3-2 最优批处理问题

1. 问题描述

在一台超级计算机上，编号为 1,2,3…的 n 个作业等待批处理。批处理的任务就是将这 n 个作业分成若干批，每批包含相邻的若干作业。从时刻 0 开始，分批加工这些作业。在每批作业开始前，机器需要启动时间 S，而完成这批作业所需的时间是单独完成批中各个作业需要时间的总和。单独完成第 i 个作业所需的时间是 ti，所需的费用是它的完成时刻乘以一个费用系数 fi。同一批作业将在同一时刻完成。例如，如果在时刻 T 开始一批作业 x,x+1,x+2…x+k，则这一批作业的完成时刻均为 T+S+(tx+tx+1tx+2…+tk)。最优批处理问题就是要确定总费用最小的批处理方案。

对于给定的待批处理的个作业，计算其总费用最小的批处理方案。

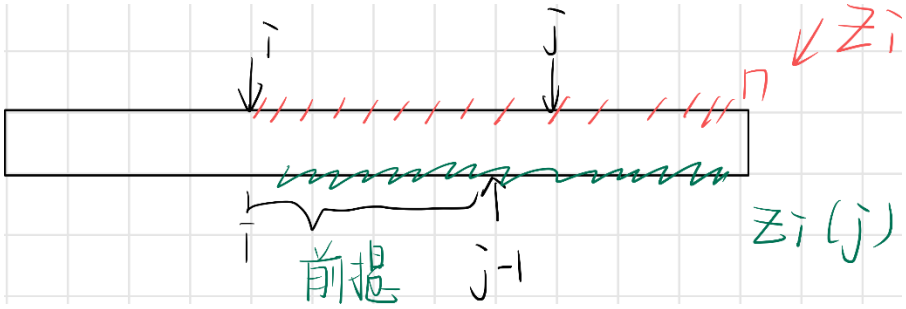
输入数据由文件名为 input.txt 的文本文件提供。文件的第 1 行为待处理的作业数 n，第二行是启动时间，在接下来每行有两个数，分别为单独完成第 i 个作业所需的时间 ti，和所需的费用 fi。

将计算结果输出到文件 output.txt。最小费用。

2. 动态规划分析

设Z_j是批处理作业序列 i~n 所需最小费用

$Z_i(j)$是批处理作业序列下，i~(j-1)为第一批作业时所需最小费用



此时 $Z_i(j) = (S + t_i + \cdots + t_{j-1}) * (w_i + \cdots + w_n) + Z_j$

Z_j代表的是$(S + t_j + \cdots + t_n) * (w_j + \cdots + w_n)$,如果把前面的加上，先对 i-j 进行处理，那么**Z_j应该有基础时间**，即$(S + t_i + \cdots + t_{j-1})$，所以在$Z_i(j)$的表达式里存在$w_j$~$w_n$。

由此可得递推式：　　$Z_i = \min(Z_i(x)); (i < x \le n)$

边界条件是 $i > n$　　$Z_i = 0$

为了直接得到$Z_i(j)$，我们考虑先把$t_i + \cdots + t_{j-1}$ OR $w_i + \cdots + w_n$用数组保存起来

由此定义$st_i = \sum_{j=i}^{n} t_j$　　$sw_i = \sum_{j=i}^{n} w_j$

待入递推式可知　$Z_i = \min((S + st_i - st_j) * (sw_i) + Z_j)$

在实现中，循环比较 i-n 之间的数即可得到Z_i

时间复杂度为 O(n)

3. 算法实现

```
#include<fstream>
#include<iostream>
#include<string>
#include<vector>
using namespace std;

void readFile(int& n, int& S, vector<int>& fee, vector<int>& time)//读文件
{

	fstream fin;
	fin.open("input.txt", ios::in);
	if (!fin)
	{
		cout << "wrong!!/a can't open it…" << endl;
		exit(0);
	}
	int lines = 1;
	while (!fin.eof())
	{
		string temp;
		if (lines == 1)//第一行是总事件数量
		{
			getline(fin, temp);
			n = stoi(temp);
			lines++;
		}
		else if (lines == 2)//启动时间
		{
			getline(fin, temp);
			S = stoi(temp);
			lines++;
		}
		else
		{
			getline(fin, temp, ' ');
			time.push_back(stoi(temp));
			getline(fin, temp);
			fee.push_back(stoi(temp));
		}
	}
	fin.close();
```

```
}

void outFile(int result)//输出
{
	fstream fin;
	fin.open("output.txt", ios::out);
	if (!fin)
	{
		cout << "wrong!!/a can't open it…" << endl;
		exit(0);
	}
	fin << result;
	fin.close();
}

int dyna(int n, int S, vector<int> time, vector<int> fee)
{
	vector<int> z(n+1, 999999);
	vector<int> st(n+1, 0);
	vector<int> sw(n+1, 0);

	for (int i = n - 1; i >= 0; i--)
	{
		st[i] = st[i + 1] + time[i];
		sw[i] = sw[i + 1] + fee[i];
	}
	z[n] = 0;
	for (int i = n - 1; i >= 0; i--)
	{
		for (int j = i + 1; j <= n; j++)
		{
			z[i] = min(z[i], z[j] + sw[i] * (S + st[i] - st[j]));
		}
	}
	return z[0];
}

int main()
{
	int n, S;
	vector<int> fee;
	vector<int> time;
	readFile(n, S, fee, time);
	int result = dyna(n, S, time, fee);
```

```
    outFile(result);
}
```

