组合数学选讲

skywalkert

2018 年 8 月 7 日

写在前面

致谢

- 《组合数学》Richard A. Brualdi

  以及某三本院校计算机学院组合数学课程

- 《数学题选讲》《组合数求模》佚名

- 《生成函数的运算与应用》金策

整体内容

- 排列组合基础
- 鸽巢原理与 Ramsey 定理
- 容斥原理与二项式反演
- 生成函数与图计数问题
- ~~Burnside 引理与Polya 定理~~

排列组合基础

- **加法原理：** $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m$，$S_i \cap S_j = \emptyset\ (i \neq j) \Rightarrow$ $|S| = |S_1| + |S_2| + \cdots + |S_m|$。

  例子：今天中午吃什么？

- **乘法原理：** $S = P \times Q \Rightarrow |S| = |P| \times |Q|$。

  例子：男女生坐同桌。

排列组合基础

- **加法原理：** $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m$，$S_i \cap S_j = \emptyset \ (i \neq j) \Rightarrow$

  $|S| = |S_1| + |S_2| + \cdots + |S_m|$。

  例子：今天中午吃什么？

- **乘法原理：** $S = P \times Q \Rightarrow |S| = |P| \times |Q|$。

  例子：男女生坐同桌。

排列组合基础

- 长度为 n 的排列数 $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$
- n 个人中选出 k 个排成一队有序膜沃老师的方案数

$$P(n,k) = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- n 个人中选出 k 个组成一组一起膜沃老师的方案数

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k} \ (0 \le k \le n)$$

- n 个人分入 k 个班，每个班至少一个人的方案数 $\binom{n-1}{k-1}$
- n 个人分成 k 个班，第 i 个班恰好 a_i 个人的方案数

$$\binom{n}{a_1} \cdot \binom{n-a_1}{a_2} \cdots \binom{a_{k-1}+a_k}{a_{k-1}} \cdot \binom{a_k}{a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdots a_k!}$$

排列组合基础

- 长度为 n 的排列数 $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$
- n 个人中选出 k 个排成一队有序膜沃老师的方案数

$$P(n,k) = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- n 个人中选出 k 个组成一组一起膜沃老师的方案数

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k} \ (0 \le k \le n)$$

- n 个人分入 k 个班，每个班至少一个人的方案数 $\binom{n-1}{k-1}$
- n 个人分成 k 个班，第 i 个班恰好 a_i 个人的方案数

$$\binom{n}{a_1} \cdot \binom{n-a_1}{a_2} \cdots \binom{a_{k-1}+a_k}{a_{k-1}} \cdot \binom{a_k}{a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdots a_k!}$$

排列组合基础

- 长度为 n 的排列数 $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$
- n 个人中选出 k 个排成一队有序膜沃老师的方案数

$P(n,k) = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

- n 个人中选出 k 个组成一组一起膜沃老师的方案数

$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k} \ (0 \le k \le n)$

- n 个人分入 k 个班，每个班至少一个人的方案数 $\binom{n-1}{k-1}$
- n 个人分成 k 个班，第 i 个班恰好 a_i 个人的方案数

$\binom{n}{a_1} \cdot \binom{n-a_1}{a_2} \cdots \binom{a_{k-1}+a_k}{a_{k-1}} \cdot \binom{a_k}{a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdots a_k!}$

排列组合基础

- 长度为 n 的排列数 $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$
- n 个人中选出 k 个排成一队有序膜沃老师的方案数

$$P(n,k) = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- n 个人中选出 k 个组成一组一起膜沃老师的方案数

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k} \ (0 \le k \le n)$$

- n 个人分入 k 个班，每个班至少一个人的方案数 $\binom{n-1}{k-1}$
- n 个人分成 k 个班，第 i 个班恰好 a_i 个人的方案数

$$\binom{n}{a_1} \cdot \binom{n-a_1}{a_2} \cdots \binom{a_{k-1}+a_k}{a_{k-1}} \cdot \binom{a_k}{a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdots a_k!}$$

排列组合基础

- 长度为 n 的排列数 $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$
- n 个人中选出 k 个排成一队有序膜沃老师的方案数

  $P(n,k) = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
- n 个人中选出 k 个组成一组一起膜沃老师的方案数

  $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}\ (0 \le k \le n)$
- n 个人分入 k 个班，每个班至少一个人的方案数 $\binom{n-1}{k-1}$
- n 个人分成 k 个班，第 i 个班恰好 a_i 个人的方案数

  $\binom{n}{a_1} \cdot \binom{n-a_1}{a_2} \cdots \binom{a_{k-1}+a_k}{a_{k-1}} \cdot \binom{a_k}{a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdots a_k!}$

排列组合基础

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

  从 $(0,0)$ 到 (n,k) 只走 $(+1,0)$ 和 $(+1,+1)$ 的路径数

- 二项式定理：$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

  $x = y = 1$: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \ (n \geq 0)$

  $|x| = |y| = 1$: $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots = 2^{n-1} \ (n \geq 1)$

  求导：$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1} \ (n \geq 1)$

  再求导：$1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + n^2\binom{n}{n} = n(n+1)2^{n-2} \ (n \geq 1)$

  求和：$\sum_{k=l}^{r} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{l-1}$

  搭配：$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$

排列组合基础

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

  从 $(0,0)$ 到 (n,k) 只走 $(+1,0)$ 和 $(+1,+1)$ 的路径数

- 二项式定理：$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

  $x = y = 1$: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \ (n \geq 0)$

  $|x| = |y| = 1$: $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots = 2^{n-1} \ (n \geq 1)$

  求导：$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1} \ (n \geq 1)$

  再求导：$1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + n^2\binom{n}{n} = n(n+1)2^{n-2} \ (n \geq 1)$

  求和：$\sum_{k=l}^{r} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{l-1}$

  搭配：$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$

排列组合基础

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
  从 $(0,0)$ 到 (n,k) 只走 $(+1,0)$ 和 $(+1,+1)$ 的路径数
- 二项式定理：$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$
  $x = y = 1$: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \ (n \geq 0)$
  $|x| = |y| = 1$: $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots = 2^{n-1} \ (n \geq 1)$
  求导：$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1} \ (n \geq 1)$
  再求导：$1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + n^2\binom{n}{n} = n(n+1)2^{n-2} \ (n \geq 1)$
  求和：$\sum_{k=l}^{r} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{l-1}$
  搭配：$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

  从 $(0,0)$ 到 (n,k) 只走 $(+1,0)$ 和 $(+1,+1)$ 的路径数

- 二项式定理：$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

  $x = y = 1$: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \ (n \geq 0)$

  $|x| = |y| = 1$: $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots = 2^{n-1} \ (n \geq 1)$

  求导：$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1} \ (n \geq 1)$

  再求导：$1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + n^2\binom{n}{n} = n(n+1)2^{n-2} \ (n \geq 1)$

  求和：$\sum_{k=l}^{r} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{l-1}$

  搭配：$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$

排列组合基础

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

  从 $(0,0)$ 到 (n,k) 只走 $(+1,0)$ 和 $(+1,+1)$ 的路径数

- 二项式定理：$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

  $x = y = 1$: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \ (n \geq 0)$

  $|x| = |y| = 1$: $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots = 2^{n-1} \ (n \geq 1)$

  求导：$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1} \ (n \geq 1)$

  再求导：$1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + n^2\binom{n}{n} = n(n+1)2^{n-2} \ (n \geq 1)$

  求和：$\sum_{k=l}^{r} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{l-1}$

  搭配：$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$

排列组合基础

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

  从 $(0,0)$ 到 (n,k) 只走 $(+1,0)$ 和 $(+1,+1)$ 的路径数

- 二项式定理：$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

  $x = y = 1$: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \ (n \geq 0)$

  $|x| = |y| = 1$: $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots = 2^{n-1} \ (n \geq 1)$

  求导：$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1} \ (n \geq 1)$

  再求导：$1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + n^2\binom{n}{n} = n(n+1)2^{n-2} \ (n \geq 1)$

  求和：$\sum_{k=l}^{r} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{l-1}$

  搭配：$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$

排列组合基础

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

  从 $(0,0)$ 到 (n,k) 只走 $(+1,0)$ 和 $(+1,+1)$ 的路径数

- 二项式定理：$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

  $x = y = 1$: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \ (n \geq 0)$

  $|x| = |y| = 1$: $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots = 2^{n-1} \ (n \geq 1)$

  求导：$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1} \ (n \geq 1)$

  再求导：$1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + n^2\binom{n}{n} = n(n+1)2^{n-2} \ (n \geq 1)$

  求和：$\sum_{k=l}^{r} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{l-1}$

  搭配：$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$

排列组合基础

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

  从 $(0,0)$ 到 (n,k) 只走 $(+1,0)$ 和 $(+1,+1)$ 的路径数

- 二项式定理：$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

  $x = y = 1$: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \ (n \geq 0)$

  $|x| = |y| = 1$: $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots = 2^{n-1} \ (n \geq 1)$

