Conceptos geométricos

M.C. Hernandez

<mamen.hernandez@ehu.eus>

Joseba Makazaga

<joseba.makazaga@ehu.eus>

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

UPV/EHU

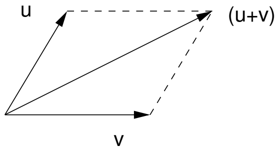
Vectores

- Definición de vector:

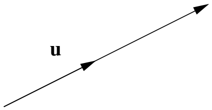
$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \dots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

- Suma de dos vectores:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_0 + v_0 \\ u_1 + v_1 \\ \dots \\ u_{n-1} + v_{n-1} \end{pmatrix}$$



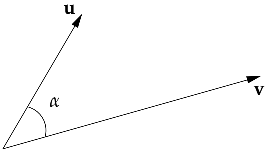
- Multiplicación de vector por escalar: $\alpha \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \alpha v_0 \\ \alpha v_1 \\ \dots \\ \alpha v_{n-1} \end{pmatrix}$



Vectores

- Producto escalar (*dot product*)

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{u}^T \mathbf{v} = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \ldots + u_{n-1} v_{n-1} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \| \cos(\alpha) \end{aligned}$$



El signo depende de $cos(\alpha)$

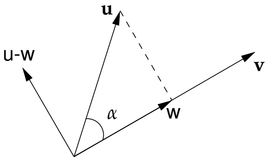
$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &> 0 \iff 0 \le \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &< 0 \iff \frac{\pi}{2} < \alpha \le \pi \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= 0 \iff \alpha = \frac{\pi}{2} \iff \mathbf{u} \perp \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &= \| \mathbf{u} \|^2 \end{aligned}$$

donde α es el ángulo *más pequeño* entre los dos vectores.

Vectores

- **w**: proyección del vector **u** sobre el vector **v**

$$\begin{aligned} \| \mathbf{w} \| &= \| \mathbf{u} \| \cos(\alpha) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\| \mathbf{v} \|} \\ \mathbf{w} &= \| \mathbf{w} \| \frac{\mathbf{v}}{\| \mathbf{v} \|} \\ &= \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\| \mathbf{v} \|^2} \right) \mathbf{v} \end{aligned}$$

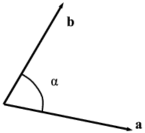


Si **v** está normalizado $\begin{cases} \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} \\ \| \mathbf{w} \| = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \end{cases}$

Vectores

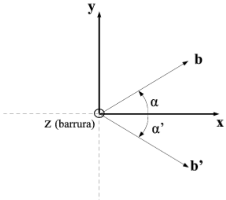
Ángulo entre dos vectores (sin orientación):

$$
\begin{aligned}
0 \leq \alpha \leq \pi & \\
\| \mathbf{a} \| \| \mathbf{b} \| \cos \alpha &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\
\alpha &= acos \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\| \mathbf{a} \| \| \mathbf{b} \|} \right)
\end{aligned}
$$



Ángulo (orientado) respecto a un vector del Sistema de Referencia:

$$
\begin{aligned}
-\pi \leq \alpha \leq \pi & \\
\alpha &= acos \left(\frac{b_x}{\| \mathbf{b} \|} \right) \\
\text{if}(b_y < 0) \quad & \alpha = -\alpha
\end{aligned}
$$



Vectores

- Producto vectorial
  - El resultado es otro vector.
  - Sean los vectores **u** y **v**, y $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ el producto vectorial. Entonces:
    - $\| \mathbf{w} \| = \| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \| = \| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \| \sin \alpha$
      donde α es el ángulo que va de $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$
    - $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$ y $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$
    - **u**, **v** y **w** forman un sistema dextrógiro (regla de la mano derecha)
  - El orden sí importa!
  - $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ sii $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$

