

Московский Авиационный Институт
(Национально Исследовательский Университет)
Факультет «Информационные технологии и прикладная математика»

Курсовой проект №4

по теме

«Процедуры и функции в качестве параметров»

по курсу

«Вычислительные системы»

Первый семестр

Студент: Бондарева Е.Е.

Группа М8О-105Б-21

Руководитель: Титов В.К.

Оценка: _____

Дата: _25.12.2021_

Подпись: _____

Москва
2021

Содержание

Тема	3
Цель работы	3
Задание	3
Описание решения	4
Описание численных методов	4-9
Реализуемый программой алгоритм	10
Графики функции	11-13
Протокол	14-15
Дневник отладки	16
Вывод.....	16

Тема

Процедуры и функции в качестве параметров

Цель работы

Составить программу на языке Си с процедурами решения трансцендентных алгебраических уравнений различными численными методами (итераций, Ньютона, половинного деления-дихотомии). Нелинейные уравнения оформить как параметры-функции, разрешив относительно неизвестной величины в случае необходимости. Применить каждую процедуру к решению двух уравнений, заданных двумя строками таблицы, начиная с варианта с заданным номером и с новым (придуманным). Если метод неприменим, дать математическое обоснование и графическую иллюстрацию, например, с использованием gnuplot.

Задание

Необходимо написать такую программу на Си с процедурами решения трансцендентных алгебраических уравнений с помощью таких различных методов, как: дихотомии, итераций, Ньютона, хорд; на заданном отрезке. Функция для написания программы, а также отрезок и приближенное значение корня представлены в таблице.

Функция	Отрезок	Метод	Приближенное значение корня
$\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} + x - 1 = 0$	$[1; 2]$	дихотомии итераций Ньютона хорд	1,08944
$\sin x - 4x + \frac{3}{2} = 0$	$[0; 1]$	дихотомии итераций Ньютона хорд	0,33132
$\cos^2 x - \sin x - 5x + \frac{8}{5} = 0$	$[0; 1]$	дихотомии итераций Ньютона хорд	0,44913

Описание решения

Необходимо рассмотреть заданные уравнения вида $F(x)=0$. Предполагается, что функции $F(x)$ достаточно гладкие, монотонные на определенно заданных отрезках и существует единственный корень уравнения: x^* принадлежит отрезку. На этом отрезке от a до b ищется приближенное решение x с точностью ϵ , то есть такое, что модуль от $x-x^*$ строго меньше ϵ .

Описание численных методов

1) Метод дихотомии

Если на отрезке от a до b существует корень уравнения, то значения функции на концах этого отрезка имеют разные знаки, то есть $F(a)*F(b)<0$.

Данный метод заключается в делении отрезка пополам и его сужении в два раза на каждом шаге итерационного процесса в зависимости от знака функции в середине отрезка.

Решим $\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} + x - 1 = 0$

$n=1$

1) $a_1 = 1,5$ $f(x) = 0,2461$
 $b_1 = 2$ $\epsilon = 0,5$

$n=2$

2) $a_2 = 1,5$ $f(x) = 0,1075$
 $b_2 = 1,5$ $\epsilon = 0,25$

...

8) $n=8$ $a_8 = 1,0858$ $f(x) = 0,000287$
 $b_8 = 1,0838$ $\epsilon = 0,00381$

$\Rightarrow x = \frac{1,0858 + 1,0838}{2} = 1,0848$

Rule $\left[\sin x - 4x + \frac{3}{2} = 0 \right]$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

$$\frac{b_n - a_n}{2} \leq \varepsilon$$

1) $N=1 \Rightarrow a=0,5; b=1 \quad \varepsilon=0,5$
 $f(x) = -0,02057$

...
 9) $N=9 \Rightarrow a=0,4941 \quad b=0,4961$
 $f(x) = -0,00229 \quad \varepsilon=0,00195$

