2011 年 6 月　思茅师范高等专科学校学报　Jun. 2011
第 27 卷　第 3 期　Journal of Simao Teachers' College　Vol. 27　No. 3

魔方览胜

余江龙
(思茅师范高等专科学校计算机科学系,云南　普洱　665000)

[摘　要]　魔方是一种机械智力玩具。自发明以来,深得大众的喜爱,魔方复原速度不断提高的同时也创造了各种美丽的魔方艺术图案。利用电脑的强大计算功能,魔方的上帝之数不断的缩小。

[关键词]　魔方;魔方复原;上帝之数;魔方艺术
[中图分类号]TP391.414　[文献标识码]A　[文章编号]1008-8059(2011)03-0034-04

魔方(Rubik´Cube)是匈牙利建筑学教授和雕塑家鲁比克·艾尔内(Rubik Ern),于 1974 年发明的机械益智玩具,最初的名称叫 Magic Cube (如图 1 所示),1980 年 Ideal Toys 公司贩售此玩具,并将名称改为 Rubik´cube。魔方在 20 世纪 80 年代最为风靡,至今未衰。截至 2009 年,魔方在全世界已经售出了 3 亿 5 千多个。

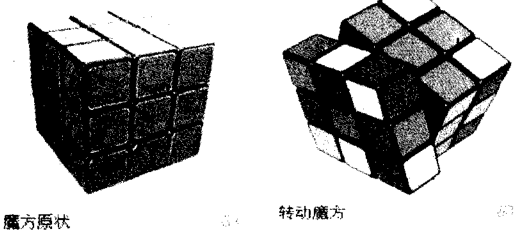

图 1　Magic Cube

1 结构

三阶魔方由 1 个中心轴、6 个中心块、12 个边块及 8 个角块构成,共 26 块(如图 2 所示),当它们组合在一起的时候每个零件会互相牵制不会散开,并且任何一面都可水平转动而不影响到其他方块。面是 3×3 块的平面,层是平面 3×3 块所处的 3×3×1 块。

1.1 中心块

中心块与中心轴连接在一起,但可以顺着轴的方向自由转动。(如图 3 所示)

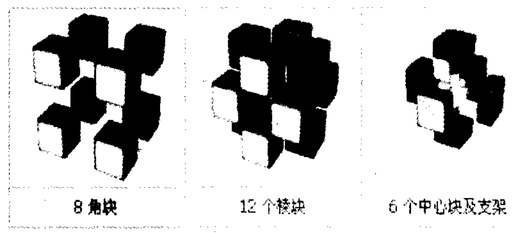

图 2　角块、棱块、中心块及支架

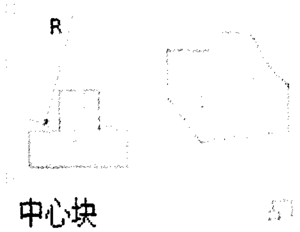

图 3　中心块

①　[收稿日期]2011-04-11
[作者简介]余江龙(1977~),男,云南沅江人,讲师,主要研究方向为数字图像处理。

中心块的表面为正方形，结构略呈长方体，但长方体内侧并非平面，另外中心还有一个圆柱体连接至中心轴。

从侧面看，中心块的内侧会有一个圆弧状的凹槽，组合后，中心块和边块上的凹槽可组成一个圆形。旋转时，边块和角块会沿着凹槽滑动。

1.2 边块（棱块）

边块的表面是两个正方形，结构类似一个长方体从立方体的一个边凸出来，这样的结构可以让边块嵌在两个中心块之间（如图4所示）。

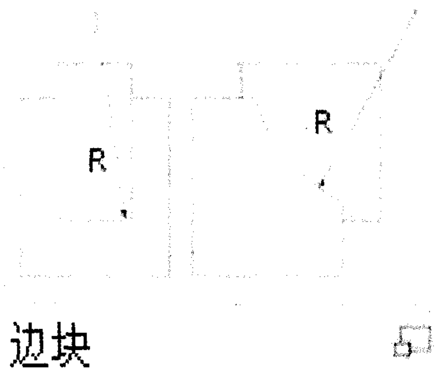

图4　边块

长方体表面上的弧度与中心块上的弧度相同，可以沿着滑动。立方体的内侧有缺角，组合后，中心块和边块上的凹槽可组成一个圆形。旋转时，边块和角块会沿着凹槽滑动。另外，这个缺角还被用来固定角块。

