福州大学ACM2010冬季讲座
数学在ACM中的运用

AekdyCoin

chenh1989@gmail.com

数量

1. 自然数

   用以计量事物的件数或表示事物次序的数 。 即用数码0，1，2，3，4，……所表示的数 。表示物体个数的数叫自然数，自然数由0开始(包括0)，一个接一个，组成一个无穷的集体。

   一般在题目中出现则为 : (a) natural number

2. 整数

   non-negative integer

   negative integer

   ……

3.有理数

4.实数/复数

基本代数

1.gcd (最大公约数)

如果有一个自然数a能被自然数b整除，则称a为b的倍数，b为a的约数。几个自然数公有的约数，叫做这几个自然数的公约数。公约数中最大的一个公约数，称为这几个自然数的最大公约数。

2.lcm(最小公倍数)

最小公倍数（Least Common Multiple，缩写L.C.M.），对于两个正整数数来说，指该两数共有倍数中最小的一个。计算最小公倍数时，通常会借助最大公约数来辅助计算。

3.取模 (mod)

用法及意义是：a≡b(mod c) 的意思是 a和b除以c后余数相同

读作a与b同余，mod为c

例如：a mod b=c说明:a除以b余数为c

MOD (Pascal)

% (C/C++/Java)

注意在计算机上使用取 模以后可能得到负值.

母猫的故事

有一只母猫，它每天早上生一头小母猫。每头小母猫从第2天开始，每天早上也生一头小母猫。请编程实现在第n天的时候，共有多少头母猫

常见数列

- 1.Fibonacci数列
- {0，1，1，2，3，5，8，13，21……}

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0; \\ 1 & \text{if } n = 1; \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{if } n > 1. \end{cases}$$

$$F(n) = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] (n >= 1)$$

- 矩阵写法:

$$\begin{pmatrix} F(n) \\ F(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} F(1) \\ F(0) \end{pmatrix} (n >= 1)$$

- 2.卡特兰数

给定N个节点，能构成h(N)种不同的二叉树

- h(1)＝1,h(0)=1
- **h(n)=C(2n,n)/(n+1) (n=1,2,3,...)**

- **3.错排数**

n个有序的元素应有n！种不同的排列。如若一个排列式的所有的元素都不在原来的位置上，则称这个排列为错排。

- M(1)=0,M(2)=1
  M(n)=(n-1)[M(n-2)+M(n-1)]

……………………

一个查找数列的网站

- http://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html?language=chineseT

一个基础代数的例子

- 1/n=1/a+1/b的对数
- 我们要求求a<b的时候的解的个数

  (因为a==b必然有一个解，a>b的解在顺序上和a<b的只是互相交换了一下而已)

- 暴力枚举？

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+k}+\frac{k}{n(n+k)}$$

显然可以写成上面的公式

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+k}+\frac{1}{\frac{n^2+nk}{k}}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+k} + \frac{1}{\frac{n^2}{k} + n}$$

于是问题就很简单了
由于n+k<2*n(如果==2n那么就是a==b了，不在我们讨论范围内)
so:k<n
而显然k是n^2的因子

线性方程组

- 就是我们高中经常解的多元方程组。通常利用高斯消元法来实现.

- 具体资料

扩展欧几里得

- 得到 $ax+by=gcd(a,b)$的一组解(x,y),其中a,b已经知道

解方程

- 解方程

二分法
公式法
牛顿迭代法
……

初等数论

ACM中，出题者和做题者看的基本都是初等数论，虽然“初等”，可是要搞明白还是要花一点时间的。

初等数论有一点类似高中数学的代数方面,有一定基础的话学起来更快~

数论在ACM比赛中，主要有几个出题点：

1、质数问题；

2、同余问题；

3 、结合到组合数学和其他需要取mod的计算~

质数问题

- 数论可以称为’素论’,大部分的题目都围绕着素数展开
- 数论在比赛中一般最多出现一题,而且难度一般不低,足够让基础不扎实的人冥思苦想一阵子.

判断素数

1.可以暴力枚举1..n的数字,如果存在某个数I,有n%i==0,那么这个数肯定不是素数,复杂度显然是O(n)

2.稍微优化一下,可以知道实际上n的因子是成对出现的(除非N是完全平方数).所以只需要枚举1..sqrt(N)判断既可,复杂度O(sqrt(N))

- 可是如果N很大,那如何判断?于是基于费马定理有一种方案可以解决,既随机化算法.
- 我们知道对于某个素数P,由费马定理得:
- a^p mod p=a
- 于是就有了希望使用这个来判断某个p是否是素数

$O(k \cdot \log^2 n \cdot \log \log n \cdot \log \log \log n)$

米勒-拉宾素数测试

素数表的获得

- 这里只介绍百万级别的素数表的获得.
- 很自然想到的就是把1...N的数字全判断一次,然后把是素数的加到素数表里面.

