动态规划科普

Claris

中国膜 Q 学会

2019 年 1 月 22 日

写在前面

- 科普向。

写在前面

- 科普向。
- 题目都比较简单，欢迎现场秒题。

写在前面

- 科普向。
- 题目都比较简单，欢迎现场秒题。
- 

01 背包

n 个物品，每个物品可选可不选，体积为 v_i，价值为 w_i。

01 背包

n 个物品，每个物品可选可不选，体积为 v_i，价值为 w_i。求总体积不超过 m 的情况下能拿走物品总价值的最大值。

01 背包

n 个物品，每个物品可选可不选，体积为 v_i，价值为 w_i。求总体积不超过 m 的情况下能拿走物品总价值的最大值。

- $n, m \leq 1000$。

Solution

- 状态：设 f_i 表示总体积为 i 的最大总价值。

Solution

- 状态：设 f_i 表示总体积为 i 的最大总价值。
- 依次考虑每个物品，要么选要么不选。

Solution

- 状态：设 f_i 表示总体积为 i 的最大总价值。
- 依次考虑每个物品，要么选要么不选。
- $f_i = \max(f_i, f_{i-v} + w)$。

Solution

- 状态：设 f_i 表示总体积为 i 的最大总价值。
- 依次考虑每个物品，要么选要么不选。
- $f_i = \max(f_i, f_{i-v} + w)$。
- 需要按照 i 从大到小的顺序更新，确保每个物品只会选一次。

Solution

- 状态：设 f_i 表示总体积为 i 的最大总价值。
- 依次考虑每个物品，要么选要么不选。
- $f_i = \max(f_i, f_{i-v} + w)$。
- 需要按照 i 从大到小的顺序更新，确保每个物品只会选一次。
- 时间复杂度 $O(nm)$。

01 背包计数

n 个物品，每个物品可选可不选，体积为 v_i。

01 背包计数

n 个物品，每个物品可选可不选，体积为 v_i。

求总体积不超过 m 的情况下拿走物品的方案数。

01 背包计数

n 个物品，每个物品可选可不选，体积为 v_i。
求总体积不超过 m 的情况下拿走物品的方案数。

- $n, m \leq 1000$。

Solution

- 状态：设 f_i 表示总体积为 i 的方案数。

Solution

- 状态：设 f_i 表示总体积为 i 的方案数。
- 依次考虑每个物品，要么选要么不选。

Solution

- 状态：设 f_i 表示总体积为 i 的方案数。
- 依次考虑每个物品，要么选要么不选。
- $f_i + = f_{i-v}$。

Solution

- 状态：设 f_i 表示总体积为 i 的方案数。
- 依次考虑每个物品，要么选要么不选。
- $f_i + = f_{i-v}$。
- 需要按照 i 从大到小的顺序更新，确保每个物品只会选一次。

Solution

- 状态：设 f_i 表示总体积为 i 的方案数。
- 依次考虑每个物品，要么选要么不选。
- $f_i+=f_{i-v}$。
- 需要按照 i 从大到小的顺序更新，确保每个物品只会选一次。
- 时间复杂度 $O(nm)$。

EXT

- 如何支持删除物品？

EXT

- 如何支持删除物品？
- 注意到加入物品的顺序不影响结果。

EXT

- 如何支持删除物品？
- 注意到加入物品的顺序不影响结果。
- 假设被删除的物品是最后一次加入的，那么倒过来还原即可。

EXT

- 如何支持删除物品？
- 注意到加入物品的顺序不影响结果。
- 假设被删除的物品是最后一次加入的，那么倒过来还原即可。
- $f_i - = f_{i-v}$。

EXT

- 如何支持删除物品？
- 注意到加入物品的顺序不影响结果。
- 假设被删除的物品是最后一次加入的，那么倒过来还原即可。
- $f_i - = f_{i-v}$。
- 需要按照 i 从小到大的顺序更新。

完全背包

n 个物品，每个物品可以无限选，体积为 v_i，价值为 w_i。

完全背包

n 个物品，每个物品可以无限选，体积为 v_i，价值为 w_i。
求总体积不超过 m 的情况下能拿走物品总价值的最大值。

完全背包

n 个物品，每个物品可以无限选，体积为 v_i，价值为 w_i。求总体积不超过 m 的情况下能拿走物品总价值的最大值。

- $n, m \leq 1000$。

Solution

- 状态：设 f_i 表示总体积为 i 的最大总价值。

Solution

- 状态：设 f_i 表示总体积为 i 的最大总价值。
- 依次考虑每个物品，要么选要么不选。

Solution

- 状态：设 f_i 表示总体积为 i 的最大总价值。
- 依次考虑每个物品，要么选要么不选。
- $f_i = \max(f_i, f_{i-v} + w)$。

Solution

- 状态：设 f_i 表示总体积为 i 的最大总价值。
- 依次考虑每个物品，要么选要么不选。
- $f_i = \max(f_i, f_{i-v} + w)$。
- 需要按照 i 从小到大的顺序更新，意为要么停止选，要么接着多选一个。

Solution

- 状态：设 f_i 表示总体积为 i 的最大总价值。
- 依次考虑每个物品，要么选要么不选。
- $f_i = \max(f_i, f_{i-v} + w)$。
- 需要按照 i 从小到大的顺序更新，意为要么停止选，要么接着多选一个。
- 时间复杂度 $O(nm)$。

多重背包

n 个物品，每个物品可以选不超过 k_i 个，体积为 v_i，价值为 w_i。

多重背包

n 个物品，每个物品可以选不超过 k_i 个，体积为 v_i，价值为 w_i。

求总体积不超过 m 的情况下能拿走物品总价值的最大值。

多重背包

n 个物品，每个物品可以选不超过 k_i 个，体积为 v_i，价值为 w_i。

求总体积不超过 m 的情况下能拿走物品总价值的最大值。

- $n, m \leq 1000$。

Solution

- 二进制拆分，将一个物品拆成 $O(\log k)$ 个 01 背包的物品。

Solution

- 二进制拆分，将一个物品拆成 $O(\log k)$ 个 01 背包的物品。
- 时间复杂度 $O(nm \log k)$。

Solution

- 二进制拆分，将一个物品拆成 $O(\log k)$ 个 01 背包的物品。
- 时间复杂度 $O(nm \log k)$。
- 当然也可以按余数分组分别单调队列，$O(nm)$。

分组背包

n 个物品，每个物品只能选一个，体积为 v_i，种类为 k_i。

分组背包

n 个物品，每个物品只能选一个，体积为 v_i，种类为 k_i。
求总体积恰好 m 的情况下能拿走物品种类数的最大值。

分组背包

n 个物品，每个物品只能选一个，体积为 v_i，种类为 k_i。求总体积恰好 m 的情况下能拿走物品种类数的最大值。

- $n, m \leq 1000$。

Solution

- 将所有物品按 k 分组。

Solution

- 将所有物品按 k 分组。
- 状态：$f_{i,j,k,s}$ 表示考虑前 i 组，这一组内考虑了前 j 个物品，总体积为 k，第 i 组物品是否被选择的情况为 s 时，种类数的最大值。

