快速傅立叶变换攻略
FFT, The Guide Book

Minako Kojima

Wannarfly Summer Camp 2019

SITCON (2019)


浙江大学
混沌过程
华南理工大学
喷火龙
清华大学
麻痹怒气
北京交通大学
*雅辛托斯
中山大学
银翼的魔术师
杭州电子科技大学
杭电一队
哈尔滨工业大学
哈工大_咲
*错觉

快速傅里叶变换（Fast Fourier Transform, FFT），是快速计算序列的离散傅里叶变换（Discrete Fourier Transform, DFT）或其逆变换的方法。广泛应用在工程、音乐、数学、自然科学等各种领域，被称为是。被称为最重要的数值算法，IEEE 评选出的「十大金刚」之一。

以上摘自 维基百科。

ANDOROMEDA
アンドロメダ座

- 直观认识：信号分析
- 普及组：多项式乘法
- 提高组：数论变换
- 银牌选手：分治 FFT、FNT、FWT
- 金牌选手：多项式求逆、多项式除法
- Final 爷：多项式开根
- 在密码学中的应用

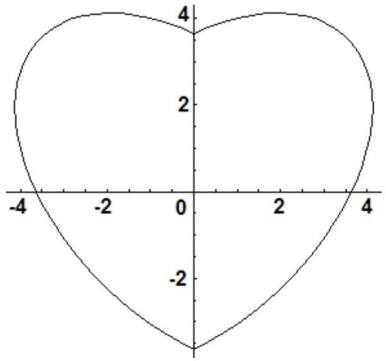
ANDOROMEDA
アンドロメダ座

Fun Part，来看一个例子 ——
情人节函数图像。

Matrix67: The Aha Moments

这是一篇旧文，点击此处以旧主题模式浏览。

爱的方程式

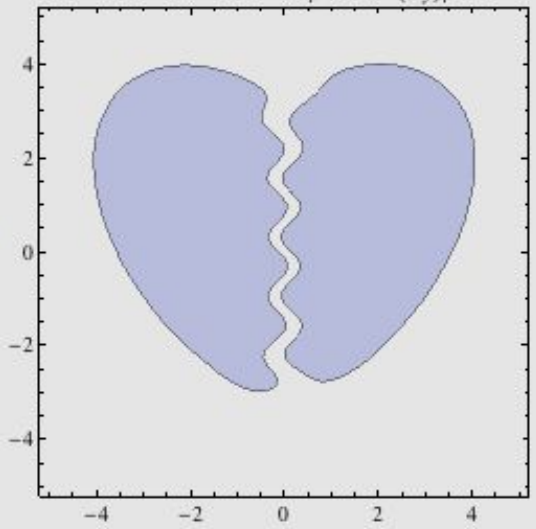


$$17x^2 - 16|x|y + 17y^2 = 225$$

```
In[12]:= RegionPlot[17 x^2 - 16 Abs[x] y + 17 y^2 + 150 / Abs[5 x + Sin[5 y]] < 225,
  {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, ImageSize → 250, PlotPoints → 100,
  PlotLabel ->
   TraditionalForm[17 x^2 - 16 Abs[x] y + 17 y^2 + 150 / Abs[5 x + Sin[5 y]] < 225]]
```

