

Redes Bayesianas: Qué son? (II)

Aritz Pérez¹ Borja Calvo²

Basque Center for Applied Mathematics

UPV/EHU

Donostia, Febrero de 2015

Bibliografía

Castillo97: E. Castillo, J.M. Gutiérrez, y A.S. Hadi (1997).
Sistemas Expertos y Modelos de Redes Probabilísticas. Academia
de Ingeniería.

Modelo de dependencia

- Modelo de dependencia definido **gráficamente**: Criterio de separación gráfica (**d-separación**)
- Si p factoriza conforme a \mathbf{G} entonces $\mathcal{I}_{\mathbf{G}} \Rightarrow \mathcal{I}_p$
- $\mathcal{I}_{\mathbf{G}}$ es un modelo **compatible** con p
- Si es compatible **se puede modelar** p de forma exacta

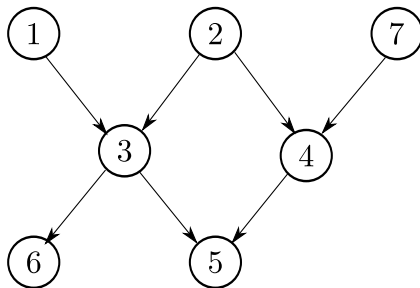
Criterio gráfico

D-separación [ver Castillo'96, p.186, Def 5.4]

Las variables \mathbf{X}_A son independientes de \mathbf{X}_B condicionadas a \mathbf{X}_C si las variables \mathbf{X}_C **bloquean TODOS los caminos** del **subgrafo moral del menor subconjunto ancestral**.

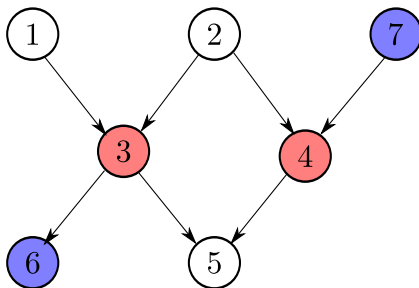
- 1 Identificar **subgrafo** de la unión de **conjuntos ancestrales**
- 2 **Moralizar** el subgrafo
- 3 Comprobar si las variables que condicionan **bloquean** todos los caminos

Ejemplos



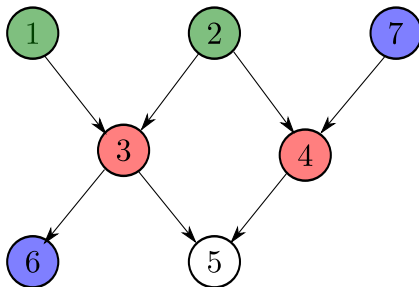
- $i(6, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|5)?$
- $i(1, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|6)?$

Ejemplos



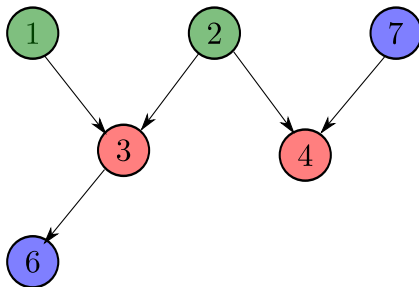
- $i(6, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|5)?$
- $i(1, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|6)?$

Ejemplos



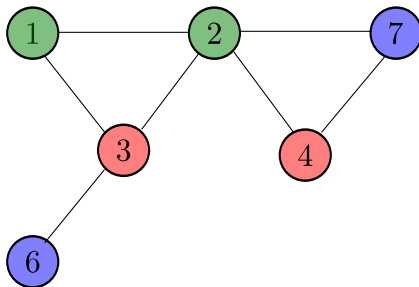
- $i(6, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|5)?$
- $i(1, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|6)?$

Ejemplos



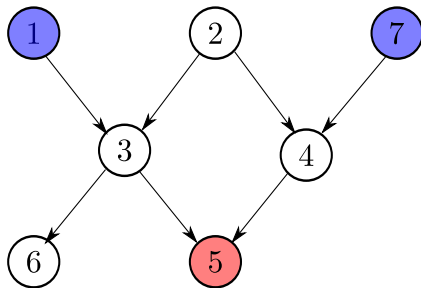
- $i(6, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|5)?$
- $i(1, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|6)?$

Ejemplos



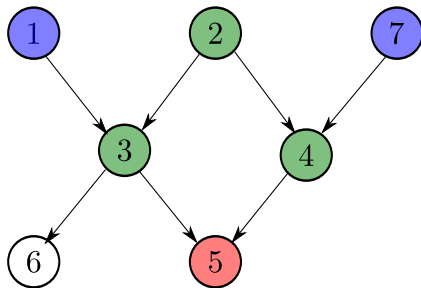
- $i(6, 7|3, 4)$? bloquea todos los caminos
- $i(1, 7|5)$?
- $i(1, 7|3, 4)$?
- $i(1, 7|6)$?

