0.1 Jednadžba gibanja slobodnih oscilacija

Općenito, sustavi s više stupnjeva slobode modelirani su kao N etažni posmični okviri. Takavi sustavi se sastoje od N koncentriranih masa, što znači da je potrebno pratiti N različitih pomaka. Drugim riječima, jednadžba gibanja takvog sustava biti će zadana kao sustav od N diferencijalnih jednadžbi drugog reda.

Sustav s više stupnjeva slobode, koji će biti razmatran u ovom radu, je dvoetažni posmični okvir prikazan na slijedećoj slici, a osnovni pojmovi biti će objašnjeni pomoću slobodnih oscilacija navedenog modela.

ubaci sliku sustava i ekvivalentnog modela

Sustavi sa slike imaju dva dinamička stupnja slobode jer su moguće dvije translacije dviju različitih masa, pa jednadžbu gibanja opisuje sustav od dvije diferencijelne jednadžbe drugog reda.

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2 u_2 = 0 \\ m\ddot{u}_2 - k_2 u_1 + k_2 u_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Zapisano u matričnoj formi:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2}$$

Odnosno

$$\mathbf{m}\{\ddot{u}\} + \mathbf{k}\{u\} = \{0\} \tag{3}$$

Iz (1) i (2) vidi se da je sustav diferencijalnih jednadžbi povezan preko krutosti odnosno matrice krutosti. Opći oblik rješenja sustava je slijedeći:

$$\{u(t)\} = \{\psi\}q(t) \tag{4}$$

Vektor ψ možemo shvatiti kao konstantu integracije, a funkcija $q(t)$ je jednostavna harmonijska funkcija oblika:

$$q(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{5}$$

Druga derivacija (5) jest:

$$\ddot{q}(t) = -\omega^2 \underbrace{(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))}_{q(t)} = -\omega^2 q(t) \tag{6}$$

Stoga, druga derivacija od (4) glasi:

$$\{\ddot{u}\} = -\omega^2 q(t)\{\psi\} \tag{7}$$

Uvrštavanjem (4) i (7) u (3) dobijemo:

$$(\{\psi\}\mathbf{k} - \omega^2\{\psi\}\mathbf{m})q(t) = \{0\} \tag{8}$$

Prvo trivijalno rješenje je za $q(t) = 0$ što implicira da je $u(t) = 0$ (sustav miruje). Netrivijalno rješenje se dobije izjednačavanjem zagrade s nulom:

$$\mathbf{k}\{\psi\} = \omega^2\mathbf{m}\{\psi\} \tag{9}$$

Izraz (9) predstavlja realni problem vlastitih vrijednosti odnosno matrični problem vlastitih vrijednosti. Potrebno je odrediti dvije nepoznanice:

1. vlastite vektore ψ
2. vlastite skalare ω^2

Prebacivanjem nepoznanica na jednu stranu dobijemo

$$(\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m})\{\psi\} = \{0\} \tag{10}$$

U općenitom slučaju, izraz (10) predstavlja sustav od N algebarskih jednadžbi s N nepoznanica. Trivijalno rješenje sustava je za $\{\psi\} = 0$, a netrivijalno se određuje raspisom determinante matrice $[[k] - \omega^2[m]]$. Raspisom determinante navedene matrice, dobije se polinom N-tog stupnja kojeg nazivamo *karakterističnim polinomom*. Nultočke polinoma predstavljaju vlastite vrijednosti ω^2, odnosno kvadrirane prirodne frekvencije. Da bi nultočke polinoma bile realne pozitivne vrijednosti, matrice $[m]$ i $[k]$ moraju biti simetrične i pozitivno definitne. Uvijeti za pozitivnu definitnost u građevinarstvu su slijedeći:

1. za matricu **k** - broj i raspored ležajeva u ispravnoj mreži mora biti takav da se spriječe pomaci krutog tijela
2. za matricu **m** - moraju se ukloniti stupnjevi slobode bez pridružene koncentrirane mase. Uklanjanje nepotrebnih stupnjeva slobode, vrši se statičkom kondenzacijom.

