

# Diskrete Mathematik

Patrick Bucher & Lukas Arnold

2. Juni 2017

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Foundations</b>	<b>1</b>	4.11 W'keitsverteilung einer Zufallsvariablen .	4
1.1 Operationen . . . . .	1	4.12 Erwartungswert einer Zufallsvariable . . .	4
1.2 Prioritäten der Operationen . . . . .	1	4.13 Varianz einer Zufallsvariable . . . . .	4
1.3 Tautologie & Kontraktion . . . . .	1	4.14 Standardabweichung einer Zufallsvariable	4
1.4 Logische Äquivalenzgesetze . . . . .	1	<b>5 Advanced Counting Techniques</b>	<b>4</b>
1.5 Äquivalenzgesetze . . . . .	2	5.1 Rekursionsbeziehungen . . . . .	4
1.6 Quantifikatoren . . . . .	2	5.2 Erzeugende Funktion . . . . .	4
1.7 Negation von Quantifikatoren . . . . .	2	5.3 Ein- / Ausschlussprinzip . . . . .	4
1.8 Beweise . . . . .	2	5.4 Anzahl Derangements . . . . .	4
<b>2 Basic Structures</b>	<b>2</b>	<b>6 Zahlentheorie</b>	<b>4</b>
2.1 Mengen . . . . .	2	6.1 Division mit Rest . . . . .	4
2.2 Spezielle Mengen . . . . .	2	6.2 Kongruenz modulo $n$ . . . . .	4
2.3 Mengenoperationen . . . . .	2	6.3 Euklidischer Algorithmus . . . . .	4
2.4 Rechenregeln für Mengen . . . . .	2	6.4 Diophantische Gleichung . . . . .	4
2.5 Definition von Funktionen . . . . .	2	<b>7 Graphentheorie 1</b>	<b>4</b>
2.6 Arten von Funktionen . . . . .	2	<b>8 Graphentheorie 2</b>	<b>4</b>
2.7 Zusammengesetzte Funktion . . . . .	2	<b>9 Graphentheorie 3</b>	<b>4</b>
2.8 Umkehrfunktion . . . . .	2	<b>1 Foundations</b>	
2.9 Folgen . . . . .	2	<b>1.1 Operationen</b>	
2.10 Reihen . . . . .	2	Negation $\neg p$ <i>Verneinung</i>	
2.11 Summenformeln . . . . .	3	Konjunktion $p \wedge q$ <i>Und-Verknüpfung</i>	
<b>3 Fundamentals</b>	<b>3</b>	Disjunktion $p \vee q$ <i>Oder-Verknüpfung</i>	
3.1 Wachstum von Funktionen . . . . .	3	EXOR $p \oplus q$ <i>Exklusiv-Oder</i>	
3.2 Exponentialfunktionen . . . . .	3	Implikation $p \rightarrow q$ <i>falls <math>p</math> dann <math>q</math></i>	
3.3 Logarithmusfunktionen . . . . .	3	Bikonditional $p \leftrightarrow q$ <i><math>p</math> genau dann wenn <math>q</math></i>	
3.4 Komplexität von Algorithmen . . . . .	3	<b>1.2 Prioritäten der Operationen</b>	
3.5 Zahlen und Division . . . . .	3	$\neg$ $\wedge$ $\vee$ $\oplus$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$	
3.6 Primzahl . . . . .	3	1 2 3 4 5 6	
3.7 Mersenne Primes . . . . .	3	<b>1.3 Tautologie &amp; Kontraktion</b>	
3.8 Primzahlsatz . . . . .	3	Tautologie $p \vee \neg p$ <i>immer wahre Aussage</i>	
3.9 ggT und kgV . . . . .	3	Kontraktion $p \wedge \neg q$ <i>immer falsche Aussage</i>	
3.10 Kongruenz . . . . .	3		
<b>4 Diskrete Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	<b>3</b>		
4.1 Wahrscheinlichkeit nach Laplace . . . . .	3		
4.2 Komplement der Wahrscheinlichkeit . . .	3		
4.3 Additionsregel . . . . .	3		
4.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit . . . . .	3		
4.5 Unabhängige Ereignisse . . . . .	3		
4.6 Satz der totalen Wahrscheinlichkeit . . .	3		
4.7 Satz von Bayes . . . . .	3		
4.8 Binomialverteilung . . . . .	3		
4.9 Hypergeometrische Verteilung . . . . .	3		
4.10 Poissonverteilung . . . . .	4		

