图论选讲

周润龙

江苏省常州高级中学

欧拉路径

哈密顿路

最小生成树

最短路

差分约束系统

01 分数规划

图的连通性

二分图

欧拉路径

若图 G 中存在这样一条路径，使得它恰通过 G 中每条边一次，则称该路径为欧拉路径。若该路径是一个圈，则称为欧拉回路。具有欧拉回路的图称为欧拉图。具有欧拉路径但不具有欧拉回路的图称为半欧拉图。

- 欧拉路径
- 有向图的欧拉路径
- 无向图的欧拉路径
- 判定：**连通**，点的度数
- 求欧拉路：DFS

欧拉路判定

有向图

- 欧拉回路：所有点满足入度 $=$ 出度
- 欧拉路：所有点入度 $=$ 出度；或起点出度 $-$ 入度 $=1$，终点入度 $-$ 出度 $=1$，其余点入度 $=$ 出度

无向图

- 欧拉回路：所有点度数为偶数
- 欧拉路：0 或 2 个点度数为奇数（起点和终点）

求欧拉路

```
Procedure EulerCircuit(v)
  while deg(v) != 0
    u 是一个和 v 相连的点
    删除边 (u, v) （若是有向图就不要删除反向边）
    EulerCircuit(u)
    将 v 放入目标队列 Q 的队尾
return
```

由于每条边只会被经过一次，时间复杂度是 $O(m)$ 的。

POJ 1386 Play on Words

给定 n 个单词，要求安排合适的顺序，使得 n 个单词排成一排，且后面单词的首字母为前面单词的末字母。
$n \le 10^5$，所有字符都是小写英文字母。

POJ 1386 Play on Words

顶点集合就是 26 个小写字母，用 1 到 26 来表示，一个单词的首字母和尾字母就是一条有向边。
判定欧拉路径是否存在即可。
时间复杂度 $O(n)$。

哈密顿路

通过图 G 的每个结点一次，且仅一次的路径（回路），就是哈密顿路径（回路）。存在哈密顿回路的图就是哈密顿图。
一般图的求解方式是设状态为 $f[i][S]$ 的动态规划，表示当前访问的点是 i，已访问点的集合是 S（二进制表示）。

最小生成树

最小生成树是**最小权重生成树**的简称。
在一给定的**无向图** $G = (V, E)$ 中，(u, v, w) 代表连接顶点 u 与顶点 v 的边，w 代表此边的权重。若存在 T 为 E 的子集且 $G_0 = (V, T)$ 连通，使得 $\sum w$ 最小，则 T 为 G 的最小生成树。
最小生成树可能有多个。

- Prim
- Kruskal

哪些边会在最小生成树上?

- 必定在最小生成树上的边
- 可能在最小生成树上的边
- 一定不在最小生成树上的边

哪些边会在最小生成树上?

考虑 Kruskal 算法的过程，有一个性质是：当最小生成树中所有 $w \leq w_0$ 的边都被加入后，**图的连通性唯一**。
把 w 相同的边一起考虑，每条边两端的点变为它们所在的并查集，如果有自环则一定不在最小生成树上；求桥，则桥一定在最小生成树上，其他边则可能在最小生成树上。

BZOJ 1016 [JSOI2008] 最小生成树计数

给定无向图，求最小生成树个数 mod 31011。
$n \leq 100, m \leq 1000$，相同边权的边不超过 10 条。

BZOJ 1016 [JSOI2008] 最小生成树计数

利用前面那个性质。

BZOJ 1016 [JSOI2008] 最小生成树计数

利用前面那个性质。
把边按照 w 从小到大加入，w 相同的边暴力枚举加入哪些，最后用乘法原理计算答案。
Kruskal 的另一个性质：对于所有的最小生成树，同一个权值的边的个数是常数。当每种权值都取 5 条的时候复杂度最劣。
时间复杂度 $O(m \log m + nmC_{10}^{5}\alpha(n))$。

BZOJ 1016 [JSOI2008] 最小生成树计数

利用前面那个性质。
把边按照 w 从小到大加入，w 相同的边暴力枚举加入哪些，最后用乘法原理计算答案。
Kruskal 的另一个性质：对于所有的最小生成树，同一个权值的边的个数是常数。当每种权值都取 5 条的时候复杂度最劣。
时间复杂度 $O(m\log m + nmC_{10}^{5}\alpha(n))$。
EXT：如果**不限制**每种权值的边数呢?

