1 Sustavi s više stupnjeva slobode

1.1 Jednadžba gibanja slobodnih oscilacija

Općenito, sustavi s više stupnjeva slobode modelirani su kao N etažni posmični okviri. Takavi sustavi se sastoje od N koncentriranih masa, što znači da je potrebno pratiti N različitih pomaka. Drugim riječima, jednadžba gibanja takvog sustava biti će zadana kao sustav od N diferencijalnih jednadžbi drugog reda.

Sustav s više stupnjeva slobode, koji će biti razmatran u ovom radu, je dvoetažni posmični okvir prikazan na slijedećoj slici, a osnovni pojmovi biti će objašnjeni pomoću slobodnih oscilacija navedenog modela.

ubaci sliku sustava i ekvivalentnog modela

Sustavi sa slike imaju dva dinamička stupnja slobode jer su moguće dvije translacije dviju različitih masa, pa jednadžbu gibanja opisuje sustav od dvije diferencijelne jednadžbe drugog reda.

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2 u_2 = 0 \\ m\ddot{u}_2 - k_2 u_1 + k_2 u_2 = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Zapisano u matričnoj formi:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1.2}$$

Odnosno

$$\mathbf{m}\{\ddot{u}\} + \mathbf{k}\{u\} = \{0\} \tag{1.3}$$

Iz (1.1) i (1.2) vidi se da je sustav diferencijalnih jednadžbi povezan preko krutosti odnosno matrice krutosti. Opći oblik rješenja sustava je slijedeći:

$$\{u(t)\} = \{\psi\}q(t) \tag{1.4}$$

Vektor ψ možemo shvatiti kao konstantu integracije, a funkcija $q(t)$ je jednostavna harmonijska funkcija oblika:

$$q(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{1.5}$$

Druga derivacija (1.5) jest:

$$\ddot{q}(t) = -\omega^2(\underbrace{A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)}_{q(t)}) = -\omega^2 q(t) \tag{1.6}$$

Stoga, druga derivacija od (1.4) glasi:

$$\{\ddot{u}\} = -\omega^2 q(t)\{\psi\} \tag{1.7}$$

Uvrštavanjem (1.4) i (1.7) u (1.3) dobijemo:

$$(\{\psi\}\mathbf{k} - \omega^2\{\psi\}\mathbf{m})q(t) = \{0\} \tag{1.8}$$

Prvo trivijalno rješenje je za $q(t) = 0$ što implicira da je $u(t) = 0$ (sustav miruje). Netrivijalno rješenje se dobije izjednačavanjem zagrade s nulom:

$$\mathbf{k}\{\psi\} = \omega^2\mathbf{m}\{\psi\} \tag{1.9}$$

Izraz (1.9) predstavlja realni problem vlastitih vrijednosti odnosno matrični problem vlastitih vrijednosti. Potrebno je odrediti dvije nepoznanice:

1. vlastite vektore ψ
2. vlastite skalare ω^2

Prebacivanjem nepoznanica na jednu stranu dobijemo

$$(\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m})\{\psi\} = \{0\} \tag{1.10}$$

U općenitom slučaju, izraz (1.10) predstavlja sustav od N algebarskih jednadžbi s N nepoznanica. Trivijalno rješenje sustava je za $\{\psi\} = 0$, a netrivijalno se određuje raspisom determinante matrice $[[k] - \omega^2[m]]$. Raspisom determinante navedene matrice, dobije se polinom N-tog stupnja kojeg nazivamo *karakterističnim polinomom*. Nultočke polinoma predstavljaju vlastite vrijednosti ω^2, odnosno kvadrirane prirodne frekvencije. Da bi nultočke polinoma bile realne pozitivne vrijednosti, matrice $[m]$ i $[k]$ moraju biti simetrične i pozitivno definitne. Uvijeti za pozitivnu definitnost u građevinarstvu su slijedeći:

1. za matricu **k** - broj i raspored ležajeva u ispravnoj mreži mora biti takav da se spriječe pomaci krutog tijela
2. za matricu **m** - moraju se ukloniti stupnjevi slobode bez pridružene koncentrirane mase. Uklanjanje nepotrebnih stupnjeva slobode, vrši se statičkom kondenzacijom.

