Método de Euler mejorado para sistemas de EDOs

Ander Murua
Curso de *Computación en Ciencia e Ingeniería: Simulación Numérica*
Máster Universitario en Ingeniería Computacional y Sistemas Inteligentes

1. El algoritmo de Euler mejorado para sistemas de EDOs

Consideremos un problema de valor inicial de la forma

$$\frac{du}{dt} = f(t,u), \quad u(t_0) = u_0. \tag{1}$$

Hemos visto que la solución $u(t)$ de (6) se puede aproximar en los valores de t de la discretización temporal

$$t_0 = 0, \quad t_1 = h, \quad t_2 = 2h, \quad t_3 = 3h, \ldots$$

por medio del método de Euler. Sin embargo, el algoritmo de Euler requiere discretizaciones extremadamente finas (y por tanto, tiempos de CPU muy grandes) si se quieren obtener aproximaciones muy precisas. Veremos que el algoritmo de Euler se puede modificar para aproximar de forma más precisa los resultados $u(t_k)$ (para $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$). Aquí consideraremos una modificación del método de Euler conocida como el *algoritmo de Euler mejorado* (también llamado, más técnicamente, como el *método del punto medio explícito de un paso*).

Ya hemos visto que el algoritmo de Euler se basa en la igualdad aproximada

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} \approx u'(t) \tag{2}$$

que es más precisa cuanto más pequeña sea h. Resulta sin embargo, que la expresión $(u(t+h) - u(t))/h$ aproxima mucho mejor la derivada $u'(t)$ en el punto medio $t+h/2$ entre t y $t+h$ que en el extremo t, es decir, que la igualdad aproximada

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} \approx u'(t + \tfrac{h}{2}) \tag{3}$$

es mucho más precisa que (2) para valores de h suficientemente pequeños. Por tanto, teniendo en cuenta la igualdad aproximada (3), tenemos que

$$u(t+h) \approx u(t) + h\, u'(t + \tfrac{h}{2}),$$

y puesto que $u(t)$ es solución de la ecuación diferencial (6),

$$u'(t + \tfrac{h}{2}) = f(t, u(t + \tfrac{h}{2})).$$

Por otro lado, podemos aproximar $u(t + \frac{h}{2})$ como en el método de Euler, es decir,

$$u(t + \tfrac{h}{2}) \approx u(t) + \tfrac{h}{2}\, u'(t) = u(t) + \tfrac{h}{2}\, f(t, u(t)).$$

Esto se puede emplear para calcular de forma aproximada $u(t_1) = u(t_0 + h)$ a partir de $u(t_0)$, es decir

$$u(t_1) \approx u(t_0) + h\, f(t_0 + \tfrac{h}{2}, u(t_0 + \tfrac{h}{2})) \quad \text{donde} \quad u(t_0 + \tfrac{h}{2}) \approx u(t_0) + \tfrac{h}{2}\, f(t_0, u(t_0)).$$

Podemos extender esta idea, para aproximar $u(t_2)$ a partir de $u(t_1)$, para aproximar $u(t_3)$ a partir de $u(t_2)$, y así sucesívamente. En el caso general, para $k = 1, 2, 3, \ldots$, aproximaremos $u(t_k)$ a partir de $u(t_{k-1})$ del siguiente modo

$$u(t_k) \approx u(t_{k-1}) + h\, f(t_{k-1}, u(t_{k-1} + \tfrac{h}{2})) \quad \text{donde} \quad u(t_{k-1} + \tfrac{h}{2}) \approx u(t_{k-1}) + \tfrac{h}{2}\, f(t_{k-1}, u(t_{k-1})).$$

Finalmente llegamos al **Algoritmo de Euler mejorado**, donde partiendo de t_0 y u_0, y para una longitud de paso prefijada h (suficientemente pequeña), se calculan aproximaciones de la solución $u(t)$ del problema (6) para los valores de t de la discretización del tiempo

$$t_0, \quad t_1 = t_0 + h, \quad t_2 = t_0 + 2h, \quad t_3 = t_0 + 3h, \ldots$$

Las aproximaciones correspondientes

$$u_0 = u(t_0), \quad u_1 \approx u(t_1), \quad u_2 \approx u(t_2), \quad u_3 \approx u(t_3), \ldots$$

se obtienen como sigue: Partiendo de t_0 y u_0,

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \text{Calcular para } k & = & 1, 2, 3, \ldots \\ u_{k-\frac{1}{2}} & = & u_{k-1} + \frac{h}{2}\, f(t_{k-1}, u_{k-1}), \\ t_{k-\frac{1}{2}} & = & t_{k-1} + \frac{h}{2}, \\ u_k & = & u_{k-1} + h\, f(t_{k-\frac{1}{2}}, u_{k-\frac{1}{2}}), \\ t_k & = & t_{k-1} + h. \end{array}}$$

