复变函数与数理方程

（复变函数 上）

数学科学系
吴昊

2017年秋季学期

- 一个**复数**z可以表为某个实数x和某个纯虚数iy的和

$$z = x + iy,$$

x和y分别为该复数的**实部**和**虚部**，分别记为$\mathrm{Re}\, z$和$\mathrm{Im}\, z$。

- 将z和平面上的点(x, y)一一对应起来，该平面称为复平面，两个坐标轴分别称为**实轴**和**虚轴**。

- 改用极坐标ρ和φ代替直角坐标x和y

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctan(y/x); \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

则复数z可表为**三角式**或**指数式**，即

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z = \rho e^{i\varphi}.$$

- ρ称为该复数z的**模**，记为$|z|$；φ称为该复数的**辐角**，记为$\mathrm{Arg}\, z$。
- 复数的辐角值不唯一，且相差2π的整数倍。通常约定，以$\arg z$表示其中满足条件
$$0 \leq \mathrm{Arg}\, z < 2\pi$$
的一个特定值，并称$\arg z$为$\mathrm{Arg}\, z$的**主值**，或z的**主辐角**。因此
$$\varphi = \mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$
- 复数“零”（即$z = 0 + i0$）的辐角没有明确意义。
- 复数z的**共轭**z^*为
$$z^* = x - iy = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \rho e^{-i\varphi}.$$

- 对于复数$z_1 = x_1 + iy_1$与$z_2 = x_2 + iy_2$，其运算如下。
- **加法**：
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$
容易验证加法的**交换律**和**结合律**成立，且有三角不等式
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$
- **减法**：
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$
由加法三角不等式可知
$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

- 对于复数$z_1 = x_1 + iy_1$与$z_2 = x_2 + iy_2$，其运算如下。
- 乘法：

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + iy_1 x_2 + ix_1 y_2 + i^2 y_1 y_2 \\
&= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).
\end{aligned}
$$

容易验证乘法的交换律、结合律和分配律成立。

- 除法：

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\
&= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.
\end{aligned}
$$

- 复数的乘、除、乘方和开方，使用三角式或指数式更方便。
- 乘法和除法：

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)] = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)] = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \end{aligned}$$

- 乘方和开方：

$$\begin{aligned} z^n &= \rho^n[\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)] = \rho^n e^{in\varphi}, \\ \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{\rho}[\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}] = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi}{n}}. \end{aligned}$$

  其中，复数z的辐角φ不能唯一地确定，它可以加减2π的整数倍。因此，根式$\sqrt[n]{z}$的辐角φ/n也就可以加减$2\pi/n$的整数倍，从而对于给定的z，$\sqrt[n]{z}$可以取n个不同的值。

- 注记1.1：我们有$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$，但

$$\operatorname{Arg} z^2 = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} z \neq 2\operatorname{Arg} z.$$

- **例1.1：** 求 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$的值。
- **解：** 由

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}),$$

可得

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{1+\mathrm{i}} &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{1}{4}(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+\mathrm{i}\sin\frac{1}{4}(\frac{\pi}{4}+2k\pi)\right)\\ &= \sqrt[8]{2}(\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16})(\cos\frac{k\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{2}),\quad k=0,1,2,3.\end{aligned}$$

因此 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$的根为

$$w_0,\quad \mathrm{i}w_0,\quad -w_0,\quad -\mathrm{i}w_0,$$

其中

$$w_0=\sqrt[8]{2}(\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}).$$

- 例1.2(直线方程)：在实值坐标平面上，直线方程为

$$ax + by + c = 0,$$

其中a, b, c均为实数，且$a^2 + b^2 \neq 0$。令

$$x = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad y = \frac{1}{2i}(z - z^*),$$

将其代入直线方程，可得

$$\frac{1}{2}a(z + z^*) + \frac{1}{2i}b(z - z^*) + c = 0,$$

即

$$B^*z + Bz^* + c = 0,$$

其中$B = \frac{1}{2}(a + ib) \in \mathbb{C}$，$c \in \mathbb{R}$。从而给出用复变量表示的直线方程。

- 在复平面上存在一个**点集**E（复数的集合），对于E的每一个点z，按照一定规律，有一个或多个复数值w与之相对应，则称w为z的函数——**复变函数**。z称为w的**宗量**，**定义域**为E，记作

$$w = f(z), \quad z \in E.$$

- **在复变函数论中，主要研究的是解析函数。**
- 而在解析函数论中，函数的定义域不是一般的点集，而是满足一定条件的点集，称为**区域**，用B表示。

- **邻域**：以复数z_0为圆心，以任意小正实数ε为半径作一圆，则圆内所有点的集合称为z_0的邻域；
- **内点**：若z_0及其邻域均属于E，则称z_0为该点集的内点；
- **外点**：若z_0及其邻域均不属于E，则称z_0为该点集的外点；
- **边界点**：若在z_0的每个邻域内，既有属于E的点，也有不属于E的点，则称z_0为该点集的边界点；边界点的全体称为**边界线**；
- **区域**是满足下列两个条件的点集：
  1. **全由内点组成**；
  2. **具有连通性**，即点集中任意两点都可以用一条折线连接起来，且折线上的点全都属于该点集。
- **闭区域**：区域B及其边界线所组成的点集称为闭区域，以$\bar{B}$表示。