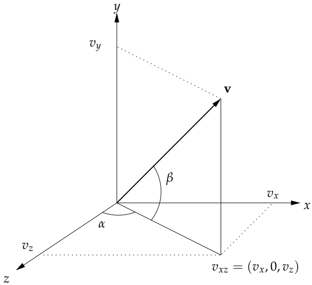
Coordenadas esféricas

- Coordenadas esféricas. Sea el vector unitario $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ posicionado en el origen.

$$(v_x, v_y, v_z) = (\cos\beta \sin\alpha, \sin\beta, \cos\beta\cos\alpha)$$

- Algoritmo:

$\mathrm{if}(\mid v_y \mid > \sin(\pi/2 - \epsilon))\mathrm{then}$
  $\alpha \leftarrow 0$
  $\beta \leftarrow \pi/2$
  $\mathrm{if}(v_y < 0)\beta \leftarrow -\beta$
else
  $\| v_{xz} \| \leftarrow \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$
  $\alpha \leftarrow \arccos \frac{v_z}{\|v_{xz}\|}$
  $\mathrm{if}(v_x < 0)\alpha \leftarrow 2\pi - \alpha$
  $\beta \leftarrow \arcsin v_y$



Coordenadas homogeneas

- Un punto $P \in \mathcal{R}^n$ se representa con $n+1$ coordenadas.
- En el espacio usaremos 4 coordenadas, en el plano 3.
- Diferenciamos punto y vector:

  punto: coordenada extra $= 1$ (distinto de 0)

  vector: coordenada extra $= 0$.

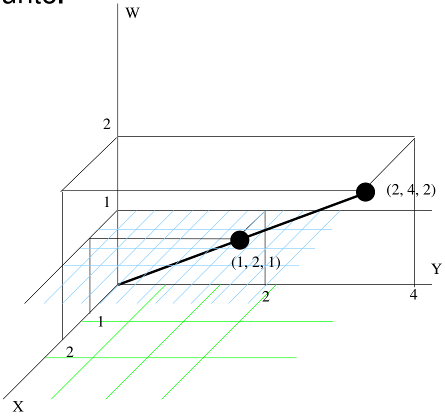
A tener en cuenta:

- Punto + Vector = Punto
- Vector + Vector = Vector
- Punto - Punto = Vector (!?)
- Escalar * Vector = Vector escalado
- Escalar * Punto = El mismo Punto!

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \dots \\ w \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{x}{w} \\ \frac{y}{w} \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} xw \\ yw \\ \dots \\ w \end{pmatrix}$$

Interpretación gráfica: 2D

- Un punto del plano tiene 3 coordenadas: x, y y w
- Cualquier punto de la recta que va al origen representa el mismo punto.



Matriz ortonormal

Sea la Matriz M:

$$M = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,n} \\ & \dots & & \vdots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \dots & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

- Matriz cuyas columnas son unitarias: $\sum_{j=1}^{n} u_{j,i}^2 = 1$ para $i = 1, 2, \dots n$
- Matriz cuyas columnas son ortogonale: $\sum_{j=1}^{n} u_{j,i} u_{j,k} = 0$ para $i \neq k$

Propiedades:

- $U^T U = I$
- si $w = Mu \Rightarrow \|w\| = \|u\|$, es decir, preserva las normas.
- si $w = Ma$ y $v = Mb \Rightarrow w \cdot v = a \cdot b$, es decir preserva el producto escalar.
- Consecuencia: preserva los ángulos

Rectas. Formulación implícita (2D)

- Ecuación implícita de una recta

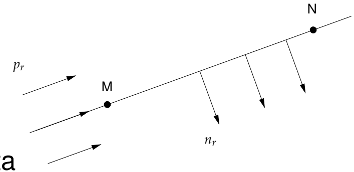
$$Ax + By + C = 0$$

- Vectores paralelos ($\mathbf{p_r}$)

$$\alpha(-B, A), \forall \alpha \in \mathcal{R}, \alpha \neq 0$$

- vectores perpendiculares ($\mathbf{n_r}$)

$$\alpha(A, B), \forall \alpha \in \mathcal{R}, \alpha \neq 0$$



- Coeficientes de la ecuación de la recta que pasa por **M** y **N**:

$$A = N_y - M_y; B = M_x - N_x;$$

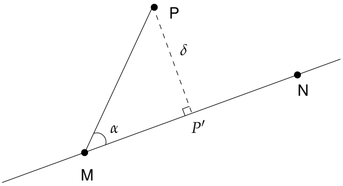
$$C = -\left((N_y - M_y)M_x + (M_x - N_x)M_y\right)$$

Rectas. Distancias.