  求导：$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1} \ (n \geq 1)$

  再求导：$1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + n^2\binom{n}{n} = n(n+1)2^{n-2} \ (n \geq 1)$

  求和：$\sum_{k=l}^{r} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{l-1}$

  搭配：$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$

排列组合基础

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

  从 $(0,0)$ 到 (n,k) 只走 $(+1,0)$ 和 $(+1,+1)$ 的路径数

- 二项式定理：$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

  $x = y = 1$: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \ (n \geq 0)$

  $|x| = |y| = 1$: $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots = 2^{n-1} \ (n \geq 1)$

  求导：$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1} \ (n \geq 1)$

  再求导：$1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + n^2\binom{n}{n} = n(n+1)2^{n-2} \ (n \geq 1)$

  求和：$\sum_{k=l}^{r} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{l-1}$

  搭配：$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$

排列组合基础

- $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2\rceil} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{0}$
- Sperner 定理：从 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有子集中最多选出 $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$ 个集合，使得不存在包含关系
  - 最大链：$\emptyset,\{p_1\},\{p_1,p_2\},\cdots,\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$，共有 $n!$ 种
  - 考虑所有 (A,B) 满足 A 被选择，B 是包含 A 的最大链，这样的二元组不超过 $n!$ 种
  - 考虑 $|A|=k$，最多有 $k!(n-k)!$ 种最大链 B 满足 $A\in B$
  - 设 c_k 表示 $|A|=k$ 的数量，则有 $\sum_{k=0}^{n} k!(n-k)!c_k \le n!$
  - $\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{\binom{n}{k}} \le 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} c_k \le \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$

排列组合基础

- $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{0}$
- Sperner 定理：从 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的所有子集中最多选出 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个集合，使得不存在包含关系
  - 最大链：$\emptyset, \{p_1\}, \{p_1, p_2\}, \cdots, \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$，共有 $n!$ 种
  - 考虑所有 (A, B) 满足 A 被选择，B 是包含 A 的最大链，这样的二元组不超过 $n!$ 种
  - 考虑 $|A| = k$，最多有 $k!(n-k)!$ 种最大链 B 满足 $A \in B$
  - 设 c_k 表示 $|A| = k$ 的数量，则有 $\sum_{k=0}^{n} k!(n-k)! c_k \leq n!$
  - $\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{\binom{n}{k}} \leq 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} c_k \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$

排列组合基础

- $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{0}$
- Sperner 定理：从 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的所有子集中最多选出 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个集合，使得不存在包含关系
  - 最大链：$\emptyset, \{p_1\}, \{p_1, p_2\}, \cdots, \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$，共有 $n!$ 种
  - 考虑所有 (A, B) 满足 A 被选择，B 是包含 A 的最大链，这样的二元组不超过 $n!$ 种
  - 考虑 $|A| = k$，最多有 $k!(n-k)!$ 种最大链 B 满足 $A \in B$
  - 设 c_k 表示 $|A| = k$ 的数量，则有 $\sum_{k=0}^{n} k!(n-k)!c_k \le n!$
  - $\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{\binom{n}{k}} \le 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} c_k \le \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$

排列组合基础

- $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{0}$
- Sperner 定理：从 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的所有子集中最多选出 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个集合，使得不存在包含关系
  - 最大链：$\emptyset, \{p_1\}, \{p_1, p_2\}, \cdots, \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$，共有 $n!$ 种
  - 考虑所有 (A, B) 满足 A 被选择，B 是包含 A 的最大链，这样的二元组不超过 $n!$ 种
  - 考虑 $|A| = k$，最多有 $k!(n-k)!$ 种最大链 B 满足 $A \in B$
  - 设 c_k 表示 $|A| = k$ 的数量，则有 $\sum_{k=0}^{n} k!(n-k)!c_k \leq n!$
  - $\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{\binom{n}{k}} \leq 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} c_k \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$

排列组合基础

- $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{0}$
- Sperner 定理：从 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的所有子集中最多选出 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个集合，使得不存在包含关系
  - 最大链：$\emptyset, \{p_1\}, \{p_1, p_2\}, \cdots, \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$，共有 $n!$ 种
  - 考虑所有 (A, B) 满足 A 被选择，B 是包含 A 的最大链，这样的二元组不超过 $n!$ 种
  - 考虑 $|A| = k$，最多有 $k!(n-k)!$ 种最大链 B 满足 $A \in B$
  - 设 c_k 表示 $|A| = k$ 的数量，则有 $\sum_{k=0}^{n} k!(n-k)!c_k \le n!$
  - $\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{\binom{n}{k}} \le 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} c_k \le \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$

排列组合基础

- $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{0}$
- Sperner 定理：从 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的所有子集中最多选出 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个集合，使得不存在包含关系
  - 最大链：$\emptyset, \{p_1\}, \{p_1, p_2\}, \cdots, \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$，共有 $n!$ 种
  - 考虑所有 (A, B) 满足 A 被选择，B 是包含 A 的最大链，这样的二元组不超过 $n!$ 种
  - 考虑 $|A| = k$，最多有 $k!(n-k)!$ 种最大链 B 满足 $A \in B$
  - 设 c_k 表示 $|A| = k$ 的数量，则有 $\sum_{k=0}^{n} k!(n-k)!c_k \le n!$
  - $\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{\binom{n}{k}} \le 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} c_k \le \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$

排列组合基础

- $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{0}$
- Sperner 定理：从 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的所有子集中最多选出 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个集合，使得不存在包含关系
  - 最大链：$\emptyset, \{p_1\}, \{p_1, p_2\}, \cdots, \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$，共有 $n!$ 种
  - 考虑所有 (A, B) 满足 A 被选择，B 是包含 A 的最大链，这样的二元组不超过 $n!$ 种
  - 考虑 $|A| = k$，最多有 $k!(n-k)!$ 种最大链 B 满足 $A \in B$
  - 设 c_k 表示 $|A| = k$ 的数量，则有 $\sum_{k=0}^{n} k!(n-k)!c_k \leq n!$
  - $\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{\binom{n}{k}} \leq 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} c_k \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$

Lucas 定理

- 对于非负整数 n, m 和质数 p 有

$$\binom{n}{m} \equiv \prod_{i=0}^{k} \binom{n_i}{m_i} \pmod p$$

- 其中

$$n = n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \cdots + n_1 p + n_0$$

以及

$$m = m_k p^k + m_{k-1} p^{k-1} + \cdots + m_1 p + m_0$$

分别为 n 和 m 的 p 进制表示

- 若 $n_i < m_i$，则认为 $\binom{n_i}{m_i} = 0$

排列组合基础

Lucas 定理证明

- 令 α_n 为最大可能的非负整数 k 使得 p^k 整除 $n!$，则
  $\alpha_n = \sum_{k\geq 1}\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor$
- $\alpha_n - \alpha_m - \alpha_{n-m} \geq 0$
  推论：p 整除 $\binom{p^e}{m}$ 当且仅当 $m \neq 0$ 且 $m \neq p^e$
- $$\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x^m \equiv (1+x)^n \equiv \prod_{i=0}^{k}\left((1+x)^{p^i}\right)^{n_i}$$
  $$\equiv \prod_{i=0}^{k}\left(1+x^{p^i}\right)^{n_i} \equiv \sum_{m=0}^{n}\left(\prod_{i=0}^{k}\binom{n_i}{m_i}\right)x^m \pmod p$$

Lucas 定理证明

- 令 α_n 为最大可能的非负整数 k 使得 p^k 整除 $n!$，则

  $\alpha_n = \sum_{k\geq 1}\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$

- $\alpha_n - \alpha_m - \alpha_{n-m} \geq 0$

  推论：p 整除 $\binom{p^e}{m}$ 当且仅当 $m \neq 0$ 且 $m \neq p^e$

- $$\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x^m \equiv (1+x)^n \equiv \prod_{i=0}^{k}\left((1+x)^{p^i}\right)^{n_i}$$

  $$\equiv \prod_{i=0}^{k}\left(1+x^{p^i}\right)^{n_i} \equiv \sum_{m=0}^{n}\left(\prod_{i=0}^{k}\binom{n_i}{m_i}\right)x^m \pmod p$$

Lucas 定理证明

- 令 α_n 为最大可能的非负整数 k 使得 p^k 整除 $n!$，则

$\alpha_n = \sum_{k\geq 1}\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor$

- $\alpha_n - \alpha_m - \alpha_{n-m} \geq 0$

推论：p 整除 $\binom{p^e}{m}$ 当且仅当 $m \neq 0$ 且 $m \neq p^e$

- $$\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x^m = (1+x)^n = \prod_{i=0}^{k}\left((1+x)^{p^i}\right)^{n_i}$$

$$\equiv \prod_{i=0}^{k}\left(1+x^{p^i}\right)^{n_i} \equiv \sum_{m=0}^{n}\left(\prod_{i=0}^{k}\binom{n_i}{m_i}\right)x^m \pmod{p}$$