4. 结果分析

测试文档 1：

lnput.txt	output.txt
5	153
1	
1 3	
3 2	
4 3	
2 3	
1 4	

测试文档 2：

lnput.txt	output.txt
7	573
2	
1 5	
2 3	
3 2	
5 14	
4 5	
1 3	
5 4	

3-5 乘法表问题

1. 问题描述

定义于字母表∑{a,b,c)上的乘法表如表所示：

	a	**b**	**c**
a	b	b	a
b	c	b	a
c	a	c	c

依此乘法表,对任一定义于∑上的字符串,适当加括号表达式后得到一个表达式。例如,对于字符串 x=bbbba,它的一个加括号表达式为(b(bb))(ba)。依乘法表,该表达式的值为 a。试设计一个动态规划算法,对任一定义于∑上的字符串 x=x1x2…xn，计算有多少种不同的加括号方式,使由 x 导出的加括号表达式的值为 a

输入数据由文件名为 input.txt 的文本文件提供。文件的第 1 行给出一个字符串
将计算结果输出到文件 output.txt。文件第一行的数是计算出的加括号方式数

2. 动态规划分析

乘法表问题是计算所有加括号运算结果为 a 的情况数，并不要求输出加括号方式。那么可以从乘法的最小单元两个符号相乘的所有可能开始，接着在两个符号相乘的基础上计算三个符号相乘的所有可能。直到计算 N 长度的符号 1-N 的所有可能。
定义一个三维数组 dp[n][n][3], n 为输入字符串的长度
dp [i][j][0]为从字符串中第 i 个元素到第 j 个元素的子串表达式值为 a 的加括号方式数
dp [i][j][1]为从字符串中第 i 个元素到第 j 个元素的子串表达式值为 b 的加括号方式数
dp [i][j][2]为从字符串中第 i 个元素到第 j 个元素的子串表达式值为 c 的加括号方式数
根据所给乘法表，可**得递推公式**
dp [i][j][0] = dp[i][k][0] * dp[k+1][j][2] + dp[i][k][1] * dp[k+1][j][2] + dp[i][k][2]* dp[k+1][j][0]
即 i~j 子串表达式为 a 的数量， 等于 i~k 字串 (k+1)~j 字串相乘为 a 的数量乘积，由于有三种方式可以得到 a，所以相加为三个式子。
dp [i][j][1] = dp[i][k][0] * dp[k+1][j][0] + dp[i][k][0] * dp[k+1][j][1] + dp[i][k][1]* dp[k+1][j][1]
dp [i][j][2] = dp[i][k][1] * dp[k+1][j][0] + dp[i][k][2] * dp[k+1][j][1] + dp[i][k][2]* dp[k+1][j][2]

