复变函数与数理方程

（复变函数 下）

数学科学系
吴昊

2017年秋季学期

- 设有复数项的无穷级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k = w_0 + w_1 + \cdots + w_k + \cdots,$$

它的每一项都可分为实部和虚部，

$$w_k = u_k + iv_k.$$

上式前$n+1$项的和$\sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + i\sum_{k=0}^{n} v_k$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} w_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k + i\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} v_k.$$

这样复数项无穷级数$\sum_{k=0}^{\infty} w_k$的收敛性问题就归结为两个实数项级数$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$和$\sum_{k=0}^{\infty} v_k$的收敛性问题。

- 柯西收敛判据：复数项的无穷级数收敛的充分必要条件是，对任一给定的小正数ε，必有N存在，使得$n > N$时

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} w_k\right| < \varepsilon,$$

式中p为任意正整数。

- 如果复数项无穷级数各项的模，组成的级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} |w_k| = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{u_k^2 + v_k^2}$$

收敛，则称此级数绝对收敛。

- 注记1.1：绝对收敛的级数必收敛，且绝对收敛的级数各项先后次序可以任意改变，其和不变。

- 设有两个绝对收敛的级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k \text{ 和 } \sum_{k=0}^{\infty} q_k,$$

其和分别为A和B，将它们逐项相乘，得到的级数也是绝对收敛的，而且它的和就等于AB，即

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k \times \sum_{k=0}^{\infty} q_k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} p_k q_l = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB.$$

其中$c_n = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}$。

- 对于函数项级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k(z) = w_0(z) + w_1(z) + \cdots + w_k(z) + \cdots,$$

它的各项都是z的函数。如果在某个区域B（或某根曲线ℓ）上所有的点，级数均收敛，则称该函数项级数在B（或ℓ）上收敛。

- 根据柯西判据，函数项级数在B（或ℓ）上收敛的充分必要条件是：在B（或ℓ）上各点z，对于任意给定的$\varepsilon > 0$，存在N(z)，使得当$n > N(z)$时，

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} w_k(z)\right| < \varepsilon,$$

式中p为任意正整数。若N与z无关，则称级数在B（或ℓ）上一致收敛。

- 若在B（或ℓ）上一致收敛的级数的每一项$w_k(z)$都是B（或ℓ）上的连续函数，则级数的和$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)$也是B（或$\ell$）上的**连续函数**。而且，**级数可以沿$\ell$逐项积分**，即

$$\int_\ell w(z)dz = \int_\ell \sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\ell w_k(z)dz.$$

- 若级数$\sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)$在$\bar{B}$中一致收敛，$w_k(z)\,(k=0,1,2,\cdots)$在$\bar{B}$中单值解析，则级数的和$w(z)$也是$\bar{B}$中的**单值解析函数**，$w(z)$的各阶导数可由$\sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)$逐项求导得到，即

$$w^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^{(n)}(z)$$

且级数$\sum_{k=0}^{\infty} w_k^{(n)}(z)$在$\bar{B}$内的任意一个闭区域中一致收敛。

- 若在B（或ℓ）上所有点z，函数项级数各项的模$|w_k(z)|\le m_k$，而正的常数项级数$\sum_{k=0}^{\infty} m_k$收敛，则函数项级数在B（或ℓ）上**绝对且一致收敛**。

- 考虑一类特殊的函数项级数，其各项都是幂函数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots,$$

其中$z_0, a_0, a_1, a_2, \cdots$都是复常数。这样的级数称为以$z_0$为中心的幂级数。

- 幂级数的绝对收敛条件：考虑幂级数各项的模组成的正项级数

$$|a_0| + |a_1||z-z_0| + \cdots + |a_k||z-z_0|^k + \cdots,$$

根据比值判别法可知，若

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}||z-z_0|^{k+1}}{|a_k||z-z_0|^k} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right||z-z_0| < 1,$$

则正项级数收敛，从而幂级数绝对收敛。

- 基于上述比值判别法，引入记号

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|,$$

因此，**若$|z-z_0|<R$，则幂级数绝对收敛**；

- 另一方面，若$|z-z_0|>R$，则后项与前项的模之比的极限

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}||z-z_0|^{k+1}}{|a_k||z-z_0|^k}>\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|R=1.$$

这意味着幂级数后面项的模越来越大，这是个发散级数。因此，**当$|z-z_0|>R$时，幂级数发散**。

- 利用判断正项级数收敛性的**根值判别法**，亦有$R=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$：
    - 若$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k||z-z_0|^k}<1$，则正项级数收敛，幂级数绝对收敛；
    - 若$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k||z-z_0|^k}>1$，则正项级数发散，幂级数发散。

- 以z_0为圆心R为半径作圆C_R，根据比值判别法（或根值判别法），幂级数在圆的内部绝对收敛，在圆外发散。这个圆因而称为幂级数的收敛圆，它的半径则称为收敛半径。
- 注记1.2：在圆周上的各点，幂级数的收敛性或者发散性，需要根据具体情况加以分析探讨。
- 所谓圆的内部，指的是，比这个圆稍微小一点的闭区域，例如：以z_0为圆心$R_1 < R$为半径作圆C_{R_1}，在C_{R_1}所包围的闭区域上，幂级数各项的模$\left|a_k(z-z_0)^k\right| \le |a_k| R_1^k$。根据比值判别法，

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}| R_1^{k+1}}{|a_k| R_1^k} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| R_1 = \frac{R_1}{R} < 1,$$

可以证明正项级数$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| R_1^k$的收敛性，因此幂级数在收敛圆的内部绝对收敛。

- 事实上，上述讨论还说明了幂级数在收敛圆的内部一致收敛，进而保证它在收敛圆内部是单值解析的。

- **例1.1：** 幂级数$1+z+z^2+\cdots+z^k+\cdots$的系数$a_k=1$，因此可得收敛半径
$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=1.$$
收敛圆是以$z_0=0$为圆心以1为半径，收敛圆的内部可以表为$|z|<1$。
- **注记1.3：** 该幂级数为几何级数，公比为z，则前$n+1$项的和
$$\sum_{k=0}^{n}z^k=1+z+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$
若$|z|<1$，则有
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}z^k=\lim_{n\to\infty}\frac{1-z^{n+1}}{1-z}=\frac{1}{1-z}.$$
因此，在收敛圆内，幂级数的和为$1/(1-z)$，即
$$1+z+z^2+\cdots+z^k+\cdots=\frac{1}{1-z},\quad |z|<1.$$

- 例1.2：幂级数$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$的系数$a_k=\frac{1}{k!}$，我们有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1}=0,$$

因此收敛半径$R=+\infty$。

- 例1.3：幂级数$\sum_{k=0}^{\infty}z^k\cos ik$的系数

$$a_k=\cos ik=\frac{1}{2}(e^k+e^{-k}),$$

我们通过

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[k]{2}}{\sqrt[k]{e^k+e^{-k}}}$$

的方式估计其收敛半径。注意到$(k\to\infty)$

$$e<\sqrt[k]{e^k+e^{-k}}<\sqrt[k]{2e^k}=\sqrt[k]{2}e\xrightarrow{k\to\infty}e,$$

因此收敛半径$R=\frac{1}{e}$。

- 例1.4：对幂级数
$$1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots$$
做变换$t = z^2$，因此有$1 - t + t^2 - t^3 + \cdots$，系数交替为$\pm 1$。则可得收敛半径$R = 1$。这样，在$z$平面上其收敛半径为$\sqrt{R}$也是1。收敛圆的内部可以表为$|z| < 1$。