## 1.4 Logische Äquivalenzgesetze

Identität	$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$	$p \vee \mathbf{F} \equiv p$
Dominanz	$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$	$p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
Negation	$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$	$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$
Assoziativ 1	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	
Assoziativ 2	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	
Distributiv 1	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	
Distributiv 2	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	
De Morgan's 1	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	
De Morgan's 2	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	

## 1.5 Äquivalenzgesetze

$$\begin{aligned} p \rightarrow q &\equiv \neg p \vee q \\ p \rightarrow q &\equiv \neg q \rightarrow \neg p \\ p \vee q &\equiv \neg p \rightarrow q \\ p \wedge q &\equiv \neg(p \rightarrow \neg q) \\ \neg(p \rightarrow q) &\equiv p \wedge \neg q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow q &\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \\ p \leftrightarrow q &\equiv \neg p \leftrightarrow \neg q \\ p \leftrightarrow q &\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\ \neg(p \leftrightarrow q) &\equiv p \leftrightarrow \neg q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \wedge r) &\equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \\ (p \vee q) \rightarrow r &\equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \\ p \rightarrow (q \vee r) &\equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \\ (p \wedge q) \rightarrow r &\equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \oplus q &\equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \\ \neg(p \oplus q) &\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\ \neg(p \oplus q) &\equiv p \leftrightarrow q \end{aligned}$$

## 1.6 Quantifikatoren

For All	$\forall$	für alle $x$ aus $P$ wahr
Exists	$\exists$	für mindestens ein $x$ aus $P$ wahr
Not Exists	$\neg\exists$	für alle $x$ aus $P$ falsch
Not For All	$\neg\forall$	für mindestens ein $x$ aus $P$ falsch

## 1.7 Negation von Quantifikatoren

$$\begin{aligned} \neg\exists x P(x) &\equiv \forall x \neg P(x) \\ \neg\forall x P(x) &\equiv \exists x \neg P(x) \end{aligned}$$

## 1.8 Beweise

direkter Beweis	$p \rightarrow q$
indirekter Beweis	$\neg q \rightarrow \neg p$
Widerspruch	$\neg p \rightarrow q$
Vorgehen Widerspruch	$(\neg p \rightarrow \mathbf{f}) \Rightarrow (p \rightarrow \mathbf{w})$

## 2 Basic Structures

### 2.1 Mengen

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, \dots\} \\ \mathbb{N}_0 &= \{0, 1, 2, \dots\} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$$

$\mathbb{R}$ : die Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{C}$ : die Menge der komplexen Zahlen

### 2.2 Spezielle Mengen

Teilmenge:	$A \subset B \equiv \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
Leere Menge:	$\emptyset \subset A$ gilt für jede Menge $A$
Kardinalität:	$ S $ beschreibt Anzahl Elmenete von $A$
Potenzmenge:	$P(S) = 2^S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
Kreuzprodukt:	$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

### 2.3 Mengenoperationen

Komplement:	$A^c = \overline{A} = \{m \in M : m \notin A\}$
Durchschnitt:	$A \cap B = \{m \in M \mid m \in A \wedge m \in B\}$
Vereinigung:	$A \cup B = \{m \in M \mid m \in A \vee m \in B\}$
Differenz:	$B - A = \{m \in M \mid m \in B \wedge m \notin A\}$

### 2.4 Rechenregeln für Mengen

Kommutativgesetz	$A \cup B = B \cup A$
Kommutativgesetz	$A \cap B = B \cap A$
Assoziativgesetz	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Assoziativgesetz	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributivgesetz	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Distributivgesetz	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgan's Gesetz	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
De Morgan's Gesetz	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