Vlastiti vektori ψ se određuju uvrštavanjem vrijednosti ω^2 u matricu $[k - \omega^2 m]$, stoga je očito da vektori ψ nisu jedinstveni jer i njihovi višektratnici zadovoljavaju jednadžbu (10). Vektori ψ nazivaju se *modalnim vektorima*, a definiraju oblik titranja sustava na frekvenciji ω. Prvi modalni vektor ψ_1, naziva se temeljnim (osnovnim) modom, a frekvencija na kojoj sustav titra u navedenom modu (ω_1) naziva se *vlastitom frekvencijom temeljnog moda*.

Ako su sve prirodne frekvencije različite od nula i međusobno različite, tada su svi vlastiti vektori linearno nezavisni. Skup od n linearno nezavisnih vektora čini bazu n-dimenzionalnog vektorskog prostora, pa je ukupno rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi linearna kombinacija svih pojedinačnih rješenja.

$$\{u(t)\} = \sum_{n=1}^{N}\{\psi\}_n q_n \tag{11}$$

Pri čemu je q_n:

$$q_n = A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t) \tag{12}$$

Raspisivanjem (11) dobivamo:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = q_1(t) \begin{Bmatrix} \psi_{1,1} \\ \psi_{2,1} \\ \vdots \\ \psi_{N,1} \end{Bmatrix} + q_2(t) \begin{Bmatrix} \psi_{1,2} \\ \psi_{2,2} \\ \vdots \\ \psi_{N,2} \end{Bmatrix} + \cdots + q_N(t) \begin{Bmatrix} \psi_{1,N} \\ \psi_{2,N} \\ \vdots \\ \psi_{N,N} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_1(t)\psi_{1,1} + q_2(t)\psi_{1,2} + q_N(t)\psi_{1,N} \\ q_1(t)\psi_{2,1} + q_2(t)\psi_{2,2} + q_N(t)\psi_{2,N} \\ \vdots \\ q_1(t)\psi_{N,1} + q_2(t)\psi_{N,2} + q_N(t)\psi_{N,N} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_{1,1} & \psi_{1,2} & \cdots & \psi_{1_N} \\ \psi_{2,1} & \psi_{2,2} & \cdots & \psi_{2_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{N,1} & \psi_{N,2} & \cdots & \psi_{N,N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Psi}} \underbrace{\begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{Bmatrix}}_{\vec{q}}$$

Matricu $\mathbf{\Psi}$ nazivamo modalna matrica, a komponente vektora q nazivaju se modalne koordinate. Opće rješenje pod (11) sada možemo zapisati matrično kao:

$$\{u(t)\} = \mathbf{\Psi}\{q\} \tag{13}$$

Osim modalne matrice postoji i spektralna matrica (NxN) koja se sastoji od N svojstvenih vrijednosti ω^2.

$$\mathbf{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

Za slučaj sustava s dva stupnja slobode, definiranog sustavom diferencijalnih jednadžbi pod (2), prirodne frekvencije ω_1^2 i ω_2^2 dobivene su rješavanjem kvadratne jednadžbe karakterističnog polinoma za ω^2. Modalne vektore možemo zapisati kao:

$$\vec{\psi}_1 = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{k_1 + k_2 - \omega_1^2 m_1}{k_2} \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{14}$$

$$\vec{\psi}_2 = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{k_1 + k_2 - \omega_1^2 m_1}{k_2} \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{15}$$

Ukupno rješenje sustava jest linearna kombinacija slijedećih vektora:

$$\begin{cases} \{u_1(t)\} = \{\psi\}_1 q_1(t) = \{\psi\}_1 (A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t)) \\ \{u_2(t)\} = \{\psi\}_2 q_2(t) = \{\psi\}_2 (A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t)) \end{cases} \tag{16}$$

