

Sadržaj

1	Sustavi s jednim stupnjem slobode	1
1.1	Model sustava s jednim stupnjem slobode	1
1.2	Jednadžba gibanja modela pri sinusnoj pobudi	2
1.3	Statički pomak	8
1.4	Frekvencijske funkcije odziva	8
1.4.1	Izvod	8
1.4.2	Zapis prisilnog dijela odziva	10
1.4.3	Grafički prikaz frekvencijske funkcije odziva	14
1.4.4	Dinamički koeficijenti odziva	17
1.5	Rezonanca	20
1.5.1	Rezonanca sustava s prigušenjem	20
1.5.2	Rezonanca sustava bez prigušenja	24
1.5.3	Analiza područja rezonance	26
1.5.4	Praktična primjena matematičkog modela	28
2	Sustavi s više stupnjeva slobode	32
2.1	Jednadžba gibanja slobodnih oscilacija	32
2.2	Ortogonalnost modova	35
2.3	Normiranje modova	36
2.4	Odziv sustava s više stupnjeva slobode na pobudu sinusnom silom	37
2.5	Interesantan postupak za rješavanje 2dof	39
2.6	Modalna analiza	42

Popis tablica

1.1	Očitanje s grafa	23
-----	----------------------------	----

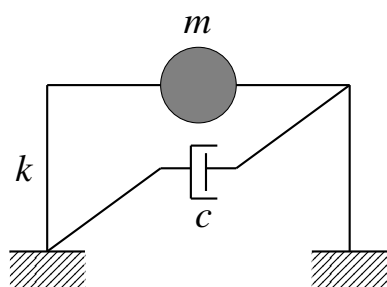
Popis slika

1.1	Idealizirani sustav s jednim stupnjem slobode	1
1.2	Dijagram sila ekvivalentnog modela prigušenog linearnog sustava s jednim stupnjem slobode	2
1.3	Odziv prigušenog sustava na pobudu sinusnom silom za $\omega/\omega_n = 0.2$ i $\zeta = 0.05$	6
1.4	Dijagram sila linearnog neprigušenog sustava s jednim stupnjem slobode . .	6
1.5	Odziv neprigušenog sustava za homogene početne uvjete i $\omega/\omega_n = 0.2$. . .	7
1.6	Shematski prikaz funkcija $H(\omega i)$ i $H^*(\omega i)$ u Gaussovoj ravnini	13
1.7	Magnitudni i fazni spektar Frekvencijske funkcije odziva za različite vrijednosti ζ	15
1.8	Magnitudni i fazni spektar frekvencijske funkcije odziva za neprigušeni sustav	16
1.9	Dinamički faktori pomaka, brzine i ubrzanja za različite vrijednosti ζ	18
1.10	Dinamički faktori pomaka, brzine i ubrzanja u logaritamskom mjerilu	19
1.11	Odziv prigušenog sustava na pobudu rezonantnom frekvencijom	22
1.12	Ovisnost amplitude odziva o broju titraja u rezonanci	23
1.13	Rezonanca neprigušenog sustava	25
1.14	Definicija pojasa polovice snage	26
1.15	Shematski prikaz vibracijskog uređaja: (a) u inicijalnom položaju; (b) položaj nakon vremena t	28
1.16	Amplituda ubrzanja u ovisnosti o omjeru frekvencija	29
1.17	Frekvencijska funkcija odziva konstruirana pomoću mjerenih podataka . . .	31

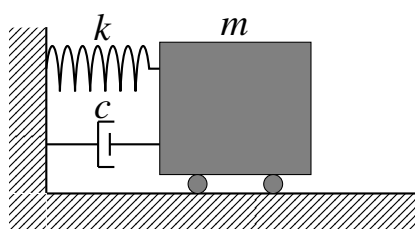
1 Sustavi s jednim stupnjem slobode

1.1 Model sustava s jednim stupnjem slobode

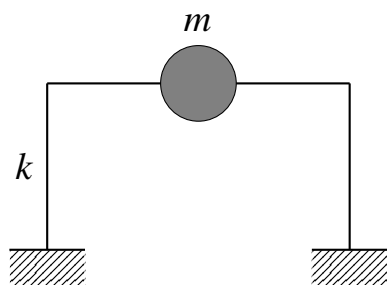
Modeli sustava s jednim stupnjem slobode su posmični okviri, a možemo ih shvatiti kao idealizaciju jednokatnice. Posmični okviri se sastoje od štapova, koncentrirane mase i viskoznog prigušivača, pri čemu je ukupna krutost sustava sadržana u krutosti štapova, ukupna masa sustava u koncentriranoj masi i ukupno prigušenje u viskoznom prigušivaču. Nadalje, vrijedi pretpostavaka o vertikalnoj i horizontalnoj nestišljivosti štapova, tj. štapovi su nepromjenjive dužine.



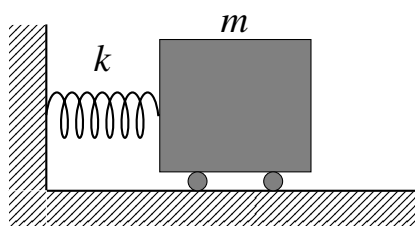
(a) Posmični okvir s prigušenjem



(b) Ekvivalentni model s prigušenjem



(c) Posmični okvir bez prigušenja



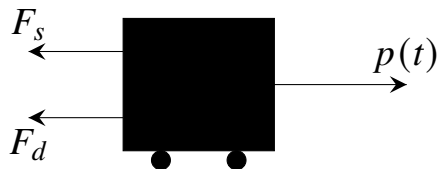
(d) Ekvivalentni model bez prigušenja

Slika 1.1: Idealizirani sustav s jednim stupnjem slobode

Primjetimo da navedeni sustav s pogleda statike predstavlja ravninski problem s tri stupnja slobode (dvije rotacije u zglobovima te translacija), stoga ga je potrebno svesti na sustav s jednim stupnjem slobode za potrebe dinamičkog proračuna. Drugim riječima, potrebno je ukupnu krutost sustava izraziti kao lateralnu krutost. Postupak svodenja sustava s tri stupnja slobode na sustav s jednim stupnjem slobode naziva se *statička kondenzacija* koju u ovom radu nećemo razmatrati.

1.2 Jednadžba gibanja modela pri sinusnoj pobudi

Dijagram sila za sustav s prigušenjem na koji djeluje sila pobude $p(t)$ prikazan je na sljedećoj slici:



Slika 1.2: Dijagram sila ekvivalentnog modela prigušenog linearnog sustava s jednim stupnjem slobode

Prema drugom Newtonovom aksiomu vrijedi:

$$\begin{aligned}\Sigma F &= ma = m\ddot{u} \\ p(t) - F_S - F_D &= m\ddot{u} \\ m\ddot{u} + F_S + F_D &= p(t)\end{aligned}\tag{1.1}$$

Gdje je:

F_S unutarnja sila
 F_D sila prigušenja
 m masa
 a, \ddot{u} ubrzanje

Unutarnju silu možemo zapisati kao:

$$F_S = k \cdot u\tag{1.2}$$

A silu prigušenja kao:

$$F_D = c \cdot v = c \cdot \dot{u}\tag{1.3}$$

Gdje je:

k krutost
 c koeficijent viskoznog prigušenja
 u pomak
 \dot{u}, v brzina

Uvrštavanjem (1.2) i (1.3) u (1.1) dobijemo:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (1.4)$$

Sila pobude $p(t)$ je sinusna sila $p_0 \sin(\omega t)$, pri čemu je p_0 amplituda, a ω frekvencija, stoga jednačba pod (1.4) postaje:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \sin(\omega t) \quad (1.5)$$

Jednačba pod (1.5) jest nehomogena linearna diferencijalna jednačba drugog reda, a riješiti ćemo ju primjenom Laplaceove transformacije¹.

Transformiranjem jednačbe (1.5) dobijemo slijedeću algebarsku jednačbu u frekvencijskoj domeni:

$$m(s^2 U(s) - su(0) - \dot{u}(0)) + c(sU(s) - u(0)) + kU(s) = P(s) \quad (1.6)$$

Gdje je $P(s)$ transformat funkcije $p(t) = p_0 \sin(\omega t)$. Sređivanjem (1.6) dobijemo:

$$U(s) (ms^2 + cs + k) - msu(0) - m\dot{u} - cu(0) = P(s) \quad (1.7)$$

Jednačbu (1.7) možemo rastaviti na više logičnih cijelina:

$$\text{Dinamička krutost} \quad Z(s) = ms^2 + cs + k \quad (1.8)$$

$$\text{Prijenosna funkcija sustava} \quad H(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad (1.9)$$

$$\text{Pobuda početnim uvjetima} \quad W(s) = (ms + c)u(0) + m\dot{u} \quad (1.10)$$

$$\text{Pobuda sinusnom silom} \quad P(s) = p_0 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (1.11)$$

Uvrštavanjem (1.9), (1.10) u (1.7) dobijemo:

$$\frac{U(s)}{H(s)} = W(s) + P(s)$$

Množenjem prijenosnom funkcijom sustava ($H(s)$) dobijemo:

$$U(s) = \underbrace{H(s)W(s)}_{\text{konvolucija u vremenskoj domeni}} + \underbrace{H(s)P(s)}_{\text{konvolucija u vremenskoj domeni}} \quad (1.12)$$

Pri čemu je:

$H(s) \cdot W(s)$ odziv na pobudu početnim uvjetima u frekvencijskoj domeni

$H(s) \cdot P(s)$ odziv na pobudu sinusnom silom u frekvencijskoj domeni

¹Iako postupkom dugotrajnija (u ovom slučaju), metoda Laplaceove transformacije nam pruža jedinstven uvid u međudjelovanje sustava i pobude.

Da bi bilo lakše naći inverze odziva u frekvencijskoj domeni potrebno je funkciju $H(s)$ prikazati u tabličnom obliku².

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{\omega_D} \frac{1}{k} \frac{\omega_D}{(s + \sigma)^2 + \omega_D^2} \quad (1.13)$$

Gdje je:

$$\begin{aligned} \sigma &= \zeta \omega_n && \text{stupanj prigušenja} \\ \omega_D &= \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} && \text{vlastita frekvencija prigušenog titranja} \\ \omega_n &= \sqrt{k/m} && \text{prirodna frekvencija oscilatora} \\ \zeta &= c/c_{kr} && \text{koeficijent relativnog prigušenja} \\ c_{kr} &= 2m\omega_n && \text{kritično prigušenje} \end{aligned}$$

Pobuda početnim uvjetima zadana je preko jednadžbe:

$$\begin{aligned} H(s)W(s) &= \frac{u_0}{\omega_D} \left(\frac{s + \sigma}{(s + \sigma)^2 + \omega_D^2} + \sigma \frac{\omega_D}{(s + \sigma)^2 + \omega_D^2} \right) \\ &+ \frac{\dot{u}(0)}{\omega_D} \frac{\omega_D}{(s + \sigma)^2 + \omega_D^2} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Odziv u vremenskoj domeni se određuje pronalaskom inverza \mathcal{L} transformacije funkcije odziva u frekvencijskoj domeni.

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)H(s)\} + \frac{p_0}{k} \mathcal{L}^{-1}\{H(s)P(s)\} \quad (1.15)$$

Funkcija $H(s)W(s)$ svedena je na tablični oblik stoga je moguće izravno naći inverz Laplaceove transformacije koji glasi:

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)W(s)\} = e^{-\sigma t} \left[u(0) \cos(\omega_D t) + \left(\sigma \frac{u(0)}{\omega_D} + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_D} \right) \sin(\omega_D t) \right] \quad (1.16)$$

Funkciju $H(s)P(s)$ nije moguće svesti na tablični oblik, pa je potrebno odrediti konvoluciju funkcija $h(t)$ i $p(t)$. Funkcija $H(s)$ odgovara funkciji $h(t)$ u vremenskoj domeni, a funkcija $P(s)$ funkciji $p(t)$, stoga:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{k} \frac{\omega_n^2}{\omega} e^{-\sigma t} \sin(\omega_D t) \quad (1.17)$$

$$p(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P(s)\} = p_0 \sin(\omega t) \quad (1.18)$$

²postupak svodenja prijenosne funkcije sustava na tablični oblik prikazan je u slijedećem poglavlju

Konvoluciju funkcija određujemo preko konvolucijskog integrala:

$$\begin{aligned}(h * p)(t) &= \int_0^t h(\tau)p(t - \tau)d\tau \\ &= \frac{p_0}{k} \frac{\omega_n^2}{\omega} \int_0^t e^{-\sigma\tau} \sin(\tau) \sin(t - \tau)d\tau\end{aligned}\quad (1.19)$$

Ukupni odziv je suma odziva na pobudu početnim uvjetima i odziva na pobudu harmonijskom silom odnosno:

$$\begin{aligned}u(t) &= e^{-\sigma t} \left[u(0)\cos(\omega_D t) + \left(\sigma \frac{u(0)}{\omega_D} + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_D} \right) \sin(\omega_D t) \right] \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{pobuda početnim uvjetima (prolazni dio odziva)}} \\ &+ \underbrace{\frac{p_0}{k} \frac{\omega_n^2}{\omega} \int_0^t e^{-\sigma\tau} \sin(\tau) \sin(t - \tau)d\tau}_{\text{pobuda sinusnom silom}}\end{aligned}\quad (1.20)$$

Postupak određivanja i sređivanja rješenja konvolucijskog integrala iz (1.19) je dugotrajan pa je u nastavku prikazano samo konačno rješenje.

$$\begin{aligned}(p * h)(t) &= \underbrace{C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)}_{\text{prisilni dio odziva}} \\ &\quad - \underbrace{e^{-\sigma t} \left(D\cos(\omega_D t) + \left(\frac{D\sigma}{\omega_D} + \frac{C\omega}{\omega_D} \right) \sin(\omega_D t) \right)}_{\text{prolazni dio odziva}}\end{aligned}\quad (1.21)$$

Gdje je:

$$C = \frac{p_0}{k} \frac{1 - (\omega/\omega_n)^2}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta\omega/\omega_n]^2}\quad (1.22)$$

$$D = \frac{p_0}{k} \frac{-2\zeta\omega/\omega_n}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta\omega/\omega_n]^2}\quad (1.23)$$

Iz (1.21) i (1.20) možemo zaključiti da će se prolazni dio odziva pojaviti i u slučaju homogenih i u slučaju nehomogenih početnih uvjeta (prisutan i kod pobude početnim uvjetima i kod pobude silom), a ovisi o karakteristikama sustava, te se smanjuje eksponencijalno u ovisnosti o vremenu. Nakon što prolazni dio odziva iščezne preostaje samo prisilni dio odziva, a pojavljuje se neovisno o početnim uvjetima. Karakteristike prisilnog dijela odziva ponajviše ovise o frekvenciji i amplitudi pobude, a zatim i o karakteristikama sustava (o prigušenju te prirodnoj frekvenciji sustava). Karakteristike prisilnog dijela odziva detaljnije će se razmatrati u slijedećim poglavljima.