Vlastiti vektori ψ se određuju uvrštavanjem vrijednosti ω^2 u matricu $[k - \omega^2 m]$, stoga je očito da vektori ψ nisu jedinstveni jer i njihovi višektratnici zadovoljavaju jednadžbu (1.10). Vektori ψ nazivaju se *modalnim vektorima*, a definiraju oblik titranja sustava na frekvenciji ω. Prvi modalni vektor ψ_1, naziva se temeljnim (osnovnim) modom, a frekvencija na kojoj sustav titra u navedenom modu (ω_1) naziva se *vlastitom frekvencijom temeljnog moda.*

Ako su sve prirodne frekvencije različite od nula i međusobno različite, tada su svi vlastiti vektori linearno nezavisni. Skup od n linearno nezavisnih vektora čini bazu n-dimenzionalnog vektorskog prostora, pa je ukupno rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi linearna kombinacija svih pojedinačnih rješenja.

$$\{u(t)\} = \sum_{n=1}^{N} \{\psi\}_n q_n \tag{1.11}$$

Pri čemu je q_n:

$$q_n = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \tag{1.12}$$

Raspisivanjem (1.11) dobivamo:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = q_1(t) \begin{Bmatrix} \psi_{1,1} \\ \psi_{2,1} \\ \vdots \\ \psi_{N,1} \end{Bmatrix} + q_2(t) \begin{Bmatrix} \psi_{1,2} \\ \psi_{2,2} \\ \vdots \\ \psi_{N,2} \end{Bmatrix} + \cdots + q_N(t) \begin{Bmatrix} \psi_{1,N} \\ \psi_{2,N} \\ \vdots \\ \psi_{N,N} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_1(t)\psi_{1,1} + q_2(t)\psi_{1,2} + q_N(t)\psi_{1,N} \\ q_1(t)\psi_{2,1} + q_2(t)\psi_{2,2} + q_N(t)\psi_{2,N} \\ \vdots \\ q_1(t)\psi_{N,1} + q_2(t)\psi_{N,2} + q_N(t)\psi_{N,N} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_{1,1} & \psi_{1,2} & \cdots & \psi_{1_N} \\ \psi_{2,1} & \psi_{2,2} & \cdots & \psi_{2_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{N,1} & \psi_{N,2} & \cdots & \psi_{N,N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Psi}} \underbrace{\begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{Bmatrix}}_{\overrightarrow{q}}$$

Matricu $\mathbf{\Psi}$ nazivamo modalna matrica, a komponente vektora q nazivaju se modalne koordinate. Opće rješenje pod (1.11) sada možemo zapisati matrično kao:

$$\{u(t)\} = \mathbf{\Psi}\{q\} \tag{1.13}$$

Osim modalne matrice postoji i spektralna matrica (NxN) koja se sastoji od N svojstvenih vrijednosti ω^2.

$$\mathbf{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

Za slučaj sustava s dva stupnja slobode, definiranog sustavom diferencijalnih jednadžbi pod (1.2), prirodne frekvencije ω_1^2 i ω_2^2 dobivene su rješavanjem kvadratne jednadžbe karakterističnog polinoma za ω^2. Modalne vektore možemo zapisati kao:

$$\overrightarrow{\psi}_1 = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{k_1 + k_2 - \omega_1^2 m_1}{k_2} \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{1.14}$$

$$\overrightarrow{\psi}_2 = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{k_1 + k_2 - \omega_1^2 m_1}{k_2} \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{1.15}$$

Ukupno rješenje sustava jest linearna kombinacija slijedećih vektora:

$$\begin{cases} 1(t) = 1q_1(t) = 1(A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t)) \\ 2(t) = 2q_2(t) = 2(A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t)) \end{cases} \tag{1.16}$$