- 注记1.4：在收敛圆的内部$|z| < 1$，幂级数的和
$$1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots = \frac{1}{1 + z^2}.$$
上述幂级数和具有孤立奇点$\pm i$，且刚好在收敛圆周$|z| = 1$上。如果限制在实数域内，则有
$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1 + x^2},$$
而$|x| = 1$，即$x = \pm 1$并不是$\frac{1}{1+x^2}$的奇点，收敛性条件$|x| < 1$就没有那么自然了。

- **定理1.1**：关于幂级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k,$$

其收敛半径为R，我们有如下结论：

1. 幂级数f(z)在收敛圆的内部($|z-z_0|<R$)**单值解析**；
2. 幂级数f(z)在收敛圆的内部**可逐项积分**；
3. 幂级数f(z)在收敛圆的内部**可逐项微分**；
4. 逐项积分和逐项微分不改变收敛半径。

- **注记1.5**：关于幂级数可逐项积分或微分的性质，需要利用柯西积分公式及相关性质。具体细节可参考梁昆淼《数学物理方法》（第四版）P36-37。

- 例1.5：考虑幂级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k,$$

其收敛半径为R_f，对其逐项求导，则有

$$f'(z)=\sum_{k=1}^{\infty}ka_k(z-z_0)^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}(z-z_0)^k.$$

根据比值判别法

$$\begin{aligned}R_{f'} &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)a_{k+1}}{(k+2)a_{k+2}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k+1}{k+2}\right|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}\right|\\ &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}\right|=R_f.\end{aligned}$$

- 刚才讨论的是幂级数在收敛圆内部的解析性，现在着重研究解析函数的幂级数展开问题。
- 对于实变函数来说，如果其任意阶导数存在，则可展开成为泰勒级数。对于解析函数来说，其任意阶导数亦存在，因此我们期望将其展开为复变项的泰勒级数。
- 定理1.2：设$f(z)$在以z_0为圆心的圆C_R内解析，则对圆内的任意z点，$f(z)$可展为幂级数，

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k,$$

其中

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta=\frac{1}{k!}f^{(k)}(z_0),$$

C_{R_1}为圆C_R内包含z且与C_R同心的圆。

- **证明（定理1.2）：** 根据柯西积分公式，我们有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

为得到定理要求的形式，我们将$1/(\zeta - z)$展为幂级数，即

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

$$= \frac{1}{\zeta - z_0}\cdot\left(1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^2 + \cdots\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}.$$

注意这里$\left|(z - z_0)/(\zeta - z_0)\right| < 1$。将幂级数代入到柯西积分公式，并逐项积分，（根据第2章推论3.1）有

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(z - z_0)^k\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k.$$

从而证明复变函数的泰勒展开定理。

- 前面给出了泰勒展开的**构造性证明**，下面证明该展开的**唯一性**。
- 若泰勒展开的系数a_k不唯一，则有

$$\begin{aligned}&a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots\\&\qquad=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots.\end{aligned}$$

  在上式中令$z=z_0$，则有$a_0=f(z_0)$；对上式求导，再令$z=z_0$，可得$a_1=f'(z_0)$；更一般的，我们求导k次并令$z=z_0$，得到

$$a_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!},$$

  从而给出了泰勒展开的唯一性。

- **定理1.3：** f(z)在区域B内解析的**充要条件**为：f(z)在B内任一点z_0的邻域内可展成$z-z_0$的幂级数，即泰勒级数。
- **注记1.6：** 定理1.2说明解析函数可以展成泰勒级数的形式（必要条件），而定理1.1（结合适当的讨论）则可导出充分条件。基于定理1.3，解析函数和泰勒级数联系起来了。我们可以**通过泰勒级数来研究解析函数**。

- **例1.6：** 考虑函数e^z和$\sin z$在$z_0=0$的泰勒展开式。
- **解：** （1）函数$f(z)=e^z$的导数为$f^{(k)}(z)=e^z$，其在z_0的值为$f^{(k)}(z_0)=1$，因此有

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}.$$

根据例1.2，其收敛半径$R=+\infty$；

- （2）函数$f(z)=\sin z$的导数为

$$\begin{aligned} f^{(4k)}(z)&=\sin z, \quad f^{(4k+1)}(z)=\cos z,\\ f^{(4k+2)}(z)&=-\sin z, \quad f^{(4k+3)}(z)=-\cos z. \end{aligned}$$

相应得到其在z_0的值

$$f^{(2k)}(z_0)=0, \quad f^{(2k+1)}(z_0)=(-1)^k.$$

因此有

$$\sin z=\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots.$$

容易证明，该幂级数的收敛半径$R=+\infty$。

- **例1.7：** 考虑函数$f(z)=e^z\sin z$在$z_0=0$的泰勒展开式。
- **解：** 我们有

$$
\begin{aligned}
f(z) &= e^z\sin z = e^z\cdot\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(e^{(1+i)z}-e^{(1-i)z}\right)=\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+i)^k-(1-i)^k}{k!}z^k\\
&= \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}\right)-\left(\cos\frac{-k\pi}{4}+i\sin\frac{-k\pi}{4}\right)}{k!}2^{k/2}z^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k/2}\sin\frac{k\pi}{4}}{k!}z^k.
\end{aligned}
$$

该幂级数的收敛半径$R=+\infty$。

- 例1.8：考虑函数$f(z)=\frac{e^z}{1-z}$在$z_0=0$的泰勒展开式。
- 解：我们有

$$f(z)=\frac{e^z}{1-z}=\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots\right)\left(1+z+z^2+\cdots\right)$$

$$=1+\left(1+\frac{1}{1!}\right)z+\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)z^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k'=0}^{k}\frac{1}{k'!}z^k.$$

该幂级数的收敛半径$R=1$。

- 例1.9：考虑函数$\frac{1}{1+z}$和$\frac{1}{(1+z)^2}$在$z_0=0$的泰勒展开式。
- 解：（1）我们有

$$f_1(z)=\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k.$$

该幂级数的收敛半径$R=1$；（2）对函数$f_2(z)$，我们有

$$f_2(z)=\frac{1}{(1+z)^2}=-f_1'(z)=-\sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^k z^k\right)'=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}kz^{k-1}.$$

该幂级数的收敛半径$R=1$。

- 例1.10：考虑函数$f(z)=\ln z$在$z_0=1$的泰勒展开式。
- 解：多值函数$f(z)=\ln z$的支点为$z=0,\infty$。而$z_0=1$非支点，在它的邻域上，各个单值分支相互独立，各自是一个单值函数，因此可以作展开。计算其导数及相应的值：

$$
\begin{aligned}
& f(z)=\ln z, \quad f(1)=\ln 1=2\pi n i, \quad n\text{为整数}, \\
& f^{(1)}(z)=\frac{1}{z}, \quad f^{(1)}(1)=1, \\
& \cdots \quad \cdots \\
& f^{(k)}(z)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{z^k}, \quad f^{(k)}(1)=(-1)^{k-1}(k-1)!.
\end{aligned}
$$

因此有

$$
\begin{aligned}
\ln z &= \ln 1+\frac{1}{1!}(z-1)-\frac{1!}{2!}(z-1)^2+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}(z-1)^k+\cdots \\
&= 2\pi n i+(z-1)-\frac{1}{2}(z-1)^2+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}(z-1)^k+\cdots.
\end{aligned}
$$