Uvrštavanjem (1.21) u (1.20), te sređivanjem dobijemo ukupno rješenje diferencijalne jednadžbe (1.5) koje glasi:

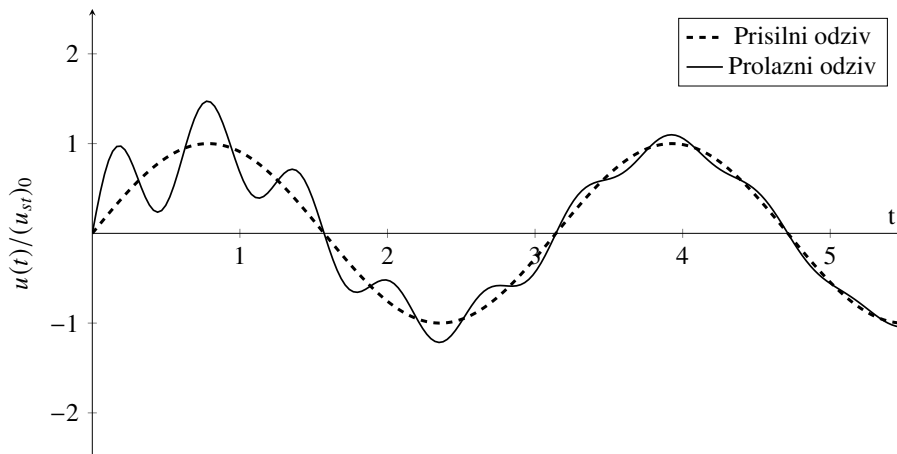
$$u(t) = \underbrace{e^{-\sigma t}(A\cos(\omega_D t) + B\sin(\omega_D t))}_{\text{prolazni dio odziva}} + \underbrace{C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)}_{\text{prisilni dio odziva}}\quad (1.24)$$

Gdje je:

$$A = u(0) - D \quad (1.25)$$

$$B = \frac{u(0)\sigma}{\omega_D} + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_D} - \frac{D\sigma}{\omega_D} - \frac{C\omega}{\omega_D} \quad (1.26)$$

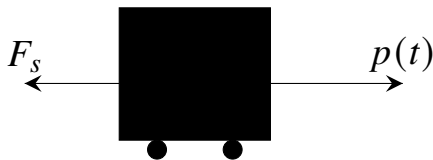
Graf odziva prigušenog sustava s jednim stupnjem slobode za homogene početne uvjete $u(0) = 0$ i $\dot{u}(0) = 0$ prikazan je na sljedećoj slici.



Slika 1.3: Odziv prigušenog sustava na pobudu sinusnom silom za $\omega/\omega_n = 0.2$ i $\zeta = 0.05$

Neprigušeni sustav možemo shvatiti kao poseban slučaj prigušenog sustava za slučaj $c = 0$ odnosno $\zeta = 0$, pa diferencijalna jednačba sustava postaje:

$$m\ddot{u} + ku = p(t) \quad (1.27)$$



Slika 1.4: Dijagram sila linearnog neprigušenog sustava s jednim stupnjem slobode

Rješenje jednačbe gibanja možemo odrediti iz (1.24) određivanjem koeficijenata A , B , C i

D za $\zeta = 0$.

$$A = u(0) \quad (1.28)$$

$$B = \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - \frac{\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (1.29)$$

$$C = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (1.30)$$

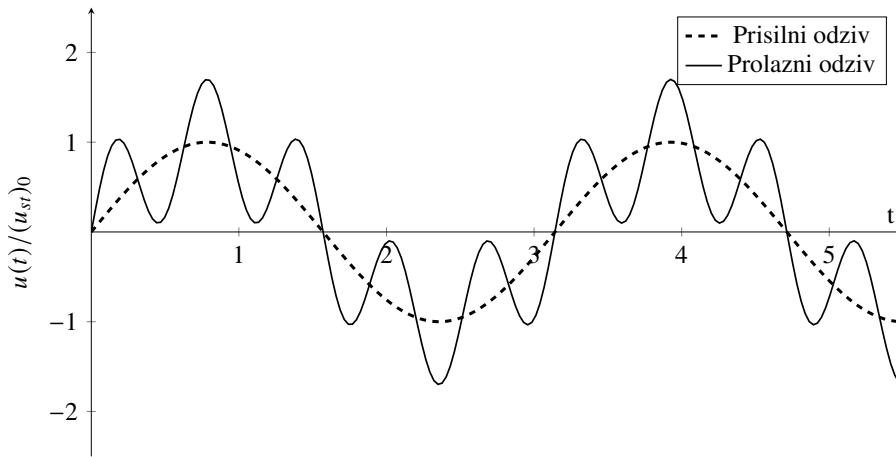
$$D = 0 \quad (1.31)$$

$$\sigma = \omega_n \zeta = \omega_n \cdot 0 = 0 \quad (1.32)$$

$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \omega_n \sqrt{1 - 0} = \omega_n \quad (1.33)$$

Uvrštavanjem (1.28), (1.29), (1.30), (1.31), (1.32) i (1.33) u (1.24) dobijemo rješenje diferencijalne jednačbe pod (1.27) koje glasi:

$$u(t) = \underbrace{u(0)\cos(\omega_n t) \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - \frac{\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right] \sin(\omega_n t)}_{\text{prolazni dio odziva}} + \underbrace{\frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin(\omega t)}_{\text{prisilni dio odziva}} \quad (1.34)$$



Slika 1.5: Odziv neprigusenog sustava za homogene početne uvjete i $\omega/\omega_n = 0.2$

1.3 Statički pomak

Zanemarivanjem ubrzanja u diferencijalnoj jednačbi pod (1.27) dobijemo:

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \sin(\omega t) \quad (1.35)$$

Navedena jednačba predstavlja *vremensku funkciju statičkog pomaka*. Pomak nazivamo statičkim jer se zanemaruje dinamički utjecaj sile pobude (pretpostavlja se spora promjena opterećenja). Vremenska funkcija statičkog pomaka, preko Hookeovog zakona, stavlja u odnos silu pobude ($p_0 \sin(\omega t)$) i pomak sustava $u(t)$. Zanemarivanjem funkcije sinus, dobijemo amplitudu statičkog pomaka koja je definirana slijedećom jednačbom:

$$(u_{st})_0 = \frac{p_0}{k} \quad (1.36)$$

1.4 Frekvencijske funkcije odziva

1.4.1 Izvod

Ponašanje sustava opisano je diferencijalnom jednačbom drugog reda (u vremenskoj domeni) koja nakon \mathcal{L} -transformacija postaje algebarska jednačba u s domeni. Transformata odziva na sinusnu silu uz homogene početne uvjete glasi:

$$U(s) = P(s) \cdot H(s) \quad (1.37)$$

Funkcija $H(s)$ naziva se prijenosnom funkcijom sustava, a definirana je kao kvocijent odziva i pobude u s domeni.

$$H(s) = \frac{U(s)}{P(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad (1.38)$$

Prijenosna funkcija sustava obično sadrži dvije skupine karakterističnih točaka:

1. polovi - nultočke nazivniku
2. nule - nultočke brojnika

Polovi predstavljaju točke u kojima prijenosna funkcija sustava divergira tj ($H(s) \rightarrow \infty$), a nule su točke u kojima vrijednost prijenosne funkcije iznosi nula. Polovi i nule za polinom drugog stupnja mogu biti:

1. dva različita realna broja
2. jedan dvostruki realni broj
3. jedan par kompleksno konjugiranih brojeva

Uočimo da za slučaj prijenosne funkcije sustava pod (1.38) nema nula, a polovi su jedan par kompleksno konjugiranih brojeva (polovi su dobiveni izjednačavanjem polinoma u nazivniku s nulom):

$$p_{1,2} = -\sigma \pm \omega_D i \quad (1.39)$$

Realni dio pola prikazuje stupanj prigušenja a imaginarni dio prirodnu frekvenciju prigušenog titranja. Prijenosna funkcija zapisana preko polova glasi:

$$H(s) = \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)} \quad (1.40)$$

Raspisivanjem dobijemo:

$$H(s) = \frac{1}{(s + \sigma + \omega_D i)(s + \sigma - \omega_D i)} \frac{\omega_n^2}{k} \quad (1.41)$$

I konačno tablični oblik dobijemo množenjem s ω_D/ω_D

$$H(s) = \frac{1}{k} \frac{\omega_n^2}{\omega_D} \frac{\omega_D}{(s + \sigma^2) + \omega_D^2} \quad (1.42)$$

Poseban slučaj prijenosne funkcije sustava, za slučaj $s = \omega i$, naziva se *frekvencijska funkcija odziva* i glasi:

$$H(\omega i) = \frac{H(\omega i)}{P(\omega i)} = \frac{1}{-\omega^2 m + i\omega c + k} \frac{1/k}{1/k} = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + 2\zeta(\omega/\omega_n)i} \quad (1.43)$$

Član $1/k$ možemo zanemariti jer je uračunat u amplitudu statičkog pomaka $(u_{st})_0 = p_0/k$, pa je konačni oblik frekvencijske funkcije odziva:

$$H(\omega) = \frac{1}{(1 - (\omega/\omega_n)^2) + (2\zeta\omega/\omega_n)i} \quad (1.44)$$

Frekvencijska funkcija odziva $H(\omega)$ je funkcija argumenta ω , odnosno promjenom frekvencije pobude, mjenja se i njezina vrijednost, te je redovito je kompleksna. Jednadžbu pod (1.44) možemo rastaviti na realni i imaginarni dio. Rastav na realni i imaginarni dio prikazan je u nastavku.

$$\text{Realni dio} \quad H_r = \frac{1 - (\omega/\omega_n)^2}{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2} \quad (1.45)$$

$$\text{Imaginarni dio} \quad H_i = \frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2} \quad (1.46)$$

Jednadžba pod (1.44) zapisana preko realnog i imaginarnog dijela glasi:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= H_r - H_i i \\ &= \frac{1 - (\omega/\omega_n)^2}{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2} - \frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2} i \end{aligned} \quad (1.47)$$

Funkciju (1.44) se može prikazati i u trigonometrijskom obliku. Općenito, kompleksni broj se prikazuje u trigonometrijskom obliku na slijedeći način:

$$R = |R|e^{i\phi} = |R|(\cos(\phi) + i \sin(\phi)) \quad (1.48)$$

Gdje je $|R|$ norma kompleksnog broja, a ϕ kut kojega kompleksni vektor zatvara s realnom osi. Stoga je očito da je za navedeni prikaz potrebno je odrediti magnitudu (normu) kompleksnog vektora frekvencijske funkcije odziva te kut koji zatvara s realnom osi. Magnituda je zadana Pitagorinim poučkom, dakle:

$$|H(\omega)| = \sqrt{(H_r^2 + H_i^2)} = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta(\omega/\omega_n))^2}} \quad (1.49)$$

Kut koji kompleksni vektor zatvara s realnom osi moguće je odrediti slijedećom jednadžbom:

$$\phi(\omega) = \left| \arctan \left(\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right) \right| \quad (1.50)$$

Prikazana u trigonometrijskom obliku, frekvencijsku funkciju odziva potrebno je rastaviti na magnitudni spektar koji je definiran jednadžbom (1.49) i na fazni spektar koji je definiran jednadžbom (1.50). **Napomena:** jednadžba (1.50) stavljena je u apsolutnu vrijednost zato što će se negativni predznak (kašnjenje) ili pozitivni predznak uračunati naknadno, no više o tome u slijedećem poglavlju.

1.4.2 Zapis prisilnog dijela odziva

Prisilni dio odziva definiran je jednadžbom prikazanom u nastavku:

$$u(t) = C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t) \quad (1.51)$$

Prisilni odziv pod (1.51) možemo zapisati u obliku $u_0 \sin(\omega t - \phi)$ korištenjem slijedećeg trigonometrijskog identiteta:

$$u_0 \sin(\omega t - \phi) = C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t) \quad (1.52)$$

Gdje je:

$$\text{Amplituda dinamičkog pomaka } u_0 = \sqrt{C^2 + D^2} \quad (1.53)$$

$$\text{Kašnjenje u fazi } \phi = \arctan -\frac{D}{C} \quad (1.54)$$

Raspisivanjem formule pod (1.53) dobijemo:

$$u_0 = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}} = \frac{(u_{st})_0}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}} \quad (1.55)$$

Definiramo dinamički koeficijent pomaka ili koeficijent povećanja pomaka (R_d) kao omjer amplitude dinamičkog i statičkog pomaka.

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}} \quad (1.56)$$

Fazni kut ϕ dobijemo raspisivanjem izraza pod (1.54) te dobijemo:

$$\phi = \arctan \frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (1.57)$$

Uvrštavanjem (1.74) i (1.57) u (1.52) dobijemo:

$$u(t) = \frac{p_0}{k} R_d \sin(\omega t - \phi) = (u_{st})_0 R_d \sin(\omega t - \phi) \quad (1.58)$$

Uočimo da je jednađžba pod (1.74) ista kao i jednađžba magnitudnog spektra frekvencijske funkcije odziva. Isto tako, uočimo i da je jednađžba pod (1.57) ista kao i jednađžba faznog spektra frekvencijske funkcije odziva. Nadalje, prisilni dio odziva je sinusoida isto kao i pobuda.

Stoga možemo reći da frekvencijska funkcija odziva definira odnos između pobude i odziva. Taj odnos je kompleksan jer je opisan magnitudnim i faznim spektrom kompleksne funkcije definirane u s domeni. Drugim riječima, frekvencijska funkcija odziva nas upućuje na slijedeća svojstva (prisilnog) odziva:

1. Frekvencija odziva biti će jednaka frekvenciji pobude.
2. Amplituda odziva biti će skalirana amplituda statičkog pomaka. Prisjetimo se da je amplituda statičkog pomaka u izravnoj vezi sa amplitudom sile pobude.
3. Odziv će zaostajati u fazi za pobudom.

Skaliranje amplitude statičkog pomaka $(u_{st})_0$ definirano je *dinamičkim koeficijentom* R_d . Navedeni koeficijent je konkretna vrijednost magnitudnog spektra frekvencijske funkcije odziva za određenu frekvenciju ω . Analogno tome, kašnjenje u fazi definirano je faznim kutom koji je konkretna vrijednost faznog spektra frekvencijske funkcije odziva.

