Гц | $V_0$      | $U_0$ | $V_e$    | $U_e$ | $ \eta_m $ | $V_e$    | $U_e$ | $ \eta_m $ | $V_e$     | $U_e$ | $ \eta_m $ |
| 20       | 1 000      | 16.70 | 930      | 16.30 | 1.05       | 910.0    | 16.30 | 1.07       | 870.00    | 16.30 | 1.12       |
| 50       | 1 000      | 5.59  | 870      | 5.59  | 1.15       | 820.0    | 5.59  | 1.22       | 620.00    | 5.19  | 1.50       |
| 100      | 1 000      | 4.40  | 770      | 4.40  | 1.30       | 650.0    | 4.40  | 1.54       | 490.00    | 4.40  | 2.04       |
| 200      | 1 000      | 1.90  | 680      | 2.09  | 1.62       | 540.0    | 2.24  | 2.18       | 380.00    | 2.40  | 3.32       |
| 500      | 1 000      | 1.14  | 500      | 1.30  | 2.28       | 300.0    | 1.46  | 4.27       | 180.00    | 1.60  | 7.80       |
| 1 000    | 1 000      | 0.73  | 390      | 0.92  | 3.23       | 170.0    | 1.00  | 8.06       | 90.00     | 1.27  | 19.33      |
| 2 000    | 1 000      | 0.65  | 240      | 0.92  | 5.90       | 80.0     | 1.00  | 19.23      | 34.00     | 1.30  | 58.82      |
| 5 000    | 1 000      | 0.58  | 100      | 0.78  | 13.45      | 28.0     | 0.88  | 54.18      | 3.80      | 1.28  | 580.73     |
| 10 000   | 700        | 0.31  | 39       | 0.32  | 18.53      | 5.2      | 0.33  | 143.30     | 0.45      | 0.62  | 3 111.07   |

У стальных экранов некоторые измерения не были произведены полностью, ввиду сильного падения  $V_e$  и появления шумов, искажающих результаты (шум больше точности измерения).

Таблица 2: Измерение экранирования стальными экранами

|          | Без экрана |       | Сталь 2 |       |            | Сталь 5 |       |            | Сталь 10 |       |            |
|----------|------------|-------|---------|-------|------------|---------|-------|------------|----------|-------|------------|
| $f$ , Гц | $V_0$      | $U_0$ | $V_e$   | $U_e$ | $ \eta_m $ | $V_e$   | $U_e$ | $ \eta_m $ | $V_e$    | $U_e$ | $ \eta_m $ |
| 20       | 1 000      | 16.70 | 52.00   | 16.00 | 18         | 20.000  | 15.60 | 47         | 18.000   | 15.10 | 50         |
| 50       | 1 000      | 5.59  | 68.00   | 4.50  | 12         | 9.000   | 4.20  | 83         | 1.500    | 4.00  | 477        |
| 100      | 1 000      | 4.40  | 54.00   | 3.20  | 13         | 7.500   | 2.79  | 85         | 0.350    | 1.60  | 1 039      |
| 200      | 1 000      | 1.90  | 40.00   | 1.05  | 14         | 2.200   | 0.97  | 232        | 0.040    | 0.83  | 10 921     |
| 500      | 1 000      | 1.14  | 22.00   | 0.68  | 27         | 0.250   | 0.60  | 2 105      | 0.010    | 0.58  | 50 877     |
| 1 000    | 1 000      | 0.73  | 9.00    | 0.52  | 79         | 0.035   | 0.50  | 19 568     | 0.005    | 0.48  | 131 506    |
| 2 000    | 1 000      | 0.65  | 3.20    | 0.54  | 260        | 0.030   | 0.48  | 24 614     | —        | —     | —          |
| 5 000    | 1 000      | 0.58  | 0.18    | 0.54  | 5 172      | —       | —     | —          | —        | —     | —          |
| 10 000   | 700        | 0.31  | 0.07    | 0.38  | 12 258     | —       | —     | —          | —        | —     | —          |

Для полученных результатов по всем частотам и всем экранам рассчитан  $|\eta_m|$  и построены графики в логарифмическом масштабе по обеим осям.