- 几个典型的复变函数
  1. 多项式(n为正整数)

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,$$

  2. 有理分式(m和n为正整数)

$$\frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_m z^m},$$

  3. 根式

$$\sqrt{z - a}.$$

式中$a_0, a_1, \cdots, a_n, b_0, b_1, \cdots, b_m, a$是复常数。

- 几个初等的复变函数(s为复数)

$$
\begin{aligned}
e^z &= e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y),\\
\sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),\\
\operatorname{sh} z &= \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}),\\
\ln z &= \ln\left(|z|\, e^{i\operatorname{Arg} z}\right) = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z, \quad z^s = e^{s\ln z}.
\end{aligned}
$$

- **周期性**:
  1. $\sin z$和$\cos z$具有**实周期**2π，即

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z.$$

  2. e^z, $\operatorname{sh} z$和$\operatorname{ch} z$具有**纯虚数周期**$2\pi i$，即

$$e^{z+2\pi i} = e^z, \quad \operatorname{sh}(z + 2\pi i) = \operatorname{sh} z, \quad \operatorname{ch}(z + 2\pi i) = \operatorname{ch} z.$$

- 将$\sin z$和$\cos z$分别展开为实部和虚部之和，得到其模

$$
\begin{aligned}
|\sin z| &= \frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y}+e^{-2y})+2(\sin^2 x-\cos^2 x)}, \\
|\cos z| &= \frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y}+e^{-2y})+2(\cos^2 x-\sin^2 x)}.
\end{aligned}
$$

$|\sin z|$和$|\cos z|$的平方和可大于1。但$\sin^2 z+\cos^2 z=1$仍成立。

- 辐角$\operatorname{Arg} z$不能唯一地确定，它可以相差2π的整数倍。因此，对给定的z，对数函数$\ln z$有无限多个值。

- 在实数领域，负数的对数没有意义。但在复变函数领域，当z为负实数时，仍可以给出值

$$
\ln z=\ln\left(|z|\,e^{i(2k+1)\pi}\right)=\ln|z|+i(2k+1)\pi.
$$

- 将复变函数$f(z)$的实部和虚部分别记为$u(x,y)$和$v(x,y)$，

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

则**复变函数可以归结为一对二元实变函数**。因此实变函数论中的相关定义、公式和定理都可以直接移植到复变函数中。

- 复变函数$f(z)$在点z_0**连续**的定义是：当$z \to z_0$时，$f(z) \to f(z_0)$。这可以归结为一对二元实变函数$u(x,y)$和$v(x,y)$在点(x_0,y_0)连续，即

$$\text{当}\left\{\begin{array}{l} x \to x_0, \\ y \to y_0, \end{array}\right. \text{时，} \quad \left\{\begin{array}{l} u(x,y) \to u(x_0,y_0), \\ v(x,y) \to v(x_0,y_0). \end{array}\right.$$

- **例1.3：** 在映射$w=\frac{1}{z}(z\neq 0)$下，z平面上的下列曲线各映射为w平面上的什么曲线：(1) $|z|=2$； (2) $\operatorname{Re} z=1$。
- **解：** 设$z=x+iy,\ w=u+iv$，则

$$w=\frac{1}{z}=\frac{z^*}{zz^*}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

因此

$$u=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad v=-\frac{y}{x^2+y^2}.$$

1. $|w|=\sqrt{u^2+v^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}$，于是在映射$w=\frac{1}{z}$下，圆周曲线$|z|=2$映射成圆周曲线$|w|=\frac{1}{2}$。
2. 当$x=1$时，$u=\frac{1}{1+y^2}$, $v=-\frac{y}{1+y^2}$，因此$u^2+v^2=\frac{1}{1+y^2}=u$，即$(u-\frac{1}{2})^2+v^2=\frac{1}{4}$，因此在映射$w=\frac{1}{z}$下，直线$\operatorname{Re} z=1$映射成圆周$(u-\frac{1}{2})^2+v^2=\frac{1}{4}$。

- 在本节中，有一些知识或概念我们没有提及（或缺乏严格数学表述），例如：
    - 复平面上的几何和拓扑：邻域、内点、区域等概念的具体形象和特殊情况；连续曲线、约当曲线、简单闭曲线、可求长曲线的定义；约当(Jordan)定理；
    - 各种几何图形和几何变换（对称、旋转等）的复变量表述；
    - 复变函数的反函数、极限、连续性和一致连续性等；
    - 球面投影和扩充复平面（引入无穷远点的概念）的相关知识等。
- 略过上述内容并不会对我们后续的学习产生太大影响，感兴趣的同学可以参考于慎根等的《复变函数与积分变换》或者是方企勤的《复变函数教程》。

- **定义2.1：** 设函数$w = f(z)$是在区域B上定义的单值函数，即对于B上的每一个z值，有且只有一个w值与之相对应。若在B上的某点z，极限
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$
存在且与$\Delta z \to 0$的方式无关，则称函数$w = f(z)$在z点**可导**。