Stoga, ukupno opće rješenje glasi:

$$\{u(t)\} = \{u_1(t)\} + \{u_2(t)\} \tag{17}$$

Bitno je za napomenuti da modalni vektor ψ ne određuje maksimalne iznose ordinata već samo njihov relativni odnos, tj. modalni oblik ili oblik titranja. Da bismo dobili amplitude A_n i B_n, potrebno je rješiti inicijalni problem oblika $\{u(0)\} = \{u\}$ i $\{\dot{u}(0)\} = \{\dot{u}\}$. Za slučaj slobodnog titranja, konstante A_n i B_n glase:

$$A_n = u_n(0) \tag{18}$$

$$B_n = \frac{\dot{u}_n(0)}{\omega_n} \tag{19}$$

Shematski prikaz modova sustava s dva stupnja slobode prikazan je na slijedećoj s

0.2 Ortogonalnost modova

Kao što je već pokazano, modove (modalne oblike) definiraju vektori. Dva vektora su međusobno ortogonalna (okomita) ukoliko je njihov skalarni produkt jednak nuli. Razmotrimo li r-ti i n-ti mod sustava, dobijemo slijedeći sustav jednadžbi (iz (3)):

$$\begin{cases} (\mathbf{k} - \omega_r^2 \mathbf{m})\{\psi\}_r = \{0\} \\ (\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m})\{\psi\}_n = \{0\} \end{cases} \tag{20}$$

Donju jednadžbu pomnožimo s $\{\psi\}_r^T$. U gornjoj jednadžbi prvo transponiramo $\{\psi\}_r$ te ju pomnožimo s $\{\psi\}_n$. Sustav jednadžbi (20) postaje:

$$\begin{cases} \{\psi\}_r^T(\mathbf{k} - \omega_r^2 \mathbf{m})\{\psi\}_n = 0 \\ \{\psi\}_r^T(\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m})\{\psi\}_n = 0 \end{cases} \tag{21}$$

Oduzimanjem gornje i donje jednadžbe dobijemo:

$$(\omega_n^2 - \omega_r^2)\{\psi\}_r^T \mathbf{m}\{\psi\}_s = 0 \tag{22}$$

Za $\omega_n \neq \omega_r$ vrijedi:

$$\{\psi\}_r^T \mathbf{m}\{\psi\}_n = 0 \tag{23}$$

Uvrštavanjem $\{\psi\}_r^T \mathbf{m}\{\psi\}_n = 0$ u bilo koju od jednadžbi iz (21) dobijemo:

$$\{\psi\}_r^T \mathbf{k}\{\psi\}_n = 0 \tag{24}$$

Jednadžbe pod (23) i (24) govore da su modovi, pomnoženi težinskim koeficijentima iz matrice krutosti ili matrice masa, međusobno ortogonalni (valjda). Kažemo da su modovi međusobno ortogonalni s obzirom na matricu mase ili matricu krutosti (valjda).

Poslijedica ortogonalnosti je dijagonalnost slijedećih pravokutnih matrica:

$$\text{Modalna krutost} \quad \mathbf{K} = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{k} \mathbf{\Psi} \tag{25}$$

$$\text{Modalna masa} \quad \mathbf{M} = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{m} \mathbf{\Psi} \tag{26}$$

Članovi matrica računaju se prema slijedećim formulama:

$$\text{Za modalnu krutost} \quad K_{n,n} = \{\psi\}_n^T k \{\psi\}_n \tag{27}$$

$$\text{Za modalnu masu} \quad M_{n,n} = \{\psi\}_n^T k \{\psi\}_n \tag{28}$$

Između elemenata matrica vrijedi slijedeći odnos:

$$\omega_n^2 = \frac{K_n}{M_n} \tag{29}$$

U matričnoj formi:

$$\mathbf{\Omega}^2 = \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1} \tag{30}$$