Solution

- 将所有物品按 k 分组。
- 状态：$f_{i,j,k,s}$ 表示考虑前 i 组，这一组内考虑了前 j 个物品，总体积为 k，第 i 组物品是否被选择的情况为 s 时，种类数的最大值。
- 按照状态定义转移。

Solution

- 将所有物品按 k 分组。
- 状态：$f_{i,j,k,s}$ 表示考虑前 i 组，这一组内考虑了前 j 个物品，总体积为 k，第 i 组物品是否被选择的情况为 s 时，种类数的最大值。
- 按照状态定义转移。
- 依次考虑每个物品，要么选要么不选。

Solution

- 将所有物品按 k 分组。
- 状态：$f_{i,j,k,s}$ 表示考虑前 i 组，这一组内考虑了前 j 个物品，总体积为 k，第 i 组物品是否被选择的情况为 s 时，种类数的最大值。
- 按照状态定义转移。
- 依次考虑每个物品，要么选要么不选。
- 时间复杂度 $O(nm)$。

树形依赖背包

以 1 为根的树上有 n 个节点，每个节点有一个物品，体积 v_i，价值 w_i。

树形依赖背包

以 1 为根的树上有 n 个节点，每个节点有一个物品，体积 v_i，价值 w_i。

选了一个点就必须选它的父亲。

树形依赖背包

以 1 为根的树上有 n 个节点，每个节点有一个物品，体积 v_i，价值 w_i。

选了一个点就必须选它的父亲。

求总体积不超过 m 的情况下能拿走物品总价值的最大值。

树形依赖背包

以 1 为根的树上有 n 个节点，每个节点有一个物品，体积 v_i，价值 w_i。

选了一个点就必须选它的父亲。

求总体积不超过 m 的情况下能拿走物品总价值的最大值。

- $n, m \leq 1000$。

Solution

- 按照 DFS 的顺序进行 DP。

Solution

- 按照 DFS 的顺序进行 DP。
- 往下搜的时候，强行将儿子选入背包中。

Solution

- 按照 DFS 的顺序进行 DP。
- 往下搜的时候，强行将儿子选入背包中。
- 往上回溯的时候，可以选择要这棵子树的 DP 值，或者不要。

Solution

- 按照 DFS 的顺序进行 DP。
- 往下搜的时候，强行将儿子选入背包中。
- 往上回溯的时候，可以选择要这棵子树的 DP 值，或者不要。
- 时间复杂度 $O(nm)$。

LIS

给定一个长度为 n 的序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ，从中选出尽量多的位置，使得它们的值严格递增。

LIS

给定一个长度为 n 的序列 $a_1, a_2, \dots, a_n$，从中选出尽量多的位置，使得它们的值严格递增。

- $n \le 1000$。

Solution

- 状态：设 f_i 表示考虑前 i 个位置，且选择第 i 个位置时，数量的最大值。

Solution

- 状态：设 f_i 表示考虑前 i 个位置，且选择第 i 个位置时，数量的最大值。
- 决策：枚举上一个位置接上去。

Solution

- 状态：设 f_i 表示考虑前 i 个位置，且选择第 i 个位置时，数量的最大值。
- 决策：枚举上一个位置接上去。
- 无后效性：与之前选了什么数无关，只考虑最后一个数。

Solution

- 状态：设 f_i 表示考虑前 i 个位置，且选择第 i 个位置时，数量的最大值。
- 决策：枚举上一个位置接上去。
- 无后效性：与之前选了什么数无关，只考虑最后一个数。
- 转移方程：$f_i = \max(f_j) + 1$，其中 $1 \le j < i$ 且 $a_j < a_i$。

Solution

- 状态：设 f_i 表示考虑前 i 个位置，且选择第 i 个位置时，数量的最大值。
- 决策：枚举上一个位置接上去。
- 无后效性：与之前选了什么数无关，只考虑最后一个数。
- 转移方程：$f_i = \max(f_j) + 1$，其中 $1 \le j < i$ 且 $a_j < a_i$。
- 时间复杂度 $O(n^2)$。可以优化到 $O(n \log n)$。

Solution

- 维护一个递增的数组 $q_1, q_2, \ldots, q_m$ ，一开始为空，即 $m = 0$。

Solution

- 维护一个递增的数组 $q_1, q_2, \ldots, q_m$，一开始为空，即 $m = 0$。
- 从左往右依次考虑每个数 a_i。

Solution

- 维护一个递增的数组 $q_1, q_2, ..., q_m$ ，一开始为空，即 $m = 0$。
- 从左往右依次考虑每个数 a_i。
- 若 $a_i > q_m$ ，直接将其作为 q_{m+1}。

Solution

- 维护一个递增的数组 $q_1, q_2, ..., q_m$ ，一开始为空，即 $m = 0$。
- 从左往右依次考虑每个数 a_i。
- 若 $a_i > q_m$ ，直接将其作为 q_{m+1}。
- 否则在 q 中二分查找出大于等于 a_i 的最小的数，将其替换为 a_i。

Solution

- 维护一个递增的数组 $q_1, q_2, ..., q_m$ ，一开始为空，即 $m = 0$。
- 从左往右依次考虑每个数 a_i。
- 若 $a_i > q_m$ ，直接将其作为 q_{m+1}。
- 否则在 q 中二分查找出大于等于 a_i 的最小的数，将其替换为 a_i。
- 最终答案为 m ，但是方案不是 $q_1, q_2, ..., q_m$。

Solution

- 维护一个递增的数组 $q_1, q_2, ..., q_m$，一开始为空，即 $m = 0$。
- 从左往右依次考虑每个数 a_i。
- 若 $a_i > q_m$，直接将其作为 q_{m+1}。
- 否则在 q 中二分查找出大于等于 a_i 的最小的数，将其替换为 a_i。
- 最终答案为 m，但是方案不是 $q_1, q_2, ..., q_m$。
- 时间复杂度 $O(n \log n)$。

k-LIS

给定一个长度为 n 的序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ，从中选出 k 个递增子序列，使得总长度最大。

k-LIS

给定一个长度为 n 的序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ，从中选出 k 个递增子序列，使得总长度最大。

- $n \leq 100000$。

k-LIS

给定一个长度为 n 的序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，从中选出 k 个递增子序列，使得总长度最大。

- $n \leq 100000$。
- $k \leq 50$。

Solution

- 维护 k 个上述的数组 $q1[], q2[], q3[], ..., qk[]$。

Solution

- 维护 k 个上述的数组 $q1[], q2[], q3[], ..., qk[]$。
- 从左往右依次考虑每个数 a_i。

Solution

- 维护 k 个上述的数组 $q1[], q2[], q3[], ..., qk[]$。
- 从左往右依次考虑每个数 a_i。
- 若 $a_i > q1_m$ ，直接将其作为 $q1_{m+1}$。