Stoga, ukupno opće rješenje glasi:

$$t) = 1(t) + 2(t) \tag{1.17}$$

Bitno je za napomenuti da modalni vektor ψ ne određuje maksimalne iznose ordinata već samo njihov relativni odnos, tj. modalni oblik ili oblik titranja. Da bismo dobili amplitude A_n i B_n, potrebno je rješiti inicijalni problem oblika $\{u(0)\} = \{u\}$ i $\{\dot{u}(0)\} = \{u\}$. Za slučaj slobodnog titranja, konstante A_n i B_n glase:

$$A_n = u_n(0) \tag{1.18}$$

$$B_n = \frac{\dot{u}_n(0)}{\omega_n} \tag{1.19}$$

Shematski prikaz modova sustava s dva stupnja slobode prikazan je na slijedećoj slici.

1.2 Ortogonalnost modova

Kao što je već pokazano, modove (modalne oblike) definiraju vektori. Dva vektora su međusobno ortogonalna (okomita) ukoliko je njihov skalarni produkt jednak nuli. Razmotrimo li r-ti i n-ti mod sustava, dobijemo slijedeći sustav jednadžbi (iz (1.3)):

$$\begin{cases} (\mathbf{k} - \omega_r^2 \mathbf{m})\{\psi\}_r = \{0\} \\ (\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m})\{\psi\}_n = \{0\} \end{cases} \tag{1.20}$$

Donju jednadžbu pomnožimo s $\{\psi\}_r^T$. U gornjoj jednadžbi prvo transponiramo $\{\psi\}_r$ te ju pomnožimo s $\{\psi\}_n$. Sustav jednadžbi (1.20) postaje:

$$\begin{cases} \{\psi\}_r^T(\mathbf{k} - \omega_r^2\mathbf{m})\{\psi\}_n = 0 \\ \{\psi\}_r^T(\mathbf{k} - \omega_n^2\mathbf{m})\{\psi\}_n = 0 \end{cases} \tag{1.21}$$

Oduzimanjem gornje i donje jednadžbe dobijemo:

$$(\omega_n^2 - \omega_r^2)\{\psi\}_r^T\mathbf{m}\{\psi\}_s = 0 \tag{1.22}$$

Za $\omega_n \neq \omega_r$ vrijedi:

$$\{\psi\}_r^T\mathbf{m}\{\psi\}_n = 0 \tag{1.23}$$

Uvrštavanjem $\{\psi\}_r^T\mathbf{m}\{\psi\}_n = 0$ u bilo koju od jednadžbi iz (1.21) dobijemo:

$$\{\psi\}_r^T\mathbf{k}\{\psi\}_n = 0 \tag{1.24}$$

Jednadžbe pod (1.23) i (1.24) govore da su modovi, pomnoženi težinskim koeficijentima iz matrice krutosti ili matrice masa, međusobno ortogonalni (valjda). Kažemo da su modovi međusobno ortogonalni s obzirom na matricu mase ili matricu krutosti (valjda).

Poslijedica ortogonalnosti je dijagonalnost slijedećih pravokutnih matrica:

$$\text{Modalna krutost} \quad \mathbf{K} = \mathbf{\Psi}^T\mathbf{k}\mathbf{\Psi} \tag{1.25}$$

$$\text{Modalna masa} \quad \mathbf{M} = \mathbf{\Psi}^T\mathbf{m}\mathbf{\Psi} \tag{1.26}$$

Članovi matrica računaju se prema slijedećim formulama:

$$\text{Za modalnu krutost} \quad K_{n,n} = \{\psi\}_n^T k\{\psi\}_n \tag{1.27}$$

$$\text{Za modalnu masu} \quad M_{n,n} = \{\psi\}_n^T k\{\psi\}_n \tag{1.28}$$

Između elemenata matrica vrijedi slijedeći odnos:

$$\omega_n^2 = \frac{K_n}{M_n} \tag{1.29}$$

U matričnoj formi:

$$\mathbf{\Omega}^2 = \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1} \tag{1.30}$$