BZOJ 1016 [JSOI2008] 最小生成树计数 EXT

可以看到，对于同一个 w，问题实际上被转化成了：在若干个连通块里求解生成树的个数。

BZOJ 1016 [JSOI2008] 最小生成树计数 EXT

可以看到，对于同一个 w，问题实际上被转化成了：在若干个连通块里求解生成树的个数。
这个问题可以用 Matrix-Tree 定理解决，大家有兴趣可以自己研究。
注意到一次 $O(k^3)$ 的计数会减少 $k-1$ 个自由点，最多有 n 个自由点，因此时间复杂度 $O(m \log m + n^3)$。

BZOJ 3714 [PA2014]Kuglarz

魔术师的桌子上有 n 个杯子排成一行，编号为 $1, 2, \ldots, n$，其中某些杯子底下藏有一个小球。
你可以花费 $c_{i,j}$ 元，魔术师就会告诉你杯子 $i, i+1, \ldots, j$ 底下藏有球的总数的奇偶性。
采取最优的询问策略，你至少需要花费多少元，才能确定哪些杯子底下藏着球?
$n \le 2000$。

BZOJ 3714 [PA2014]Kuglarz

类似前缀和和差分，设 f_i 表示杯子 $1, 2, \ldots, i$ 底下藏有球的总数的奇偶性，我们必须知道所有的 f_i，才能确定藏球的情况。
对于一次 $c_{i,j}$ 的询问，本质上是确定了 f_{i-1} 和 f_j 的关系，因此连一条 $(i-1, j, c_{i,j})$ 的无向边，最后求解最小生成树就是答案。

BZOJ 3714 [PA2014]Kuglarz

类似前缀和和差分，设 f_i 表示杯子 $1, 2, \ldots, i$ 底下藏有球的总数的奇偶性，我们必须知道所有的 f_i，才能确定藏球的情况。
对于一次 $c_{i,j}$ 的询问，本质上是确定了 f_{i-1} 和 f_j 的关系，因此连一条 $(i-1, j, c_{i,j})$ 的无向边，最后求解最小生成树就是答案。
注意到 $m = O(n^2)$，因此采用 Kruskal 的复杂度是 $O(n^2 \log n)$，不算优；如果用 Prim 的话就是 $O(n^2)$，是最优的复杂度。

最短路

- 堆优化 Dijkstra
- SPFA（队列优化 Bellman-Ford）
- Floyd

POJ 3613 Cow Relays

给定一张带权图，求从起点 s 到终点 t **恰好经过** k **条边**的最短路径的长度。

$n \leq 100, m \leq 200, k \leq 10^6$。

POJ 3613 Cow Relays

Floyd 大家都会写，有没有发现它和矩阵乘法很像?

POJ 1734 Sightseeing Trip

带权无向图上求边权之和最小的简单环。
$n \leq 100, m \leq 10000$。

POJ 1734 Sightseeing Trip

环上一定有一个编号最大的点。

POJ 1734 Sightseeing Trip

环上一定有一个编号最大的点。
用 Floyd 求最小环：$u \to \ldots \to k \to v \to u$，其中 k 是与 u 和 v 均相邻的点。若 v 到 u 这段不经过 k，那么这就形成了一个环。

POJ 1734 Sightseeing Trip

环上一定有一个编号最大的点。
用 Floyd 求最小环：$u \to \ldots \to k \to v \to u$，其中 k 是与 u 和 v 均相邻的点。若 v 到 u 这段不经过 k，那么这就形成了一个环。
如何保证不经过 k？让 $k > u, k > v$ 就行了（回想松弛过程）。