该幂级数收敛半径$R=1$，且$n=0$的单值分支称为$\ln z$的主值。

- **例1.11：** 考虑函数$f(z)=(1+z)^m$在$z_0=0$的泰勒展开式。
- **解：** 先计算其导数及相应的值：

$$f(z)=(1+z)^m,\quad f(0)=1^m,$$
$$f^{(1)}(z)=m(1+z)^{m-1},\quad f^{(1)}(0)=m1^{m-1}=m1^m,$$
$$\cdots\quad\cdots$$
$$f^{(k)}(z)=\prod_{\ell=0}^{k-1}(m-\ell)(1+z)^{m-k},\quad f^{(k)}(0)=\prod_{\ell=0}^{k-1}(m-\ell)1^m.$$

因此有

$$(1+z)^m=1^m+\frac{m}{1!}1^m z+\cdots+\frac{\prod_{\ell=0}^{k-1}(m-\ell)}{k!}1^m z^k+\cdots$$
$$=1^m\left(1+\frac{m}{1!}z+\cdots+\frac{\prod_{\ell=0}^{k-1}(m-\ell)}{k!}z^k+\cdots\right).$$

该幂级数收敛半径$R=1$。式中$1^m=e^{2\pi mni}$（n为整数），且$n=0$的单值分支称为$(1+z)^m$的主值。这也是**指数为非整数的二项式定理**。

- 对于前述例题中的泰勒展开式，若**收敛半径$R \neq +\infty$时，会出现有意思的现象**，例如（例1.4）：

$$1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots = \frac{1}{1+z^2}, \quad (|z| < 1),$$

等式在$|z| < 1$时成立。等式左边是幂级数，它在单位圆$|z| = 1$内收敛，其和是解析函数；但如果超出单位圆，则级数发散无意义。等式右边是$1/(1+z^2)$，它在除$z = \pm i$的全平面上是解析函数。

- 因此，我们有两个函数

$$\begin{aligned} f_1(z) &= 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots, \quad |z| < 1 \\ f_2(z) &= 1/(1+z^2), \quad z \neq \pm i. \end{aligned}$$

函数$f_1(z)$在较小区域上解析，而$f_2(z)$在较大区域上解析，并且两者在较小区域上相同。

- 问题：已知某个区域D_1上的解析函数$f_1(z)$，能否找出定义在区域D_2上的函数$f_2(z)$，满足$D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$，且其交集部分满足一定要求，并满足
$$f_1(z) = f_2(z), \quad \forall z \in D_1 \cap D_2.$$
这个问题叫做解析延拓。

- 解析延拓就是扩大解析函数的定义域。解析延拓的方法有很多种，最简单粗暴的方法是利用泰勒级数收敛圆逐步扩大。

- 定理1.4：设$f(z)$, $g(z)$都是区域Ω上的解析函数。如果存在Ω中点列$\{z_n\}$使得$f(z_n) = g(z_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$，并且集合$\{z_n\}$有极限点$z_0 \in \Omega$，则在Ω上$f(z) \equiv g(z)$。

- 注记1.7：上述定理利用了解析函数零点孤立性。它也保证了解析延拓的唯一性。

- 受课时限制，我们无法对本节中涉及到的一部分内容做深入展开，例如：
  1. 级数的各种判别法、二重级数的讨论、函数级数的严格结果；
  2. 级数的收敛速度（特别是交错级数）和Euler求和公式，发散级数和渐近级数的知识；
  3. Riemann-zeta函数$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$的相关讨论[1]；
  4. 解析函数的零点，零点的孤立性和唯一性。
- 略过上述内容并不会对我们后续的学习产生太大影响，感兴趣的同学可以参考吴崇试的《数学物理方法》、梁昆淼的《数学物理方法》、方企勤的《复变函数教程》或者是于慎根等的《复变函数与积分变换》。

[1]该函数在解析数论中有重要应用，也和千禧年大奖难题(Millennium Prize Problems)之一的黎曼猜想密切相关。

- 当函数在所研究区域上存在奇点时，就不能再作泰勒级数展开，而需要考虑除去奇点的环域上的展开，即**洛朗级数**。
- 首先考虑含有正、负项的幂级数，即双边幂级数

$$\cdots + a_{-2}(z-z_0)^{-2} + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

设上式正幂部分的收敛半径为R_1，即正幂部分在$|z-z_0| < R_1$收敛。再引入变量$\zeta = \frac{1}{z-z_0}$，则负幂部分为

$$a_{-1}\zeta + a_{-2}\zeta^2 + a_{-3}\zeta^3 + \cdots .$$

设该幂级数的收敛半径为$\frac{1}{R_2}$，则负幂部分在$|z-z_0| > R_2$收敛。

  - 若$R_2 < R_1$，则**双边幂级数在环域$R_2 < |z-z_0| < R_1$内绝对且一致收敛，其和为解析函数**，级数可逐项求导。环域$R_2 < |z-z_0| < R_1$称为级数的**收敛环**。
  - 若$R_2 > R_1$，则级数处处发散。

- **定理2.1：** 设$f(z)$在环形区域$R_2 < |z - z_0| < R_1$内部单值解析，则对环域上任一点z，$f(z)$可展为双边幂级数

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

其中

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta,$$

这里ℓ是环域内的绕内圆一周的任意闭合曲线。

- **证明：** 为避免涉及在圆周上函数的解析性及收敛性问题，我们将外圆稍微缩小为C'_{R_1}，内圆稍微扩大为C'_{R_2}。根据复连通区域上的柯西积分公式，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'_{R_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

- **证明（续）：** 问题的关键是在C'_{R_1}和C'_{R_2}上将$\frac{1}{\zeta-z}$分别展为幂级数。

在C'_{R_1}上，由于$|z-z_0|<|\zeta-z_0|$，因此有

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$$
$$=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\left(1+\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^2+\cdots\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}}.$$

在C'_{R_2}上，由于$|z-z_0|>|\zeta-z_0|$，我们有

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=-\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}$$
$$=-\frac{1}{z-z_0}\left(1+\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}+\frac{(\zeta-z_0)^2}{(z-z_0)^2}+\cdots\right)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}.$$

- **证明（续）：** 将上页的两个展开形式代入柯西积分公式，则有

$$
\begin{aligned}
& f(z) \\
=& \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k \oint_{C'_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^{-k-1}\oint_{C'_{R_2}}(\zeta-z_0)^k f(\zeta)d\zeta \\
=& \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k \oint_{\ell} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{-1}(z-z_0)^k \oint_{\ell} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta \\
&\qquad\qquad = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k,
\end{aligned}
$$

其中

$$
a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\ell} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta.
$$

上面推导中，第二个等号利用了复连通区域上的柯西定理，以及对求和k进行重排($k' = -k-1$)。

- 该定理中

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k.$$

称为$f(z)$的**洛朗展开**，右端的级数称为**洛朗级数**。

- **注记2.1：** 关于洛朗级数，有如下几点说明：
  1. 尽管上述级数中含有$z-z_0$的负幂项，这些项在$z=z_0$时都是奇异的，但点z_0**可能是也可能不是函数$f(z)$的奇点**。
  2. 展开系数a_k的公式与泰勒级数的公式**形式相同，但本质不同**，因为泰勒级数要求在圆内解析，而洛朗级数不要求[2]。
  3. 如果只有环心z_0是$f(z)$的奇点，则内圆半径可以任意小，同时z可以无限地接近z_0点。这时称上式为$f(z)$在它的孤立奇点z_0的邻域内的洛朗展开式。
  4. 类似于泰勒展开，**洛朗展开也是唯一的**（证明略）。