- 实际上这么做是做了很多无谓的计算.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

去掉含有因子2的数,这些数肯定不是素数

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

去掉含有因子3的数,这些数肯定不是素数

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

....

最后幸免于难的数只有:2 3 5 7 11 13 17 19
全是素数

- 如果某个数可以被小于它的某个数整除,那肯定不是素数,换句话就是说如果某数有不为1的因子,那肯定不是素数.
- 于是我们开一个数组bool prime[1000001]
- Prime[i]表示i是否是素数
- Prime[0]=prime[1]=1;//这里的1表示非素数

```
For(i=2;i*i<=1000000;++i)
 if(!prime[i])
   for(j=i;j*i<=1000000;++j)
     prime[i*j]=true;//这些数都包含i这个因子
```

- 得到以后就可以得到范围内的素数表了.
- 得到素数表一般只有2个目的,就是判素数和分解素因子.判素数只需要看prime[i]是否为0,如果为0就是素数.

分解素因子

- 数论中最经常使用的方法
- 通常使用试除法
- 得到素数表以后扫描素数表,然后把N的素因子加入解集.

因子个数

- 根据组合数学可以很容易的知道
- Ans=(1+c1)*(1+c2)*..*(1+cl)
- 为什么?
- 因为每个素因子选的个数0..c1,有(1+c1)种组合,根据组合数学的乘法原则,直接乘完就是解.

因子和

- (1+p1+p1^2+…+p1^c1)*(1+p2+p2^2+…+p2^c2)*…*(1+pl+pl^2+…+pl^cl)
- Pi表示N的第i种素因子
- Ci表示N的第i种素因子的个数
- 如果N比较大,那么结果很可能比较大,注意合适选择64 位…

欧拉函数

- 欧拉函数是少于或等于n的数中与n互质的数的数目。
- 即和n的最大公约数为1的数字的个数。
- Phi()
- 求完素因子以后
- Phi(n)=n*(1-1/p1)*(1-1/p2)*…*(1-1/pk)
- 如何优化?

同余问题

A=B (mod C)

表示A,B同余

同余一般考察模方程,模方程组.

同余方程

- A*x = B (mod C)
- AX=B+KC
- AX-KC=B
- 求解x的方程就成为同余方程

同余方程组

- 例如:
- X = b1(mod c1)
- X = b2(mod c2)
- ……
- X = bn(mof cn)
- 求解X的值

中国剩余定理

- 中国古代求解一次同余式组（见同余）的方法。是数论中一个重要定理。又称中国剩余定理。公元前后的《孙子算经》中有“物不知数”问题：“今有物不知其数，三三数之余二，五五数之余三，七七数之余二，问物几何？”答为“23”。也就是求同余式组x≡2（mod3），x≡3（mod5），x≡2（mod7）

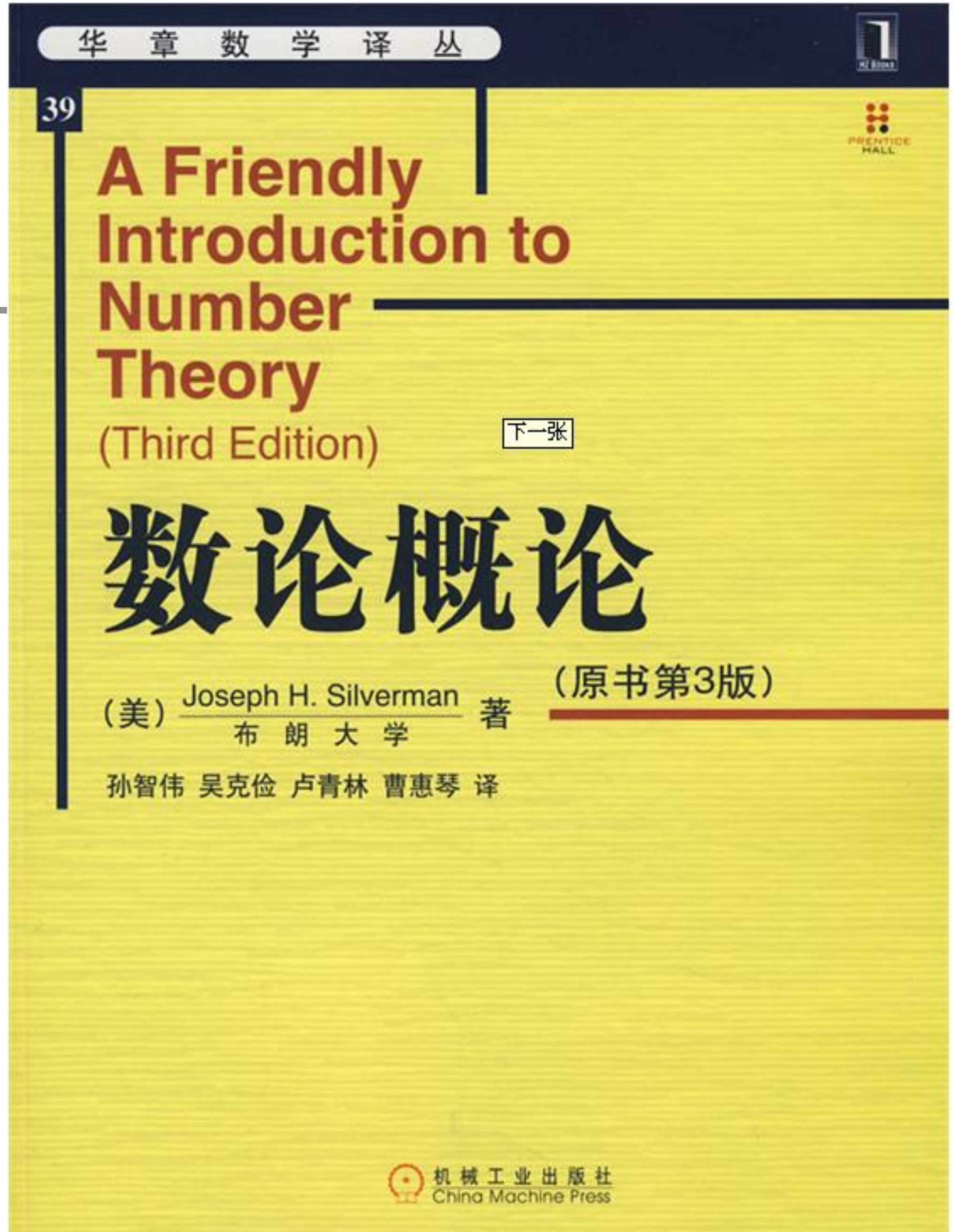
需要记下的是一些常识:

1.a*x = c (mod b)

如果c%gcd(a,b)!=0,那么无解

否则解的个数为gcd(a,b) (解范围是在0..b-1中)

2.模方程组在各方程组的模数互质的情况下才可以套用中国剩余定理,否则需要使用偶的模板^_^(ignore)


华章数学译丛
39
A Friendly Introduction to Number Theory
(Third Edition)
下一张
数论概论
(原书第3版)
(美) Joseph H. Silverman 著
布朗大学
孙智伟 吴克俭 卢青林 曹惠琴 译
PRENTICE HALL
机械工业出版社
China Machine Press

组合数学

高中就已经学习过一些比较基本的排列组合了,可是那些相对于ACM而言显的有点不够~~~

母函数,容斥，鸽巢(笼),Burnside,polya……

母函数

- 也叫生成函数。是利用g(x)表示一个数列。

- 例如表示数列{1,2,3,4…n…}
- 那么g(x) = x+2x^2+3x^3+…nx^n….(这里只介绍多项式的.)

- 这样表示有何妙用？

- 现在我们引用《组合数学》上暴经典的一个例题。很多书上都会有这类题。

- 我们要从苹果、香蕉、橘子和梨中拿一些水果出来，要求苹果只能拿偶数个，香蕉的个数要是5的倍数，橘子最多拿4个，梨要么不拿，要么只能拿一个。问按这样的要求拿n个水果的方案数。

- $g(x)=(1+x^2+x^4+...)(1+x^5+x^10+..)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x)$
- =[1/(1-x^2)]*[1/(1-x^5)]*[(1-x^5)/(1-x)]*(1+x) （前两个分别是公比为2和5的几何级数，
- 第三个嘛，(1+x+x^2+x^3+x^4)*(1-x)不就是1-x^5了吗）
- =1/(1-x)^2 （约分，把一大半都约掉了）
- =(1-x)^(-2)=C(1,0)+C(2,1)x+C(3,2)x^2+C(4,3)x^3... （参见刚才对1/(1-x)^k的展开）
- =1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+....

鸽巢原理

- 鸽巢原理也叫抽屉原理，是Ramsey定理的特例 。

  它的简单形式是： 把 n ＋ 1 个物体放入n个盒子里，则至少有一个盒子里含有两个或两个以上的物体 。

- Burnside,polya

- ………………..


计算机科学组合学丛书
组合数学
（第3版）
卢开澄　卢华明
清华大学出版社
下一张

取模原理

- 取模无处不在，DP,计数,组合……只要答案过于庞大，基本都是mod上某个数字以后输出。

乘法逆元

- 如果公式中存在除法，比如
- a/b (mod c)
- 我们有2种解决方法:
- 1. a/b (mod c)=(a%(b*c))/b
- 2.计算b对c的乘法逆元(前提必须存在哦)

- 我们只需要解模方程
- B* X = 1 (mod C)
- 那么两边同时乘上以后

- (a/b) * (b*x) = Ans * 1 (mod c)
- 而x我们算出来了……

- 乘法逆元经常出现在组合数求mod中。

- 组合数求mod

- 1755,1756,1758
- 发送总结及各大OJ ID
- fzuacm2010@gmail.com
- Foj
- Poj
- HDU