BZOJ 2662 [BeiJing WC2012] 冻结

给定 n 个点，m 条边的一张带权无向图，并给定 k 次魔法，每次可以让通过一条边（你自己定）所用时间减半，求从起点到终点的最小时间。

$n, k \leq 50, m \leq 1000$。

BZOJ 2662 [BeiJing WC2012] 冻结

$dis[i][j]$ 表示用了 i 次魔法到 j 节点的最短路，那么 $dis[i][j] \rightarrow dis[i][k]$ 或 $dis[i][j] \rightarrow dis[i+1][k]$。
按层转移不会影响答案，在同一层内使用最短路算法，在不同层间枚举边转移。
时间复杂度 $O(k(n+m)\log n)$。

BZOJ 2662 [BeiJing WC2012] 冻结

$dis[i][j]$ 表示用了 i 次魔法到 j 节点的最短路，那么
$dis[i][j] \to dis[i][k]$ 或 $dis[i][j] \to dis[i+1][k]$。
按层转移不会影响答案，在同一层内使用最短路算法，在不同层间枚举边转移。
时间复杂度 $O(k(n+m)\log n)$。
对于这道题直接用 nk 个点，mk 条边跑最短路就可以通过了。

2017 计蒜之道复赛 百度地图导航

有 n 个城市、m 个城市群。每个城市群包含 k_i 个城市；每个城市可能属于多个城市群，也可能不属于任何城市群。
有 m_1 条第一类道路，在两个城市 u, v 之间增加一条距离为 c 的边；有 m_2 条第二类道路，对于城市群 a 里的每个城市与城市群 b 里的每个城市之间两两增加一条距离为 c 的边。
图中所有边均为无向边。求 s 到 t 的最短路。
$n, m, \sum k, m_1, m_2 \leq 20000$。

2017 计蒜之道复赛 百度地图导航

重点在于第二类道路。
对于每个**城市群**新建两个点 i_1, i_2，分别代表入点和出点，每个**城市**向 i_1 连长度为 0 的**有向边**，i_2 向每个**城市**连长度为 0 的**有向边**。

2017 计蒜之道复赛 百度地图导航

重点在于第二类道路。
对于每个**城市群**新建两个点 i_1, i_2，分别代表入点和出点，每个**城市**向 i_1 连长度为 0 的**有向边**，i_2 向每个**城市**连长度为 0 的**有向边**。
对于每条第二类道路，**建有向边** $(a_1 \to b_2, c), (b_1 \to a_2, c)$。第一类道路也都看成有向边。

差分约束系统

n 个变量，m 个约束条件。
约束条件形如 $x_i - x_j \le b_k$。
目的是最小化每个元素。
观察约束条件，类似最短路中的松弛形式 $dis_u \le dis_v + w(u, v)$。
所以 j 向 i 连一条边权为 b_k 的**有向边**，求解最短路。

BZOJ 2330 [SCOI2011] 糖果

有 n 个人，m 个要求，每个要求表示第 u 个人的糖比第 v 个人多/少/不多/不少/相等，每个人至少要 1 颗糖。求糖的总数的最小值。
$n, m \leq 10^5$。

BZOJ 2330 [SCOI2011] 糖果

规约后，一共只有两种大小关系：$w_u \geq w_v, w_u > w_v$。
$w_u > w_v$ 等价于 $w_u \geq w_v + 1$。

POJ 1275 Cashier Employment

一家 24 小时营业的便利店，每小时都需要一定数量的出纳员，记为 $R_1, R_2, \ldots, R_{24}$，这些数值对于每一天都是一样的（循环）。有 n 人申请这项工作，每个申请者 i 如果被录用，在每 24 小时中，他会从一个特定的时刻 $t_i (1 \leq t_i \leq 24)$ 开始连续工作恰好 8 小时。
最小化总的出纳员数。
$R_i, n \leq 1000$。

POJ 1275 Cashier Employment

设 num_i 为来应聘的在第 i 个小时开始工作的人数，x_i 为招到的在第 i 个小时开始工作的人数。

- $0 \le x_i \le num_i$
- $x_i + x_{i-1} + \ldots + x_{i-7} \ge R_i$（小于 1 自动循环到 24）