排列组合基础

Lucas 定理证明

- 令 α_n 为最大可能的非负整数 k 使得 p^k 整除 $n!$，则 $\alpha_n = \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$
- $\alpha_n - \alpha_m - \alpha_{n-m} \geq 0$

  推论：p 整除 $\binom{p^e}{m}$ 当且仅当 $m \neq 0$ 且 $m \neq p^e$
- $$\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x^m \equiv (1+x)^n \equiv \prod_{i=0}^{k}\left((1+x)^{p^i}\right)^{n_i}$$

  $$\equiv \prod_{i=0}^{k}\left(1+x^{p^i}\right)^{n_i} \equiv \sum_{m=0}^{n}\left(\prod_{i=0}^{k}\binom{n_i}{m_i}\right)x^m \pmod{p}$$

Lucas 定理证明

- 令 α_n 为最大可能的非负整数 k 使得 p^k 整除 $n!$，则

  $\alpha_n = \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$

- $\alpha_n - \alpha_m - \alpha_{n-m} \geq 0$

  推论：p 整除 $\binom{p^e}{m}$ 当且仅当 $m \neq 0$ 且 $m \neq p^e$

- $$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m \equiv (1+x)^n \equiv \prod_{i=0}^{k} \left((1+x)^{p^i}\right)^{n_i}$$

  $$\equiv \prod_{i=0}^{k} \left(1+x^{p^i}\right)^{n_i} \equiv \sum_{m=0}^{n} \left(\prod_{i=0}^{k} \binom{n_i}{m_i}\right) x^m \pmod p$$

Lucas 定理证明

- 令 α_n 为最大可能的非负整数 k 使得 p^k 整除 $n!$，则

  $\alpha_n = \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$

- $\alpha_n - \alpha_m - \alpha_{n-m} \geq 0$

  推论：p 整除 $\binom{p^e}{m}$ 当且仅当 $m \neq 0$ 且 $m \neq p^e$

- $$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m \equiv (1+x)^n \equiv \prod_{i=0}^{k} \left((1+x)^{p^i}\right)^{n_i}$$

  $$\equiv \prod_{i=0}^{k} \left(1+x^{p^i}\right)^{n_i} \equiv \sum_{m=0}^{n} \left(\prod_{i=0}^{k} \binom{n_i}{m_i}\right) x^m \pmod p$$

Lucas 定理证明

- 令 α_n 为最大可能的非负整数 k 使得 p^k 整除 $n!$，则

  $\alpha_n = \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$

- $\alpha_n - \alpha_m - \alpha_{n-m} \geq 0$

  推论：p 整除 $\binom{p^e}{m}$ 当且仅当 $m \neq 0$ 且 $m \neq p^e$

- $$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m \equiv (1+x)^n \equiv \prod_{i=0}^{k} \left((1+x)^{p^i}\right)^{n_i}$$

  $$\equiv \prod_{i=0}^{k} \left(1+x^{p^i}\right)^{n_i} \equiv \sum_{m=0}^{n} \left(\prod_{i=0}^{k} \binom{n_i}{m_i}\right) x^m \pmod p$$

计蒜之道 2017 复赛 E 商汤机器人

- 二维平面上有一个机器人，若机器人当前在 (a,b)，则下一步可以在 $(a+1,b+1)$ 或 $(a+2,b)$ 或 $(a+1,b-1)$，问机器人从 $(0,0)$ 走到 (x,y) 的方案数，答案对质数 10003 取模
- $0 \leq x,y \leq 10^{18}$
- 加强版：$0 \leq x,y < 10003^{1000}$

计蒜之道 2017 复赛 E 商汤机器人

- 二维平面上有一个机器人，若机器人当前在 (a,b)，则下一步可以在 $(a+1,b+1)$ 或 $(a+2,b)$ 或 $(a+1,b-1)$，问机器人从 $(0,0)$ 走到 (x,y) 的方案数，答案对质数 10003 取模
- $0 \le x,y \le 10^{18}$
- 加强版：$0 \le x,y < 10003^{1000}$

排列组合基础

计蒜之道 2017 复赛 E 商汤机器人

- $(a,b) \rightarrow (\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2})$ 重建坐标系，每次可以从 (p,q) 走到 $(p+1,q)$ 或 $(p+1,q+1)$ 或 $(p,q+1)$
- 若 (p,q) 不是整点，则 $(0,0)$ 不可到达 (p,q)，只考虑整点
- 枚举 $(+1,+1)$ 使用了 k 次，可知方案数为 $\sum_{0\le k\le \min(p,q)} \frac{(p+q-k)!}{(p-k)!(q-k)!k!}$，对可重集排列试试 Lucas 定理？
- $\frac{(p+q-k)!}{(p-k)!(q-k)!k!} = \binom{p+q-k}{p}\binom{p}{k} = \binom{p+q-k}{q}\binom{q}{k}$，只枚举 10003 进制下每种组合数都不为 0 时 k 的每个数位，利用乘法原理算答案

排列组合基础

计蒜之道 2017 复赛 E 商汤机器人

- $(a, b) \to (\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2})$ 重建坐标系，每次可以从 (p, q) 走到 $(p+1, q)$ 或 $(p+1, q+1)$ 或 $(p, q+1)$
- 若 (p, q) 不是整点，则 $(0, 0)$ 不可到达 (p, q)，只考虑整点
- 枚举 $(+1, +1)$ 使用了 k 次，可知方案数为 $\sum_{0 \le k \le \min(p,q)} \frac{(p+q-k)!}{(p-k)!(q-k)!k!}$，对可重集排列试试 Lucas 定理？
- $\frac{(p+q-k)!}{(p-k)!(q-k)!k!} = \binom{p+q-k}{p}\binom{p}{k} = \binom{p+q-k}{q}\binom{q}{k}$，只枚举 10003 进制下每种组合数都不为 0 时 k 的每个数位，利用乘法原理算答案

计蒜之道 2017 复赛 E 商汤机器人

- $(a,b)\to(\frac{a+b}{2},\frac{a-b}{2})$ 重建坐标系，每次可以从 (p,q) 走到 $(p+1,q)$ 或 $(p+1,q+1)$ 或 $(p,q+1)$
- 若 (p,q) 不是整点，则 $(0,0)$ 不可到达 (p,q)，只考虑整点
- 枚举 $(+1,+1)$ 使用了 k 次，可知方案数为 $\sum_{0\le k\le \min(p,q)}\frac{(p+q-k)!}{(p-k)!(q-k)!k!}$，对可重集排列试试 Lucas 定理？
- $\frac{(p+q-k)!}{(p-k)!(q-k)!k!}=\binom{p+q-k}{p}\binom{p}{k}=\binom{p+q-k}{q}\binom{q}{k}$，只枚举 10003 进制下每种组合数都不为 0 时 k 的每个数位，利用乘法原理算答案

排列组合基础

计蒜之道 2017 复赛 E 商汤机器人

- $(a,b) \to (\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2})$ 重建坐标系，每次可以从 (p,q) 走到 $(p+1,q)$ 或 $(p+1,q+1)$ 或 $(p,q+1)$
- 若 (p,q) 不是整点，则 $(0,0)$ 不可到达 (p,q)，只考虑整点
- 枚举 $(+1,+1)$ 使用了 k 次，可知方案数为 $\sum_{0\le k\le \min(p,q)} \frac{(p+q-k)!}{(p-k)!(q-k)!k!}$，对可重集排列试试 Lucas 定理？
- $\frac{(p+q-k)!}{(p-k)!(q-k)!k!} = \binom{p+q-k}{p}\binom{p}{k} = \binom{p+q-k}{q}\binom{q}{k}$，只枚举 10003 进制下每种组合数都不为 0 时 k 的每个数位，利用乘法原理算答案

鸽巢原理与 Ramsey 定理

- 如果 $n+1$ 个鸽手分别说它在前 n 天比赛的某一天要鸽，那么至少有一天包含两个及更多的鸽手要鸽。
- 如果 n 个鸽手分别说它在前 n 天比赛的某一天要鸽，且每一天至少有一个鸽手要鸽，那么每一天恰好有一个鸽手要鸽。
- 练习 1：从 $1, 2, \cdots, 2n$ 中选出 $n+1$ 个整数，一定存在一个数比另一个数大 1。
- 练习 2：从 $1, 2, \cdots, 2n$ 中选出 $n+1$ 个整数，一定存在一个数是另一个数的因子。
- 练习 3：在边长为 n 的等边三角形内选出 5 个点，一定存在一个点到另一个点距离不超过 $n/2$。