Solution

- 维护 k 个上述的数组 $q1[], q2[], q3[], ..., qk[]$。
- 从左往右依次考虑每个数 a_i。
- 若 $a_i > q1_m$，直接将其作为 $q1_{m+1}$。
- 否则在 $q1$ 中二分查找出大于等于 a_i 的最小的数 x，将其替换为 a_i。

Solution

- 维护 k 个上述的数组 $q1[], q2[], q3[], ..., qk[]$。
- 从左往右依次考虑每个数 a_i。
- 若 $a_i > q1_m$，直接将其作为 $q1_{m+1}$。
- 否则在 $q1$ 中二分查找出大于等于 a_i 的最小的数 x，将其替换为 a_i。
- 对于被替换的数 x，将其放入下一层数组 $q2$ 继续做这个过程。

Solution

- 维护 k 个上述的数组 $q1[], q2[], q3[], ..., qk[]$。
- 从左往右依次考虑每个数 a_i。
- 若 $a_i > q1_m$ ，直接将其作为 $q1_{m+1}$。
- 否则在 $q1$ 中二分查找出大于等于 a_i 的最小的数 x ，将其替换为 a_i。
- 对于被替换的数 x ，将其放入下一层数组 $q2$ 继续做这个过程。
- 最终答案为 k 个数组的元素个数之和。

Solution

- 维护 k 个上述的数组 $q1[], q2[], q3[], ..., qk[]$。
- 从左往右依次考虑每个数 a_i。
- 若 $a_i > q1_m$，直接将其作为 $q1_{m+1}$。
- 否则在 $q1$ 中二分查找出大于等于 a_i 的最小的数 x，将其替换为 a_i。
- 对于被替换的数 x，将其放入下一层数组 $q2$ 继续做这个过程。
- 最终答案为 k 个数组的元素个数之和。
- 时间复杂度 $O(kn\log n)$。

Arcade

给定平面上 n 个点，你要控制遥控车从 $(0,0)$ 出发，以 V_x 的水平速度，速率不高于 V_y 的垂直速度进行移动。

Arcade

给定平面上 n 个点，你要控制遥控车从 $(0,0)$ 出发，以 V_x 的水平速度，速率不高于 V_y 的垂直速度进行移动。

求最多能经过多少个点。

Arcade

给定平面上 n 个点，你要控制遥控车从 $(0,0)$ 出发，以 V_x 的水平速度，速率不高于 V_y 的垂直速度进行移动。

求最多能经过多少个点。

- $n \leq 100000$。

Arcade

给定平面上 n 个点，你要控制遥控车从 $(0,0)$ 出发，以 V_x 的水平速度，速率不高于 V_y 的垂直速度进行移动。

求最多能经过多少个点。

- $n \leq 100000$。
- $1 \leq V_x, V_y \leq 2^{30}$

Arcade

给定平面上 n 个点，你要控制遥控车从 $(0,0)$ 出发，以 V_x 的水平速度，速率不高于 V_y 的垂直速度进行移动。

求最多能经过多少个点。

- $n \le 100000$。
- $1 \le V_x, V_y \le 2^{30}$
- Source：Petrozavodsk Winter Series 2010–2011 Perm SU Contest

Solution

- 每个点下一步能到达的点在平面上是一个范围。

Solution

- 每个点下一步能到达的点在平面上是一个范围。
- 旋转坐标系变成右上角。

Solution

- 每个点下一步能到达的点在平面上是一个范围。
- 旋转坐标系变成右上角。
- 转化为 LIS 问题。

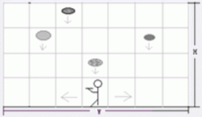
免费的馅饼

SERKOI 最新推出了一种叫做“免费馅饼”的游戏:游戏在一个舞台上进行。舞台的宽度为 W 格（从左到右依次用 1 到 w 编号），游戏者占一格。开始时游戏者可以站在舞台的任意位置，手里拿着一个托盘。下图为天幕的高度为 4 格时某一个时刻游戏者接馅饼的情景。

游戏开始后，从舞台天幕顶端的格子中不断出现馅饼并垂直下落。游戏者左右移动去接馅饼。游戏者每秒可以向左或向右移动一格或两格，也可以站在原地不动。

当馅饼在某一时刻恰好到达游戏者所在的格子中，游戏者就收集到了这块馅饼。当馅饼落在一个游戏者不在的格子里时该馅饼就消失。

写一个程序，帮助我们的游戏者收集馅饼，使得所收集馅饼的分数之和最大。



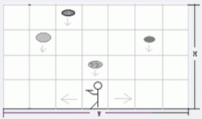
免费的馅饼

SERKOI 最新推出了一种叫做“免费馅饼”的游戏:游戏在一个舞台上进行。舞台的宽度为 W 格（从左到右依次用 1 到 w 编号），游戏者占一格。开始时游戏者可以站在舞台的任意位置，手里拿着一个托盘。下图为天幕的高度为 4 格时某一个时刻游戏者接馅饼的情景。

游戏开始后，从舞台天幕顶端的格子中不断出现馅饼并垂直下落。游戏者左右移动去接馅饼。游戏者每秒可以向左或向右移动一格或两格，也可以站在原地不动。

当馅饼在某一时刻恰好到达游戏者所在的格子中，游戏者就收集到了这块馅饼。当馅饼落在一个游戏者不在的格子里时该馅饼就消失。

写一个程序，帮助我们的游戏者收集馅饼，使得所收集馅饼的分数之和最大。



- $n \leq 100000$。

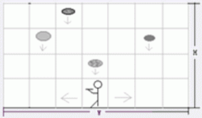
免费的馅饼

SERKOI 最新推出了一种叫做"免费馅饼"的游戏:游戏在一个舞台上进行。舞台的宽度为 W 格（从左到右依次用 1 到 w 编号），游戏者占一格。开始时游戏者可以站在舞台的任意位置，手里拿着一个托盘。下图为天幕的高度为 4 格时某一个时刻游戏者接馅饼的情景。

游戏开始后，从舞台天幕顶端的格子中不断出现馅饼并垂直下落。游戏者左右移动去接馅饼。游戏者每秒可以向左或向右移动一格或两格，也可以站在原地不动。

当馅饼在某一时刻恰好到达游戏者所在的格子中，游戏者就收集到了这块馅饼。当馅饼落在一个游戏者不在的格子里时该馅饼就消失。

写一个程序，帮助我们的游戏者收集馅饼，使得所收集馅饼的分数之和最大。



- $n \leq 100000$。
- Source： BZOJ 2131

Solution

- 将每个馅饼看成 (t_i, p_i)，即在 t_i 时刻落到舞台上第 p_i 个位置。

Solution

- 将每个馅饼看成 (t_i, p_i)，即在 t_i 时刻落到舞台上第 p_i 个位置。
- 那么一个点 i 能到达点 $j(t_i < t_j)$，当且仅当 $2t_j - 2t_i \geq |p_i - p_j|$。