0.3 Normiranje modova

Modalni vektori nisu jedinstveni jer su jednako predstavljeni vektorima dobivenim rješenjem problema vlastitih vrijednosti i njihovim višekratnicima. Drugim riječima, modalni vektor predstavljen je familijom kolinearnih vektora jer vrijedi slijedeća jednakost (iz (9))

$$\mathbf{k}(a\{\psi\}_n) = \omega_n^2 (a\{\psi\}_n)\mathbf{m}$$

$$a\mathbf{k}\{\psi\}_n = a\omega_n^2 \{\psi\}_n \mathbf{m}$$

$$\mathbf{k}\{\psi\}_n = \omega_n^2 \{\psi\}_n \mathbf{m}$$

Množenje vlastitog vektora skalarom, s ciljem postizanja željene forme modalnog vektora, naziva se normiranje modalnog vektora odnosno moda. Primjerice, željena forma modalnog vektora može biti vektor čiji je najveći element jedan:

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{Bmatrix}$$

Množenjem vektora s $4/3$ dobijemo:

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Od posebnog značaja je normiranje modalne mase na jediničnu vrijednost. Kako je $\{\psi\}_n^T \mathbf{m} \{\psi\}_n = \mathbf{M}_{n,n}$, mod $\{\psi\}_n$ potrebno je množiti sa $(M_{n,n})^{-1/2}$, odnosno:

$$\{\psi\}_n^N = \frac{1}{\sqrt{M_{n,n}}} \{\psi\}_n \tag{31}$$

Gdje je $\{\psi\}_n^N$ normirani vektor n-tog moda. Jednadžba (31) zapisana u matričnoj formi glasi:

$$\mathbf{\Psi}_n^N = \mathbf{\Psi}\,\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \tag{32}$$

Vrijedi slijedeća relacija:

$$M_{n,n} = \left(\{\psi\}_n^N\right)^T \mathbf{m} \{\psi\}_n^N = 1 \tag{33}$$

Odnosno u matričnom obliku:

$$\left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T \mathbf{m} \mathbf{\Psi}^N = I \tag{34}$$

Gdje je I jedinična matrica. Iz (27) slijedi:

$$\left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T \mathbf{K} \mathbf{\Psi}^N = \mathbf{\Omega}^2 \underbrace{\left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T \mathbf{M} \mathbf{\Psi}^N}_{I}$$

$$\left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T \mathbf{K} \mathbf{\Psi}^N = \mathbf{\Omega}^2$$

0.4 Odziv sustava s više stupnjeva slobode na pobudu sinusnom silom

Kao što je pokazano u poglavlju 0.1, jednadžba gibanja sustava s N stupnjeva slobode zadana je kao sustav od N diferencijalnih jednadži drugog reda. U slučaju pobude harmonijskom silom, navedeni sustav će se sastojati od N nehomogenih diferencijalnih jednadžbi drugog reda, koje će biti povezane preko matrice krutosti i/ili matrice mase.

Općenito, rješenje jedne proizvoljne nehomogene diferencijalne jednadžbe drugog reda oblika $\alpha\ddot{y} + \beta\dot{y} + \gamma y = f(t)$ jest suma komplementarnog rješenja y_c i partikularnog rješenja Y_p.

$$y(t) = y_c(t) + U_p(t) \tag{35}$$

Komplementarno rješenje dobijemo izjednačavanjem diferencijalne jednadžbe s nulom odnosno:

$$\alpha\ddot{y} + \beta\dot{y} + \gamma y = 0 \tag{36}$$

Primjetimo da je komplementarno rješenje (rješenje jednadžbe (36)) zapravo rješenje homogene diferencijalne jednadžbe, a jednako je i za slobodne oscilacije i za prisilne oscilacije. Kod prisilnih oscilacija, komplementarno rješenje predstavlja prolazni dio odziva. Partikularno riješenje možemo pronaći koristeći se metodom neodređenih koeficijenata, a predstavlja prolazni dio odziva.

Analogno tome, komplementarno rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi dato je u (11) te predstavlja prolazni dio odziva, pa u slučaju prisilnih oscilacija preostaje nam odrediti još partikularno rješenje koje predstavlja prisilni dio odziva.