$$x = \frac{0,4922 + 0,4941}{2} = 0,4932$$

$$F(x) = -0,00229$$

Rule $\left[\cos^2 x - \sin x - 5x + \frac{8}{5} = 0 \right]$

$$\frac{b_n - a_n}{2} < \varepsilon \quad F(0) \times F(1) < 0$$

1) $N=1 \Rightarrow a=0,5 \quad \varepsilon=0,5$
 $b=1 \quad f(x) = -0,1288$

...
 2) $N=8 \Rightarrow a=0,4785 \quad \varepsilon=0,0038$
 $b=0,4805 \quad f(x) = -0,0046$

$$x = \frac{0,4766 + 0,4785}{2} = 0,4775$$

$$F(x) = -0,0046$$

2) Метод итераций

Идея данного метода заключается в замене исходного уравнения $F(x)=0$ уравнением вида $x=f(x)$. Достаточное условие сходимости метода: модуль от $F'(x)$ строго меньше 1, а x принадлежит отрезку заданному. Условие это необходимо проверить перед началом решения задачи, так как функция $f(x)$ может быть выбрана неоднозначно, причем в случае неверного выбора указанной функции метод расходится.

The image shows handwritten mathematical work on a piece of paper. At the top, the equation $\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} + x - 1 = 0$ is enclosed in a hand-drawn rectangular box. Below this, the derivative is calculated as $\max \text{ and } \min f'(x) \approx 0,7651$. Then, the value of λ is determined as $\lambda = \frac{1}{f'_{\max}(x)} \approx \frac{1}{0,7651} \approx 1,3071$. Next, the function value at $x=1$ is given as $F(1) = 0,449$. Finally, the interval $[1; 2]$ is identified as containing the root, based on the condition $F(1) \cdot F(2) < 0 \Rightarrow x \in [1; 2]$ is the root.

$$\boxed{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} + x - 1 = 0}$$
$$\max \text{ and } \min f'(x) \approx 0,7651$$
$$\lambda = \frac{1}{f'_{\max}(x)} \approx \frac{1}{0,7651} \approx 1,3071$$
$$F(1) = 0,449$$
$$F(1) \cdot F(2) < 0 \Rightarrow x \in [1; 2] \text{ корень}$$

Дано $\boxed{\sin x - 4x + \frac{3}{2} = 0}$

max значение производной

$$f'(x) = -3 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{-3} = -0,3333...$$

$$\Rightarrow x \neq 0,3333 \cdot (\sin x - 4x + \frac{3}{2}) = 0$$

$$|F(0) \cdot F(1)| < 0 \Rightarrow \text{максимум функции на концах заданного отрезка имеют противоположные знаки}$$

$$x = 0,48314...$$

$$F(x) = 0,00082$$

$$\lambda = \frac{|0,48... - 0,48|}{3} = 0 - \text{сходимость}$$

Дано $\boxed{\cos^2 x - \sin x - 5x + \frac{8}{5} = 0}$

max значение производной

$$f'(x) \approx -4 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{-4} \approx -0,25 \Rightarrow$$

$$x + 0,25 (\cos^2(x) - \sin x - 5x + \frac{8}{5}) = 0$$

$$|F(0) \cdot F(1)| < 0 \Rightarrow \text{максимум функции на концах заданного отрезка имеют противоположные знаки}$$

$$x = 0,336...$$

$$F(x) \approx 1,365$$

3) Метод Ньютона

Данный метод является частным случаем метода итераций. Условие сходимости метода: модуль от $F(x) \cdot F''(x)$ строго меньше квадрата от $F'(x)$ на отрезке от a до b .

$$\boxed{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} + x - 1 = 0}$$

$$F(1) = -0,0662 \quad F(2) = 0,449$$

$$f(1) = -0,0662$$

$$f''(1) \neq 0 \quad f(x_k) \leq \varepsilon m_1$$

$$x = 2 \quad F(x) = 0,4485$$

$$dF(x) = -0,6386$$

$$h = \frac{f(x)}{f'(x)} = -0,7023$$

$$x = 1,7, \quad F(x) = 0,7713$$

$$\text{Дано } \boxed{\cos^2 x + \sin x - 5x + \frac{8}{5} = 0}$$

$$\frac{dF}{dx} = -2\sin x \cos x + \cos x - 5$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 2\sin(x)^2 - \sin x - 2\cos x^2$$

$$|F(x) \cdot F''(x)| < (F'(x))^2 \Rightarrow x \text{ принадлежит промежутку}$$

$$\text{Дано } \boxed{\sin x - 4x + \frac{3}{2} = 0}$$

$$\frac{dF}{dx} = \cos x - 4$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = -\sin x$$

$$|F(x) \cdot F''(x)| < (F'(x))^2 \Rightarrow x \text{ принадлежит промежутку}$$

$F(0) \cdot F(1) < 0 \Rightarrow$ между функциями на концах отрезка имеют противоположные знаки