[2]圆内有奇点时有$a_k\neq f^{(k)}(z_0)/k!$，没有奇点时洛朗级数转化为泰勒级数。

- **例2.1：** 求函数$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$在下列各圆环内的洛朗展开式。

$$(1)\ 1<|z|<2,\quad (2)\ 0<|z-1|<1,$$
$$(3)\ 1<|z-1|<+\infty,\quad (4)\ 1<|z-2|<+\infty,$$

- **解：**（1）在$1<|z|<2$内，有

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{-1}{2(1-\frac{z}{2})}-\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}$$
$$=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^{k+1}}-\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k-1}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^{k+1}}-\sum_{k=1}^{\infty}z^{-k}.$$

注意，$z_0=0$并非$f(z)$的奇点，但展开式中确实含有z^{-k}次项。

- （2）在$0<|z-1|<1$内，有

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-1)-1}-\frac{1}{z-1}$$
$$=\frac{-1}{1-(z-1)}-\frac{1}{z-1}=-\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^k-\frac{1}{z-1}.$$

- **解（续）：** （3）在$1<|z-1|<+\infty$内，有

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-1)-1}-\frac{1}{z-1}$$
$$=\frac{1}{(z-1)(1-\frac{1}{z-1})}-\frac{1}{z-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{k+1}}-\frac{1}{z-1}$$
$$=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{k}}.$$

- （4）在$1<|z-2|<+\infty$内，有

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{(z-2)+1}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{(z-2)(1-\frac{-1}{z-2})}$$
$$=\frac{1}{z-2}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(z-2)^{k+1}}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(z-2)^{k}}.$$

- **定义2.1：** 若函数$f(z)$在某点z_0不可导（不连续、无法定义），而在z_0的任意小邻域内除z_0外处处可导。便称z_0为$f(z)$的**孤立奇点**。若在z_0的无论多小的邻域内总可以找到除z_0以外的不可导点（不连续、无法定义），便称z_0为$f(z)$的**非孤立奇点**。

- 在挖去孤立奇点z_0而形成的环域$(0 < |z - z_0| < R)$上的解析函数$f(z)$可展为洛朗级数

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

  其中洛朗级数的正幂部分称为**解析部分**，负幂部分称为**主要部分**或**无限部分**。

- **定义2.2：** 对于负幂项，它有三种情况：（1）没有负幂项；（2）有限个负幂项；（3）无限个负幂项。在这三种情况下，分别将z_0称为函数$f(z)$的**可去奇点、极点及本性奇点**。

- 例2.2：在$z_0=0$的邻域上将$(\sin z)/z$展开。
- 解：函数$(\sin z)/z$在原点没有定义，$z_0=0$是奇点。根据例1.6，我们有

$$\sin z=\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots\ (0<|z|<+\infty)$$

为避开奇点，在复平面上挖去原点，再用z除$\sin z$的展开式，则有

$$\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\cdots\ (0<|z|<+\infty).$$

- 注记2.2：定义函数

$$f(z)=\begin{cases}(\sin z)/z, & z\neq 0,\\ \lim_{z\to 0}(\sin z)/z=1, & z=0,\end{cases}$$

则$f(z)$**在整个开平面上是解析的**，且直接给出$f(z)$在$z_0=0$邻域上的展开式

$$f(z)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\cdots\ (|z|<+\infty).$$

- 在例2.2中，$z_0 = 0$是函数$f(z) = (\sin z)/z$的可去奇点。
- 一般的，若z_0是$f(z)$的可去奇点，则$f(z)$在圆环$0 < |z - z_0| < R$内的洛朗展开为

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots, \quad (0 < |z - z_0| < R)$$

则$\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0$是有限的，函数在可去奇点的邻域上有界。

- 如果定义函数$g(z)$以代替$f(z)$

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq z_0, \\ a_0, & z = z_0. \end{cases}$$

因此有$g(z)$在z_0邻域上的泰勒展开

$$g(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots, \quad (|z - z_0| < R).$$

易见z_0不再是函数$g(z)$的奇点。这正是可去奇点一词的来历。因此，可去奇点今后将不作为奇点看待。

- 根据例2.1（2），函数$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$在圆环$0<|z-1|<1$内的洛朗展开为
$$f(z)=-\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^k-\frac{1}{z-1}.$$
只有一个负幂项。因此$z_0=1$是函数$f(z)$的极点。

- 一般的，若z_0是函数$f(z)$的极点，则在圆环$0<|z-z_0|<R$内的洛朗展开为
$$f(z)=\sum_{k=-n}^{\infty}a_k(z-z_0)^k,\ a_{-n}\neq 0 \quad (0<|z-z_0|<R).$$
因此称n为极点z_0的**阶**，一阶极点也称为**单极点**。

- **注记2.3：**根据洛朗展开，如果z_0是函数$f(z)$的极点，则显然有
$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty.$$

- 若z_0是$f(z)$的**本性奇点**，则在圆环$0<|z-z_0|<R$内的洛朗展开为

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k,\quad (0<|z-z_0|<R).$$

其中对任意的$N\in\mathbb{N}$，存在$k>N$使得$a_{-k}\neq 0$。

- $z_0=0$是$f(z)=e^{1/z}$的本性奇点，它在$|z-z_0|>0$内的洛朗展开为

$$e^{1/z}=1+\frac{1}{1!}\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\cdots=\sum_{k=-\infty}^{0}\frac{1}{(-k)!}z^k,\quad (|z|>0).$$

有无限多个负幂项。

- 令$z\to z_0$，$f(z)=e^{1/z}$的**极限随z趋于z_0的方式而定**:
  1. 当z沿正实轴趋于$z_0=0$时，$f(z)\to\infty$;
  2. 当z沿负实轴趋于$z_0=0$时，$f(z)\to 0$;
  3. 当z按$i/2\pi n\ (n=1,2,\cdots)$时，$f(z)\to 1$。

- 之前关于孤立奇点的讨论都是针对有限远点，**现在讨论无限远点为孤立奇点的情况**。

- 如果函数$f(z)$在无限远点的邻域$\infty > |z| > R$上是解析的，则可在外半径为∞的圆环域$R < |z| < \infty$（R是某个有限数值）上展为洛朗级数

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \quad (R < |z| < \infty).$$

该洛朗级数的负幂部分称为**解析部分**，正幂部分称为**主要部分**或**无限部分**。

- 如果该洛朗级数没有正幂项，无限远点称为$f(z)$的**可去奇点**；如果只有有限个正幂项，则称为**极点**，最高幂指数称为极点的**阶**；如果有无限个正幂项，则称为**本性奇点**。

- **注记2.4**：事实上，只要作变换$\zeta = 1/z$，将$z = \infty$变换为$\zeta = 0$，从ζ平面的原点来看，这些定义就都是显然的了。

- 在给数学系学生讲课时，我们还会对孤立奇点做进一步的讨论，例如：
  1. 关于本性奇点的等价性条件、Weierstrass定理和Picard大定理；
  2. 整函数（函数在$\mathbb{C}$上解析）和亚纯函数（对于扩充复平面上的区域Ω，若函数在Ω内除了可能有极点外处处解析），及其相关性质。
- 另外，多值函数还有一种奇点，即支点（第2章第2.3节），关于其性质，我们也没有作进一步的讨论。
- 略过上述内容并不会对我们后续的学习产生太大影响，感兴趣的同学可以参考吴崇试的《数学物理方法》、方企勤的《复变函数教程》、谭小江等的《复变函数简明教程》或者是梁昆淼的《数学物理方法》。