Zadana je jednadžba gibanja sustava s dva stupnja slobode prikazanog na slijedećoj slici

UBACI SLIKU SUSTAVA

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin(\omega t) \tag{37}$$

Odnosno:

$$\mathbf{m}\{\ddot{u}\} + k\{u\} = \{p_n\}\sin(\omega t) \tag{38}$$

Gdje je $\{p_n\}$ vektor amplituda harmonijskih sila. Odziv sustava biti će harmonijski, jednake frekvencije, pa partikularno rješenje možemo pretpostaviti:

$$\{u_p(t)\} = \{U_n\}\sin(\omega t) \tag{39}$$

Gdje je $\{U_n\}$ vektor koeficijenata. Druga derivacija (39) glasi:

$$\{\ddot{u}(t)\} = -\omega^2\{U_n\}\sin(\omega t) \tag{40}$$

Uvrštavanjem (39) i (40) u (38) dobijemo:

$$-\omega^2\{U_n\}\mathbf{m}\sin(\omega t) + \{U_n\}\mathbf{k}\sin(\omega t) = \{p\}\sin(\omega t) \tag{41}$$

Nakon sređivanja, jednadžba (41) poprima oblik:

$$[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]\{U_n\} = \{p\} \tag{42}$$

Množenjem jednadžbe (42) s $[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]^{-1}$ dobijemo:

$$\{U_n\} = [\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]^{-1}\{p_n\}$$

$$\{U_n\} = \frac{1}{det[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]} adj\,[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]\{p_n\}$$

Odnosno u matričnom obliku:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{det[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]} \begin{bmatrix} k_2 - m_2\omega^2 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 - m_1\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{43}$$

Komponente vektora $\{U_n\}$ glase:

$$U_1 = \frac{p_0(k_2 - m_2\omega^2)}{m_1 m_2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \tag{44}$$

$$U_2 = \frac{p_0 k_2}{m_1 m_2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \tag{45}$$

Za $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $k_1 = 2k$ i $k_2 = k$ vektori glase:

$$U_1 = \frac{p_0(k - m\omega^2)}{2m^2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \tag{46}$$

$$U_2 = \frac{p_0 k}{2m^2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \tag{47}$$

Uz $\omega_1 = \sqrt{k/2m}$ i $\omega_2 = \sqrt{2k/m}$ te dijeljenjem (46) i (47) dobijemo vektor dinamičkog koeficijenta pomaka (bez dimenzija), koji ovisi o omjerima frekvencija ω/ω_1 te ω/ω_2. Vektor je prikazan u nastavku

$$\frac{2k}{p_0}\{U\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1 - 0.5(\omega/\omega_1)^2}{[1-(\omega/\omega_1)^2][1-(\omega/\omega_2)^2]} \\ \dfrac{1}{[1-(\omega/\omega_1)^2][1-(\omega/\omega_2)^2]} \end{Bmatrix} \tag{48}$$

Prisilni dio odziva glasi:

$$\{u(t)\} = \{U\}\sin(\omega t) = \begin{Bmatrix} \dfrac{1 - 0.5(\omega/\omega_1)^2}{[1-(\omega/\omega_1)^2][1-(\omega/\omega_2)^2]} \\ \dfrac{1}{[1-(\omega/\omega_1)^2][1-(\omega/\omega_2)^2]} \end{Bmatrix} \sin(\omega t) \tag{49}$$

Komponente vektora $\{U\}$ možemo iscrtati kao graf funkcije dinamičkog faktora $U_1/p_0/2k$ i $U_2/p_0/2k$ u ovisnosti o frekvencijskom omjeru ω/ω_1.

