# 1 Sustavi s jednim stupnjem slobode

## 1 Model sustava s jednim stupnjem slobode

Modeli sustava s jednim stupnjem slobode su posmični okviri, a možemo ih shvatiti kao idealizaciju jednokatnice. Posmični okviri se sastoje od štapova, koncentrirane mase i viskoznog prigušivača, pri čemu je ukupna krutost sustava sadržana u krutosti štapova, ukupna masa sustava u koncentriranoj masi i ukupno prigušenje u viskoznom prigušivaču. Nadalje, vrijedi pretpostavaka o vertikalnoj i horizontalnoj nestišljivosti štapova, tj. štapovi su nepromjenjive dužine.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

Primjetimo da navedeni sustav s pogleda statike predstavlja ravninski problem s tri stupnja slobode (dvije rotacije u zglobovima te translacija), stoga ga je potrebno svesti na sustav s jednim stupnjem slobode za potrebe dinamičkog proračuna. Drugim riječima, potrebno je ukupnu krutost sustava izraziti kao lateralnu krutost. Postupak svođenja sustava s tri stupnja slobode na sustav s jednim stupnjem slobode naziva se *statička kondenzacija* koju u ovom radu nećemo razmatrati.

## 2 Jednadžba gibanja modela pri sinusnoj pobudi

Dijagram sila za sustav s prigušenjem na koji djeluje sila pobude prikazan je na slijedećoj slici:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Prema drugom Newtonovom aksiomu vrijedi:

(1)

Gdje je:

|  |  |
| --- | --- |
|  | unutarnja sila |
|  | sila prigušenja |
|  | masa |
|  | ubrzanje |

Unutarnju silu možemo zapisati kao:

(2)

A silu prigušenja kao:

(3)

Gdje je:

|  |  |
| --- | --- |
|  | krutost |
|  | koeficijent viskoznog prigušenja |
|  | pomak |
|  | brzina |

Uvrštavanjem (2) i (3) u (1) dobijemo:

(4)

Sila pobude je sinusna sila , pri čemu je amplituda, a frekvencija, stoga jednadžba pod (4) postaje:

(5)

Jednadžba pod (5) jest nehomogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda, a riještiti ćemo ju primjenom Laplaceove transformacije[[1]](#footnote-1).

Transformiranjem jednadžbe (5) dobijemo slijedeću algebarsku jednadžbu u frekvencijskoj domeni:

(6)

Gdje je transformat funkcije . Sređivanjem (6) dobijemo:

(7)

Jednadžbu (7) možemo rastaviti na više logičnih cijelina:

(8)

(9)

(10)

Uvrštavanjem (9),(16) u (7) dobijemo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |

Množenjem prijenosnom funkcijom sustava () dobijemo:

(12)

Pri čemu je:

|  |  |
| --- | --- |
|  | odziv na pobudu početnim uvjetima u frekvencijskoj domeni |
|  | odziv na pobudu sinusnom silom u frekvencijskoj domeni |

Da bi bilo lakše naći inverze odziva u frekvencijskoj domeni potrebno je funkciju prikazati u tabličnom obliku[[2]](#footnote-2).

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

Gdje je:

|  |  |
| --- | --- |
|  | stupanj prigušenja |
|  | vlastita frekvencija prigušenog titranja |
|  | prirodna frekvencija oscilatora |
|  | koeficijent relativnog prigušenja |
|  | kritično prigušenje |

Pobuda početnim uvjetima zadana je preko jednadžbe:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (14) |

Odziv u vremenskoj domeni se određuje pronalaskom inversa transformacije funkcije odziva u frekvencijskoj domeni.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (15) |

Funkcija svedena je na tablični oblik stoga je moguće izravno naći inverz Laplaceove transformacije koji glasi:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (16) |

Funkciju nije moguće svesti na tablični oblik, pa je potrebno odrediti konvoluciju funkcija i . Funkcija funkcija odgovara funkciji u vremenskoj domeni, a funkcija funkciji , stoga:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (17) |
|  | (18) |

Konvoluciju funkcija određujemo preko konvolucijskog integrala:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (19) |

Ukupni odziv je suma odziva na pobudu početnim uvjetima i odziva na pobudu harmonijskom silom odnosno:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (20) |

Postupak određivanja i sređivanja rješenja konvolucijskog integrala iz (19) je dugotrajan pa je u nastavku prikazano samo konačno rješenje.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (21) |

Gdje je:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (22) |
|  | (23) |

Iz (21) i (20) možemo zaključiti da će se prolazni dio odziva pojaviti i u slučaju homogenih i u slučaju nehomogenih početnih uvjeta (prisutan i kod pobude početnim uvjetima i kod pobude silom), a ovisi o karakteristikama sustava, te se smanjuje eksponencijalno u ovisnosti o vremenu. Nakon što prolazni dio odziva isčezne preostaje samo prisilni dio odziva, a pojavljuje se neovisno o početnim uvjetima. Karakteristike prisilnog dijela odziva ponajviše ovise o frekvenciji i amplitudi pobude, a zatim i o karakteristikama sustava (o prigušenju te prirodnoj frekvenciji sustava).

Karakteristike prisilnog dijela odziva detaljnije će se razmatrati u slijedećim poglavljima.

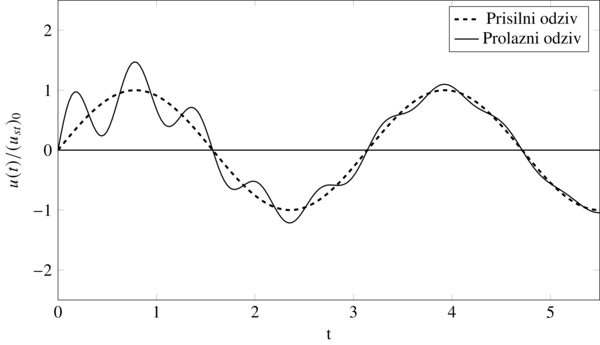
Uvrštavanjem (21) u (20), te sređivanjem dobijemo ukupno rješenje diferencijalne jednadžbe (5) koje glasi:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (24) |

Gdje je:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (25) |
|  | (26) |

Graf odziva prigušenog sustava s jednim stupnjem slobode za homogene početne uvjete i prikazan je na slijedećoj slici.



