Métodos de resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias: Parte I

Computación en ciencia e ingeniería: simulación numérica
MÁSTER UNIVERSITARIO EN INGENIERÍA COMPUTACIONAL Y SISTEMAS INTELIGENTES,
Euskal Herriko Unibertsitatea / Universidad del Pais Vasco (UPV/EHU)

Problema de valor inicial de dimensión d

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \qquad u(t_0) = u_0$$

donde $u = (u^1, \ldots, u^d) \in \mathbb{R}^d$ es el vector de estado.

Problema de valor inicial de dimensión d

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \qquad u(t_0) = u_0$$

donde $u = (u^1, \ldots, u^d) \in \mathbb{R}^d$ es el vector de estado.

Datos del problema:

- Tiempo inicial t_0,
- Valor inicial $u_0 = (u_0^1, \ldots, u_0^d)$ del vector de estado,
- Lado derecho de la EDO: La función vectorial $f(t, u)$.

Problema de valor inicial de dimensión d

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \qquad u(t_0) = u_0$$

donde $u = (u^1, \ldots, u^d) \in \mathbb{R}^d$ es el vector de estado.

Datos del problema:

- Tiempo inicial t_0,
- Valor inicial $u_0 = (u_0^1, \ldots, u_0^d)$ del vector de estado,
- Lado derecho de la EDO: La función vectorial $f(t, u)$.
  Es decir, si $u = (u^1, \ldots, u^d)$,

$$f(t, u) = f(t, u^1, \ldots, u^d) = \begin{pmatrix} f^1(t, u^1, \ldots, u^d), \\ \vdots \\ f^d(t, u^1, \ldots, u^d), \end{pmatrix}.$$

Problema de valor inicial de dimensión d

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \qquad u(t_0) = u_0$$

donde $u = (u^1, \ldots, u^d) \in \mathbb{R}^d$ es el vector de estado.

Datos del problema:

- Tiempo inicial t_0,
- Valor inicial $u_0 = (u_0^1, \ldots, u_0^d)$ del vector de estado,
- Lado derecho de la EDO: La función vectorial $f(t, u)$.
  Es decir, si $u = (u^1, \ldots, u^d)$,

$$f(t, u) = f(t, u^1, \ldots, u^d) = \begin{pmatrix} f^1(t, u^1, \ldots, u^d), \\ \vdots \\ f^d(t, u^1, \ldots, u^d), \end{pmatrix}.$$

Se requiere calcular la solución $u(t)$ para distintos valores de t.

Recordemos que si no se dispone de una expresión de la solución $u(t)$, se recurre a la resolución numérica, es decir:

Recordemos que si no se dispone de una expresión de la solución $u(t)$, se recurre a la resolución numérica, es decir:

1. Elegir una discretización del tiempo, $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$, donde $t_k = t_{k-1} + h$, con h (la longitud de paso) pequeña, y

Recordemos que si no se dispone de una expresión de la solución $u(t)$, se recurre a la resolución numérica, es decir:

1. Elegir una discretización del tiempo, $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$, donde $t_k = t_{k-1} + h$, con h (la longitud de paso) pequeña, y
2. Calcular aproximaciones $u_k \approx u(t_k)$ para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Cada u_k es un vector de dimensión d.

Recordemos que si no se dispone de una expresión de la solución $u(t)$, se recurre a la resolución numérica, es decir:

1. Elegir una discretización del tiempo, $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$, donde $t_k = t_{k-1} + h$, con h (la longitud de paso) pequeña, y
2. Calcular aproximaciones $u_k \approx u(t_k)$ para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Cada u_k es un vector de dimensión d.

Dos métodos sencillos para calcular los u_k:

- Método de Euler: Para $k = 1, \ldots, n$

$$u_k = u_{k-1} + h\, f(t_{k-1}, u_{k-1}).$$

Recordemos que si no se dispone de una expresión de la solución $u(t)$, se recurre a la resolución numérica, es decir:

1. Elegir una discretización del tiempo, $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$, donde $t_k = t_{k-1} + h$, con h (la longitud de paso) pequeña, y
2. Calcular aproximaciones $u_k \approx u(t_k)$ para $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Cada u_k es un vector de dimensión d.

Dos métodos sencillos para calcular los u_k:

- Método de Euler: Para $k = 1, \dots, n$

$$u_k = u_{k-1} + h\, f(t_{k-1}, u_{k-1}).$$

- Método de Euler mejorado: Para $k = 1, \dots, n$,

$$u_k = u_{k-1} + h\, f\left(t_{k-1} + \frac{h}{2}, u_{k-1} + \frac{h}{2} f(t_{k-1}, u_{k-1})\right).$$

Recordemos que si no se dispone de una expresión de la solución $u(t)$, se recurre a la resolución numérica, es decir:

1. Elegir una discretización del tiempo, $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$, donde $t_k = t_{k-1} + h$, con h (la longitud de paso) pequeña, y
2. Calcular aproximaciones $u_k \approx u(t_k)$ para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Cada u_k es un vector de dimensión d.