4) Метод хорд

Данный метод заключается в разбиении отрезка от a до b на два отрезка с помощью хорды и выборе нового отрезка от точки пересечения хорды с осью абсцисс до неподвижной точки, на котором функция меняет знак и содержит решение, причем подвижная точка приближается к x окрестности точки.

$$\boxed{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} + x - 1 = 0}$$

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (x-a)$$

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} (b-a)$$

1) $n=1$ $x=1$ $F(x) = -0,06623$

$$h \approx \frac{F(x) \cdot (b-x)}{f(b) - f(x)} \approx -0,1287$$

8) $n=8$ $x=1,0858$ $F(x) = 0,000243$

$$h \approx 0,000493$$

Дана $\boxed{\sin x - 4x + \frac{3}{2} = 0}$

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (x-a)$$

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} (b-a)$$

$F(0) \cdot F(1) < 0$
 $F(0) \approx 1,5$
 $f''(0) = 0$
 $f(a) \cdot f''(a) \neq 0$

Дана $\boxed{\cos^2 x + \sin x - 5x + \frac{8}{5} = 0}$

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (x-a)$$

$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} (b-a)$$

$F(0) = 2,6$
 $F(1) = -3,108$
 $F(0) \cdot F(1) < 0$
 $f(0) = 2,6$
 $f''(0) = -2$
 $f(a) f''(a) < 0$

Реализуемый программой алгоритм

- 1) Определить функции, которые будем использовать в коде.
- 2) Вывод значения корня для каждой функции для всех методов.
dabs возвращает модуль числа

f_1, f_2, f_3 — заданные функции.

F_1, F_2, F_3 -функции вида $f(x)=x$

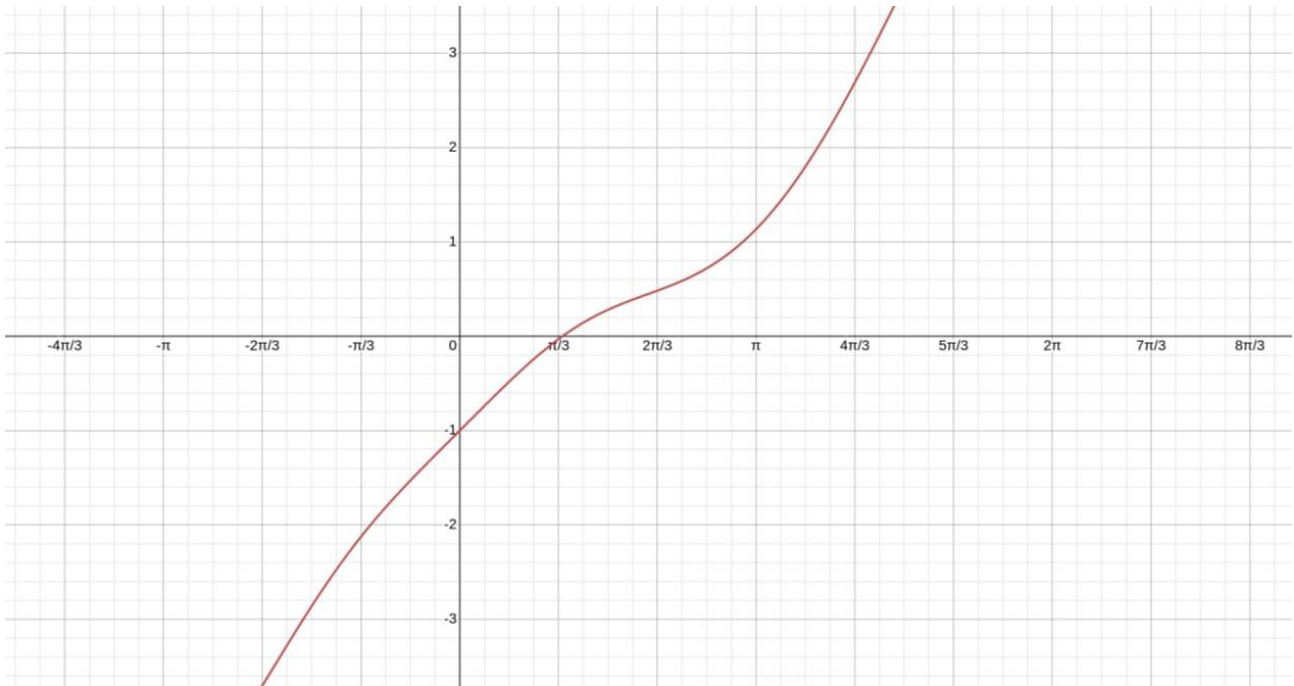
Fp_1, Fp_2, Fp_3 — производные функций f_1, f_2, f_3 соответственно.