### 2.5 Definition von Funktionen

$$\begin{aligned} f : X \rightarrow Y \quad x \mapsto f(x) \quad f : x \mapsto f(x) \\ f(x) := \begin{cases} 5 & \text{für } x < 0 \\ x^2 + 5 & \text{für } x \in [0, 2] \\ 0.5x + 8 & \text{für } x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

### 2.6 Arten von Funktionen

injektiv	auf jedes Element in $Y$ zeigt höchstens ein Pfeil
surjektiv	auf jedes Element in $Y$ zeigt mindestens ein Pfeil
bijektiv	auf jedes Element in $Y$ zeigt genau ein Pfeil

### 2.7 Zusammengesetzte Funktion

$$\begin{aligned} g : X \rightarrow U \quad x \mapsto g(x) \\ f : U \rightarrow Y \quad u \mapsto g(u) \\ F = f \circ g : X \rightarrow Y \quad x \mapsto f(g(x)) \end{aligned}$$

### 2.8 Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad x = f^{-1}(y) \\ (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \\ (f^{-1} \circ f)(y) = f^{-1}(f(y)) = y \end{aligned}$$

## 2.9 Folgen

harmonisch  $a_k = 1/k$   
 geometrisch  $a_k = a_0 * q^k$   
 arithmetisch  $a_k = a_0 + (k * d)$

## 2.10 Reihen

harmonisch  $\sum_{k=1}^n 1/k$   
 geometrisch  $a_0 * \sum_{k=0}^{n-1} q^k = a_0 \frac{q^n - 1}{q - 1}$   
 arithmetisch  $\sum_{k=0}^{n-1} (a_0 + kd) = n \frac{a_0 + a_{n-1}}{2}$

## 2.11 Summenformeln

$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$   
 $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$   
 $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$   
 $\sum_{k=0}^n x^k, |x| < 1 = \frac{1}{1-x}$   
 $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}, |x| < 1 = \frac{1}{(1-x)^2}$

## 3 Fundamentals

### 3.1 Wachstum von Funktionen

$f =$  "sehr komplizierte Funktion"  
 $g =$  "einfachere Funktion"  
 $|f(x)| \leq C|g(x)|, \forall x > k$   
 $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$

### 3.2 Exponentialfunktionen

$a^r * a^s = a^{r+s}$   
 $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$   
 $(a^r)^s = (a^s)^r = a^{r*s}$

### 3.3 Logarithmusfunktionen

$\log_a(u * v) = \log_a(u) + \log_a(v)$   
 $\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a(u) - \log_a(v)$   
 $\log_a(u^v) = v * \log_a(u)$

### 3.4 Komplexität von Algorithmen

konstant  $O(1)$   
 logarithmisch  $O(\log n)$   
 linear  $O(n)$   
 n log n  $O(n * \log n)$   
 polynomial  $O(n^b)$   
 exponentiell  $O(b^n), b > 1$   
 faktorielle  $O(n!)$

### 3.5 Zahlen und Division

$a|b \wedge a|c \rightarrow a|(b + c)$   
 $a|b \rightarrow \forall c(a|bc)$   
 $a|b \wedge b|c \rightarrow a|c$

### 3.6 Primzahl

$\nexists a(a|n \wedge 1 < a < n)$

### 3.7 Mersenne Primes

$M_n = 2^p - 1, p \in \text{"Primzahlen"}$

### 3.8 Primzahlsatz

$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)}$

### 3.9 ggT und kgV

$a = dq + r$ , wobei  $(0 \leq r < d)$   
 $q = a \text{ div } d$  und  $r = a \text{ mod } d$   
 $ab = \text{ggT}(a, b) * \text{kgV}(a, b)$

### 3.10 Kongruenz

$a \equiv b \text{ mod } m, m|(a - b)$

## 4 Diskrete Wahrscheinlichkeitsrechnung

### 4.1 Wahrscheinlichkeit nach Laplace

$p(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{\text{Anzahl guenstige}}{\text{Anzahl moegliche}}$