1.3 Normiranje modova

Modalni vektori nisu jedinstveni jer su jednako predstavljeni vektorima dobivenim rješenjem problema vlastitih vrijednosti i njihovim višekratnicima. Drugim riječima, modalni vektor predstavljen je familijom kolinearnih vektora jer vrijedi slijedeća jednakost (iz (1.9))

$$\mathbf{k}(a\{\psi\}_n) = \omega_n^2(a\{\psi\}_n)\mathbf{m}$$

$$a\mathbf{k}\{\psi\}_n = a\omega_n^2\{\psi\}_n\mathbf{m}$$

$$\mathbf{k}\{\psi\}_n = \omega_n^2\{\psi\}_n\mathbf{m}$$

Množenje vlastitog vektora skalarom, s ciljem postizanja željene forme modalnog vektora, naziva se normiranje modalnog vektora odnosno moda. Primjerice, željena forma modalnog vektora može biti vektor čiji je najveći element jedan:

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \\ \frac{3}{4} \end{Bmatrix}$$

Množenjem vektora s 4/3 dobijemo:

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3} \\ \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Od posebnog značaja je normiranje modalne mase na jediničnu vrijednost. Kako je $\{\psi\}_n^T\mathbf{m}\{\psi\}_n = \mathbf{M}_{n,n}$, mod $\{\psi\}_n$ potrebno je množiti sa $(M_{n,n})^{-1/2}$, odnosno:

$$\{\psi\}_n^N = \frac{1}{\sqrt{M_{n,n}}}\{\psi\}_n \tag{1.31}$$

Gdje je $\{\psi\}_n^N$ normirani vektor n-tog moda. Jednadžba (1.31) zapisana u matričnoj formi glasi:

$$\mathbf{\Psi}_n^N = \mathbf{\Psi}\,\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \tag{1.32}$$

Vrijedi slijedeća relacija:

$$M_{n,n} = \left(\{\psi\}_n^N\right)^T\mathbf{m}\{\psi\}_n^N = 1 \tag{1.33}$$

Odnosno u matričnom obliku:

$$\left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T\mathbf{m}\mathbf{\Psi}^N = I \tag{1.34}$$

Gdje je I jedinična matrica. Iz (1.27) slijedi:

$$\left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T\mathbf{K}\mathbf{\Psi}^N = \mathbf{\Omega}^2\underbrace{\left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T\mathbf{M}\mathbf{\Psi}^N}_{I}$$

$$\left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T\mathbf{K}\mathbf{\Psi}^N = \mathbf{\Omega}^2$$

1.4 Odziv sustava s više stupnjeva slobode na pobudu sinusnom silom

Kao što je pokazano u poglavlju 1.1, jednadžba gibanja sustava s N stupnjeva slobode zadana je kao sustav od N diferencijalnih jednadži drugog reda. U slučaju pobude harmonijskom silom, navedeni sustav će se sastojati od N nehomogenih diferencijalnih jednadžbi drugog reda, koje će biti povezane preko matrice krutosti i/ili matrice mase.

Općenito, rješenje jedne proizvoljne nehomogene diferencijalne jednadžbe drugog reda oblika $\alpha\ddot{y} + \beta\dot{y} + \gamma y = f(t)$ jest suma komplementarnog rješenja y_c i partikularnog rješenja Y_p.

$$y(t) = y_c(t) + U_p(t) \tag{1.35}$$

Komplementarno rješenje dobijemo izjednačavanjem diferencijalne jednadžbe s nulom odnosno:

$$\alpha\ddot{y} + \beta\dot{y} + \gamma y = 0 \tag{1.36}$$

Primjetimo da je komplementarno rješenje (rješenje jednadžbe (1.36)) zapravo rješenje homogene diferencijalne jednadžbe, a jednako je i za slobodne oscilacije i za prisilne oscilacije. Kod prisilnih oscilacija, komplementarno rješenje predstavlja prolazni dio odziva. Partikularno riješenje možemo pronaći koristeći se metodom neodređenih koeficijenata, a predstavlja prolazni dio odziva.