Neprigušeni sustav možemo shvatiti kao poseban slučaj prigušenog sustava za slučaj odnosno , pa diferencijalna jednadžba sustava postaje:

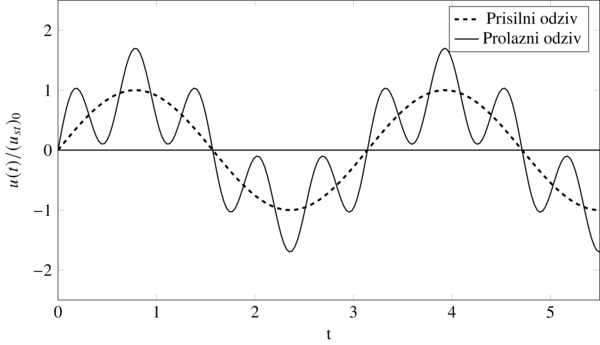
(27)

Rješenje jednadžbe gibanja možemo odrediti iz (24) određivanjem koeficijenata , , i za .

|  |  |
| --- | --- |
|  | (28) |
|  | (29) |
|  | (30) |
|  | (31) |
|  | (32) |
|  | (33) |

Uvrštavanjem (28), (29), (30), (31), (32) i (33) u (24) dobijemo rješenje diferencijalne jednadžbe pod (27) koje glasi:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (34) |



## 3 Statički pomak

Zanemarivanjem ubrzanja u diferencijalnoj jednadžbi pod (27) dobijemo:

(35)

Navedena jednadžba predstavlja *vremensku funkciju statičkog pomaka*. Pomak nazivamo statičkim jer se zanemaruje dinamički utjecaj sile pobude (pretpostavlja se spora promjena opterećenja). Vremenska funkcija statičkog pomaka, preko Hookeovog zakona, stavlja u odnos silu pobude () i pomak sustava . Zanemarivanjem funkcije sinus, dobijemo amplitudu statičkog pomaka koja je definirana slijedećom jednadžbom:

(36)

## 4 Frekvencijske funkcije odziva

### 4.1 Izvod

Ponašanje sustava opisano je diferencijalnom jednadžbom drugog reda (u vremenskoj domeni) koja nakon -transformacija postaje algebarska jednadžba u domeni. Transformat odziva na sinusnu silu uz homogene početne uvjete glasi:

(37)

Funkcija naziva se prijenosnom funkcijom sustava, a definirana je kao kvocjent odziva i pobude u domeni.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (38) |

Prijenosna funkcija sustava obično sadrži dvije skupine karakterističnih točaka:

1. polovi - nultočke nazivniku

2. nule - nultočke brojnika

Polovi predstavljaju točke u kojima prijenosna funkcija sustava divergira tj (), a nule su točke u kojima vrijednost prijenosne funkcije iznosi nula. Polovi i nule za polinom drugog stupnja mogu biti:

1. dva različita realna broja

2. jedan dvostruki realni broj

3. jedan par kompleksno konjugiranih brojeva

Uočimo da za slučaj prijenosne funkcije sustava pod (38) nema nula, a polovi su jedan par kompleksno konjugiranih brojeva (polovi su dobiveni izjednačavanjem polinoma u nazivniku s nulom):

(39)

Realni dio pola prikazuje stupanj prigušenja a imaginarni dio prirodnu frekvenciju prigušenog titranja. Prijenosna funkcija zapisana preko polova glasi:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (40) |

Raspisivanjem dobijemo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (41) |

I konačno tablični oblik dobijemo množenjem s

|  |  |
| --- | --- |
|  | (42) |

Poseban slučaj prijenosne funkcije sustava, za slučaj , naziva se *frekvencijska funkcija odziva* i glasi:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (43) |

Član možemo zanemariti jer je uračunat u amplitudu statičkog pomaka , pa je konačni oblik frekvencijske funkcije odziva:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (44) |

Frekvencijska funkcija odziva je funkcija argumenta , odnosno promjenom frekvencije pobude, mjenja se i njezina vrijednost, te je redovito je kompleksna. Jednadžbu pod (44) možemo rastaviti na realni i imaginarni dio. Rastav na realni i imaginarni dio prikazan je u nastavku.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (45) |
|  | (46) |

Jednadžba pod (44) zapisana preko realnog i imaginarnog dijela glasi:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (47) |

Funkciju (44) se može prikazati i u trigonometrijskom obliku. Općenito, kompleksni broj se prikazuje u trigonometrijskom obliku na slijedeći način:

(48)

Gdje je norma kompleksnog broja, a kut kojega kompleksni vektor zatvara s realnom osi. Stoga je očito da je za navedeni prikaz potrebno je odrediti magnitudu (normu) kompleksnog vektora frekvencijske funkcije odziva te kut koji zatvara s realnom osi. Magnituda je zadana Pitagorinim poučkom, dakle:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (49) |

Kut koji kompleksni vektor zatvara s realnom osi moguće je odrediti slijedećom jednadžbom:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (50) |

Prikazana u trigonometrijskom obliku, frekvencijsku funkciju odziva potrebno je rastaviti na magnitudni spektar koji je definiran jednadžbom (49) i na fazni spektar koji je definiran jednadžbom (50). **Napomena:** jednadžba (50) stavljena je u apsolutnu vrijednost zato što će se negativni predzak (kašnjenje) ili pozitivni predznak uračunati naknadno, no više o tome u slijedećem poglavlju.

### 4.2 Zapis prisilnog dijela odziva

Prisilni dio odziva definiran definiran je jednadžbom prikazanom u nastavku:

(51)

Prisilni odziv pod (51) možemo zapisati u obliku korištenjem slijedećeg trigonometrijskog identiteta:

(52)

Gdje je:

(53)

(54)

Raspisivanjem formule pod (53) dobijemo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (55) |

Definiramo dinamički koeficijent pomaka ili koeficijent povećanja pomaka () kao omjer amplitude dinamičkog i statičkog pomaka.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (56) |

Fazni kut dobijemo raspisivanjem izraza pod (54) te dobijemo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (57) |

Uvrštavanjem (73) i (57) u (52) dobijemo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (58) |

Uočimo da je jednadžba pod (73) ista kao i jednadžba magnitudnog spektra frekvencijske funkcije odziva. Isto tako, uočimo i da je jednadžba pod (57) ista kao i jednadžba faznog spektra frekvencijske funkcije odziva. Nadalje, prisilni dio odziva je sinusoida isto kao i pobuda.

Stoga možemo reći da frekvencijska funkcija odziva definira odnos između pobude i odziva. Taj odnos je kompleksan jer je opisan magnitudnim i faznim spektrom kompleksne funkcije definirane u domeni. Drugim riječima, frekvencijska funkcija odziva nas upućuje na slijedeća svojstva (prisilnog) odziva:

1. Frekvencija odziva biti će jednaka frekvenciji pobude.

2. Amplituda odziva biti će skalirana amplituda statičkog pomaka. Prisjetimo se da je amplituda statičkog pomaka u izravnoj vezi sa amplitudom sile pobude.

3. Odziv će zaostajati u fazi za pobudom.

Skaliranje amplitude statičkog pomaka definirano je *dinamičkim koeficijentom* . Navedeni koeficijent je konkretna vrijednost magnitudnog spektra frekvencijske funkcije odziva za određenu frekvenciju . Analogno tome, kašnjenje u fazi definirano je faznim kutom koji je konkretna vrijednost faznog spektra frekvencijske funkcije odziva.

#### 4.2.1 Alternativno zapis prisilnog dijela odziva(Za ovo i nisam baš siguran)

Odziv na pobudu sinusnom silom može se odrediti konvolucijom prijenosne funkcije i funkcije pobude u vremenskoj domeni. Zadana je pobuda sinusnom silom oblika:

(59)

Jednadžbu (59) možemo zapisati u eksponencijalnom obliku:

(60)

Uvodimo:

(61)

(62)

Uvrštavanjem (61) i (62) u (60) dobijemo:

(63)

Prijenosna funkcija sustava (s izlučenim članom ) zadana je u obliku . Izračun odziva je prikazan u nastavku:

Uvodi se supstitucija .

