# 莫比乌斯反演基础

清华大学 何昊天
kiana810@126.com

# 欧拉函数的计算

- 我们用另一个式子来表示欧拉函数：φ(n)=∑ε(gcd(i,n))
- 由μ×1=ε，我们开始做如下化简：

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon(\gcd(i,n))=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|\gcd(i,n)}\mu(d)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i\&d|n}\mu(d)=\sum_{d|n}\mu(d)*\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor$$

- 结果可能出乎意料：我们得到了μ×id=φ

# $\varphi \times 1 = id \leftrightarrow \mu \times id = \varphi$

- 观察这两个式子的形式，我们可能是找到了一种类似于Dirichlet卷积的逆运算的公式
- 如果事先线性筛预处理出$\mu$的值，我们相当于得到了另一个单次询问$O(\sqrt{n})$的计算欧拉函数的值的方法
- 我们想知道这两个式子是偶然还是真的有某种联系，故不妨试试$\mu \times 1 = \varepsilon$能否有相应的两个相关等式，如果有，就考虑能否推广其形式并加以证明，即采取猜想-检验-推广-证明的探究模式

# $\mu \times 1 = \varepsilon \leftrightarrow \varepsilon \times 1 = 1$

- $\mu \times 1 = \varepsilon$是我们已知的定理
- $\varepsilon \times 1 = 1$是一个非常平凡的结论
- 现在已经完成了检验的一步，即找到了另一组有相关联系的等式，接下来我们就尝试加以推广
- 实际上，这就是大名鼎鼎的莫比乌斯反演定理：$f \times 1 = g \leftrightarrow \mu \times g = f$

# 莫比乌斯反演定理

- $f \times 1 = g \leftrightarrow \mu \times g = f$
- 我们给出一个从左到右的简单的证明：

$$\sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{d'|\frac{n}{d}} f(d')$$

$$= \sum_{d'|n} f(d') \sum_{d|\frac{n}{d'}} \mu(d) = f(n)$$

- 第一个等号是将已知条件代入，第二个等号是交换求和号的小技巧，第三个等号是利用$\mu \times 1 = \varepsilon$并代入已知条件
- 从右到左的证明更简单，留给大家思考

# 欧拉函数的推论

- 推论：1~n中与n互质的数的和为n*φ(n)/2+ε(n)
- 证明：这个推论比之前给出的形式更完美（可以处理n=1的情形），我们利用反演给出一个证明

$$\sum_{i=1}^{n} i * \varepsilon(\gcd(i,n)) = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|\gcd(i,n)} \mu(d)$$

$$= \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{i=1}^{n} i * \varepsilon(\frac{d}{i}) = \sum_{d|n} \mu(d) * \frac{n(\frac{n}{d}+1)}{2}$$

$$= \frac{n}{2} * (\mu \times id + \mu \times 1) = \frac{n}{2} * \varphi + \varepsilon$$

# 莫比乌斯反演解题思路

- 线性筛、积性函数与反演的题目，解题思路都比较统一，但技巧性较强，需要多总结一些实用技巧
- 常用技巧与结论：
  - 四个卷积结论：$\varphi\times1=id$、$\mu\times id=\varphi$、$\mu\times1=\varepsilon$、$\varepsilon\times1=1$（需要注意的是，更多的时候是从右到左的应用）
  - 分块的前提结论：$\forall n,d\in N$，$n/d$向下取整至多有$\sqrt{n}$种取值
  - gcd与lcm相关：$gcd(a,b)*a*b=lcm(a,b)$，$d|gcd(a,b)\rightarrow d|a$且$d|b$
  - 交换求和号的方法技巧，以及常见的求和号交换法
  - 对于多次询问的题目，预处理积性函数的值与前缀和

# 2D GCD

- 问题：试求 $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\gcd(i,j)$
- 其中$1 \le N,M \le 10^6$

# 2D GCD Solution

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\gcd(i,j)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{d|\gcd(i,j)}\varphi(d)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{d|i\&d|j}\varphi(d)=\sum_{d=1}^{\min(N,M)}\varphi(d)\sum_{i=1,d|i}^{N}\sum_{j=1,d|j}^{M}1$$

$$=\sum_{d=1}^{\min(N,M)}\varphi(d)(\sum_{i=1,d|i}^{N}1*\sum_{j=1,d|j}^{M}1)$$

$$=\sum_{d=1}^{\min(N,M)}\varphi(d)\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor$$