Analogno tome, komplementarno rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi dato je u (1.11) te predstavlja prolazni dio odziva, pa u slučaju prisilnih oscilacija preostaje nam odrediti još partikularno rješenje koje predstavlja prisilni dio odziva.

Zadana je jednadžba gibanja sustava s dva stupnja slobode prikazanog na slijedećoj slici

UBACI SLIKU SUSTAVA

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin(\omega t) \tag{1.37}$$

Odnosno:

$$\mathbf{m}\{\ddot{u}\} + k\{u\} = \{p_n\}\sin(\omega t) \tag{1.38}$$

Gdje je $\{p_n\}$ vektor amplituda harmonijskih sila. Odziv sustava biti će harmonijski, jednake frekvencije, pa partikularno rješenje možemo pretpostaviti:

$$\{u_p(t)\} = \{U_n\}\sin(\omega t) \tag{1.39}$$

Gdje je $\{U_n\}$ vektor koeficijenata. Druga derivacija (1.39) glasi:

$$\{\ddot{u}(t)\} = -\omega^2\{U_n\}\sin(\omega t) \tag{1.40}$$

Uvrštavanjem (1.39) i (1.40) u (1.38) dobijemo:

$$-\omega^2\{U_n\}\mathbf{m}\sin(\omega t) + \{U_n\}\mathbf{k}\sin(\omega t) = \{p\}\sin(\omega t) \tag{1.41}$$

Nakon sređivanja, jednadžba (1.41) poprima oblik:

$$[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]\{U_n\} = \{p\} \tag{1.42}$$

Množenjem jednadžbe (1.42) s $[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]^{-1}$ dobijemo:

$$\{U_n\} = [\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]^{-1}\{p_n\}$$

$$\{U_n\} = \frac{1}{det[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]} adj[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]\{p_n\}$$

Odnosno u matričnom obliku:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{det[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]} \begin{bmatrix} k_2 - m_2\omega^2 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 - m_1\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1.43}$$

Komponente vektora $\{U_n\}$ glase:

$$U_1 = \frac{p_0(k_2 - m_2\omega^2)}{m_1 m_2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \tag{1.44}$$

$$U_2 = \frac{p_0 k_2}{m_1 m_2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \tag{1.45}$$

Za $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $k_1 = 2k$ i $k_2 = k$ vektori glase:

$$U_1 = \frac{p_0(k - m\omega^2)}{2m^2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \tag{1.46}$$

$$U_2 = \frac{p_0 k}{2m^2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \tag{1.47}$$

Uz $\omega_1 = \sqrt{k/2m}$ i $\omega_2 = \sqrt{2k/m}$ te dijeljenjem (1.46) i (1.47) dobijemo vektor dinamičkog koeficijenta pomaka (bez dimenzija), koji ovisi o omjerima frekvencija ω/ω_1 te ω/ω_2. Vektor je prikazan u nastavku

$$\frac{2k}{p_0}\{U\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1 - 0.5(\omega/\omega_1)^2}{[1 - (\omega/\omega_1)^2][1 - (\omega/\omega_2)^2]} \\ \dfrac{1}{[1 - (\omega/\omega_1)^2][1 - (\omega/\omega_2)^2]} \end{Bmatrix} \tag{1.48}$$

Prisilni dio odziva glasi:

$$\{u(t)\} = \{U\}\sin(\omega t) = \begin{Bmatrix} \dfrac{1-0.5(\omega/\omega_1)^2}{[1-(\omega/\omega_1)^2][1-(\omega/\omega_2)^2]} \\ \dfrac{1}{[1-(\omega/\omega_1)^2][1-(\omega/\omega_2)^2]} \end{Bmatrix} \sin(\omega t) \tag{1.49}$$

Komponente vektora $\{U\}$ možemo iscrtati kao graf funkcije dinamičkog faktora $U_1/p_0/2k$ i $U_2/p_0/2k$ u ovisnosti o frekvencijskom omjeru ω/ω_1.