- 如果 $n+1$ 个鸽手分别说它在前 n 天比赛的某一天要鸽，那么至少有一天包含两个及更多的鸽手要鸽。
- 如果 n 个鸽手分别说它在前 n 天比赛的某一天要鸽，且每一天至少有一个鸽手要鸽，那么每一天恰好有一个鸽手要鸽。
- 练习 1：从 $1, 2, \cdots, 2n$ 中选出 $n+1$ 个整数，一定存在一个数比另一个数大 1。
- 练习 2：从 $1, 2, \cdots, 2n$ 中选出 $n+1$ 个整数，一定存在一个数是另一个数的因子。
- 练习 3：在边长为 n 的等边三角形内选出 5 个点，一定存在一个点到另一个点距离不超过 $n/2$。

鸽巢原理与 Ramsey 定理

- 如果 $n+1$ 个鸽手分别说它在前 n 天比赛的某一天要鸽，那么至少有一天包含两个及更多的鸽手要鸽。
- 如果 n 个鸽手分别说它在前 n 天比赛的某一天要鸽，且每一天至少有一个鸽手要鸽，那么每一天恰好有一个鸽手要鸽。
- 练习 1：从 $1, 2, \cdots, 2n$ 中选出 $n+1$ 个整数，一定存在一个数比另一个数大 1。
- 练习 2：从 $1, 2, \cdots, 2n$ 中选出 $n+1$ 个整数，一定存在一个数是另一个数的因子。
- 练习 3：在边长为 n 的等边三角形内选出 5 个点，一定存在一个点到另一个点距离不超过 $n/2$。

鸽巢原理与 Ramsey 定理

- 如果 $n+1$ 个鸽手分别说它在前 n 天比赛的某一天要鸽，那么至少有一天包含两个及更多的鸽手要鸽。
- 如果 n 个鸽手分别说它在前 n 天比赛的某一天要鸽，且每一天至少有一个鸽手要鸽，那么每一天恰好有一个鸽手要鸽。
- 练习 1：从 $1, 2, \cdots, 2n$ 中选出 $n+1$ 个整数，一定存在一个数比另一个数大 1。
- 练习 2：从 $1, 2, \cdots, 2n$ 中选出 $n+1$ 个整数，一定存在一个数是另一个数的因子。
- 练习 3：在边长为 n 的等边三角形内选出 5 个点，一定存在一个点到另一个点距离不超过 $n/2$。

鸽巢原理与 Ramsey 定理

- 如果 $n+1$ 个鸽手分别说它在前 n 天比赛的某一天要鸽，那么至少有一天包含两个及更多的鸽手要鸽。
- 如果 n 个鸽手分别说它在前 n 天比赛的某一天要鸽，且每一天至少有一个鸽手要鸽，那么每一天恰好有一个鸽手要鸽。
- 练习 1：从 $1, 2, \cdots, 2n$ 中选出 $n+1$ 个整数，一定存在一个数比另一个数大 1。
- 练习 2：从 $1, 2, \cdots, 2n$ 中选出 $n+1$ 个整数，一定存在一个数是另一个数的因子。
- 练习 3：在边长为 n 的等边三角形内选出 5 个点，一定存在一个点到另一个点距离不超过 $n/2$。

鸽巢原理与 Ramsey 定理

- 令 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正整数，若有 $\sum_{k=1}^{n}(x_k - 1) + 1$ 个鸽手分别说它在前 n 天比赛的某一天要鸽，那么至少有一天 i 满足第 i 天至少有 x_i 个鸽手要鸽。
- 对于任意 6 个人，要么有 3 个人两两认识，要么有 3 个人两两不认识。
  考虑第一个人至少认识或不认识的那 3 个人是否认识。
- Ramsey 定理：定义 K_n 表示 n 个点的完全图，对于给定的 n 和 m，存在一个最小的正整数 p 使得将 K_p 的边分别染上红色或蓝色后，一定存在一个 K_n 子图是红色或者一个 K_m 子图是红色，并且对于更大的任意 p 都成立，这样的 p 记作 $r(n, m)$。
- 目前 ICPC 中只需要了解 $r(1, m) = 1$, $r(2, m) = m$, $r(3, 3) = 6$, $r(4, 4) = 18$。

鸽巢原理与 Ramsey 定理

- 令 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正整数，若有 $\sum_{k=1}^{n}(x_k - 1) + 1$ 个鸽手分别说它在前 n 天比赛的某一天要鸽，那么至少有一天 i 满足第 i 天至少有 x_i 个鸽手要鸽。
- 对于任意 6 个人，要么有 3 个人两两认识，要么有 3 个人两两不认识。
  考虑第一个人至少认识或不认识的那 3 个人是否认识。
- Ramsey 定理：定义 K_n 表示 n 个点的完全图，对于给定的 n 和 m，存在一个最小的正整数 p 使得将 K_p 的边分别染上红色或蓝色后，一定存在一个 K_n 子图是红色或者一个 K_m 子图是红色，并且对于更大的任意 p 都成立，这样的 p 记作 $r(n, m)$。
- 目前 ICPC 中只需要了解 $r(1, m) = 1$, $r(2, m) = m$, $r(3, 3) = 6$, $r(4, 4) = 18$。

- 令 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正整数，若有 $\sum_{k=1}^{n}(x_k - 1) + 1$ 个鸽手分别说它在前 n 天比赛的某一天要鸽，那么至少有一天 i 满足第 i 天至少有 x_i 个鸽手要鸽。
- 对于任意 6 个人，要么有 3 个人两两认识，要么有 3 个人两两不认识。
  考虑第一个人至少认识或不认识的那 3 个人是否认识。
- Ramsey 定理：定义 K_n 表示 n 个点的完全图，对于给定的 n 和 m，存在一个最小的正整数 p 使得将 K_p 的边分别染上红色或蓝色后，一定存在一个 K_n 子图是红色或者一个 K_m 子图是红色，并且对于更大的任意 p 都成立，这样的 p 记作 $r(n, m)$。
- 目前 ICPC 中只需要了解 $r(1, m) = 1$, $r(2, m) = m$, $r(3, 3) = 6$, $r(4, 4) = 18$。

鸽巢原理与 Ramsey 定理

- 令 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正整数，若有 $\sum_{k=1}^{n}(x_k - 1) + 1$ 个鸽手分别说它在前 n 天比赛的某一天要鸽，那么至少有一天 i 满足第 i 天至少有 x_i 个鸽手要鸽。
- 对于任意 6 个人，要么有 3 个人两两认识，要么有 3 个人两两不认识。
  考虑第一个人至少认识或不认识的那 3 个人是否认识。
- Ramsey 定理：定义 K_n 表示 n 个点的完全图，对于给定的 n 和 m，存在一个最小的正整数 p 使得将 K_p 的边分别染上红色或蓝色后，一定存在一个 K_n 子图是红色或者一个 K_m 子图是红色，并且对于更大的任意 p 都成立，这样的 p 记作 $r(n, m)$。
- 目前 ICPC 中只需要了解 $r(1, m) = 1$, $r(2, m) = m$, $r(3, 3) = 6$, $r(4, 4) = 18$。

鸽巢原理与 Ramsey 定理

- 令 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正整数，若有 $\sum_{k=1}^{n}(x_k - 1) + 1$ 个鸽手分别说它在前 n 天比赛的某一天要鸽，那么至少有一天 i 满足第 i 天至少有 x_i 个鸽手要鸽。
- 对于任意 6 个人，要么有 3 个人两两认识，要么有 3 个人两两不认识。
  考虑第一个人至少认识或不认识的那 3 个人是否认识。
- Ramsey 定理：定义 K_n 表示 n 个点的完全图，对于给定的 n 和 m，存在一个最小的正整数 p 使得将 K_p 的边分别染上红色或蓝色后，一定存在一个 K_n 子图是红色或者一个 K_m 子图是红色，并且对于更大的任意 p 都成立，这样的 p 记作 $r(n, m)$。
- 目前 ICPC 中只需要了解 $r(1, m) = 1$, $r(2, m) = m$, $r(3, 3) = 6$, $r(4, 4) = 18$。

CCPC 2017 Online C Friend-Graph

- 如果一个队伍里有至少三个人两两认识或者至少三个人两两不认识，则这个队伍是不好的队伍。
- 给定一个有 n $(n \leq 3000)$ 个人的队伍以及相互认识关系，判断是否这个队伍不好。

CCPC 2016 Changchun G Instability

- 给定一个 n 点 m 边的无向图 $(n \leq 50)$，问有多少点集满足要么存在三个点两两相连，要么存在三个点两两不相连。

CCPC 2017 Online C Friend-Graph

- 如果一个队伍里有至少三个人两两认识或者至少三个人两两不认识，则这个队伍是不好的队伍。
- 给定一个有 n $(n \leq 3000)$ 个人的队伍以及相互认识关系，判断是否这个队伍不好。

