ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Журнал практики

Студента **Бондаревой Елены Евгеньевны**

Институт **№8 «Компьютерные науки и прикладная математика»**

Кафедра **№805 «Математическая кибернетика»**

Учебная группа **80-105Б-21**

Направление подготовки (специальность) _01.03.04

(шифр)

Прикладная математика

____

(название направления, специальности)

Вид практики ***Ознакомительная***

(учебной, производственной, преддипломной или другой вид практики)

Руководитель практики от МАИ

Кудрявцева Ирина Анатольевна______________________________

(фамилия, имя, отчество) *(подпись)*

_________________/_______________________/ “12” июля 2022г.

(подпись студента) *(дата)*

1.Место и сроки проведения практики

Сроки проведения практики:

-дата начала практики ***29.06.22***

-дата окончания практики ***12.07.22***

Наименование предприятия ***МАИ***

____
____

Название структурного подразделения (отдел, лаборатория)

каф. 805

2. Инструктаж по технике безопасности

__________________________/________________/ “__29__”___июня__________ 2022_ г.

(подпись проводившего) *(дата проведения)*

3. Индивидуальное задание студенту

Вариант №1

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & m & 1 \\ 0 & 1 & 3 & m+1 & 0 \\ m+1 & 0 & 1 & m & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & m \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \{b_{ij}\}, i, j = 1,..,5$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, где m - последняя цифра номера группы, n - номер студента по списку.

Элементы $b_{ij}=1/(i+j-1)$

Требуется:

1. Задать матрицы A, B, C. Для задания матрицы B следует использовать элементы программирования; для матрицы C - встроенные функции выбранной системы компьютерной математики.
2. Вычислить $A+B-C,\ A^{-1}B,\ A^T B-C$.
3. Выделить из матрицы C подматрицу D, состоящую из элементов, стоящих на пересечении 2,3 строк и 2,3 столбцов.

II. Доказать, что система линейных алгебраических уравнений совместна. Решить СЛАУ.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16. \end{cases}$$

III. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A. Вычислить спектральный радиус матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 & 2 \\ 0 & 2 & m & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$, где m (=5) - последняя цифра номера группы.

IV. Пусть $f(x) = 0$, где $f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$. Изобразить график $f(x)$, обозначив оси, выбрав масштаб, а также толщину и цвет линий. По графику указать интервал принадлежности корней уравнения. Обозначить на графике приближенное решение, используя опции редактора графиков системы.

V. Изобразить график функции $z = z(x, y)$, заданной уравнением $x + y + z = 9$ и карту линий уровня.

VI. Исследовать $f(x)$ на экстремум, используя встроенные функции выбранной системы, если $f(x) = \dfrac{x+1}{1+x^2}$

4.План выполнения индивидуального задания

1. Изучение литературы, посвященной системам компьютерной математики
2. Реализация алгоритмов решения в выбранной системе — GNU Octave
3. Оформление отчета

Руководитель практики от МАИ: Кудрявцева Ирина Анатольевна.

_/__________________/

Руководитель от предприятия *Кудрявцева Ирина Анатольевна*

_/__________________/

__________________/_______________________/ “_29___”____июня________ 2022 г.

(подпись студента) *(дата)*

5.Отзыв руководителя практики от предприятия

____

____

____

____

____

____

Материалы, изложенные в отчёте студента, полностью соответствуют индивидуальному заданию

Руководитель от предприятия: Кудрявцева Ирина Анатольевна

____/__________________/

(фамилия, имя, отчество)

(подпись)

"12" июля 2022 г.

М.П. (печать)

6.Отчет студента о практике

I.

```
>>  A = [1 0 2 5 1;0 1 3 6 0;6 0 1 5 1;2 0 3 1 5;1 3 4 0 1]
A =

   1   0   2   5   1
   0   1   3   6   0
   6   0   1   5   1
   2   0   3   1   5
   1   3   4   0   1

>> for i=1:5
for j=1:5
B(i,j)=1/(i+j-1);
end
end
>> B(:,:)
ans =

   1.00000   0.50000   0.33333   0.25000   0.20000
   0.50000   0.33333   0.25000   0.20000   0.16667
   0.33333   0.25000   0.20000   0.16667   0.14286
   0.25000   0.20000   0.16667   0.14286   0.12500
   0.20000   0.16667   0.14286   0.12500   0.11111

>> C=diag(1:5)
C =

Diagonal Matrix

   1   0   0   0   0
   0   2   0   0   0
   0   0   3   0   0
   0   0   0   4   0
   0   0   0   0   5

>> |
```

A = [1 0 2 5 1;0 1 3 6 0;6 0 1 5 1;2 0 3 1 5;1 3 4 0 1] — данным способом задаем матрицу А.

diag(1:5) — выводит диагональную матрицу, состоящую из 5 столбцов. В этой матрице элементы, у которых число столбцов и число строк совпадает(то есть эл-ты стоят на главной диагонали) равны соответствующему номеру.

2)

```
>> A+B-C
ans =

   1.00000   0.50000   2.33333   5.25000   1.20000
   0.50000  -0.66667   3.25000   6.20000   0.16667
   6.33333   0.25000  -1.80000   5.16667   1.14286
   2.25000   0.20000   3.16667  -2.85714   5.12500
   1.20000   3.16667   4.14286   0.12500  -3.88889

>> inv(A)*B
ans =

    1.72696    0.66618    0.37829    0.25434    0.18799
  -11.01912   -4.21814   -2.37227   -1.57983   -1.15746
    9.30147    3.58088    2.02479    1.35504    0.99709
   -2.73088   -1.03186   -0.57535   -0.38088   -0.27786
   -5.67549   -2.16863   -1.21779   -0.81001   -0.59288

>> (A')*B-C
ans =

   2.70000   2.56667   2.00952   1.66071   1.41825
   1.10000  -1.16667   0.67857   0.57500   0.50000
   5.38333   3.51667  -0.31190   2.19524   1.86230
   9.91667   5.95000   4.33333  -0.57381   2.83929
   2.78333   1.91667   1.50952   1.25595  -3.92103

>> |
```

inv(A) находит обратную матрицу для A, то есть A^{-1}.