Необходимо применить к каждой функции **все 4** метода:

- 1) Метод дихотомии
- 2) Метод итераций
- 3) Метод Ньютона
- 4) Метод хорд

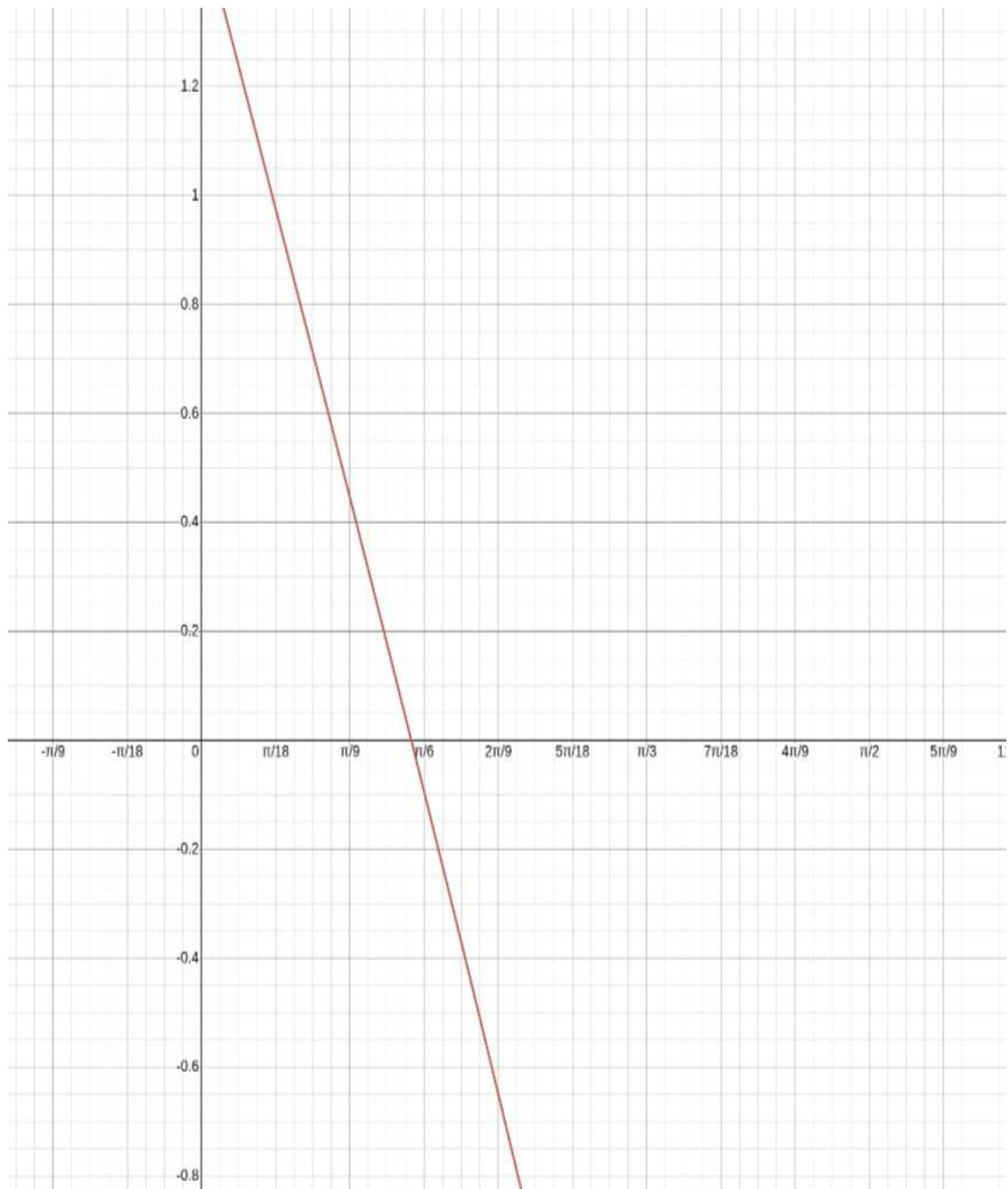
Графики функций

1) График функции $\cos(x) - e^{-(x^2)/2} + x - 1$



