# Diskrete Mathematik

Patrick Bucher & Lukas Arnold

6. Juni 2017

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Foundations

## 1.1 Operationen

| | | |
|---|---|---|
| Negation | $\neg p$ | *Verneinung* |
| Konkunktion | $p \wedge q$ | *Und-Verknüpfung* |
| Disjunktion | $p \vee q$ | *Oder-Verknüpfung* |
| EXOR | $p \oplus q$ | *Exklusiv-Oder* |
| Implikation | $p \rightarrow q$ | *falls p dann q* |
| Bikonditional | $p \leftrightarrow q$ | *p genau dann wenn q* |

## 1.2 Prioritäten der Operationen

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\neg$ | $\wedge$ | $\vee$ | $\oplus$ | $\rightarrow$ | $\leftrightarrow$ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

## 1.3 Tautologie & Kontraktion

| | | |
|---|---|---|
| Tautologie | $p \vee \neg p$ | *immer wahre Aussage* |
| Kontraktion | $p \wedge \neg q$ | *immer falsche Aussage* |

## 1.4 Logische Äquivalenzgesetze

| | | |
|---|---|---|
| Identität | $p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ | $p \vee \mathbf{F} \equiv p$ |
| Dominanz | $p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ | $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$ |
| Negation | $p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$ | $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$ |
| Assoziativ 1 | $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ | |
| Assoziativ 2 | $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ | |
| Distributiv 1 | $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | |
| Distributiv 2 | $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | |
| De Morgan's 1 | $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ | |
| De Morgan's 2 | $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ | |

## 1.5 Äquivalenzgesetze

$$
\begin{aligned}
p \rightarrow q &\equiv \neg p \vee q \\
p \rightarrow q &\equiv \neg q \rightarrow \neg p \\
p \vee q &\equiv \neg p \rightarrow q \\
p \wedge q &\equiv \neg(p \rightarrow \neg q) \\
\neg(p \rightarrow q) &\equiv p \wedge \neg q
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p \leftrightarrow q &\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \\
p \leftrightarrow q &\equiv \neg p \leftrightarrow \neg q \\
p \leftrightarrow q &\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\
\neg(p \leftrightarrow q) &\equiv p \leftrightarrow \neg q
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p \rightarrow (q \wedge r) &\equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \\
(p \vee q) \rightarrow r &\equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \\
p \rightarrow (q \vee r) &\equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \\
(p \wedge q) \rightarrow r &\equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p \oplus q &\equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \\
\neg(p \oplus q) &\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\
\neg(p \oplus q) &\equiv p \leftrightarrow q
\end{aligned}
$$

### 1.6 Quantifikatoren

| | | |
|---|---|---|
| For All | $\forall$ | *für alle **x** aus **P** wahr* |
| Exists | $\exists$ | *für mindestens ein **x** aus **P** wahr* |
| Not Exists | $\neg\exists$ | *für alle **x** aus **P** falsch* |
| Not For All | $\neg\forall$ | *für mindestens ein **x** aus **P** falsch* |

### 1.7 Negation von Quantifikatoren

$$\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$
$$\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

### 1.8 Beweise

| | |
|---|---|
| direkter Beweis | $p \to q$ |
| indirekter Beweis | $\neg q \to \neg p$ |
| Widerspruch | $\neg p \to q$ |
| *Vorgehen Widerspruch* | $(\neg p \to \mathbf{f}) \Rightarrow (p \to \mathbf{w})$ |

## 2 Basic Structures

### 2.1 Mengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Q} = \{p/q | p \in Z \wedge q \in N\}$
$\mathbb{R}$: die Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$: die Menge der komplexen Zahlen

### 2.2 Spezielle Menegen

| | |
|---|---|
| Teilmenge: | $A \subset B \equiv \forall x (x \in A \to x \in B)$ |
| Leere Menge: | $\emptyset \subset A$ *gilt für jede Menge A* |
| Kardinalität: | $\|S\|$ *beschreibt Anzahl Elmenete von A* |
| Potenzmenge: | $P(S) = 2^S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ |
| Kreuzprodukt: | $A \times B = \{(a,b) \| a \in A \wedge b \in B\}$ |