Raspisivanjem i sređivanjem dobijemo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (64) |

Uočimo da integrali označeni s predstavljaju Laplaceovu transformaciju prijenosne funkcije sustava pa izraz pod (64) postaje:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (65) |

Varijabla je kompleksno konjugirana varijabla , pa je funkcija kompleksno konjugirana funkcija . odnosno:

(66)

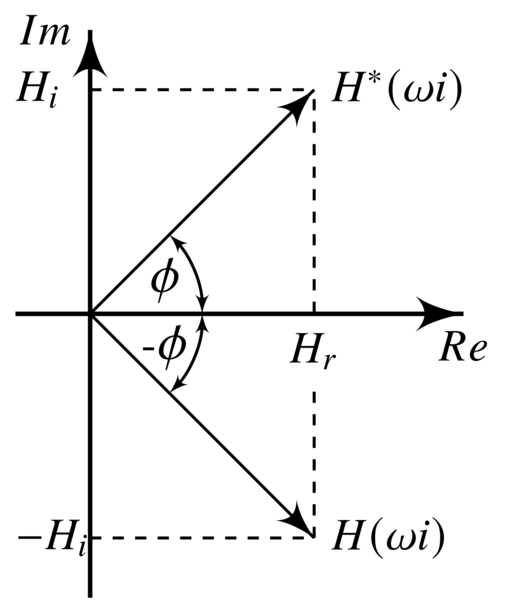
Korištenjem (66) jednadžba (65) postaje:

(67)

Poseban slučaj je za odnoso . Tada prijenosne funckije sustava postaju frekvencijske funkcije odziva, a izraz pod (67) glasi:

(68)

Frekvencijska funkcija odziva zadana je jednadžbom (47). Možemo uočiti da je njezin imaginarni dio negativan, što znači da je imaginarni dio funkcije pozitivan.



Modul funkija i je isti a definiran je jednadžbom (49) a fazni kut jednadžbom (50). Sa slike ?? vidljivo je da je kut što ga zatvara s realnom osi negativan, a kut što ga zatvara s realnom osi pozitivan. Trigonometrijski zapisi funkcija dati su u nastavku.

(69)

(70)

Uvrštavanjem (69) i (??) u (67) dobijemo:

(71)

Te konačno:

(72)

Jednadžba (72) predstavlja prisilni dio odziva.

Definiramo dinamički koeficijent pomaka ili koeficijent povećanja pomaka () kao omjer amplitude dinamičkog i statičkog pomaka.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (73) |

Uočimo da su jednadžbe (73) i (44) iste, odnosno funkcija ovisnost dinamičkog faktora o omjeru frekvencija odgovara magnitudnom spektru frekvencijske funkcije odziva. Stoga jednadžbu pod (72) možemo zapisati kao:

(74)

Iz (72) i (74) možemo definirati fizikalnu interpretaciju frekvencijske funkcije odziva. Dakle, frekvencijska funkcija odziva definira odnos između pobude i odziva. Taj odnos je kompleksan jer je opisan magnitudnim i faznim spektrom kompleksne funkcije definirane u domeni. Drugim riječima, frekvencijska funkcija odziva nas upućuje na slijedeća svojstva (prisilnog) odziva:

1. Frekvencija odziva biti će jednaka frekvenciji pobude ().

2. Amplituda odziva biti će skalirana amplituda statičkog pomaka. Prisjetimo se da je amplituda statičkog pomaka u izravnoj vezi sa amplitudom sile pobude.

3. Odziv će zaostajati u fazi za pobudom.

Skaliranje amplitude statičkog pomaka definirano je *dinamičkim koeficijentom* . Navedeni koeficijent je konkretna vrijednost magnitudnog spektra frekvencijske funkcije odziva za određenu frekvenciju . Analogno tome, kašnjenje u fazi definirano je faznim kutom koji je konkretna vrijednost faznog spektra frekvencijske funkcije odziva.

### 4.3 Grafički prikaz frekvencijske funkcije odziva

Zbog toga što frekvencijska funkcija odziva definira uvećanje amplitude statičkog pomaka i fazno zaostajanje odziva za pobudom od posebnog su nam interesa fazni i magnitudni spektar frekvencijske funkcije odziva (polarni zapis).

Za konstantan vrijednosti funkcija definiranih jednadžbama (49) i (50) biti će za omjer , stoga taj omjer možemo postaviti i kao argument navedenih funkcija.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (75) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (76) |

|  |
| --- |
|  |
|  |

Magnitudni spektar frekvencijske funkcije odziva prikazuje funkcijsku ovisnost dinamičkog koeficijenta o omjeru frekvencije pobude i prirodne frekvencije za određeno prigušenje. Analogno tome fazni spektar frekvencijske funkcije odziva prikazuje ovisnost faznog kuta (kašnjenje u fazi za pobudom) o omjeru frekvencija za određeni faktor relativnog prigušenja.

Za neprigušeno titranje funkcije faznog i magnitudnog spektra prikazane su u nastavku.

(77)

(78)

Iz formule (77) očito je da za neprigušeno titranje postoje tri vrijednosti faznog kuta koje ovise o izrazu u nazivniku. Vrijednosti faznog kuta prikazane su u nastavku:

|  |
| --- |
|  |
|  |

Analizirajući krivulje frekvencijskih funkcija odzviva navedene grafove možemo podijeliti na tri područja:

1. Područje kontrolirano krustošću - za slučaj spore promjene opterećenja ( - lijevo na grafu) utjecaj prigušenja je neznatan (krivulje za različita prigušenja su jako bliske) a dinamički utjecaj je mali, tj. što znači da je amplituda prisilnog odziva približno jednaka amplitudi statičkog pomaka, pa amplitudu prisilnog odziva možemo aproksimirati slijedećom jednadžbom:

(79)

Fazni kut je približno pa su pobuda i odziv u fazi.

2. Područje kontrolirano prigušenjem - Za slučaj , izražen razmak između krivulja nalaže najeveći utjecaj prigušenja na vrijednost dinamičkog faktora, a samim time i na ukupnu amplitudu prisilnog odziva. Dinamički faktor , u navedenom intervalu, postiže najveće vrijednosti a u slučaju je neograničen (teži u beskonačno). Dominantni član izraza (75) je , a aproksimacija amplitude prisilnog odziva glasi:

(80)

Fazni kut za sva prigušenja iznosi 90.

3. Područje kontrolirano masom - Za slučaj brze promjene opterećenja utjecaj prigušenja je zanemariv jer su krivulje vrlo bliske. Dinamički faktor teži u nulu, što znači da je ukupna amplituda prisilnog odziva manja od amplitude statičkog pomaka. Dominantni član jednadžbe (49) jest što znači da jednadžbu pod (75) možemo aproksimirati na slijedeći način:

Prema tome, amplituda prisilnog odziva glasi:

(81)

U ovom slučaju (), fazni kut je približno 180, što znači da su pobuda i odziv izvan faze

### 4.4 Dinamički koeficijenti odziva

U prethodnim poglavljima, prisilni dio odziva je prikazan kao vremenska funkcija pomaka pri čemu je njegova amplituda jednaka statičkom pomaku skaliranom dinamičkim koeficijentom pomaka . Osim vremenskom funkcijom pomaka, odziv sustava potrebno je opisati i vremenskim funkcijama brzine i ubrzanja.