- **定义3.1：** 若z_0是$f(z)$的孤立奇点，即存在$R>0$使$f(z)$在圆环$0<|z-z_0|<R$内解析，其洛朗展开为

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k.$$

其中项$(z-z_0)^{-1}$的系数

$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r} f(z)dz,\quad 0<r<R.$$

称为$f(z)$在点z_0的**留数**（或**残数**、英**residue**），记为$\mathrm{Res}\, f(z_0)$。

- **例3.1：** 函数$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$在圆环$0<|z-1|<1$内的洛朗展开为

$$f(z)=-\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^n-\frac{1}{z-1}.$$

因此$z_0=1$为孤立奇点，且$\mathrm{Res}\, f(z_0)=-1$。

- **例3.2：** 若z_0是$f(z)$的可去奇点，则显然有$\mathrm{Res}\, f(z_0)=0$。

- 柯西定理指出，如果函数在回路ℓ所围区域上是解析的，则回路积分$\oint_\ell f(z)dz = 0$。**现考虑回路ℓ包围$f(z)$的奇点的情况**。
- 先**设ℓ只包围$f(z)$的一个孤立奇点z_0**。在以z_0为圆心而内半径为零的圆环上将$f(z)$展为洛朗级数

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

- 在洛朗级数的收敛环中任取一个紧紧包围z_0的小回路ℓ_0，根据柯西定理，有

$$\oint_\ell f(z)dz = \oint_{\ell_0} f(z)dz.$$

- 将洛朗展开代入上式右端，并积分，可得

$$\oint_\ell f(z)dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \oint_{\ell_0} (z - z_0)^k dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i \mathrm{Res}\, f(z_0).$$

- 若ℓ包围着$f(z)$的n个孤立奇点$z_1, z_2, \cdots, z_n$，做回路$\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$分别包围这些孤立奇点（每个回路只包围一个奇点），根据柯西定理有

$$\oint_{\ell} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\ell_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\, f(z_k).$$

- 定理3.1（留数定理）：设函数$f(z)$在回路ℓ所围区域B上除有限个孤立奇点$z_1, z_2, \cdots, z_n$外解析，在闭区域$\bar{B}$上除$z_1, z_2, \cdots, z_n$外连续，则

$$\oint_{\ell} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\, f(z_k).$$

- 注记3.1：留数定理指出了被积函数的回路积分等于该函数所围奇点留数之和。因此，积分问题可以转换为留数求解问题。

- 注记3.2：一般的，对函数在奇点附近做洛朗展开，即可得到留数，但这样做工作量太大，需要考虑不作洛朗展开直接算出留数的方法。

- 考虑z_0是$f(z)$单极点的情况，则洛朗展开为

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots,$$

左右两边同乘以$z - z_0$，则有

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \cdots,$$

对上式取极限（极限是一个非零有限值）得到

$$\lim_{z\to z_0} ((z - z_0)f(z)) = a_{-1} = \mathrm{Res}\, f(z_0).$$

上式**既可以判断z_0是否是$f(z)$的单极点，又可作为计算$f(z)$在单极点z_0的留数的公式**。

- **定理3.2：** 若$f(z)$可以表为$P(z)/Q(z)$的形式，且$P(z)$和$Q(z)$都在z_0点解析，z_0是$Q(z)$的一阶零点，$P(z_0) \neq 0$，从而z_0是$f(z)$的单极点，且

$$\mathrm{Res}\, f(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{(z - z_0)P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

上式最后一步应用了洛必达法则。

- **定义3.2**：对于函数f(z)和点z_0，若

$$f(z_0)=0,\ f^{(1)}(z_0)=0,\ \cdots,f^{(n-1)}(z_0)=0,\ f^{(n)}(z_0)\neq 0.$$

则称点z_0为f(z)的**n阶零点**[3]。

- **注记3.3**：如果z_0是f(z)的n阶零点，当且仅当f(z)可展成泰勒级数

$$f(z)=a_n(z-z_0)^n+a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\cdots,\quad (a_n\neq 0).$$

或

$$f(z)=(z-z_0)^n\tilde{f}(z),\quad \tilde{f}(z_0)\neq 0.$$

事实上，定理3.2和定理3.4中判断极点及极点的阶的问题，本质上是判断零点和零点的阶的问题。

- **例3.3**：$f(z)=\frac{1}{z^n-1}=\frac{1}{(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+1)}$，则$z_0=1$是其单极点且

$$\mathrm{Res}\, f(z_0)=\lim_{z\to z_0}((z-z_0)f(z))=\lim_{z\to 1}\frac{1}{z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+1}=\frac{1}{n}.$$

[3] n一般为正整数；当$n=0$时，z_0不是f(z)的零点。

- **例3.4：** $f(z)=\tan\pi z=\frac{\sin\pi z}{\cos\pi z}$，根据$\cos\pi z=0$得到其极点为$z_0=n+\frac{1}{2}$，$(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$。根据定义

$$\cos\pi z|_{z=z_0}=0,\qquad \frac{d}{dz}\cos\pi z\Big|_{z=z_0}\neq 0,$$

因此z_0是$\cos\pi z$的一阶零点，从而是$f(z)$的单极点。我们有

$$\operatorname{Res}f(z_0)=\frac{\sin(\pi z)}{\frac{d}{dz}\cos(\pi z)}\Bigg|_{z=z_0}=-\frac{1}{\pi}.$$

- **注记3.4：** 我们也可以通过泰勒展开

$$\cos\pi z=\cos(\pi(z-z_0)+(n+\frac{1}{2})\pi)=(-1)^{n+1}\sin(\pi(z-z_0))$$
$$=(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi(z-z_0)}{1!}-\frac{(\pi(z-z_0))^3}{3!}+\frac{(\pi(z-z_0))^5}{5!}+\cdots\right),$$

得到z_0是$\cos\pi z$的一阶零点的结论。

- 若z_0是$f(z)$的n阶极点，则洛朗展开为

$$f(z)=\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots,$$

左右两边同乘以$(z-z_0)^n$，则有

$$(z-z_0)^n f(z)=a_{-n}+a_{-n+1}(z-z_0)+\cdots+a_{-1}(z-z_0)^{n-1}+\cdots,$$

对上式取极限（极限是一个非零有限值）得到

$$\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^n f(z)\right)=a_{-n}\neq \operatorname{Res} f(z_0).$$

上式可以检验z_0是否是$f(z)$的n阶极点，但其非零有限值并非$f(z)$在z_0的留数。

- **定理3.3：** 我们可以通过对$(z-z_0)^n f(z)$求$n-1$次导数，得到a_{-1}（即n阶极点的留数）

$$\operatorname{Res} f(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-z_0)^n f(z)\right)\right).$$

- 例3.5：函数

$$f(z) = \frac{z+2i}{z^5+4z^3} = \frac{z+2i}{z^3(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{z^3(z-2i)},$$

可知$z_1 = 2i$是$f(z)$的单极点，且有（定理3.2）

$$\operatorname{Res} f(z_1) = \left.\frac{1}{\frac{d}{dz}\left(z^3(z-2i)\right)}\right|_{z=z_1} = \frac{i}{8}.$$

$z_2 = 0$是$f(z)$的三阶极点，且有（定理3.3）

$$\operatorname{Res} f(z_2) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2}{dz^2}\left(z^3 f(z)\right)\right) = -\frac{i}{8}.$$

- **定理3.4：** 若$f(z)$可以表为$P(z)/Q(z)$的形式，且$P(z)$和$Q(z)$都在z_0点解析，z_0是$P(z)$的n阶零点，又是$Q(z)$的$n+1$阶零点，则