(A') находит транспонированную матрицу для матрицы A, то есть A^{T}.

3) Выделение подматрицы D из матрицы C происходит следующим образом:

```
>>  D=C(2:3,2:3)
 D =

   2   0
   0   3
```

В скобках указаны через «:» номера строк и столбцов, на пересечении которых стоят элементы, образующие как раз подматрицу D.

II.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16. \end{cases}$$

Докажем, что система линейных алгебраических уравнений совместна. Для этого проверим, что СЛАУ совместна по теореме Кронекера - Капелли: система n линейных уравнений с m неизвестными совместна, тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы, то есть ***r(A)=r(A|B)***.

Решения системы найдем при помощи метода Гаусса.

Метод Гаусса состоит из двух этапов:

1) Первый этап — это прямой ход, в результате которого расширенная матрица системы приводится к ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований.

2) На втором этапе (обратный ход) ступенчатую матрицу преобразовывают так, чтобы в первых n столбцах получилась единичная матрица.

Последний, n + 1 столбец этой матрицы, содержит решение системы линейных уравнений.

cat(2,A,B) — функция, задающая расширенную матрицу системы, то есть происходит приписывание матрицы B к матрице A. В результате получаем, что ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы (A|B)-следовательно, система совместна.

```
>> A=[2 1 4; 3 2 1; 1 3 3]
A =

   2   1   4
   3   2   1
   1   3   3

>>  B=[16; 10; 16]
B =

   16
   10
   16

>> cat(2,A,B)
ans =

    2    1    4   16
    3    2    1   10
    1    3    3   16

>> C=rref(ans)
C =

   1.00000   0.00000   0.00000   1.00000
   0.00000   1.00000   0.00000   2.00000
   0.00000   0.00000   1.00000   3.00000

>> n=size(C)
n =

   3   4

>> X=C(:,n(2))
X =

   1.0000
   2.0000
   3.0000

>> rank(A)
ans =  3
>> rank(B)
ans =  1
>> rank(A)
ans =  3
>> rank(cat(2,A,B))
ans =  3
```

III. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A. Вычислить спектральный радиус матрицы.

Матрица A:

$$\begin{matrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

```
>> A=[1 5 0 2; 0 2 5 1; 0 -1 -3 0; 0 0 0 2]
A =

   1   5   0   2
   0   2   5   1
   0  -1  -3   0
   0   0   0   2

>> eig(A)
ans =

   1.00000
   0.61803
  -1.61803
   2.00000

>> [Matr,D]=eig(A)
Matr =

   1.00000  -0.99687   0.83986   0.97981
   0.00000   0.07615  -0.43975   0.13997
   0.00000  -0.02105   0.31821  -0.02799
   0.00000   0.00000   0.00000   0.13997

D =

Diagonal Matrix

   1.00000         0         0         0
         0   0.61803         0         0
         0         0  -1.61803         0
         0         0         0   2.00000

>> A*Matr
ans =

   1.00000  -0.61610  -1.35892   1.95962
   0.00000   0.04707   0.71154   0.27995
   0.00000  -0.01301  -0.51487  -0.05599
   0.00000   0.00000   0.00000   0.27995

>> Matr*D
ans =

   1.00000  -0.61610  -1.35892   1.95962
   0.00000   0.04707   0.71154   0.27995
   0.00000  -0.01301  -0.51487  -0.05599
   0.00000   0.00000  -0.00000   0.27995
```

□□

eig(A) возвращает вектор собственных значений матрицы A, вызов функции в формате [Matr, D]=eig(A) даст матрицу Matr, столбцы которой - собственные векторы матрицы A и диагональную матрицу D, содержащую собственные значения матрицы A. Сделаем проверку: A*M=M*D

Спектральный радиус матрицы является наибольшим абсолютным значением его собственных значений.

Вычислим спектральный радиус матрицы: наибольший вектор собственных значений матрицы A — это 2.00000. Следовательно, спектральный радиус равен 2.00000.

IV.

$$f(x) = 0$$

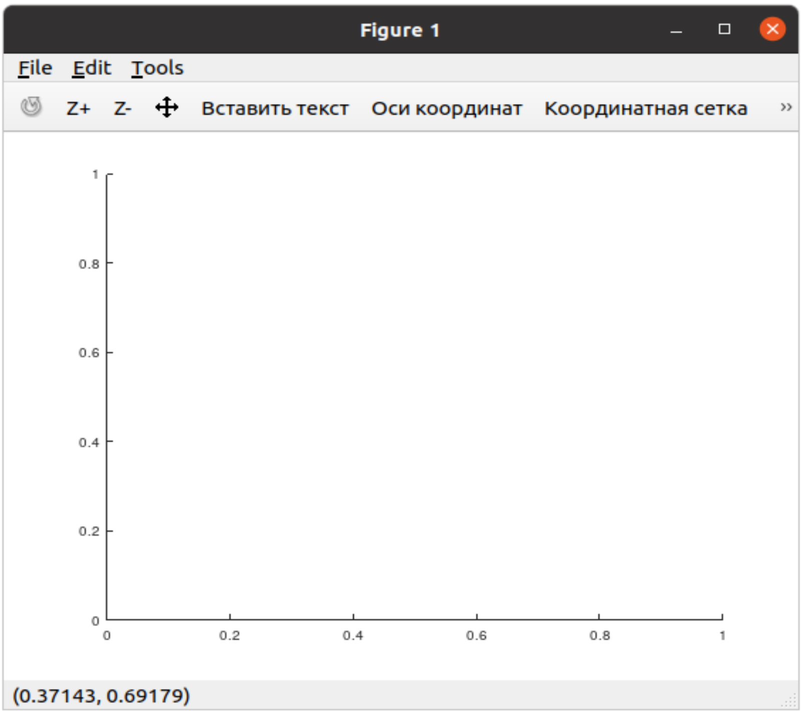
$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 12$$