Deriviranjem vremenske funkcije pomaka po vremenu dobijemo vremensku funkciju brzine:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (82) |
|  | (83) |

Gdje je:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Dinamički koeficijent brzine |

Iz jednadžbi pod (82) i (83) slijedi relacija:

(84)

Analogno tome, dobije se i dinamički faktor ubrzanja koji glasi:

(85)

Gdje je:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Dinamički koeficijent ubrzanja |

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

Iz (84) i (85) slijedi da su dinamički koeficijenti pomaka, brzine i ubrzanja u odnosu. Navedeni odnos je prikazan je slijedećom jednadžbom.

(86)

Iz navedene jednadžbe slijedi da je poznavanjem jedne od veličina moguće dobiti preostale dvije. Zbog toga što postoji odnos između dinamičkih koeficijenata pomaka, brzine i ubrzanja opisan jednadžbom (86), moguće je sve tri navedene veličine prikazati u jednom grafu.

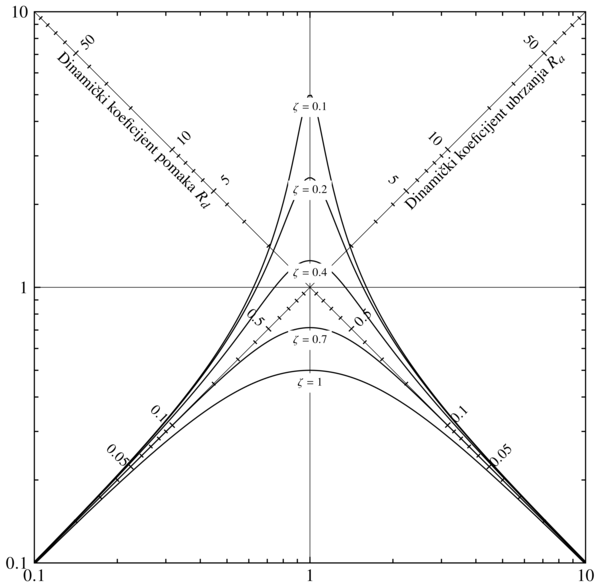
Takav graf se sastoji od četiri logaritamske skale:

1. horizontalne logaritamske skale koja prikazuje omjer frekvencije pobude i prirodne frekvencije sustava

2. vertikalne logaritamske skale koja prikazuje *dinamički koeficijent brzine*

3. modificirane logaritamske skale nagnute pod kutem od koja prikazuje *dinamički koeficijent ubrzanja*

4. modificirane logaritamske skale nagnute pod kutem od koja prikazuje *dinamički koeficijent pomaka*



## 5 Rezonanca

Rezonanca je pojava koja se javlja prilikom pobude rezonantnom frekvencijom. Rezonantna frekvencija je ona frekvencija pobude za koju će dinamički koeficijent odziva biti maksimalan.

### 5.1 Rezonanca sustava s prigušenjem

Razmatranjem krivulja frekvencijskih funkcija odziva sa slike ??, možemo uočiti da jedino maksimumi krivulja padaju na vertikalni pravac . Isto tako, vidljivo je da maksimalni pada ulijevo od navedenog pravca a maksimalni udesno. To znači da će se rezonantne frekvencije dinamičkih faktora (, i ) međusobno razlikovati te da će rezonantne frekvencije dinamičkih faktora i biti različite od prirodne frekvencije sustava.

Rezonantne frekvencije za pojedini spektar možemo odrediti deriviranjem frekvencijske funkcije odziva po te izjednačavanjem prve derivacije s nulom.

Uvodi se supstitucija

Deriviranjem po x dobijemo:

Lokalni ekstrem (maksimum) dobijemo izjednačavanjem prve derivacije s nulom, odnosno:

Da bi razlomak bio jednak nula izraz u brojniku mora biti jednak nula. Izjednačavanjem brojnika s nulom dobijemo slijedeću jednadžbu:

Uvrštavanjem dobijemo izraz za rezonantnu frekvenciju pomaka:

(87)

Analogno tome dobiju se izrazi za rezonantne frekvencije brzine i ubrzanja.

(88)

(89)

(90)

Zbog jednostavnosti, karakteristike odziva prigušenog sustava s jednim stupnjem slobode u rezonanci, razmotriti ćemo za slučaj uz homogene početne uvjete. Iako se rezonantna frekvencija pomaka ne podudara s prirodnom frekvencijom sustava, navedene vrijednosti su vrlo bliske za mali . Vremenska funkcija pomaka prigušenog sustava prikazana jednadžbom (24)

Uz homogene početne uvjete i za , koeficijenti glase:

(91)

(92)

(93)

(94)

Uvrštavanjem (93), (94), (91) i (23) u (24) te sređivanjem dobijemo:

(95)

Iz navedene jednadžbe proizlazi da je amplituda odziva ograničena na vrijednost (uočimo da je odziv sustava kontroliran prigušenjem):

(96)

Za malu vrijednost , vrijedi te je član . Stoga jednadžba pod (95) postaje:

(97)

Iz jednadžbe (97) može se zaključiti da i za slučaj rezonance postoji prolazni i prisilni dio odziva, a ukupni odziv je razlika između prolaznog i prisilnog djela. Prolazni dio odziva opisan je jednadžbom

a prisilni:

Za prolazni dio je maksimalan te je ukupni odziv jednak nuli. U ovisnosti o vremenu, prolazni dio se smanjuje eksponencijalno prema zakonu . Kako se prolazni dio smanjuje a prisilni ostaje isti () tako raste njihova razlika. Rastom razlike dolazi do rasta amplitude odziva, te isčezavanjem prolaznog dijela preostaje samo prisilni te se dostiže maksimalna amplituda koja je jednaka (). Bitno je za naglasiti da u teoretskom modelu prolazni dio odziva isčezava tek za , tj. asimptotski se približava nuli, ali u realnosti prolazni dio odziva je zanemariv nakon određenog vremena. Shematski prikaz dostizanja prisilnog stanja prikazan je na slijedećoj slici:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  | | |

O prigušenju u rezonanci ovise slijedeći parametari odziva:

• brzina dostizanje ustaljenog stanja (maksimalne amplitude) - brzina dostizanja ustaljenog stanja raste proporcionalno s prigušenjem (veće prigušenje strmija krivulja ovojnice brže dostizanje ustaljenog stanja).

• vrijednost maksimalne amplitude - obrnuto proporcionalna od vrijednosti prigušenja, definirana izrazom (96). (veće prigušenje, manja maksimalna amplituda, vidljivo i u frekvencijskim funkcijama odziva)

Određivanje broja titraja koji je potreban za dostizanje ustaljenog stanja vrši se pomoću funkcije koja opisuje krivulju ovojnice. Pretpostavka je da ekstrem nastupa nakon titraja ( je prirodni broj), a vrijeme nastupa minimuma je .