CCPC 2016 Changchun G Instability

- 给定一个 n 点 m 边的无向图 $(n \leq 50)$，问有多少点集满足要么存在三个点两两相连，要么存在三个点两两不相连。

容斥原理基础版

- 在某个全集 U 上有 n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ，那么
$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$
- 例如 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,
$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

容斥原理与二项式反演

容斥原理进阶版

- 有 n 个属性集合 $U_1, U_2, \cdots, U_n$ ，和 n 个特征子集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ，满足 $A_i \subseteq U_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ ，需要对每个属性都满足特征时进行一些计数，而满足特征的较难计数，满足属性全集和满足特征的补集较易计数，则有
$$\sum_{x_1, x_2, \cdots, x_n} [x_1 \in A_1][x_2 \in A_2] \cdots [x_n \in A_n] \text{way}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{x_1} ([x_1 \in U_1] - [x_1 \in (U_1 - A_1)]) \sum_{x_2} ([x_2 \in U_2] - [x_2 \in (U_2 - A_2)]) \cdots \sum_{x_n} ([x_n \in U_n] - [x_n \in (U_n - A_n)]) \text{way}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
- $\frac{\varphi(m)}{m} = \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$, Stirling2(n, k) $= \frac{1}{k!} \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} r^n$

容斥原理与二项式反演

2018 Multi-University Training, Stage 5, F Fireflies

- 给定正整数 n 和 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，令 $m = \lfloor \sum_{k=1}^{n} (p_i + 1)/2 \rfloor$，求方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ 有多少组正整数解，答案对 $(10^9 + 7)$ 取模。
- Version 1: $n \le 2000$, $m \le 2000$
- Version 2: $n \le 20$, $p_i \le 10^9$
- Version 3: $n \le 32$, $p_i \le 10^9$

容斥原理与二项式反演

Version 1: $n \le 2000$, $m \le 2000$

- $f(i,j)$ 表示前 i 个未知数已经确定且它们的和是 j 的方案数，$f(i,j) = \sum_{k \le p_i, k \le j} f(i-1, j-k)$。

Version 2: $n \le 20$, $p_i \le 10^9$

- 所求即 $\sum_{S \subseteq \{1,2,\cdots,n\}} (-1)^{|S|} \binom{m-1-\sum_{i \in S} p_i}{n-1}$，直接 $O(n)$ 求解每个组合数。
- 模数不为质数时，对于小于 n 的质因数维护幂次，即可避免除法。

Version 1: $n \leq 2000$, $m \leq 2000$

- $f(i,j)$ 表示前 i 个未知数已经确定且它们的和是 j 的方案数，$f(i,j) = \sum_{k \leq p_i, k \leq j} f(i-1, j-k)$。

Version 2: $n \leq 20$, $p_i \leq 10^9$

- 所求即 $\sum_{S \subseteq \{1,2,\cdots,n\}} (-1)^{|S|} \binom{m-1-\sum_{i \in S} p_i}{n-1}$，直接 $\mathcal{O}(n)$ 求解每个组合数。
- 模数不为质数时，对于小于 n 的质因数维护幂次，即可避免除法。

容斥原理与二项式反演

Version 1: $n \le 2000$, $m \le 2000$

- $f(i,j)$ 表示前 i 个未知数已经确定且它们的和是 j 的方案数，$f(i,j) = \sum_{k \le p_i, k \le j} f(i-1, j-k)$。

Version 2: $n \le 20$, $p_i \le 10^9$

- 所求即 $\sum_{S \subseteq \{1,2,\cdots,n\}} (-1)^{|S|} \binom{m-1-\sum_{i \in S} p_i}{n-1}$，直接 $\mathcal{O}(n)$ 求解每个组合数。
- 模数不为质数时，对于小于 n 的质因数维护幂次，即可避免除法。

容斥原理与二项式反演

Version 3: $n \le 32$, $p_i \le 10^9$

- 取集合 X, Y 使得 $X + Y = \{1, 2, \cdots, n\}$, $X \cup Y = \emptyset$，并且 $|X| - |Y|$ 的绝对值尽量小。
- 令 $f(x) = \binom{m-1-x}{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$，则有 $f(u+v) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (u+v)^i = \sum_{0 \le j \le i < n} c_i \binom{i}{j} u^j v^{i-j}$
- 离线维护 $s(e, v) = \sum_{S \in X} \left[\sum_{i \in S} p_i \le v\right] \left(\sum_{i \in S} p_i\right)^e$，按照 $\sum_{i \in T} p_i$ 降序枚举 T ($T \in Y$)，根据 $s(e, m - n - \sum_{i \in T} p_i)$ ($e = 0, 1, \cdots, n-1$) 计算贡献。
- $\mathcal{O}(2^{n/2}(\log(2^{n/2}) + n^2)) = \mathcal{O}(2^{n/2} n^2)$，需要有乘法逆元。

容斥原理与二项式反演

Version 3: $n \le 32$, $p_i \le 10^9$

- 取集合 X, Y 使得 $X + Y = \{1, 2, \cdots, n\}$, $X \cup Y = \emptyset$，并且 $|X| - |Y|$ 的绝对值尽量小。
- 令 $f(x) = \binom{m-1-x}{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$，则有 $f(u+v) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (u+v)^i = \sum_{0 \le j \le i < n} c_i \binom{i}{j} u^j v^{i-j}$
- 离线维护 $s(e, v) = \sum_{S \in X} \left[\sum_{i \in S} p_i \le v\right] \left(\sum_{i \in S} p_i\right)^e$，按照 $\sum_{i \in T} p_i$ 降序枚举 T $(T \in Y)$，根据 $s(e, m - n - \sum_{i \in T} p_i)$ $(e = 0, 1, \cdots, n-1)$ 计算贡献。
- $\mathcal{O}(2^{n/2}(\log(2^{n/2}) + n^2)) = \mathcal{O}(2^{n/2} n^2)$，需要有乘法逆元。

容斥原理与二项式反演

Version 3: $n \leq 32$, $p_i \leq 10^9$

- 取集合 X, Y 使得 $X + Y = \{1, 2, \cdots, n\}$, $X \cup Y = \emptyset$，并且 $|X| - |Y|$ 的绝对值尽量小。
- 令 $f(x) = \binom{m-1-x}{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$，则有 $f(u+v) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (u+v)^i = \sum_{0 \leq j \leq i < n} c_i \binom{i}{j} u^j v^{i-j}$
- 离线维护 $s(e, v) = \sum_{S \in X} \left[\sum_{i \in S} p_i \leq v\right] \left(\sum_{i \in S} p_i\right)^e$，按照 $\sum_{i \in T} p_i$ 降序枚举 T $(T \in Y)$，根据 $s(e, m - n - \sum_{i \in T} p_i)$ $(e = 0, 1, \cdots, n-1)$ 计算贡献。
- $\mathcal{O}(2^{n/2}(\log(2^{n/2}) + n^2)) = \mathcal{O}(2^{n/2} n^2)$，需要有乘法逆元。

容斥原理与二项式反演

Version 3: $n \leq 32$, $p_i \leq 10^9$

- 取集合 X, Y 使得 $X + Y = \{1, 2, \cdots, n\}$, $X \cup Y = \emptyset$，并且 $|X| - |Y|$ 的绝对值尽量小。
- 令 $f(x) = \binom{m-1-x}{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$，则有 $f(u+v) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (u+v)^i = \sum_{0 \leq j \leq i < n} c_i \binom{i}{j} u^j v^{i-j}$
- 离线维护 $s(e, v) = \sum_{S \in X} \left[\sum_{i \in S} p_i \leq v\right] \left(\sum_{i \in S} p_i\right)^e$，按照 $\sum_{i \in T} p_i$ 降序枚举 T ($T \in Y$)，根据 $s(e, m - n - \sum_{i \in T} p_i)$ ($e = 0, 1, \cdots, n-1$) 计算贡献。
- $\mathcal{O}(2^{n/2}(\log(2^{n/2}) + n^2)) = \mathcal{O}(2^{n/2} n^2)$，需要有乘法逆元。

容斥原理与二项式反演

- 一般反演：已知可逆矩阵 c 的形式，等式 $g_n = \sum_k c_{n,k} f_k$，以及 g 的内容，求 f。

  上三角矩阵、下三角矩阵比较好求逆。
- 莫比乌斯反演：$g_n = \sum_d [d|n] f_d$，则 $f_n = \sum_{d|n} [d|n]\mu(d) g_d$。
- 子集反演：$g_S = \sum_T [T \subseteq S] f_T$，则 $f_S = \sum_T [T \subseteq S](-1)^{|S|-|T|} g_T$。
- 二项式反演：$g_n = \sum_k \binom{n}{k} f_k$，则 $f_n = \sum_k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g_k$。
- 练习：用组合意义或等式变换证 $\sum_k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{m} = [n = m]$
- 练习：证明上述 (n, d), (S, T), (n, k) 互换位置后等式仍成立