### 4.2 Komplement der Wahrscheinlichkeit

$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

### 4.3 Additionsregel

$p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2)$

### 4.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

### 4.5 Unabhängige Ereignisse

$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)p(B)}{p(B)} = p(A)$

### 4.6 Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$p(A) = \sum_{i=1}^k p(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^k p(A|B_i) \cdot p(B_i)$   
 $p(A|C) = \frac{1}{p(C)} \sum_{i=1}^k p(A \cap (B_i \cap C))$   
 $p(A|C) = \sum_{i=1}^k p(A|B_i) \cdot p(B_i|C)$

Spezialfall für 2 Mengen:

$p(A) = p(A|B) \cdot p(B) + p(A|\bar{B}) \cdot p(\bar{B})$

### 4.7 Satz von Bayes

$p(B_j|A) = \frac{p(A|B_j) \cdot p(B_j)}{p(A)} = \frac{p(A|B_j) \cdot p(B_j)}{\sum_{i=1}^k p(A|B_i) \cdot p(B_i)}$

Spezialfall für 2 Mengen:

$p(B|A) = \frac{p(A|B) \cdot p(B)}{p(A|B) \cdot p(B) + p(A|\bar{B}) \cdot p(\bar{B})}$

## 4.8 Binomialverteilung

$$B(k|n, p) = B_{n,p}(k) = C(n, k)p^k(1-p)^{n-k}$$

$$B(k|n, p) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Bedingung:

$$p = M/N \text{ und } n \leq M/10 \leq (N - M)/10$$

## 4.9 Hypergeometrische Verteilung

$$p(k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

## 4.10 Poissonverteilung

$$f(k) = \frac{u^k}{k!} e^{-u}$$

Bedingung:

$$u = np \text{ und } p \leq 0.1, n \geq 100$$

## 4.11 W'keitsverteilung einer Zufallsvariablen

$$\{(r, p(X = r)) | \forall r \in X(S)\}$$

## 4.12 Erwartungswert einer Zufallsvariable

$$E(C) = \sum_{s \in S} X(s) \cdot p(s) = \sum_{r \in X(S)} r \cdot p(X = r)$$

## 4.13 Varianz einer Zufallsvariable

$$V(X) = \sum_{s \in S} (X(s) - E(X))^2 \cdot p(s)$$

$$V(X) = \sum_{r \in X(S)} (r - E(X))^2 \cdot p(X = r)$$

## 4.14 Standardabweichung einer Zufallsvariable

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

## 5 Advanced Counting Techniques

### 5.1 Rekursionsbeziehungen

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1), \forall n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}^+$$

### 5.2 Erzeugende Funktion

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

### 5.3 Ein- / Ausschlussprinzip

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

### 5.4 Anzahl Derangements

$$D_n = n! \left[ 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right]$$

## 6 Zahlentheorie

### 6.1 Division mit Rest

$$A = q * n + r \text{ wobei } 0 \leq r < |n|$$

## 6.2 Kongruenz modulo n

$$a \equiv b \pmod{n} \iff n | (a - b)$$

$$\iff \exists q : a - b = q * n$$

$$\iff \exists q : a = b + q * n$$

## 6.3 Euklidische Algorithmus

$$\begin{array}{rclcl} 963 & = & 4 & * & 218 & + & 91 \\ 218 & = & 2 & * & 91 & + & 36 \\ 91 & = & 2 & * & 36 & + & 19 \\ 36 & = & 1 & * & 19 & + & 17 \\ 19 & = & 1 & * & 17 & + & 2 \\ 17 & = & 8 & * & 2 & + & 1 \\ 8 & = & 2 & * & 1 & + & 0 \end{array}$$

## 6.4 Diophantischer Gleichung

$$n_1 * x + n_2 * y = n$$

## 7 Graphentheorie 1

TODO: Pädü

## 8 Graphentheorie 2

TODO: Pädü

## 9 Graphentheorie 3

TODO: Pädü