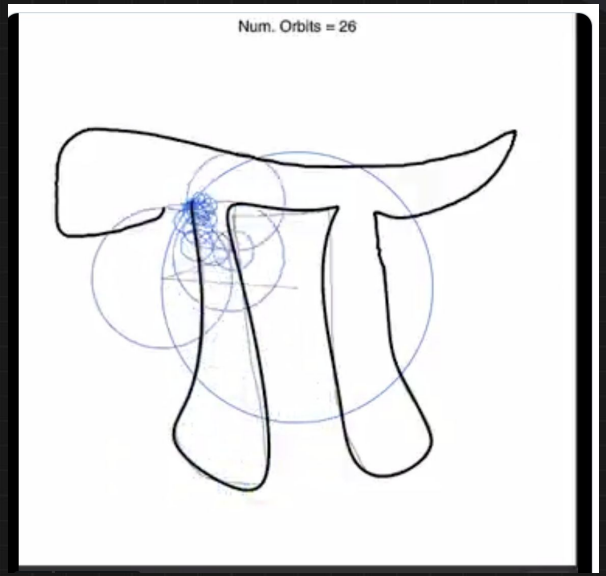
Out[12]=

$$17x^2 + 17y^2 - 16y|x| + \frac{150}{|5x + \sin(5y)|} < 225$$



事实上这一点也不魔法 ...

因为你其实可以生成 ——
任意函数图像。



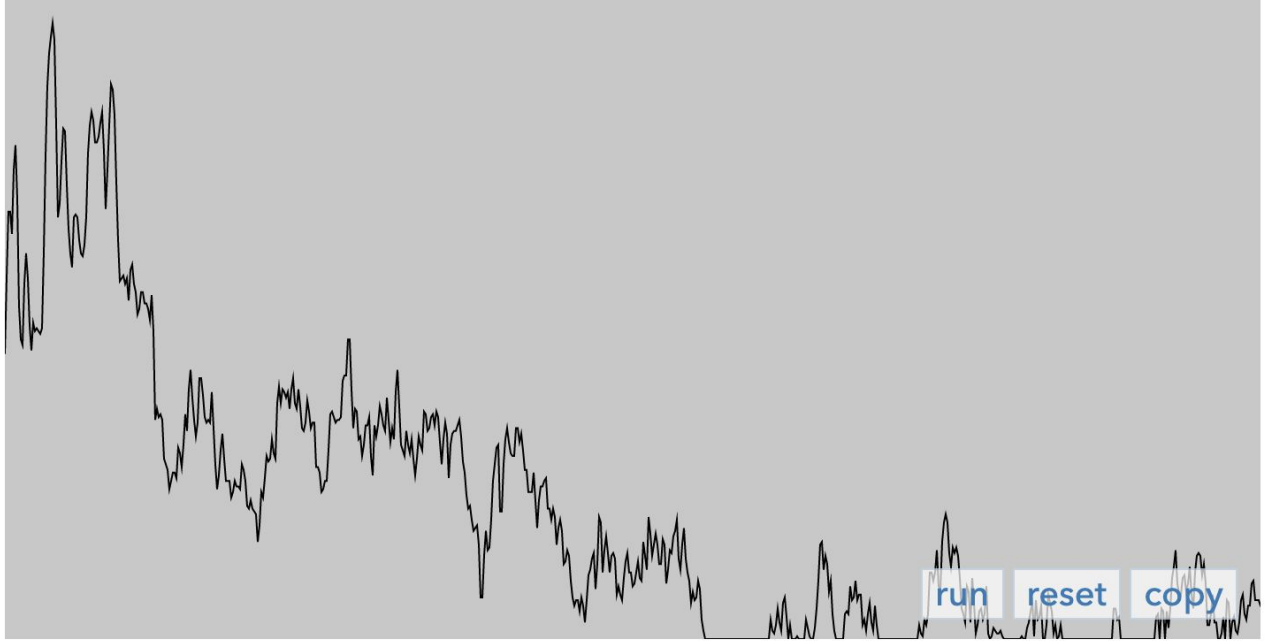
[Coding Challenge #130.3: Fourier Transform Drawing with Complex Number Input]