Solution

- 将每个馅饼看成 (t_i, p_i)，即在 t_i 时刻落到舞台上第 p_i 个位置。
- 那么一个点 i 能到达点 $j(t_i < t_j)$，当且仅当 $2t_j - 2t_i \geq |p_i - p_j|$。
- 每个点下一步能到达的点在平面上是一个范围。

Solution

- 将每个馅饼看成 (t_i, p_i)，即在 t_i 时刻落到舞台上第 p_i 个位置。
- 那么一个点 i 能到达点 $j(t_i < t_j)$，当且仅当 $2t_j - 2t_i \geq |p_i - p_j|$。
- 每个点下一步能到达的点在平面上是一个范围。
- 旋转坐标系变成右上角。

Solution

- 将每个馅饼看成 (t_i, p_i)，即在 t_i 时刻落到舞台上第 p_i 个位置。
- 那么一个点 i 能到达点 $j(t_i < t_j)$，当且仅当 $2t_j - 2t_i \geq |p_i - p_j|$。
- 每个点下一步能到达的点在平面上是一个范围。
- 旋转坐标系变成右上角。
- 转化为 LIS 问题。

Team Building

两个人 A 和 B 分别有 n 和 m 张卡牌，每张牌上有一个数字。

Team Building

两个人 A 和 B 分别有 n 和 m 张卡牌，每张牌上有一个数字。

两人需要分别选出 k 张卡牌，然后将它们按数字排序后一一配对比较大小。

Team Building

两个人 A 和 B 分别有 n 和 m 张卡牌，每张牌上有一个数字。

两人需要分别选出 k 张卡牌，然后将它们按数字排序后一一配对比较大小。

问有多少种方案，使得 A 的 k 张卡牌的数字每一张都比 B 对应的牌要大。

Team Building

两个人 A 和 B 分别有 n 和 m 张卡牌，每张牌上有一个数字。

两人需要分别选出 k 张卡牌，然后将它们按数字排序后一一配对比较大小。

问有多少种方案，使得 A 的 k 张卡牌的数字每一张都比 B 对应的牌要大。

- $n, m \leq 30000$。

Team Building

两个人 A 和 B 分别有 n 和 m 张卡牌，每张牌上有一个数字。

两人需要分别选出 k 张卡牌，然后将它们按数字排序后一一配对比较大小。

问有多少种方案，使得 A 的 k 张卡牌的数字每一张都比 B 对应的牌要大。

- $n, m \leq 30000$。
- $k \leq 10$。

Team Building

两个人 A 和 B 分别有 n 和 m 张卡牌，每张牌上有一个数字。

两人需要分别选出 k 张卡牌，然后将它们按数字排序后一一配对比较大小。

问有多少种方案，使得 A 的 k 张卡牌的数字每一张都比 B 对应的牌要大。

- $n, m \leq 30000$。
- $k \leq 10$。
- Source：BZOJ 4742

Solution

- 将两个人的卡牌混在一起从大到小排序，对于数字相同的情况，把 B 的牌放在前面。

Solution

- 将两个人的卡牌混在一起从大到小排序，对于数字相同的情况，把 B 的牌放在前面。
- 那么问题转化为，从排序后的序列中选择 k 个 A 和 B，使得任意一个前缀中 A 的个数不比 B 的个数少。

Solution

- 将两个人的卡牌混在一起从大到小排序，对于数字相同的情况，把 B 的牌放在前面。
- 那么问题转化为，从排序后的序列中选择 k 个 A 和 B，使得任意一个前缀中 A 的个数不比 B 的个数少。
- 设 $f_{i,j,x}$ 表示考虑前 i 张牌，选了 j 个 A，A 的个数减去 B 的个数为 x 的情况。

Solution

- 将两个人的卡牌混在一起从大到小排序，对于数字相同的情况，把 B 的牌放在前面。
- 那么问题转化为，从排序后的序列中选择 k 个 A 和 B，使得任意一个前缀中 A 的个数不比 B 的个数少。
- 设 $f_{i,j,x}$ 表示考虑前 i 张牌，选了 j 个 A，A 的个数减去 B 的个数为 x 的情况。
- 枚举第 $i+1$ 张牌是否选择进行转移，状态有效当且仅当 $0 \leq j \leq k$ 且 $x \geq 0$。

Solution

- 将两个人的卡牌混在一起从大到小排序，对于数字相同的情况，把 B 的牌放在前面。
- 那么问题转化为，从排序后的序列中选择 k 个 A 和 B，使得任意一个前缀中 A 的个数不比 B 的个数少。
- 设 $f_{i,j,x}$ 表示考虑前 i 张牌，选了 j 个 A，A 的个数减去 B 的个数为 x 的情况。
- 枚举第 $i+1$ 张牌是否选择进行转移，状态有效当且仅当 $0 \le j \le k$ 且 $x \ge 0$。
- $ans = f_{n+m,k,0}$。

Solution

- 将两个人的卡牌混在一起从大到小排序，对于数字相同的情况，把 B 的牌放在前面。
- 那么问题转化为，从排序后的序列中选择 k 个 A 和 B，使得任意一个前缀中 A 的个数不比 B 的个数少。
- 设 $f_{i,j,x}$ 表示考虑前 i 张牌，选了 j 个 A，A 的个数减去 B 的个数为 x 的情况。
- 枚举第 $i+1$ 张牌是否选择进行转移，状态有效当且仅当 $0 \le j \le k$ 且 $x \ge 0$。
- $ans = f_{n+m,k,0}$。
- 时间复杂度 $O((n+m)(k^2 + \log(n+m)))$。

石子合并

n 堆石子从左往右排成一排，第 i 堆有 a_i 个石子。

石子合并

n 堆石子从左往右排成一排，第 i 堆有 a_i 个石子。

每次只能将相邻两堆石子合并，这一步的操作代价为两堆石子数量之和。

石子合并

n 堆石子从左往右排成一排，第 i 堆有 a_i 个石子。

每次只能将相邻两堆石子合并，这一步的操作代价为两堆石子数量之和。

求合并所有石子成一堆的最小总代价。

石子合并

n 堆石子从左往右排成一排，第 i 堆有 a_i 个石子。

每次只能将相邻两堆石子合并，这一步的操作代价为两堆石子数量之和。

求合并所有石子成一堆的最小总代价。

- $n \le 300$。

Solution

- 因为只能合并相邻的石子，因此任意局面下一堆石子一定来自于原来的一个区间。

Solution

- 因为只能合并相邻的石子，因此任意局面下一堆石子一定来自于原来的一个区间。
- 设 $f[l][r]$ 表示将 $a_l, a_{l+1}, \dots, a_r$ 合并成一堆石子的最小代价，则 $ans = f[1][n]$。

Solution

- 因为只能合并相邻的石子，因此任意局面下一堆石子一定来自于原来的一个区间。
- 设 $f[l][r]$ 表示将 $a_l, a_{l+1}, \dots, a_r$ 合并成一堆石子的最小代价，则 $ans = f[1][n]$。
- 一堆石子最后一步一定是由两堆石子合并而成，所以转移为 $f[l][r] = \min(f[l][i] + f[i+1][r] + sum(l, i) + sum(i+1, r)) = \min(f[l][i] + f[i+1][r]) + sum(l, r)$，其中 $l \le i < r$。