1.5 Interesantan postupak za rješavanje 2dof

Zadana je jednadžba gibanja prisilnog titranja sustava s dva stupnja slobode.

$$\mathbf{m}\{\ddot{u}\} + \mathbf{k}\{u\} = \{p\}\sin(\omega t) \tag{1.50}$$

Odziv sustava će biti sinusni, iste frekvencije kao i pobuda, pa rješenje pretpostavljamo u slijedećem obliku:

$$\{U_p\} = \{U\}\sin(\omega t) \tag{1.51}$$

Druga derivacija pretpostavljenog rješenja glasi:

$$\{U_p\} = -\omega^2\{U\}\sin(\omega t) \tag{1.52}$$

Uvrštavanjem (1.51) i (1.52) u (1.50) dobijemo:

$$-\omega^2\{U\}\mathbf{m}\sin(\omega t) + \mathbf{m}\{U\}\sin(\omega t) = \{p\}\sin(\omega t) \tag{1.53}$$

Te nakon sređivanja:

$$[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]\{U\} = \{p\} \tag{1.54}$$

Matrica $[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]$ predstavlja matricu dinamičke krutosti.

$$[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}] = \mathbf{Z} \tag{1.55}$$

Da bismo rješili (1.54) potrebno je pronaći invers matrice dinamičke krutosti. Invers matrice dinamičke krutosti predstavlja matrica frekvencijskih funkcija odziva, a označavamo ju s $\mathbf{H}$. Jednadžba pod (1.55) može poprimiti slijedeći oblik:

$$\left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T [\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]\mathbf{\Psi}^N = \left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T \mathbf{Z}\ \mathbf{\Psi}^T \tag{1.56}$$

Odnosno

$$\left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T [\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]\mathbf{\Psi}^N = \left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T \mathbf{H}^{-1}\ \mathbf{\Psi}^T \tag{1.57}$$

Iz (1.34) i (1.35) slijedi:

$$[\omega_n^2 - \omega^2] = \left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T \mathbf{H}^{-1}\ \mathbf{\Psi}^T \tag{1.58}$$

Nakon sređivanja, dobijemo:

$$\mathbf{H} = \left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T [\omega_n^2 - \omega^2]^{-1}\ \mathbf{\Psi}^T \tag{1.59}$$

Član $H_{j,k}$ matrice $\mathbf{H}$ možemo dobiti preko slijedeće jednadžbe:

$$H_{j,k} = \frac{\psi_{j,1}^N \psi_{k,1}^N}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\psi_{j,2}^N \psi_{k,2}^N}{\omega_2^2 - \omega^2} + \frac{\psi_{j,3}^N \psi_{k,3}^N}{\omega_3^2 - \omega^2} + \cdots + \frac{\psi_{j,n}^N \psi_{k,n}^N}{\omega_n^2 - \omega^2} \tag{1.60}$$

Jednadžbu (1.60) možemo zapisati kao skalarni umnožak vektora:

$$H_{j,k} = \left\{\psi_{j,1}\psi_{k,1} \quad \psi_{j,2}\psi_{k,2} \quad \psi_{j,3}\psi_{k,3} \quad \cdots \psi_{j,n}\psi_{k,n}\right\} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} \\ \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \\ \frac{1}{\omega_3^2 - \omega^2} \\ \vdots \\ \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \end{Bmatrix} \tag{1.61}$$

Za zadani sustav, matrica modova normiranih s obzirom na masu $\mathbf{\Psi}^N$ glasi:

$$\mathbf{\Psi}^N = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{6m}}{6m} & -\frac{\sqrt{3m}}{3m} \\ \frac{\sqrt{6m}}{6m} & \frac{\sqrt{3m}}{3m} \end{Bmatrix}$$

