Interpolación lineal e interpolación cúbica de Hermite

Ander Murua
Curso de *Computación en Ciencia e Ingeniería: Simulación Numérica*
Máster Universitario en Ingeniería Computacional y Sistemas Inteligentes

1. Planteamiento del problema

Supongamos para una función $q(t)$ de variable real, conocemos sus valores en $t = t_0$ y $t = t_1$,

$$q(t_0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \tag{1}$$

donde t_0, t_1, q_0, q_1 son valores reales conocidos.

Solamente de dichos datos no podemos conocer exáctamente cual es la función $q(t)$, de modo que nos planteamos el objetivo de deducir una función $\tilde{q}(t)$ que aproxime a la función original en el intervalo $t \in [t_0, t_1]$.

2. Interpolación lineal

Suponiendo que la función original es suave (al menos, derivable con derivada continua) y que el intervalo $[t_0, t_1]$ es suficientemente corto, se llega a la conclusión de que la gráfica de la función $q(t)$ en dicho intervalo es parecida a una recta. En ese caso, podemos definir $\tilde{q}(t)$ como un polinomio lineal de t

$$\tilde{q}(t) = a\,(t - t_0) + b$$

determinando los coeficientes a y b por medio de las condiciones de interpolación

$$\tilde{q}(t_0) = q_0, \;\; \tilde{q}(t_1) = q_1.$$

Es decir, determinamos a y b resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$b = q_0, \quad a\,(t_1 - t_0) + b = q_1,$$

de donde se deduce que

$$b = q_0, \quad a = \frac{q_1 - q_0}{t_1 - t_0}.$$

Finalmente, llegamos a la conclusión de que podemos aproximar $q(t)$ como

$$q(t) \approx \frac{q_1 - q_0}{t_1 - t_0}(t - t_0) + q_0.$$

3. Interpolación cúbica de Hermite

Si la función original $q(t)$ no es suficientemente parecida a una recta en el intervalo $[t_0, t_1]$, la interpolación lineal no dará resultados suficientemente precisos. Supongamos además que disponemos, adicionalmente a los datos (1), de los valores de las derivadas $q'(t)$ en $t = t_0$ y $t = t_1$, es decir

$$q'(t_0) = p_0, \quad q'(t_1) = p_1,$$

donde p_0 y p_1 son valores reales conocidos. En ese caso, podemos obtener una aproximación más precisa (que con la interpolación lineal) por medio de lo que se conoce como la interpolación cúbica de Hermite. Ello consiste en elegir $\tilde{q}(t)$ como

$$\tilde{q}(t) = a\,(t - t_0)^3 + b\,(t - t_0)^2 + c\,(t - t_0) + d$$

tal que a, b, c, d se determinan imponiendo las condiciones

$$\begin{aligned} \tilde{q}(t_0) &= q_0, & \tilde{q}'(t_0) &= p_0, \\ \tilde{q}(t_1) &= q_1, & \tilde{q}'(t_1) &= p_1. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} d = q_0, \quad c &= p_0 \\ a\,(t_1 - t_0)^3 + b\,(t_1 - t_0)^2 + c\,(t_1 - t_0) + d &= q_1, \\ 3\,a\,(t_1 - t_0)^2 + 2\,b\,(t_1 - t_0) + c &= p_1, \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} d &= q_0, \\ c &= p_0 \\ b &= \frac{-(2p_0 + p_1)(t_1 - t_0) + 3(q_1 - q_0)}{(t_1 - t_0)^2}, \\ a &= \frac{(p_0 + p_1)(t_1 - t_0) - 2(q_1 - q_0)}{(t_1 - t_0)^3}. \end{aligned}$$

Resumiendo, si sabemos que la función original $q(t)$ cumple las condiciones

$$q(t_0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad q'(t_0) = p_0, \quad q'(t_1) = p_1,$$

podemos aproximar la función $q(t)$ como

$$q(t) \approx \frac{(p_0 + p_1)h - 2(q_1 - q_0)}{h^3}(t - t_0)^3 + \frac{-(2p_0 + p_1)h + 3(q_1 - q_0)}{h^2}(t - t_0)^2 + p_0(t - t_0) + q_0,$$

donde $h = t_1 - t_0$.