

数位 DP 问题选讲

徐毅

江苏省常州高级中学

September 20, 2014

Problem 1: 花神的数论题¹

定义 $sum(i)$ 为 i 的二进制表示中 1 的个数。

给出一个整数 $n(1 \leq n \leq 10^{15})$, 求 $\prod_{i=1}^n sum(i)$, 答案模 $10^7 + 7$ 。

¹Source: 花神杯欢乐赛 I

Problem 2: The Sum²

给出一个整数 $n(1 \leq n \leq 10^{15})$, 把 $1 \sim n$ 依次写下来, 数字之间交替插入 $+$ 和 $-$, 求该式子的值。

例如, $n = 12$ 时有

$$+1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 1 + 0 - 1 + 1 - 1 + 2 = 5。$$

²Source: SPOJ KPSUM

Problem 3: fx^3

定义一个 n 位整数 $x = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_0}$ 的权重 $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i a_i$ 。

给出两个整数 $a, b (0 \leq a, b \leq 10^{200})$ ，求 $[0, b]$ 内有多少个数的权重不大于 a 的权重，答案模 $10^9 + 7$ 。

³Source: 2014 年国家集训队清华集训

Problem 4: Palindrome-Free Numbers⁴

一个整数是 Palindrome-Free Number 当且仅当它不包含长度大于 1 的回文数。例如, 16276 是 Palindrome-Free Number, 而 17276 因为含有 727 而不是。

给出两个整数 $a, b (0 \leq a \leq b \leq 10^{18})$, 求 $[a, b]$ 内有多少个 Palindrome-Free Number。

⁴Source: Baltic Olympiad in Informatics 2013

Problem 5: Beautiful Numbers EXTREME⁵

一个整数是 Beautiful Number 当且仅当它能被它的每位非零数字整除。

给出两个整数 $a, b (1 \leq a \leq b \leq 10^{18})$, 求 $[a, b]$ 内有多少个 Beautiful Number。

⁵Source: SPOJ JZPEXT

Problem 6: 同类分布⁶

一个整数是 Self Number 当且仅当它能被它的每位数字之和整除。
给出两个整数 $a, b (1 \leq a \leq b \leq 10^{18})$, 求 $[a, b]$ 内有多少个 Self Number。

⁶Source: Anhui Team Selection Contest 2009

Problem 7: Cool Numbers⁷

一个整数是 Cool Number 当且仅当它的每位数字可以分成两个和相等的集合。例如，23450 是 Cool Number 因为 $3 + 4 + 0 = 2 + 5$ 。

给出两个整数 $a, b (1 \leq a \leq b \leq 4 \times 10^9)$ ，求 $[a, b]$ 内有多少个 Cool Number。

⁷Source: SPOJ COOLNUMS