容斥原理与二项式反演

- 一般反演：已知可逆矩阵 c 的形式，等式 $g_n = \sum_k c_{n,k} f_k$，以及 g 的内容，求 f。
  上三角矩阵、下三角矩阵比较好求逆。
- 莫比乌斯反演：$g_n = \sum_d [d|n] f_d$，则 $f_n = \sum_{d|n} [d|n] \mu(d) g_d$。
- 子集反演：$g_S = \sum_T [T \subseteq S] f_T$，则
  $f_S = \sum_T [T \subseteq S] (-1)^{|S|-|T|} g_T$。
- 二项式反演：$g_n = \sum_k \binom{n}{k} f_k$，则 $f_n = \sum_k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g_k$。
- 练习：用组合意义或等式变换证 $\sum_k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{m} = [n = m]$
- 练习：证明上述 (n, d), (S, T), (n, k) 互换位置后等式仍成立

容斥原理与二项式反演

- 一般反演：已知可逆矩阵 c 的形式，等式 $g_n = \sum_k c_{n,k} f_k$，以及 g 的内容，求 f。
  上三角矩阵、下三角矩阵比较好求逆。
- 莫比乌斯反演：$g_n = \sum_d [d|n] f_d$，则 $f_n = \sum_{d|n} [d|n] \mu(d) g_d$。
- 子集反演：$g_S = \sum_T [T \subseteq S] f_T$，则
  $f_S = \sum_T [T \subseteq S] (-1)^{|S|-|T|} g_T$。
- 二项式反演：$g_n = \sum_k \binom{n}{k} f_k$，则 $f_n = \sum_k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g_k$。
- 练习：用组合意义或等式变换证 $\sum\limits_k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{m} = [n = m]$
- 练习：证明上述 (n, d), (S, T), (n, k) 互换位置后等式仍成立

容斥原理与二项式反演

- 一般反演：已知可逆矩阵 c 的形式，等式 $g_n = \sum_k c_{n,k} f_k$，以及 g 的内容，求 f。
  上三角矩阵、下三角矩阵比较好求逆。
- 莫比乌斯反演：$g_n = \sum_d [d|n] f_d$，则 $f_n = \sum_{d|n} [d|n] \mu(d) g_d$。
- 子集反演：$g_S = \sum_T [T \subseteq S] f_T$，则
  $f_S = \sum_T [T \subseteq S] (-1)^{|S|-|T|} g_T$。
- 二项式反演：$g_n = \sum_k \binom{n}{k} f_k$，则 $f_n = \sum_k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g_k$。
- 练习：用组合意义或等式变换证 $\sum\limits_k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{m} = [n = m]$
- 练习：证明上述 (n, d), (S, T), (n, k) 互换位置后等式仍成立

容斥原理与二项式反演

- 一般反演：已知可逆矩阵 c 的形式，等式 $g_n = \sum_k c_{n,k} f_k$，以及 g 的内容，求 f。
  上三角矩阵、下三角矩阵比较好求逆。
- 莫比乌斯反演：$g_n = \sum_d [d|n] f_d$，则 $f_n = \sum_{d|n} [d|n] \mu(d) g_d$。
- 子集反演：$g_S = \sum_T [T \subseteq S] f_T$，则
  $f_S = \sum_T [T \subseteq S] (-1)^{|S|-|T|} g_T$。
- 二项式反演：$g_n = \sum_k \binom{n}{k} f_k$，则 $f_n = \sum_k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g_k$。
- 练习：用组合意义或等式变换证 $\sum\limits_k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{m} = [n = m]$
- 练习：证明上述 (n, d), (S, T), (n, k) 互换位置后等式仍成立

容斥原理与二项式反演

- 一般反演：已知可逆矩阵 c 的形式，等式 $g_n = \sum_k c_{n,k} f_k$，以及 g 的内容，求 f。
  上三角矩阵、下三角矩阵比较好求逆。
- 莫比乌斯反演：$g_n = \sum_d [d|n] f_d$，则 $f_n = \sum_{d|n} [d|n]\mu(d) g_d$。
- 子集反演：$g_S = \sum_T [T \subseteq S] f_T$，则
  $f_S = \sum_T [T \subseteq S](-1)^{|S|-|T|} g_T$。
- 二项式反演：$g_n = \sum_k \binom{n}{k} f_k$，则 $f_n = \sum_k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g_k$。
- 练习：用组合意义或等式变换证 $\sum\limits_k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{m} = [n = m]$
- 练习：证明上述 (n, d), (S, T), (n, k) 互换位置后等式仍成立

CCPC 2017 Hangzhou G Marriage

- 有 n 个男人和 n 个女人，每个人有一个家族编号。
- 现在要将男人和女人一一配对。
- 要求每对男女的家族编号不同。
- 问合法方案数对 998244353 取模的值。
- $n \leq 10^5$

容斥原理与二项式反演

CCPC 2017 Hangzhou G Marriage

- 令 $f(m)$ 表示配对方案里恰好有 m 对匹配男女家族编号相同的方案数，$g(m)$ 表示只选出 m 对家族编号相同的男女配对、其他男女暂不配对的方案数。
- 每个家族编号对应生成函数 $\sum_{k\geq 0}\binom{a}{k}\binom{b}{k}k!$，其中 a,b 表示该编号的男女数量，$g(m)$ $(0\leq m\leq n)$ 可以用分治卷积求得。
- 给 $g(m)$ 中的其他男女乱配对的情况下，每种方案重复计算的次数，则有 $(n-m)!g(m)=\sum_{m\leq k}\binom{k}{m}f(k)$。
- 带入二项式反演，可知 $f(0)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k(n-k)!g(k)$。

容斥原理与二项式反演

CCPC 2017 Hangzhou G Marriage

- 令 $f(m)$ 表示配对方案里恰好有 m 对匹配男女家族编号相同的方案数，$g(m)$ 表示只选出 m 对家族编号相同的男女配对、其他男女暂不配对的方案数。
- 每个家族编号对应生成函数 $\sum_{k\geq 0}\binom{a}{k}\binom{b}{k}k!$，其中 a, b 表示该编号的男女数量，$g(m)$ $(0 \leq m \leq n)$ 可以用分治卷积求得。
- 给 $g(m)$ 中的其他男女乱配对的情况下，每种方案重复计算的次数，则有 $(n-m)!g(m) = \sum_{m\leq k}\binom{k}{m}f(k)$。
- 带入二项式反演，可知 $f(0) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k(n-k)!g(k)$。

CCPC 2017 Hangzhou G Marriage

- 令 $f(m)$ 表示配对方案里恰好有 m 对匹配男女家族编号相同的方案数，$g(m)$ 表示只选出 m 对家族编号相同的男女配对、其他男女暂不配对的方案数。
- 每个家族编号对应生成函数 $\sum_{k\geq 0}\binom{a}{k}\binom{b}{k}k!$，其中 a, b 表示该编号的男女数量，$g(m)$ $(0 \leq m \leq n)$ 可以用分治卷积求得。
- 给 $g(m)$ 中的其他男女乱配对的情况下，每种方案重复计算的次数，则有 $(n-m)!g(m) = \sum_{m\leq k}\binom{k}{m}f(k)$。
- 带入二项式反演，可知 $f(0) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k(n-k)!g(k)$。

容斥原理与二项式反演

CCPC 2017 Hangzhou G Marriage

- 令 $f(m)$ 表示配对方案里恰好有 m 对匹配男女家族编号相同的方案数，$g(m)$ 表示只选出 m 对家族编号相同的男女配对、其他男女暂不配对的方案数。
- 每个家族编号对应生成函数 $\sum_{k\geq 0}\binom{a}{k}\binom{b}{k}k!$，其中 a, b 表示该编号的男女数量，$g(m)$ $(0\leq m\leq n)$ 可以用分治卷积求得。
- 给 $g(m)$ 中的其他男女乱配对的情况下，每种方案重复计算的次数，则有 $(n-m)!g(m)=\sum_{m\leq k}\binom{k}{m}f(k)$。
- 带入二项式反演，可知 $f(0)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k(n-k)!g(k)$。

一般生成函数

- 考虑一类组合对象组成的集合 A，对其每个元素定义大小，记大小为 n 的元素数量为 A_n，则 A 的一般生成函数为 $A(x) = \sum_{n\geq 0} A_n x^n$，这里 $A(x)$ 是一个形式幂级数，不考虑其收敛域。
- 加法原理：$C = A + B, A \cup B = \emptyset \Rightarrow C(x) = A(x) + B(x)$
- 乘法原理：$C = A \times B \Rightarrow C(x) = A(x)B(x)$，其中新元素的大小是原来两个元素的大小之和