Solution

- 因为只能合并相邻的石子，因此任意局面下一堆石子一定来自于原来的一个区间。
- 设 $f[l][r]$ 表示将 $a_l, a_{l+1}, \ldots, a_r$ 合并成一堆石子的最小代价，则 $ans = f[1][n]$。
- 一堆石子最后一步一定是由两堆石子合并而成，所以转移为 $f[l][r] = \min(f[l][i] + f[i+1][r] + sum(l,i) + sum(i+1,r)) = \min(f[l][i] + f[i+1][r]) + sum(l,r)$，其中 $l \le i < r$。
- 利用前缀和 $O(1)$ 计算 sum，总时间复杂度为 $O(n^3)$。

Pangu and Stones

n 堆石子从左往右排成一排，第 i 堆有 a_i 个石子。

Pangu and Stones

n 堆石子从左往右排成一排，第 i 堆有 a_i 个石子。

每次只能将连续若干堆石子合并成一堆，这一步的操作代价为这些堆石子数量之和，要求选择的堆数在 $[L, R]$ 之间。

Pangu and Stones

n 堆石子从左往右排成一排，第 i 堆有 a_i 个石子。

每次只能将连续若干堆石子合并成一堆，这一步的操作代价为这些堆石子数量之和，要求选择的堆数在 $[L, R]$ 之间。

求合并所有石子成一堆的最小总代价。

Pangu and Stones

n 堆石子从左往右排成一排，第 i 堆有 a_i 个石子。

每次只能将连续若干堆石子合并成一堆，这一步的操作代价为这些堆石子数量之和，要求选择的堆数在 $[L, R]$ 之间。

求合并所有石子成一堆的最小总代价。

- $n \leq 100$。

Pangu and Stones

n 堆石子从左往右排成一排，第 i 堆有 a_i 个石子。

每次只能将连续若干堆石子合并成一堆，这一步的操作代价为这些堆石子数量之和，要求选择的堆数在 $[L, R]$ 之间。

求合并所有石子成一堆的最小总代价。

- $n \leq 100$。
- Source：2017 ACM/ICPC 北京站

Solution

- 相比上一个问题多了数量的限制。

Solution

- 相比上一个问题多了数量的限制。
- 设 $f[l][r][k]$ 表示准备将 $a_l, a_{l+1}, \ldots, a_r$ 合并成一堆石子的最小代价，最后一步合并操作由 k 堆石子组成。
  设 $g[l][r]$ 表示将 $a_l, a_{l+1}, \ldots, a_r$ 合并成一堆石子的最小代价。

Solution

- 相比上一个问题多了数量的限制。
- 设 $f[l][r][k]$ 表示准备将 $a_l, a_{l+1}, ..., a_r$ 合并成一堆石子的最小代价，最后一步合并操作由 k 堆石子组成。
  设 $g[l][r]$ 表示将 $a_l, a_{l+1}, ..., a_r$ 合并成一堆石子的最小代价。
- 对于 f，枚举最后一堆所在位置进行转移：
  $f[l][r][k] = \min(f[l][x][k-1] + g[x+1][r]), l \leq x < r$。

Solution

- 相比上一个问题多了数量的限制。
- 设 $f[l][r][k]$ 表示准备将 $a_l, a_{l+1}, ..., a_r$ 合并成一堆石子的最小代价，最后一步合并操作由 k 堆石子组成。
  设 $g[l][r]$ 表示将 $a_l, a_{l+1}, ..., a_r$ 合并成一堆石子的最小代价。
- 对于 f，枚举最后一堆所在位置进行转移：
  $f[l][r][k] = \min(f[l][x][k-1] + g[x+1][r]), l \leq x < r$。
- 对于 g，枚举堆数进行转移：
  $g[l][r] = \min(f[l][r][x]) + sum(l, r), L \leq x \leq R$。

Solution

- 相比上一个问题多了数量的限制。
- 设 $f[l][r][k]$ 表示准备将 $a_l, a_{l+1}, \ldots, a_r$ 合并成一堆石子的最小代价，最后一步合并操作由 k 堆石子组成。
  设 $g[l][r]$ 表示将 $a_l, a_{l+1}, \ldots, a_r$ 合并成一堆石子的最小代价。
- 对于 f，枚举最后一堆所在位置进行转移：
  $f[l][r][k] = \min(f[l][x][k-1] + g[x+1][r]), l \leq x < r$。
- 对于 g，枚举堆数进行转移：
  $g[l][r] = \min(f[l][r][x]) + sum(l, r), L \leq x \leq R$。
- 时间复杂度 $O(n^4)$。

Zuma2

n 个珠子从左往右排成一排，第 i 个颜色为 a_i。

Zuma2

n 个珠子从左往右排成一排，第 i 个颜色为 a_i。

每次你可以选择连续的一段珠子，要求必须同色，且长度不少于 k，将它们消去，左右的会合并。

Zuma2

n 个珠子从左往右排成一排，第 i 个颜色为 a_i。

每次你可以选择连续的一段珠子，要求必须同色，且长度不少于 k，将它们消去，左右的会合并。

不会发生链式反应，左右合并后即使会消也需要你指定这次操作。

Zuma2

n 个珠子从左往右排成一排，第 i 个颜色为 a_i。

每次你可以选择连续的一段珠子，要求必须同色，且长度不少于 k，将它们消去，左右的会合并。

不会发生链式反应，左右合并后即使会消也需要你指定这次操作。

求消掉所有珠子的最少操作次数。

Zuma2

n 个珠子从左往右排成一排，第 i 个颜色为 a_i。

每次你可以选择连续的一段珠子，要求必须同色，且长度不少于 k，将它们消去，左右的会合并。

不会发生链式反应，左右合并后即使会消也需要你指定这次操作。

求消掉所有珠子的最少操作次数。

- $n \leq 100, k \leq 6$。

Zuma2

n 个珠子从左往右排成一排，第 i 个颜色为 a_i。

每次你可以选择连续的一段珠子，要求必须同色，且长度不少于 k，将它们消去，左右的会合并。

不会发生链式反应，左右合并后即使会消也需要你指定这次操作。

求消掉所有珠子的最少操作次数。

- $n \leq 100, k \leq 6$。
- Source：BZOJ 2220

Solution

- 考虑一个区间 $[l, r]$，l 一定是最后一步被消去的。

Solution

- 考虑一个区间 $[l, r]$，l 一定是最后一步被消去的。
- 设 $f[l][r][k]$ 表示 $(l, r]$ 消完，除了和 l 同色的剩 k 个的最小代价。
  设 $g[l][r]$ 表示 $[l, r]$ 消完的最小代价。

Solution

- 考虑一个区间 $[l, r]$，l 一定是最后一步被消去的。
- 设 $f[l][r][k]$ 表示 $(l, r]$ 消完，除了和 l 同色的剩 k 个的最小代价。
  设 $g[l][r]$ 表示 $[l, r]$ 消完的最小代价。
- 对于 f，有 $f[l][r][k] = \min(f[l][x][k] + g[x+1][r])$。