# 2D Coprime

- 问题：试求 $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} e[\gcd(i,j)==1]$
- 其中$1 \le N,M \le 10^6$

# 2D Coprime Solution

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} e[\gcd(i,j)==1] = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{d|\gcd(i,j)}\mu(d)$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{d|i\&d|j}\mu(d) = \sum_{d=1}^{\min(N,M)}\mu(d)\sum_{i=1,d|i}^{N}\sum_{j=1,d|j}^{M}1$$

$$= \sum_{d=1}^{\min(N,M)}\mu(d)(\sum_{i=1,d|i}^{N}1*\sum_{j=1,d|j}^{M}1)$$

$$= \sum_{d=1}^{\min(N,M)}\mu(d)\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor$$

# 2D GCD&2D Coprime

- 思考：能否支持多组询问，询问数量$10^3$次？

# 2D GCD&2D Coprime Solution

- 思考：能否支持多组询问，询问数量$10^3$次？
- 能够做到，$\varphi(n)$与$\mu(n)$的值与前缀和可以预处理出来，而N/d向下取整和M/d向下取整分别最多有$\sqrt{N}$和$\sqrt{M}$种取值，所以说我们只用枚举这两部分的取值，中间整块的部分用前缀和相减即得积性函数的和
- 时间复杂度：$O(\min(N,M)+T(\sqrt{N}+\sqrt{M}))$，其中T表示数据组数

# BZOJ1101 [POI2007]Zap

- 问题：试求$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}e[\gcd(i,j)==d]$
- 其中$1\le N,M\le 5\times 10^4$，$1\le T\le 5\times 10^4$

# BZOJ1101 [POI2007]Zap Solution

- 问题：试求$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}e[\gcd(i,j)==d]$
- 其中$1 \le N, M \le 5\times10^4$，$1 \le T \le 5\times10^4$
- 将N和M分别替换为N/d向下取整和M/d向下取整，则这个问题就变成了我们已解决的2D Coprime问题

# BZOJ2301 [HAOI2011]Problem b

- 问题：试求 $\sum_{i=a}^{N}\sum_{j=b}^{M} e[\gcd(i, j) == d]$
- 其中$1 \le N,M \le 5\times10^4$，$1 \le T \le 5\times10^4$

# BZOJ2301 [HAOI2011]Problem b Solution

- 问题：试求$\sum_{i=a}^{N}\sum_{j=b}^{M}e[\gcd(i,j)==d]$
- 其中$1 \le N,M \le 5\times10^4$，$1 \le T \le 5\times10^4$
- 利用前缀矩阵的思想，分别计算四个与上道题形式相同的算式，再利用容斥原理即可得解

# BZOJ2693 jzptab

- 问题：试求 $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} lcm(i,j)$
- 其中$1 \le N,M \le 10^7$，$1 \le T \le 10^4$

# BZOJ2693 jzptab Solution

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} lcm(i,j)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\frac{i*j}{\gcd(i,j)}$$

$$=\sum_{d=1}^{\min(N,M)}\sum_{i=1,d|i}^{N}\sum_{j=1,d|j}^{M}\frac{i*j}{d}=\sum_{d=1}^{\min(N,M)} d\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor}\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor} i*j*e[\gcd(i,j)==1]$$

$$=\sum_{d=1}^{\min(N,M)} d\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor}\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor} i*j*\sum_{d'|\gcd(a,b)}\mu(d')=\sum_{d=1}^{\min(N,M)} d\sum_{d'=1}^{\min(\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor)}\mu(d')\sum_{i=1,d'|i}^{\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor}\sum_{j=1,d'|j}^{\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor} i*j$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{d=1}^{\min(N,M)} d\sum_{d'=1}^{\min(\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor)}\mu(d')*d'^2*(1+\left\lfloor\frac{\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor}{d'}\right\rfloor)*\left\lfloor\frac{\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor}{d'}\right\rfloor*(1+\left\lfloor\frac{\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor}{d'}\right\rfloor)*\left\lfloor\frac{\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor}{d'}\right\rfloor$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{d=1}^{\min(N,M)}(1+\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor)*\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor*(1+\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor)*\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor\sum_{d'=1,d'|d}^{\min(\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor)}\mu(d')*d'^2*\frac{d}{d'}$$

# BZOJ2693 jzptab Solution

- 由于积性函数的乘积也是积性函数，积性函数的卷积也是积性函数，所以上式最后一个∑的部分也是一个积性函数，我们对其线性筛预处理即可
- 处理出了那个函数的值，我们像之前的题目一样，根据N/d向下取整和M/d向下取整分别最多有√N和√M种取值分块，即可解决此题