ANDOROMEDA
アンドロメダ座

再来看一个例子 ——
实时声音信号时域频谱转化的可视化。

https://p5js.org/examples/sound-frequency-spectrum.html

ANDOROMEDA
アンドロメダ座

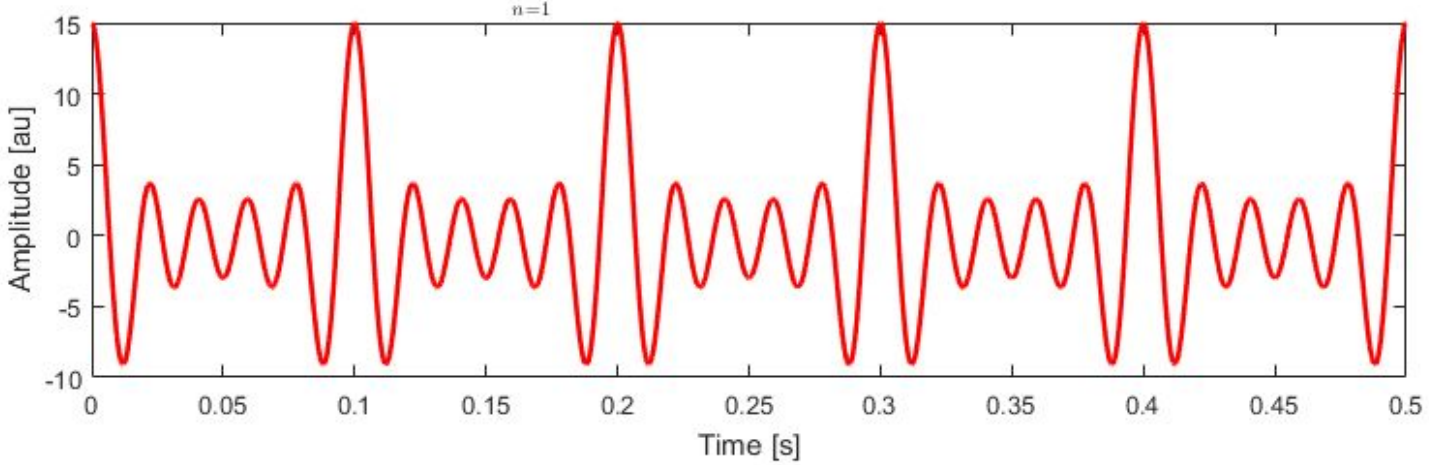


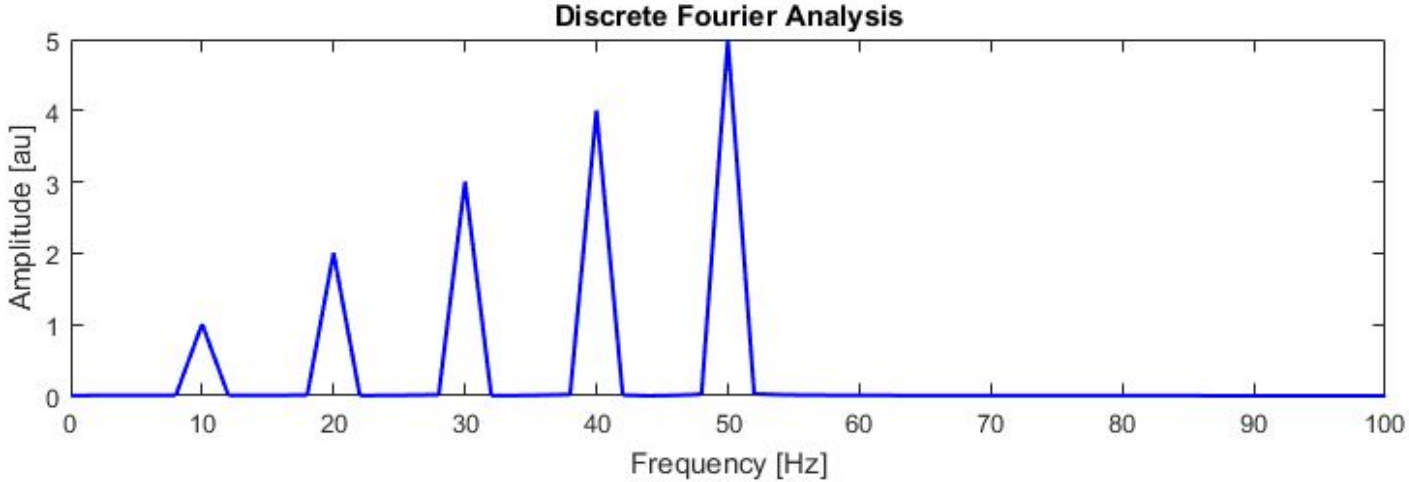

```
let mic, fft;

function setup() {
  createCanvas(710, 400);
  noFill();

  mic = new p5.AudioIn();
  mic.start();
  fft = new p5.FFT();
  fft.setInput(mic);
}
```