Проведем ряд действий:

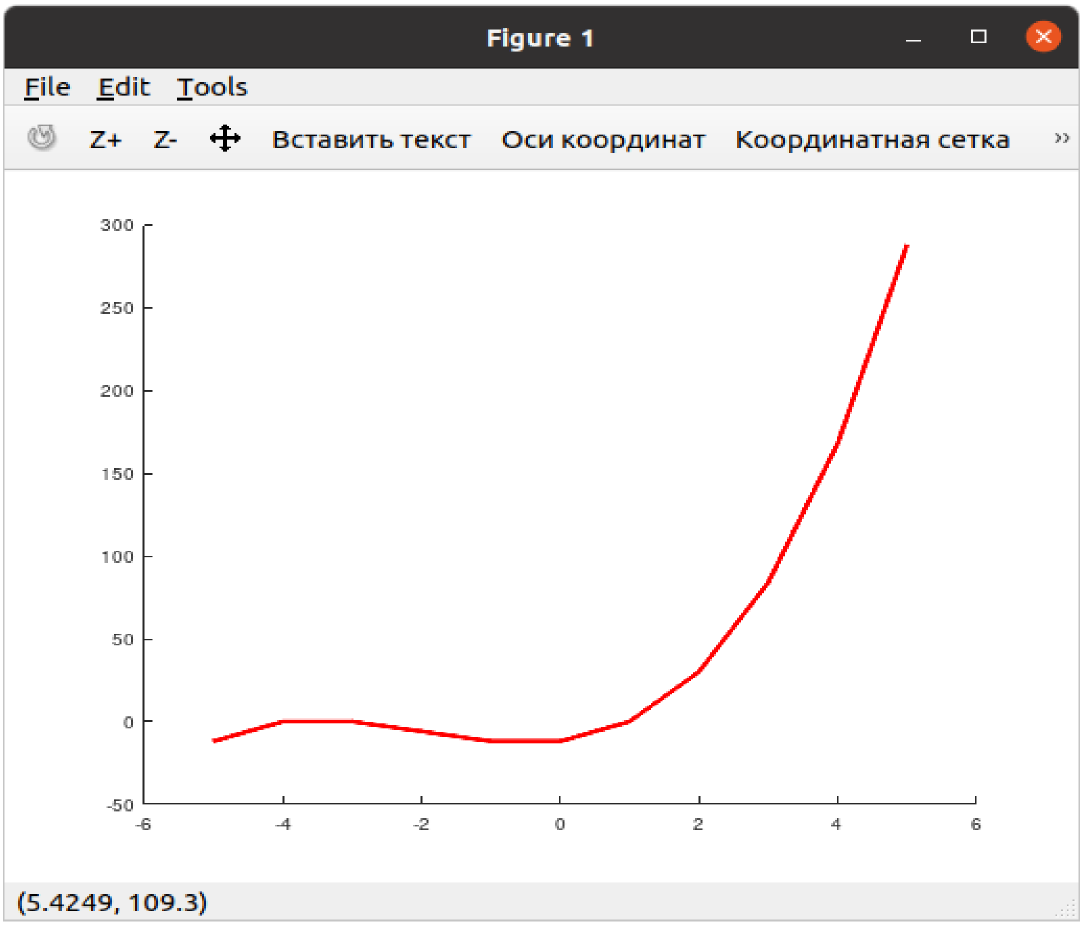
Командное окно

```
>> fun = [1 6 5 -12];
>> z = roots(fun);
>> x = -5:1:5;
>> y= x.^3 + 6 * x.^2 + 5 * x.^1 - 12
y =

   -12     0     0    -6   -12   -12     0    30    84   168   288

>> hold on
>> plot(x, y,'Linewidth',3,'Color','r')
>> scatter(z, zeros(1, 3), 36, "g", "*")
>> nroots = size(z, 1);
>> for i = 1:nroots
  t = sprintf('(%0.1f, %0.1f)', z(i), 0);
    text(z(i), (-1)^i * 10, t);
endfor
>> set(gca, 'xtick', [min(z), max(z)]);
>>
```

После того, как указали интервалы x для рассмотрения графика и задали саму функцию, вводим *hold on*. После этого появляются оси для последующей работы с графиком. Все изменения и преобразования графика будут происходить именно в этих заданных осях:



plot(x,y,'Linewidth',3,'Color','r') задает график функции, а также толщину и цвет его линий:



Такая функция как **scatter(z, zeros(1,3), 36, "g", "*")** для графика задает строго определенный масштаб, цвет точек, являющимися корнями уравнения, а также их обозначение. В данном случае, это « * ».