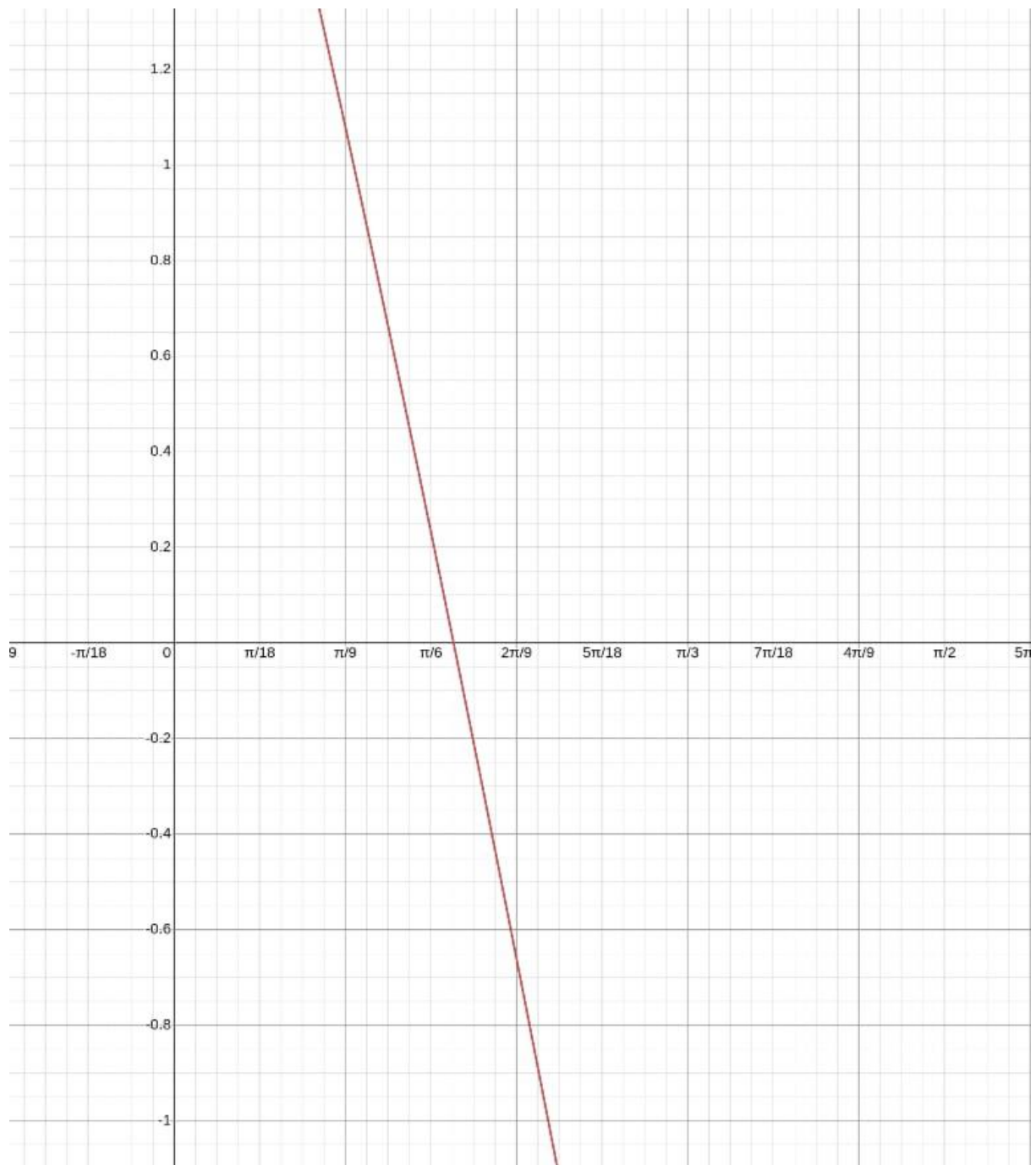
Корень уравнения немного больше $\pi/3$ и в то же время он меньше $2\pi/3$, то есть можно сделать вывод, что корень уравнения принадлежит отрезку от $\pi/3$ до $2\pi/3$. Таким образом, корень данного уравнения принадлежит отрезку от 1 до 2.