- 上述（有限的）极限称为函数$f(z)$在z点的**导数**（或**微商**），以$f'(z)$或df/dz表示。

- 形式上看，复变函数和实变函数导数的定义相同，因此在某些方面具有一致性。然而，**它们具有本质的区别，因为实变函数只需要沿实轴逼近极限，而复变函数则需要在全方向逼近极限**。

- 复变函数的部分性质

$$\frac{d}{dz}(w_1+w_2)=\frac{dw_1}{dz}+\frac{dw_2}{dz}, \qquad \frac{d}{dz}z^n=nz^{n-1},$$

$$\frac{d}{dz}(w_1w_2)=w_1\frac{dw_2}{dz}+w_2\frac{dw_1}{dz}, \qquad \frac{d}{dz}e^z=e^z,$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)=\frac{w_1'w_2-w_1w_2'}{w_2^2}, \qquad \frac{d}{dz}\sin z=\cos z,$$

$$\frac{dw}{dz}=1/\frac{dz}{dw}, \qquad \frac{d}{dz}\cos z=-\sin z,$$

$$\frac{d}{dz}F(w)=\frac{dF}{dw}\cdot\frac{dw}{dz}; \qquad \frac{d}{dz}\ln z=\frac{1}{z}.$$

- 注记2.1：上述初等函数导数的存在性，既可以用定义证明，也可以用后续的C-R条件验证。

- 下面研究函数可导的必要条件（考虑$\Delta z \to 0$的两种特殊方式）：
  1. $\Delta x \to 0,\ \Delta y = 0,$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x};$$

  2. $\Delta x = 0,\ \Delta y \to 0,$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y};$$

- 因此得到函数可导的必要条件：Cauchy-Riemann方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

上述方程也称Cauchy-Riemann条件（简称C-R条件）。

- 例2.1：设$f(z) = z^* = x - iy$，则$u = x$, $v = -y$，他们处处可微，但

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

不满足C-R条件，因此$f(z) = z^*$处处不可微。

- 例2.2：设$f(z) = z\mathrm{Re}\, z = x^2 + ixy$，则$u = x^2$, $v = xy$，他们处处可微，且

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial v}{\partial x} = y, \ \frac{\partial v}{\partial y} = x,$$

因此在(0,0)满足C-R条件。因此$f(z) = z\mathrm{Re}\, z$在点(0,0)处可微。

- **例2.3：** 设$f(z)=\sqrt{|\operatorname{Im} z^2|}$，则$u=\sqrt{|2xy|}$, $v=0$。它们在$(0,0)$点有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=0=\frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y}=0=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

因此满足C-R条件，然而

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\frac{\sqrt{|2\Delta x\Delta y|}}{\Delta x+i\Delta y},$$
$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta x=\Delta y}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\sqrt{2}}{1+i},\quad \lim_{\Delta x\to 0,\Delta y=0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=0.$$

这说明在$(0,0)$点处$f(z)=\sqrt{|\operatorname{Im} z^2|}$不可导。**其原因是：函数$u(x,y)$在$(0,0)$点不可微**。

- **定理2.1：** 函数$f(z)=u+iv$可导的**充分必要条件**是：函数$f(z)$的偏导数$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$存在且连续，并满足C-R条件。

- 复变函数导数，在直角坐标下的表示为

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x},\quad \text{或}\quad f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

- 复变函数导数，在极坐标下也有相应的C-R条件[1]

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial \rho}.$$

[1]利用坐标变换关系可以直接得到。

- **定理2.1：** 函数$f(z)=u+iv$可导的**充分必要条件**是：函数$f(z)$的偏导数$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$存在且连续，并满足C-R条件。

- **证明：** 由于上述偏导数连续，二元函数u, v的增量可写成

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y,\\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_3\Delta x+\varepsilon_4\Delta y.\end{aligned}$$

其中各个ε的值随$\Delta z\to 0$（即Δx，Δy各自趋于零）而趋于零。于是有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)}{\Delta z}.$$

最后一步已考虑到$|\Delta x/\Delta z|$和$|\Delta y/\Delta z|$为有限值，从而所有含ε的项都随$\Delta z\to 0$而趋于零，根据C-R条件，上式即

$$\lim_{\Delta x\to 0,\,\Delta y\to 0}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

这一极限是与$\Delta z\to 0$的方式无关的有限值。□

- 定义2.2：若函数$f(z)$在点z_0及其邻域上处处可导，则称$f(z)$在z_0点**解析**。又若$f(z)$在区域B上的每一点都解析，则称$f(z)$是区域B上的**解析函数**。

- 根据例2.2，函数$f(z) = z\mathrm{Re}\, z = x^2 + ixy$在$z = 0$处可导，但不能保证在$z = 0$的邻域上处处可导，因此它在$z = 0$处不解析。

- 若函数$f(z) = u + iv$在区域B上解析，则u, v均为B上的**调和函数**，即：u,v在区域B上均有二阶连续偏导数，且满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