### 2.3 Mengenoperationen

| | |
|---|---|
| Komplement: | $A^c = \overline{A} = \{m \in M : m \notin A\}$ |
| Durchschnitt: | $A \cap B = \{m \in M \| m \in A \wedge m \in B\}$ |
| Vereinigung: | $A \cup B = \{m \in M \| m \in A \vee m \in B\}$ |
| Differenz: | $B - A = \{m \in M \| m \in B \wedge m \notin A\}$ |

### 2.4 Rechenregeln für Mengen

| | |
|---|---|
| Kommutativgesetz | $A \cup B = B \cup A$ |
| Kommutativgesetz | $A \cap B = B \cap A$ |
| Assoziativgesetz | $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ |
| Assoziativgesetz | $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ |
| Distributivgesetz | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| Distributivgesetz | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| De Morgan's Gesetz | $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ |
| De Morgan's Gesetz | $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ |

### 2.5 Definition von Fuktionen

$$f : X \to Y \quad x \mapsto f(x) \quad f : x \mapsto f(x)$$
$$f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} 5 & \text{für } x < 0 \\ x^2 + 5 & \text{für } x \in [0, 2] \\ 0.5x + 8 & \text{für } x > 2 \end{array} \right\}$$

### 2.6 Arten von Funktionen

| | |
|---|---|
| injektiv | *auf jedes Element in Y zeigt höchstens ein Pfeil* |
| surjektiv | *auf jedes Element in Y zeigt mindestens ein Pfeil* |
| bijektiv | *auf jedes Element in Y zeigt genau ein Pfeil* |

### 2.7 Zusammengesetzte Funktion

| | |
|---|---|
| $g : X \to U$ | $x \mapsto g(x)$ |
| $f : U \to Y$ | $u \mapsto g(u)$ |
| $F = f \circ g : X \to Y$ | $x \mapsto f(g(x))$ |

### 2.8 Umkehrfunktion

$$y = f(x) \quad x = f^{-1}(y)$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$
$$(f^{-1} \circ f)(y) = f^{-1}(f(y)) = y$$

### 2.9 $ceiling$ und $floor$-Funktion

$$\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \lceil x \rceil = min\{n \in \mathbb{Z} | x \leq n\}$$
$$\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \lfloor x \rfloor = max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$$

### 2.10 Folgen

| | |
|---|---|
| harmonisch | $a_k = 1/k$ |
| geometrisch | $a_k = a_0 * q^k$ |
| arithmetisch | $a_k = a_0 + (k * d)$ |

### 2.11 Reihen

| | |
|---|---|
| harmonisch | $\sum_{k=1}^{n} 1/k$ |
| geometrisch | $a_0 * \sum_{k=0}^{n-1} q^k = a_0 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ |
| arithmetisch | $\sum_{k=0}^{n-1} (a_0 + kd) = n \frac{a_0 + a_{n-1}}{2}$ |

### 2.12 Summenformeln

| | |
|---|---|
| $\sum_{k=1}^{n} k$ | $\frac{n*(n+1)}{2}$ |
| $\sum_{k=1}^{n} k^2$ | $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ |
| $\sum_{k=1}^{n} k^3$ | $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ |
| $\sum_{k=0}^{n} x^k, \|x\| < 1$ | $\frac{1}{1-x}$ |
| $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}, \|x\| < 1$ | $\frac{1}{(1-x)^2}$ |

## 3 Fundamentals

### 3.1 Wachstum von Funktionen

$f$= "*sehr komplizierte Funktion*"
$g$= "*einfachere Funktion*"
$|f(x)| \leq C|g(x)|, \forall x > k$
$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$

### 3.2 Exponentialfunktionen

$a^r * a^s = a^{r+s}$
$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
$(a^r)^s = (a^s)^r = a^{r*s}$