Alternativno zapis prisilnog dijela odziva (Za ovo i nisam baš siguran)

Odziv na pobudu sinusnom silom može se odrediti konvolucijom prijenosne funkcije i funkcije pobude u vremenskoj domeni. Zadana je pobuda sinusnom silom oblika:

$$p(t) = p_0 e^{\alpha t} \sin(\omega t) \quad (1.59)$$

Jednađžbu (1.59) možemo zapisati u eksponencijalnom obliku:

$$p(t) = -\frac{1}{2} p_0 i (e^{(\alpha+i\omega)t} - e^{(\alpha-i\omega)t}) \quad (1.60)$$

Uvodimo:

$$s = \alpha + i\omega \quad (1.61)$$

$$s^* = \alpha - i\omega \quad (1.62)$$

Uvrštavanjem (1.61) i (1.62) u (1.60) dobijemo:

$$p(t) = -\frac{1}{2}p_0(e^{st} - e^{s^*t}) \quad (1.63)$$

Prijenosna funkcija sustava (s izlučenim članom $1/k$) zadana je u obliku $1/kh(t)$. Izračun odziva je prikazan u nastavku:

$$u(t) = \frac{1}{k}(h * p)(t) = \frac{1}{k} \int_0^\infty h(t - \tau)p(\tau)d\tau$$

Uvodi se supstitucija $\lambda = t - \tau$.

$$u(t) = \frac{1}{k} \int_0^\infty h(\lambda)p(t - \lambda)d\lambda = \frac{1}{k} \int_0^\infty h(\lambda) \left[-\frac{1}{2}p_0i \left(e^{st-s\lambda} - e^{s^*t-s^*\lambda} \right) \right] d\lambda$$

Raspisivanjem i sređivanjem dobijemo:

$$u(t) = -\frac{1}{2} \frac{p_0}{k} i \left[\underbrace{e^{st} \int_0^\infty h(\lambda)e^{-s\lambda} d\lambda}_I - e^{s^*t} \underbrace{\int_0^\infty h(\lambda)e^{-s^*\lambda} d\lambda}_{II} \right] \quad (1.64)$$

Uočimo da integrali označeni s I) i II) predstavljaju Laplaceovu transformaciju prijenosne funkcije sustava pa izraz pod (1.64) postaje:

$$u(t) = -\frac{1}{2} \frac{p_0}{k} i (e^{st} H(s) - e^{s^*t} H(s)) \quad (1.65)$$

Varijabla s^* je kompleksno konjugirana varijabla s , pa je funkcija $H(s^*)$ kompleksno konjugirana funkcija $H(s)$. odnosno:

$$H(s^*) = H^*(s) \quad (1.66)$$

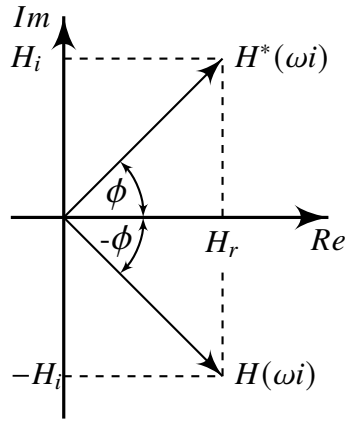
Korištenjem (1.66) jednačba (1.65) postaje:

$$u(t) = -\frac{1}{2} \frac{p_0}{k} i (e^{st} H(s) - e^{s^*t} H^*(s)) \quad (1.67)$$

Poseban slučaj je za $\alpha = 0$ odnosno $s = i\omega$ i $s^* = -i\omega$. Tada prijenosne funkcije sustava postaju frekvencijske funkcije odziva, a izraz pod (1.67) glasi:

$$u(t) = -\frac{1}{2} \frac{p_0}{k} i (e^{i\omega t} H(i\omega) - e^{-i\omega t} H^*(i\omega)) \quad (1.68)$$

Frekvencijska funkcija odziva $H(i\omega)$ zadana je jednačbom (1.47). Možemo uočiti da je njezin imaginarni dio negativan, što znači da je imaginarni dio funkcije $H^*(i\omega)$ pozitivan.



Slika 1.6: Shematski prikaz funkcija $H(\omega i)$ i $H^*(\omega i)$ u Gaussovoj ravnini

Modul funkcija $H(\omega)$ i $H^*(\omega)$ je isti a definiran je jednađbom (1.49) a fazni kut jednađbom (1.50). Sa slike 1.6 vidljivo je da je kut ϕ što ga zatvara $H(\omega)$ s realnom osi negativan, a kut što ga zatvara $H^*(\omega)$ s realnom osi pozitivan. Trigonometrijski zapisi funkcija $H(\omega)$ i $H^*(\omega)$ dati su u nastavku.

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{-i\phi} \quad (1.69)$$

$$H^*(\omega) = |H(\omega)|e^{i\phi} \quad (1.70)$$

$$(1.71)$$

Uvrštavanjem (1.69) i (??) u (1.67) dobijemo:

$$u(t) = -\frac{1}{2} \frac{p_0}{k} i |H(\omega)| (e^{i\omega t} e^{-i\phi} - e^{-i\omega t} e^{i\phi}) = -\frac{1}{2} \frac{p_0}{k} i |H(\omega)| (2i \sin(\omega t - \phi)) \quad (1.72)$$

Te konačno:

$$u(t) = \frac{p_0}{k} |H(\omega)| \sin(\omega t - \phi) \quad (1.73)$$

Jednađba (1.73) predstavlja prisilni dio odziva.

Definiramo dinamički koeficijent pomaka ili koeficijent povećanja pomaka (R_d) kao omjer amplitude dinamičkog i statičkog pomaka.

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}} \quad (1.74)$$

Uočimo da su jednađbe (1.74) i (1.44) iste, odnosno funkcija ovisnost dinamičkog faktora R_d o omjeru frekvencija ω/ω_n odgovara magnitudnom spektru frekvencijske funkcije odziva. Stoga jednađbu pod (1.73) možemo zapisati kao:

$$u(t) = \frac{p_0}{k} R_d \sin(\omega t - \phi) \quad (1.75)$$

Iz (1.73) i (1.75) možemo definirati fizikalnu interpretaciju frekvencijske funkcije odziva. Dakle, frekvencijska funkcija odziva definira odnos između pobude i odziva. Taj odnos je

kompleksan jer je opisan magnitudnim i faznim spektrom kompleksne funkcije definirane u s domeni. Drugim riječima, frekvencijska funkcija odziva nas upućuje na slijedeća svojstva (prisilnog) odziva:

1. Frekvencija odziva biti će jednaka frekvenciji pobude (ω).
2. Amplituda odziva biti će skalirana amplituda statičkog pomaka. Prisjetimo se da je amplituda statičkog pomaka u izravnoj vezi sa amplitudom sile pobude.
3. Odziv će zaostajati u fazi za pobudom.

Skaliranje amplitude statičkog pomaka $(u_{st})_0$ definirano je *dinamičkim koeficijentom* R_d . Navedeni koeficijent je konkretna vrijednost magnitudnog spektra frekvencijske funkcije odziva za određenu frekvenciju ω . Analogno tome, kašnjenje u fazi definirano je faznim kutom koji je konkretna vrijednost faznog spektra frekvencijske funkcije odziva.

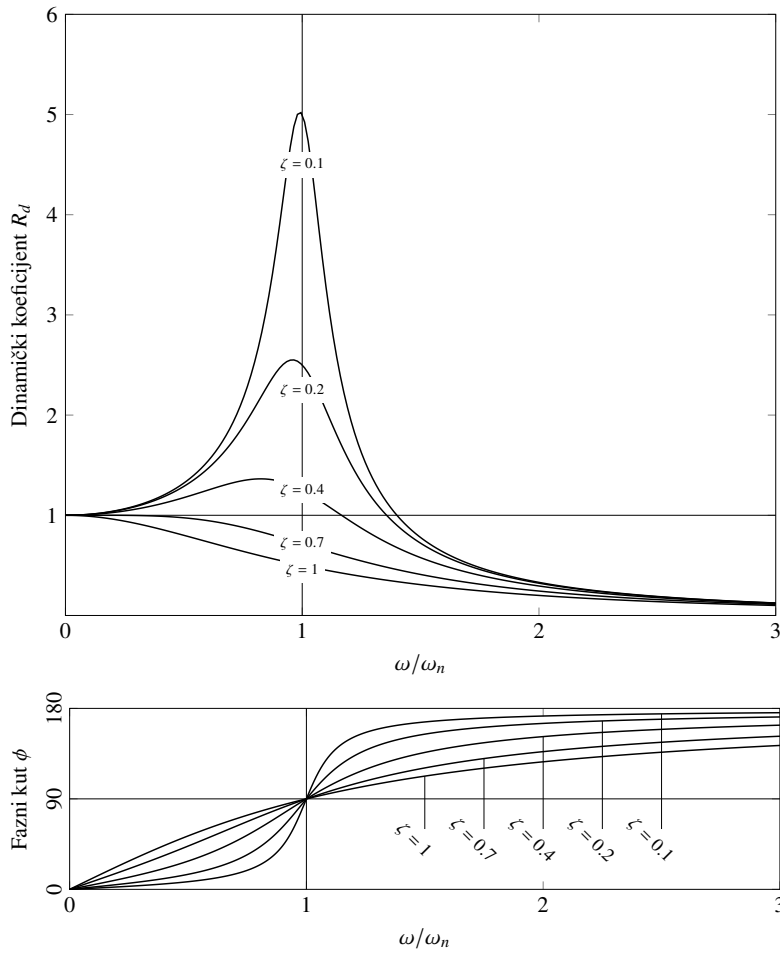
1.4.3 Grafički prikaz frekvencijske funkcije odziva

Zbog toga što frekvencijska funkcija odziva definira uvećanje amplitude statičkog pomaka i fazno zaostajanje odziva za pobudom od posebnog su nam interesa fazni i magnitudni spektar frekvencijske funkcije odziva (polarni zapis).

Za konstantan ω_n vrijednosti funkcija definiranih jednadžbama (1.49) i (1.50) biti će za omjer ω/ω_n , stoga taj omjer možemo postaviti i kao argument navedenih funkcija.

$$\left| H\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \right| = \frac{1}{\sqrt{((1 - (\omega/\omega_n)^2))^2 + (2\zeta(\omega/\omega_n))^2}} \quad (1.76)$$

$$\phi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) = \arctan\left(\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\right) \quad (1.77)$$



Slika 1.7: Magnitudni i fazni spektar Frekvencijske funkcije odziva za različite vrijednosti ζ

Magnitudni spektar frekvencijske funkcije odziva prikazuje funkcijsku ovisnost dinamičkog koeficijenta R_d o omjeru frekvencije pobude i prirodne frekvencije za određeno prigušenje. Analogno tome fazni spektar frekvencijske funkcije odziva prikazuje ovisnost faznog kuta (kašnjenje u fazi za pobudom) o omjeru frekvencija ω/ω_n za određeni faktor relativnog prigušenja.

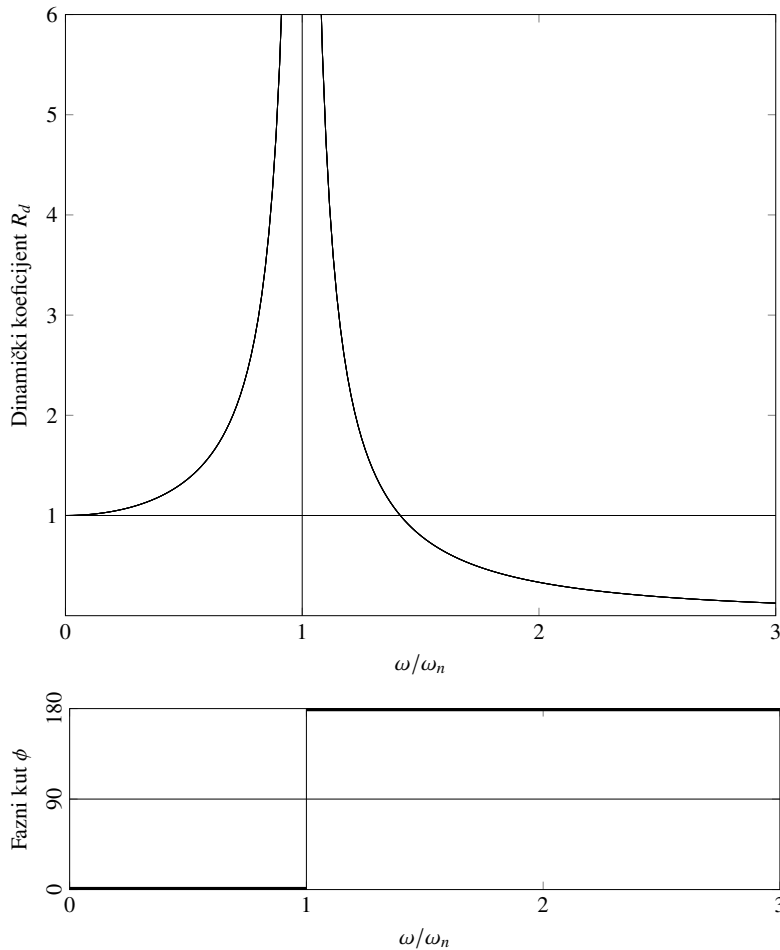
Za neprigušeno titranje funkcije faznog i magnitudnog spektra prikazane su u nastavku.

$$\phi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) = \arctan\left(\frac{0}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\right) \quad (1.78)$$

$$R_d = \left|H\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2 \cdot 0(\omega/\omega_n))^2}} = \frac{1}{|1 - (\omega/\omega_n)^2|} \quad (1.79)$$

Iz formule (1.78) očito je da za neprigušeno titranje postoje tri vrijednosti faznog kuta koje ovise o izrazu u nazivniku. Vrijednosti faznog kuta prikazane su u nastavku:

$$\phi = \begin{cases} 0^\circ & \text{za } 1 - (\omega/\omega_n)^2 > 0 \\ 90^\circ & \text{za } 1 - (\omega/\omega_n)^2 = 0 \\ 180^\circ & \text{za } 1 - (\omega/\omega_n)^2 < 0 \end{cases}$$



Slika 1.8: Magnitudni i fazni spektar frekvencijske funkcije odziva za neprigušeni sustav

Analizirajući krivulje sa (1.7) i (1.8) navedene grafove možemo podijeliti na tri područja:

1. Područje kontrolirano krutošću - za slučaj spore promjene opterećenja ($\omega/\omega_n \ll 1$ - lijevo na grafu) utjecaj prigušenja je neznatan (krivulje za različita prigušenja su jako bliske) a dinamički utjecaj je mali, tj. $R_d \approx 1$ što znači da je amplituda prisilnog odziva približno jednaka amplitudi statičkog pomaka, pa amplitudu prisilnog odziva možemo aproksimirati slijedećom jednadžbom:

$$u_0 \simeq (u_{st})_0 = \frac{p_0}{k} \quad (1.80)$$

Fazni kut je približno 0° pa su pobuda i odziv u fazi.

2. Područje kontrolirano prigušenjem - Za slučaj $\omega/\omega_n \simeq 1$, izražen razmak između krivulja nalaže najveći utjecaj prigušenja na vrijednost dinamičkog faktora, a samim time i na ukupnu amplitudu prisilnog odziva. Dinamički faktor R_d , u navedenom intervalu, postiže najveće vrijednosti a u slučaju $\zeta = 0$ R_d je neograničen (teži u beskonačno). Dominantni član izraza (1.76) je $2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})$, a aproksimacija amplitude prisilnog odziva glasi:

$$u_0 = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta} = \frac{p_0}{c\omega_n} \quad (1.81)$$

Fazni kut za sva prigušenja iznosi 90° .

3. Područje kontrolirano masom - Za slučaj brze promjene opterećenja $\omega/\omega_n \gg 1$ utjecaj prigušenja je zanemariv jer su krivulje vrlo bliske. Dinamički faktor R_d teži u nulu, što znači da je ukupna amplituda prisilnog odziva manja od amplitude statičkog pomaka. Dominantni član jednadžbe (1.49) jest $(\omega/\omega_n)^4$ što znači da jednadžbu pod (1.76) možemo aproksimirati na slijedeći način:

$$H(\omega/\omega_n) \simeq \frac{\omega_n^2}{\omega^2}$$

Prema tome, amplituda prisilnog odziva glasi:

$$u_0 = (u_{st})_0 \left(\frac{\omega_n}{\omega} \right)^2 = \frac{p_0}{m\omega^2} \quad (1.82)$$

U ovom slučaju ($\omega/\omega_n \gg 1$), fazni kut je približno 180° , što znači da su pobuda i odziv izvan faze

1.4.4 Dinamički koeficijenti odziva

U prethodnim poglavljima, prisilni dio odziva je prikazan kao vremenska funkcija pomaka pri čemu je njegova amplituda jednaka statičkom pomaku skaliranom dinamičkim koeficijentom pomaka R_d . Osim vremenskom funkcijom pomaka, odziv sustava potrebno je opisati i vremenskim funkcijama brzine i ubrzanja.