- 注记2.2：根据C-R条件，我们直接有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

类似的v也满足调和方程。关于函数u, v的二阶可微性，可以推广到任意阶可微，请参考后续内容（本章推论3.1）。

- 若函数$f(z)=u+iv$在区域B上解析，则

$$u(x,y)=C_1,\quad v(x,y)=C_2$$

（C_1，C_2为常数）是B上的**两组正交曲线簇**。

- **注记2.3**：回顾C-R条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

将上面两式相乘，则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y},$$

即梯度∇u和∇v正交

$$\nabla u\cdot\nabla v=0.$$

由于∇u和∇v分别是曲线簇$u=C_1$和$v=C_2$的法向矢量，因此可得结论。

- 解析函数的实部和虚部不是独立的，知道了其中之一，例如实部u，根据C-R条件，就可以唯一地（相差一个常数）确定虚部v，这是因为

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y = -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y.$$

- 类似的，当虚部v确定后，也可以唯一的确定实部u。
- 另外，并不是任意一个二元函数u都可以作为解析函数的实部或虚部，它需要是调和函数。
- 计算$v = \int \mathrm{d}v$的方法有三种：（1）曲线积分法，利用全微分的积分与路径无关，因此可选取特殊积分路径；（2）凑全微分显式法；（3）不定积分法。

- 例2.4：已知某解析函数$f(z)$实部$u(x,y)=x^2-y^2$，求虚部和这个解析函数。
- 解：首先，我们有$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$，因此u是调和函数。它可以是某个解析函数的实部。
- 先计算u的偏导数$\frac{\partial u}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-2y$。根据C-R条件，我们有$\frac{\partial v}{\partial x}=2y$, $\frac{\partial v}{\partial y}=2x$，因此

$$dv=2ydx+2xdy$$

- （1）曲线积分法。为方便，我们选取下列积分路径

$$\begin{aligned} v(x_0,y_0) &= \int^{(x_0,y_0)} 2ydx+2xdy \\ &= \int_{(0,0)}^{(x_0,0)} (2ydx+2xdy)+\int_{(x_0,0)}^{(x_0,y_0)} (2ydx+2xdy)+C \\ &= \int_0^{y_0} 2x_0dy+C=2x_0y_0+C. \end{aligned}$$

- 已知$dv = 2ydx + 2xdy$求相应的全微分。
- （2）**凑全微分显式法**。容易将上式化为

$$dv = d(2xy)$$

因此有$v = 2xy + C$。

- （3）**不定积分法**。已知$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$，$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$，对后式积分，有

$$v = \int 2xdy + \phi(x) = 2xy + \phi(x),$$

其中$\phi(x)$是x的任意函数，对上式关于x求导，则有

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \phi'(x) = 2y.$$

可知$\phi'(x) = 0$，从而$\phi(x) = C$，因此

$$v = 2xy + C.$$

- 最后，我们得到的解析函数为

$$f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy + C) = z^2 + iC.$$

- **例2.5：** 已知解析函数f(z)的虚部$v=\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}$，求实部u和函数f。
- **解：** 偏导数$\frac{\partial v}{\partial x}$和$\frac{\partial v}{\partial y}$计算繁杂，试改用极坐标

$$v=\sqrt{-\rho\cos\varphi+\rho}=\sqrt{\rho(1-\cos\varphi)}=\sqrt{2\rho}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

先计算v的偏导数，即

$$\frac{\partial v}{\partial\rho}=\sqrt{\frac{1}{2\rho}}\sin\frac{\varphi}{2},\quad \frac{\partial v}{\partial\varphi}=\sqrt{\frac{\rho}{2}}\cos\frac{\varphi}{2}.$$

根据极坐标下的C-R条件

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\varphi}=\sqrt{\frac{1}{2\rho}}\cos\frac{\varphi}{2},\quad \frac{\partial u}{\partial\varphi}=-\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}=-\sqrt{\frac{\rho}{2}}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

- 我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= \frac{\partial u}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi = \sqrt{\frac{1}{2\rho}}\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\rho - \sqrt{\frac{\rho}{2}}\sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi \\ &= \sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\sqrt{\rho} + \sqrt{2\rho}\,\mathrm{d}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right) = \mathrm{d}\left(\sqrt{2\rho}\cos\frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned}$$

因此

$$u = \sqrt{2\rho}\cos\frac{\varphi}{2} + C = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + C,$$

以及

$$\begin{aligned} f(z) &= \sqrt{2\rho}\cos\frac{\varphi}{2} + i\sqrt{2\rho}\sin\frac{\varphi}{2} + C \\ &= \sqrt{2\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) + C = \sqrt{2z} + C. \end{aligned}$$

- 复变函数的一个特点就是多值性（参见例1.1），下面以根式函数$w=\sqrt{z}$为例讨论多值函数的基本性质。
- z的模和辐角分别为$|z|$, $\operatorname{Arg} z$，因此w的模和辐角为

$$|w|=\sqrt{|z|},\quad \operatorname{Arg} w=\frac{1}{2}\operatorname{Arg} z=\frac{1}{2}\arg z+k\pi.$$

即**w的主辐角有两个值$\frac{1}{2}\arg z$和$\frac{1}{2}\arg z+\pi$**。

- 相应的，w也有两个不同的值

$$w_1=\sqrt{|z|}e^{\frac{1}{2}i\arg z},\quad w_2=\sqrt{|z|}e^{\frac{1}{2}i\arg z+i\pi}=-\sqrt{|z|}e^{\frac{1}{2}i\arg z}.$$