$$\sum_{n=1}^{5} n \times cos(n \times \omega \times t), \qquad \omega = 10 \times 2\pi$$





- Q:这玩意除了看着好看之外还有啥用啊？
- A:参见 各种应用软件听歌识曲功能的算法是什么样的？。

4 个回答

默认排序

zpan

音频码农 / 业余编曲渣 / Vimer

PaintDream、王赟 Maigo 等 70 人赞同了该回答

homes.soic.indiana.edu/...

看这篇论文就行了。

简单来说，就是对音频做 FFT，在频域上取极值点作为特征点，把每隔一段时间内、一定频率范围内的极值点进行配对，组成 landmark，取 landmark 中的 Δt 、 f_1 、 Δf 作为搜索用的 key，t_1 和文件 ID 的组合作为 value 存入数据库。当需要搜索音频时，对音频进行同样的分析，得到 landmark，将 landmark 中的 Δt 、 f_1 、 Δf 与数据库中的 key 进行比较，取出所有的 (t_1', id)，将所有匹配到的 t_1' 与输入音频的 t_1 相减（记为 $\Delta T = t_1' - t_1$ ），对 $(\Delta T,\ id)$ 这个组合出现的次数进行排序，出现次数最多的那个就是最匹配的那个音频，通过 ID 就能找到相应的音频文件。

编辑于 2017-08-23

▲ 赞同 70 ▼ 7 条评论 分享 收藏 感谢 ···

其他应用:

- 大整数乘法
- 频谱分析
- 数据压缩
- 解偏微分方程
- 数据可用性 Data Availability
- 零知识证明 ZK-STARKs

ANDOROMEDA

アンドロメダ座

Back to OI/ACM，在计算机科学中，我们只能处理离散的对象，我们需要先对数据进行采样。DFT 就是先将信号在时域离散化，求其连续傅里叶变换后，再在频域离散化的结果。

基本的动机：

—— 多项式乘法。

模板题 && 课文

- 模板题，UOJ 34
- 课文，FFT 学习笔记 by Menci

前言

近几年来，各种基于FFT的算法如雨后春笋般流行起来。在2014年的NOI冬令营营员交流上，出现了关于多项式除法的内容[1]，之后在Codeforces上出现了使用多项式除法的题目[2]，之后基于牛顿迭代的各种算法纷纷流行起来，例如在Universal Online Judge(UOJ) 上出现了使用牛顿迭代解微分方程的题目[3]，在2016年NOI冬令营第一课堂的《多项式导论》中，这些算法被再次普及，UOJ上最近还出现了多点求值的题目[4]。基于FFT的各种算法的出现，给解题带来了极大的便利。