2) График функции $\sin(x)-4*x+3/2$



Можно заметить, что корень уравнения немного больше $\pi/9$ и в то же время он меньше $\pi/6$, то есть можно сделать вывод, что корень уравнения принадлежит отрезку от $\pi/9$ до $\pi/6$. Таким образом, корень данного уравнения принадлежит отрезку от 0 до 1 .

3) График функции $\cos(x) \cdot \cos(x) - 5x + 8/5 + \sin(x)$



Можно заметить, что корень уравнения немного больше $\pi/6$ и в то же время он меньше $2\pi/9$, то есть можно сделать вывод, что корень уравнения принадлежит отрезку от $\pi/6$ до $2\pi/9$. Таким образом, корень данного уравнения принадлежит отрезку от 0 до 1 .

Протокол

```
elena@elena-Aspire-A315-53G:~$ cat tit.txt
-----
КП №4
Процедуры и функции
в качестве параметров
Бондарева Елена
М80-1056-21
-----

elena@elena-Aspire-A315-53G:~$ cat kp4.cpp
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <locale.h>

const double eps = 0.000001;
double dabs(double);
double dichotomy(double f(double), double, double);
double iteration(double f(double), double, double);
double tangent(double f(double), double F(double), double, double);
double chord(double f(double), double, double);
double f1(double);
double F1(double);
double Fp1(double);
double f2(double);
double F2(double);
double Fp2(double);
double f3(double);
double F3(double);
double Fp3(double);

int main() {
    setlocale(LC_ALL, "Rus");

    printf("Корень функции f1 методом деления пополам = %.5f\n", dichotomy(f1,1,2));
    printf("Корень функции f1 методом итераций = %.5f\n", iteration(F1, 1, 2));
    printf("Корень функции f1 методом касательных = %.5f\n", tangent(f1,Fp1,1,2));
    printf("Корень функции f1 методом хорд = %.5f\n", chord(f1,1,2));

    printf("Корень функции f2 методом деления пополам = %.5f\n", dichotomy(f2,0,1));
    printf("Корень функции f2 методом итераций = %.5f\n", iteration(F2,0, 1));
    printf("Корень функции f2 методом касательных = %.5f\n", tangent(f2,Fp2,0,1));
    printf("Корень функции f2 методом хорд = %.5f\n", chord(f2,0,1));

    printf("Корень функции f3 методом деления пополам = %.5f\n", dichotomy(f3,0,1));
    printf("Корень функции f3 методом итераций = %.5f\n", iteration(F3,0,1));
    printf("Корень функции f3 методом касательных = %.5f\n", tangent(f3,Fp3,0,1));
    printf("Корень функции f3 методом хорд = %.5f\n", chord(f3,0,1));

    return 0;
}
```

```
double f1(double x) { return cos(x) - exp(-x*x/2)+ x-1 ; }
double F1(double x) { return -cos(x) + exp(-x*x/2) + 1; }
double Fp1(double x) { return -sin(x)+x*exp(-x*x/2)+1; }

double f2(double x) { return sin(x)-4*x+3/2; }
double F2(double x) { return (sin(x)+3/2)/4;}
double Fp2(double x) { return cos(x)-4 ; }

double f3(double x) { return cos(x)*cos(x)-5*x+8/5+sin(x); }
double F3(double x) { return (cos(x)*cos(x)+8/5+sin(x))/5; }
double Fp3(double x) { return -2*cos(x)*sin(x)-5+cos(x); }

double dabs(double x) { return (x > 0 ? x : -x); }