На рисунке 1 (см. стр. 10) приведены шесть графиков для каждого экрана.

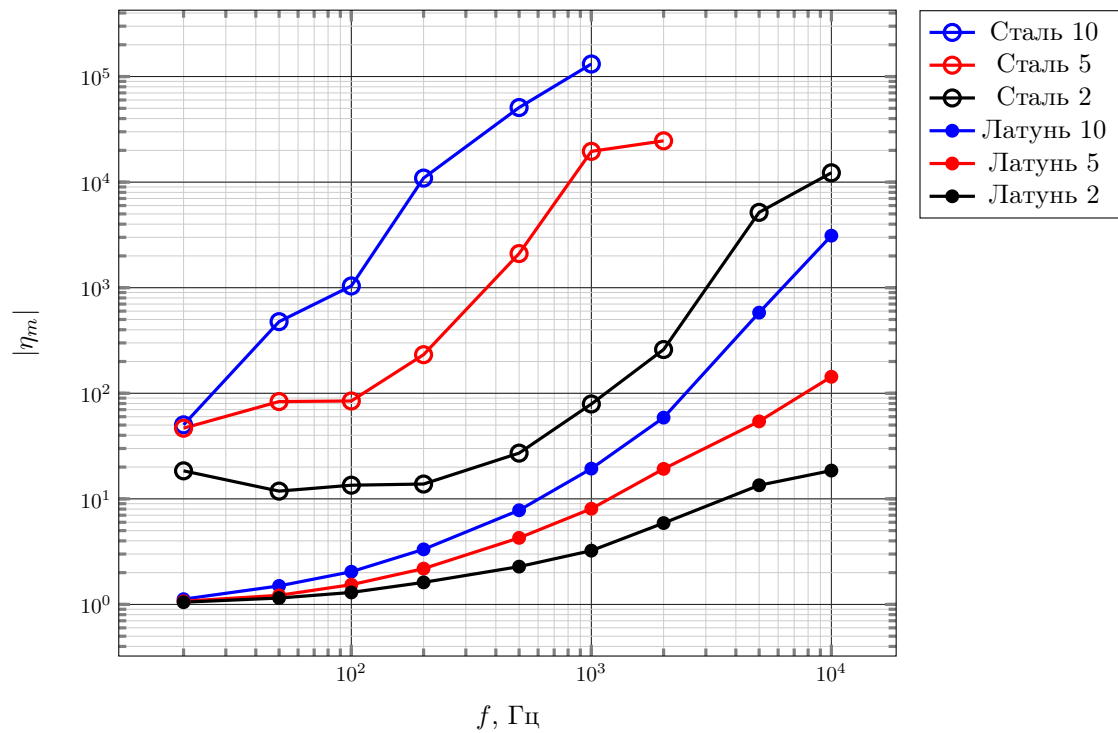


Рис. 1: Результаты эксперимента для трех латунных и трех стальных экранов

### 3.2. Совмещение теории и эксперимента для латунных экранов