---

[1]余行江、彭雨翔《多项式除法及其应用》

[2]http://codeforces.com/contest/438/problem/E

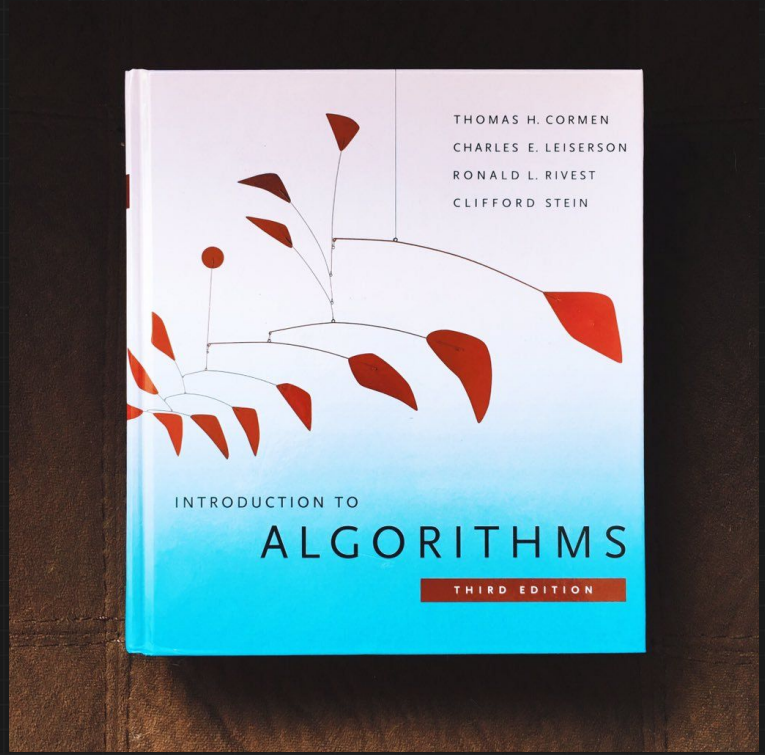
[3]http://uoj.ac/problem/50

[4]http://uoj.ac/problem/182

然而，所有这些算法都离不开一个东西——FFT，如果没有掌握FFT这个最基本的算法，所有这些基于FFT的算法肯定更加难以掌握。好比盖一栋大楼，如果我们把楼盖得很高，却因为基底不牢固而坍塌，这栋楼再怎么高也没有用。一棵大树，枝叶繁茂，根却因为种种原因坏死，这棵树也只会盖着一头枯枝烂叶。只有夯实了基础，才能走的更远。本人写此文正是基于这样一个思路。希望能与各位读者回到原点，重新研究一下FFT这个最基础而又十分神奇的算法。而什么叫掌握一个算法呢，本人认为，掌握一个算法不仅仅限于写过、甚至背过这个算法，而是既了解这个算法的基本原理，也知道这个算法的各种应用、各种优化和技巧。

然而，所有这些算法都离不开一个东西——FFT，如果没有掌握FFT这个最基本的算法，所有这些基于FFT的算法肯定更加难以掌握。好比盖一栋大楼，如果我们把楼盖得很高，却因为基底不牢固而坍塌，这栋楼再怎么高也没有用。一棵大树，枝叶繁茂，根却因为种种原因坏死，这棵树也只会盖着一头枯枝烂叶。只有夯实了基础，才能走的更远。本人写此文正是基于这样一个思路。希望能与各位读者回到原点，重新研究一下FFT这个最基础而又十分神奇的算法。而什么叫掌握一个算法呢，本人认为，掌握一个算法不仅仅限于写过、甚至背过这个算法，而是既了解这个算法的基本原理，也知道这个算法的各种应用、各种优化和技巧。

「牢固的根基？」



ANDOROMEDA
アンドロメダ座

Checkpoint ...

ANDOROMEDA

アンドロメダ座

FFT Mod 1e9+7

FFT 是一个数值算法，会遇到数值稳定性的问题。
值域范围太大的话结果可能会「崩坏」，有许多技巧可以帮助我们缓解这一情况，熟悉其中的一些，足够我们应对比赛中出现的绝大多数情况。

- NTT + CRT
- 7 次 FFT
- 4 次 FFT

FFT+

- FFT + 快速冪
- FFT + DP
- FFT + cdq 分治
- 树上 FFT
- ...