(98)

Gdje je:

|  |  |
| --- | --- |
|  | redni broj titraja |
|  | maksimalna amplituda |

Kako se radi o ekstremnoj vrijednosti, funkcija kosinus iznosi pa jednadžba pod (98) glasi:

(99)

Za maksimume jednadžba pod (99) postaje

(100)

Za relativne vrijednosti[[3]](#footnote-3):

(101)

Izraz ima smisla samo za diskretne vrijednosti argumenta , odnosno za .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |

Uočimo da je uz slabije prigušenje potrebno više titraja za dostizanje 95% maksimalne amplitude. Očitanja vrijednosti sa grafa prikazana su u tablici.

### 5.2 Rezonanca sustava bez prigušenja

Za sustav bez prigušenja, rezonantne frekvencije za , i jednake su prirodnoj frekvenciji sustava što se dobije uvrštavanjem u (88) i (90).

Primjetimo da je maksimalni dinamički koeficijent (za ) neograničen, tj što se vidi i u jednadžbi (77) te na grafu ??. U slijedećoj jednadžbi prikazana je vremenska funkcija pomaka sustava za homogene početne uvjete:

(102)

Uočimo da za navedena jednadžba više ne vrijedi (djeljenje s nulom). Novu jednadžbu možemo odrediti na slijedeći način:

(103)

Navedeni limes je oblika , pa ga je moguće rješiti L'Hopitalovim pravilom. Deriviranjem funkcije po dobijemo:

(104)

Uvrštavanjem dobijemo:

(105)

Iz navedene jednadžbe vidljivo je da usprkos neograničenom dinamičkom faktoru neizmjerno velika amplituda ne nastupa trenutno, već dolazi do njezinog postupnog rasta. Djeljenjem izraza (105) statičkim pomakom i uvrštavanjem dobijemo:

(106)

Gdje je:

|  |  |
| --- | --- |
|  | period titranja |

Iz prethodne jednadžbe slijedi da ekstremi nastupaju svaki poluperiod (), pri čemu prvo nastupa maksimum a zatim minimum. Vrijeme nastupa ekstrema za određeni redni broj titraja prikazuju slijedeće jednadžbe:

• za maksimum:

• za minimum:

Gdje je:

|  |  |
| --- | --- |
|  | vrijeme nastupa ekstrema |
|  | redni broj titraja |

Iznos ekstrema određujemo uvrštavanjem vremena nastupa ekstrema u jednadžbu (106) te slijedi:

1. iznos maksimuma za j-ti titraj:

2. iznos minimuma za j-ti titraj:

Prirast maksimuma određujemo razlikom između iznosa maksimuma trenutnog i slijedećeg titraja što prikazuje slijedeća jednadžba:

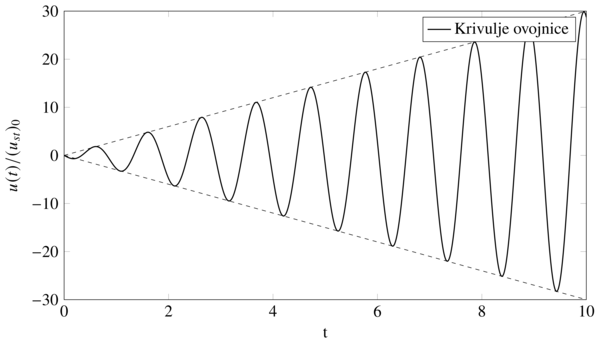
(107)

Analogno tome određuje se i prirast minimuma koji glasi:

(108)

Uočimo da su prirasti ekstrema linearni, stoga krivulju ovojnice čine pravaci čiji su koeficjenti smjera prikazani u nastavku:

(109)

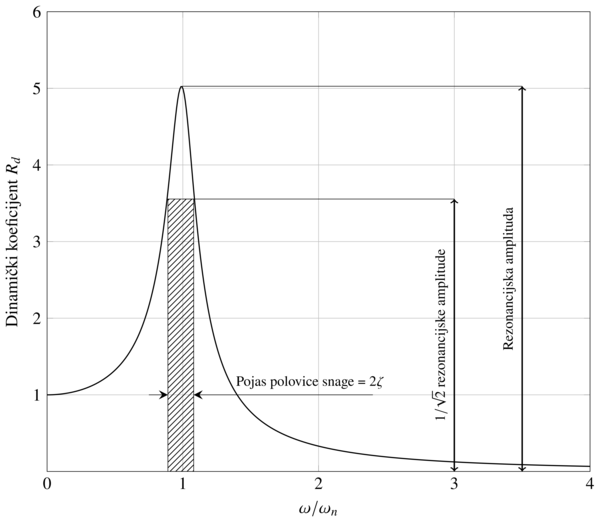


### 5.3 Analiza područja rezonance

Osim rezonantne frekvencije potrebno je odrediti i pojas polovice snage vrha frekvencijske funkcije odziva, koji je prikazan na slici ??. Pojas polovice snage vrha frekvencijske funkcije odziva bitan je iz dva razloga:

1. osim pobude rezonantnom frekvencijom, opasne su i pobude frekvencijama iz njezinog okoliša. Navedeni okoliš definiran je pojasom polovice snage.

2. Zbog praktične primjene - pojas polovice snage koristi se u pokusima za određivanje stupnja prigušenja konstrukcija



Dinamički faktor pomaka za odziv dvostruko manje snage od odziva maksimalnog dinamičkog faktora računa se prema slijedećoj relaciji:

(110)

Sa slike je vidljivo da je dinamički faktor iz (110) definiran za dvije vrijednosti frekvencije pobude: i . Raspisivanjem jednadžbe pod (110) dobijemo:

(111)

Kvadriranjem (111) dobijemo:

(112)

Raspisivanjem i grupiranjem po dobijemo:

(113)

Izraz (113) je kvadratna jednadžba, a njezinim rješavanjem (po ) dobijemo:

(114)

Za izraz (114) postaje:

(115)

Odnosno:

(116)

Jednadžba (??), nakon aproksimacije korijena s prva dva člana Taylorovog reda glasi:

(117)

Frekvencije i dobiju se iz (117):

(118)

(119)

Oduzimanjem dobijemo:

(120)

Te konačno, dijeljenjem brojnika i nazivnika s :

(121)

Gdje je kružna frekvencija. Jednadžbe pod (120) i (121) bitne su jer omogućuju određivanje koeficijenta relativnog prigušenja bez potrebe za poznavanjem intenziteta sile pobude.

### 5.4 Praktična primjena matematičkog modela

Definiranjem matematičkog modela prigušenog sustava s jednim stupnjem slobode, pobuđenog sinusnom silom postavljeni su temelji za eksperimentalno određivanje stupnja prigušenja i prirodne frekvencije. Stupnanj prigušenja jest veličina od izuzetne praktične važnosti, a nije ga moguće odrediti teoretski iz projektnih parametara, već se mora odrediti eksperimentalno. Ispitivanje koje će biti razmatrano u ovome radu naziva se *rezonancijski pokus*.