Sean el punto P, y la recta definida por M y N. La distancia entre P y la recta será:

$$
\begin{aligned}
\| \mathbf{MP} \|^2 &= \| \mathbf{MP'} \|^2 + \delta^2 && \text{(Pitágoras)} \\
\| \mathbf{MP} \|^2 &= \left(\frac{\mathbf{MP}\cdot\mathbf{MN}}{\|\mathbf{MN}\|}\right)^2 + \delta^2, && \| \mathbf{MN} \| \neq 0 \\
\delta^2 &= \| \mathbf{MP} \|^2 - \frac{(\mathbf{MN}\cdot\mathbf{MP})^2}{\|\mathbf{MN}\|^2}, && \| \mathbf{MN} \| \neq 0
\end{aligned}
$$

Calculo de δ^2: 10(*), 13(+), 1(/)
Lo normal es no calcular δ, sino δ^2
Atención: **M** y **N** no deben coincidir! (si no el denominador es 0!)



Rectas. Distancias.

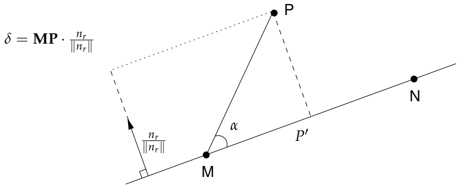
- Sean los puntos P, M y N y el vector normal unitario $\frac{\mathbf{n_r}}{\|\mathbf{n_r}\|}$
- La distancia entre P y la recta es la proyección del vector $\mathbf{MP}$ sobre la normal $\frac{\mathbf{n_r}}{\|\mathbf{n_r}\|}$:

$$\delta = \mathbf{MP} \cdot \frac{\mathbf{n_r}}{\| \mathbf{n_r} \|}$$

- Simplificando (2D):

$$\delta^2 = \frac{((P_x - M_x)A + (P_y - M_y)B)^2}{A^2 + B^2}$$

- Calculo de δ^2 (3D): 8(*), 7(+), 1(/)



Rectas. Formulación paramétrica.

- Ecuación

$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{o} + u\mathbf{d} \qquad a \leq u \leq b$$

  $\mathbf{o}$ Un punto de la recta
  $\mathbf{d}$ Vector de dirección

- Para cualquier dimensión!
- La recta se puede *reparametrizar* de forma que el vector **d** sea unitario.

Formulación paramétrica. Distancia

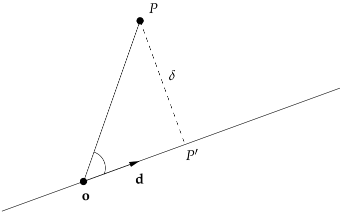
- Sea P'la proyección de un punto P en la recta $\mathbf{p}(u) = \mathbf{o} + u\mathbf{d}$ ($a \leq u \leq b$).

$$P' = \mathbf{o} + u_0\mathbf{d}$$
$$u_0 = \frac{\mathbf{d} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{o})}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}}$$

- Por tanto, la distancia es $\delta = \parallel P' - P \parallel$.

$$\delta = \begin{cases} \parallel \mathbf{P} - \mathbf{o} \parallel & u_0 \leq a \\ \parallel \mathbf{P} - (\mathbf{o} + u_0\mathbf{d}) \parallel & a < u_0 < b \\ \parallel \mathbf{P} - (\mathbf{o} + b\mathbf{d}) \parallel & u_0 \geq b \end{cases}$$

- Lo normal es calcular δ^2: 10(*), 11(+), 1(/) pero válido para cualquier dimensión.