### 3.3 Logarithmusfunktionen

$log_a(u * v) = log_a(u) + log_a(v)$
$log_a(\frac{u}{v}) = log_a(u) - log_a(v)$
$log_a(u^v) = v * log_a(u)$

### 3.4 Komplexität von Algorithmen

| | |
|---|---|
| konstant | $O(1)$ |
| logarithmisch | $O(logn)$ |
| linear | $O(n)$ |
| n log n | $O(n * logn)$ |
| polynomial | $O(n^b)$ |
| exponentiell | $O(b^n), b > 1$ |
| faktorielle | $O(n!)$ |

### 3.5 Zahlen und Division

$a|b \wedge a|c \rightarrow a|(b + c)$
$a|b \rightarrow \forall c(a|bc)$
$a|b \wedge b|c \rightarrow a|c$

### 3.6 Primzahl

$\nexists a(a|n^(1 < a < n)$

### 3.7 Mersenne Primes

$M_n = 2^p - 1, p \in$ "*Primzahlen*"

### 3.8 Primzahlsatz

$\pi(x) \approx \frac{x}{ln(x)}$

### 3.9 ggT und kgV

$a = dq + r$, wobei $(0 \leq r < d)$
$q = a$ div $d$ und $r = a$ mod $d$
$ab = ggT(a, b) * kgV(a, b)$

### 3.10 Kongruenz

$a \equiv b$ mod $m, m|(a - b)$

## 4 Reasoning

### 4.1 Induktionsbeweis

- Induktionshypothese: $P(k)$
- Induktionsverankerung: $P(1)$
- Induktionsschritt: $P(k) \rightarrow P(k + 1)$
- $[P(1) \wedge \forall k(P(k) \rightarrow P(k + 1))] \rightarrow \forall n P(n)$
- Wenn die Induktionsverankerung und für alle $k$ der Induktionsschritt stimmt, dann gilt die Hypothese für alle Zahlen $n$.

### 4.2 Schlussregeln

Modus ponens: $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$ (Abtrennungsregel)
Modus tollens: $((\neg q \wedge (p \rightarrow q))) \rightarrow \neg p$ (aufhebender Modus)
Hypothetischer Syllogismus: $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ (Kettenschluss)
Disjunktiver Syllogismus: $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$
Addition: $p \rightarrow (p \vee q)$
Simplifikation: $(p \wedge q) \rightarrow p$
Konjunktion: $((p) \wedge (q)) \rightarrow p \wedge q$
Resolution: $((p \wedge q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$

## 5 Diskrete Wahrscheinlichkeitsrechnung

### 5.1 Wahrscheindlichkeit nach Laplace

$p(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{Anzahl\ guenstige}{Anzahl\ moegliche}$

### 5.2 Komplement der Wahrscheindlichkeit

$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

### 5.3 Additionsregel

$p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2)$

### 5.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

### 5.5 Unabhängige Ereignisse

$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)p(B)}{p(B)} = p(A)$

### 5.6 Satz der totalen Wahrscheindlichkeit

$p(A) = \sum_{i=1}^{k} p(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{k} p(A|B_i) \cdot p(B_i)$
$p(A|C) = \frac{1}{p(C)} \sum_{i=1}^{k} p(A \cap (B_i \cap C))$
$p(A|C) = \sum_{i=1}^{k} p(A|B_i) \cdot p(B_i|C)$

*Spezialfall für 2 Mengen:*
$p(A) = p(A|B) \cdot p(B) + p(A|\overline{B}) \cdot p(\overline{B})$

### 5.7 Satz von Bayes

$p(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)\ p(B_j)}{p(A)} = \frac{p(A|B_j)\ p(B_j)}{\sum_{i=1}^{k} p(A|B_i) \cdot p(B_i)}$

*Spezialfall für 2 Mengen:*
$p(B|A) = \frac{P(A|B)\ p(B)}{p(A|B) \cdot p(B) + p(A|\neg B) \cdot p(\overline{B})}$

### 5.8 Binomialverteilung

$B(k|n,p) = B_{n,p}(k) = C(,k)p^k(1-p)^{n-k}$
$B(k|n,p) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