Deriviranjem vremenske funkcije pomaka po vremenu dobijemo vremensku funkciju brzine:

$$\frac{\dot{u}(t)}{(u_{st})_0} = \omega R_d \cos(\omega t - \phi) \frac{\omega_n}{\omega_n}$$

$$\frac{\dot{u}(t)}{\omega_n p_0 / k} = \frac{\omega}{\omega_n} R_d \cos(\omega t - \phi) \quad (1.83)$$

$$\frac{\dot{u}(t)}{p_0 / \sqrt{km}} = R_v \cos(\omega t - \phi) \quad (1.84)$$

Gdje je:

R_v Dinamički koeficijent brzine

Iz jednadžbi pod (1.83) i (1.84) slijedi relacija:

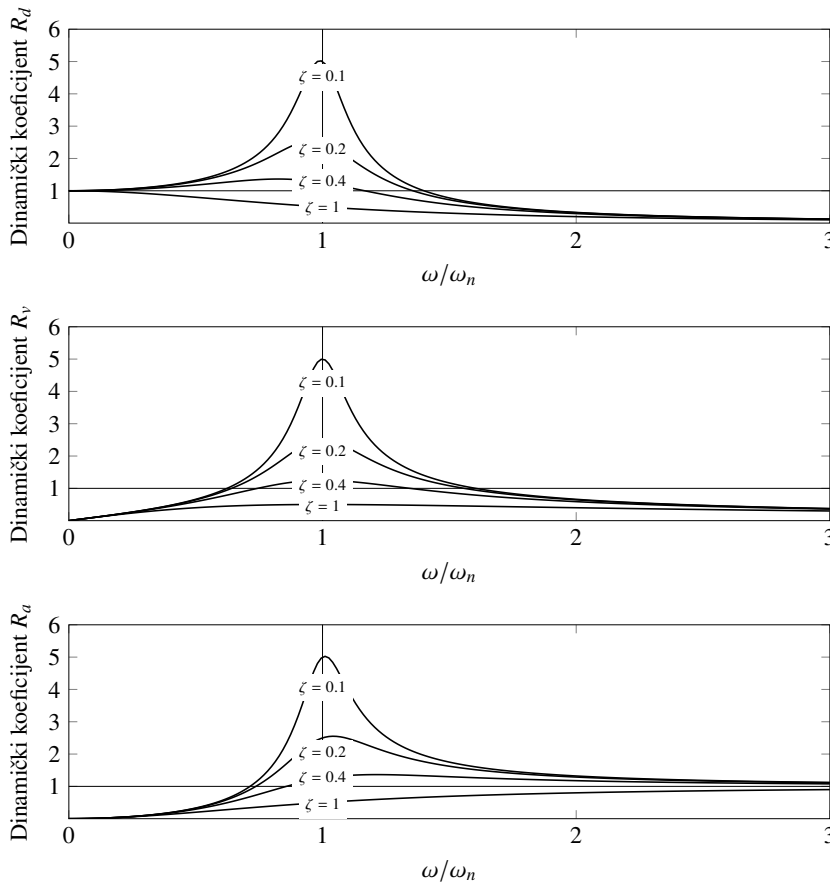
$$\frac{\dot{u}(0)}{p_0/\sqrt{km}} = R_v = \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) R_d \quad (1.85)$$

Analogno tome, dobije se i dinamički faktor ubrzanja koji glasi:

$$\frac{\ddot{u}(t)}{p_0/m} = -R_a = -\frac{\omega}{\omega_n} R_v = -\left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 R_d \quad (1.86)$$

Gdje je:

R_a Dinamički koeficijent ubrzanja



Slika 1.9: Dinamički faktori pomaka, brzine i ubrzanja za različite vrijednosti ζ

Iz (1.85) i (1.86) slijedi da su dinamički koeficijenti pomaka, brzine i ubrzanja u odnosu. Navedeni odnos je prikazan je slijedećom jednadžbom.

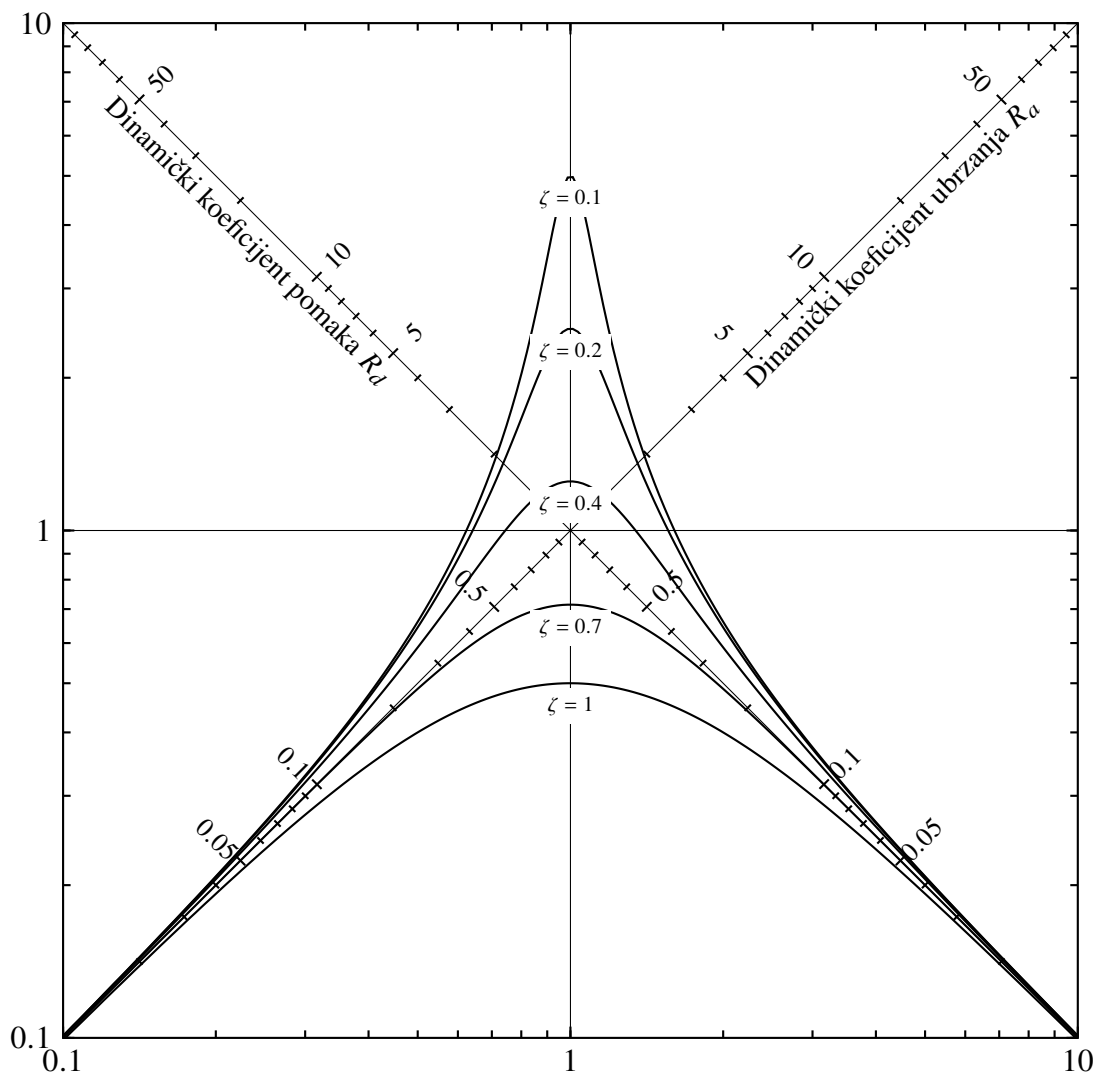
$$\frac{R_a}{\omega/\omega_n} = R_v = \frac{\omega}{\omega_n} R_d \quad (1.87)$$

Iz navedene jednadžbe slijedi da je poznavanjem jedne od veličina R_d , R_v ili R_a moguće dobiti preostale dvije. Zbog toga što postoji odnos između dinamičkih koeficijenata pomaka,

brzine i ubrzanja opisan jednađbom (1.87), moguće je sve tri navedene veličine prikazati u jednom grafu.

Takav graf se sastoji od četiri logaritamske skale:

1. horizontalne logaritamske skale koja prikazuje omjer frekvencije pobude i prirodne frekvencije sustava
2. vertikalne logaritamske skale koja prikazuje *dinamički koeficijent brzine* R_d
3. modificirane logaritamske skale nagnute pod kutem od $+45^\circ$ koja prikazuje *dinamički koeficijent ubrzanja* R_a
4. modificirane logaritamske skale nagnute pod kutem od -45° koja prikazuje *dinamički koeficijent pomaka* R_d



Slika 1.10: Dinamički faktori pomaka, brzine i ubrzanja u logaritamskom mjerilu

1.5 Rezonanca

Rezonanca je pojava koja se javlja prilikom pobude rezonantnom frekvencijom. Rezonantna frekvencija je ona frekvencija pobude za koju će dinamički koeficijent odziva biti maksimalan.

1.5.1 Rezonanca sustava s prigušenjem

Razmatranjem krivulja frekvencijskih funkcija odziva sa slike 1.9, možemo uočiti da jedino maksimumi krivulja R_v padaju na vertikalni pravac $\omega/\omega_n = 1$. Isto tako, vidljivo je da maksimalni R_d pada ulijevo od navedenog pravca a maksimalni R_a udesno. To znači da će se rezonantne frekvencije dinamičkih faktora (R_d , R_v i R_a) međusobno razlikovati te da će rezonantne frekvencije dinamičkih faktora R_d i R_a biti različite od prirodne frekvencije sustava.

Rezonantne frekvencije za pojedini spektar možemo odrediti deriviranjem frekvencijske funkcije odziva po ω/ω_n te izjednačavanjem prve derivacije s nulom.

$$R_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta(\omega/\omega_n))^2}}$$

Uvodi se supstitucija $x = \omega/\omega_n$

$$R_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + (2\zeta x)^2}}$$

Deriviranjem po x dobijemo:

$$\frac{dR_d}{dx} = -\frac{2x^3 + (4\zeta^2 - 2)x}{\sqrt{((1 - x^2)^2 + (2\zeta x)^2)^3}}$$

Lokalni ekstrem (maksimum) dobijemo izjednačavanjem prve derivacije s nulom, odnosno:

$$-\frac{2x^3 + (4\zeta^2 - 2)x}{\sqrt{((1 - x^2)^2 + (2\zeta x)^2)^3}} = 0$$

Da bi razlomak bio jednak nula izraz u brojniku mora biti jednak nula. Izjednačavanjem brojnika s nulom dobijemo slijedeću jednadžbu:

$$2x^3 + (4\zeta^2 - 2)x = 0$$

$$x^2 = 1 - 2\zeta^2$$

$$x = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \text{Uz } \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Uvrštavanjem ω/ω_n dobijemo izraz za rezonantnu frekvenciju pomaka:

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \tag{1.88}$$

Analogno tome dobiju se izrazi za rezonantne frekvencije brzine i ubrzanja.

$$\text{Rezonantna frekvencija pomaka} \quad \omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (1.89)$$

$$\text{Rezonantna frekvencija brzine} \quad \omega = \omega_n \quad (1.90)$$

$$\text{Rezonantna frekvencija ubrzanja} \quad \omega = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}} \quad (1.91)$$

Zbog jednostavnosti, karakteristike odziva prigušenog sustava s jednim stupnjem slobode u rezonanci, razmotriti ćemo za slučaj $\omega = \omega_n$ uz homogene početne uvjete. Iako se rezonantna frekvencija pomaka ne podudara s prirodnom frekvencijom sustava, navedene vrijednosti su vrlo bliske za mali ζ . Vremenska funkcija pomaka prigušenog sustava prikazana jednadžbom (1.24)

Uz homogene početne uvjete i za $\omega = \omega_n$, koeficijenti A, B, C , i D glase:

$$C = 0 \quad (1.92)$$

$$D = -\frac{(u_{st})_0}{2\zeta} \quad (1.93)$$

$$A = -D = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta} \quad (1.94)$$

$$B = -\frac{D\sigma}{\omega_D} - \frac{C\omega}{\omega_D} = \frac{(u_{st})_0}{2\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (1.95)$$

Uvrštavanjem (1.94), (1.95), (1.92) i (1.23) u (1.24) te sređivanjem dobijemo:

$$u(t) = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta} \left[e^{-\sigma t} \left(\cos(\omega_D t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_D t) \right) - \cos(\omega_n t) \right] \quad (1.96)$$

Iz navedene jednadžbe proizlazi da je amplituda odziva ograničena na vrijednost (uočimo da je odziv sustava kontroliran prigušenjem):

$$u_0 = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta} \quad (1.97)$$

Za malu vrijednost ζ , vrijedi $\omega_n \approx \omega_D$ te je član $\sin(\omega_D t) \approx 0$. Stoga jednadžba pod (1.96) postaje:

$$u(t) \simeq \frac{(u_{st})_0}{2\zeta} \underbrace{[(e^{-\sigma t} - 1) \cos(\omega_n t)]}_{\text{Krivulja ovojnice}} \quad (1.98)$$

