Big Data

Assignment 5

Gruppe 5
November 19, 2017

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Task 1

i)
Kreuzprodukt von Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ is nicht assoziativ.
Gegenbeispiel:
$a = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} a \times (b \times c) &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned} (a \times b) \times c &= \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\implies a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$
ii)
Addition von Matrizen aus $\mathbb{R}^{m \times n}$ ist eine Gruppe, also auch ein Monoid.
($\mathbb{R}^{m \times n}$,+,0), wobei 0 die Nullmatrix (Matrix mit allen Einträgen Null) ist
iii)
Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers ganzer Zahlen ist ein Monoid.
Neutrales Element e = 0, denn ggT(a,0) = a , $\forall a \in \mathbb{Z}$
Assoziativität: ggT(a,b,c) = ggT(a,ggT(b,c)) = ggT(ggT(a,b),c) (muss man das noch beweisen??)
($\mathbb{Z}$,ggT,0)

iv)
Binäre XOR-Verknüpfung Boolescher Werte ist ein Monoid.
Neutrales element e = false, denn $a \oplus false = a, \forall a \in \{true, false\}$
Assoziativität: $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$
Beweis:

a	b	c	$a \oplus (b \oplus c)$	$(a \oplus b) \oplus c$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

({true,false}, $\oplus$,false)
v)
Vereinigung von Mengen is ein Monoid.
Neutrales Element $e = \emptyset$ denn $A \cup \emptyset = A$
Assoziativität: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Beweis: CLICKME
(S,$\cup$, $\emptyset$), wobei S die Menge ist