*Bedingung:*
$p = M/N$ und $n <= M/10 <= (N-M)/10$

### 5.9 Hypergeometrische Verteilung

$p(k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

### 5.10 Poissonverteilung

$f(k) = \frac{u^k}{k!}e^{-u}$

*Bedingung:*
$u = np$ und $p <= 0.1, n >= 100$

### 5.11 W'keitsverteilung einer Zufallsvariablen

$\{(r, p(X=r))|\forall r \in X(S)\}$

### 5.12 Erwartungswert einer Zufallsvariable

$E(C) = \sum_{s\in S} X(s) \cdot p(s) = \sum_{r\in X(S)} r \cdot p(X=r)$

### 5.13 Varianz einer Zufallsvariable

$V(X) = \sum_{s\in S}(X(s) - E(X))^2 \cdot p(s)$
$V(X) = \sum_{r\in X(S)}(r - E(X))^2 \cdot p(X=r)$

### 5.14 Standardabweichung einer Zufallsvariable

$o(X) = \sqrt{V(X)}$

## 6 Advanced Counting Techniques

### 6.1 Rekursionsbeziehungen

$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1), \forall n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}^+$

### 6.2 Erzeugende Funktion

$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

### 6.3 Ein- / Ausschlussprinzip

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

### 6.4 Anzahl Derangements

$D_n = n![1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}]$

## 7 Zahlentheorie

### 7.1 Division mit Rest

$A = q * n + r$ wobei $0 \leq r < |n|$

### 7.2 Kongruenz modulo n

$$\begin{aligned} a \equiv b(\mod n) &\iff n|(a-b) \\ &\iff \exists q : a - b = q * n \\ &\iff \exists q : a = b + q * n \end{aligned}$$

### 7.3 Euklidsche Algorithmus

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 963 | = | 4 | * | 218 | + | 91 |
| 218 | = | 2 | * | 91 | + | 36 |
| 91 | = | 2 | * | 36 | + | 19 |
| 36 | = | 1 | * | 19 | + | 17 |
| 19 | = | 1 | * | 17 | + | 2 |
| 17 | = | 8 | * | 2 | + | 1 |
| 8 | = | 2 | * | 1 | + | 0 |

### 7.4 Diophantischer Gleichung

$n_1 * x + n_2 * y = n$

### 7.5 erweiterter Euklidsche Algorithmus

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **67** | **-** | **1** | **0** | |
| **24** | 2 * | **0** | **1** | |
| 19 * | 1 | 1 * | -2 * | *19 = 67 % 24* |
| 5 | 4 | -1 | 3 | *2 = 67 div 24* |
| 4 | 1 | 4 | -11 | *1 = 1 - 2 * 0* |
| 1 | | -5 | 14 | *-2 = 0 - 2 * 1* |

### 7.6 Chinesischer Restsatz

$M_i = \frac{m}{m_i}$
$M_i * y_1 \equiv 1(\mod m_i)$
$x = \sum_{i=1}^{k} r_i * M_i * y_i$

### 7.7 Eulersche $\phi$-Funktion

$\mathbb{Z}_n := \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$
$\mathbb{Z}_n^* := \{x \in \mathbb{Z}_n | x > 0$ und $ggT(x,n) = 1\}$
$|\mathbb{Z}_n^*| :=$ Anzahl Elemente in $\mathbb{Z}_n^*$

$$\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto |\mathbb{T}_n^*| =: \phi(n)$$

$$\begin{aligned} \phi(p) &= p - 1 \\ \phi(p*q) &= (p-1)*(q-1) \\ \phi(m) &= (p_1 - 1) * p_1^{r_1 - 1} * (p_2 - 1) * p_2^{r_2 - 1} * \ldots \end{aligned}$$