Solution

- 考虑一个区间 $[l, r]$，l 一定是最后一步被消去的。
- 设 $f[l][r][k]$ 表示 $(l, r]$ 消完，除了和 l 同色的剩 k 个的最小代价。
  设 $g[l][r]$ 表示 $[l, r]$ 消完的最小代价。
- 对于 f，有 $f[l][r][k] = \min(f[l][x][k] + g[x+1][r])$。
- 特别地，当 $a[l] = a[r]$ 时，有额外的转移：
  $f[l][r][k] = \min(f[l][r][k], f[l][r-1][k-1])$。

Solution

- 考虑一个区间 $[l, r]$，l 一定是最后一步被消去的。
- 设 $f[l][r][k]$ 表示 $(l, r]$ 消完，除了和 l 同色的剩 k 个的最小代价。
  设 $g[l][r]$ 表示 $[l, r]$ 消完的最小代价。
- 对于 f，有 $f[l][r][k] = \min(f[l][x][k] + g[x+1][r])$。
- 特别地，当 $a[l] = a[r]$ 时，有额外的转移：
  $f[l][r][k] = \min(f[l][r][k], f[l][r-1][k-1])$。
- 对于 g，有 $g[l][r] = \min(f[l][r][k] + 1, g[l][x] + g[x+1][r])$。

Solution

- 考虑一个区间 $[l, r]$，l 一定是最后一步被消去的。
- 设 $f[l][r][k]$ 表示 $(l, r]$ 消完，除了和 l 同色的剩 k 个的最小代价。
  设 $g[l][r]$ 表示 $[l, r]$ 消完的最小代价。
- 对于 f，有 $f[l][r][k] = \min(f[l][x][k] + g[x+1][r])$。
- 特别地，当 $a[l] = a[r]$ 时，有额外的转移：
  $f[l][r][k] = \min(f[l][r][k], f[l][r-1][k-1])$。
- 对于 g，有 $g[l][r] = \min(f[l][r][k] + 1, g[l][x] + g[x+1][r])$。
- 时间复杂度 $O(n^3 k)$。

Powodz

地面上有个水箱，俯视图是 $n \times m$ 的网格，相邻格子之间有墙，水箱外围墙的高度无限。

Powodz

地面上有个水箱，俯视图是 $n \times m$ 的网格，相邻格子之间有墙，水箱外围墙的高度无限。

已知水箱每个格子的水位是 $[0, H]$ 之间的整数，输入每堵墙的高度，求可能的水位情况总数。

Powodz

地面上有个水箱，俯视图是 $n \times m$ 的网格，相邻格子之间有墙，水箱外围墙的高度无限。

已知水箱每个格子的水位是 $[0, H]$ 之间的整数，输入每堵墙的高度，求可能的水位情况总数。

- $nm \leq 500000$。

Powodz

地面上有个水箱，俯视图是 $n \times m$ 的网格，相邻格子之间有墙，水箱外围墙的高度无限。

已知水箱每个格子的水位是 $[0, H]$ 之间的整数，输入每堵墙的高度，求可能的水位情况总数。

- $nm \leq 500000$。
- Source：POI 2018

Solution

- 考虑水位上涨的过程，只有最小生成树的树边有用。

Solution

- 考虑水位上涨的过程，只有最小生成树的树边有用。
- 求出 Kruskal 重构树，那么每个点的取值范围都是确定的。

Solution

- 考虑水位上涨的过程，只有最小生成树的树边有用。
- 求出 Kruskal 重构树，那么每个点的取值范围都是确定的。
- 考虑树形 DP，则对于一个点，要么所有点水位相同 (高于墙的高度)，要么还未发生合并 (低于墙的高度)。

Solution

- 考虑水位上涨的过程，只有最小生成树的树边有用。
- 求出 Kruskal 重构树，那么每个点的取值范围都是确定的。
- 考虑树形 DP，则对于一个点，要么所有点水位相同 (高于墙的高度)，要么还未发生合并 (低于墙的高度)。
- $dp[x] = up[x] - down[x] + 1 + dp[l[x]] \times dp[r[x]]$

Solution

- 考虑水位上涨的过程，只有最小生成树的树边有用。
- 求出 Kruskal 重构树，那么每个点的取值范围都是确定的。
- 考虑树形 DP，则对于一个点，要么所有点水位相同 (高于墙的高度)，要么还未发生合并 (低于墙的高度)。
- $dp[x] = up[x] - down[x] + 1 + dp[l[x]] \times dp[r[x]]$
- 时间复杂度 $O(nm\log(nm))$。

Sitting in Line

n 个人需要排成一排，第 i 个人手上的数为 a_i，有些人位置已经确定，有些人位置不确定。

Sitting in Line

n 个人需要排成一排，第 i 个人手上的数为 a_i，有些人位置已经确定，有些人位置不确定。

请安排不确定的人的位置，使得相邻两个人手上的数的乘积之和最大。

Sitting in Line

n 个人需要排成一排，第 i 个人手上的数为 a_i，有些人位置已经确定，有些人位置不确定。

请安排不确定的人的位置，使得相邻两个人手上的数的乘积之和最大。

- $2 \le n \le 16$。

Sitting in Line

n 个人需要排成一排，第 i 个人手上的数为 a_i，有些人位置已经确定，有些人位置不确定。

请安排不确定的人的位置，使得相邻两个人手上的数的乘积之和最大。

- $2 \leq n \leq 16$。
- Source：2016“百度之星” - 初赛（Astar Round2A）

Solution

- 从左往右依次填人。

Solution

- 从左往右依次填人。
- 不关心前面每个位置是谁，只关心哪些人还没有位置。

Solution

- 从左往右依次填人。
- 不关心前面每个位置是谁，只关心哪些人还没有位置。
- 设 $f[S][i]$ 表示 S 集合的人的位置已经确定，其中最靠右的是第 i 个人的最大乘积和。

Solution

- 从左往右依次填人。
- 不关心前面每个位置是谁，只关心哪些人还没有位置。
- 设 $f[S][i]$ 表示 S 集合的人的位置已经确定，其中最靠右的是第 i 个人的最大乘积和。
- 枚举下一个人转移。

Solution

- 从左往右依次填人。
- 不关心前面每个位置是谁，只关心哪些人还没有位置。
- 设 $f[S][i]$ 表示 S 集合的人的位置已经确定，其中最靠右的是第 i 个人的最大乘积和。
- 枚举下一个人转移。
- 时间复杂度 $O(2^n n^2)$。