0.5 Interesantan postupak za rješavanje 2dof

Zadana je jednadžba gibanja prisilnog titranja sustava s dva stupnja slobode.

$$\mathbf{m}\{\ddot{u}\} + \mathbf{k}\{u\} = \{p\}\sin(\omega t) \tag{50}$$

Odziv sustava će biti sinusni, iste frekvencije kao i pobuda, pa rješenje pretpostavljamo u slijedećem obliku:

$$\{U_p\} = \{U\}\sin(\omega t) \tag{51}$$

Druga derivacija pretpostavljenog rješenja glasi:

$$\{U_p\} = -\omega^2\{U\}\sin(\omega t) \tag{52}$$

Uvrštavanjem (51) i (52) u (50) dobijemo:

$$-\omega^2\{U\}\mathbf{m}\sin(\omega t) + \mathbf{m}\{U\}\sin(\omega t) = \{p\}\sin(\omega t) \tag{53}$$

Te nakon sređivanja:

$$[\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}]\{U\} = \{p\} \tag{54}$$

Matrica $[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}]$ predstavlja matricu dinamičke krutosti.

$$[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}] = \mathbf{Z} \tag{55}$$

Da bismo rješili (54) potrebno je pronaći invers matrice dinamičke krutosti. Invers matrice dinamičke krutosti predstavlja matrica frekvencijskih funkcija odziva, a označavamo ju s $\mathbf{H}$. Jednadžba pod (55) može poprimiti slijedeći oblik:

$$\left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T [\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}] \mathbf{\Psi}^N = \left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T \mathbf{Z}\, \mathbf{\Psi}^T \tag{56}$$

Odnosno

$$\left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T [\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}] \mathbf{\Psi}^N = \left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T \mathbf{H}^{-1}\, \mathbf{\Psi}^T \tag{57}$$

Iz (34) i (35) slijedi:

$$[\omega_n^2 - \omega^2] = \left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T \mathbf{H}^{-1}\, \mathbf{\Psi}^T \tag{58}$$

Nakon sređivanja, dobijemo:

$$\mathbf{H} = \left(\mathbf{\Psi}^N\right)^T [\omega_n^2 - \omega^2]^{-1}\, \mathbf{\Psi}^T \tag{59}$$

Član $H_{j,k}$ matrice $\mathbf{H}$ možemo dobiti preko slijedeće jednadžbe:

$$H_{j,k} = \frac{\psi_{j,1}^N \psi_{k,1}^N}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\psi_{j,2}^N \psi_{k,2}^N}{\omega_2^2 - \omega^2} + \frac{\psi_{j,3}^N \psi_{k,3}^N}{\omega_3^2 - \omega^2} + \cdots + \frac{\psi_{j,n}^N \psi_{k,n}^N}{\omega_n^2 - \omega^2} \tag{60}$$

Jednadžbu (60) možemo zapisati kao skalarni umnožak vektora:

$$H_{j,k} = \left\{ \psi_{j,1}\psi_{k,1} \quad \psi_{j,2}\psi_{k,2} \quad \psi_{j,3}\psi_{k,3} \quad \cdots \psi_{j,n}\psi_{k,n} \right\} \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} \\ \dfrac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \\ \dfrac{1}{\omega_3^2 - \omega^2} \\ \vdots \\ \dfrac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \end{Bmatrix} \tag{61}$$

Za zadani sustav, matrica modova normiranih s obzirom na masu $\mathbf{\Psi}^N$ glasi:

$$\mathbf{\Psi}^N = \begin{Bmatrix} \dfrac{\sqrt{6m}}{6m} & -\dfrac{\sqrt{3m}}{3m} \\ \dfrac{\sqrt{6m}}{6m} & \dfrac{\sqrt{3m}}{3m} \end{Bmatrix}$$