1.3 角块

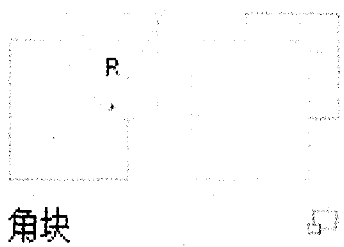

图5　角块

角块的表面是三个正方形，结构类似一个小立方体从立方体的一个边凸出来，这样的结构可以让角块嵌在三个边块之间（如图5所示）。

与边块相同，小立方体的表面一样有弧度，可以让角块沿着凹槽旋转。

2 配色

其实魔方并不只有一种配色，现在所流行的是官方版本，事实上也还有其它版本的配色（非官方标准六色的方块不在以下讨论范围中）。

2.1 官方配色

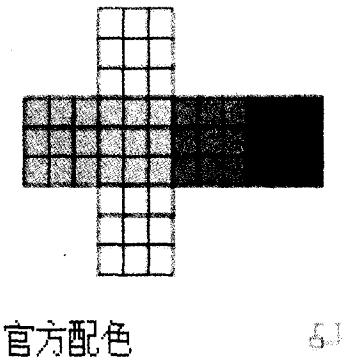

图6　官方配色

鲁比克公司听取色彩研究者的意见，将相对两面的颜色安排为相同色系，也就是白黄相对、红橘相对、蓝绿相对，且蓝、橘、黄三色以顺时钟排列（如图6所示）。

2.2 日本配色

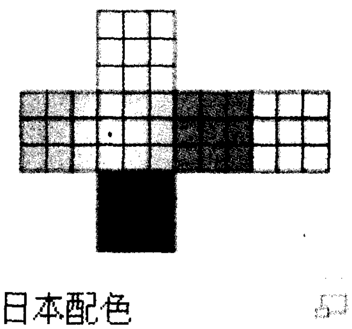

图7　日本配色

日本配色是鲁比克教授最初研发出魔方时的配色，分别为白色、红色、橘色、黄色、绿色、蓝色，其中白蓝相对、红橘相对、黄绿相对，且蓝、橘、黄三色以逆时钟排列（如图7所示）。

3 常见的复原方法

魔方的解法有许多种，最多人使用的是1981年 David Singmaster 在他的书“Notes on Rubik's " Magic Cube" ”中的解法，也就是“Layer By Layer”（层先法）。方法是先解决顶层，然后是中间层，最后是底层，这种解法可以在一分钟内复原一个魔方。其它还有角先或其它不同组合的方法。

3.1 CFOP(Fridrich Method 方法)

第一个快速的解法是由杰西卡·弗雷德里奇所发明的 Fridrich Method,解决的顺序与 Layer By Layer 类似。先复原第一层的十字,接着复原第一和第二层,然后将第三层的角块排序,最后完成第三层的排序。由于归纳出所有可能的情况,一共需要 119 个公式,但平均只需 55 步复原魔方。

三阶魔方入门的玩法(JessicaFridrich 层先法)复原的基本步骤示意图(如图 8 所示):