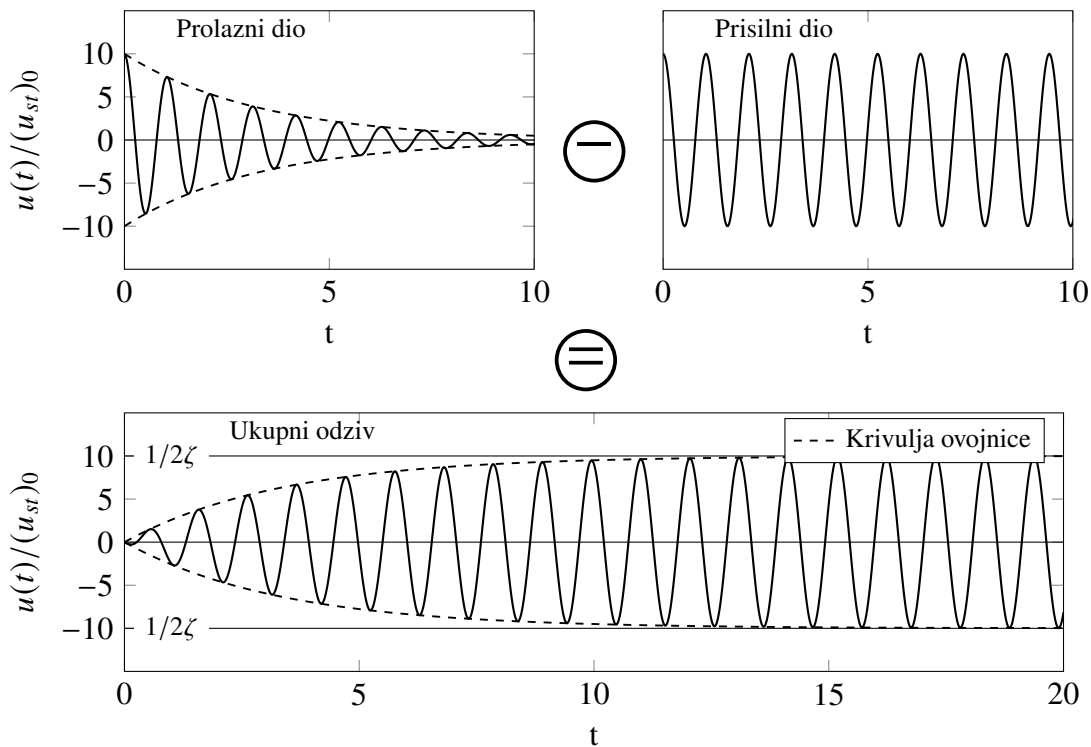
Iz jednadžbe (1.98) može se zaključiti da i za slučaj rezonance postoji prolazni i prisilni dio odziva, a ukupni odziv je razlika između prolaznog i prisilnog djela. Prolazni dio odziva opisan je jednadžbom

$$e^{-\sigma t} \cos(\omega_n t)$$

a prisilni:

$$\cos(\omega_n t)$$

Za $t = 0$ prolazni dio je maksimalan te je ukupni odziv jednak nuli. U ovisnosti o vremenu, prolazni dio se smanjuje eksponencijalno prema zakonu $e^{-\sigma t}$. Kako se prolazni dio smanjuje a prisilni ostaje isti $((u_{st})_0/2\zeta)$ tako raste njihova razlika. Rastom razlike dolazi do rasta amplitude odziva, te iščezavanjem prolaznog dijela preostaje samo prisilni te se dostiže maksimalna amplituda koja je jednaka $((u_{st})_0/2\zeta)$. Bitno je za naglasiti da u teoretskom modelu prolazni dio odziva iščezava tek za $t = \infty$, tj. asimptotski se približava nuli, ali u realnosti prolazni dio odziva je zanemariv nakon određenog vremena. Shematski prikaz dostizanja prisilnog stanja prikazan je na slijedećoj slici:



Slika 1.11: Odziv prigušenog sustava na pobudu rezonantnom frekvencijom

O prigušenju u rezonanci ovise slijedeći parametri odziva:

- brzina dostizanje ustaljenog stanja (maksimalne amplitude) - brzina dostizanja ustaljenog stanja raste proporcionalno s prigušenjem (veće prigušenje \rightarrow strmija krivulja ovojnice \rightarrow brže dostizanje ustaljenog stanja).
- vrijednost maksimalne amplitude - obrnuto proporcionalna od vrijednosti prigušenja, definirana izrazom (1.97). (veće prigušenje, manja maksimalna amplituda, vidljivo i u frekvencijskim funkcijama odziva)

Određivanje broja titraja koji je potreban za dostizanje ustaljenog stanja vrši se pomoću funkcije koja opisuje krivulju ovojnice. Pretpostavka je da ekstrem nastupa nakon j titraja (j

je prirodni broj), a vrijeme nastupa minimuma je $t = 2\pi j/\omega$.

$$u\left(\frac{2\pi j}{\omega_n}\right) \approx u_0(e^{-\zeta\omega_n \frac{2\pi j}{\omega_n}} - 1) \cos\left(\omega_n \frac{2\pi j}{\omega_n}\right) \quad (1.99)$$

Gdje je:

j redni broj titraja
 $u_0 = (u_{st})_0/2\zeta$ maksimalna amplituda

Kako se radi o ekstremnoj vrijednosti, funkcija kosinus iznosi ± 1 pa jednačba pod (1.99) glasi:

$$u\left(\frac{2\pi j}{\omega_n}\right) = u_j = \pm u_0(e^{-2\pi\zeta j} - 1) \quad (1.100)$$

Za maksimume jednačba pod (1.100) postaje

$$|u_j| = -u_0(e^{-2\pi\zeta j} - 1) = u_0(1 - e^{-2\pi\zeta j}) \quad (1.101)$$

Za relativne vrijednosti³:

$$u[j] = \frac{|u_j|}{u_0} = 1 - e^{-2j\zeta\pi} \quad (1.102)$$

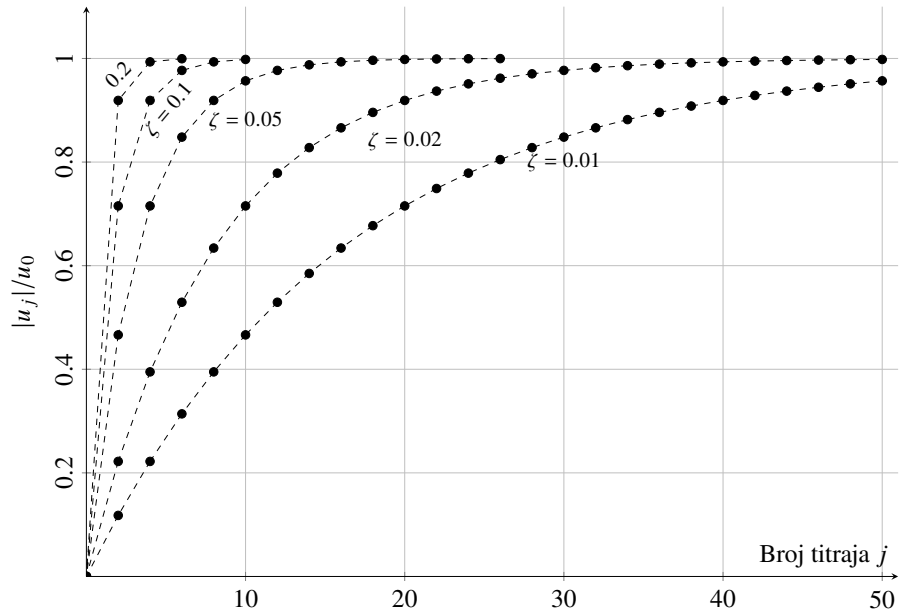
Izraz ima smisla samo za diskretne vrijednosti argumenta j , odnosno za $j \in \mathbb{N}$.

ζ	j
0.01	48
0.02	24
0.05	10
0.1	5
0.2	3

Tablica 1.1:

Očitavanje

s grafa



Slika 1.12: Ovisnost amplitude odziva o broju titraja u rezonanci

Uočimo da je uz slabije prigušenje potrebno više titraja za dostizanje ustaljenog stanja odnosno maksimalne amplitude. Očitavanja vrijednosti sa grafa prikazana su u 1.1.

³Postotci od maksimalne amplitude

1.5.2 Rezonanca sustava bez prigušenja

Za sustav bez prigušenja, rezonantne frekvencije za R_d , R_v i R_a jednake su prirodnoj frekvenciji sustava što se dobije uvrštavanjem $\zeta = 0$ u (1.89) i (1.91).

Primjetimo da je maksimalni dinamički koeficijent R_d (za $\omega/\omega_n = 1$) neograničen, tj $R_d \rightarrow \infty$ što se vidi i u jednadžbi (1.78) te na grafu 1.8. U slijedećoj jednadžbi prikazana je vremenska funkcija pomaka sustava za homogene početne uvjete:

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)} \left(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \quad (1.103)$$

Uočimo da za $\omega = \omega_n$ navedena jednadžba više ne vrijedi (djeljenje s nulom). Novu jednadžbu možemo odrediti na slijedeći način:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_n} u(t) = \frac{p}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \left(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \quad (1.104)$$

Navedeni limes je oblika $\frac{0}{0}$, pa ga je moguće riješiti L'Hopitalovim pravilom. Deriviranjem funkcije po ω dobijemo:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \frac{d}{d\omega} u(t) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \left[\frac{p_0}{k} \frac{1}{-2(\omega/\omega_n)} \left(t \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega} \sin(\omega_n t) \right) \right] \quad (1.105)$$

Uvrštavanjem $\omega = \omega_n$ dobijemo:

$$u(t) = -\frac{1}{2} \frac{p_0}{k} (\omega_n \cos(\omega_n t) - \sin(\omega_n t)) \quad (1.106)$$

Iz navedene jednadžbe vidljivo je da usprkos neograničenom dinamičkom faktoru neizmjereno velika amplituda ne nastupa trenutno, već dolazi do njezinog postupnog rasta. Djeljenjem izraza (1.106) statičkim pomakom i uvrštavanjem $\omega_n = \frac{2\pi}{T_n}$ dobijemo:

$$\frac{u(t)}{(u_{st})_0} = -\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi t}{T_n} \cos\left(\frac{2\pi t}{T_n}\right) - \sin\left(\frac{2\pi t}{T_n}\right) \right) \quad (1.107)$$

Gdje je:

T_n period titranja

Iz prethodne jednadžbe slijedi da ekstremi nastupaju svaki poluperiod ($T_n/2$), pri čemu prvo nastupa maksimum a zatim minimum. Vrijeme nastupa ekstrema za određeni redni broj titraja prikazuju slijedeće jednadžbe:

- za maksimum: $t = (i - \frac{1}{2})T_n$
- za minimum: $t = jT_n$

Gdje je:

t vrijeme nastupa ekstrema

i redni broj titraja

Iznos ekstrema određujemo uvrštavanjem vremena nastupa ekstrema u jednadžbu (1.107) te slijedi:

1. iznos maksimuma za j -ti titraj: $u_j = (u_{st})_0 \pi (j - \frac{1}{2})$

2. iznos minimuma za j -ti titraj: $u_j = -(u_{st})_0 \pi \cdot j$

Prirast maksimuma određujemo razlikom između iznosa maksimuma trenutnog i slijedećeg titraja što prikazuje slijedeća jednadžba:

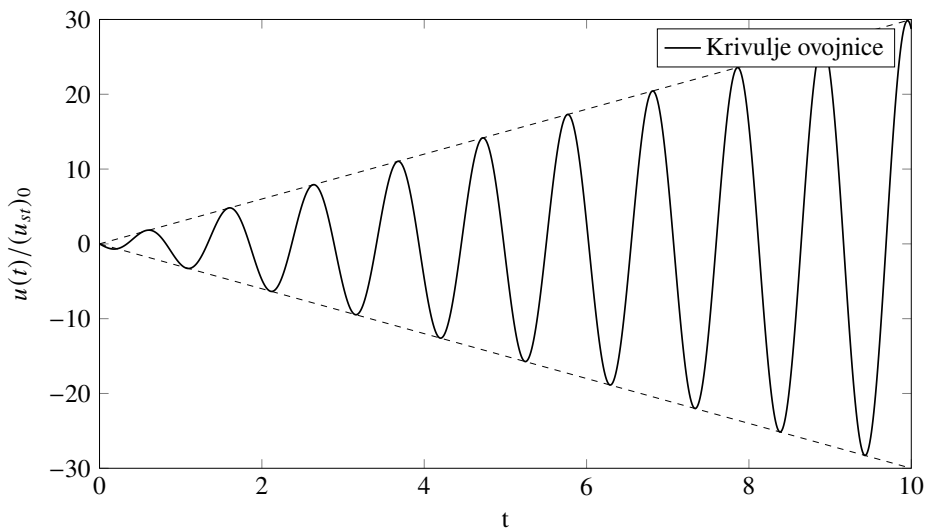
$$\begin{aligned} |u_{j+1}| - |u_j| &= (u_{st})_0 \pi ((j+1) - \frac{1}{2}) - (u_{st})_0 \pi (j - \frac{1}{2}) \\ |u_{j+1}| - |u_j| &= \frac{p_0}{k} \pi \end{aligned} \quad (1.108)$$

Analogno tome određuje se i prirast minimuma koji glasi:

$$\begin{aligned} u_{j+1} - u_j &= -(u_{st})_0 \pi (j+1) - (-(u_{st})_0 \pi j) \\ u_{j+1} - u_j &= -\frac{p_0}{k} \pi \end{aligned} \quad (1.109)$$

Uočimo da su prirasti ekstrema linearni, stoga krivulju ovojnice čine pravci čiji su koeficijenti smjera prikazani u nastavku:

$$k_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \frac{p_0}{k} \omega_n \quad (1.110)$$

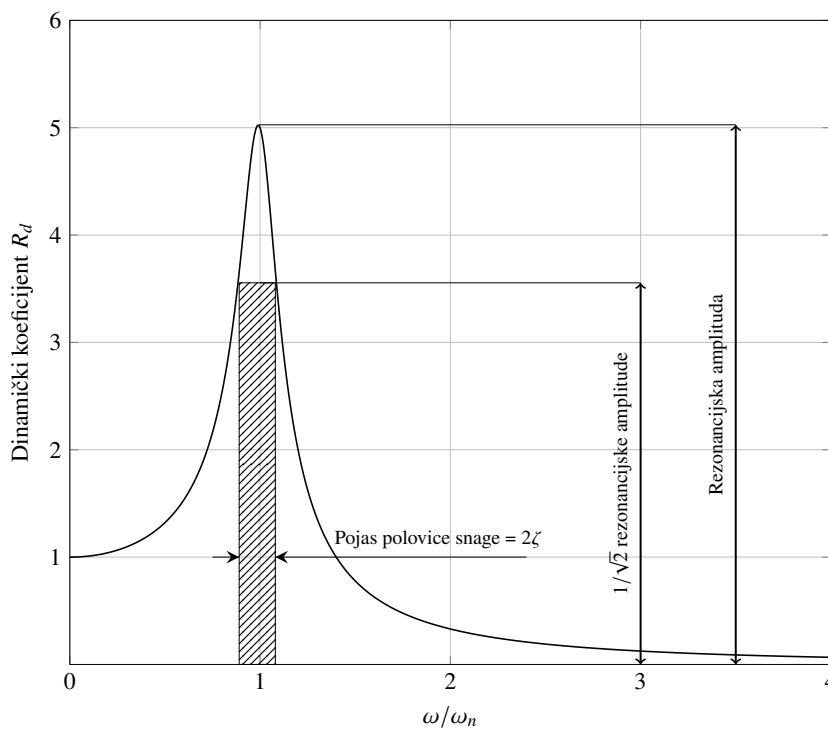


Slika 1.13: Rezonanca neprigusenog sustava

1.5.3 Analiza područja rezonance

Osim rezonantne frekvencije potrebno je odrediti i pojas polovice snage vrha frekvencijske funkcije odziva, koji je prikazan na slici 1.14. Pojas polovice snage vrha frekvencijske funkcije odziva bitan je iz dva razloga:

1. osim pobude rezonantnom frekvencijom, opasne su i pobude frekvencijama iz njezinog okoliša. Navedeni okoliš definiran je pojasom polovice snage.
2. Zbog praktične primjene - pojas polovice snage koristi se u pokusima za određivanje stupnja prigušenja konstrukcija