Las valores $u_{k-\frac{1}{2}} \approx u(t_{k-\frac{1}{2}})$ obtenidos en los tiempos intermedios $t_{k-\frac{1}{2}} = t_{k-1} + \frac{h}{2}$ son menos precisos que los $u_k \approx u(t_k)$ y se suelen calcular de forma local sin ser guardados para el resultado final.

2. Aplicación del método de Euler mejorado al ejemplo del modelo presa-depredador con tasa de caza periódica

Consideremos un parque natural habitado por alces y lobos, que interaccionan según el modelo presa-depredador de Lotka-Volterra. Es por tanto un sistema con dos variables de estado v y w. La variable de estado v representa el número de alces y w el número de lobos. Mediremos el tiempo t en meses. Supongamos además que los guardas del parque cazan de forma periódica (con un periodo de 12 meses) cierto porcentaje de alces, con distinta actividad de caza dependiendo de los meses del año. Esto se podría modelar por medio del siguiente sistema de EDOs:

$$\frac{d}{dt}v = (a - bw - g(t))v, \quad \frac{d}{dt}w = (cv - d)w,$$

donde $g(t)$ es una función períodica de t con un período de 12 meses. En particular, consideraremos el caso en que $a = d = 1,\ b = 1/50,\ c = 3/100$, y

$$g(t) = \frac{1}{20}(\sin(\pi\, t/12))^2. \tag{4}$$

Supongamos que inicialmente, en $t = 0$, hay 51 alces y 33 lobos. En concreto, todo ello da lugar al siguiente *problema de valor inicial*:

$$\frac{d}{dt}v = \left(1 - \frac{w}{50} - g(t)\right) v, \quad \frac{d}{dt}w = \left(\frac{3\,v}{100} - 1\right) w, \quad v(0) = 51, \quad w(0) = 33, \tag{5}$$

que tiene solución única $(v(t), w(t))$.

El problema de valor inicial (5) se puede escribir de forma vectorial como

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0, \tag{6}$$

donde

$$f(t, v, w) = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{w}{50} - g(t)\right) v \\ \left(\frac{3\,v}{100} - 1\right) w \end{pmatrix}, \qquad g(t) = \frac{1}{20}(\sin(\pi\, t/12))^2, \tag{7}$$

y $u_0 = (51, 33)$.

Nuestro objetivo es simular la evolución de las poblaciones de presas y depredadores a lo largo del tiempo t calculando $u(t) = (v(t), w(t))$ para distintos valores de t,

$$t_0 = 0, \quad t_1 = h, \quad t_2 = 2h, \quad t_3 = 3h, \ldots, \tag{8}$$

donde, para concretar, tomaremos $h = 1/40$. Como no disponemos de expresiones explícitas de la solución $u(t) = (v(t), w(t))$, aplicaremos el método de Euler mejorado descrito en la sección anterior para calcular, para $k = 1, 2, 3, \ldots$, las aproximaciones $u_k = (v_k, w_k) \approx u(t_k) = (v(t_k), w(t_k))$. En este caso, obtenemos las siguiente tabla de valores (por completitud, mostramos también las aproximaciones menos precisas calculadas para los tiempos intermedios):

k	$\mathbf{t_k}$	$\mathbf{u_k}$	$u_{k+\frac{1}{2}}$
0	**0**	**(51., 33.)**	(51,2168, 33,2186)
1	**0,025**	**(51,4297, 33,4455)**	(51,6426, 33,6725)
2	**0,05**	**(51,8513, 33,9079)**	(52,0599, 34,1434)
3	**0,075**	**(52,264, 34,3875)**	(52,468, 34,6316)
4	**0,1**	**(52,6672, 34,8845)**	(52,8661, 35,1374)
⋮	⋮	⋮	⋮

Si queremos aproximar la solución $u(t) = (v(t), w(t))$ de (5), por ejemplo, en el intervalo $t \in [0, 30]$, tomaremos $n = 30/h = 1200$, de modo que $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 30$.