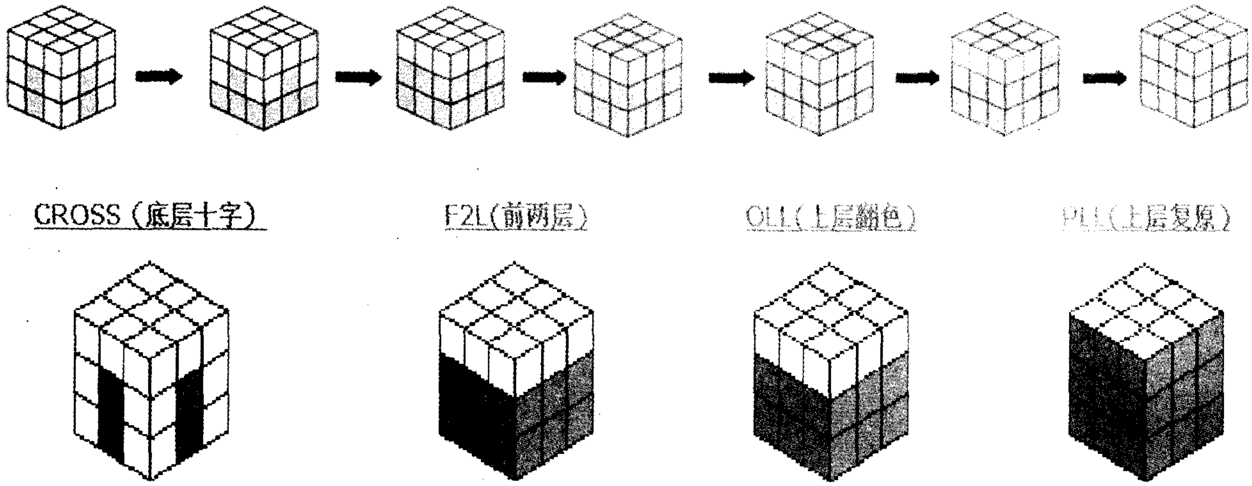

图 8 Jessica Fridrich **层先法**

将底层转出一个符合色块分布的十字(Cross)

同时将底层角块和相对应棱块归位(F2L, First 2 Layers)41 个公式

最上层利用公式将颜色统一(OLL, Orientation of Last Layer)57 个公式

将最上层侧面的颜色统一(PLL, Permutation of Last Layer)21 个公式

3.2 Philip Marshall 的"The Ultimate Solution to Rubik's Cube

Philip Marshall 的"The Ultimate Solution to Rubik's Cube"修改了 Fridrich Method,平均需 65 步复原魔方,但只需要两个公式。方法是先复原边块,再复原角块。[1][2]

另一个快速的解法是 Lars Petrus 的 Petrus method,方法是先解决 2×2×2,再解决 2×2×3,然后逐个复原。他本人认为层先法的缺点是会不断破坏、还原之前完成的部份。此解法是较良好的解决方案。[3]

3.4 电脑解法

由于电脑没有记忆公式的困难,因此可以获得更佳的解。但是由于魔方的模型空间巨大,使用穷举法还是不实用。目前广泛使用的算法步骤如下:

双转归原:如果限制每次旋转,除了两个相对的面(比如左边和右边)之外都是 180 度,那么能够转出来的花样就少了很多。把魔方从任何状态归位到这些花样之一,就是双转归原。

复原 在前一步骤的基础上进行复原。

用电脑程序进行搜索,双转归原一般需要 12 步来完成。而复原的步骤则需要 18 步。但是如果能进一步优化,使得双转归原的结果避开那些需要较长步骤复原的状态,一般可以得到更短的复原步骤。

4 魔方中的数学初步探讨

4.1 变化数

三阶魔方的总变化数是:

$$\frac{8!\ \times 3^8\times 12!\ \times 2^{12}}{2\times 2\times 3}=43,252,003,274,489,856,000\approx 4.33\times 10^{19}$$

三阶魔方总变化数的算式是这样得来:

8 个角块可以互换位置(8!),也可以旋转(3),但不能单独翻转一个角块,所以总共有 $8!\times 3^8/3$ 种变化状态。

12 个边块可以互换位置(12!),也可以翻转(2),但不能单独翻转一个边块(也就是将其两个面对调),也不能单独交换两边块的位置,所以总共有 12! ×212/(2×2)种变化状态。

对于一个拆散又再随意组合的魔方,变化种数则是:

$$8!\ \times 3^8\ \times 12!\ \times 2^{12}=519,024,039,293,878,272,000\approx 5.19\times 10^{20}$$