Ispitivanja se provode *vibracijskim uređajem*. Vibracijski uređaj se sastoji od dvije košare sa utezima na uspravnoj osovini koje rotiraju u suprotnim smjerovima konstantnom kutnom brzinom . Osovina je pričvršćena za metalnu ploču koja se kruto povezuje s građevinom.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Sila pobude građevine jest ukupna centrifugalna sila vibracijskog uređaja, koja je jednaka je sumi centrifugalnih sila pojedinih masa. Horizontalne komponente su jednakog intenziteta ali suprotnog smjera pa se poništavaju, stoga sila pobude je jednaka sumi vertikalnih komponenti, odnosno:

(122)

Odziv sustava s jednim stupnjem slobode na pobudu vibracijskim uređajem opisan je slijedećom diferencijalnom jednadžbom:

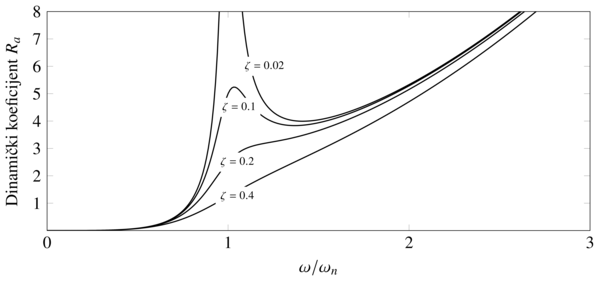
(123)

Amplituda prisilnog pomaka glasi (iz (74)):

(124)

Amplituda prisilnog ubrzanja (iz (85)

(125)



Na grafu sa prethodne slike vidljivo je da daljnjim porastom frekvencije pobude (iznad prirodne frekvencije) amplituda prisilnog ubrzanja raste. Navedeni rast se događa jer je amplituda pobude proporcionalna s .

Za određivanje stupnja prigušenja i prirodne frekvencije vrši se *rezonancijski pokus*, a temelji se na slijedećoj relaciji (iz (80))

(126)

Potrebno je eksperimentalno odrediti amplitudu statičkog pomaka i prirodnu frekvenciju.

Prirodna frekvencija se određuje na slijedeći način:

1. pobuđivanje konstrukcije vibracijskim uređajem namještenim na određenu frekvenciju .

2. očitavanje faznog kuta. Ako je fazni kut , tada je prirodna frekvencija jednaka frekvenciji pobude .

3. nakon što isčezne prolazni dio odziva, očitava se amplituda prisilnog ubrzanja

Amplitudu prisilnog pomaka možemo dobiti iz amplitude prisilnog ubrzanja korištenjem slijedeće formule:

(127)

Da bi bilo moguće odrediti prigušenje sustava prema formuli (126) potrebno je odrediti amplitudu statičkog pomaka , gdje je amplituda pobude u rezonanci. Amplituda statičkog pomaka se **mora** odrediti pokusom, a ne izračunati prema relaciji zato što nije eksperimentalno određen.Vibracijskim uređajem je vrlo teško (ili nemoguće) prouzročiti veliku **statičku** silu pobude. Dva su pristupa rješavanju navedenog problema:

1. Sporim rotiranjem velikih masa - Nije najbolje rješenje jer je sila pobude proporcionalna s kvadratom kutne brzine rotacije utega. Stoga i za velike mase utega amplituda sile pobude je relativno mala.

2. Povlačenjem konstrukcije užetom silom koja je jednaka amplitudi sile pobude vibracijskim uređajem .

Osim rezonancijskim pokusom, prigušenje i prirodnu frekvenciju moguće je odrediti **frekvencijskim krivuljama odziva**. Postupak je slijedeći:

1. pobuđivanje konstrukcije vibracijskim uređajem namještenim na određenu frekvenciju

2. određivanje amplitude **prisilnog** dijela

3. namještanje vibracijskog uređaja na drugu frekvenciju, te ponavljanje postupka

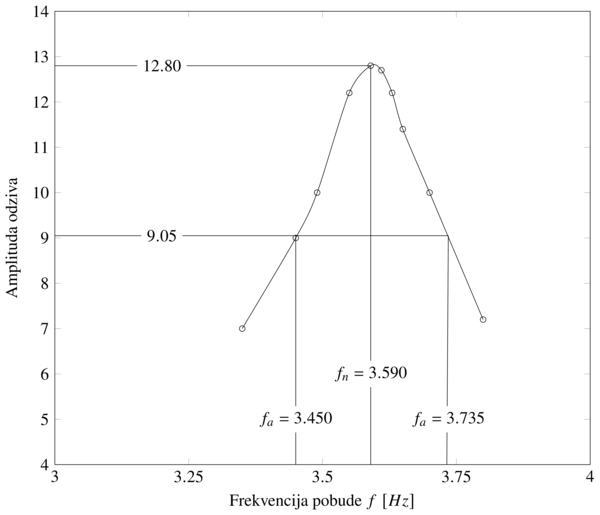
Frekvencijska krivulja odziva iscrtava se iz izmjerenih podataka. Frekvencijske funkcije odziva mogu prikazivati slijedeće ovisnosti:

1. ovisnost amplituda ubrzanja o frekvencijskom omjeru - izravno iz izmjerenih podataka. Bitno je za naglasiti da je navedena krivulja proporcionalna s .

2. ovisnost dinamičkog faktora ubrzanja o frekvencijskom omjeru (konstantna amplituda pobude) - dijeljenjem izmjerenih podataka s

3. ovisnost dinamičkog faktora pomaka o frekvencijskom omjeru (konstantna amplituda pobude) - dijeljenjem izmjerenih podataka s .

Stupanj prigušenja i prirodna frekvencija može se odrediti iz bilo koje od navedenih krivulja. Prirodna frekvencija jednaka je frekvenciji sile pobude u rezonanci. Stupanj prigušenja određuje se iz *pojasa polovice snage* jednadžbom (121), što znači da je potrebno odrediti amplitudu odziva pri rezonanci te frekvencije za koje je amplituda odziva jednaka .



# 2 Sustavi s više stupnjeva slobode

## 1 Jednadžba gibanja slobodnih oscilacija

Općenito, sustavi s više stupnjeva slobode modelirani su kao etažni posmični okviri. Takavi sustavi se sastoje od koncentriranih masa, što znači da je potrebno pratiti različitih pomaka. Drugim riječima, jednadžba gibanja takvog sustava biti će zadana kao sustav od N diferencijalnih jednadžbi drugog reda.

Sustav s više stupnjeva slobode, koji će biti razmatran u ovom radu, je dvoetažni posmični okvir prikazan na slijedećoj slici, a osnovni pojmovi biti će objašnjeni pomoću slobodnih oscilacija navedenog modela.

ubaci sliku sustava i ekvivalentnog modela

Sustavi sa slike imaju dva dinamička stupnja slobode jer su moguće dvije translacije dviju različitih masa, pa jednadžbu gibanja opisuje sustav od dvije diferencijelne jednadžbe drugog reda.