旅行商问题

n 个点，m 条边的有向图，其中有 k 个关键点。

旅行商问题

n 个点，m 条边的有向图，其中有 k 个关键点。

求从 1 号点出发经过所有关键点至少一次后到达 n 号点的最短路。

旅行商问题

n 个点，m 条边的有向图，其中有 k 个关键点。

求从 1 号点出发经过所有关键点至少一次后到达 n 号点的最短路。

- $n, m \leq 100000$。

旅行商问题

n 个点，m 条边的有向图，其中有 k 个关键点。

求从 1 号点出发经过所有关键点至少一次后到达 n 号点的最短路。

- $n, m \leq 100000$。
- $k \leq 16$。

Solution

- 通过 k 次 Dijkstra 在 $O(km\log m)$ 的时间里求出任意两个关键点之间的最短路。

Solution

- 通过 k 次 Dijkstra 在 $O(km\log m)$ 的时间里求出任意两个关键点之间的最短路。
- 是 $f[S][i]$ 表示经过了 S 集合的关键点，目前位于关键点 i 的最短路。

Solution

- 通过 k 次 Dijkstra 在 $O(km\log m)$ 的时间里求出任意两个关键点之间的最短路。
- 是 $f[S][i]$ 表示经过了 S 集合的关键点，目前位于关键点 i 的最短路。
- 枚举下一个经过的关键点转移。

Solution

- 通过 k 次 Dijkstra 在 $O(km\log m)$ 的时间里求出任意两个关键点之间的最短路。
- 是 $f[S][i]$ 表示经过了 S 集合的关键点，目前位于关键点 i 的最短路。
- 枚举下一个经过的关键点转移。
- 为了方便处理可以将起点和终点也作为关键点。

Solution

- 通过 k 次 Dijkstra 在 $O(km\log m)$ 的时间里求出任意两个关键点之间的最短路。
- 是 $f[S][i]$ 表示经过了 S 集合的关键点，目前位于关键点 i 的最短路。
- 枚举下一个经过的关键点转移。
- 为了方便处理可以将起点和终点也作为关键点。
- 时间复杂度 $O(km\log m + 2^k k^2)$。

数位和

设 $f(i)$ 为数字 i 十进制下每一位的和，给定 n，求 $f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$。

数位和

设 $f(i)$ 为数字 i 十进制下每一位的和，给定 n，求 $f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$。

- $n \le 10^{100}$。

Solution

- 由于最多只有 100 位，假设 100 位都是 9，那么某个数的 f 值最大不会超过 900。

Solution

- 由于最多只有 100 位，假设 100 位都是 9，那么某个数的 f 值最大不会超过 900。
- 设 $f[i][j][0]$ 表示前 i 位（从高到低）的和为 j，且目前已经小于 n 的数字的个数。
  $f[i][j][1]$ 表示前 i 位（从高到低）的和为 j，且目前等于 n 的数字的个数。

Solution

- 由于最多只有 100 位，假设 100 位都是 9，那么某个数的 f 值最大不会超过 900。
- 设 $f[i][j][0]$ 表示前 i 位（从高到低）的和为 j，且目前已经小于 n 的数字的个数。
  $f[i][j][1]$ 表示前 i 位（从高到低）的和为 j，且目前等于 n 的数字的个数。
- 初始条件 $f[1][i][i == a[1]] = 1$

Solution

- 由于最多只有 100 位，假设 100 位都是 9，那么某个数的 f 值最大不会超过 900。
- 设 $f[i][j][0]$ 表示前 i 位（从高到低）的和为 j，且目前已经小于 n 的数字的个数。
  $f[i][j][1]$ 表示前 i 位（从高到低）的和为 j，且目前等于 n 的数字的个数。
- 初始条件 $f[1][i][i == a[1]] = 1$
- 时间复杂度 $O(\log^2 n)$。

Valley Number

当一个数字，从左到右依次看过去数字没有出现先递增接着递减的 “山峰” 现象，就被称作 Valley Number。它可以递增，也可以递减，还可以先递减再递增。在递增或递减的过程中可以出现相等的情况。

Valley Number

当一个数字，从左到右依次看过去数字没有出现先递增接着递减的 “山峰” 现象，就被称作 Valley Number。它可以递增，也可以递减，还可以先递减再递增。在递增或递减的过程中可以出现相等的情况。

比如，$1, 10, 12, 212, 32122$ 都是 Valley Number。

$121, 12331, 21212$ 则不是。

Valley Number

当一个数字，从左到右依次看过去数字没有出现先递增接着递减的“山峰”现象，就被称作 Valley Number。它可以递增，也可以递减，还可以先递减再递增。在递增或递减的过程中可以出现相等的情况。

比如，$1, 10, 12, 212, 32122$ 都是 Valley Number。$121, 12331, 21212$ 则不是。

求 $[1, n]$ 内有多少整数是 Valley Number。

Valley Number

当一个数字，从左到右依次看过去数字没有出现先递增接着递减的“山峰”现象，就被称作 Valley Number。它可以递增，也可以递减，还可以先递减再递增。在递增或递减的过程中可以出现相等的情况。

比如，$1, 10, 12, 212, 32122$ 都是 Valley Number。$121, 12331, 21212$ 则不是。

求 $[1, n]$ 内有多少整数是 Valley Number。

- $n \leq 10^{100}$。

Valley Number

当一个数字，从左到右依次看过去数字没有出现先递增接着递减的“山峰”现象，就被称作 Valley Number。它可以递增，也可以递减，还可以先递减再递增。在递增或递减的过程中可以出现相等的情况。

比如，$1, 10, 12, 212, 32122$ 都是 Valley Number。$121, 12331, 21212$ 则不是。

求 $[1, n]$ 内有多少整数是 Valley Number。

- $n \le 10^{100}$。
- Source：2017 百度之星程序设计大赛 - 复赛

Solution

- 依旧从高位到低位考虑。

Solution

- 依旧从高位到低位考虑。
- 状态：$f[i][j][k][x][y]$ 表示考虑了最高的 i 位，第 i 位的数字是 j，前面是否都是前导 0 的情况为 k，上升/下降状态为 x，是否已经小于 n 的情况为 y 的方案数。

Solution

- 依旧从高位到低位考虑。
- 状态：$f[i][j][k][x][y]$ 表示考虑了最高的 i 位，第 i 位的数字是 j，前面是否都是前导 0 的情况为 k，上升/下降状态为 x，是否已经小于 n 的情况为 y 的方案数。
- 时间复杂度 $O(\log n)$。

Balanced Numbers

一个数被称为是平衡的数当且仅当对于所有出现过的数位，偶数出现奇数次，奇数出现偶数次。

Balanced Numbers

一个数被称为是平衡的数当且仅当对于所有出现过的数位，偶数出现奇数次，奇数出现偶数次。

给定 A, B，请统计出 $[A, B]$ 内所有平衡的数的个数。

Balanced Numbers

一个数被称为是平衡的数当且仅当对于所有出现过的数位，偶数出现奇数次，奇数出现偶数次。

给定 A, B，请统计出 $[A, B]$ 内所有平衡的数的个数。

- $1 \leq A \leq B \leq 10^{18}$。

Balanced Numbers

一个数被称为是平衡的数当且仅当对于所有出现过的数位，偶数出现奇数次，奇数出现偶数次。

给定 A, B，请统计出 $[A, B]$ 内所有平衡的数的个数。

- $1 \le A \le B \le 10^{18}$。
- Source：SPOJ 10606

Solution

- 设 $cal(n)$ 为 $[1, n]$ 中平衡的数的个数，那么 $ans = cal(B) - cal(A-1)$。

Solution

- 设 $cal(n)$ 为 $[1, n]$ 中平衡的数的个数，那么 $ans = cal(B) - cal(A-1)$。
- 考虑如何计算 $cal(n)$，对于每个数字，定义状态 0 为没出现过，1 为出现了奇数次，2 为出现了偶数次，那么可以用一个 10 位 3 进制数来表示所有数字的状态。

