Problemas de valor inicial y métodos elementales de resolución numérica.
Parte III: Ejemplos de sistemas de EDOs

Computación en ciencia e ingeniería: simulación numérica
MÁSTER UNIVERSITARIO EN INGENIERÍA COMPUTACIONAL Y SISTEMAS INTELIGENTES,
Euskal Herriko Unibertsitatea / Universidad del Pais Vasco (UPV/EHU)

Un modelo depredador-presa: El sistema de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= (a - b\,w)\,v, \\ \frac{dw}{dt} &= (c\,v - d)\,w, \end{aligned}$$

- la variable independiente es t, el tiempo,
- las variables de estado son: v y w, que representan la población de presas y depredadores respectivamente,
- $a, b, c, d > 0$ son parámetros constantes del problema,
- la tasa de crecimiento de v es $a - b\,w$,
- la tasa de crecimiento de w es $c\,v - d$,
- Si se conocen los valores iniciales $v(0)$ y $w(0)$ (además de los valores de los parámetros $a, b, c, d > 0$), la solución $(v(t), w(t))$ se puede determinar de forma única,
- El sistema es autónomo (en el lado derecho no aparece t).

Una variante no autónoma del modelo de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= (a - b\,w - g(t))\,v,\\ \frac{dw}{dt} &= (c\,v - d)\,w,\end{aligned}$$

- la variable independiente es t, el tiempo (por ejemplo, medido en meses),
- las variables de estado son: v y w, que representan la población de alces y lobos respectivamente en un parque natural,
- $a, b, c, d > 0$ son parámetros constantes del problema,
- $g(t)$ representa la tasa de alces cazados (por unidad de tiempo) por los guardas del parque) se supone que la función $g(t)$ es conocida,)
- fijados $a, b, c, d > 0$, la función $g(t)$, y los valores iniciales $v(0)$ y $w(0)$, el problema tiene solución $(v(t), w(t))$ única,
- el sistema no es autónomo (en el lado derecho sí aparece t).

El sistema anterior se puede escribir de forma compacta como

$$\frac{d}{dt}u = f(t, u, p)$$

considerando

- el vector de estado $u = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,
- la derivada del vector de estado $\frac{d}{dt}u = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}v \\ \frac{d}{dt}w \end{pmatrix}$
- La función vectorial de varias variables $f(t, u, p) = f(t, v, w, p)$

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (t, (v, w), (a, b, c, d)) & \mapsto & \begin{pmatrix} (a - b\,w - g(t))\,v \\ (c\,v - d)\,w \end{pmatrix} \end{array}$$

donde se supone que $g(t)$ es una función conocida.

Problema de valor inicial de dimensión d

$$\frac{du}{dt} = f(t, u, p), \qquad u(t_0) = u_0$$

donde $u \in \mathbb{R}^d$ es el vector de estado.

Datos del problema:

- Tiempo inicial t_0,
- Valor inicial u_0 del vector de estado,
- Lado derecho de la EDO: La función vectorial $f(t, u, p)$,
- $p \in \mathbb{R}^m$ es un vector con los valores de los parámetros del problema.

Se requiere calcular la solución $u(t)$ para distintos valores de t.

Si no se dispone de una expresión de la solución $u(t)$, se recurre a la resolución numérica, es decir:

- Elegir una discretización del tiempo, $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$, donde $t_k = t_{k-1} + h$, con h relativamente pequeño, y
- Calcular aproximaciones $u_k \approx u(t_k)$ para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Cada u_k es un vector de dimensión d.

Conocido el estado del sistema en $t = t_0$, se trata de calcular (de forma aproximada) el estado en $t = t_1$, y a partir de ahí, el estado en $t = t_2$, etc,

$$(t_0, u_0) \longrightarrow (t_1, u_1) \longrightarrow (t_2, u_2) \longrightarrow \cdots$$

¿Pero como calcular $u_k \approx u(t_k)$ para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ si no disponemos de una expresión de la solución $u(t)$?

Método de Euler

Para $k = 1, \ldots, n$

$$\begin{pmatrix} t_{n-1} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} t_n \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{n-1} + h \\ u_{k-1} + h\, f(t_{k-1}, u_{k-1}, p) \end{pmatrix}$$

Importante: En el caso de sistemas de EDOs de dimensión $d > 1$,

- Cada u_k es un vector de d componentes ($u_k \in \mathbb{R}^d$),
- Para cada $(t_k, u_k) \in \mathbb{R}^{d+1}$, tenemos $f(t_k, u_k, p) \in \mathbb{R}^d$.