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{(n+1)P^{(n)}(z_0)}{Q^{(n+1)}(z_0)}.$$

- **证明：** 显然z_0是$f(z)$的单极点，根据定理3.2，则有

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)P(z)}{Q(z)}.$$

反复对上式利用洛必达法则，则有

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res} f(z_0) &= \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)P(z)}{Q(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)P^{(1)}(z)+P(z)}{Q^{(1)}(z)} \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)P^{(2)}(z)+2P^{(1)}(z)}{Q^{(2)}(z)} = \cdots \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)P^{(n+1)}(z)+(n+1)P^{(n)}(z)}{Q^{(n+1)}(z)} = \frac{(n+1)P^{(n)}(z_0)}{Q^{(n+1)}(z_0)}. \quad \square
\end{aligned}$$

- **例3.6：** 函数$f(z)=\frac{z\sin z}{(1-e^z)^3}$，求其孤立奇点的留数值。
- **解：** 易见$z_0=0$是$f(z)$的孤立奇点，函数$z\sin z$在z_0附近解析，有泰勒展开

$$z\sin z=\frac{z^2}{1!}-\frac{z^4}{3!}+\frac{z^6}{5!}+\cdots=z^2-\frac{1}{6}z^4+\cdots,$$

因此z_0是其二阶零点。函数$(1-e^z)^3$在z_0附近解析，有泰勒展开

$$(1-e^z)^3=-(\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots)^3=-z^3-\frac{3}{2}z^4+\cdots,$$

因此z_0是其三阶零点。由此可知z_0是$f(z)$的单极点，且有

$$\operatorname{Res} f(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)z\sin z}{(1-e^z)^3}=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)z^2+o((z-z_0)^2)}{-z^3+o((z-z_0)^3)}=-1.$$

- **注记3.5：** 利用定理3.4，则有

$$\operatorname{Res} f(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{3(z\sin z)''}{((1-e^z)^3)'''}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{3(2\cos z-z\sin z)}{-6e^{3z}+18(1-e^z)e^{2z}-3(1-e^z)^2e^z}=-1.$$

- 例3.7：根据例3.4，可知对$f(z)=\tan\pi z$有

$$\oint_{|z|=n} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k\in\{k:\left|k+\frac{1}{2}\right|<n\}} \mathrm{Res}\, f(k+\frac{1}{2}) = 2\pi i \times \frac{2n}{-\pi} = -4ni.$$

- 根据例3.5，可知对$f(z)=\frac{z+2i}{z^5+4z^3}$有

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=1} f(z)dz &= 2\pi i \mathrm{Res}\, f(0) = \frac{\pi}{4}, \\ \oint_{|z|=3} f(z)dz &= 2\pi i \left(\mathrm{Res}\, f(0) + \mathrm{Res}\, f(2i)\right) = 0.\end{aligned}$$

- 根据例3.6，可知对$f(z)=\frac{z\sin z}{(1-e^z)^3}$有

$$\oint_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}\, f(0) = -2\pi i.$$

- **定义3.3：** 若∞是$f(z)$的孤立奇点，即存在$R>0$使$f(z)$在圆环$R<|z-z_0|<+\infty$内解析，其洛朗展开为

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_kz^k.$$

其中项z^{-1}系数的相反数

$$-a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}f(z)dz,\quad R<r<+\infty.$$

称为$f(z)$在∞点的**留数**，记为$\operatorname{Res} f(\infty)$。

- **注记3.6：** 这里按顺时针方向积分，这个方向自然看作是绕点∞的正方向。

- **注记3.7：** 若**点∞是$f(z)$的可去奇点（或解析点），$\operatorname{Res} f(\infty)$也可以不是零**。例如$z=\infty$是$f(z)=z^{-1}$的可去奇点，但

$$\operatorname{Res} f(\infty)=-1.$$

- **定理3.5：** 若$f(z)$在扩充复平面上只有有限个孤立奇点（包括点∞在内），设为$z_1, z_2, \cdots, z_n, \infty$，则$f(z)$在各点的留数之和为0。
- **证明：** 以$z=0$为圆心，并取半径r满足

$$r > \max\{|z_1|, |z_2|, \cdots, |z_n|\}.$$

根据留数定理，我们有

$$\oint_{|z|=r} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k),$$

这里的积分方向为逆时针方向。根据定义3.3，可知

$$\oint_{|z|=r} f(z)dz = -\oint_{|z|=r} f(z)dz = -2\pi i \operatorname{Res} f(\infty).$$

将两式相加，即得

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k) + \operatorname{Res} f(\infty) = 0. \quad \square$$

- 例3.8：求函数$f(z)=\frac{z^7}{(z^2-1)^3(z^2+2)}$在各有限孤立奇点的留数和。
- 解：$f(z)$的有限孤立奇点是± 1和$\pm\sqrt{2}i$，直接计算每点的留数后相加较麻烦，我们可以利用定理3.5求解。事实上，我们有

$$f(z)=\frac{z^7}{(z^2-1)^3(z^2+2)}=\frac{z^7}{z^6(1-z^{-2})^3z^2(1+2z^{-2})}$$
$$=z^{-1}\left(1-z^{-2}\right)^{-3}\left(1+2z^{-2}\right)^{-1}=z^{-1}\left(1+3z^{-2}+\cdots\right)\left(1-2z^{-2}+\cdots\right)$$
$$=z^{-1}+z^{-3}+\cdots.$$

因此得到$\operatorname{Res} f(\infty)=-1$，即$f(z)$在孤立奇点$\pm 1,\pm\sqrt{2}i$的留数和为1。

- 注记3.8：根据以上结论，容易计算$f(z)$在沿$|z|=2$的积分，即

$$\oint_{|z|=2} f(z)dz=-2\pi i\operatorname{Res} f(\infty)=-2\pi i\times(-1)=2\pi i.$$

- 留数定理一个重要应用就是计算某些实变函数的定积分。因此，需要将实变函数定积分和复变函数定积分联系起来。
- 类型一： $I=\int_0^{2\pi}R(\cos x,\sin x)dx$，被积函数是三角函数的有理式，积分区间是$[0,2\pi]$。
- 解决该类型积分的思路是利用变量替换，即$z=e^{ix}$，因此

$$\cos x=\frac{1}{2}(z+z^{-1}),\quad \sin x=\frac{1}{2i}(z-z^{-1}),\quad dx=\frac{1}{iz}dz.$$

积分轨迹变成了绕单位圆逆时针一周，即

$$I=\oint_{|z|=1}R\left(\frac{1}{2}(z+z^{-1}),\frac{1}{2i}(z-z^{-1})\right)\frac{dz}{iz}.$$

- 例3.9：计算$I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}\ (0<\varepsilon<1)$.
- 解：根据变量替换原则，我们有

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{1+\frac{1}{2}\varepsilon(z+z^{-1})}=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}.$$

函数$f(z)=\frac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}$有两个单极点$z=\frac{-1\pm\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$，而只有

$$z_0=\frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

在单位圆内。因此，

$$I=4\pi\operatorname{Res}f(z_0)=\left.\frac{4\pi}{\frac{d}{dz}(\varepsilon z^2+2z+\varepsilon)}\right|_{z=z_0}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

- **例3.10：** 计算$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2\varepsilon\cos x+\varepsilon^2}$ $(0 < \varepsilon < 1)$.
- **解：** 根据变量替换原则，我们有

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{dz/iz}{1-\varepsilon(z+z^{-1})+\varepsilon^2} = i\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(\varepsilon z-1)(z-\varepsilon)}.$$