生成函数与图计数问题

一般生成函数

- 考虑一类组合对象组成的集合 A，对其每个元素定义大小，记大小为 n 的元素数量为 A_n，则 A 的一般生成函数为 $A(x) = \sum_{n\geq 0} A_n x^n$，这里 $A(x)$ 是一个形式幂级数，不考虑其收敛域。
- 加法原理：$C = A + B,\ A \cup B = \emptyset \Rightarrow C(x) = A(x) + B(x)$
- 乘法原理：$C = A \times B \Rightarrow C(x) = A(x)B(x)$，其中新元素的大小是原来两个元素的大小之和

一般生成函数

- 考虑一类组合对象组成的集合 A，对其每个元素定义大小，记大小为 n 的元素数量为 A_n，则 A 的一般生成函数为 $A(x) = \sum_{n\geq 0} A_n x^n$，这里 $A(x)$ 是一个形式幂级数，不考虑其收敛域。
- 加法原理：$C = A + B, A \cup B = \emptyset \Rightarrow C(x) = A(x) + B(x)$
- 乘法原理：$C = A \times B \Rightarrow C(x) = A(x)B(x)$，其中新元素的大小是原来两个元素的大小之和

一般生成函数

- 考虑 A 中元素按顺序组合（笛卡尔积）得到的序列，全部序列所形成的集合 B 满足 $B(x) = \sum_{k\geq 0} A^k = \frac{1}{1-A}$
- 考虑 A 中元素无序组合得到的序列，全部序列所形成的集合 B 满足 $B(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!} = \exp(A)$，这里相当于枚举了 $k!$ 种可能的顺序然后去重

一般生成函数

- 考虑 A 中元素按顺序组合（笛卡尔积）得到的序列，全部序列所形成的集合 B 满足 $B(x) = \sum_{k\geq 0} A^k = \frac{1}{1-A}$
- 考虑 A 中元素无序组合得到的序列，全部序列所形成的集合 B 满足 $B(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!} = \exp(A)$，这里相当于枚举了 $k!$ 种可能的顺序然后去重

一般生成函数

- 令 B 表示使用一类物品 A 装填背包的方案，A 中大小为 i 的物品有 a_i 种 $(i=1,2,\cdots,n)$，则（第三类欧拉变换）

$$\begin{aligned}
B(x) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1-x^i)^{a_i}} \\
&= \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} a_i \ln(1-x^i)\right) \\
&= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j\geq 1} \frac{x^{ij}}{j}\right) \\
&= \exp\left(\sum_{j\geq 1} \frac{A(x^j)}{j}\right)
\end{aligned}$$

生成函数与图计数问题

2017 山东省队选拔赛 Round 2 Day 2 B 遗忘的集合

- 有一个未知内容的正整数集合 S。
- 已知它的最大元素不超过 n，以及使用 S 中的数字之和表示 m 的方案模质数 p 有 $f(m)$ 种 $(1 \leq m \leq n)$
- 判断是否有解，有解则求集合 S。
- $1 \leq n \leq 2^{18}, 10^9 \leq p \leq 2^{30}$

2017 山东省队选拔赛 Round 2 Day 2 B 遗忘的集合

- $F(x) = \exp\left(\sum_{j\ge1} \frac{S(x^j)}{j}\right)$
- $\int \frac{F'(x)}{F(x)} \mathrm{dx} = \sum_{j\ge1} \frac{S(x^j)}{j}$
- 多项式求逆求出等式左边，莫比乌斯反演得到 S，检查 S 的每项系数是不是 0 或 1 即可。

2017 山东省队选拔赛 Round 2 Day 2 B 遗忘的集合

- $F(x) = \exp\left(\sum_{j\geq 1} \frac{S(x^j)}{j}\right)$
- $\int \frac{F'(x)}{F(x)} \mathrm{dx} = \sum_{j\geq 1} \frac{S(x^j)}{j}$
- 多项式求逆求出等式左边，莫比乌斯反演得到 S，检查 S 的每项系数是不是 0 或 1 即可。

2017 山东省队选拔赛 Round 2 Day 2 B 遗忘的集合

- $F(x) = \exp\left(\sum_{j\geq 1} \frac{S(x^j)}{j}\right)$
- $\int \frac{F'(x)}{F(x)} \mathrm{dx} = \sum_{j\geq 1} \frac{S(x^j)}{j}$
- 多项式求逆求出等式左边，莫比乌斯反演得到 S，检查 S 的每项系数是不是 0 或 1 即可。

指数生成函数

- 带标号的对象在拼接时考虑到保序重标号，拼接方法不唯一，例如两个组合对象 a 和 b 拼接的方案数是 $\binom{|a|+|b|}{|a|}$
- A 的指数生成函数为 $A(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{A_n}{n!} x^n$。
- 加法原理：$C = A + B$, $A \cup B = \emptyset \Rightarrow C(x) = A(x) + B(x)$
- 乘法原理：$C = A \times B \Rightarrow C(x) = A(x)B(x)$，具体来说有

$$\frac{c_n}{n!} = \sum_{i+j=n} \frac{a_i}{i!} \frac{b_j}{j!} \Leftrightarrow c_n = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} a_i b_j$$

指数生成函数

- 带标号的对象在拼接时考虑到保序重标号，拼接方法不唯一，例如两个组合对象 a 和 b 拼接的方案数是 $\binom{|a|+|b|}{|a|}$
- A 的指数生成函数为 $A(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{A_n}{n!}x^n$。
- 加法原理：$C=A+B, A\cup B=\emptyset \Rightarrow C(x)=A(x)+B(x)$
- 乘法原理：$C=A\times B \Rightarrow C(x)=A(x)B(x)$，具体来说有

$$\frac{c_n}{n!}=\sum_{i+j=n}\frac{a_i}{i!}\frac{b_j}{j!} \Leftrightarrow c_n=\sum_{i+j=n}\binom{n}{i}a_ib_j$$

指数生成函数

- 带标号的对象在拼接时考虑到保序重标号，拼接方法不唯一，例如两个组合对象 a 和 b 拼接的方案数是 $\binom{|a|+|b|}{|a|}$
- A 的指数生成函数为 $A(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{A_n}{n!}x^n$。
- 加法原理：$C=A+B,\ A\cup B=\emptyset\Rightarrow C(x)=A(x)+B(x)$
- 乘法原理：$C=A\times B\Rightarrow C(x)=A(x)B(x)$，具体来说有

$$\frac{c_n}{n!}=\sum_{i+j=n}\frac{a_i}{i!}\frac{b_j}{j!}\Leftrightarrow c_n=\sum_{i+j=n}\binom{n}{i}a_ib_j$$

指数生成函数

- 带标号的对象在拼接时考虑到保序重标号，拼接方法不唯一，例如两个组合对象 a 和 b 拼接的方案数是 $\binom{|a|+|b|}{|a|}$
- A 的指数生成函数为 $A(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{A_n}{n!}x^n$。
- 加法原理：$C=A+B$, $A\cup B=\emptyset \Rightarrow C(x)=A(x)+B(x)$
- 乘法原理：$C=A\times B\Rightarrow C(x)=A(x)B(x)$，具体来说有
$$\frac{c_n}{n!}=\sum_{i+j=n}\frac{a_i}{i!}\frac{b_j}{j!}\Leftrightarrow c_n=\sum_{i+j=n}\binom{n}{i}a_ib_j$$

生成函数与图计数问题

2015 Asia Hefei Regional A Bus Routes

- 统计带标号 n 个点可以组成多少种不同的有环连通图，答案对质数 $(2^{15} \times 4641 + 1)$ 取模，其中每条边可以染成 m 种颜色。
- $n \leq 10^4, m < 2^{31}$

生成函数与图计数问题

2015 Asia Hefei Regional A Bus Routes

- 连通图的指数生成函数 $F(x)$
- 任意图的指数生成函数 $G(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(m+1)^{\binom{n}{2}}}{n!} x^n$ 满足

  $G(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{F^k(x)}{k!} = \exp(F(x))$
- $G'(x) = F'(x)G(x)$
- $[x^{n+1}]F(x) = [x^{n+1}]G(x) - \sum_{i=1}^{n} [x^i]G(x)[x^{n-i}]F(x)$
- 带标号 n 个点的树有 n^{n-2} 种

2015 Asia Hefei Regional A Bus Routes

- 连通图的指数生成函数 $F(x)$
- 任意图的指数生成函数 $G(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(m+1)^{\binom{n}{2}}}{n!} x^n$ 满足

  $G(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{F^k(x)}{k!} = \exp(F(x))$
- $G'(x) = F'(x)G(x)$
- $[x^{n+1}]F(x) = [x^{n+1}]G(x) - \sum_{i=1}^{n} [x^i]G(x)[x^{n-i}]F(x)$
- 带标号 n 个点的树有 n^{n-2} 种

生成函数与图计数问题

2015 Asia Hefei Regional A Bus Routes

- 连通图的指数生成函数 $F(x)$
- 任意图的指数生成函数 $G(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{(m+1)^{\binom{n}{2}}}{n!}x^n$ 满足