2016 North American Invitational Programming Contest Problem K. Inversions

给定一个由字符 “A” 和 “B” 组成的序列，统计所有逆序对，并按照它们的距离分类。

裸题。对于差卷积(正常卷积是按照下标和进行分裂)，我们可以将其中一个序列翻转，转化成正常卷积。

代码

Prime Distance On Tree

给定一棵 n 个节点的无根树，问树上任选两点，距离恰好为素数的概率为多少。

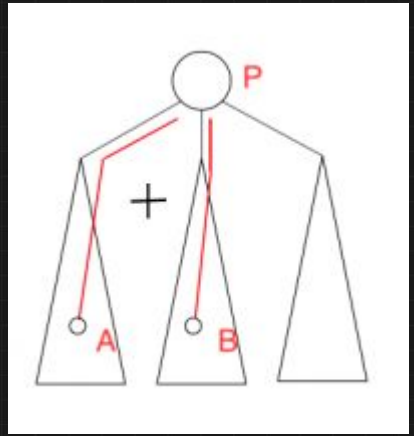
$n \le 5e4$

ANDOROMEDA

アンドロメダ座

等价于求出一共有多少对距离为素数的点对。暴力复杂度为 O(n2)。对于这类问题，通常可以点分治进行解决。

（图文无关！！）



ANDOROMEDA
アンドロメダ座

点分治之后处理出每个点到分治中心的距离，那么两点之间的距离恰好符合卷积形式，可以 FFT。
注意同意自树中的点计算出的结果不对(不经过该分治中心，需要剔除)

也可以每发现一棵子树处理这棵子树和之前子树的点对，这样不需要判重，但是会多几次 FFT。

代码

AIM Tech Round, Problem E.Transforming Sequence

给定 n、k。构造序列 a，满足 a 的为 k 为二进制数，且 前缀或 严格单调递增。

求满足要求的方案数，答案对 1e9+7 取模。

$n \le 1e18, k \le 3e4$

ANDOROMEDA

アンドロメダ座

首先注意到为了让 前缀或 的结果序列递增，每次或出来的数至少需要新增加一位，因此当 n > k 时无解。下文标记时间复杂度时，不再区分 n 和 k。

可以先写一个 O(n3) 暴力 DP。

暴力代码

我们枚举每一轮新增加的位数 d，中间的组合数表示从可用的 k-j 个位置中选出 d 个位置的方案数，右边的 2 次幂表示之前的 j 个已经使用的位置，这一轮可选可不选。

我们注意到上面的转移方程与 i 无关，于是思考使用快速幂整体转移进行加速。

O(n2logn) 代码

ANDOROMEDA

アンドロメダ座

复杂度变为 O(n2logn)（可以多过了一个点了！）

到这一步，已经很容易观察到卷积形式了。

谨记：

「DP 状态是可以用数据结构进行紧凑表示的」

这里我们使用多项式记录每一个不同的 k 即可，为了处理方便我们可以把二进制系数放到外面去。（可以推导也可以组合 YY，最后会发现用 DP 状态除以 k! 作为整体来处理代码会更紧凑。

最后用 FFT mod 1e9+7 即可。

ANDOROMEDA

アンドロメダ座

CHAP. VIII. The Master said, 'I do not open up the truth to one who is not eager to get knowledge, nor help out any one who is not anxious to explain himself. When I have presented one corner of a subject to any one, and he cannot from it learn the other three, I do not repeat my lesson.'

——《论语》

ANDOROMEDA

アンドロメダ座

参考资料

- Fast Fourier Transforms, Vitalik
- Fourier Transforms, Ftiasch
- 再探快速傅里叶变换，matthew99
- 多项式导论，pyx
- 辣鸡多项式毁我青春
- ...

ANDOROMEDA

アンドロメダ座

FFT + 序列？

- 伯努利序列,
- 第一类斯特林序列
  - 1.
- 第二类斯特林序列
  - 1.
  - 2.
- ...

ANDOROMEDA

アンドロメダ座