Izračun matrice frekvencijske funkcije odziva $H_{1,1}$ prikazan je u nastavku:

$$H_{1,1} = \frac{\psi_{1,1}^N}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\psi_{1,1}^N}{\omega_2^2 - \omega^2} = \frac{\dfrac{\sqrt{6m}}{6m}\dfrac{\sqrt{6m}}{6m}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\dfrac{\sqrt{3m}}{3m}\dfrac{\sqrt{3m}}{3m}}{\omega_2^2 - \omega^2}$$

$$H_{1,1} = \frac{1}{3m}\left(\frac{\dfrac{1}{2}}{(\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{(\omega_2^2 - \omega^2)}\right) = \frac{1}{3m}\left(\frac{\dfrac{1}{2}(\omega_2^2 - \omega^2) + (\omega_1^2 - \omega^2)}{\omega_1^2\omega_2^2(1 - (\omega/\omega_1)^2)(1 - (\omega/\omega_2)^2}\right)$$

U brojniku, ω_2 izrazimo kao ω_1 pomoću relacije $\omega_2 = \sqrt{2k/m}$ i $\omega_1 = \sqrt{k/2m}$.

$$H_{1,1} = \frac{1}{3m}\left(\frac{3 - \frac{3}{2}(\omega/\omega_1)^2}{\omega_2^2(1-(\omega/\omega_1)^2)(1-(\omega/\omega_2)^2)}\right)$$

Nakon sređivanja:

$$H_{1,1} = \frac{1 - \frac{1}{2}(\omega/\omega_1)^2}{2k(1-(\omega_1/\omega)^2)(1-(\omega_2/\omega)^2)} \tag{62}$$

Analogno tome, dobiju se ostali članovi matrice te glase:

$$H_{1,2} = \frac{1}{2k(1-(\omega_1/\omega)^2)(1-(\omega_2/\omega)^2)} \tag{63}$$

$$H_{2,1} = \frac{1}{2k(1-(\omega_1/\omega)^2)(1-(\omega_2/\omega)^2)} \tag{64}$$

$$H_{2,2} = \frac{1 - 2(\omega/\omega_2)^2}{2k(1-(\omega_1/\omega)^2)(1-(\omega_2/\omega)^2)} \tag{65}$$

$$\tag{66}$$

Matrica $\mathbf{H}$ glasi:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2k(1-(\omega/\omega_1)^2(1-(\omega/\omega_2)^2)}\begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 & 1 \\ 1 & 1 - 2\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 \end{bmatrix} \tag{67}$$

Uvrštavanjem (67) u (54) dobijemo:

$$\mathbf{H}^{-1}\{U\} = \{p\} \tag{68}$$

Množenjem prethodnog izraza s $\mathbf{H}$:

$$\{U\} = \mathbf{H}\{p\} \tag{69}$$

Raspisivanjem prethodne jednadžbe:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2k\left(1-\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)^2\right)}\begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 & 1 \\ 1 & 1 - 2\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{70}$$

Te konačno, vektor $\{U\}$ glasi:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2k\left(1-\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)^2\right)}\begin{Bmatrix} p_0\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right) \\ p_0 \end{Bmatrix} \tag{71}$$

Dijeljenjem vektora $\{U\}$ s $p_0/2k$ dobijemo slijedeće:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\left(1-\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)^2\right)} \begin{Bmatrix} 1-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{72}$$

Komponente vektora U predstavljaju funkcije ovisnosti dinamičkog faktora o frekvencijskim omjerima ω/ω_1 i ω/ω_2. Njihovi grafovi prikazani su u nastavku.

UBACI GRAFOVE

Prisilni dio odziva glasi:

$$\{u(t)\} = \{U\}sin(\omega t) = \frac{1}{\left(1-\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)^2\right)} \begin{Bmatrix} 1-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin(\omega t) \tag{73}$$

0.6 Modalna analiza

Modalna analiza je postupak određivanja osnovnih dinamičkih parametara linearnog sustava s ciljem definiranja matematičkog modela ponašanja sustava pod utjecajem dinamičkih sila. Modalna analiza temelji se na *principu superpozicije*, odnosno na činjenici da se ukupni odziv sustava može zapisati kao linearna kombinacija odziva pojedinih modova.