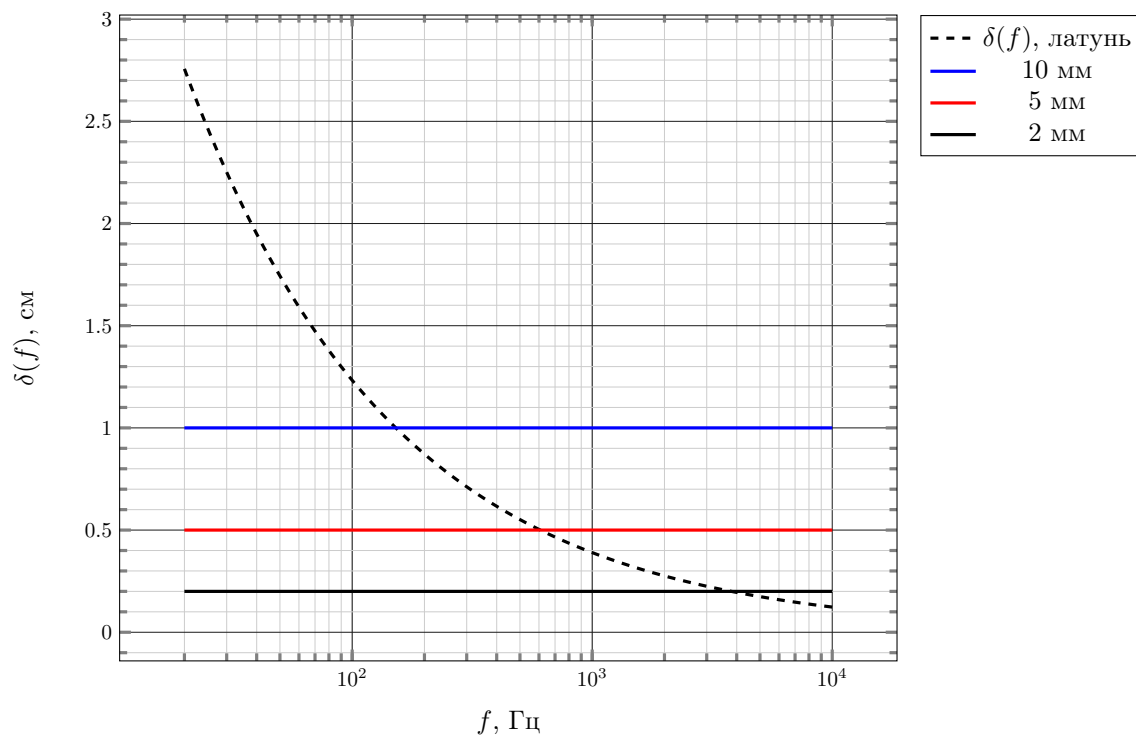


Рис. 2: Разграничение применимости формул толщиной скин-слоя  $\delta(f)$

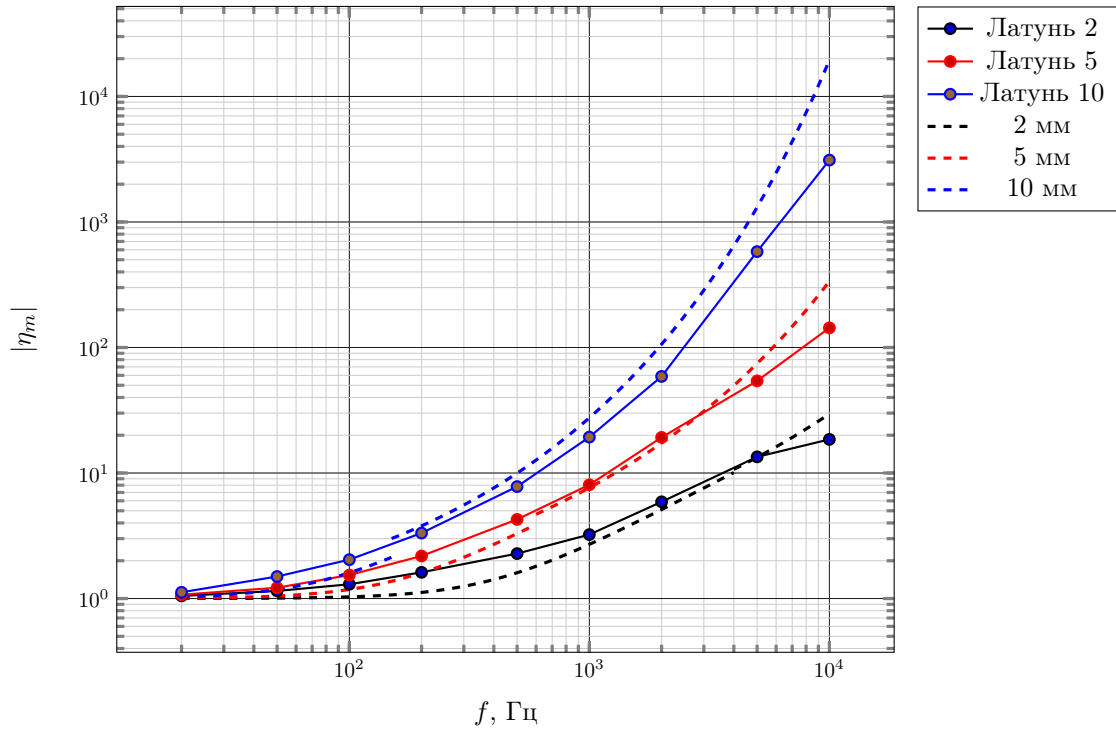


Рис. 3: Наложение теоретических графиков (пунктиром) на экспериментальные для латунных экранов