Dos métodos sencillos para calcular los u_k:

- Método de Euler: Para $k = 1, \ldots, n$

$$u_k = u_{k-1} + h\, f(t_{k-1}, u_{k-1}).$$

- Método de Euler mejorado: Para $k = 1, \ldots, n$,

$$u_k = u_{k-1} + h\, f\left(t_{k-1} + \frac{h}{2}, u_{k-1} + \frac{h}{2} f(t_{k-1}, u_{k-1})\right).$$

¿En qué sentido es mejor el método de Euler mejorado?

Recordemos que si no se dispone de una expresión de la solución $u(t)$, se recurre a la resolución numérica, es decir:

1. Elegir una discretización del tiempo, $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$, donde $t_k = t_{k-1} + h$, con h (la longitud de paso) pequeña, y
2. Calcular aproximaciones $u_k \approx u(t_k)$ para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Cada u_k es un vector de dimensión d.

Dos métodos sencillos para calcular los u_k:

- Método de Euler: Para $k = 1, \ldots, n$

$$u_k = u_{k-1} + h\, f(t_{k-1}, u_{k-1}).$$

- Método de Euler mejorado: Para $k = 1, \ldots, n$,

$$u_k = u_{k-1} + h\, f\left(t_{k-1} + \frac{h}{2}, u_{k-1} + \frac{h}{2} f(t_{k-1}, u_{k-1})\right).$$

¿En qué sentido es mejor el método de Euler mejorado?
Para tratar de responder a esto, consideraremos un ejemplo.

Consideremos el problema de la velocidad de la pelota de tenis,

$$\frac{dv}{dt} = -9{,}8 + \frac{v^2}{180}, \quad v(0) = 0,$$

Consideremos el problema de la velocidad de la pelota de tenis,

$$\frac{dv}{dt} = -9{,}8 + \frac{v^2}{180}, \quad v(0) = 0,$$

La solución exacta es

$$v(t) = -42\,\frac{1 - \exp(-7t/42)}{1 + \exp(-7t/42)}, \tag{1}$$

Obviamente, en este caso no necesitamos resolver numéricamente el problema.

Consideremos el problema de la velocidad de la pelota de tenis,

$$\frac{dv}{dt} = -9{,}8 + \frac{v^2}{180}, \quad v(0) = 0,$$

La solución exacta es

$$v(t) = -42\,\frac{1 - \exp(-7t/42)}{1 + \exp(-7t/42)}, \tag{1}$$

Obviamente, en este caso no necesitamos resolver numéricamente el problema. Sin embargo, aprovecharemos para estudiar el error cometido al aplicar el método de Euler:

Consideremos el problema de la velocidad de la pelota de tenis,

$$\frac{dv}{dt} = -9{,}8 + \frac{v^2}{180}, \quad v(0) = 0,$$

La solución exacta es

$$v(t) = -42\,\frac{1 - \exp(-7t/42)}{1 + \exp(-7t/42)}, \tag{1}$$

Obviamente, en este caso no necesitamos resolver numéricamente el problema. Sin embargo, aprovecharemos para estudiar el error cometido al aplicar el método de Euler:

1. Elegimos la discretización del tiempo t

   $$t_0 = 0,\ t_1 = h,\ t_2 = 2h, \ldots,\ t_{n-1} = (n-1)h,\ t_n = nh = 30,$$

   donde $n = 240$ y $h = 30/n = 1/8$,

Consideremos el problema de la velocidad de la pelota de tenis,

$$\frac{dv}{dt} = -9{,}8 + \frac{v^2}{180}, \quad v(0) = 0,$$

La solución exacta es

$$v(t) = -42\,\frac{1 - \exp(-7t/42)}{1 + \exp(-7t/42)}, \tag{1}$$

Obviamente, en este caso no necesitamos resolver numéricamente el problema. Sin embargo, aprovecharemos para estudiar el error cometido al aplicar el método de Euler:

1. Elegimos la discretización del tiempo t

   $$t_0 = 0,\ \ t_1 = h,\ \ t_2 = 2h, \ldots,\ \ t_{n-1} = (n-1)h,\ \ t_n = nh = 30,$$

   donde $n = 240$ y $h = 30/n = 1/8$,
2. y obtenemos las aproximaciones

   $$v(t_{j+1}) \approx v_{j+1} = v_j + h\,(-9{,}8 + v_j^2/180).$$

   para $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Consideremos el problema de la velocidad de la pelota de tenis,

$$\frac{dv}{dt} = -9{,}8 + \frac{v^2}{180}, \quad v(0) = 0,$$

La solución exacta es

$$v(t) = -42\,\frac{1 - \exp(-7t/42)}{1 + \exp(-7t/42)}, \tag{1}$$

Obviamente, en este caso no necesitamos resolver numéricamente el problema. Sin embargo, aprovecharemos para estudiar el error cometido al aplicar el método de Euler:

1. Elegimos la discretización del tiempo t

   $$t_0 = 0,\ t_1 = h,\ t_2 = 2h, \ldots,\ t_{n-1} = (n-1)h,\ t_n = nh = 30,$$

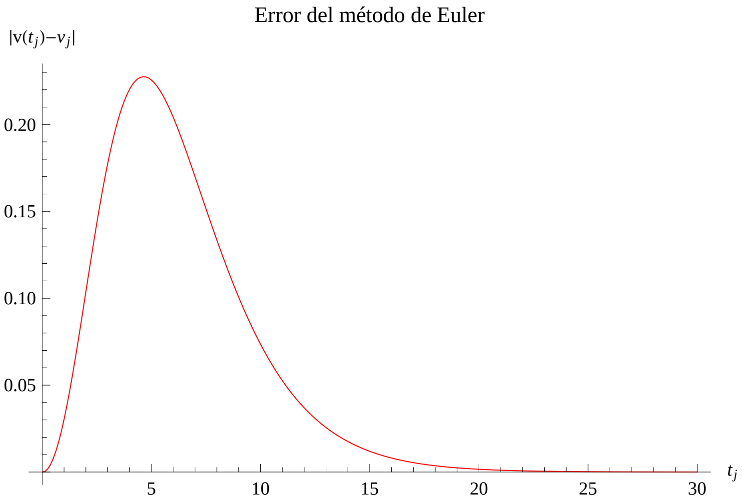
   donde $n = 240$ y $h = 30/n = 1/8$,
2. y obtenemos las aproximaciones

   $$v(t_{j+1}) \approx v_{j+1} = v_j + h\,(-9{,}8 + v_j^2/180).$$

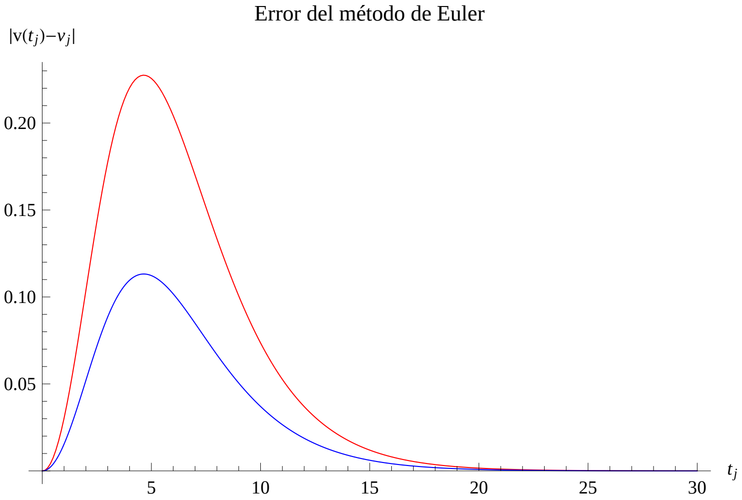
   para $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Vamos a representar gráficamente los errores $|v_j - v(t_j)|$ con respecto al tiempo t_j.