# BZOJ3529 [Sdoi2014]数表

- 问题：试求 $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sigma_1(\gcd(i,j)) * e[\sigma_1(\gcd(i,j)) \le a]$
- 其中$1 \le N,M \le 10^5$，$1 \le T \le 2\times10^4$

# BZOJ3529 [Sdoi2014]数表 Solution

- 原题形式比较复杂，我们先考虑一个简化版本：$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sigma_1(\gcd(i,j))$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sigma_1(\gcd(i,j))=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{d=1}^{\min(N,M)}\sigma_1(d)*e[\gcd(i,j)==d]$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{d=1}^{\min(N,M)}\sigma_1(d)*e[\frac{\gcd(i,j)}{d}==1]=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{d=1}^{\min(N,M)}\sigma_1(d)\sum_{d'=1,d'|\frac{\gcd(i,j)}{d}}^{\min(N,M)}\mu(d')$$

$$=\sum_{d=1}^{\min(N,M)}\sum_{d'=1,d'|d}^{\min(N,M)}\sigma_1(d')*\mu(\frac{d}{d'})*\left\lfloor\frac{N}{dd'}\right\rfloor*\left\lfloor\frac{M}{dd'}\right\rfloor$$

# BZOJ3529 [Sdoi2014]数表 Solution

- 显然除数函数与莫比乌斯函数的乘积也是积性函数，我们直接对其线性筛预处理即可，对于后面的部分也是沿用之前的分块方法
- 现在来考虑a的限制，实际上a的限制可以任然是对除数函数的限制，所以我们把所有询问的a从小到大排序，把小于当前的a的除数函数对应的值累加进来即可，由于每次查询需要询问前缀和，我们考虑用树状数组来维护
- 时间复杂度：$O(\min(N,M)\log(\min(N,M))+T(\sqrt{N}+\sqrt{M})\log(\min(N,M)))$，若$N\le M$，可简记为$O(N\log N+T\sqrt{N}\log N)$

# BZOJ3561 DZY Loves Math VI

- 问题：试求 $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} lcm(i,j)^{\gcd(i,j)}$
- 其中$1 \le N,M \le 5\times10^5$，$1 \le T \le 3$

# BZOJ3561 DZY Loves Math VI Solution

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} lcm(i,j)^{\gcd(i,j)} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{i*j}{\gcd(i,j)}\right)^{\gcd(i,j)}$$

$$= \sum_{d=1}^{\min(N,M)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{i*j}{d}\right)^{d} * e[\gcd(i,j)==d] = \sum_{d=1}^{\min(N,M)} d^{d}\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor}\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor} i^{d} * j^{d} * e[\gcd(i,j)==1]$$

$$= \sum_{d=1}^{\min(N,M)} d^{d}\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor}\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor} i^{d} * j^{d}\sum_{d'=1,d'|\gcd(i,j)}^{\min(\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor)}\mu(d') = \sum_{d=1}^{\min(N,M)} d^{d}\sum_{d'=1}^{\min(\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor)}\mu(d') * d'^{2d}\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{N}{dd'}\right\rfloor}\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{M}{dd'}\right\rfloor} i^{d} * j^{d}$$

$$= \sum_{d=1}^{\min(N,M)} d^{d}\sum_{d'=1}^{\min(\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor)}\mu(d') * d'^{2d}\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{N}{dd'}\right\rfloor} i^{d}\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{M}{dd'}\right\rfloor} j^{d}$$

# BZOJ3561 DZY Loves Math VI

- 注意到最后两个∑的值是可以一边枚举d和d'一边计算更新的，对于每对d和d'可以O(1)获得其相应的值
- 对于前面的部分，直接暴力枚举即可，由调和级数求和公式可得，总时间复杂度为O(nlogn)
- 可惜的是，这道题暂时没有更好的做法以支持多组询问

# 总结

- 动起手来简化式子！
- 克服自己的公式恐惧症！
- 这部分的题目难度都较大，不过代码实现起来比较简单，如果熟练掌握了筛法，代码上几乎没有别的难点
- 但是这些题一定要能够静下心来去推导，不要每次都寻求一个直接的结论，不要企图能够“看出”这些题的做法，所有的解法都是一步步尝试、一步步推导出来的
- 技巧很重要，这类题目都有一点固定套路在里面，需要多加总结

# Thank you for listening!