(128)

Zapisano u matričnoj formi:

(129)

Odnosno

(130)

Iz (128) i (129) vidi se da je sustav diferencijalnih jednadžbi povezan preko krutosti odnosno matrice krutosti. Opći oblik rješenja sustava je slijedeći:

(131)

Vektor možemo shvatiti kao konstantu integracije, a funkcija je jednostavna harmonijska funkcija oblika:

(132)

Druga derivacija (132) jest:

(133)

Stoga, druga derivacija od (131) glasi:

(134)

Uvrštavanjem (131) i (134) u (130) dobijemo:

(135)

Prvo trivijalno rješenje je za što implicira da je (sustav miruje). Netrivijalno rješenje se dobije izjednačavanjem zagrade s nulom:

(136)

Izraz (136) predstavlja realni problem vlastitih vrijednosti odnosno matrični problem vlastitih vrijednosti. Potrebno je odrediti dvije nepoznanice:

1. vlastite vektore

2. vlastite skalare

Prebacivanjem nepoznanica na jednu stranu dobijemo

(137)

U općenitom slučaju, izraz (137) predstavlja sustav od N algebarskih jednadžbi s N nepoznanica. Trivijalno rješenje sustava je za , a netrivijalno se određuje raspisom determinante matrice . Raspisom determinante navedene matrice, dobije se polinom N-tog stupnja kojeg nazivamo *karakterističnim polinomom*. Nultočke polinoma predstavljaju vlastite vrijednosti , odnosno kvadrirane prirodne frekvencije. Da bi nultočke polinoma bile realne pozitivne vrijednosti, matrice i moraju biti simetrične i pozitivno definitne. Uvijeti za pozitivnu definitnost u građevinarstvu su slijedeći:

1. za matricu - broj i raspored ležajeva u ispravnoj mreži mora biti takav da se spriječe pomaci krutog tijela

2. za matricu - moraju se ukloniti stupnjevi slobode bez pridružene koncentrirane mase. Uklanjanje nepotrebnih stupnjeva slobode, vrši se statičkom kondenzacijom.

Vlastiti vektori se određuju uvrštavanjem vrijednosti u matricu , stoga je očito da vektori nisu jedinstveni jer i njihovi višektratnici zadovoljavaju jednadžbu (137). Vektori nazivaju se *modalnim vektorima*, a definiraju oblik titranja sustava na frekvenciji . Prvi modalni vektor , naziva se temeljnim (osnovnim) modom, a frekvencija na kojoj sustav titra u navedenom modu () naziva se *vlastitom frekvencijom temeljnog moda*.

Ako su sve prirodne frekvencije različite od nula i međusobno različite, tada su svi vlastiti vektori linearno nezavisni. Skup od n linearno nezavisnih vektora čini bazu n-dimenzionalnog vektorskog prostora, pa je ukupno rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi linearna kombinacija svih pojedinačnih rješenja.

(138)

Pri čemu je :

(139)

Raspisivanjem (138) dobivamo:

Matricu nazivamo modalna matrica, a komponente vektora nazivaju se modalne koordinate. Opće rješenje pod (138) sada možemo zapisati matrično kao:

(140)

Osim modalne matrice postoji i spektralna matrica (x) koja se sastoji od N svojstvenih vrijednosti .

Za slučaj sustava s dva stupnja slobode, definiranog sustavom diferencijalnih jednadžbi pod (129), prirodne frekvencije i dobivene su rješavanjem kvadratne jednadžbe karakterističnog polinoma za . Modalne vektore možemo zapisati kao:

(141)

(142)

Ukupno rješenje sustava jest linearna kombinacija slijedećih vektora:

(143)

Stoga, ukupno opće rješenje glasi:

(144)

Bitno je za napomenuti da modalni vektor ne određuje maksimalne iznose ordinata već samo njihov relativni odnos, tj. modalni oblik ili oblik titranja. Da bismo dobili amplitude i , potrebno je rješiti inicijalni problem oblika i . Za slučaj slobodnog titranja, konstante i glase:

(145)

(146)

Shematski prikaz modova sustava s dva stupnja slobode prikazan je na slijedećoj s

## 2 Ortogonalnost modova

Kao što je već pokazano, modove (modalne oblike) definiraju vektori. Dva vektora su međusobno ortogonalna (okomita) ukoliko je njihov skalarni produkt jednak nuli. Razmotrimo li -ti i -ti mod sustava, dobijemo slijedeći sustav jednadžbi (iz (130)):

(147)

Donju jednadžbu pomnožimo s . U gornjoj jednadžbi prvo transponiramo te ju pomnožimo s . Sustav jednadžbi (147) postaje:

(148)

Oduzimanjem gornje i donje jednadžbe dobijemo:

(149)

Za vrijedi:

(150)

Uvrštavanjem u bilo koju od jednadžbi iz (148) dobijemo:

(151)

Jednadžbe pod (150) i (151) govore da su modovi, pomnoženi težinskim koeficijentima iz matrice krutosti ili matrice masa, međusobno ortogonalni (valjda). Kažemo da su modovi međusobno ortogonalni s obzirom na matricu mase ili matricu krutosti (valjda).

Poslijedica ortogonalnosti je dijagonalnost slijedećih pravokutnih matrica:

(152)

(153)

Članovi matrica računaju se prema slijedećim formulama:

(154)

(155)

Između elemenata matrica vrijedi slijedeći odnos:

(156)

U matričnoj formi:

(157)

## 3 Normiranje modova

Modalni vektori nisu jedinstveni jer su jednako predstavljeni vektorima dobivenim rješenjem problema vlastitih vrijednosti i njihovim višekratnicima. Drugim riječima, modalni vektor predstavljen je familijom kolinearnih vektora jer vrijedi slijedeća jednakost (iz (136))

Množenje vlastitog vektora skalarom, s ciljem postizanja željene forme modalnog vektora, naziva se normiranje modalnog vektora odnosno moda. Primjerice, željena forma modalnog vektora može biti vektor čiji je najveći element jedan:

Množenjem vektora s dobijemo:

Od posebnog značaja je normiranje modalne mase na jediničnu vrijednost. Kako je , mod potrebno je množiti sa , odnosno:

(158)

Gdje je normirani vektor -tog moda. Jednadžba (158) zapisana u matričnoj formi glasi:

(159)

Vrijedi slijedeća relacija:

(160)

Odnosno u matričnom obliku:

(161)

Gdje je jedinična matrica. Iz (154) slijedi:

## 4 Odziv sustava s više stupnjeva slobode na pobudu sinusnom silom

Kao što je pokazano u poglavlju 1, jednadžba gibanja sustava s stupnjeva slobode zadana je kao sustav od diferencijalnih jednadži drugog reda. U slučaju pobude harmonijskom silom, navedeni sustav će se sastojati od nehomogenih diferencijalnih jednadžbi drugog reda, koje će biti povezane preko matrice krutosti i/ili matrice mase.

Općenito, rješenje jedne proizvoljne nehomogene diferencijalne jednadžbe drugog reda oblika jest suma komplementarnog rješenja i partikularnog rješenja .

(162)

Komplementarno rješenje dobijemo izjednačavanjem diferencijalne jednadžbe s nulom odnosno:

(163)

Primjetimo da je komplementarno rješenje (rješenje jednadžbe (163)) zapravo rješenje homogene diferencijalne jednadžbe, a jednako je i za slobodne oscilacije i za prisilne oscilacije. Kod prisilnih oscilacija, komplementarno rješenje predstavlja prolazni dio odziva. Partikularno riješenje možemo pronaći koristeći se metodom neodređenih koeficijenata, a predstavlja prolazni dio odziva.

