Problemas de valor inicial y métodos elementales de resolución numérica
Parte I: Ejemplos de problemas escalares

Computación en ciencia e ingeniería: simulación numérica
MÁSTER UNIVERSITARIO EN INGENIERÍA COMPUTACIONAL Y SISTEMAS INTELIGENTES,
Euskal Herriko Unibertsitatea / Universidad del Pais Vasco (UPV/EHU)

En este modelo matemático, se supone que la población $P(t)$ de una determinada especie varía a lo largo del tiempo de forma proporcional a la población presente.
Ello se traduce en la siguiente ecuación diferencial

Modelo Malthusiano de evolución de una población

$$\frac{dP}{dt} = r\,P, \tag{1}$$

donde r (un número real constante) es la diferencia entre la tasa de natalidad y la tasa de mortandad por unidad de tiempo.
La solución general del problema es

$$P(t) = P(0)\,e^{r\,t}. \tag{2}$$

Comprobemos que (2) es efectivamente solución de (1):

$$\frac{d}{dt}P(t) = \frac{d}{dt}P(0)\,e^{r\,t} = P(0)\,\frac{d}{dt}e^{r\,t} = P(0)\,r\,e^{r\,t} = r\,P(t).$$

En la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = r\,P$,

- $P = P(t)$ es la variable de estado,
- r es un parámetro constante del problema
- Lógicamente, la solución depende del valor de la población en el tiempo inicial $t = 0$. Si a la ecuación diferencial le añadimos una condición inicial, obtenemos el problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = r\,P, \quad P(0) = P_0, \tag{3}$$

donde P_0 tiene un valor concreto (el valor inicial).
El problema de valor inicial (3) tiene solución única

$$\begin{aligned} P(t) &= P_0\,e^{r\,t}, \\ \lim_{t\to\infty} P(t) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r < 0, \\ \infty & \text{si} \quad r > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

El modelo Malthusiano no es nada realista a la hora de describir la evolución de la población de una especie, pues no tiene en cuenta la limitación de recursos naturales. Para ello, se considera el

Modelo de Verhulst. Ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = (1 - P/K)\, s\, P, \qquad P(0) = P_0, \tag{4}$$

- $P = P(t)$, la población en el tiempo t, es la variable de estado,
- la tasa de crecimiento $r(P) = (1 - P/K)\, s$ depende de P,
- $s > 0$ y $K > 0$ son parámetros del problema,
- $P_0 > 0$ es el valor inicial de la población.

El problema (4) tiene una única solución,

$$P(t) = \frac{K\, P_0}{P_0 + (K - P_0)e^{-s\, t}},$$

y la población $P(t)$ siempre tiende hacia K cuando $t \to \infty$. Obviamente, si $P_0 = K$, entonces $P(t) = K$ para todo t.

Velocidad de caida de un cuerpo en atmósfera uniforme

Sea v la velocidad de caída del cuerpo,

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{c}{M}\,|v|\,v, \qquad v(0) = 0.$$

con los siguientes parámetros constantes:

- g es la aceleración de la gravedad ($g = 9{,}8\, m/s^2$ cerca del nivel del mar)
- M es la masa del cuerpo,
- $c > 0$ es un parametro relativo a la resistencia al avance que ejerce el aire sobre el cuerpo que cae. (El parámetro c depende de la densidad del aire, y de la textura, forma, y orientación del cuerpo.)

¿Tiene dicho problema solución única? Si:

$$v(t) = -v_T \frac{1 - \exp(-2gt/v_T)}{1 + \exp(-2gt/v_T)}, \quad \text{donde} \quad v_T = \sqrt{g\,M/c}.$$

Observese que $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = v_T$ (velocidad terminal).