Принимая в качестве модели цилиндрического экрана сферический слой той же толщины  $d$  и с тем же объемом внутренней полости  $V = (4\pi/3)(a - d)^3 = \pi R^2 h$  (отсюда, ввиду  $a \gg d$ , имеем  $a \cong (3R^2 h/4)^{1/3}$ ), построили для исследуемых экранов графики теоретической зависимости  $|\eta_m(f)|$ .

Для разграничения области применения формул различных приближений по  $\delta/d$ , построен график  $\delta(f)$  для латуни и на нем построены константы  $d = 0.2, 0.5, 1.0$  см.

Хорошее качественное совпадение наблюдается в области частот до 6 кГц. Для более высоких частот теоретические кривые нарастают быстрее с ростом частоты.

### 3.3. Оценка $\mu$ для стальных экранов по результатам измерений

Для стальных экранов почти всюду выполняется  $\delta \ll d$ , поэтому оценка производится из формулы

$$\eta_m = \frac{1}{6} \left[ (1-i) \frac{\mu\delta}{a} + 3 + (1+i) \frac{a}{\mu\delta} \right] \exp \left[ (1+i) \frac{d}{\delta} \right] \quad (23)$$

Взяв модуль от этого выражения, получим:

$$|\eta_m| = \frac{\exp \left[ \frac{d}{\delta} \right]}{6} \sqrt{\left( \frac{\mu\delta}{a} + 3 + \frac{a}{\mu\delta} \right)^2 + \left( \frac{a}{\mu\delta} - \frac{\mu\delta}{a} \right)^2} \quad (24)$$

Здесь можно получить итерационное уравнение для  $\mu$  двумя способами: через логарифмирование и приведение к общему знаменателю. Для начала приведем формулу к общему знаменателю:

$$|\eta_m| = \frac{\exp \left[ \frac{d}{\delta} \right]}{6\mu\delta a} \sqrt{((\mu\delta)^2 + 3a\mu\delta + a^2)^2 + (a^2 - (\mu\delta)^2)^2} \quad (25)$$

$$\mu = \frac{\exp \left[ \frac{d}{\delta} \right]}{6|\eta_m|\delta a} \sqrt{((\mu\delta)^2 + 3a\mu\delta + a^2)^2 + (a^2 - (\mu\delta)^2)^2} \quad (26)$$

Эту формулу можно представить (зафиксировав  $\omega$  и взяв из эксперимента  $|\eta_m(\omega)|$ ) в виде

$$\mu = F(\mu) \quad (27)$$

Это уравнение в виде, пригодном для применения известного метода простых итераций, который заключается в задании начального приближения  $\mu^{(0)}$  и итерационного процесса:

$$\mu^{(1)} = F(\mu^{(0)}), \quad \mu^{(2)} = F(\mu^{(1)}), \quad \mu^{(3)} = F(\mu^{(2)}), \quad \dots \quad (28)$$

Начальное приближение можно выбрать из диапазона  $\mu = 10^2 \div 10^3$ .

Хотя функция, стоящая справа, на самом деле не удовлетворяет условиям устойчивости (сходимости) численного решения, но все равно можно найти

этим методом решение, перебирая начальные значения  $\mu$  до того значения, когда точка меняет направление расходимости.

Для 2 мм – стали полученное таким методом значение на частоте 500 Гц дает  $\mu = 153$ . На графике (см. рис 4, стр.15) хорошо видно, что действительно это значение дает численное решение этого уравнения, и теоретический график проходит через практическую точку.

Для 5 мм – стали (на частоте 500 Гц)  $\mu = 140$ , для 10 мм – стали (на частоте 200 Гц)  $\mu = 130$ .