它们是**多值函数$w=\sqrt{z}$的两个单值分支**。

- 对实数x其平方根也有两个单值分支$\sqrt{x}$和$-\sqrt{x}$，但这两个分支是独立的，而复变函数的单值分支则是不独立的。

- 例2.6：复变函数单值分支的某些特性：
  1. $z = 2e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 4\pi]$；
  2. $z = 2(\cos\varphi + 1.1)e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 4\pi]$；
  3. $z = (0.95 + 0.5i) + e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi]$。

- 例2.6对应的三个动画给出了一个现象：当z绕$z_0 = 0$点一周返回原处时，w值不复原；如果没有绕z_0一周返回原处，则w的值复原。

- 一般来说，对于多值函数$w = f(z)$，若z绕某点z_0一周，函数值w不复原，而在该点各单值分支函数值相同，则称该点为多值函数的**支点**。若当z绕支点n周，函数值w复原，便称该点为多值函数的$n-1$阶支点。

- $z = 0$，$z = \infty$是$w = \sqrt{z}$的一阶支点。

- 通过把宗量z的辐角限制在某个周期内，从而可以唯一的确定多值函数w的辐角。例如：
  1. 当$0 \le \operatorname{Arg} z < 2\pi$时，对应单值分支$w_1$；
  2. 当$2\pi \le \operatorname{Arg} z < 4\pi$时，对应单值分支$w_2$。
- 将多值函数划分为若干个（甚至是无穷个）单值分支，其实质就是限制z的变换方式。这种规定可以用几何方法形象的表现出来：
  1. 在平面上，从$z_0 = 0$开始，沿正实轴方向至无限远点将其割开，并规定割线上缘对应$\operatorname{Arg} z = 0$，下缘$\operatorname{Arg} z = 2\pi$；
  2. 类似的切割，割线上缘对应$\operatorname{Arg} z = 2\pi$，下缘$\operatorname{Arg} z = 4\pi$。
- 通过上述方法，z将不能绕支点转一圈了。它的优点是简单方便，每个单值分支都是单值函数。然而，它限制了宗量辐角的变化范围，因此不适用于讨论复杂问题。

- 在本节中，**有一些知识或概念我们没有提及（或缺乏严格数学表述）**，例如：
  - 导数的几何意义及保角映射相关知识[2]；
  - 一些基本的解析函数，如儒可夫斯基函数和分式线性变换（或称Möbius变换）

$$w = f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \quad w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \ (ad - bc \neq 0).$$

  - 平面标量场和复变函数的关系；
  - 多值函数的进一步知识：黎曼(Riemann)面和关于对数函数的相关讨论。
- **略过上述内容并不会对我们后续的学习产生太大影响**，感兴趣的同学可以参考梁昆淼的《数学物理方法》、吴崇试的《数学物理方程》、方企勤的《复变函数教程》或者是谭小江等的《复变函数简明教程》。

[2]利用保角映射，可以将某个复杂区域上的方程转换称在简单区域上的方程，从而简化（偏微分）方程的求解，这也是数理方程的一种求解方法。

- 设在复数平面的某分段光滑曲线ℓ上定义了连续函数$f(z)$。在ℓ上取一系列分点z_0(起点A)，$z_1, z_2, \cdots, z_n$（终点B），将ℓ分成n小段。在每一小段$[z_{k-1}, z_k]$上任取一点ζ_k，求和

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k.$$

当$n \to \infty$且每个Δz_k都趋于零时，如果这个和的极限存在，而且其值与各个ζ_k的选取无关，则这个和的极限称为**函数$f(z)$沿曲线ℓ从A到B的路积分，记作$\int_\ell f(z)dz$**，即

$$\int_\ell f(z)dz = \lim_{\max|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k.$$

- 将$z = x + iy$, $f = u + iv$用实部虚部表示，则有

$$\int_\ell f(z)dz = \int_\ell udx - vdy + i\int_\ell vdx + udy.$$

- 由于复变积分是两个实变积分的有序组合，因此，根据实变积分的知识可知：**如果ℓ是分段光滑曲线，$f(z)$是ℓ上的连续函数，则复变积分一定存在。**
- 进一步，复变积分具有类似于实变积分的性质：
  1. 若$\int_\ell f_1(z)dz, \int_\ell f_2(z)dz, \cdots, \int_\ell f_n(z)dz$均存在，则
  $$\int_\ell (f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z))dz = \int_\ell f_1(z)dz + \int_\ell f_2(z)dz + \cdots + \int_\ell f_n(z)dz.$$
  2. 若$\ell = \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_n$，则
  $$\int_\ell f(z)dz = \int_{\ell_1} f(z)dz + \int_{\ell_2} f(z)dz + \cdots + \int_{\ell_n} f(z)dz.$$
  3. $\int_{\ell^-} f(z)dz = -\int_\ell f(z)dz$，其中$\ell^-$表示$\ell$的逆向。
  4. $\int_\ell af(z)dz = a\int_\ell f(z)dz$，其中a为常数。
  5. $\left|\int_\ell f(z)dz\right| \le \int_\ell |f(z)||dz|$。
  6. $\left|\int_\ell f(z)dz\right| \le ML$，其中$M = \max_{z\in\ell}|f(z)|$，L是$\ell$的长度。