### 7.8 Primzahl

$n = p_1^{e_1} * p_2^{e_2} * p_3^{e_3} * \ldots * p_n^{e_n}$

### 7.9 kleiner Satz von Fermat

$m^p \mod p = m \mod p$

### 7.10 Primzahltest von Wilson

falls $(n-1)! + 1$ durch $n$ teilbar ist

### 7.11 Restklassen

$[r] = \{x \in Z | x \equiv r \mod n\}$

### 7.12 Rechenregeln für modularen Rechnen

$$a \oplus_n b = b \oplus_n a = a + b \mod n = R_n(a+b)$$
$$a \odot_n b = b \odot_n a = a * b \mod n = R_n(a*b)$$
$$a \odot_n (b \oplus_n c) = (a \odot_n b) \oplus_n (a \odot_n c)$$

### 7.13 Potenzieren modulo n

$x^m = x^{2*k+l} = x^{2+k} * x^l = (x^k)^2 * x^l$

### 7.14 Square and Multiply Algorithm

1. Exponent binär schreiben
2. Q bedeutet quadrieren und M multiplizieren
3. Ersetze 1 durch QM und 0 durch Q
4. das erste (links) QM streichen
5. Reihenfolge von Quadrieren und Multipliziere
6. Exponent einsetzten
7. entsprechend Quadrieren und Multiplizieren
8. immer wieder modular reduzieren

### 7.15 Nullteiler

$a \in \mathbb{Z}_n, a \neq 0, b \in \mathbb{Z}_n, b \neq 0$
falls $a \odot_n b = 0$, dann ist $a$ Nullteiler von $\mathbb{Z}_n$

### 7.16 Inverse Elemente

$\mathbb{Z}_n^* = \{a \in \mathbb{Z}_n | ggT(a,n) = 1\}$
$a^{-1} = R_p(a^{p-2}) = a^{p-2} \mod p$, ($p$ = Primzahl)

### 7.17 Primitive Elemente / Erzeugende

falls jedes Element $a \in \mathbb{Z}_p^*$ eine Potent von $z$ ist

### 7.18 Einwegfunktionen

| | |
|---|---|
| Quadrieren modulo n | $x \mapsto x^2 \mod n$ |
| Potenzieren modulo n | $x \mapsto x^e \mod n$ |
| Exponentialfunktion modulo p | $x \mapsto b^x \mod p$ |

### 7.19 Modulare Quadratwurzeln

$\sqrt{a} \mod n = \{x \in \mathbb{Z}_n^* | x^2 = a \mod n\}$
=> Für ein $a$ kann es mehrere Quadratwurzeln geben

### 7.20 diskrete Logarithmus

$\exp_b(k) = b^k \mod p$

## 8 Graphentheorie 1

### 8.1 (Ecken)grade

Eckengrad: $sum_{v \in V} deg(v) = 2 \cdot |E|$
Maximalgrad: $\Delta(G) = max_{v \in V(G)} deg(v)$
Maximalgrad: $\delta(G) = min_{v \in V(G)} deg(v)$

### 8.2 Wichtige Graphen

Vollständiger Graph $K_n$ mit $n$ Knoten: genau eine Kante zwischen je zwei Knoten ($m$ Kanten).
$m = \binom{n}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$

### 8.3 Baum

Baum mit $n$ Knoten: $n-1$ Kanten.
Baum mit $i$ inneren Knoten: $n = m \cdot i + 1$ Knoten
$m$-facher Baum der Höhe $h$: höchstens $m^h$ Blätter.

### 8.4 Page-Rank-Algorithmus

Gewicht der Seite $PR_i$ in einem Netz mit $N$ Seiten, Dämpfungsfaktor $d$ ($[0;1]$), $C_j$ von Seite $j$ abgehende Links:
$PR_i = \frac{1-d}{n} + d \cdot \sum_j \frac{PR_j}{C_j}$

### 8.5 Matrizen

$n$ Ecken, $m$ Kanten

- Adjazenzmatrix $A(G)$: $n \times n$-Matrix (Knoten/Knoten) mit Anzahl Kanten zwischen den Ecken.
- Inzidenzmatrix $B(G)$: $n \times m$-Matrix (Knoten/Kanten) mit 1 (Knoten liegt auf Kante) oder 0 (Knoten *nicht* auf Kante)
- Gradmatrix $D(G)$: $n \times n$-Diagonal-Matrix (Knoten/Knoten), Grade der Knoten auf der Diagonalen