Veamos más ejemplos de modelos descritos por sistemas de EDOs:

Movimiento de un carro con dos ruedas paralelas

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{1}{2}\cos(\theta)(v_l(t) + v_r(t)), \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{1}{2}\sin(\theta)(v_l(t) + v_r(t)), \\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{L}(v_r(t) - v_l(t)),
\end{aligned}
$$

donde (x, y) son las coordenadas del centro del eje de las ruedas, θ es el ángulo del eje, L es la longitud del eje de las ruedas, y $v_l(t)$ y $v_r(t)$ son las velocidades a las que se están moviendo las ruedas izquierda y derecha respectivamente.

- Las variables de estado del sistema son x, y, θ,
- Se supone que $v_l(t)$ y $v_r(t)$ son funciones conocidas de t, y que el valor L es también conocido.
- Sistema no autónomo.
- Conocidos $x(t_0)$, $y(t_0)$, $\theta(t_0)$ para un instante t_0 inicial, y dadas las velocidades $v_l(t)$ y $v_r(t)$, la solución $(x(t), y(t), \theta(t))$ es única.

Movimiento pendular de una varilla rígida

suspendida de un extremo bajo el efecto de la gravedad y la resistencia al movimiento del aire

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{2L}\,\sin(\theta) - \frac{c}{M}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

donde $\theta(t)$ es el ángulo de la varilla en el instante t, L es la longitud de la varilla, g es la acc. de la gravedad, M es la masa, y c es un coefficiente relativo a la resistencia que ofrece el aire al movimiento de la varilla.

EDO de segundo orden. Si introducimos una nueva variable ω para la velocidad angular $\frac{d\theta}{dt}$,

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{3g}{2L}\,\sin(\theta) - \frac{c}{M}\,\omega^2,$$

obtenemos un sistema autónomo de EDOs de primer orden.

- El vector de estado del sistema es $u = (\theta, \omega)$,
- El vector de parámetros es $p = (L, g, c, M)$,
- $f(t, u, p) = f(t, (\theta, \omega), (L, g, c, M)) = (\omega, -\frac{3g}{2L}\,\sin(\theta) - \frac{c}{M}\,\omega^2)$.
- Dados $g, L, c, M, \theta(t_0), \omega(t_0)$, la solución $(\theta(t), \omega(t))$ es única.

Satélite artificial alrededor de la tierra

Coordenadas del satélite con resp. al centro de la tierra: (x, y, z).

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu\frac{x}{r^3}\left(1 - \frac{\epsilon R^2}{2r^2}\,F\right),$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\mu\frac{y}{r^3}\left(1 - \frac{\epsilon R^2}{2r^2}\,F\right),$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\mu\frac{z}{r^3}\left(1 - \frac{\epsilon R^2}{2r^2}\,G\right),$$

donde μ, ϵ, y R son la constante gravitacional, radio, y coeficiente de achatamiento de la tierra respectivamente, y

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad F = -3 + 15\frac{z^2}{r^2}, \quad G = -9 + 15\frac{z^2}{r^2}.$$

Sistema de EDOs de segundo orden. Se puede reescribir como un sistema de primer orden y dimensión 6 añadiendo las variables

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Vector de estado: $u = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)$.

Satélite artificial alrededor de la tierra (continuación)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ -\mu\frac{x}{r^3}\left(1-\frac{\epsilon R^2}{2r^2}F\right) \\ -\mu\frac{y}{r^3}\left(1-\frac{\epsilon R^2}{2r^2}F\right) \\ -\mu\frac{z}{r^3}\left(1-\frac{\epsilon R^2}{2r^2}G\right) \end{pmatrix},$$

donde

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad F=-3+15\frac{z^2}{r^2}, \quad G=-9+15\frac{z^2}{r^2}.$$

- Vector de estado: $u=(x,y,z,v_x,v_y,v_z)$.
- Sistema de EDOs autónomo de primer orden.
- Vector de parámetros $p=(\mu,\epsilon,R)$.