- 例3.1：试计算积分

$$I_1 = \int_{\ell_1} \mathrm{Re}\, z dz, \quad I_2 = \int_{\ell_2} \mathrm{Re}\, z dz.$$

其中ℓ_1为沿实轴$0 \to 1$，再平行于虚轴$1 \to 1 + i$；ℓ_2为沿虚轴$0 \to i$，再平行于实轴$i \to 1 + i$。

- 解：先计算I_1，

$$I_1 = \int_0^1 x dx + \int_0^1 i dy = \frac{1}{2} + i.$$

再计算I_2，

$$I_2 = \int_0^1 0 \cdot i dy + \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

可见，随着积分路径不同，积分结果可以不同$I_1 \neq I_2$。

- 一般来说，复变函数的积分值不仅依赖于起点和终点，同时还与积分路径有关。

- 所谓**单连通区域**是这样的区域，在其中作任何简单的闭合围线，围线内的点都是属于该区域内的点。
- **定理3.1（单连通区域柯西定理）**：如果函数$f(z)$在闭单连通区域$\bar{B}$上解析，则沿$\bar{B}$上任一分段光滑闭合曲线ℓ（也可以是$\bar{B}$的边界），有

$$\oint_\ell f(z)dz = 0.$$

- **注记3.1**：上述定理还可以推广成条件更弱的形式：如果函数$f(z)$在单连通区域B上解析，在闭单连通区域$\bar{B}$上连续，则沿$\bar{B}$上任一分段光滑闭合曲线ℓ（也可以是$\bar{B}$的边界），有

$$\oint_\ell f(z)dz = 0.$$

- **定理3.1**：如果函数f(z)在闭单连通区域$\bar{B}$上解析，则沿$\bar{B}$上任一分段光滑闭合曲线ℓ（也可以是$\bar{B}$的边界），有$\oint_\ell f(z)dz = 0$。
- **证明**：已知

$$\oint_\ell f(z)dz = \oint_\ell udx - vdy + i\oint_\ell vdx + udy.$$

由于f(z)在$\bar{B}$上解析，因此$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$在$\bar{B}$上连续。对上式**应用格林公式**

$$\oint_\ell Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

将回路积分化成面积分，有

$$\oint_\ell f(z)dz = -\iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

最后一步成立是**根据C − R条件**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad \square$$

- 根据定理3.1，若函数$f(z)$在单连通区域B上解析，则**沿着B上任一路径积分$\int_\ell f(z)dz$的值只与起点和终点有关，而与路径无关**。因此当起点z_0固定时，这个不定积分就定义了一个单值函数。
- **定理3.2：**如果$f(z)$在单连通区域B上解析，则

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

也在B上解析，且

$$F'(z) = f(z),$$

即$F(z)$是$f(z)$的一个**原函数**。

- 函数在某些点或某些子区域上不可导（甚至不连续、无法定义），我们称这些点为**奇点**。
- 在区域内，只要有一个简单的闭合曲线其内有不属于该区域的点，这样的区域便称为**复连通区域**。
- 引入复连通区域，可以把原来区域内的奇点，用一些适当的闭合曲线分隔出去（挖掉），从而便于研究函数在区域上的性质。
- **定理3.3（复连通区域柯西定理）**：如果函数$f(z)$是闭复连通区域$\bar{B}$中的单值解析函数，则

$$\oint_{\ell} f(z)dz + \sum_{i=1}^{n} \oint_{\ell_i} f(z)dz = 0.$$

式中ℓ为区域的外边界线，ℓ_i为区域内边界线，积分均沿边界线的正方向进行。

- 所谓**正方向**，我们规定如下：当观察者沿着这个方向前进时，区域总是在观察者的左侧。

- **定理3.3（复连通区域柯西定理）：** 如果函数f(z)是闭复连通区域$\bar{B}$中的单值解析函数，则

$$\oint_{\ell} f(z)dz + \sum_{i=1}^{n} \oint_{\ell_i} f(z)dz = 0.$$

式中ℓ为区域的外边界线，ℓ_i为区域内边界线，积分均沿边界线的正方向进行。

- 复连通区域柯西定理也可以写成下面形式：

$$\begin{aligned} \oint_{\ell} f(z)dz &= -\sum_{i=1}^{n} \oint_{\ell_i} f(z)dz, \\ \ointctrclockwise_{\ell} f(z)dz &= \sum_{i=1}^{n} \ointctrclockwise_{\ell_i} f(z)dz. \end{aligned}$$

其中$\ointctrclockwise$表示沿闭合曲线逆时针方向积分。

- 例3.2：计算积分

$$I = \oint_{\ell} (z - \alpha)^n dz \ (n\text{为整数}).$$

- 解：（一）若回路ℓ不包围点α，则被积函数在ℓ所围区域上是解析的，由柯西定理$I = 0$。
- （二）若回路ℓ包围点α，则(1) $n \geq 0$，则被积函数在ℓ所围区域上是解析的，因此$I = 0$。(2) $n \leq -1$，则被积函数在ℓ所围区域中有一个奇点α。由定义，存在以α为圆心R为半径的圆在ℓ包围的区域中。因此在圆周C上，我们有$z - \alpha = Re^{i\varphi}$，以及

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\ell} (z - \alpha)^n dz = \oint_{C} R^n e^{in\varphi} d(\alpha + Re^{i\varphi}) \\ &= iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