Ejemplos



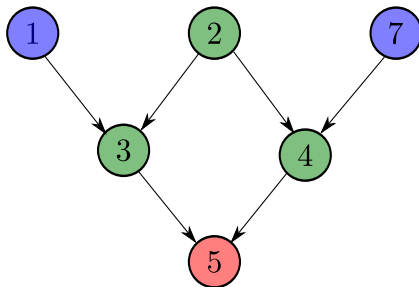
- $i(6, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|5)?$
- $i(1, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|6)?$

Ejemplos



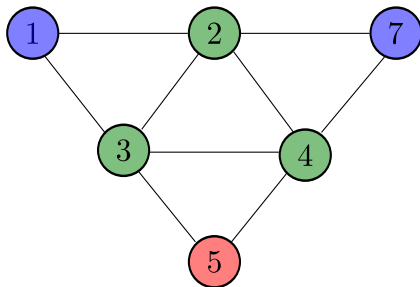
- $i(6, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|5)?$
- $i(1, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|6)?$

Ejemplos



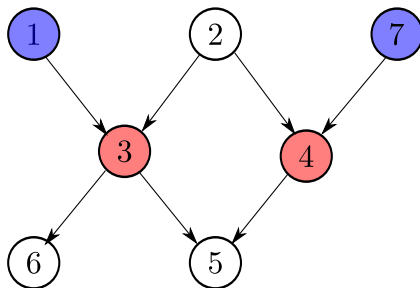
- $i(6, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|5)?$
- $i(1, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|6)?$

Ejemplos



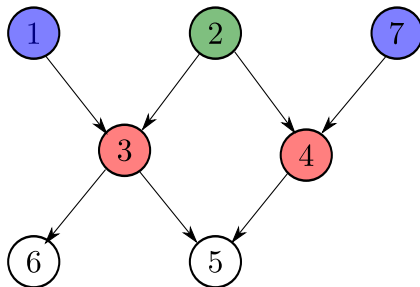
- $i(6, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|5)?$ No bloquea todos los caminos
- $i(1, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|6)?$

Ejemplos



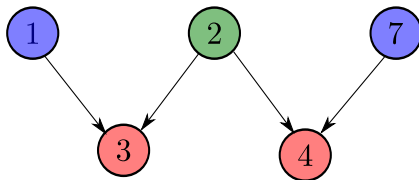
- $i(6, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|5)?$
- $i(1, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|6)?$

Ejemplos



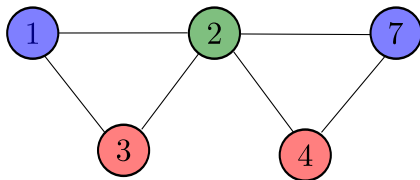
- $i(6, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|5)?$
- $i(1, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|6)?$

Ejemplos



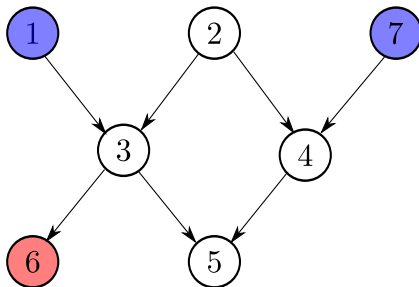
- $i(6, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|5)?$
- $i(1, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|6)?$

Ejemplos



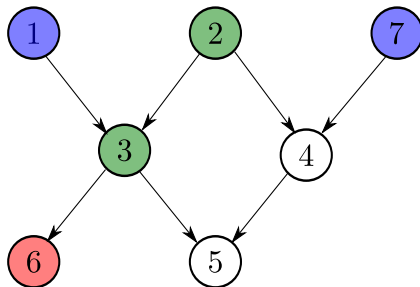
- $i(6, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|5)?$
- $i(1, 7|3, 4)?$ No bloquea todos los caminos
- $i(1, 7|6)?$

Ejemplos



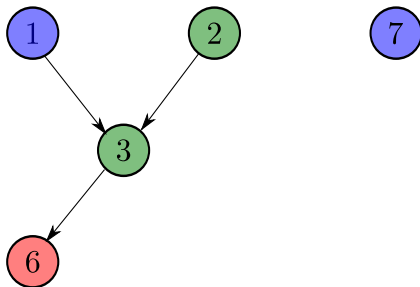
- $i(6, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|5)?$
- $i(1, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|6)?$