Slika 1.14: Definicija pojasa polovice snage

Dinamički faktor pomaka R_d za odziv dvostruko manje snage od odziva maksimalnog dinamičkog faktora računa se prema slijedećoj relaciji:

$$R_d = \frac{1}{\sqrt{2}} R_d^{max} \quad (1.111)$$

Sa slike je vidljivo da je dinamički faktor R_d iz (1.111) definiran za dvije vrijednosti frekvencije pobude: ω_a i ω_b . Raspisivanjem jednadžbe pod (1.111) dobijemo:

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (1.112)$$

Kvadriranjem (1.112) dobijemo:

$$\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = 8\zeta^2(1 - \zeta^2) \quad (1.113)$$

Raspisivanjem i grupiranjem po ω/ω_n dobijemo:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4 - 2(1 - 2\zeta^2) \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 1 - 8\zeta^2(1 - \zeta^2) = 0 \quad (1.114)$$

Izraz (1.114) je kvadratna jednadžba, a njezinim rješavanjem (po ω/ω_n) dobijemo:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = (1 - 2\zeta^2) \pm 2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (1.115)$$

Za $\zeta^2 \approx 0$ izraz (1.115) postaje:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \approx 1 \pm 2\zeta \quad (1.116)$$

Odnosno:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \approx \sqrt{1 \pm 2\zeta} \quad (1.117)$$

Jednadžba (??), nakon aproksimacije korijena s prva dva člana Taylorovog reda glasi:

$$\frac{\omega}{\omega_n} = 1 \pm \zeta \quad (1.118)$$

Frekvencije ω_a i ω_b dobiju se iz (1.118):

$$\omega_a = (1 - \zeta)\omega_n \quad (1.119)$$

$$\omega_b = (1 + \zeta)\omega_n \quad (1.120)$$

$$(1.121)$$

Oduzimanjem $\omega_b - \omega_a$ dobijemo:

$$2\zeta = \frac{\omega_b - \omega_a}{\omega_n} \quad (1.122)$$

Te konačno, dijeljenjem brojnika i nazivnika s 2π :

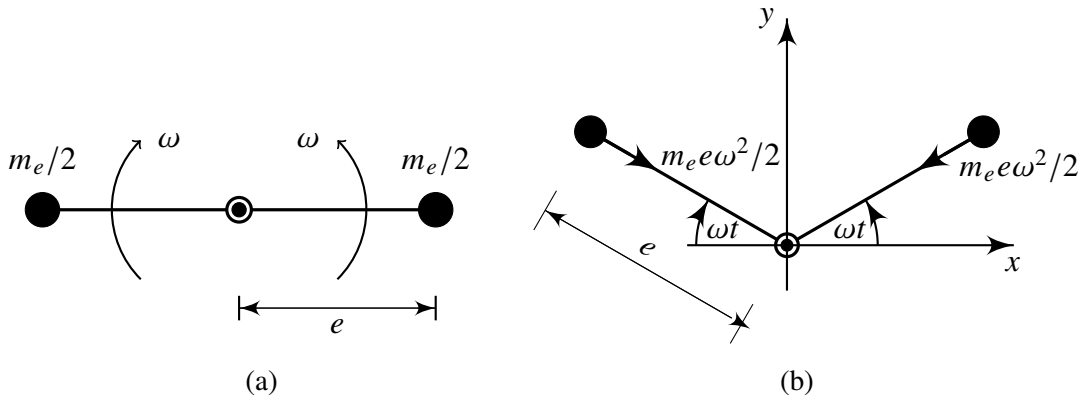
$$\zeta \approx \frac{f_b - f_a}{2f_n} \quad (1.123)$$

Gdje je $f = \omega/2\pi$ kružna frekvencija. Jednadžbe pod (1.122) i (1.123) bitne su jer omogućuju određivanje koeficijenta relativnog prigušenja ζ bez potrebe za poznavanjem intenziteta sile pobude.

1.5.4 Praktična primjena matematičkog modela

Definiranjem matematičkog modela prigušenog sustava s jednim stupnjem slobode, pobuđenog sinusnom silom postavljeni su temelji za eksperimentalno određivanje stupnja prigušenja i prirodne frekvencije. Stupanj prigušenja jest veličina od izuzetne praktične važnosti, a nije ga moguće odrediti teoretski iz projektnih parametara, već se mora odrediti eksperimentalno. Ispitivanje koje će biti razmatrano u ovome radu naziva se *rezonancijski pokus*.

Ispitivanja se provode *vibracijskim uređajem*. Vibracijski uređaj se sastoji od dvije košare sa utezima na uspravnoj osovinu koje rotiraju u suprotnim smjerovima konstantnom kutnom brzinom ω . Osovina je pričvršćena za metalnu ploču koja se kruto povezuje s građevinom.



Slika 1.15: Shematski prikaz vibracijskog uređaja: (a) u inicijalnom položaju; (b) položaj nakon vremena t

Sila pobude građevine jest ukupna centrifugalna sila vibracijskog uređaja, koja je jednaka je sumi centrifugalnih sila pojedinih masa. Horizontalne komponente su jednakog intenziteta ali suprotnog smjera pa se poništavaju, stoga sila pobude je jednaka sumi vertikalnih komponenti, odnosno:

$$p(t) = (m_e e \omega^2) \sin(\omega t) \quad (1.124)$$

Odziv sustava s jednim stupnjem slobode na pobudu vibracijskim uređajem opisan je slijedećom diferencijalnom jednačbom:

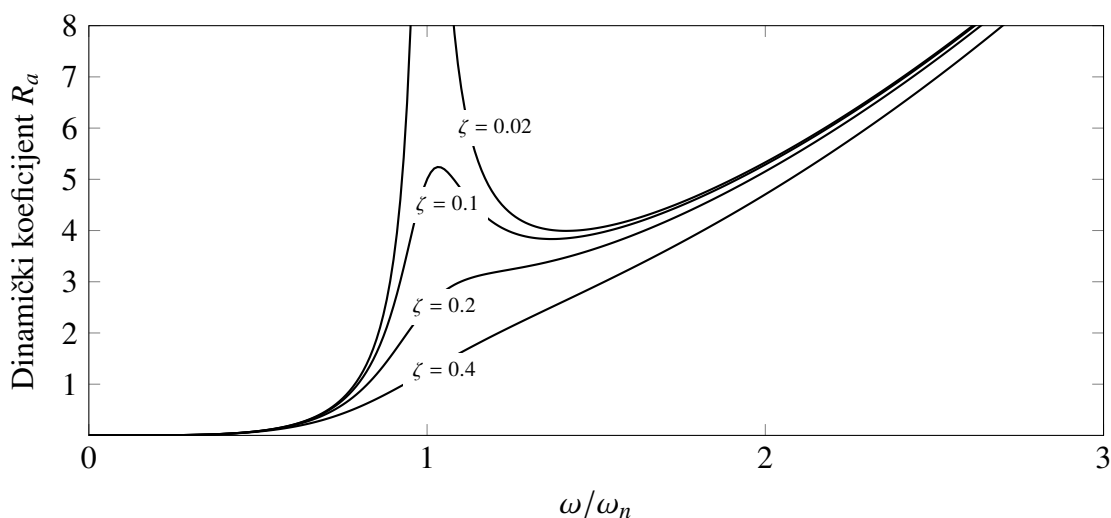
$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = (m_e e \omega^2) \sin(\omega t) \quad (1.125)$$

Amplituda prisilnog pomaka glasi (iz (1.75)):

$$u_0 = \frac{m_e e}{k} \omega^2 R_d = \frac{m_e e}{m} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 R_d \quad (1.126)$$

Amplituda prisilnog ubrzanja (iz (1.86))

$$\ddot{u}_0 = \frac{m_e e}{m} \omega^2 R_a = \frac{m_e e \omega_n^2}{m} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 R_a \quad (1.127)$$



Slika 1.16: Amplituda ubrzanja u ovisnosti o omjeru frekvencija

Na grafu sa slike 1.16 vidljivo je da daljnjim porastom frekvencije pobude (iznad prirodne frekvencije) amplituda prisilnog ubrzanja raste. Navedeni rast se događa jer je amplituda pobude proporcionalna s ω^2 .

Za određivanje stupnja prigušenja i prirodne frekvencije vrši se *rezonancijski pokus*, a temelji se na slijedećoj relaciji (iz (1.81))

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{(u_{st})_0}{(u_0)_{\omega=\omega_n}} \quad (1.128)$$

Potrebno je eksperimentalno odrediti amplitudu statičkog pomaka i prirodnu frekvenciju.

Prirodna frekvencija se određuje na slijedeći način:

1. pobuđivanje konstrukcije vibracijskim uređajem namještenim na određenu frekvenciju ω .
2. očitavanje faznog kuta. Ako je fazni kut $\phi = 90^\circ$, tada je prirodna frekvencija ω_n jednaka frekvenciji pobude ω .
3. nakon što isčezne prolazni dio odziva, očitava se amplituda prisilnog ubrzanja

Amplitudu prisilnog pomaka možemo dobiti iz amplitude prisilnog ubrzanja korištenjem slijedeće formule:

$$u_0 = \frac{(\ddot{u}_0)_{\omega=\omega_n}}{(\omega^2)_{\omega=\omega_n}} \quad \text{jer je} \quad \ddot{u}(t) = -u_0 \omega \sin(\omega t - \phi), \quad (1.129)$$

Da bi bilo moguće odrediti prigušenje sustava prema formuli (1.128) potrebno je odrediti amplitudu statičkog pomaka $(u_{st})_0 = p_{0,max}/k$, gdje je $p_{0,max}$ amplituda pobude u rezonanci. Amplituda statičkog pomaka se **mora** odrediti pokusom, a ne izračunati prema relaciji p_0/k zato što k nije eksperimentalno određen. Vibracijskim uređajem je vrlo teško (ili nemoguće) prouzročiti veliku **statičku** silu pobude. Dva su pristupa rješavanju navedenog problema:

-
1. Sporim rotiranjem velikih masa - Nije najbolje rješenje jer je sila pobude proporcionalna s kvadratom kutne brzine rotacije utega. Stoga i za velike mase utega amplituda sile pobude je relativno mala.
 2. Povlačenjem konstrukcije užetom silom koja je jednaka amplitudi sile pobude vibracijskim uređajem $p_{0,max}$.

Osim rezonancijskim pokusom, prigušenje i prirodnu frekvenciju moguće je odrediti **frekvencijskim krivuljama odziva**. Postupak je slijedeći:

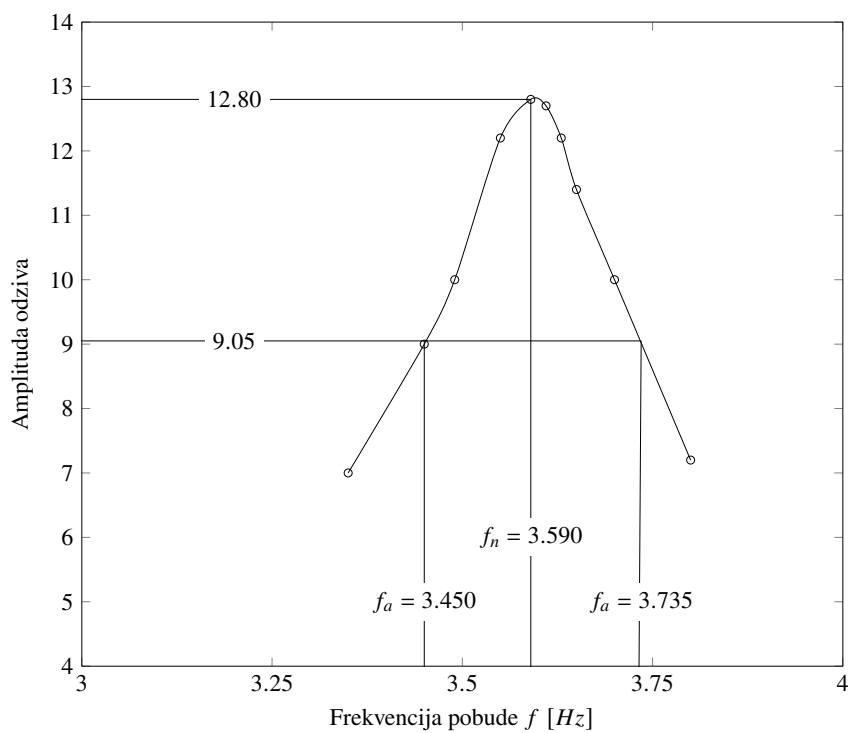
1. pobuđivanje konstrukcije vibracijskim uređajem namještenim na određenu frekvenciju
2. određivanje amplitude **prisilnog** dijela
3. namještanje vibracijskog uređaja na drugu frekvenciju, te ponavljanje postupka⁴

Frekvencijska krivulja odziva iscrtava se iz izmjerenih podataka. Frekvencijske funkcije odziva mogu prikazivati slijedeće ovisnosti:

1. ovisnost amplituda ubrzanja o frekvencijskom omjeru - izravno iz izmjerenih podataka. Bitno je za naglasiti da je navedena krivulja proporcionalna s ω^2 .
2. ovisnost dinamičkog faktora ubrzanja o frekvencijskom omjeru (konstantna amplituda pobude) - dijeljenjem izmjerenih podataka s ω^2
3. ovisnost dinamičkog faktora pomaka o frekvencijskom omjeru (konstantna amplituda pobude) - dijeljenjem izmjerenih podataka s ω^4 .

Stupanj prigušenja i prirodna frekvencija može se odrediti iz bilo koje od navedenih krivulja. Prirodna frekvencija jednaka je frekvenciji sile pobude u rezonanci. Stupanj prigušenja određuje se iz *pojasa polovice snage* jednadžbom (1.123), što znači da je potrebno odrediti amplitudu odziva pri rezonanci te frekvencije za koje je amplituda odziva jednaka $r_{res}/\sqrt{2}$.

⁴Frekvencije vibracijskog uređaja nalaze se u širem spektru frekvencija, koji uključuje rezonantnu frekvenciju i frekvencije iz njezine okoline (i lijevo i desno).



Slika 1.17: Frekvencijska funkcija odziva konstruirana pomoću mjerenih podataka

2 Sustavi s više stupnjeva slobode

2.1 Jednadžba gibanja slobodnih oscilacija

Općenito, sustavi s više stupnjeva slobode modelirani su kao N etažni posmični okviri. Takavi sustavi se sastoje od N koncentriranih masa, što znači da je potrebno pratiti N različitih pomaka. Drugim riječima, jednadžba gibanja takvog sustava biti će zadana kao sustav od N diferencijalnih jednadžbi drugog reda.

Sustav s više stupnjeva slobode, koji će biti razmatran u ovom radu, je dvoetažni posmični okvir prikazan na slijedećoj slici, a osnovni pojmovi biti će objašnjeni pomoću slobodnih oscilacija navedenog modela.

ubaci sliku sustava i ekvivalentnog modela

Sustavi sa slike imaju dva dinamička stupnja slobode jer su moguće dvije translacije dviju različitih masa, pa jednadžbu gibanja opisuje sustav od dvije diferencijelne jednadžbe drugog reda.