  $G(x)=\sum_{k\geq 1}\frac{F^k(x)}{k!}=\exp(F(x))$
- $G'(x)=F'(x)G(x)$
- $[x^{n+1}]F(x)=[x^{n+1}]G(x)-\sum_{i=1}^{n}[x^i]G(x)[x^{n-i}]F(x)$
- 带标号 n 个点的树有 n^{n-2} 种

生成函数与图计数问题

2015 Asia Hefei Regional A Bus Routes

- 连通图的指数生成函数 $F(x)$
- 任意图的指数生成函数 $G(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(m+1)^{\binom{n}{2}}}{n!} x^n$ 满足

  $G(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{F^k(x)}{k!} = \exp(F(x))$
- $G'(x) = F'(x)G(x)$
- $[x^{n+1}]F(x) = [x^{n+1}]G(x) - \sum_{i=1}^{n} [x^i]G(x)[x^{n-i}]F(x)$
- 带标号 n 个点的树有 n^{n-2} 种

生成函数与图计数问题

2015 Asia Hefei Regional A Bus Routes

- 连通图的指数生成函数 $F(x)$
- 任意图的指数生成函数 $G(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(m+1)^{\binom{n}{2}}}{n!} x^n$ 满足

  $G(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{F^k(x)}{k!} = \exp(F(x))$
- $G'(x) = F'(x)G(x)$
- $[x^{n+1}]F(x) = [x^{n+1}]G(x) - \sum_{i=1}^{n} [x^i]G(x)[x^{n-i}]F(x)$
- 带标号 n 个点的树有 n^{n-2} 种

2018 Multi-University Training, Stage 5, L Lost In The Echo

- 用加减乘除这四种双目运算符连接 n 个不同的变量，可以加入任意数量的括号，问能构造出多少种本质不同的表达式，答案对 (10^9+7) 取模。
- 两个表达式不同，当且仅当它们不能化简到相同的分式。
- $n \leq 6 \cdot 10^4$

2018 Multi-University Training, Stage 5, L Lost In The Echo

- 只有加减 $F(x)$ 或只有乘除 $G(x)$
  - $a - b + c,\ a/b * c \Rightarrow 0 + a - b + c,\ 1 + a/b * c$
  - 不能有单目运算符 $0 - a - b - c,\ 1/a/b/c$
  - $F(x) = G(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{2^n - 1}{n!} x^n$

生成函数与图计数问题

2018 Multi-University Training, Stage 5, L Lost In The Echo

- 只有加减 $F(x)$ 或只有乘除 $G(x)$
  - $a - b + c$, $a/b * c \Rightarrow 0 + a - b + c$, $1 + a/b * c$
  - 不能有单目运算符 $0 - a - b - c$, $1/a/b/c$
  - $F(x) = G(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{2^n - 1}{n!} x^n$

生成函数与图计数问题

2018 Multi-University Training, Stage 5, L Lost In The Echo

- 只有加减 $F(x)$ 或只有乘除 $G(x)$
  - $a - b + c$, $a/b * c \Rightarrow 0 + a - b + c$, $1 + a/b * c$
  - 不能有单目运算符 $0 - a - b - c$, $1/a/b/c$
  - $F(x) = G(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{2^n - 1}{n!} x^n$

生成函数与图计数问题

2018 Multi-University Training, Stage 5, L Lost In The Echo

- 只有加减 $F(x)$ 或只有乘除 $G(x)$
  - $a - b + c$, $a/b * c \Rightarrow 0 + a - b + c$, $1 + a/b * c$
  - 不能有单目运算符 $0 - a - b - c$, $1/a/b/c$
  - $F(x) = G(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{2^n - 1}{n!} x^n$

2018 Multi-University Training, Stage 5, L Lost In The Echo

- 有加乘除
  - 最外层是加减 $F(x)$ 或乘除 $G(x)$
  - 每一层加减和乘除相继更替，除了叶子状态（单变量）之外，每个状态由至少两个状态拼成
  - $F(x) = x + \sum_{k\geq 2} \frac{G^k(x)}{k!}$, $G(x) = x + \sum_{k\geq 2} \frac{(2^k-1)F^k(x)}{k!}$
  - $F(x) - x = \exp(G(x)) - G(x) - 1$,

    $G(x) - x = \exp(2F(x)) - \exp(F(x)) - F(x)$

2018 Multi-University Training, Stage 5, L Lost In The Echo

- 有加乘除
  - 最外层是加减 $F(x)$ 或乘除 $G(x)$
  - 每一层加减和乘除相继更替，除了叶子状态（单变量）之外，每个状态由至少两个状态拼成
  - $F(x) = x + \sum_{k\geq 2} \frac{G^k(x)}{k!}$, $G(x) = x + \sum_{k\geq 2} \frac{(2^k-1)F^k(x)}{k!}$
  - $F(x) - x = \exp(G(x)) - G(x) - 1$,

    $G(x) - x = \exp(2F(x)) - \exp(F(x)) - F(x)$

生成函数与图计数问题

2018 Multi-University Training, Stage 5, L Lost In The Echo

- 有加乘除
  - 最外层是加减 $F(x)$ 或乘除 $G(x)$
  - 每一层加减和乘除相继更替，除了叶子状态（单变量）之外，每个状态由至少两个状态拼成
  - $F(x) = x + \sum_{k\geq 2} \frac{G^k(x)}{k!}$, $G(x) = x + \sum_{k\geq 2} \frac{(2^k-1)F^k(x)}{k!}$
  - $F(x) - x = \exp(G(x)) - G(x) - 1$,

    $G(x) - x = \exp(2F(x)) - \exp(F(x)) - F(x)$

生成函数与图计数问题

2018 Multi-University Training, Stage 5, L Lost In The Echo

- 有加乘除
  - 最外层是加减 $F(x)$ 或乘除 $G(x)$
  - 每一层加减和乘除相继更替，除了叶子状态（单变量）之外，每个状态由至少两个状态拼成
  - $F(x) = x + \sum_{k\geq 2} \frac{G^k(x)}{k!}$, $G(x) = x + \sum_{k\geq 2} \frac{(2^k-1)F^k(x)}{k!}$
  - $F(x) - x = \exp(G(x)) - G(x) - 1$,

    $G(x) - x = \exp(2F(x)) - \exp(F(x)) - F(x)$

生成函数与图计数问题

2018 Multi-University Training, Stage 5, L Lost In The Echo

- 有加减乘除
  - 最外层是加减 $F(x)$ 或乘除 $G(x)$
  - 加减可以向下层乘除的下层加减渗透
  - 把表达式和它取反的表达式视为同一种，把不允许单目运算符的情况变成忽略符号的情况乘以二减去不允许减法的情况
  - 忽略符号时 $F(x) = x + \sum_{k \geq 2} \frac{2^{k-1} G^k(x)}{k!}$,
    $G(x) = x + \sum_{k \geq 2} \frac{(2^k - 1) F^k(x)}{k!}$

生成函数与图计数问题

2018 Multi-University Training, Stage 5, L Lost In The Echo

- 有加减乘除
  - 最外层是加减 $F(x)$ 或乘除 $G(x)$
  - 加减可以向下层乘除的下层加减渗透
  - 把表达式和它取反的表达式视为同一种，把不允许单目运算符的情况变成忽略符号的情况乘以二减去不允许减法的情况
  - 忽略符号时 $F(x) = x + \sum_{k \geq 2} \frac{2^{k-1} G^k(x)}{k!}$, $G(x) = x + \sum_{k \geq 2} \frac{(2^k - 1) F^k(x)}{k!}$

2018 Multi-University Training, Stage 5, L Lost In The Echo

- 有加减乘除
  - 最外层是加减 $F(x)$ 或乘除 $G(x)$
  - 加减可以向下层乘除的下层加减渗透
  - 把表达式和它取反的表达式视为同一种，把不允许单目运算符的情况变成忽略符号的情况乘以二减去不允许减法的情况
  - 忽略符号时 $F(x) = x + \sum_{k\geq 2} \frac{2^{k-1}G^k(x)}{k!}$,
    $G(x) = x + \sum_{k\geq 2} \frac{(2^k-1)F^k(x)}{k!}$

生成函数与图计数问题

2018 Multi-University Training, Stage 5, L Lost In The Echo

- 有加减乘除
  - 最外层是加减 $F(x)$ 或乘除 $G(x)$
  - 加减可以向下层乘除的下层加减渗透
  - 把表达式和它取反的表达式视为同一种，把不允许单目运算符的情况变成忽略符号的情况乘以二减去不允许减法的情况
  - 忽略符号时 $F(x) = x + \sum_{k\geq 2} \frac{2^{k-1}G^k(x)}{k!}$, $G(x) = x + \sum_{k\geq 2} \frac{(2^k-1)F^k(x)}{k!}$

Thank you!