- 总结一下，我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\ell}\frac{dz}{z-\alpha}=\begin{cases}0, & \ell\text{不包围}\alpha,\\ 1, & \ell\text{包围}\alpha.\end{cases}$$
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\ell}(z-\alpha)^n dz=0,\quad (n\neq -1).$$

- 从原函数的角度看，上述结论是显然的：
  1. $n\neq -1$时，$(z-\alpha)^n$的原函数是单值函数$\frac{(z-\alpha)^{n+1}}{n+1}$，因此绕$\alpha$一周，原函数的改变量为0；
  2. 当$n=-1$时，$(z-\alpha)^{-1}$的原函数是多值函数$\ln(z-\alpha)$，逆时针绕α一周$\ln(z-\alpha)$的改变量为$2\pi i$。

- **定理3.4（柯西积分公式）：** 若$f(z)$在闭单连通区域$\bar{B}$上解析，ℓ为$\bar{B}$的边界线，α为B内的任一点，则有

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\ell}\frac{f(z)}{z-\alpha}dz.$$

- **证明：** 根据例3.2可知

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\ell}\frac{f(\alpha)}{z-\alpha}dz.$$

因此，只需证明

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\ell}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz=0.$$

由于α是区域B上一点，因此存在以α为圆心，以ε为半径的小圆C_ε使得$C_\varepsilon\subset B$，由柯西定理

$$\left|\oint_{\ell}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz\right|=\left|\oint_{C_\varepsilon}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz\right|.$$

- 事实上，我们有估计

$$\left|\oint_{C_\varepsilon}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz\right| \leq \frac{\max\left|f(z)-f(\alpha)\right|}{\varepsilon}2\pi\varepsilon = 2\pi\max\left|f(z)-f(\alpha)\right|.$$

其中$\max\left|f(z)-f(\alpha)\right|$是$\left|f(z)-f(\alpha)\right|$在$C_\varepsilon$上的最大值。令$\varepsilon\to 0$，则$C_\varepsilon\to\alpha$。由$f(z)$连续$f(z)\to f(\alpha)$，即$\max\left|f(z)-f(\alpha)\right|\to 0$，因此

$$\left|\oint_{\ell}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz\right| = \lim_{\varepsilon\to 0}\left|\oint_{C_\varepsilon}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz\right|\to 0.$$

所以

$$\oint_{\ell}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz = 0.$$

从而证明柯西积分公式。□

- 由α的任意性，通常将柯西积分公式写成下面形式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\ell}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

- 若$f(z)$在ℓ所围区域上存在奇点，则需考虑挖去奇点后的复连通区域。在复连通区域上$f(z)$解析，显然柯西积分公式仍然成立。只要将ℓ理解为所有边界线，并且均取正方向。

- 上面讨论的是有界区域的柯西积分公式，下面考虑无界区域的柯西积分公式。其思路是用一个充分大的圆C_R包住闭回路ℓ，再利用复连通区域柯西定理，结合适当的估计给出结论：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\ell}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+f(\infty).$$

特别的，若$f(\infty)=0$，则有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\ell}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

- 设$f(z)$在闭回路ℓ的外部解析，以$z=0$为圆心，充分大的R为半径，作圆C_R使回路ℓ包含于C_R内部。因此有

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\ell}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\ell}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+f(\infty)+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(\zeta)-f(\infty)}{\zeta-z}d\zeta.
\end{aligned}
$$

下面估计最后一项，由$f(z)$在无限远处有界连续，即任给$\varepsilon>0$，存在R_1，使得$|x|>R_1$时$\left|f(z)-f(\infty)\right|<\varepsilon$。因此，对$R>R_1$有

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(\zeta)-f(\infty)}{\zeta-z}d\zeta\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\oint_{C_R}\frac{\left|f(\zeta)-f(\infty)\right|}{|\zeta-z|}d\zeta \\
&< \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{R-|z|}\cdot 2\pi R\to 0\ (\varepsilon\to 0).
\end{aligned}
$$

- **推论3.1：** 如果函数$f(z)$在闭区域$\bar{B}$上解析，则在区域B内$f(z)$的任何阶导数$f^{(n)}(z)$均存在，并且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\ell}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta.$$

- **注记3.2：** 对柯西积分公式直接求导，可以**形式上得到该推论**。但是，如果想**严格证明**，还需要证明积分和求导（求极限）的可交换性。

- **定理3.5（Morera定理）：** 如果函数$f(z)$在闭区域$\bar{B}$中连续，如果对于$\bar{B}$中的任何围道ℓ，都有

$$\oint_{\ell} f(z)dz = 0.$$

  则$f(z)$在B内解析。

- 该定理有时也称为柯西积分定理的逆定理。

- **定理3.6（最大模定理）**：如果函数$f(z)$在闭区域$\bar{B}$上解析，则$|f(z)|$只能在边界线ℓ上取最大值。

- **定理3.7（柯西不等式）**：如果函数$f(z)$在闭区域$\bar{B}$上解析，则$f(z)$在边界ℓ上连续，$|f(z)|$在ℓ上必有上界、而且达到上界M。因此

$$\left|f^{(n)}(z)\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_{\ell}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\frac{ML}{d^{n+1}}.$$