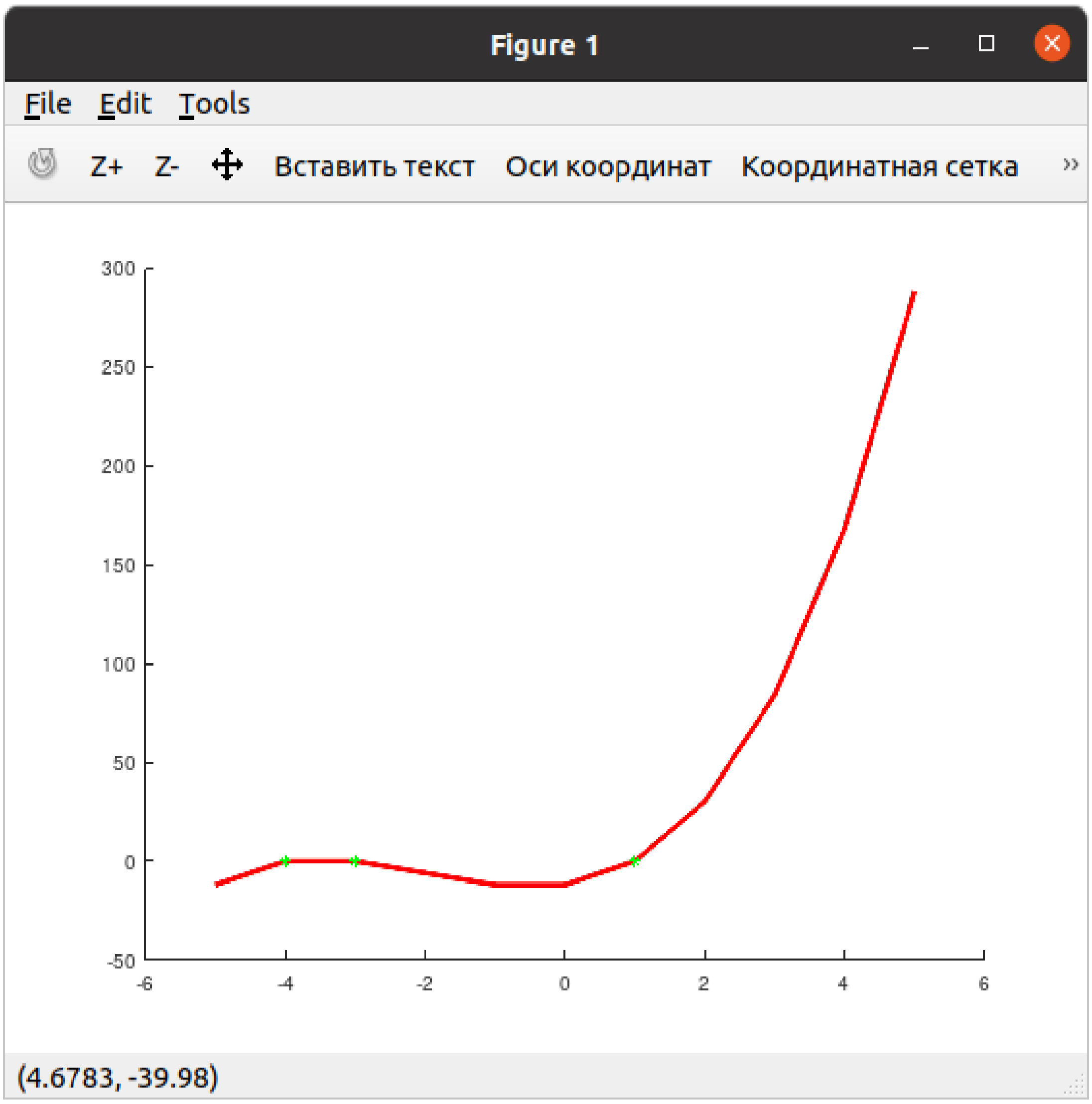
***nroots* = *size(z, 1);* -** находим количество корней уравнения.

Сделаем цикл. for i = 1:nroots ... endfor

Будем *пробегаться* по всем корням уравнения и для них выполнять строго определенные действия:

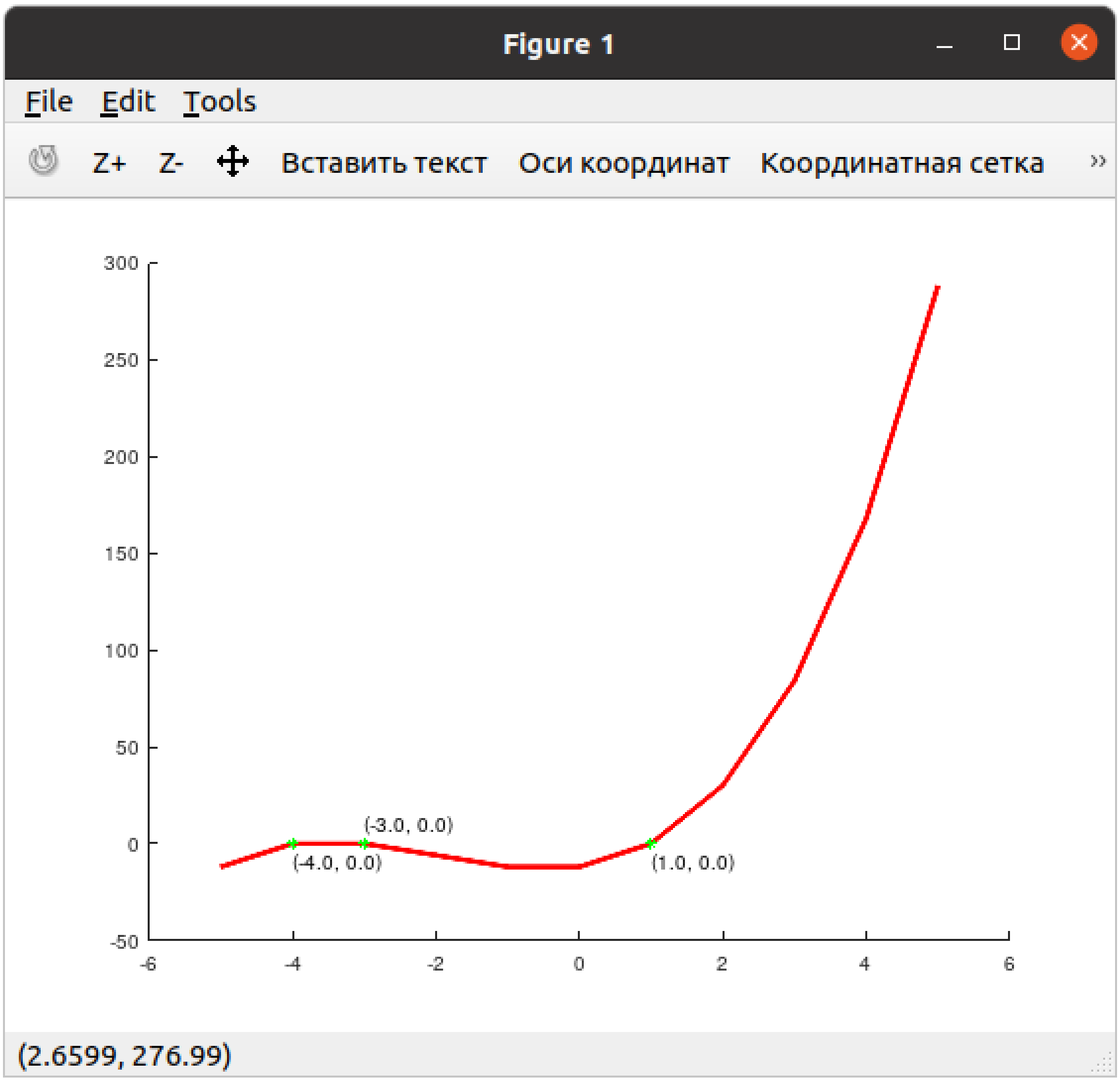
1) *Отметить на графике сам корень:*

t_i= sprintf('(%0.1f, %0.1f)', z(i), 0) — отмечает на графике корень уравнения в виде такого символа как « * ».



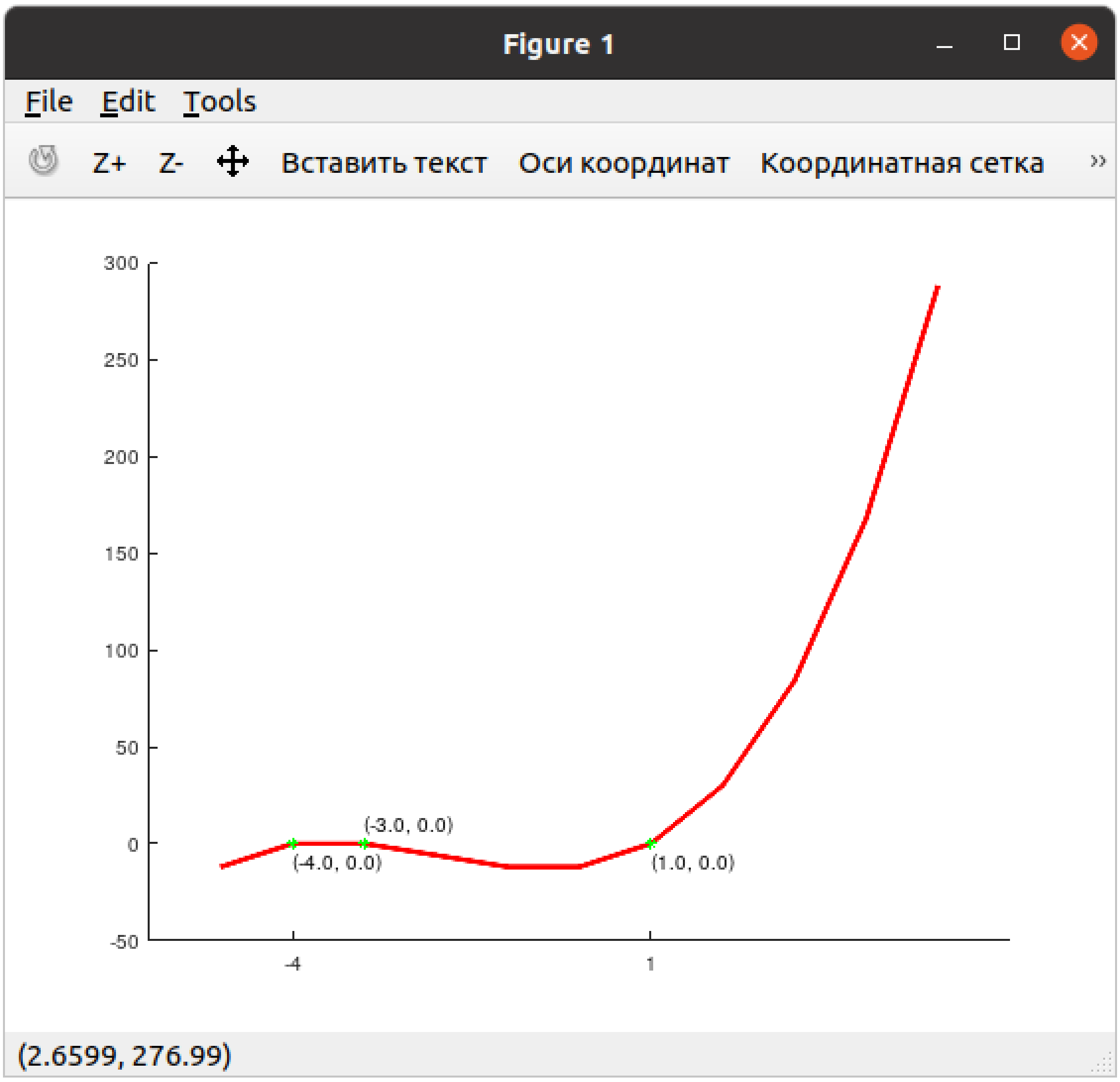
***2)** Указываем на графике координаты данного корня:*

при помощи функции ***text(z(i), (-1)^i*10, t_i)*** на графике у полученных выделенных точек появляются координаты.



С помощью ***set(gca, 'xtick', [min(z), max(z)]);*** получим интервал принадлежности корней уравнения.

В данном случае, (-4; 1):



V.

Проведем ряд следующих действий:

Командное окно

```
>> tx = linspace (-10, 10, 40)';
>> ty = linspace (-10, 10, 40)';
>> [xx, yy] = meshgrid (tx, ty);
>> zz = 9 - xx - yy;
>> subplot(1, 2, 1);
>> mesh (tx, ty, zz);
>> subplot(1, 2, 2);
>> contour (tx, ty, zz);
```

linspace создает вектор равномерно(линейных) распределенных значений.

linspace(start, end, length), где length-число элементов в возвращаемом векторе. В данном случае-40.