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2u_2 = 0 \\ m\ddot{u}_2 - k_2u_1 + k_2u_2 = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Zapisano u matričnoj formi:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Odnosno

$$\mathbf{m}\{\ddot{u}\} + \mathbf{k}\{u\} = \{0\} \quad (2.3)$$

Iz (2.1) i (2.2) vidi se da je sustav diferencijalnih jednadžbi povezan preko krutosti odnosno matrice krutosti. Opći oblik rješenja sustava je slijedeći:

$$\{u(t)\} = \{\psi\}q(t) \quad (2.4)$$

Vektor ψ možemo shvatiti kao konstantu integracije, a funkcija $q(t)$ je jednostavna harmonijska funkcija oblika:

$$q(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (2.5)$$

Druga derivacija (2.5) jest:

$$\ddot{q}(t) = -\omega^2 \underbrace{(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))}_{q(t)} = -\omega^2 q(t) \quad (2.6)$$

Stoga, druga derivacija od (2.4) glasi:

$$\{\ddot{u}\} = -\omega^2 q(t) \{\psi\} \quad (2.7)$$

Uvrštavanjem (2.4) i (2.7) u (2.3) dobijemo:

$$(\{\psi\}\mathbf{k} - \omega^2\{\psi\}\mathbf{m})q(t) = \{0\} \quad (2.8)$$

Prvo trivijalno rješenje je za $q(t) = 0$ što implicira da je $u(t) = 0$ (sustav miruje). Netrivijalno rješenje se dobije izjednačavanjem zgrade s nulom:

$$\mathbf{k}\{\psi\} = \omega^2\mathbf{m}\{\psi\} \quad (2.9)$$

Izraz (2.9) predstavlja realni problem vlastitih vrijednosti odnosno matični problem vlastitih vrijednosti. Potrebno je odrediti dvije nepoznanice:

1. vlastite vektore ψ
2. vlastite skalare ω^2

Prebacivanjem nepoznanica na jednu stranu dobijemo

$$(\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m})\{\psi\} = \{0\} \quad (2.10)$$

U općenitom slučaju, izraz (2.10) predstavlja sustav od N algebarskih jednadžbi s N nepoznanica. Trivijalno rješenje sustava je za $\{\psi\} = 0$, a netrivialno se određuje raspisom determinante matrice $[[k] - \omega^2[m]]$. Raspisom determinante navedene matrice, dobije se polinom N -tog stupnja kojeg nazivamo *karakterističnim polinomom*. Nultočke polinoma predstavljaju vlastite vrijednosti ω^2 , odnosno kvadrirane prirodne frekvencije. Da bi nultočke polinoma bile realne pozitivne vrijednosti, matrice $[m]$ i $[k]$ moraju biti simetrične i pozitivno definitne. Uvjeti za pozitivnu definitnost u građevinarstvu su slijedeći:

1. za matricu \mathbf{k} - broj i raspored ležajeva u ispravnoj mreži mora biti takav da se spriječe pomaci krutog tijela
2. za matricu \mathbf{m} - moraju se ukloniti stupnjevi slobode bez pridružene koncentrirane mase. Uklanjanje nepotrebnih stupnjeva slobode, vrši se statičkom kondenzacijom.

Vlastiti vektori ψ se određuju uvrštavanjem vrijednosti ω^2 u matricu $[k - \omega^2 m]$, stoga je očito da vektori ψ nisu jedinstveni jer i njihovi višekratnici zadovoljavaju jednadžbu (2.10). Vektori ψ nazivaju se *modalnim vektorima*, a definiraju oblik titranja sustava na frekvenciji ω . Prvi modalni vektor ψ_1 , naziva se temeljnim (osnovnim) modom, a frekvencija na kojoj sustav titra u navedenom modu (ω_1) naziva se *vlastitom frekvencijom temeljnog moda*.

Ako su sve prirodne frekvencije različite od nula i međusobno različite, tada su svi vlastiti vektori linearno nezavisni. Skup od n linearno nezavisnih vektora čini bazu n -dimenzionalnog vektorskog prostora, pa je ukupno rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi linearna kombinacija svih pojedinačnih rješenja.

$$\{u(t)\} = \sum_{n=1}^N \{\psi\}_n q_n \quad (2.11)$$

Pri čemu je q_n :

$$q_n = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \quad (2.12)$$

Raspisivanjem (2.11) dobivamo:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} &= q_1(t) \begin{Bmatrix} \psi_{1,1} \\ \psi_{2,1} \\ \vdots \\ \psi_{N,1} \end{Bmatrix} + q_2(t) \begin{Bmatrix} \psi_{1,2} \\ \psi_{2,2} \\ \vdots \\ \psi_{N,2} \end{Bmatrix} + \dots + q_N(t) \begin{Bmatrix} \psi_{1,N} \\ \psi_{2,N} \\ \vdots \\ \psi_{N,N} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_1(t)\psi_{1,1} + q_2(t)\psi_{1,2} + q_N(t)\psi_{1,N} \\ q_1(t)\psi_{2,1} + q_2(t)\psi_{2,2} + q_N(t)\psi_{2,N} \\ \vdots \\ q_1(t)\psi_{N,1} + q_2(t)\psi_{N,2} + q_N(t)\psi_{N,N} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_{1,1} & \psi_{1,2} & \dots & \psi_{1,N} \\ \psi_{2,1} & \psi_{2,2} & \dots & \psi_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{N,1} & \psi_{N,2} & \dots & \psi_{N,N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Psi}} \underbrace{\begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{Bmatrix}}_{\vec{q}} \end{aligned}$$

Matricu $\mathbf{\Psi}$ nazivamo modalna matrica, a komponente vektora q nazivaju se modalne koordinate. Opće rješenje pod (2.11) sada možemo zapisati matrično kao:

$$\{u(t)\} = \mathbf{\Psi}\{q\} \quad (2.13)$$

Osim modalne matrice postoji i spektralna matrica ($N \times N$) koja se sastoji od N svojstvenih vrijednosti ω^2 .

$$\mathbf{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

Za slučaj sustava s dva stupnja slobode, definiranog sustavom diferencijalnih jednadžbi pod (2.2), prirodne frekvencije ω_1^2 i ω_2^2 dobivene su rješavanjem kvadratne jednadžbe karakterističnog polinoma za ω^2 . Modalne vektore možemo zapisati kao:

$$\vec{\psi}_1 = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{k_1 + k_2 - \omega_1^2 m_1}{k_2} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\vec{\psi}_2 = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{k_1 + k_2 - \omega_2^2 m_1}{k_2} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Ukupno rješenje sustava jest linearna kombinacija slijedećih vektora:

$$\begin{cases} 1(t) = 1q_1(t) = 1(A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t)) \\ 2(t) = 2q_2(t) = 2(A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t)) \end{cases} \quad (2.16)$$

Stoga, ukupno opće rješenje glasi:

$$t) = 1(t) + 2(t) \quad (2.17)$$

Bitno je za napomenuti da modalni vektor ψ ne određuje maksimalne iznose ordinata već samo njihov relativni odnos, tj. modalni oblik ili oblik titranja. Da bismo dobili amplitude A_n i B_n , potrebno je riješiti inicijalni problem oblika $\{u(0)\} = \{u\}$ i $\{\dot{u}(0)\} = \{\dot{u}\}$. Za slučaj slobodnog titranja, konstante A_n i B_n glase:

$$A_n = u_n(0) \quad (2.18)$$

$$B_n = \frac{\dot{u}_n(0)}{\omega_n} \quad (2.19)$$

Shematski prikaz modova sustava s dva stupnja slobode prikazan je na slijedećoj slici.

2.2 Ortogonalnost modova

Kao što je već pokazano, modove (modalne oblike) definiraju vektori. Dva vektora su međusobno ortogonalna (okomita) ukoliko je njihov skalarni produkt jednak nuli. Razmotrimo li r -ti i n -ti mod sustava, dobijemo slijedeći sustav jednačbi (iz (2.3)):

$$\begin{cases} (\mathbf{k} - \omega_r^2 \mathbf{m})\{\psi\}_r = \{0\} \\ (\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m})\{\psi\}_n = \{0\} \end{cases} \quad (2.20)$$

Donju jednačbu pomnožimo s $\{\psi\}_r^T$. U gornjoj jednačbi prvo transponiramo $\{\psi\}_r$ te ju pomnožimo s $\{\psi\}_n$. Sustav jednačbi (2.20) postaje:

$$\begin{cases} \{\psi\}_r^T (\mathbf{k} - \omega_r^2 \mathbf{m})\{\psi\}_n = 0 \\ \{\psi\}_r^T (\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m})\{\psi\}_n = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Oduzimanjem gornje i donje jednačbe dobijemo:

$$(\omega_n^2 - \omega_r^2)\{\psi\}_r^T \mathbf{m}\{\psi\}_s = 0 \quad (2.22)$$

Za $\omega_n \neq \omega_r$ vrijedi:

$$\{\psi\}_r^T \mathbf{m}\{\psi\}_n = 0 \quad (2.23)$$

Uvrštavanjem $\{\psi\}_r^T \mathbf{m} \{\psi\}_n = 0$ u bilo koju od jednažbi iz (2.21) dobijemo:

$$\{\psi\}_r^T \mathbf{k} \{\psi\}_n = 0 \quad (2.24)$$

Jednažbe pod (2.23) i (2.24) govore da su modovi, pomnoženi težinskim koeficijentima iz matrice krutosti ili matrice masa, međusobno ortogonalni (valjda). Kažemo da su modovi međusobno ortogonalni s obzirom na matricu mase ili matricu krutosti (valjda).

Posljedica ortogonalnosti je dijagonalnost slijedećih pravokutnih matrica:

$$\text{Modalna krutost} \quad \mathbf{K} = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{k} \mathbf{\Psi} \quad (2.25)$$

$$\text{Modalna masa} \quad \mathbf{M} = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{m} \mathbf{\Psi} \quad (2.26)$$

Članovi matrica računaju se prema slijedećim formulama:

$$\text{Za modalnu krutost} \quad K_{n,n} = \{\psi\}_n^T k \{\psi\}_n \quad (2.27)$$

$$\text{Za modalnu masu} \quad M_{n,n} = \{\psi\}_n^T m \{\psi\}_n \quad (2.28)$$

Između elemenata matrica vrijedi slijedeći odnos:

$$\omega_n^2 = \frac{K_n}{M_n} \quad (2.29)$$

U matričnoj formi:

$$\mathbf{\Omega}^2 = \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1} \quad (2.30)$$

2.3 Normiranje modova

Modalni vektori nisu jedinstveni jer su jednako predstavljeni vektorima dobivenim rješenjem problema vlastitih vrijednosti i njihovim višekratnicima. Drugim riječima, modalni vektor predstavljen je familijom kolinearnih vektora jer vrijedi slijedeća jednakost (iz (2.9))

$$\mathbf{k}(a\{\psi\}_n) = \omega_n^2(a\{\psi\}_n)\mathbf{m}$$

$$a\mathbf{k}\{\psi\}_n = a\omega_n^2\{\psi\}_n\mathbf{m}$$

$$\mathbf{k}\{\psi\}_n = \omega_n^2\{\psi\}_n\mathbf{m}$$

Množenje vlastitog vektora skalarom, s ciljem postizanja željene forme modalnog vektora, naziva se normiranje modalnog vektora odnosno moda. Primjerice, željena forma modalnog vektora može biti vektor čiji je najveći element jedan:

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Množenjem vektora s $4/3$ dobijemo:

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Od posebnog značaja je normiranje modalne mase na jediničnu vrijednost. Kako je $\{\psi\}_n^T \mathbf{m} \{\psi\}_n = \mathbf{M}_{n,n}$, mod $\{\psi\}_n$ potrebno je množiti sa $(\mathbf{M}_{n,n})^{-1/2}$, odnosno:

$$\{\psi\}_n^N = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{M}_{n,n}}} \{\psi\}_n \quad (2.31)$$

Gdje je $\{\psi\}_n^N$ normirani vektor n -tog moda. Jednadžba (2.31) zapisana u matričnoj formi glasi:

$$\Psi_n^N = \Psi \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \quad (2.32)$$

Vrijedi slijedeća relacija:

$$\mathbf{M}_{n,n} = \left(\{\psi\}_n^N \right)^T \mathbf{m} \{\psi\}_n^N = 1 \quad (2.33)$$

Odnosno u matričnom obliku:

$$\left(\Psi^N \right)^T \mathbf{m} \Psi^N = \mathbf{I} \quad (2.34)$$

Gdje je \mathbf{I} jedinična matrica. Iz (2.27) slijedi:

$$\begin{aligned} \left(\Psi^N \right)^T \mathbf{K} \Psi^N &= \Omega^2 \underbrace{\left(\Psi^N \right)^T \mathbf{M} \Psi^N}_{\mathbf{I}} \\ \left(\Psi^N \right)^T \mathbf{K} \Psi^N &= \Omega^2 \end{aligned}$$

2.4 Odziv sustava s više stupnjeva slobode na pobudu sinusnom silom

Kao što je pokazano u poglavlju 2.1, jednadžba gibanja sustava s N stupnjeva slobode zadana je kao sustav od N diferencijalnih jednadžbi drugog reda. U slučaju pobude harmonijskom silom, navedeni sustav će se sastojati od N nehomogenih diferencijalnih jednadžbi drugog reda, koje će biti povezane preko matrice krutosti i/ili matrice mase.

Općenito, rješenje jedne proizvoljne nehomogene diferencijalne jednadžbe drugog reda oblika $\alpha \ddot{y} + \beta \dot{y} + \gamma y = f(t)$ jest suma komplementarnog rješenja y_c i partikularnog rješenja Y_p .

$$y(t) = y_c(t) + U_p(t) \quad (2.35)$$

Komplementarno rješenje dobijemo izjednačavanjem diferencijalne jednadžbe s nulom odnosno:

$$\alpha \ddot{y} + \beta \dot{y} + \gamma y = 0 \quad (2.36)$$

Primjetimo da je komplementarno rješenje (rješenje jednačbe (2.36)) zapravo rješenje homogene diferencijalne jednačbe, a jednako je i za slobodne oscilacije i za prisilne oscilacije. Kod prisilnih oscilacija, komplementarno rješenje predstavlja prolazni dio odziva. Partikularno rješenje možemo pronaći koristeći se metodom neodređenih koeficijenata, a predstavlja prolazni dio odziva.

Analogno tome, komplementarno rješenje sustava diferencijalnih jednačbi dato je u (2.11) te predstavlja prolazni dio odziva, pa u slučaju prisilnih oscilacija preostaje nam odrediti još partikularno rješenje koje predstavlja prisilni dio odziva.