Izračun matrice frekvencijske funkcije odziva $H_{1,1}$ prikazan je u nastavku:

$$H_{1,1} = \frac{\psi_{1,1}^N}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\psi_{1,1}^N}{\omega_2^2 - \omega^2} = \frac{\frac{\sqrt{6m}}{6m}\frac{\sqrt{6m}}{6m}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\frac{\sqrt{3m}}{3m}\frac{\sqrt{3m}}{3m}}{\omega_2^2 - \omega^2}$$

$$H_{1,1} = \frac{1}{3m}\left(\frac{\frac{1}{2}}{(\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{(\omega_2^2 - \omega^2)}\right) = \frac{1}{3m}\left(\frac{\frac{1}{2}(\omega_2^2 - \omega^2) + (\omega_1^2 - \omega^2)}{\omega_1^2\omega_2^2(1 - (\omega/\omega_1)^2)(1 - (\omega/\omega_2)^2}\right)$$

U brojniku, ω_2 izrazimo kao ω_1 pomoću relacije $\omega_2 = \sqrt{2k/m}$ i $\omega_1 = \sqrt{k/2m}$.

$$H_{1,1} = \frac{1}{3m}\left(\frac{3 - \frac{3}{2}(\omega/\omega_1)^2}{\omega_2^2(1 - (\omega/\omega_1)^2)(1 - (\omega/\omega_2)^2)}\right)$$

Nakon sređivanja:

$$H_{1,1} = \frac{1 - \frac{1}{2}(\omega/\omega_1)^2}{2k(1 - (\omega_1/\omega)^2)(1 - (\omega_2/\omega)^2)} \tag{1.62}$$

Analogno tome, dobiju se ostali članovi matrice te glase:

$$H_{1,2} = \frac{1}{2k(1-(\omega_1/\omega)^2)(1-(\omega_2/\omega)^2)} \tag{1.63}$$

$$H_{2,1} = \frac{1}{2k(1-(\omega_1/\omega)^2)(1-(\omega_2/\omega)^2)} \tag{1.64}$$

$$H_{2,2} = \frac{1-2(\omega/\omega_2)^2}{2k(1-(\omega_1/\omega)^2)(1-(\omega_2/\omega)^2)} \tag{1.65}$$

$$\tag{1.66}$$

Matrica $\mathbf{H}$ glasi:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2k(1-(\omega/\omega_1)^2(1-(\omega/\omega_2)^2)} \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 & 1 \\ 1 & 1-2\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 \end{bmatrix} \tag{1.67}$$

Uvrštavanjem (1.67) u (1.54) dobijemo:

$$\mathbf{H}^{-1}\{U\} = \{p\} \tag{1.68}$$

Množenjem prethodnog izraza s $\mathbf{H}$:

$$\{U\} = \mathbf{H}\{p\} \tag{1.69}$$

Raspisivanjem prethodne jednadžbe:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2k\left(1-\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)^2\right)} \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 & 1 \\ 1 & 1-2\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1.70}$$

Te konačno, vektor $\{U\}$ glasi:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2k\left(1-\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)^2\right)} \begin{Bmatrix} p_0\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right) \\ p_0 \end{Bmatrix} \tag{1.71}$$

Dijeljenjem vektora $\{U\}$ s $p_0/2k$ dobijemo slijedeće:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\left(1-\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)^2\right)} \begin{Bmatrix} 1-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{1.72}$$

Komponente vektora U predstavljaju funkcije ovisnosti dinamičkog faktora o frekvencijskim omjerima ω/ω_1 i ω/ω_2. Njihovi grafovi prikazani su u nastavku.

UBACI GRAFOVE

Prisilni dio odziva glasi:

$$\{u(t)\} = \{U\}\ sin(\omega t) = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\right)\left(1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)^2\right)} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin(\omega t) \tag{1.73}$$

1.6 Modalna analiza

Modalna analiza je postupak određivanja osnovnih dinamičkih parametara linearnog sustava s ciljem definiranja matematičkog modela ponašanja sustava pod utjecajem dinamičkih sila. Modalna analiza temelji se na *principu superpozicije*, odnosno na činjenici da se ukupni odziv sustava može zapisati kao linearna kombinacija odziva pojedinih modova.