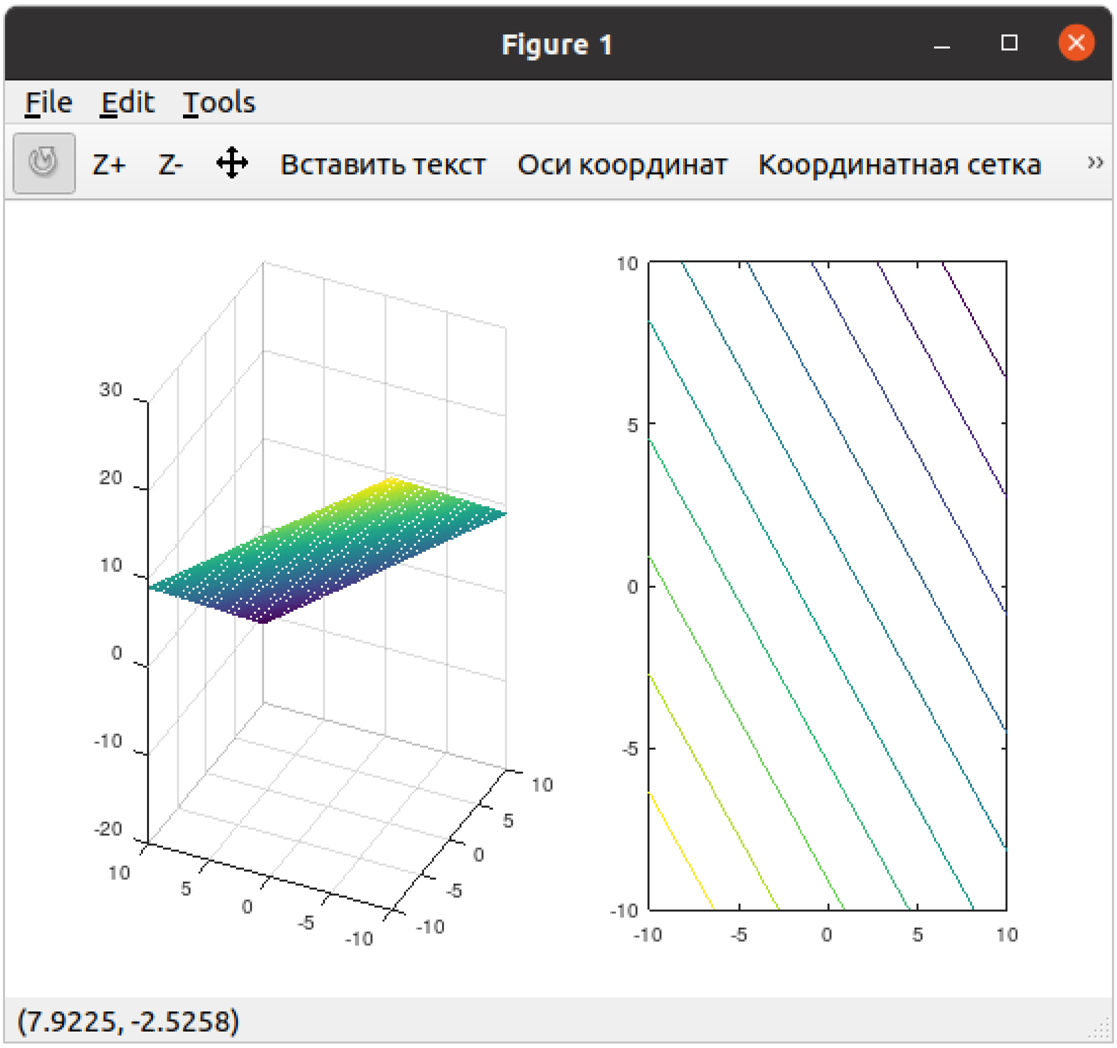
Функция ***meshgrid*** позволяет сформировать прямоугольную сетку

Для построения каркасного графика следует обратиться к функции ***mesh.***

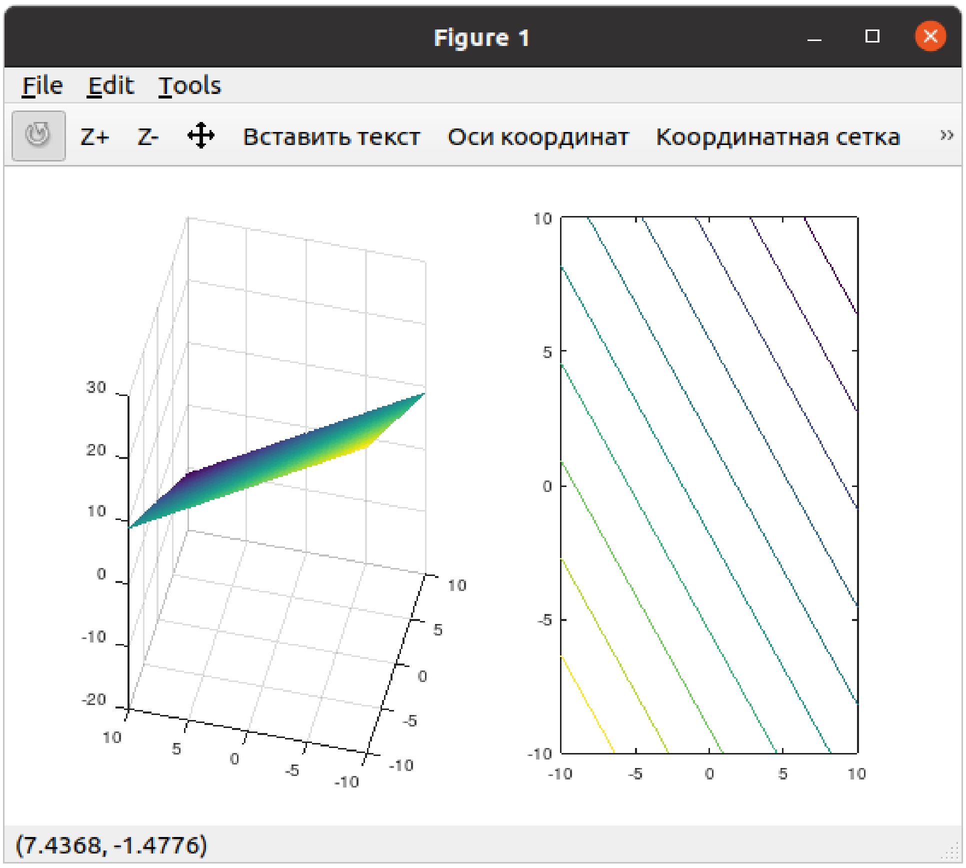
Octave может отображать более одного графика на одном рисунке.