函数$f(z) = \frac{1}{(\varepsilon z-1)(z-\varepsilon)}$有两个单极点$z_1 = 1/\varepsilon$和$z_2 = \varepsilon$，而只有$z_2 = \varepsilon$在单位圆内。因此，

$$I = -2\pi \mathrm{Res}\, f(z_2) = \left.\frac{-2\pi}{\frac{d}{dz}\left((\varepsilon z-1)(z-\varepsilon)\right)}\right|_{z=z_2} = \frac{2\pi}{1-\varepsilon^2}.$$

- 类型二：$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$，积分区间是$(-\infty,+\infty)$；复变函数$f(z)$在实轴上没有奇点，在上半平面除有限个奇点外是解析的；当z在上半平面及实轴上$\to\infty$时，$zf(z)$一致的$\to 0$。
- 该积分通常理解为下列极限

$$\lim_{R_1\to\infty,\,R_2\to\infty}\int_{-R_1}^{R_2} f(x)dx.$$

若极限存在的话，这一极限便称为反常积分$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$的值。而当$R_1=R_2\to\infty$时极限存在的话，该极限便称为积分$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$的**主值**，记为

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx.$$

- 本类型积分要计算的就是积分主值。

- 考虑半圆形回路ℓ

$$\oint_{\ell} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz.$$

这里C_R为以零点为圆点R为半径的半圆（上半平面），积分路径为逆时针方向。

- 根据留数定理，可知

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_0\in\{\ell\text{所围区域内奇点全体}\}} \operatorname{Res} f(z_0).$$

- 令$R\to\infty$，有估计

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \le \int_{C_R} \left|zf(z)\right| \frac{|dz|}{|z|} \le \max\left|zf(z)\right| \frac{\pi R}{R} \to 0.$$

因此得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{z_0\in\{\text{上半平面内奇点全体}\}} \operatorname{Res} f(z_0).$$

- **例3.11：** 计算$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.
- **解：** 函数$f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{(z-i)(z+i)}$有两个单极点$z=\pm i$，而只有$z_0=i$在上半平面，因此

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\pi i\operatorname{Res}f(z_0)$$

$$=2\pi i\lim_{z\to z_0}((z-z_0)f(z))=2\pi i\times\frac{1}{2i}=\pi.$$

- **例3.12：** 计算$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}$.
- **解：** 函数$f(z)=\frac{1}{(1+z^2)^n}=\frac{1}{(z-i)^n(z+i)^n}$有两个n阶极点$z=\pm i$，而只有$z_0=i$在上半平面，因此

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}=2\pi i\operatorname{Res}f(z_0)=\frac{\pi}{2^{2n-2}}\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}.$$

其中$\operatorname{Res}f(z_0)$我们将在注记3.9中给出计算细节。

- 例3.13：计算$I=\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.
- 解：这里积分区域是$[0,\infty)$，不符合类型二的要求。不过，利用被积函数$1/(1+x^2)^n$是偶函数，可知$\int_0^\infty = \int_{-\infty}^0$，因此

$$I=\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}=\frac{\pi}{2^{2n-1}}\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}.$$

- 注记3.9：我们要求$f(z)=\frac{1}{(1+z^2)^n}=\frac{1}{(z-i)^n(z+i)^n}$在n阶极点$z_0=i$处的留数$\operatorname{Res} f(z_0)$，即

$$\begin{aligned}\operatorname{Res} f(z_0) &= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-z_0)^n f(z)\right)\\ &= \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z+i)^{-n}\right)\Bigg|_{z=z_0}\\ &= \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!}(2i)^{-(2n-1)} = -\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2 2^{2n-1}}i.\end{aligned}$$

- **类型三：** $I_1=\int_0^\infty f(x)\cos mx dx$, $I_2=\int_0^\infty g(x)\sin mx dx$，积分区间是$[0,+\infty)$；偶函数$f(x)$和奇函数$g(x)$在实轴上没有奇点，在上半平面除有限个奇点外是解析的；当z在上半平面或实轴上趋于无穷时，$f(z)$及$g(z)$一致的$\to 0$。
- 对积分形式进行变换，有

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\infty f(x)\cos mx dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(x)(e^{imx}+e^{-imx})dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty f(x)e^{imx}dx - \frac{1}{2}\int_0^{-\infty} f(y)e^{imy}dy = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{imx}dx.
\end{aligned}
$$

上式中第三个等号利用了$f(x)$是偶函数的性质。
- 类似的，有

$$
I_2 = \int_0^\infty g(x)\sin mx dx = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^\infty g(x)e^{imx}dx.
$$

- 经过变换后，该类型积分和类型二相比，被积函数衰减速度慢，但有震荡性质（被积函数值可能相互抵消）可以利用。

- **引理3.1（约当引理）**：若m为正数，C_R为以零点为圆点R为半径的半圆（上半平面），积分路径为逆时针方向，又设当z在上半平面或实轴上趋于无穷时，f(z)一致的$\to 0$，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)e^{imz}dz = 0.$$

- **证明**：我们有估计

$$\left|\int_{C_R} f(z)e^{imz}dz\right| = \left|\int_0^{\pi} f(Re^{i\varphi})e^{mR(i\cos\varphi-\sin\varphi)}Re^{i\varphi}id\varphi\right|$$
$$\leq \int_0^{\pi}\left|f(Re^{i\varphi})e^{mR(i\cos\varphi-\sin\varphi)}Re^{i\varphi}i\right|d\varphi = \int_0^{\pi}\left|f(Re^{i\varphi})\right|e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi$$
$$\leq \max\left|f(z)\right|\int_0^{\pi} e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi.$$

已知当z在上半平面或实轴上趋于无穷时，$\max f(z)\to 0$。只需证明

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi = 2\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi$$

是有界的。

- 证（续）：下面证明$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi$的有界性。
- 事实上，在$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$范围内，$0\le 2\varphi/\pi\le\sin\varphi$，则有

$$\int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi \le \int_0^{\pi/2} e^{-2mR\varphi/\pi}Rd\varphi = \frac{\pi}{2m}(1-e^{-mR}).$$

因此，在$R\to\infty$时，上述极限有限。因此证明约当定理。

- 类似于类型二的步骤，利用留数定理计算出I_1和I_2的积分主值为$(m>0)$

$$I_1 = \int_0^{\infty} f(x)\cos mx dx = \pi i \sum_{z_0\in\{\text{上半平面内奇点全体}\}} \text{Res}\left(f(z_0)e^{imz_0}\right).$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} g(x)\sin mx dx = \pi \sum_{z_0\in\{\text{上半平面内奇点全体}\}} \text{Res}\left(g(z_0)e^{imz_0}\right)$$

- **例3.14**：对$m>0$，计算$I=\int_0^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2+a^2}dx$.
- **解**：这里$f(z)=\frac{1}{z^2+a^2}$是偶函数，函数$f(z)e^{imz}$有两个单极点$z=\pm ai$，而只有$z_0=ai$在上半平面，因此

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2+a^2}dx=\pi i\mathrm{Res}\left(f(z_0)e^{imz_0}\right)$$

$$=\pi i\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)\frac{e^{imz}}{z^2+a^2}\right)=\frac{\pi}{2a}e^{-ma}.$$

- **例3.15**：对$m>0$，计算$I=\int_0^{\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}dx$.
- **解**：这里$g(z)=\frac{z}{(z^2+a^2)^2}$是奇函数，函数$g(z)e^{imz}$有两个二阶极点$z=\pm ai$，而只有$z_0=ai$在上半平面，因此