3. 算法实现

```
#include <iostream>
#include<fstream>
#include<iostream>
#include<vector>
#include<string>

using namespace std;

string readFile()
{
	fstream fin;
	fin.open("input.txt", ios::in);
	if (!fin)
	{
		cout << "open failed!" << endl;
		exit(0);
	}
	string temp;
	getline (fin,temp);
	fin.close();
	return temp;
}
```

```
void outFile(int result)
{
	fstream fin;
	fin.open("output.txt", ios::out);
	fin << result;
	fin.close();
}
int dnya(string S, int n)
{
	vector<vector<vector<int>>> dp(n, vector<vector<int>>(n, vector<int>(3, 0)));//初始化一个大小为 n*n*3 的三维数组
	//dp[i][j][0]表示 i-j 端为 a， dp[i][j][1]表示 i-j 端为 b, dp[i][j][2]表示 i-j 端为 c 的加括号总数
	for (int i = 0; i < n; i++)//初始化
	{
		if (S[i] == 'a')
			dp[i][i][0] = 1;
		else
			dp[i][i][0] = 0;
		if (S[i] == 'b')
			dp[i][i][1] = 1;
		else
			dp[i][i][1] = 0;
		if (S[i] == 'c')
			dp[i][i][2] = 1;
		else
			dp[i][i][2] = 0;
	}

	for (int r = 2; r <= n; r++)//接着从长度为 2 的子字符串计算，直至计算好整串 str
	{
		for (int i = 0; i <= n - r; i++)
		{
			int j = i + r - 1;//计算 str[i:j]
			for (int k = i; k < j; k++)
			{//根据题目中的表，计算加括号法
				dp[i][j][0] += dp[i][k][0] * dp[k + 1][j][2] + dp[i][k][1] * dp[k + 1][j][2] + dp[i][k][2] * dp[k + 1][j][0];
				dp[i][j][1] += dp[i][k][0] * dp[k + 1][j][0] + dp[i][k][0] * dp[k + 1][j][1] + dp[i][k][1] * dp[k + 1][j][1];
				dp[i][j][2] += dp[i][k][1] * dp[k + 1][j][0] + dp[i][k][2] * dp[k + 1][j][1] + dp[i][k][2] * dp[k + 1][j][2];
			}
```

```
            }
        }
        return dp[0][n - 1][0];
}

int main()
{
        string S = readFile();
        int n = S.size();
        int result = dnya(S,n);
        outFile(result);
}
```

4. 结果分析

测试文档 1：

Input.txt bbbba
output.txt 6

测试文档 2：

Input.txt bbbcbaaccbac
output.txt 27548

3-7 汽车加油行驶问题

1. 问题描述

给定一个 N*N 的方形网格，设其左上角为起点◎，坐标为（ 1，1），X 轴向右为正， Y 轴向下为正，每个方格边长为 1，如图所示。一辆汽车从起点◎出发驶向右下角终点▲，其坐标为（ N，N）。在若干个网格交叉点处，设置了油库，可供汽车在行驶途中加油。汽车在行驶过程中应遵守如下规则：
(1)汽车只能沿网格边行驶，装满油后能行驶 K 条网格边。出发时汽车已装满油，在起点与终点处不设油库。
(2)汽车经过一条网格边时，若其 X 坐标或 Y 坐标减小，则应付费用 B，否则免付费用。
(3)汽车在行驶过程中遇油库则应加满油并付加油费用 A。
(4)在需要时可在网格点处增设油库，并付增设油库费用 C（不含加油费用 A）。
(5)(1)~(4)中的各数 N、K、A、B、C 均为正整数，且满足约束：2 ≤ N ≤ 100，2 ≤ K ≤ 10。设计一个算法，求出汽车从起点出发到达终点的一条所付费用最少的行驶路线。

输入数据由文件名为 input.txt 的文本文件提供。文件的第 1 行是 N，K，A，B，C 的值，第二行起是一个 N*N 的方阵
将计算结果输出到文件 output.txt。所需最少费用

2. 动态规划分析

dp[x][y][0]表示从（1,1）到（x,y）所需最少费用。
dp[x][y][1]表示从汽车行驶到（x,y）还能行驶的网格边数。
最终即求 dp[N][N][0]
假设我们现在到了（x,y）,上个位置有 4 种可能（不过考虑越界的情况），这四个位置都对应一个费用。先选择上个位置是 a，现在再去考虑当前位置（到油站否，有没有有油），并加上相应的价格。这时我们会得到一个（x,y）处的费用=a 位置费用+当前位置的费用。我们遍历 4 个位置，寻找到(x,y)处的最小费用即可。
递推式可得
dp[1][1][0]=0 dp[1][1][1]=k 初始
设 s 数组代表四个不同的走向 s={ {1，0，0},{0，1，0},{-1，0，B},{0，-1，B}}
dp[x][y][0] = min(dp[x + s[i][0]][y + s[i][1]][0], s[i][2]) 从上个位置到现在这个位置
dp[x][y][1] = dp[x + s[j][0]][y + s[j][1]][1] – 1;
dp[x][y][0] = dp[x][y][0] + A　　dp[x][y][1] = k 是油库
dp[x][y][0] = dp[x][y][0] + C + A　　dp[x][y][1] = k　不是油库，但是没油了，必须建

