题解

A.深度学习

最优的 B 显然等于 n

B.异或求和

$$\sum_{i<j<k}(a_i\oplus a_j)(a_j\oplus a_k)(a_i\oplus a_k)$$

设 $bit(x,i)$ 表示 x 二进制下第 i 位是 0 还是 1

原式可以写成：

$$\sum_{i<j<k}(a_i\oplus a_j)(a_j\oplus a_k)\sum_{l=0}^{29}2^l(bit(a_i,l)\oplus bit(a_k,l))$$

枚举一下 $bit(a_i,l)$ 和 $bit(a_k,l)$，使得 $bit(a_i,l)\oplus bit(a_k,l)=1$

则原式可以写成：

$$\sum_{l=0}^{29}2^l\sum_{i<j<k}(a_i\oplus a_j)(a_j\oplus a_k)=\sum_{l=0}^{29}2^l(\sum_{i<j}(a_i\oplus a_j))(\sum_{j<k}(a_j\oplus a_k))$$

其中 a_i,a_k 要满足我们枚举的 $bit(a_i,l)$ 和 $bit(a_k,l)$

相当于要对于每个 j 计算，前面和后面满足条件的数和它异或后的和，这个是可以$O(n\log n)$ 的

时间复杂度：$O(n\log^2 n)$

C.异或计数

考虑比较两个数的大小，肯定是在二进制下从高往低，找到第一个不同的位然后比较

枚举 i 表示 b 中所有数，二进制下高于 i 的那些二进制位的都与 k 对应位的二进制位相同

那么 k 的第 i 位肯定为 1

b 里一些数的第 i 位为 1，且至少有一个数第 i 位为 0

首先第 i 位为 1 的数必须有偶数个，这样才能满足第 i 位异或值为 0

之后就是 $0..i-1$ 的异或值要求为 0，假设 b_x 满足第 i 位为 0 ，那么 b_x 的 $0...i-1$ 位可以随便选都不会违背 $b_x\le k$ 的条件

那么我们让 $j \neq x$ 的 b_j 的 $0...i-1$ 位都随便选（当然要满足不超过 k），之后用 b_x 选一个数，使得这些数 $0...i-1$ 位的异或值也为 0

所以假设 n 是偶数，现在枚举的是第 t 位，我们的式子就是：

$$\sum_{i=2,\ 2|i}^{n} C_n^i (2^t)^{i-1} lst^{n-i}$$

其中 lst 表示那些第 t 位选了 1 的，$0 \ldots i-1$ 位有几种选法使得这个数不超过 k

可以化简为

$$2^{-t}\left(\sum_{i=0}^{n} C_n^i (2^t)^i lst^{n-i} \times [i\%2=0]\right) - 2^{-t} lst^n$$

其中 $[i\%2=0] = \frac{1^i-(-1)^i}{2}$

所以可以直接应用二项式定理，变成：

$$2^{-t-1}\left((lst+2^t)^n - (lst-2^t)^n\right) - 2^{-t} lst^n$$

n 为奇数时也类似

时间复杂度：$O(\log^2 n)$

D.最小生成树

考虑作为一个生成树，每个点肯定往其他点连了边，那么我们让他们都连 a 最小的点即可

所以答案是 $min(a) \times (n-2) + \sum_{i=1}^{n} a_i$

E.乒乓球

考虑枚举两个乒乓球 $i < j$，计算 $w_i \times w_j$ 产生贡献的概率

可以发现，i, j 要产生贡献的条件是，i, j 是 $[i, j]$ 中最晚被拿走的

所以算一下概率，等于 $\dfrac{2(j-i-1)!}{(j-i+1)!} = \dfrac{2}{(j-i)(j-i+1)}$

可以发现只和 $j-i$ 有关，所以用 fft 算出对于每种 $j-i$，$w_i \times w_j$ 的和就行了

$O(n \log n)$

F.导数卷积

令G_i为$g(x)$的x^i的系数

令F_i为$f(x)$的x^i的系数

则有：

$$g_d=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{d}F_{i+j}*\frac{(i+j)!}{j!}*F_{n-1-i+d-j}*\frac{(n-1-i+d-j)!}{(d-j)!}$$

令$F_i=F_i*i!$

原式为：

$$g_d=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{d}F_{i+j}*\frac{1}{j!}*F_{n-1-i+d-j}*\frac{1}{(d-j)!}$$

$$g_d=\sum_{i=0}^{n-1+d}F_i*F_{n-1+d-i}*\sum_{j=0}^{d}\frac{1}{(d-j)!j!}*[j\le i]*[d-j\le n-1+d-i]$$

现在比较棘手的是后面那两个小于等于

可以发现，若$i<d$则有$n-1+d-i>=n$，但是F只有$F_{0..n-1}$不为0，所以可以直接省略

同理可得$n-1+d-i>=d$

于是有

$$g_d=\sum_{i=0}^{n-1+d}F_i*F_{n-1+d-i}*\sum_{j=0}^{d}\frac{1}{(d-j)!j!}$$

后面那个求和是$\frac{2^d}{d!}$

FFT一下就行了

时间复杂度：$O(n\log n)$

G.区间权值

考虑对于每个 a_x 去算一下对于所有包含它的区间，w 之和

相当于计算 $\sum_{i=0}^{x-1}\sum_{j=0}^{n-x}w_{i+j+1}$

设 $A_i=\sum_{j=0}^{i}w_j$

设 $B_i=\sum_{j=0}^{i}A_j$

则原式等于：

$$\sum_{i=0}^{x-1} A_{i+n-x+1} - A_i = B_n - B_{n-x} - B_{x-1}$$

所以 $O(n)$ 预处理 A, B 就行了

时间复杂度：$O(n)$

H.树链博弈

结论为：树上每个深度都有偶数个黑点的话后手必胜，否则先手必胜

首先，所有点都是白点显然满足每层都是偶数个黑点，这个是题目规定的必败态

然后，如果是先手必胜的状态，那么肯定能通过一次操作达到先手必败状态

且先手必败状态走一步只能达到先手必胜状态

所以结论正确

另一种思路：用 SG 函数做的话，可以发现深度为 i 的点 sg 函数为 2^i

时间复杂度：$O(n)$

I.连通块计数

包含中心的连通块数量：$\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i+1)$

不包含中心的连通块数量：$\sum_{i=1}^{n}(a_i(a_i+1)/2)$

时间复杂度：$O(n)$

J.寻找复读机

按照题目意思模拟即可

每次记一下哪些人不可能是复读机，即第一个发言的人以及发言和上一条不一样的人

注意一句话都不说的人也可能是复读机