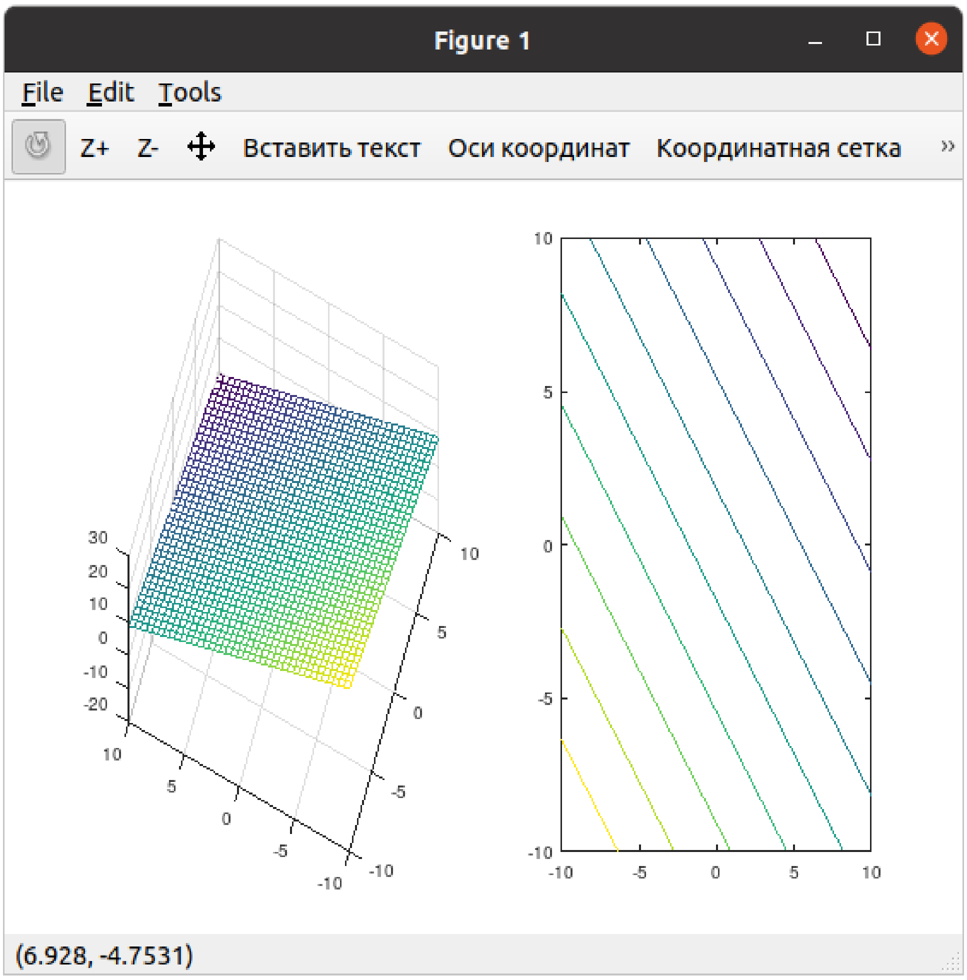
Это помогает реализовать функция ***subplot(row, col, cur)***, где cur- определяет номер текущего графика; *row* и *col* определяеют количество графиков по вертикали и горизонтали соответственно. В данном случае, по вертикали - 1, а по горизонтали — 2.

График функции и карта линий уровня:



Изображение графика и карта линий уровня под другим углом зрения:





VI. Исследуем на экстремум функцию $f(x) = \dfrac{x+1}{1+x^2}$

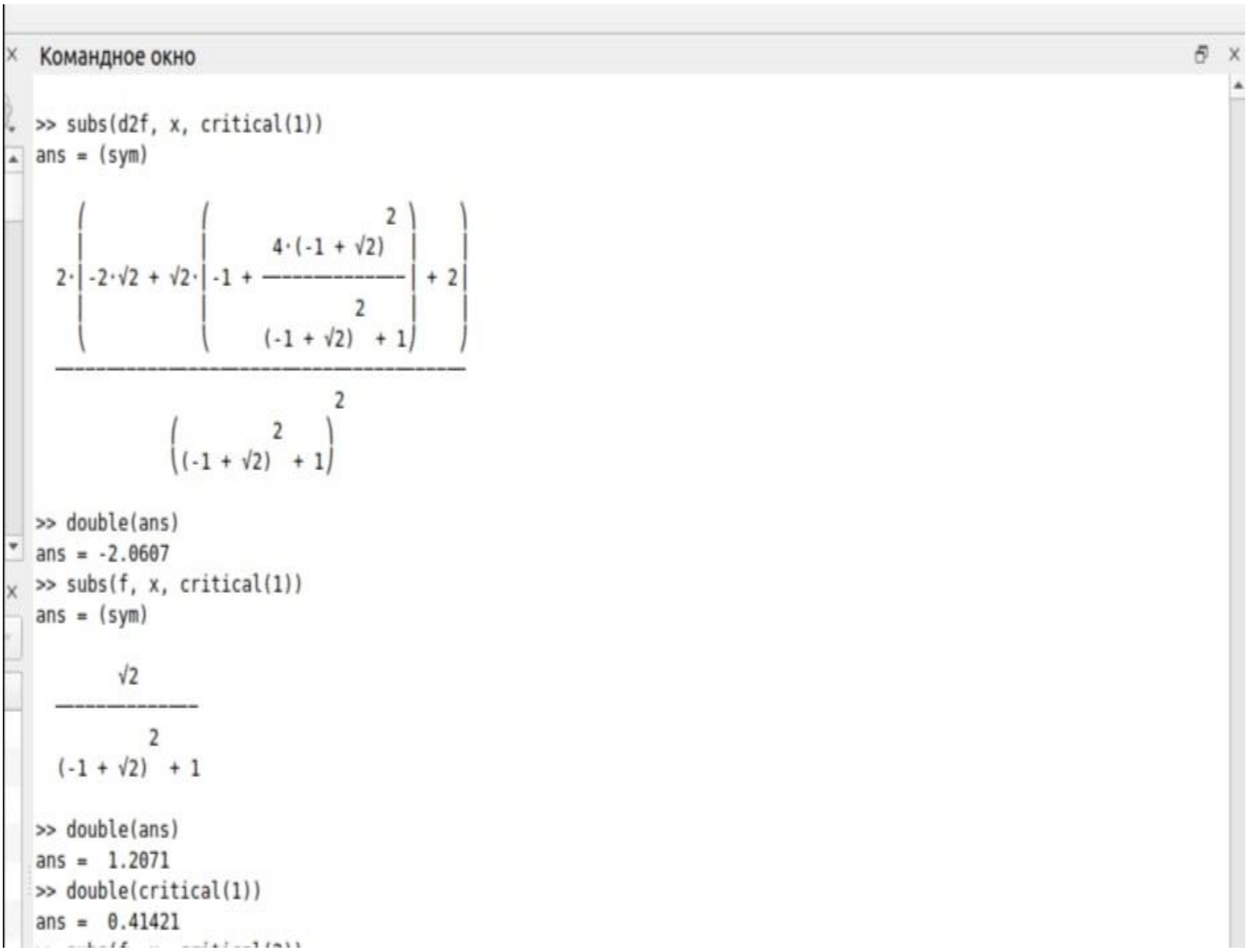
Действия:

Командное окно

```
>> pkg load symbolic
>> syms x
Symbolic pkg v2.8.0: Python communication link active, SymPy v1.5.1.
>> f = (x + 1) / (1 + x^2)
f = (sym)

  x + 1
  ------
   2
  x  + 1

>> df = diff(f)
df = (sym)

    2·x·(x + 1)      1
  - ----------- + ------
             2     2
    ⎛ 2     ⎞     x  + 1
    ⎝x  + 1⎠

>> d2f = diff(f, 2)
d2f = (sym)

     ⎛                     ⎛     2      ⎞⎞
     ⎜                     ⎜  4·x       ⎟⎟
  2·⎜-2·x + (x + 1)·⎜------ - 1⎟⎟
     ⎜                     ⎜  2         ⎟⎟
     ⎝                     ⎝x  + 1      ⎠⎠
  --------------------------------
                     2
             ⎛ 2     ⎞
             ⎝x  + 1⎠

>> critical = solve(df == 0, x)
critical = (sym 2×1 matrix)

  ⎡-1 + √2⎤
  ⎢       ⎥
  ⎣-√2 - 1⎦
```

Для нахождения точек экстремума находим первую производную данной функции, а затем вторую. Далее находим критические точки- точки, в которых производная функции равняется нулю или не существует.

В результате получаем две критические точки: -1 + √2 и -√2 - 1.



Затем необходимо подставить критическую точку во вторую производную и рассчитать значение. Для этого воспользуемся такой функцией, как ***subs(d2f, x, critical(i))***, которая подставляет значение критической точки во вторую производную исходной функции. Далее выводим результат при помощи функции *double(…).*

Если в результате получили число, меньшее 0, тогда можно утверждать, что данная критическая точка - точка максимума. В противном случае — точка минимума.

При помощи такой функции, как ***double(critical(i))***, где i равняется 1 или 2, выводится приближенное значение данной критической точки-координата *x*.

Для нахождения координаты *y* необходимо воспользоваться такой функцией, как ***subs(f, x, critical(i))***, где i принимает значения, равные 1 или 2- номеру критической точки.

```
>> double(ans)
ans = -0.20711
>> subs(d2f, x, critical(2))
ans = (sym)

     ⎛      ⎛                    2⎞               ⎞
     ⎜      ⎜       4·(-√2 - 1)   ⎟               ⎟
  2·⎜- √2·⎜-1 + ─────────────────⎟ + 2 + 2·√2⎟
     ⎜      ⎜                    2⎟               ⎟
     ⎝      ⎝     1 + (-√2 - 1)  ⎠               ⎠
  ──────────────────────────────────────────────────
                                  2
                   ⎛             2⎞
                   ⎝1 + (-√2 - 1) ⎠

>> double(ans)
ans =  0.060660
>>  subs(f, x, critical(2))
ans = (sym)

       -√2
  ──────────────
                2
  1 + (-√2 - 1)

>> double(ans)
ans = -0.20711
>> double(critical(2))
ans = -2.4142
>> |
```

Командное окно | Редактор | Variable Editor

Аналогичный ряд действий проводим и для второй критической точки, равной -√2 - 1.

Таким образом, получили две точки экстремума:

d2f= -2.0607 ; d2f < 0 => 0.41 is a local maximum,

f(0.41) = 1.21

d2f= 0.060660 d2f > 0 => -2.41 is a local minimum,