Razmotrimo jednadžbu gibanja sustava s više stupnjeva slobode pobuđenog proizvoljnom silom:

$$\mathbf{m}\{\ddot{u}\} + \mathbf{k}\{u\} = \{p(t)\} \tag{74}$$

Klasično rješenje jednadžbe gibanja (74) prikazano je u poglavlju 0.4 na primjeru sustava s dva stupnja slobode pobuđenog harmonijskom silom. Za sustave s više od dva stupnja slobode ili za složenije sile pobude, rješavanje jednadžbe gibanja na klasični način može biti izuzetno teško ili nemoguće. U takvim slučajevima, jednadžba gibanja se rješava postupcima modalne analize.

Iz poglavlja 0.1 znamo da je rješenje jednadžbe gibanja slobodnog titranja sustava s više stupnjeva slobode linearna kombinacija odziva svih pojedinih modova odnosno:

$$u(t) = \sum_{r=1}^{N} \mathbf{m}\psi_r q_r(t) \tag{75}$$

Uvrštavanjem (75) u (74) dobijemo:

$$\sum_{r=1}^{N} \mathbf{m}\psi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{N} \mathbf{k}\psi_r q_r(t) = p(t) \tag{76}$$

Množenjem jednadžbe (76) s ψ_n^T dobijemo:

$$\sum_{r=1}^{N} \psi_n^T \mathbf{m}\psi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^{N} \psi_n^T \mathbf{k}\psi_r q_r(t) = \psi_n^T p(t) \tag{77}$$

Zbog svojstva ortogonalnosti, isčezavaju svi članovi sumacija osim n-tog člana, pa preostaje:

$$\psi_n^T \mathbf{m} \psi_n \ddot{q}_n(t) + \psi_n^T \mathbf{k} \psi_n q_r(t) = \psi_n^T p(t) \tag{78}$$

Koristeći relacije iz (28) i (27) jednadžba (78) poprima slijedeći oblik:

$$M_n \ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_n(t) \tag{79}$$

Gdje su M_n, K_n i P_n poopćena masa, krutost i opterećenje n-tog moda.

Postupkom, prikazanim u jednadžbama (75), (76), (77), (78), jednadžbu gibanja sustava predstavljenu sustavom diferencijalnih jednadžbi sveli smo na skup međusobno neovisnih diferencijalnih jednadžbi. Drugim riječima, sustav od N stupnjeva slobode razložen je na N međusobno neovisnih podsustava s jednim stupnjem slobode (princip superpozicije), pri čemu n-ti podsustav prikazuje odziv sustava u n-tom modu. Podsustave nazivamo *poopćeni sustav za n-ti mod*. "Jednadžba gibanja" poopćenog sustava za n-ti oblik titranja predstavljena je diferencijalnom jednadžbom (79) čije rješenje predstavlja modalnu koordinatu n-tog moda $q_n(t)$.

Odziv n-tog moda je:

$$u_n(t) = \psi_n q_n(t) \tag{80}$$

Da bismo odredili ukupni odziv sustava s N-stupnjeva slobode, potrebno je riješiti N modalnih jednadžbi, oblika definiranog pod (79). Matrični zapis sustava modalnih jednadžbi prikazan je u nastavku.

$$\mathbf{M}\{q\} + \mathbf{K}\{q\} = \{P(t)\} \tag{81}$$

Gdje je $\mathbf{M}$ matrica modalnih masa, $\mathbf{K}$ matrica modalnih krutosti, $\{P(t)\}$ vektor poopćenih opterećenja. Iz (26) i (25) znamo da su matrice $\mathbf{M}$ i $\mathbf{K}$ dijagonalne što znači da je (81) sustav međusobno neovisnih jednadžbi. Rješenjem navedenog sustava, dobijemo funkcije modalnih koordinata za sve modove sustava, a ukupni odziv definirano je linearnom kombinacijom (princip superpozicije) odziva svakog pojedinog moda. Odziv pojedinog moda definiran je (80), a ukupni odziv je:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{N} u_n(t) = \sum_{n=1}^{N} \psi_n q_n(t) \tag{82}$$