POJ 1275 Cashier Employment

设 num_i 为来应聘的在第 i 个小时开始工作的人数，x_i 为招到的在第 i 个小时开始工作的人数。

- $0 \leq x_i \leq num_i$
- $x_i + x_{i-1} + \ldots + x_{i-7} \geq R_i$（小于 1 自动循环到 24）

再设 $s_0 = 0, s_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_i$。

- $s_i \geq s_{i-1}$
- $s_{i-1} \geq s_i - num_i$
- $s_i \geq s_{i-8} + R_i \quad (9 \geq i \geq 24)$
- $s_i \geq s_{i+16} + R_i – s_{24} \quad (1 \geq i \geq 8)$

枚举 s_{24} 做差分约束就可以了。

POJ 1275 Cashier Employment

设 num_i 为来应聘的在第 i 个小时开始工作的人数，x_i 为招到的在第 i 个小时开始工作的人数。

- $0 \leq x_i \leq num_i$
- $x_i + x_{i-1} + \ldots + x_{i-7} \geq R_i$（小于 1 自动循环到 24）

再设 $s_0 = 0, s_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_i$。

- $s_i \geq s_{i-1}$
- $s_{i-1} \geq s_i - num_i$
- $s_i \geq s_{i-8} + R_i \quad (9 \geq i \geq 24)$
- $s_i \geq s_{i+16} + R_i - s_{24} \quad (1 \geq i \geq 8)$

枚举 s_{24} 做差分约束就可以了。
听说大家都会志愿者招募?

最优比率生成树

- 每条边有 a_i 与 b_i 两个权值，找到一棵生成树使得 $\frac{\sum a_i}{\sum b_i}$ 最大
- 设 $\frac{\sum a_i}{\sum b_i} \leq ans, \sum(a_i - ans \cdot b_i) \leq 0$，二分 mid，求出最小生成树，若权值和 ≤ 0 则 $l \leftarrow mid$，否则 $r \leftarrow mid$

01 分数规划

最优比率生成树

- 每条边有 a_i 与 b_i 两个权值，找到一棵生成树使得 $\frac{\sum a_i}{\sum b_i}$ 最大
- 设 $\frac{\sum a_i}{\sum b_i} \leq ans, \sum(a_i - ans \cdot b_i) \leq 0$，二分 mid，求出最小生成树，若权值和 ≤ 0 则 $l \leftarrow mid$，否则 $r \leftarrow mid$

最优比率环

- 每条边有边权，每个点有点权，找一个环使得总点权之和/总边权之和最大
- 好像要找一个权值和为负数的环?

SPFA 判负环

- 一个点入队**超过** n **次**，则图中存在负环
- 当前最短路包含边数超过 n，则图中存在负环

SPFA 判负环

- 一个点入队**超过** n **次**，则图中存在负环
- 当前最短路包含边数超过 n，则图中存在负环
- SPFA 的 DFS 形式，若一个点在同一条路径上被松弛/出现多次，则图中存在负环

图的连通性

- 有向图的强连通分量
- 无向图的割点、桥、双连通分量
- **Tarjan 算法**

割点与桥

- 求割点：对于一条树边 (u, v)，u 是 v 的父亲，如果 $low[v] \geq dfn[u]$，则 u 是割点（u 不为根）。如果 u 是根，则当存在超过 1 个儿子，u 是割点。
- 求桥：对于点 v 的父亲边 (u, v)，如果 $low[v] = dfn[u]$，那么边 (u, v) 是桥。

双连通分量

- 点双连通分量（无割点）：每条边和每个非割点属于且仅属于一个点双连通分量，**割点可能属于多个点双连通分量。**
- 边双连通分量（无割边）：每个点和每条非桥边属于且仅属于一个边双连通分量，桥边不属于任何边双连通分量。

双连通分量

- 点双连通分量：如果边 (u, v) 满足 $low[v] \geq dfn[u]$，即 u 是割点，则把点从栈中取出，直到取出 v 为止，取出的点和 u 一起构成一个点双连通分量。
- 边双连通分量：删除割边（桥）后，每个连通块都是一个边双连通分量。