Analogno tome, komplementarno rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi dato je u (138) te predstavlja prolazni dio odziva, pa u slučaju prisilnih oscilacija preostaje nam odrediti još partikularno rješenje koje predstavlja prisilni dio odziva.

Zadana je jednadžba gibanja sustava s dva stupnja slobode prikazanog na slijedećoj slici

**UBACI SLIKU SUSTAVA**

(164)

Odnosno:

(165)

Gdje je vektor amplituda harmonijskih sila. Odziv sustava biti će harmonijski, jednake frekvencije, pa partikularno rješenje možemo pretpostaviti:

(166)

Gdje je vektor koeficijenata. Druga derivacija (166) glasi:

(167)

Uvrštavanjem (166) i (167) u (165) dobijemo:

(168)

Nakon sređivanja, jednadžba (168) poprima oblik:

(169)

Množenjem jednadžbe (169) s dobijemo:

Odnosno u matričnom obliku:

(170)

Komponente vektora glase:

(171)

(172)

Za , , i vektori glase:

(173)

(174)

Uz i te dijeljenjem (173) i (174) dobijemo vektor dinamičkog koeficijenta pomaka (bez dimenzija), koji ovisi o omjerima frekvencija te . Vektor je prikazan u nastavku

(175)

Prisilni dio odziva glasi:

(176)

Komponente vektora možemo iscrtati kao graf funkcije dinamičkog faktora i u ovisnosti o frekvencijskom omjeru .

## 5 Interesantan postupak za rješavanje 2dof

Zadana je jednadžba gibanja prisilnog titranja sustava s dva stupnja slobode.

(177)

Odziv sustava će biti sinusni, iste frekvencije kao i pobuda, pa rješenje pretpostavljamo u slijedećem obliku:

(178)

Druga derivacija pretpostavljenog rješenja glasi:

(179)

Uvrštavanjem (178) i (179) u (177) dobijemo:

(180)

Te nakon sređivanja:

(181)

Matrica predstavlja matricu dinamičke krutosti.

(182)

Da bismo rješili (181) potrebno je pronaći invers matrice dinamičke krutosti. Invers matrice dinamičke krutosti predstavlja matrica frekvencijskih funkcija odziva, a označavamo ju s . Jednadžba pod (182) može poprimiti slijedeći oblik:

(183)

Odnosno

(184)

Iz (161) i (??) slijedi:

(185)

Nakon sređivanja, dobijemo:

(186)

Član matrice možemo dobiti preko slijedeće jednadžbe:

(187)

Jednadžbu (187) možemo zapisati kao skalarni umnožak vektora:

(188)

Za zadani sustav, matrica modova normiranih s obzirom na masu glasi:

Izračun matrice frekvencijske funkcije odziva prikazan je u nastavku:

U brojniku, izrazimo kao pomoću relacije i .

Nakon sređivanja:

(189)

Analogno tome, dobiju se ostali članovi matrice te glase:

(190)

(191)

(192)

Matrica glasi:

(193)

Uvrštavanjem (193) u (181) dobijemo:

(194)

Množenjem prethodnog izraza s :

(195)

Raspisivanjem prethodne jednadžbe:

(196)

Te konačno, vektor glasi:

(197)

Dijeljenjem vektora s dobijemo slijedeće:

(198)

Komponente vektora predstavljaju funkcije ovisnosti dinamičkog faktora o frekvencijskim omjerima i . Njihovi grafovi prikazani su u nastavku.

**UBACI GRAFOVE**

Prisilni dio odziva glasi:

(199)

## 6 Modalna analiza

Modalna analiza je postupak određivanja osnovnih dinamičkih parametara linearnog sustava s ciljem definiranja matematičkog modela ponašanja sustava pod utjecajem dinamičkih sila. Modalna analiza temelji se na *principu superpozicije*, odnosno na činjenici da se ukupni odziv sustava može zapisati kao linearna kombinacija odziva pojedinih modova.

Razmotrimo jednadžbu gibanja sustava s više stupnjeva slobode pobuđenog proizvoljnom silom:

(200)

Klasično rješenje jednadžbe gibanja (200) prikazano je u poglavlju 4 na primjeru sustava s dva stupnja slobode pobuđenog harmonijskom silom. Za sustave s više od dva stupnja slobode ili za složenije sile pobude, rješavanje jednadžbe gibanja na klasični način može biti izuzetno teško ili nemoguće. U takvim slučajevima, jednadžba gibanja se rješava postupcima modalne analize.

Iz poglavlja 1 znamo da je rješenje jednadžbe gibanja slobodnog titranja sustava s više stupnjeva slobode linearna kombinacija odziva svih pojedinih modova odnosno:

(201)

Uvrštavanjem (201) u (200) dobijemo:

(202)

Množenjem jednadžbe (202) s dobijemo:

(203)

Zbog svojstva ortogonalnosti, isčezavaju svi članovi sumacija osim -tog člana, pa preostaje:

(204)

Koristeći relacije iz (155) i (154) jednadžba (204) poprima slijedeći oblik:

(205)

Gdje su , i poopćena masa, krutost i opterećenje -tog moda.

Postupkom, prikazanim u jednadžbama (201), (202), (203), (204), jednadžbu gibanja sustava predstavljenu sustavom diferencijalnih jednadžbi sveli smo na skup međusobno neovisnih diferencijalnih jednadžbi. Drugim riječima, sustav od stupnjeva slobode razložen je na međusobno neovisnih podsustava s jednim stupnjem slobode (princip superpozicije), pri čemu -ti podsustav prikazuje odziv sustava u -tom modu. Podsustave nazivamo *poopćeni sustav za n-ti mod*. "Jednadžba gibanja" poopćenog sustava za -ti oblik titranja predstavljena je diferencijalnom jednadžbom (205) čije rješenje predstavlja modalnu koordinatu -tog moda .

Odziv -tog moda je:

(206)

Da bismo odredili ukupni odziv sustava s -stupnjeva slobode, potrebno je riješiti modalnih jednadžbi, oblika definiranog pod (205). Matrični zapis sustava modalnih jednadžbi prikazan je u nastavku.

(207)

Gdje je matrica modalnih masa, matrica modalnih krutosti, vektor poopćenih opterećenja. Iz (153) i (152) znamo da su matrice i dijagonalne što znači da je (207) sustav međusobno neovisnih jednadžbi. Rješenjem navedenog sustava, dobijemo funkcije modalnih koordinata za sve modove sustava, a ukupni odziv definirano je linearnom kombinacijom (princip superpozicije) odziva svakog pojedinog moda. Odziv pojedinog moda definiran je (206), a ukupni odziv je:

(208)

1. Iako postupkom dugotrajnija (u ovom slučaju), metoda Laplaceove transformacije nam pruža jedinstven uvid u međudjelovanje sustava i pobude. [↑](#footnote-ref-1)
2. postupak svođenja prijenosne funkcije sustava na tablični oblik prikazan je u slijedećem pogavlju [↑](#footnote-ref-2)
3. Postotci od maksimalne amplitude [↑](#footnote-ref-3)