Solution

- 设 $cal(n)$ 为 $[1, n]$ 中平衡的数的个数，那么 $ans = cal(B) - cal(A-1)$。
- 考虑如何计算 $cal(n)$，对于每个数字，定义状态 0 为没出现过，1 为出现了奇数次，2 为出现了偶数次，那么可以用一个 10 位 3 进制数来表示所有数字的状态。
- 设 $f(i, S, 0)$ 表示从高到低填了前 i 位，所有数字的状态为 S，且当前数字已经小于 n 的数字个数。$f(i, S, 1)$ 表示从高到低填了前 i 位，所有数字的状态为 S，且当前数字等于 n 的数字个数，然后 DP 即可。

Solution

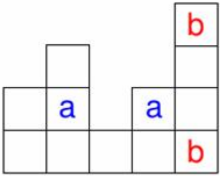
- 设 $cal(n)$ 为 $[1, n]$ 中平衡的数的个数，那么 $ans = cal(B) - cal(A - 1)$。
- 考虑如何计算 $cal(n)$，对于每个数字，定义状态 0 为没出现过，1 为出现了奇数次，2 为出现了偶数次，那么可以用一个 10 位 3 进制数来表示所有数字的状态。
- 设 $f(i, S, 0)$ 表示从高到低填了前 i 位，所有数字的状态为 S，且当前数字已经小于 n 的数字个数。$f(i, S, 1)$ 表示从高到低填了前 i 位，所有数字的状态为 S，且当前数字等于 n 的数字个数，然后 DP 即可。
- 时间复杂度 $O(3^{10} \log B)$。

Periodni

n 个底边长度为 1，高度为 h_i 的长条拼成一个棋盘。

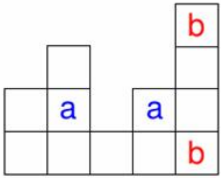
Periodni

n 个底边长度为 1，高度为 h_i 的长条拼成一个棋盘。



Periodni

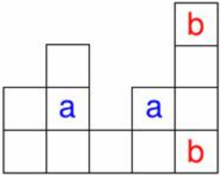
n 个底边长度为 1，高度为 h_i 的长条拼成一个棋盘。



两个车能相互攻击当且仅当它们在同一行或者同一列，且它们之间所有格子均存在。

Periodni

n 个底边长度为 1，高度为 h_i 的长条拼成一个棋盘。

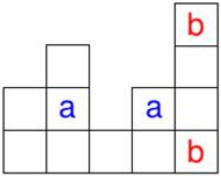


两个车能相互攻击当且仅当它们在同一行或者同一列，且它们之间所有格子均存在。

现在要在棋盘上放置恰好 k 个相互不攻击的车，求方案数。

Periodni

n 个底边长度为 1，高度为 h_i 的长条拼成一个棋盘。



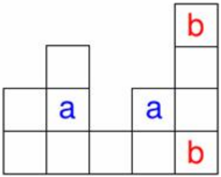
两个车能相互攻击当且仅当它们在同一行或者同一列，且它们之间所有格子均存在。

现在要在棋盘上放置恰好 k 个相互不攻击的车，求方案数。

- $n, k \leq 500, h_i \leq 10^6$。

Periodni

n 个底边长度为 1，高度为 h_i 的长条拼成一个棋盘。



两个车能相互攻击当且仅当它们在同一行或者同一列，且它们之间所有格子均存在。

现在要在棋盘上放置恰好 k 个相互不攻击的车，求方案数。

- $n, k \leq 500, h_i \leq 10^6$。
- Source： COCI 2008

Solution

- 不断将最矮的那一列以及下面的矩形取出，得到一棵树的结构。

Solution

- 不断将最矮的那一列以及下面的矩形取出，得到一棵树的结构。
- 假如已经知道了儿子中车的分布情况，那么父亲对应的矩形中还能放的车的列数是确定的。

Solution

- 不断将最矮的那一列以及下面的矩形取出，得到一棵树的结构。
- 假如已经知道了儿子中车的分布情况，那么父亲对应的矩形中还能放的车的列数是确定的。
- 一个长为 a，宽为 b 的矩形中放置 k 个车的方案数为 $C(a,k)C(b,k)k!$。

Solution

- 不断将最矮的那一列以及下面的矩形取出，得到一棵树的结构。
- 假如已经知道了儿子中车的分布情况，那么父亲对应的矩形中还能放的车的列数是确定的。
- 一个长为 a，宽为 b 的矩形中放置 k 个车的方案数为 $C(a,k)C(b,k)k!$。
- 树形 DP，设 $f_{i,j}$ 表示 i 子树中放了 j 个车的方案数。

Solution

- 不断将最矮的那一列以及下面的矩形取出，得到一棵树的结构。
- 假如已经知道了儿子中车的分布情况，那么父亲对应的矩形中还能放的车的列数是确定的。
- 一个长为 a，宽为 b 的矩形中放置 k 个车的方案数为 $C(a,k)C(b,k)k!$。
- 树形 DP，设 $f_{i,j}$ 表示 i 子树中放了 j 个车的方案数。
- 首先将子树合并，$f_{a,i} \times f_{b,j} \to f_{c,i+j}$。

Solution

- 不断将最矮的那一列以及下面的矩形取出，得到一棵树的结构。
- 假如已经知道了儿子中车的分布情况，那么父亲对应的矩形中还能放的车的列数是确定的。
- 一个长为 a，宽为 b 的矩形中放置 k 个车的方案数为 $C(a,k)C(b,k)k!$。
- 树形 DP，设 $f_{i,j}$ 表示 i 子树中放了 j 个车的方案数。
- 首先将子树合并，$f_{a,i} \times f_{b,j} \to f_{c,i+j}$。
- 然后考虑父亲矩形中放置多少个车。

Solution

- 不断将最矮的那一列以及下面的矩形取出，得到一棵树的结构。
- 假如已经知道了儿子中车的分布情况，那么父亲对应的矩形中还能放的车的列数是确定的。
- 一个长为 a，宽为 b 的矩形中放置 k 个车的方案数为 $C(a,k)C(b,k)k!$。
- 树形 DP，设 $f_{i,j}$ 表示 i 子树中放了 j 个车的方案数。
- 首先将子树合并，$f_{a,i} \times f_{b,j} \to f_{c,i+j}$。
- 然后考虑父亲矩形中放置多少个车。
- 时间复杂度 $O(n^3 + h)$。

Thank you!