Razmotrimo jednadžbu gibanja sustava s više stupnjeva slobode pobuđenog proizvoljnom silom:

$$\mathbf{m}\{\ddot{u}\} + \mathbf{k}\{u\} = \{p(t)\} \tag{1.74}$$

Klasično rješenje jednadžbe gibanja (1.74) prikazano je u poglavlju 1.4 na primjeru sustava s dva stupnja slobode pobuđenog harmonijskom silom. Za sustave s više od dva stupnja slobode ili za složenije sile pobude, rješavanje jednadžbe gibanja na klasični način može biti izuzetno teško ili nemoguće. U takvim slučajevima, jednadžba gibanja se rješava postupcima modalne analize.

Iz poglavlja 1.1 znamo da je rješenje jednadžbe gibanja slobodnog titranja sustava s više stupnjeva slobode linearna kombinacija odziva svih pojedinih modova odnosno:

$$u(t) = \sum_{r=1}^{N} \mathbf{m}\psi_r q_r(t) \tag{1.75}$$

Uvrštavanjem (1.75) u (1.74) dobijemo:

$$\sum_{r=1}^{N} \mathbf{m}\psi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{N} \mathbf{k}\psi_r q_r(t) = p(t) \tag{1.76}$$

Množenjem jednadžbe (1.76) s ψ_n^T dobijemo:

$$\sum_{r=1}^{N} \psi_n^T \mathbf{m}\psi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{N} \psi_n^T \mathbf{k}\psi_r q_r(t) = \psi_n^T p(t) \tag{1.77}$$

Zbog svojstva ortogonalnosti, isčezavaju svi članovi sumacija osim n-tog člana, pa preostaje:

$$\psi_n^T\, \mathbf{m}\, \psi_n\, \ddot{q}_n(t)\ +\ \psi_n^T\, \mathbf{k}\, \psi_n\, q_r(t) = \psi_n^T\, p(t) \tag{1.78}$$

Koristeći relacije iz (1.28) i (1.27) jednadžba (1.78) poprima slijedeći oblik:

$$M_n\ddot{q}_n(t) + K_nq_n(t) = P_n(t) \tag{1.79}$$

Gdje su M_n, K_n i P_n poopćena masa, krutost i opterećenje n-tog moda.

Postupkom, prikazanim u jednadžbama (1.75), (1.76), (1.77), (1.78), jednadžbu gibanja sustava predstavljenu sustavom diferencijalnih jednadžbi sveli smo na skup međusobno neovisnih diferencijalnih jednadžbi. Drugim riječima, sustav od N stupnjeva slobode razložen je na N međusobno neovisnih podsustava s jednim stupnjem slobode (princip superpozicije), pri čemu n-ti podsustav prikazuje odziv sustava u n-tom modu. Podsustave nazivamo *poopćeni sustav za n-ti mod.* "Jednadžba gibanja" poopćenog sustava za n-ti oblik titranja predstavljena je diferencijalnom jednadžbom (1.79) čije rješenje predstavlja modalnu koordinatu n-tog moda $q_n(t)$.

Odziv n-tog moda je:

$$u_n(t) = \psi_nq_n(t) \tag{1.80}$$

Da bismo odredili ukupni odziv sustava s N-stupnjeva slobode, potrebno je riješiti N modalnih jednadžbi, oblika definiranog pod (1.79). Matrični zapis sustava modalnih jednadžbi prikazan je u nastavku.

$$\mathbf{M}\{\ddot{q}\} + \mathbf{K}\{q\} = \{P(t)\} \tag{1.81}$$

Gdje je **M** matrica modalnih masa, **K** matrica modalnih krutosti, $\{P(t)\}$ vektor poopćenih opterećenja. Iz (1.26) i (1.25) znamo da su matrice **M** i **K** dijagonalne što znači da je (1.81) sustav međusobno neovisnih jednadžbi. Rješenjem navedenog sustava, dobijemo funkcije modalnih koordinata za sve modove sustava, a ukupni odziv definirano je linearnom kombinacijom (princip superpozicije) odziva svakog pojedinog moda. Odziv pojedinog moda definiran je (1.80), a ukupni odziv je:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{N} u_n(t) = \sum_{n=1}^{N} \psi_nq_n(t) \tag{1.82}$$