也就是说，拆散魔方再随意组合，有11/12的机率无法恢复原状。

（某些魔方在各个面的图案具有方向性，考虑到6个中心块各有4种朝向，但不能仅仅将一个中心块旋转90度，这时总变化数目还要再乘以$4^6/2$。）当六个具方向性的中心块的相对位置关系保持不变，但是各中心块的（自转）方向，也可以随机组装的话，由此使魔方总态数增加因子4^6；但是用转魔方的方法，不可能使奇数个中心块转过90度。可见，刚才的随机组装中的中心块方向要排除一半（因为一定是一半状态为奇数个中心块转了90度，另一半为偶数个中心块转了90度），乘数应改为$4^6/2$。

顺时针还是逆时针90度无所谓，很容易把两个90度中心块转换为两个0度；或一个0度另一个180度；而后者又可以转换为0度。三种变化都不影响角块和棱块。此时结果为：

$$\frac{8!\times 3^8\times 12!\times 2^{12}}{2\times 2\times 3}\times\frac{4^6}{2}=8,857,606,706,155,225,088,000\approx 8.86\times 10^{22}$$

4.2 魔方的极限

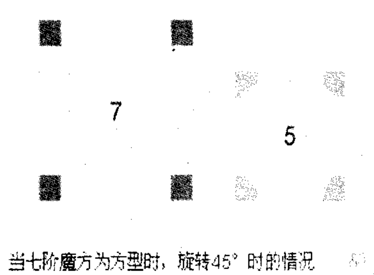

图9 魔方旋转45°时的情况

当七阶魔方为方型时，旋转45°时的情况（如图9所示）

魔方必须在旋转时不会有零件脱出，若将n阶的魔方做成立方体，且每一小块的边长都相等，则必须有以下限制：

$$\frac{n-2}{2}\times\sqrt{2}<\frac{n}{2}$$

左式代表的是中心旋转轴距离边上的方块最短距离，右式代表的是中心转轴到表面的最短距离。左式必须小于右式，不然边块和角块会无法固定。

可以解出：

$$n<\frac{2\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\approx 6.828$$

因此六阶或六阶以下的魔方可以设计成标准的立方体；相反的，七阶或七阶以上的魔方都无法设计成标准的立方体。

4.3 上帝的数字

所有的三阶魔方都可以在有限步数内复原，1982年，佛雷与辛马斯特合着的《魔方手册》定义任意的三阶魔方都可以保证最少n步复原，并称呼n为上帝的数字。在此书中，证明上帝的数字介于17～52之间。

1995年，瑞德证明上帝的数字介于20～29之间。2006年，雷杜用群论证明上界可改进为27。

2007年，计算机科学家古柏曼与他的学生用20台超级电脑花了8000个小时证明上界可改进为26。[4]

2008年，Tomas Rokicki宣布证明了任何魔方可以在25步以内解开。[5]之后又改进为20步[6]。

5 魔方艺术

5.1 单个魔方艺术

魔方除了六面还原外，也可以变换出各种美丽的图案。以下是比较著名的魔方艺术图案。

博赛特的创造的魔方艺术、康韦夫人的花样、德国人的发明、马克先生的创作等等。[7](P145)

5.2 多个魔方艺术

多伦多艺术家Nick Hall，在千禧艺术工作室魔方作品用一种独特的风格重建图像，用成千上万的三阶魔方拼图来再创造精致的艺术杰作。它已被选入《吉尼斯世界纪录大全》。[8]

［参考文献］

［1］http://helm.lu/cube/MarshallPhilipp/index.htm

［2］http://cclx.webs.com/edge2.htm

［3］http://lar5.com/cube/index.html

［4］http://news.sciencenet.cn/htmlnews/200764123658281181142.html

［5］http://bbs.mf8.com.cn/viewthread.php-tid=20099&page=1

［6］http://bbs.mf8.com.cn/viewthread.php-tid=59068

［7］吴鹤龄．魅力魔方［M］．北京：科学出版社，2009.

［8］http://bwwzhidaojiuhao1.blog.163.com/blog/static/113539805201121711449181/