double dichotomy(double f(double), double a, double b) {
    double prevX = b, x = (a + b) / 2.;
    while(dabs(prevX - x) > eps) {
        if(f(x)*f(a) > 0)
            a = x;
        else b = x;
        prevX = x;
        x = (a + b) / 2.;
    }
    return x;
}

double iteration(double f(double), double a, double b) {
    double prevX = (a+b)/2., x = f(prevX);
    while(dabs(x-prevX) > eps) {
        prevX = x;
        x = f(x);
    }
    return x;
}

double tangent(double f(double), double F(double), double a, double b) {
    double prevX = (a+b/2.), x = prevX - f(prevX)/F(prevX);
    while(dabs(prevX - x) > eps) {
        prevX = x;
        x = prevX - f(prevX)/F(prevX);
    }
    return x;
}
```

```

    return x;
}

double chord(double f(double), double a, double b) {
    double prevX = b, ya = f(a), yb = f(b);
    double x = (ya*b-yb*a)/(ya-yb);
    while(dabs(prevX - x) > eps) {
        if(ya*f(x) > 0)
            a = x;
        else b = x;
        ya = f(a), yb = f(b);
        prevX = x;
        x = (ya*b-yb*a)/(ya-yb);
    }
    return x;
}

elena@elena-Aspire-A315-53G:~$ c++ kp4.cpp
elena@elena-Aspire-A315-53G:~$ ./a.out
Корень функции f1 методом деления пополам = 1.08944
Корень функции f1 методом итераций = 1.08944
Корень функции f1 методом касательных = 1.08944
Корень функции f1 методом хорд = 1.08944

Корень функции f2 методом деления пополам = 0.33132
Корень функции f2 методом итераций = 0.33132
Корень функции f2 методом касательных = 0.33132
Корень функции f2 методом хорд = 0.33132

Корень функции f3 методом деления пополам = 0.44913
Корень функции f3 методом итераций = 0.44913
Корень функции f3 методом касательных = 0.44913
Корень функции f3 методом хорд = 0.44913

elena@elena-Aspire-A315-53G:~$ █

```

Дневник отладки

Дневник отладки должен содержать дату и время сеансов отладки, и основные ошибки (ошибки в сценарии и программе, не стандартные операции) и краткие комментарии к ним. В дневнике отладки приводятся сведения об использовании других ЭВМ, существенном участии преподавателя и других лиц в написании и отладке программы.

№	Лаб. или дом.	Дата	Время	Событие	Действие по исправлению	Примечание
<u>1</u>	<u>дом</u>	<u>25.12.</u> <u>2021</u>	<u>15:15</u>	При написании формулы в программе не поставила знак «*». (написала - $5x$, а надо $-5*x$)	Внимательно писать программу. Помнить, что умножение обозначается с помощью « * ».	

Вывод

В результате работы я составила программу на языке Си с процедурами решения трансцендентных алгебраических уравнений различными численными методами (итераций, Ньютона, половинного деления-дихотомии). Нелинейные уравнения оформила как параметры-функции, разрешив относительно неизвестной величины в случае необходимости. Применила каждую процедуру к решению трех уравнений, заданных тремя строками таблицы, начиная с варианта с заданным номером и с новыми (придуманными).