### 8.6 Wege und Kreise

Anzahl Wege der Länge $l$ von Knoten $i$ zu $j$: Eintrag $(i,j)$ von $A(G)^l$ (Adjazenzmatrix hoch $l$)

- Weg: Folge von Kanten $e_1 = a, b, e_2 = b, c, \ldots$
- Kreis: Weg mit übereinstimmendem Anfangs- und Endpunkt (Länge $> 0$)
- einfacher Kreis: jede Kante kommt höchstens einmal vor
- Eulerweg: Weg, der jede Kante einmal durchläuft
- Eulerkreis: Kreis, der jede Kante einmal durchläuft
- Hamiltonweg: Weg, der jeden Knoten einmal durchläuft
- Hamiltonkreis: Kreis, der jeden Knoten einmal durchläuft
- Satz von Dirac: ein Graph mit $n \geq 3$ Knoten mit Grad $\geq n/2$ hat einen Hamiltonkreis.
- Satz von Ore: ein Graph mit $n \geq 3$ mit $deg(v) + deg(u) \geq n$ für jedes Paar $u, v$ von nicht benachbarten Ecken hat einen Hamiltonkreis.

## 9 Graphentheorie 2

### 9.1 Satz von Euler

Für ein zusammenhängender, planarer Graph $G$ mit $|V|$ Knoten, $|E|$ Kanten und $|R|$ Regionen gilt:
$2 = |V| - |E| + |R|$

### 9.2 Satz von Kuratovsky

Ein Graph ist genau dann nicht planar, wenn er einen Untergraphen vom Typ $K_{3,3}$ oder $K_5$ enthält.

### 9.3 Färbungen

Anzahl mögliche Färbungen des Graphen $G$ mit $x$ Farben: $P(G, x)$

- Graph $G$ mit $n$ Knoten und leerer Kantenmenge: $P(G, x) = x^n$
- Vollständiger Graph $G$ mit $n$ Knoten: $P(K_n, x) = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdots (x-n+1)$
- Baum mit $n$ Knoten: $P(T_n, x) = x \cdot (x-1)^{n-1}$

### 9.4 Dekompositionsgleichung

Graph $G = (V, E)$ mit Kante $e = a, b$

- $G - e$: Graph $G$ unter Weglassung der Kante $e$
- $G_e$: Graph $G$ mit zusammengezogener Kante $e$ unter Weglassung aller parallelen Kanten
- Anzahl Färbungen von $G$ mit $x$ Farben: $P(G, x) = P(G - e, x) - P(G_e, x)$
- Ziel: Rückführung des Graphen $G$ auf Bäume ($T$) und vollständige Graphen ($K$) mit errechenbarer Anzahl von Färbungen

Chromatische Zahl eines Graphen: $\chi(G) = min\{x \in \mathbb{N} : P(G, x) > 0\}$ (das kleinste $x$, wofür das chromatische Polynom $P$ eine positive Zahl liefert)

### 9.5 Gerüste

- Gerüst oder Spannbaum eines Graphen $G = (V, E)$: zusammenhängender, kreisfreier Unterbaum, der alle Knoten aus $V$ enthält.
- Baum: 1 Gerüst
- Kreis mit $n$ Kanten: je ein Gerüst durch Entfernung einer Kante ($n$ Gerüste)
- $G - e$: Graph $G$ unter Weglassung der Kante $e$
- $G/e$: Graph $g$ unter Zusammenziehung der Kante $e$ und Weglassen aller Schlingen
- Anzahl der Gerüste des Graphen $G$: $t(G) = t(G - e) + t(G/e)$
- Ziel: Rückführung des Graphen $G$ auf Kreise und Bäume mit bekannter/errechenbarer Anzahl Gerüste

## 10 Graphentheorie 3

TODO: Pädu