Zadana je jednačba gibanja sustava s dva stupnja slobode prikazanog na slijedećoj slici

UBACI SLIKU SUSTAVA

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin(\omega t) \quad (2.37)$$

Odnosno:

$$\mathbf{m}\{\ddot{u}\} + \mathbf{k}\{u\} = \{p_n\} \sin(\omega t) \quad (2.38)$$

Gdje je $\{p_n\}$ vektor amplituda harmonijskih sila. Odziv sustava biti će harmonijski, jednake frekvencije, pa partikularno rješenje možemo pretpostaviti:

$$\{u_p(t)\} = \{U_n\} \sin(\omega t) \quad (2.39)$$

Gdje je $\{U_n\}$ vektor koeficijenata. Druga derivacija (2.39) glasi:

$$\{\ddot{u}(t)\} = -\omega^2 \{U_n\} \sin(\omega t) \quad (2.40)$$

Uvrštavanjem (2.39) i (2.40) u (2.38) dobijemo:

$$-\omega^2 \{U_n\} \mathbf{m} \sin(\omega t) + \{U_n\} \mathbf{k} \sin(\omega t) = \{p\} \sin(\omega t) \quad (2.41)$$

Nakon sređivanja, jednačba (2.41) poprima oblik:

$$[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}] \{U_n\} = \{p\} \quad (2.42)$$

Množenjem jednačbe (2.42) s $[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}]^{-1}$ dobijemo:

$$\begin{aligned} \{U_n\} &= [\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}]^{-1} \{p_n\} \\ \{U_n\} &= \frac{1}{\det[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}]} \text{adj}[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}] \{p_n\} \end{aligned}$$

Odnosno u matričnom obliku:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}]} \begin{bmatrix} k_2 - m_2 \omega^2 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

Komponente vektora $\{U_n\}$ glase:

$$U_1 = \frac{p_0(k_2 - m_2\omega^2)}{m_1m_2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \quad (2.44)$$

$$U_2 = \frac{p_0k_2}{m_1m_2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \quad (2.45)$$

Za $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $k_1 = 2k$ i $k_2 = k$ vektori glase:

$$U_1 = \frac{p_0(k - m\omega^2)}{2m^2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \quad (2.46)$$

$$U_2 = \frac{p_0k}{2m^2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \quad (2.47)$$

Uz $\omega_1 = \sqrt{k/2m}$ i $\omega_2 = \sqrt{2k/m}$ te dijeljenjem (2.46) i (2.47) dobijemo vektor dinamičkog koeficijenta pomaka (bez dimenzija), koji ovisi o omjerima frekvencija ω/ω_1 te ω/ω_2 . Vektor je prikazan u nastavku

$$\frac{2k}{p_0}\{U\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1 - 0.5(\omega/\omega_1)^2}{[1 - (\omega/\omega_1)^2][1 - (\omega/\omega_2)^2]} \\ \frac{1}{[1 - (\omega/\omega_1)^2][1 - (\omega/\omega_2)^2]} \end{array} \right\} \quad (2.48)$$

Prisilni dio odziva glasi:

$$\{u(t)\} = \{U\} \sin(\omega t) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1 - 0.5(\omega/\omega_1)^2}{[1 - (\omega/\omega_1)^2][1 - (\omega/\omega_2)^2]} \\ \frac{1}{[1 - (\omega/\omega_1)^2][1 - (\omega/\omega_2)^2]} \end{array} \right\} \sin(\omega t) \quad (2.49)$$

Komponente vektora $\{U\}$ možemo iscrtati kao graf funkcije dinamičkog faktora $U_1/p_0/2k$ i $U_2/p_0/2k$ u ovisnosti o frekvencijskom omjeru ω/ω_1 .

2.5 Interesantan postupak za rješavanje 2dof

Zadana je jednačba gibanja prisilnog titranja sustava s dva stupnja slobode.

$$\mathbf{m}\{\ddot{u}\} + \mathbf{k}\{u\} = \{p\} \sin(\omega t) \quad (2.50)$$

Odziv sustava će biti sinusni, iste frekvencije kao i pobuda, pa rješenje pretpostavljamo u slijedećem obliku:

$$\{U_p\} = \{U\} \sin(\omega t) \quad (2.51)$$

Druga derivacija pretpostavljenog rješenja glasi:

$$\{U_p\} = -\omega^2 \{U\} \sin(\omega t) \quad (2.52)$$

Uvrštavanjem (2.51) i (2.52) u (2.50) dobijemo:

$$-\omega^2 \{U\} \mathbf{m} \sin(\omega t) + \mathbf{m} \{U\} \sin(\omega t) = \{p\} \sin(\omega t) \quad (2.53)$$

Te nakon sređivanja:

$$[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}] \{U\} = \{p\} \quad (2.54)$$

Matrica $[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}]$ predstavlja matricu dinamičke krutosti.

$$[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}] = \mathbf{Z} \quad (2.55)$$

Da bismo riješili (2.54) potrebno je pronaći invers matrice dinamičke krutosti. Invers matrice dinamičke krutosti predstavlja matrica frekvencijskih funkcija odziva, a označavamo ju s \mathbf{H} . Jednadžba pod (2.55) može poprimiti slijedeći oblik:

$$\left(\Psi^N\right)^T [\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}] \Psi^N = \left(\Psi^N\right)^T \mathbf{Z} \Psi^T \quad (2.56)$$

Odnosno

$$\left(\Psi^N\right)^T [\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}] \Psi^N = \left(\Psi^N\right)^T \mathbf{H}^{-1} \Psi^T \quad (2.57)$$

Iz (2.34) i (2.35) slijedi:

$$[\omega_n^2 - \omega^2] = \left(\Psi^N\right)^T \mathbf{H}^{-1} \Psi^T \quad (2.58)$$

Nakon sređivanja, dobijemo:

$$\mathbf{H} = \left(\Psi^N\right)^T [\omega_n^2 - \omega^2]^{-1} \Psi^T \quad (2.59)$$

Član $H_{j,k}$ matrice \mathbf{H} možemo dobiti preko slijedeće jednadžbe:

$$H_{j,k} = \frac{\psi_{j,1}^N \psi_{k,1}^N}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\psi_{j,2}^N \psi_{k,2}^N}{\omega_2^2 - \omega^2} + \frac{\psi_{j,3}^N \psi_{k,3}^N}{\omega_3^2 - \omega^2} + \dots + \frac{\psi_{j,n}^N \psi_{k,n}^N}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (2.60)$$

Jednadžbu (2.60) možemo zapisati kao skalarni umnožak vektora:

$$H_{j,k} = \left\{ \psi_{j,1} \psi_{k,1} \quad \psi_{j,2} \psi_{k,2} \quad \psi_{j,3} \psi_{k,3} \quad \dots \quad \psi_{j,n} \psi_{k,n} \right\} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} \\ \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \\ \frac{1}{\omega_3^2 - \omega^2} \\ \vdots \\ \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \end{Bmatrix} \quad (2.61)$$

Za zadani sustav, matrica modova normiranih s obzirom na masu Ψ^N glasi:

$$\Psi^N = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{6m}}{6m} & -\frac{\sqrt{3m}}{3m} \\ \frac{\sqrt{6m}}{6m} & \frac{\sqrt{3m}}{3m} \end{Bmatrix}$$

Izračun matrice frekvencijske funkcije odziva $H_{1,1}$ prikazan je u nastavku:

$$H_{1,1} = \frac{\psi_{1,1}^N}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\psi_{1,1}^N}{\omega_2^2 - \omega^2} = \frac{\frac{\sqrt{6m}}{6m} \frac{\sqrt{6m}}{6m}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\frac{\sqrt{3m}}{3m} \frac{\sqrt{3m}}{3m}}{\omega_2^2 - \omega^2}$$

$$H_{1,1} = \frac{1}{3m} \left(\frac{\frac{1}{2}}{(\omega_1^2 - \omega^2)} + \frac{1}{(\omega_2^2 - \omega^2)} \right) = \frac{1}{3m} \left(\frac{\frac{1}{2}(\omega_2^2 - \omega^2) + (\omega_1^2 - \omega^2)}{\omega_1^2 \omega_2^2 (1 - (\omega/\omega_1)^2)(1 - (\omega/\omega_2)^2)} \right)$$

U brojniku, ω_2 izrazimo kao ω_1 pomoću relacije $\omega_2 = \sqrt{2k/m}$ i $\omega_1 = \sqrt{k/2m}$.

$$H_{1,1} = \frac{1}{3m} \left(\frac{3 - \frac{3}{2}(\omega/\omega_1)^2}{\omega_2^2 (1 - (\omega/\omega_1)^2)(1 - (\omega/\omega_2)^2)} \right)$$

Nakon sređivanja:

$$H_{1,1} = \frac{1 - \frac{1}{2}(\omega/\omega_1)^2}{2k(1 - (\omega_1/\omega)^2)(1 - (\omega_2/\omega)^2)} \quad (2.62)$$

Analogno tome, dobiju se ostali članovi matrice te glase:

$$H_{1,2} = \frac{1}{2k(1 - (\omega_1/\omega)^2)(1 - (\omega_2/\omega)^2)} \quad (2.63)$$

$$H_{2,1} = \frac{1}{2k(1 - (\omega_1/\omega)^2)(1 - (\omega_2/\omega)^2)} \quad (2.64)$$

$$H_{2,2} = \frac{1 - 2(\omega/\omega_2)^2}{2k(1 - (\omega_1/\omega)^2)(1 - (\omega_2/\omega)^2)} \quad (2.65)$$

$$(2.66)$$

Matrica \mathbf{H} glasi:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2k(1 - (\omega/\omega_1)^2)(1 - (\omega/\omega_2)^2)} \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 & 1 \\ 1 & 1 - 2 \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Uvrštavanjem (2.67) u (2.54) dobijemo:

$$\mathbf{H}^{-1}\{U\} = \{p\} \quad (2.68)$$

Množenjem prethodnog izraza s \mathbf{H} :

$$\{U\} = \mathbf{H}\{p\} \quad (2.69)$$

Raspisivanjem prethodne jednačbe:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2k \left(1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 \right) \left(1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega} \right)^2 \right)} \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 & 1 \\ 1 & 1 - 2 \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.70)$$

Te konačno, vektor $\{U\}$ glasi:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2k \left(1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)^2\right)} \begin{Bmatrix} p_0 \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right) \\ p_0 \end{Bmatrix} \quad (2.71)$$

Dijeljenjem vektora $\{U\}$ s $p_0/2k$ dobijemo slijedeće:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)^2\right)} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.72)$$

Komponente vektora U predstavljaju funkcije ovisnosti dinamičkog faktora o frekvencijskim omjerima ω/ω_1 i ω/ω_2 . Njihovi grafovi prikazani su u nastavku.

UBACI GRAFOVE

Prisilni dio odziva glasi:

$$\{u(t)\} = \{U\} \sin(\omega t) = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)^2\right)} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin(\omega t) \quad (2.73)$$

2.6 Modalna analiza

Modalna analiza je postupak određivanja osnovnih dinamičkih parametara linearnog sustava s ciljem definiranja matematičkog modela ponašanja sustava pod utjecajem dinamičkih sila. Modalna analiza temelji se na *principu superpozicije*, odnosno na činjenici da se ukupni odziv sustava može zapisati kao linearna kombinacija odziva pojedinih modova.

Razmotrimo jednadžbu gibanja sustava s više stupnjeva slobode pobuđenog proizvoljnom silom:

$$\mathbf{m}\{\ddot{u}\} + \mathbf{k}\{u\} = \{p(t)\} \quad (2.74)$$

Klasično rješenje jednadžbe gibanja (2.74) prikazano je u poglavlju 2.4 na primjeru sustava s dva stupnja slobode pobuđenog harmonijskom silom. Za sustave s više od dva stupnja slobode ili za složenije sile pobude, rješavanje jednadžbe gibanja na klasični način može biti izuzetno teško ili nemoguće. U takvim slučajevima, jednadžba gibanja se rješava postupcima modalne analize.

Iz poglavlja 2.1 znamo da je rješenje jednadžbe gibanja slobodnog titranja sustava s više stupnjeva slobode linearna kombinacija odziva svih pojedinih modova odnosno:

$$u(t) = \sum_{r=1}^N \mathbf{m}\psi_r q_r(t) \quad (2.75)$$

Uvrštavanjem (2.75) u (2.74) dobijemo:

$$\sum_{r=1}^N \mathbf{m} \psi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \mathbf{k} \psi_r q_r(t) = p(t) \quad (2.76)$$

Množenjem jednačbe (2.76) s ψ_n^T dobijemo:

$$\sum_{r=1}^N \psi_n^T \mathbf{m} \psi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \psi_n^T \mathbf{k} \psi_r q_r(t) = \psi_n^T p(t) \quad (2.77)$$

Zbog svojstva ortogonalnosti, iščezavaju svi članovi sumacija osim n -tog člana, pa preostaje:

$$\psi_n^T \mathbf{m} \psi_n \ddot{q}_n(t) + \psi_n^T \mathbf{k} \psi_n q_n(t) = \psi_n^T p(t) \quad (2.78)$$

Koristeći relacije iz (2.28) i (2.27) jednačba (2.78) poprima slijedeći oblik:

$$M_n \ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_n(t) \quad (2.79)$$

Gdje su M_n , K_n i P_n poopćena masa, krutost i opterećenje n -tog moda.

Postupkom, prikazanim u jednačbama (2.75), (2.76), (2.77), (2.78), jednačbu gibanja sustava predstavljenu sustavom diferencijalnih jednačbi sveli smo na skup međusobno neovisnih diferencijalnih jednačbi. Drugim riječima, sustav od N stupnjeva slobode razložen je na N međusobno neovisnih podsustava s jednim stupnjem slobode (princip superpozicije), pri čemu n -ti podsustav prikazuje odziv sustava u n -tom modu. Podsustave nazivamo *poopćeni sustav za n -ti mod*. "Jednačba gibanja" poopćenog sustava za n -ti oblik titranja predstavljena je diferencijalnom jednačbom (2.79) čije rješenje predstavlja modalnu koordinatu n -tog moda $q_n(t)$.

Odziv n -tog moda je:

$$u_n(t) = \psi_n q_n(t) \quad (2.80)$$

Da bismo odredili ukupni odziv sustava s N -stupnjeva slobode, potrebno je riješiti N modalnih jednačbi, oblika definiranog pod (2.79). Matrični zapis sustava modalnih jednačbi prikazan je u nastavku.

$$\mathbf{M}\{\ddot{q}\} + \mathbf{K}\{q\} = \{P(t)\} \quad (2.81)$$

Gdje je \mathbf{M} matrica modalnih masa, \mathbf{K} matrica modalnih krutosti, $\{P(t)\}$ vektor poopćenih opterećenja. Iz (2.26) i (2.25) znamo da su matrice \mathbf{M} i \mathbf{K} dijagonalne što znači da je (2.81) sustav međusobno neovisnih jednačbi. Rješenjem navedenog sustava, dobijemo funkcije modalnih koordinata za sve modove sustava, a ukupni odziv definirano je linearnom kombinacijom (princip superpozicije) odziva svakog pojedinog moda. Odziv pojedinog moda definiran je (2.80), a ukupni odziv je:

$$u(t) = \sum_{n=1}^N u_n(t) = \sum_{n=1}^N \psi_n q_n(t) \quad (2.82)$$

Bibliografija

- [1] A. K. Chopra, *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*. New Jersey: Prentice Hall, 2011.
- [2] F. Z. He J., *Modal Analysis*. Oxford: Butterworth-Heinmann, 2001.
- [3] J. Koščak i G. Turkalj, “Modalna analiza modela konstrukcije i ispitivanje utjecaja njihala i spremnika s vodom kao prigušivača,” 2012.
- [4] D. Lazarević, M. Šavor Novak i M. Uroš, “Dinamika konstrukcija s uvodom u potresno inženjerstvo,” 2018.
- [5] H. Babić, “Signali i sustavi,” 1996.
- [6] N. Elezović, “Fourierov red i integral Laplaceova transformacija,” 2005.
- [7] P. Dawkins, “Differential equations,” 2018.