BZOJ 2730 [HNOI2012] 矿场搭建

煤矿工地可以看成是由隧道连接挖煤点组成的无向图。为安全起见，希望在工地发生事故时所有挖煤点的工人都能有一条出路逃到救援出口处。于是矿主决定在某些挖煤点设立救援出口，使得无论哪一个挖煤点坍塌之后，其他挖煤点的工人都有一条道路通向救援出口。请写一个程序，用来计算至少需要设置几个救援出口，以及不同最少救援出口的设置方案总数。

$m \leq 500$。

BZOJ 2730 [HNOI2012] 矿场搭建

- 如果坍塌的不是割点，那么不会造成影响，只要考虑坍塌在割点的情况。
- 删去所有割点得到若干连通块，如果图中只有一个连通块，一共只需要设两个。
- 若一个连通块可以到达两个割点的话则不用设置救援出口，否则要设置一个。
- 所有连通块的答案乘起来即可。

2-sat 问题

POJ 3678 Katu Puzzle
给定 n 个布尔变量，和 m 个逻辑运算 $(x\ or\ y, x\ and\ y, x\ xor\ y)$ 的结果，求是否存在一种可满足所有 m 个结果的赋值。
$n \le 1000, m \le 10^6$。

POJ 3678 Katu Puzzle

每个变量拆成两个点 i_0, i_1，那么所有的运算符均可表示为：如果 i 取几，那么 j 一定要取几，在 i 和 j 相应的两个点上连有向边。用 Tarjan 缩点，如果 i_0 和 i_1 在同一个强连通分量里，说明出现了矛盾，否则可行。

POJ 3207 Ikki's Story IV - Panda's Trick

给定圆周上顺序的 n 个节点和 m 对连线，曲线可以在圆周内部或外部相连，每个点最多只会连接一条边。问能不能连接这 m 条边，使这些边都不相交。
$n \leq 1000, m \leq 500$。

POJ 3207 Ikki's Story IV - Panda's Trick

每条边拆成两个点，表示在圆内连或在圆外连。
暴力枚举两条边，观察相交的情况，在 2-sat 图上连边即可。

二分图

- 二分图的判定：DFS 进行黑白染色，如果存在相邻结点染色相同，则图中存在奇环，原图不是一个二分图
- 二分图的匹配：匈牙利算法，网络流

二分图

- 最大匹配
- 最小点覆盖（用最少的点覆盖所有边）$=$ 最大匹配数
- 最大独立集（选出的所有点之间不能有边直接连接）$= n-$ 最小点覆盖 $= n-$ 最大匹配数，取点覆盖的补集即为独立集
- 最小路径覆盖（用尽量少的不相交简单路径覆盖有向无环图的所有顶点）：将每个点拆为二分图内的左、右两点，对每条边 (u, v) 从 u 的左点向 v 的右点连有向边，最小路径覆盖 $= n-$ 最大匹配数（拆点后）。

常见模型

- 二维棋盘：黑白染色，行—列
- 二维平面：x 轴—y 轴
- 奇数—偶数

BZOJ 1059 [ZJOI2007] 矩阵游戏

矩阵游戏在一个 $n \times n$ 的黑白方阵上进行。每次可以选择矩阵的任意两行，交换这两行（即交换对应格子的颜色）或选择矩阵的任意两列，交换这两列（即交换对应格子的颜色）。
游戏的目标是通过若干次操作，使得方阵的主对角线（左上角到右下角的连线）上的格子均为黑色，其余格子随意。
你要判断能不能完成目标。
$n \leq 200$。

BZOJ 1059 [ZJOI2007] 矩阵游戏

同行同列的点无论经过多少次变换仍然同行或同列，所以题目可转换为：能不能找到 n 个互相不同行同列的点。
左边是行，右边是列，如果一个点是黑色的，就从左边连向右边，求最大匹配看等不等于 n。

无题

平面上给定 n 条直线，要求选出尽可能多的直线，使得选出的直线中的任意两条直线都不相等、不平行，且交点不在 y 轴上。
$n \leq 3000$。

无题

原题等价于：同一个 k 只能选一条，同一个 b 只能选一条。
先把 k 和 b 离散化，左侧点为 k，右侧点为 b，对于直线 $y = kx + b$，左侧的 k 点向右侧的 b 点连边。求最大匹配。