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}dx=\pi\mathrm{Res}\left(g(z_0)e^{imz_0}\right)$$

$$=\pi\lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}\left((z-z_0)^2\frac{ze^{imz}}{(z^2+a^2)^2}\right)=\frac{m\pi}{4a}e^{-ma}.$$

- 注记3.10：当m为负数时，随着$R \to \infty$，e^{-mR}无界，因此约当引理出现问题。将其作些修改：当m为负数时，考虑C_R'为以零点为圆心R半径的半圆（下半平面），积分路径为顺时针方向。从而有估计

$$\left|\int_{C_R} f(z)e^{imz}dz\right| \leq \max\left|f(z)\right| \int_{\pi}^{2\pi} e^{-mR\sin\varphi} Rd\varphi$$
$$= \max\left|f(z)\right| \int_0^{\pi} e^{mR\sin\varphi} Rd\varphi = 2\max\left|f(z)\right| \int_0^{\pi/2} e^{mR\sin\varphi} Rd\varphi$$

上式中第一个等号利用了换元公式$\varphi' = 2\pi - \varphi$。至于最后一项积分的估计，和前式完全相同，故略。

- 基于上述讨论，利用留数定理计算出I_1和I_2的积分主值为$(m < 0)$

$$I_1 = \int_0^{\infty} f(x)\cos mx dx = -\pi i \sum_{z_0 \in \{\text{下半平面内奇点全体}\}} \mathrm{Res}\left(f(z_0)e^{imz_0}\right),$$
$$I_2 = \int_0^{\infty} g(x)\sin mx dx = -\pi \sum_{z_0 \in \{\text{下半平面内奇点全体}\}} \mathrm{Res}\left(g(z_0)e^{imz_0}\right).$$

- **类型四（实轴上有单极点）**：考虑积分$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$，函数$f(x)$在实轴上有单极点$z=\alpha$，除此以外，$f(z)$满足类型二或类型三（应为$f(z)e^{imz}$或$g(z)e^{imz}$）的条件。
- 由于存在这个奇点，我们**以$z=\alpha$为圆心，以充分小的正数ε为半径做半圆C_ε绕过奇点α构成积分回路ℓ**

$$\oint_\ell f(z)dz = \int_{-R}^{\alpha-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\alpha+\varepsilon}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz + \int_{C_\varepsilon} f(z)dz.$$

在$R\to\infty$, $\varepsilon\to 0$情况下，上式左边积分值可用留数定理得到

$$\oint_\ell f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_0\in\{\text{上半平面内奇点全体}\}} \operatorname{Res} f(z_0)$$

右端前两项之和为所求积分，第三项积分为零（已证），**需要估计第四项积分**。

- 将$f(z)$在$z=\alpha$的邻域内做洛朗展开，由于$z=\alpha$是$f(z)$的单极点，因此
$$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-\alpha}+P(z-\alpha).$$
其中$P(z-\alpha)$为级数的解析部分，它在C_ε上连续且有界，因此
$$\left|\int_{C_\varepsilon}P(z-\alpha)dz\right|\le\max\left|P(z-\alpha)\right|\int_{C_\varepsilon}|dz|=\pi\varepsilon\cdot\max\left|P(z-\alpha)\right|\to 0.$$
再估计a_{-1}部分，则有
$$\int_{C_\varepsilon}\frac{a_{-1}}{z-\alpha}dz=\int_{C_\varepsilon}\frac{a_{-1}}{z-\alpha}d(z-\alpha)=\int_{\pi}^{0}\frac{a_{-1}}{\varepsilon e^{i\varphi}}d\left(\varepsilon e^{i\varphi}\right)$$
$$=\int_{\pi}^{0}ia_{-1}d\varphi=-\pi ia_{-1}=-\pi i\operatorname{Res}f(\alpha).$$
- 总结上述讨论，我们有
$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{z_0\in\{\text{上半平面内奇点全体}\}}\operatorname{Res}f(z_0)+\pi i\operatorname{Res}f(\alpha).$$

- 如果实轴上有有限个单极点，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{z_0\in\{\text{上半平面内奇点全体}\}} \mathrm{Res}\, f(z_0) + \pi i \sum_{\alpha\in\{\text{实轴上奇点全体}\}} \mathrm{Res}\, f(\alpha).$$

- **注记3.11**：C_ε不是闭合曲线，因此不能利用柯西积分定理，**$f(z)$洛朗展开的解析部分的积分值只是在$\varepsilon\to 0$的条件下趋于零**。
- **注记3.12**：实轴上的奇点只能是单极点，不能是二阶或二阶以上极点，更不能是本性奇点。否则当$\varepsilon\to 0$时，积分值为

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)dz = \begin{cases} \infty, & \text{二阶或二阶以上极点,} \\ \text{不存在,} & \text{本性奇点.} \end{cases}$$

- 例3.16：计算$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$。
- 解：将原积分改写为

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx.$$

被积函数$f(z)=e^{iz}/z$在实轴上有单极点$z_0=0$外，满足类型三的要求，且在上半平面无奇点，因此

$$I=\frac{\pi}{2}\mathrm{Res}\,f(z_0)=\frac{\pi}{2}.$$

- 类似的，我们还可计算出

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x}dx=\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{mx}d(mx)=\frac{\pi}{2},\ m>0,$$
$$\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x}dx=-\int_0^{\infty}\frac{\sin|m|x}{x}dx=-\frac{\pi}{2},\ m<0.$$

- 利用留数定理计算定积分包括但不限于上述四种类型，在梁昆淼的《数学物理方法》（第4版）第4.3节中，还有如下补充例题

$$(1)\ \mathrm{I}=\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx,\quad (0<\alpha<1),\qquad (2)\ \mathrm{I}=\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1-x}dx,\quad (0<\alpha<1),$$

$$(3)\ \mathrm{I}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}dx,\quad (0<\alpha<1),$$

$$(4)\ \mathrm{I}_1=\int_0^{\infty}\sin(x^2)dx,\quad \mathrm{I}_2=\int_0^{\infty}\cos(x^2)dx.$$

上述四道补充例题，分别具有不同的特点：

1. 函数$f(z)=z^{\alpha-1}/(1+z)$具有两个支点：原点和无穷远点，并且在实轴上有单极点$z_0=-1$；
2. 函数$f(z)=z^{\alpha-1}/(1-z)$具有两个支点：原点和无穷远点，并且在实轴上有单极点$z_0=1$；
3. 函数$f(z)=e^{\alpha z}/(1+e^z)$在上半平面有无限多个单极点$i(2k+1)\pi$；
4. $\mathrm{I}_2+i\mathrm{I}_1=\int_0^{\infty}e^{ix^2}dx$，但函数$f(z)=e^{iz^2}$没有有限远奇点。

- 留数定理不仅可以应用于求解积分问题，还可以反过来由**围道积分计算函数的留数**以及**计算无穷级数的和**。这部分内容吴崇试的《数学物理方法》（第1版）的第8.7-8.8节有所讨论，感兴趣的同学也可以学习。
- 我们关于复变函数部分的讲述，就到此为止，由于课时原因，还有一些相关知识没有涉及，例如：
  1. **辐角原理和Rouche定理**（留数定理的一个重要应用）；
  2. **共形映射的知识**；
  3. 调和函数的相关性质；
  4. 含复参数函数的积分；
  5. 二阶线性常微分方程的幂级数解法。
- 对上述内容感兴趣的同学，可以参考吴崇试的《数学物理方法》、梁昆淼的《数学物理方法》、方企勤的《复变函数教程》或者是于慎根等的《复变函数与积分变换》。