El error correspondiente a $h = 1/8$ es

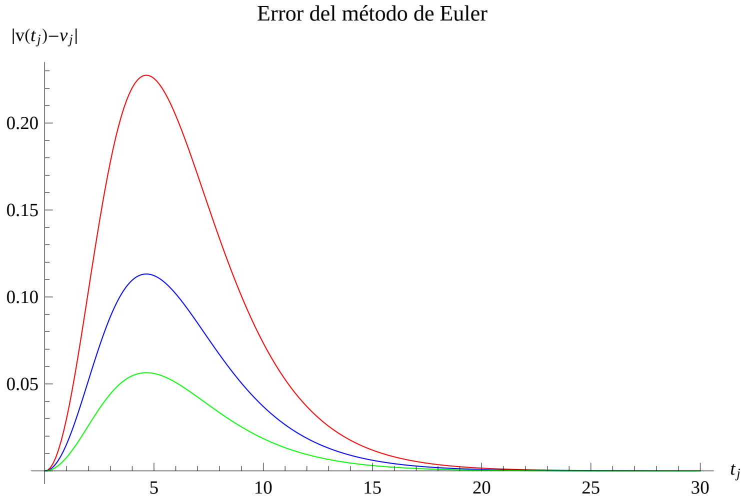


El error correspondiente a $h = 1/8$ es



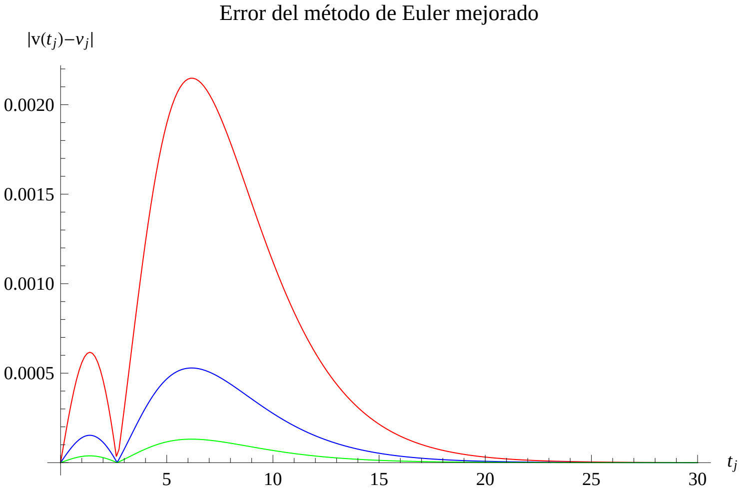
Si rehacemos los cálculos utilizando una discretización el doble de fina ($h = 1/16$), el error es menor.

El error correspondiente a $h = 1/8$ es

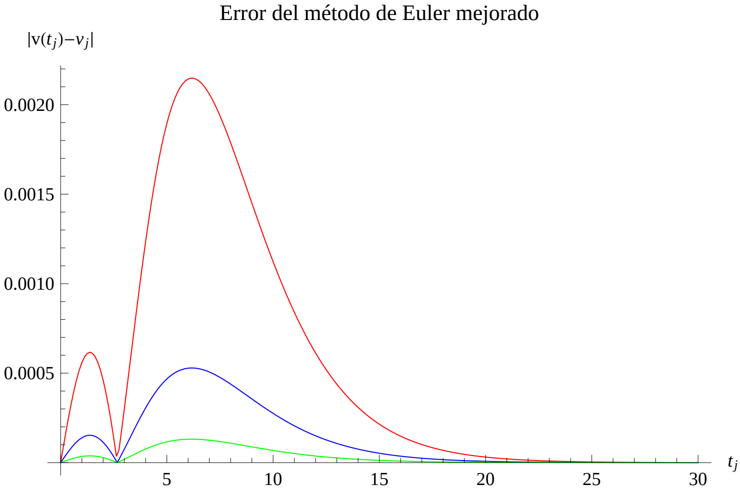


Si rehacemos los cálculos utilizando una discretización el doble de fina ($h = 1/16$), el error es menor. Y aún menor si utilizamos $h = 1/32$.

Si aplicamos el método de Euler mejorado para discretizaciones cada vez más finas ($h = 1/8$, $h = 1/16$, $h = 1/32$), Si aplicamos el método de Euler mejorado para discretizaciones cada vez más finas ($h = 1/8$, $h = 1/16$, $h = 1/32$), el error cometido también disminuye



Si aplicamos el método de Euler mejorado para discretizaciones cada vez más finas ($h = 1/8$, $h = 1/16$, $h = 1/32$), el error cometido también disminuye



Además, la reducción del error es más acentuada en este caso.

La reducción del error al disminuir la **longitud de paso** h es distinta para el método de Euler y el método de Euler mejorado:

La reducción del error al disminuir la **longitud de paso** h es distinta para el método de Euler y el método de Euler mejorado:

- En el método de Euler, al tomar una discretización el doble de fina (es decir, al dividir h por **dos**), el error se divide por dos aproximadamente.

La reducción del error al disminuir la **longitud de paso** h es distinta para el método de Euler y el método de Euler mejorado:

- En el método de Euler, al tomar una discretización el doble de fina (es decir, al dividir h por **dos**), el error se divide por dos aproximadamente. El error cometido es aproximadamente proporcional a h.

La reducción del error al disminuir la **longitud de paso** h es distinta para el método de Euler y el método de Euler mejorado:

- En el método de Euler, al tomar una discretización el doble de fina (es decir, al dividir h por **dos**), el error se divide por dos aproximadamente. El error cometido es aproximadamente proporcional a h.
- En el método de Euler mejorado, al tomar una discretización el doble de fina (es decir, al dividir h por **dos**), el error se divide por cuatro aproximadamente.

La reducción del error al disminuir la **longitud de paso** h es distinta para el método de Euler y el método de Euler mejorado:

- En el método de Euler, al tomar una discretización el doble de fina (es decir, al dividir h por **dos**), el error se divide por dos aproximadamente. El error cometido es aproximadamente proporcional a h.
- En el método de Euler mejorado, al tomar una discretización el doble de fina (es decir, al dividir h por **dos**), el error se divide por cuatro aproximadamente. El error cometido es aproximadamente proporcional a h^2.