Экспериментальные точки подбирались таким образом, чтобы рассчитанная из них  $\mu$  давала теоретические графики, наиболее хорошим образом описывающие экспериментальные кривые, хотя бы в диапазоне не очень больших частот.

Расхождение теоретического графика (который уходит в значительно большие по сравнению с практическими  $|\eta_m|$ ) и практического, который перестает расти, можно объяснить частотным насыщением магнитной проницаемости стали: доменная структура не успевает изменяться вслед за частотой поля, и  $\mu$  начинает падать с ростом частоты.

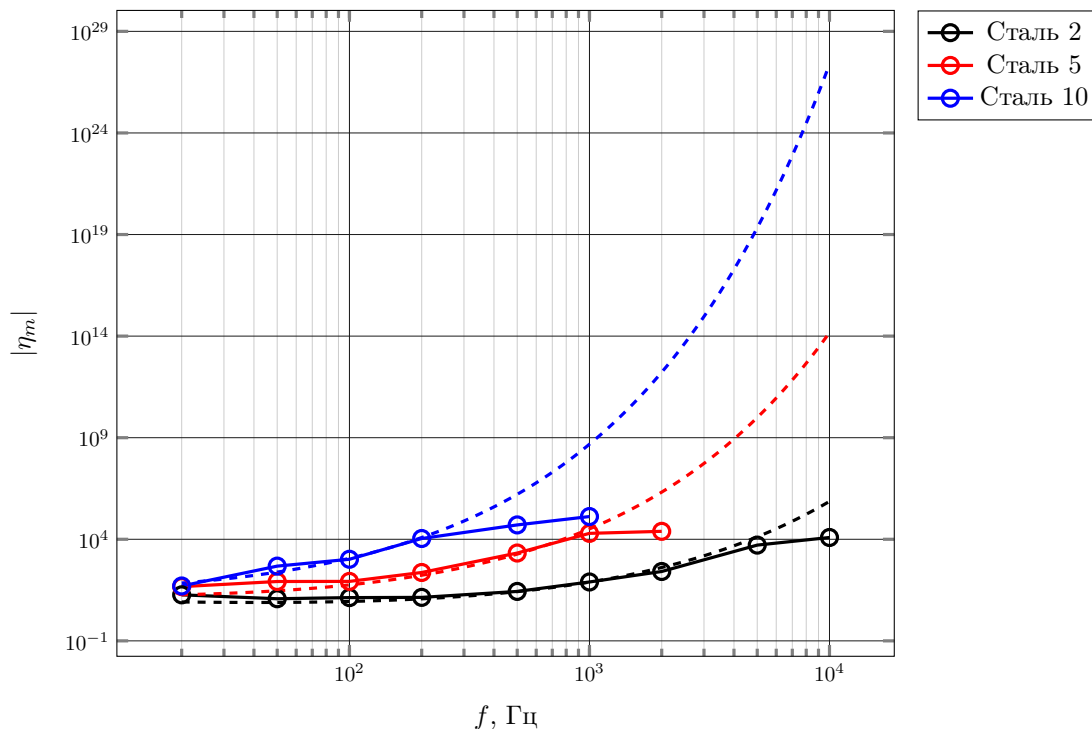


Рис. 4: Сопоставление теоретических графиков и практических для стальных экранов

## 4. Результаты

В работе было исследовано явление экранирования переменного магнитного поля стальными и латунными экранами.

Произведен расчет и сопоставление экранирующих свойств латунных экранов с экспериментальными с помощью модели сферического слоя. Выявлено хорошее совпадение теории с практикой до  $f = 6$  кГц.

Численными методами найдены  $\mu$  для стальных экранов, дающие наиболее адекватное соответствие теоретических графиков практическим:  $\mu = 153, 140, 130$  для 2, 5, 10 мм экранов. В этом случае теория дает качественное соответствие вплоть на частотах  $f \simeq 1$  кГц.



## Список литературы

- [1] Гильденбург В.Б., Павличенко И.А. Практикум: электромагнитное экранирование. — Н. Новгород: ННГУ, 2016. — 20 с.