3. 算法实现

```
#include <iostream>
#include<fstream>
#include<iostream>
#include<vector>
#include<string>

using namespace std;

void readFile(int &N, int &k , int &A, int &B, int &C, vector<vector<int>> &map)
{
	fstream fin;
	fin.open("input.txt", ios::in);
	if (!fin)
	{
		cout << "open failed!" << endl;
		exit(0);
	}
	string temp;
	getline(fin, temp, ' ');
	N = stoi(temp);
```

```
	getline(fin, temp, ' ');
	k = stoi(temp);
	getline(fin, temp, ' ');
	A = stoi(temp);
	getline(fin, temp, ' ');
	B = stoi(temp);
	getline(fin, temp);
	C = stoi(temp);

	map.resize(N+1);
	for(int i = 0; i < N+1; i++)
		map[i].resize(N+1);

	int line = 1;
	while (!fin.eof())
	{
		for (int i = 1; i < N; i++)//注意是从 map[1][1]开始存的
		{
			getline(fin, temp, ' ');
			map[line][i] = stoi(temp);
		}
		getline(fin, temp);
		map[line][N] = stoi(temp);
		line++;
	}
	fin.close();
}

void outFile(int result)
{
	fstream fin;
	fin.open("output.txt", ios::out);
	fin << result;
	fin.close();
}
int dnya(int N, int K, int A, int B, int C, vector<vector<int>> map)
{
	vector<vector<vector<int>>> dp(N + 1, vector<vector<int>>(N + 1, vector<int>(3,
0)));//初始化一个大小为 n*n*3 的三维数组
	int s[4][3] = { {-1,0,0},{0,-1,0},{1,0,B},{0,1,B} };//4 个方向，第三个参数是价格 B

	for (int i = 1; i <= N; ++i)
		for (int j = 1; j <= N; ++j)
		{
```

```
                dp[i][j][0] = 99999;
                dp[i][j][1] = K;
            }//初始化
        dp[1][1][0] = 0;
        dp[1][1][1] = K;//初始化

        for (int x = 1; x <= N; ++x)
        {
            for (int y = 1; y <= N; ++y)
            {
                if (x == 1 && y == 1) //当为起点，直接跳过，已做过初始化
                    continue;
                int minmoney = 999999;
                int minstep;//minmoney 存储（x,y）上个位置的最小 money
                int tmpmoney, tmpstep;

                for (int i = 0; i <= 3; ++i)//遍历上一个位置的所有可能情况
                {
                    if (x + s[i][0]<1 || x + s[i][0]>N || y + s[i][1]<1 || y + s[i][1]>N) //超出边界,
不做处理
                        continue;
                    tmpmoney = dp[x + s[i][0]][y + s[i][1]][0] + s[i][2];//按递推式写
                    tmpstep = dp[x + s[i][0]][y + s[i][1]][1] - 1;
                    if (map[x][y] == 1) //遇油站
                    {
                        tmpmoney += A;
                        tmpstep = K;
                    }
                    if (map[x][y] == 0 && tmpstep == 0 && (x != N || y != N)) //没油了
                    {
                        tmpmoney += A + C;
                        tmpstep = K;
                    }
                    if (minmoney > tmpmoney)//更新最小值
                    {
                        minmoney = tmpmoney;
                        minstep = tmpstep;
                    }
                }
                if (dp[x][y][0] > minmoney)//更新 dp
                {
                    dp[x][y][0] = minmoney;
                    dp[x][y][1] = minstep;
                }
```

```
            }
        }
        return dp[N][N][0];
}

int main()
{
        int N, K, A, B, C;//N 表示格点数，k 表示一桶油能走多远，A 表示加油费用，B 表示倒退费用，  C 表示增设油库费用
        vector<vector<int>> map;
        readFile(N, K, A, B, C, map);
        int result = dnya(N, K, A, B, C, map);
        outFile(result);
}
```

4. 结果分析

测试文档 1：

lnput.txt
9 3 2 3 6
0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 1 0 1 1 0 0
1 0 1 0 0 0 0 1 0
0 0 0 0 0 1 0 0 1
1 0 0 1 0 0 1 0 0
0 1 0 0 0 0 0 1 0
0 0 0 0 1 0 0 0 1
1 0 0 1 0 0 0 1 0
0 1 0 0 0 0 0 0 0
output.txt 12

测试文档 2：

lnput.txt
5 2 3 1 4
0 1 0 1 1
1 0 0 1 1
1 0 0 0 1
0 1 0 0 1
0 0 0 0 0
output.txt 15