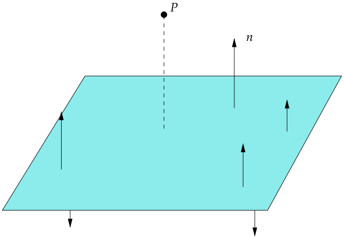


Plano (3D)

- Formulación implícita

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{X} &= d \end{aligned}$$

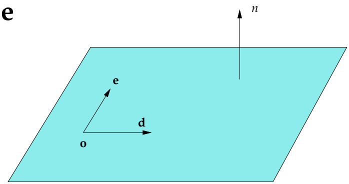
  donde $\mathbf{n} = (a, b, c)$ y $\mathbf{X} = (x, y, z)$
- Hay infinitas expresiones para el mismo plano $\alpha(a, b, c, d) \quad \forall \alpha$
- $\alpha(a, b, c)$ son las coordenadas de los vectores perpendiculares al plano (infinitos vectores). Solamente hay dos unitarios.
- Si el plano corresponde a un polígono de un objeto, el vector normal indica la dirección *hacia fuera* del objeto.



Plano (3D)

- Formulación paramétrica. Sean el punto $\mathbf{o}$, y los vectores $\mathbf{d}$ y $\mathbf{e}$, no paralelas entre sí ($\mathbf{d} \neq c\mathbf{e} \quad \forall c$).

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(u,v) &= \mathbf{o} + u\mathbf{d} + v\mathbf{e} \\ \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{d} \times \mathbf{e}}{\| \mathbf{d} \times \mathbf{e} \|} \end{aligned}$$



El plano divide el espacio

- El hiperplano divide el espacio en dos.
- Es facil saber en qué lado se encuentra un punto.
- Sea el punto P, y el plano $\mathbf{n} \cdot \mathbf{X} = d$.

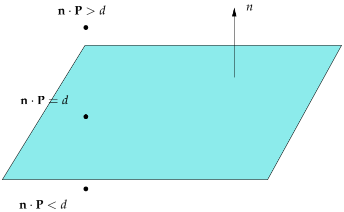
$\mathbf{n} \cdot P < d$ P está en el lado *negativo*

$\mathbf{n} \cdot P = d$ P en el plano: *coplanar*

$\mathbf{n} \cdot P > d$ P en el lado *positivo*

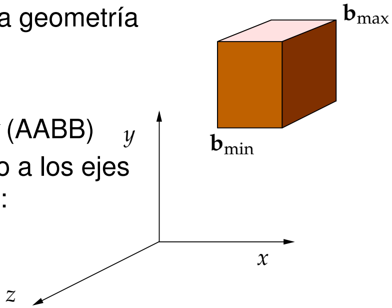
- La distancia del punto P respecto al plano

$$\mathrm{dist} = \mathbf{n} \cdot P - d$$



Bounding box

- Normalmente, envuelve una geometría compleja
- Frustum culling, colisiones
- *Axis Aligned Bounding Box* (AABB)
  - Caja alineada respecto a los ejes
  - La definen dos puntos: $(\mathbf{b}_{\min}, \mathbf{b}_{\max})$



Intersección entre AABB y un plano

- El AABB tiene cuatro diagonales
- Calcular la diagonal que más alineada esté con la normal del plano $\mathbf{n}$. ¿Cómo?
  1. Ángulo de cada diagonal respecto al vector normal
  2. Se puede acelerar... (nota: los signos de las coordenadas de la normal)
- Sean $\mathbf{v_{max}}$ y $\mathbf{v_{min}}$ los extremos de esa diagonal

$$\begin{cases} \mathbf{v_{min}} \text{ fuera} & \text{AABB fuera} \\ \mathbf{v_{max}} \text{ dentro} & \text{AABB dentro} \\ \text{otro caso} & \text{parte de AABB dentro} \end{cases}$$