其中L是ℓ的长度，d是z到边界的最短距离。

- **定理3.8（刘维尔定理）**：如果函数$f(z)$在全平面上解析，并且是有界的，即$|f(z)| \leq M$，则$f(z)$必为常数。

- **定理3.9（均值定理）**：如果函数$f(z)$在区域B上解析，则其在B内任意一点z的函数值可表示如下

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + Re^{i\varphi})d\varphi.$$

- 例3.3：考虑围线ℓ：$|z|=1$，我们有

$$\oint_\ell \frac{\sin z}{z}dz = 2\pi i \sin 0 = 0,$$
$$\oint_\ell \frac{e^z}{z(z-2)}dz = \oint_\ell \frac{e^z/(z-2)}{z}dz = 2\pi i\frac{e^0}{0-2} = -\pi i.$$

- 例3.4：考虑围线ℓ：$|z-i|=\frac{1}{2}$，我们有

$$\oint_\ell \frac{1}{z(z^2+1)}dz = \oint_\ell \frac{1/\left(z(z+i)\right)}{z-i}dz = 2\pi i\frac{1}{i(i+i)} = -\pi i.$$

- **例3.5：** 考虑围线C_R：$|z| = R$，讨论不同R值时，积分

$$I_R = \oint_{C_R} \frac{1}{z^3(z+1)(z-1)} dz.$$

- **解：** (1) 当$0 < R < 1$时，

$$\begin{aligned} I_R &= \oint_{C_R} \frac{1/\left((z+1)(z-1)\right)}{z^3} dz \\ &= \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{(z+1)(z-1)} \right) \bigg|_{z=0} \\ &= \frac{\pi i}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) \bigg|_{z=0} \\ &= \frac{\pi i}{2} \left(\frac{2}{(z-1)^3} - \frac{2}{(z+1)^3} \right) \bigg|_{z=0} = -2\pi i. \end{aligned}$$

- (2) 当$R = 1$时，积分I_R不存在。

- (3) 当$R>1$时，在C_R内作三个小圆

$$C_{R_{-1}}:\ |z+1|=R_{-1},\quad C_{R_1}:\ |z-1|=R_1,\quad C_{R_0}:\ |z|=R_0.$$

他们满足$R_{-1}+1<R$, $R_1+1<R$, $R_0+R_{-1}<1$, $R_0+R_1<1$，因此有

$$\begin{aligned}
I_R &= \left(\oint_{C_{R_{-1}}}+\oint_{C_{R_0}}+\oint_{C_{R_1}}\right)\frac{dz}{z^3(z+1)(z-1)}\\
&= \oint_{C_{R_{-1}}}\frac{1/\left(z^3(z-1)\right)}{z+1}dz+\oint_{C_{R_0}}\frac{1/\left((z+1)(z-1)\right)}{z^3}dz\\
&\quad+\oint_{C_{R_1}}\frac{1/\left(z^3(z+1)\right)}{(z-1)}dz\\
&= 2\pi i\left(\frac{1}{(-1)^3(-1-1)}-1+\frac{1}{1^3(1+1)}\right)=0.
\end{aligned}$$

- **例3.6（代数学基本定理）**：证明在z平面上的n次多项式

$$p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad (a_n \neq 0)$$

至少有一个零点。

- **证明**：用反证法。设$p_n(z)$在复平面上没有零点，则$1/p_n(z)$在复平面上解析。由于

$$\lim_{z\to\infty} p_n(z) = \lim_{z\to\infty} z^n \left(a_n + a_{n-1} z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n}\right) = \infty,$$

因此

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{p_n(z)} = 0.$$

从而存在充分大的正数R，使当$|z| > R$时，$\left|\frac{1}{p_n(z)}\right| < 1$。又根据$\frac{1}{p_n(z)}$在$|z| \leq R$上连续，则可设$\frac{1}{|p_n(z)|} \leq M$（M为正常数）。因此，在复平面上，我们有$\frac{1}{|p_n(z)|} < M + 1$。根据定理3.8（刘维尔定理），$p_n(z)$必为常数，从而矛盾。因此定理得证。 □

- 在讲述过程中，我们略过了一些定理的推论的严格证明。进一步研究上述定理，将会走进更深入的数学世界，例如：
  - 从柯西不等式出发，将发展出非常深刻的Picard小定理，讨论了超越整函数的性质；
  - 柯西不等式也可以导出均值定理以及平均值不等式；作为平均值不等式的应用，我们可以发展出平方可积的解析函数，这是傅里叶级数的理论对解析函数的推广；
  - 由最大模原理，我们可以得到Schwarz引理，该引理对非欧几何的研究有一定的价值。
- 作为柯西积分公式的推论，我们还可以导出Poisson公式，其主要思想为：如果$f(z)$在上半平面解析，并且当z在上半平面趋于∞时一致的趋于0，根据它（或它的实部或虚部）在实轴上的数值，就可以唯一的决定它在上半平面任意一点的值。
- 略过上述内容并不会对我们后续的学习产生太大影响，感兴趣的同学可以参考梁昆淼的《数学物理方法》、吴崇试的《数学物理方法》、方企勤的《复变函数教程》或者是谭小江等的《复变函数简明教程》。