Ejemplos



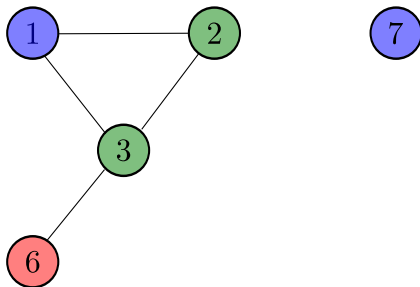
- $i(6, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|5)?$
- $i(1, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|6)?$

Ejemplos



- $i(6, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|5)?$
- $i(1, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|6)?$

Ejemplos



- $i(6, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|5)?$
- $i(1, 7|3, 4)?$
- $i(1, 7|6)?$ Bloquea todos los caminos

Manto de Markov

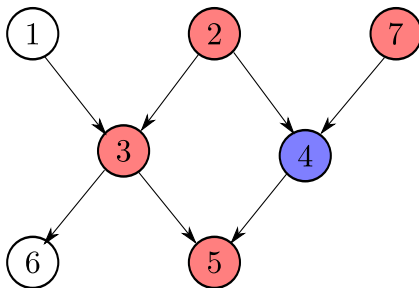
Definición

Padres, hijos y padres de los hijos

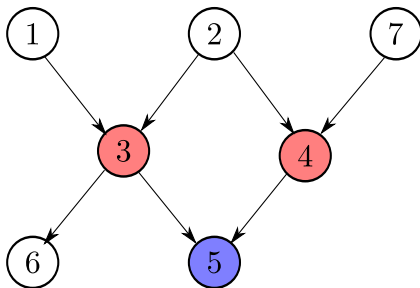
- **$\text{Mb}(X_j)$** **bloquea** todos los **caminos** a X_j
- **Independencia** $i(1, \dots, j-1, j+1, \dots, n; j | \text{Mb}(X_j))$:

$$p(X_j | X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n) = p(X_j | \text{Mb}(X_j))$$
- Aplicaciones en el **aprendizaje**, la **clasificación** supervisada,...

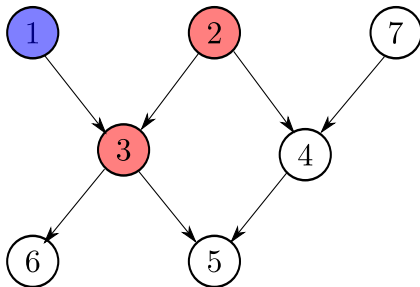
Manto de Markov



Manto de Markov



Manto de Markov



Mapa perfecto

Modelo de dependencia (definido gráficamente) para el que

$$\mathcal{I}_{\mathbf{G}} \equiv \mathcal{I}_p$$

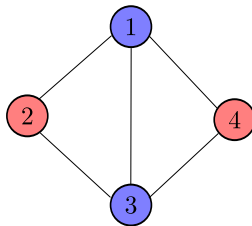
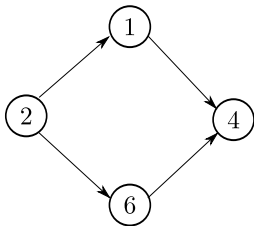
- **No es siempre posible** construir modelos de dependencia perfectos, e.g. $\mathcal{I}_p = \{i(1; 3|2, 4), i(2; 4|1, 3)\}$

Mapa perfecto

Modelo de dependencia (definido gráficamente) para el que

$$\mathcal{I}_G \equiv \mathcal{I}_p$$

- **No es siempre posible** construir modelos de dependencia perfectos, e.g. $\mathcal{I}_p = \{i(1; 3|2, 4), i(2; 4|1, 3)\}$



Mapa de independencia (I-mapa)

Modelo de dependencia para el que

$$\mathcal{I}_G \subseteq \mathcal{I}_p$$

- **Son** todas **las que están** pero **no están** todas **las que son**
- Los I-mapas son modelos **compatibles** con p definidos gráficamente
- El I-mapa trivial es el **grafo completo**: **demasiados parámetros**

I-mapa minimal

\mathcal{I}_G es un I-mapa minimal de \mathcal{I}_p si es un I-mapa y **eliminar un arco** de G hace que pierda la condición de ser un I-mapa

- Reflejan el **máximo** número de **independencias** de p
- Interesa construir grafos que sean I-mapas minimales: **mínimo número de parámetros** que permiten modelar p de forma exacta
- Todos los **semigrafoides** tienen un I-mapa minimal

Clases de equivalencia

Dos grafos diferentes pueden determinar un **mismo modelo** de dependencia: **Clases de equivalencia** [Castillo97, Sec. 6.5, p.262]

