# Problemas de valor inicial y métodos elementales de resolución numérica.
# Parte II: El método de Euler

Computación en ciencia e ingeniería: simulación numérica
MÁSTER UNIVERSITARIO EN INGENIERÍA COMPUTACIONAL Y SISTEMAS INTELIGENTES,
Euskal Herriko Unibertsitatea / Universidad del Pais Vasco (UPV/EHU)

## Velocidad de caida de un cuerpo con forma variable

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{c(t)}{M}\,|v|\,v, \qquad v(0) = 0.$$

donde $g = 9{,}8\, m/s^2$, $M$ es la masa del cuerpo, y el coeficiente aerodinámico $c(t)$ varía en el tiempo (pensemos por ejemplo, en un paracaidista que, antes de abrir el paracaídas, va cambiando la disposición de sus brazos y piernas).
Supongamos por ejemplo que $c(t) = a\,(2 + \cos(t))$, con $a > 0$.

¿Tiene dicho problema solución única?
Si. ¡Pero esta vez no disponemos de una fórmula para la solución!

Necesitamos algún método para obtener la solución de forma numérica.

Los ejemplos considerados hasta ahora son problemas de valor inicial de

### Ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \qquad u(t_0) = u_0.$$

donde $f(t, u)$ es una expresión que en general depende de

- la variable independiente $t$ (que normalmente es el tiempo)
- la variable de estado $u$,
- y posiblemente algunos parámetros del problema.

Consideremos el ejemplo anterior, con $g = 10$, $a = 1$, y $M = 6$: La variable de estado es $v$, el tiempo inicial $t_0 = 0$, el estado inicial $v_0 = 0$, y la función que define la ecuación diferencial es

$$f(t, v) = -10 + \frac{(2 + \cos(t))}{6}\, v^2.$$

El problema de valor inicial

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \qquad u(t_0) = u_0$$

tiene solución única si $f(t, u)$ es suficientemente suave.
Datos del problema:

- Tiempo inicial $t_0$,
- Valor inicial $u_0$ de la variable de estado,
- Lado derecho de la equación diferencial: $f(t, u)$.

Se requiere calcular la solución $u(t)$ para distintos valores de $t$.
Si no se dispone de una expresión de la solución $u(t)$, se recurre a la resolución numérica, es decir:

- Elegir una discretización del tiempo, $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$, donde $t_k = t_{k-1} + h$, con $h$ relativamente pequeño, y
- Calcular aproximaciones $u_k \approx u(t_k)$ para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

¿Pero como calcular $u_k \approx u(t_k)$ para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ si no disponemos de una expresión de la solución $u(t)$?

El método numérico más sencillo:

**Método de Euler**

Para $k = 1, \ldots, n$

$$u_k = u_{k-1} + h\, f(t_{k-1}, u_{k-1})$$

Justificación: Para $h$ suficientemente pequeño,

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} \approx \frac{d}{dt} u(t)$$

y por tanto, tomando $t = t_{k-1}$, y $t + h = t_k$,

$$u(t_k) \approx u(t_{k-1}) + h\, f(t_{k-1}, u(t_{k-1})).$$

¿Pero como calcular $u_k \approx u(t_k)$ para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ si no disponemos de una expresión de la solución $u(t)$?

El método numérico más sencillo:

**Método de Euler**

Para $k = 1, \ldots, n$

$$u_k = u_{k-1} + h\, f(t_{k-1}, u_{k-1})$$

Justificación: Para $h$ suficientemente pequeño,

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} \approx \frac{d}{dt} u(t) = f(t, u(t)),$$

y por tanto, tomando $t = t_{k-1}$, y $t + h = t_k$,

$$u(t_k) \approx u(t_{k-1}) + h\, f(t_{k-1}, u(t_{k-1})).$$