Investigación Formativa

Reinoso Daniel Alejandro   Reinoso César Daniel   Fernando Gualpa Villasis

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

4 de mayo de 2022

Matemática

"Puedo calcular el movimiento de los cuerpos celestes, pero no la locura de la gente"

(Isaac Newton)

Introducción

En la antigua Grecia, a parte de las rectas, planos y ciertos espacios en dos dimensiones, según registros basados en Flores, 1970, lo cual señala que los griegos tendrían interés en las curvas obtenidas de un cono, actualmente conocidas como secciones cónicas, en un intento por resolver el problema de "Delos"tenemos a Menecmo (320 a. C.) en su intento de resolverlo geométricamente. Uno de los procesos más importantes de la matemática, se centra en resolver problemas, dichos problemas se han extendido más allá de un estudio particular de una entrada, Resolver problemas que implicaba áreas y volúmenes, estaban más allá de un plano y una recta, lo cual introdujo nuevas nociones matemáticas como curvas y superficies.

Definición

Nos interesan las superficies de ecuación $z = f(x, y)$ o $F(x, y, z) = 0$, es decir, las superficies formadas por los puntos (x, y, z) que satisfacen la ecuación $z = f(x, y) \circ F(x, y, z) = 0$.

Existen seis tipos básicos de superficies cuádricas: Elipsoide, Hiperboloide de una hoja, Hiperboloide de dos hojas, Cono Elíptico, Paraboloide Elíptico y Paraboloide Hiperbólico. Solís, 2016.

Elipsoide

Ecuación canónica:

$$\frac{(x-i)^2}{a^2}+\frac{(y-j)^2}{b^2}+\frac{(z-k)^2}{c^2}=1$$

Parametrización:

$$s(u,v):\begin{cases} x = i - a\cos u \operatorname{sen} v \\ y = j - b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v; \qquad u\in[0,2\pi], v\in[0,\pi] \\ z = k - c\cos v \end{cases}$$

Hiperboloide de una hoja

Ecuación canónica:

$$\frac{(x-i)^2}{a^2}+\frac{(y-j)^2}{b^2}-\frac{(z-k)^2}{c^2}=1$$

Parametrización:

$$s(u,v):\begin{cases} x=i-a\cos u\cosh v \\ y=j-b\,\mathrm{sen}\, u\cosh v; \qquad u\in[0,2\pi], v\in\mathbb{R} \\ z=k-c\,\mathrm{senh}\, v \end{cases}$$

Hiperboloide de dos hojas

$$-\frac{(x-i)^2}{a^2}-\frac{(y-j)^2}{b^2}+\frac{(z-k)^2}{c^2}=1$$

Parametrización:

$$s(u,v):\begin{cases} x=i+a\operatorname{senh}u\cos v\\ y=j+b\operatorname{senh}u\operatorname{sen}v; \qquad u\in[0,+\infty], v\in[0,2\pi]\\ z=k+c\cosh u\end{cases}$$

Cono elíptico centrado

Ecuación canónica:

$$\frac{(x-i)^2}{a^2} + \frac{(y-j)^2}{b^2} - \frac{(z-k)^2}{c^2} = 0$$

Parametrización:

$$s(u,v) : \begin{cases} x = i + \frac{a}{c} \operatorname{senh} u \cos v \\ y = j + \frac{b}{c} \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v; \qquad u \in \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi] \\ z = k + \operatorname{senh} u \end{cases}$$

Paraboloide Eliptico

Ecuación canónica:

$$z - k = \frac{(x-i)^2}{a^2} + \frac{(y-j)^2}{b^2}$$

Parametrización:

$$s(u,v) : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{(u-i)^2}{a^2} + \frac{(v-j)^2}{b^2} + k \end{cases} ; \quad u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$$

Paraboloide Hiperbólico

Ecuación canónica:

$$z - k = -\frac{(x-i)^2}{a^2} + \frac{(y-j)^2}{b^2}$$

Parametrización:

$$s(u,v) : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = -\frac{(u-i)^2}{a^2} + \frac{(v-j)^2}{b^2} + k \end{cases} ; \quad u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

Considere el elipsoide y el hiperboloide de ecuación:

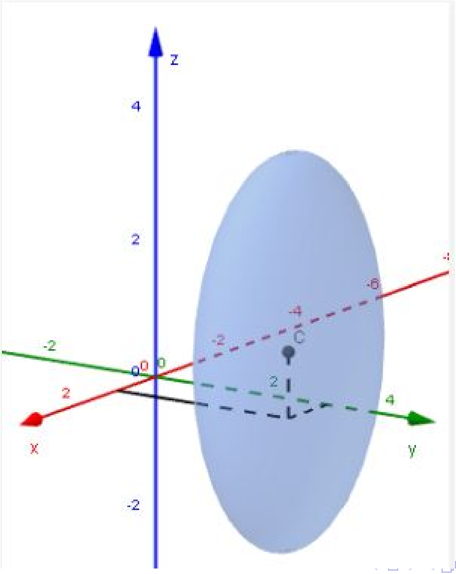
$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{1}+\frac{(z-1)^2}{9}=1$$

y

$$\frac{(x+1)^2}{1}+\frac{y^2}{4}-\frac{(z-1)^2}{9}=1$$

Encontrar el centro de las figuras.

Ejemplo



Definición

Una función de dos variables $z = f(x, y)$ mapea cada par ordenado (x, y) en un subconjunto D del plano real $\mathbb{R}^2$ a un único número real z. El conjunto D se llama dominio de la función. El rango de f es el conjunto de todos los números reales z que tiene al menos un par ordenado $(x, y) \in D$ tal que $f(x, y) = z$

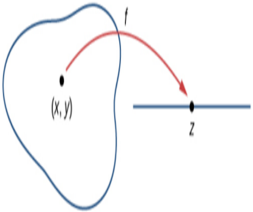


Figura: El dominio de una función de dos variables consta de pares ordenados (x, y).

Gráfica de una función de dos variables

La gráfica de una función de dos variables es el conjunto de puntos $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ tales que $z = f(x, y) y \quad x \in D$. Es decir,

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$$

Tal que su representación seria.

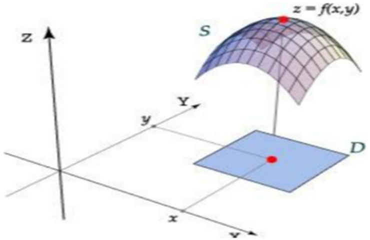


Figura: Función de dos variables.

Ejemplo

Representaciones geométricas de una tabla.

Recuperado de Strang, s.f., Suponga que la función f está representada por la siguiente tabla:

Cuadro: Tabla de dos Entradas

	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$
$x=0$	0	5	10	15
$x=1$	10	15	20	25
$x=2$	20	25	30	35
$x=3$	30	35	40	45

Flores, W. M. (1970). Cálculo en varias variables.
https://archive.org/details/2012CalculoEnVariasVariables
Solís, Á. (2016). Gráficas de superficies cuádricas y trazas empleando GeoGebra. *Revista Digital Matemática*, *16*(1), 1-34.
Strang, G. (s.f.). Calculus volume 3.
https://open.umn.edu/opentextbooks/textbooks/371

Gracias por su atención!