

# Diskrete Mathematik

Patrick Bucher & Lukas Arnold

27. Juni 2017

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Foundations</b>	<b>3</b>	4.2 Induktionsbeweis . . . . .	5
1.1 Operationen . . . . .	3	4.3 Schlussregeln / Inferenzregeln . . . . .	5
1.2 Prioritäten der Operationen . . . . .	3	<b>5 Counting</b>	<b>5</b>
1.3 Tautologie & Kontraktion . . . . .	3	5.1 Produktregel . . . . .	5
1.4 Logische Äquivalenzgesetze . . . . .	3	5.2 Summenregel . . . . .	5
1.5 Äquivalenzgesetze . . . . .	3	5.3 Einschluss-/Ausschlussprinzip . . . . .	5
1.6 Quantifikatoren . . . . .	3	5.4 Verallgemeinertes Schubfachprinzip . . . . .	5
1.7 Negation von Quantifikatoren . . . . .	3	5.5 Permutationen . . . . .	5
1.8 Beweise . . . . .	3	5.6 Anzahl Permutationen . . . . .	5
<b>2 Basic Structures</b>	<b>3</b>	5.7 Kombinationen . . . . .	5
2.1 Mengen . . . . .	3	5.8 Anzahl Kombinationen . . . . .	5
2.2 Spezielle Mengen . . . . .	3	5.9 Binomialkoeffizienten . . . . .	6
2.3 Mengenoperationen . . . . .	3	5.10 Binomialsatz . . . . .	6
2.4 Rechenregeln für Mengen . . . . .	3	<b>6 Diskrete Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	<b>6</b>
2.5 Definition von Funktionen . . . . .	4	6.1 Wahrscheinlichkeit nach Laplace . . . . .	6
2.6 Arten von Funktionen . . . . .	4	6.2 Komplement der Wahrscheinlichkeit . . . . .	6
2.7 Zusammengesetzte Funktion . . . . .	4	6.3 Additionsregel . . . . .	6
2.8 Umkehrfunktion . . . . .	4	6.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit . . . . .	6
2.9 <i>ceiling</i> und <i>floor</i> -Funktion . . . . .	4	6.5 Unabhängige Ereignisse . . . . .	6
2.10 Folgen . . . . .	4	6.6 Satz der totalen Wahrscheinlichkeit . . . . .	6
2.11 Reihen . . . . .	4	6.7 Satz von Bayes . . . . .	6
2.12 Summenformeln . . . . .	4	6.8 Binomialverteilung . . . . .	6
<b>3 Fundamentals</b>	<b>4</b>	6.9 Hypergeometrische Verteilung . . . . .	6
3.1 Wachstum von Funktionen . . . . .	4	6.10 Poissonverteilung . . . . .	6
3.2 Exponentialfunktionen . . . . .	4	6.11 Verteilung einer Zufallsvariablen . . . . .	6
3.3 Logarithmusfunktionen . . . . .	4	6.12 Erwartungswert einer Zufallsvariable . . . . .	6
3.4 Komplexität von Algorithmen . . . . .	4	6.13 Unabhängigkeit von Zufallsvariablen . . . . .	6
3.5 Zahlen und Division . . . . .	4	6.14 Varianz einer Zufallsvariable . . . . .	6
3.6 Primzahl . . . . .	4	6.15 Standardabweichung einer Zufallsvariable . . . . .	6
3.7 Mersenne Primes . . . . .	4	<b>7 Advanced Counting Techniques</b>	<b>6</b>
3.8 Primzahlsatz . . . . .	4	7.1 Rekursionsbeziehungen . . . . .	6
3.9 ggT und kgV . . . . .	4	7.2 Erzeugende Funktion . . . . .	6
3.10 Kongruenz . . . . .	4	7.3 Anzahl Derangements . . . . .	6
3.11 Addition zweier Matrizen . . . . .	4	<b>8 Zahlentheorie</b>	<b>6</b>
3.12 Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl . . . . .	5	8.1 Division mit Rest . . . . .	6
3.13 Multiplikation von Matrizen . . . . .	5	8.2 Kongruenz modulo $n$ . . . . .	6
3.14 Transponierte Matrix . . . . .	5	8.3 Euklidischer Algorithmus . . . . .	7
3.15 Symmetrie einer Matrix . . . . .	5	8.4 Diophantische Gleichung . . . . .	7
3.16 Einheitsmatrix . . . . .	5	8.5 erweiterter Euklidischer Algorithmus . . . . .	7
3.17 Inverse Matrix . . . . .	5	8.6 Chinesischer Restsatz . . . . .	7
3.18 Boolesches Produkt zweier Matrizen . . . . .	5	8.7 Eulersche $\phi$ -Funktion . . . . .	7
<b>4 Reasoning</b>	<b>5</b>	8.8 Primzahl . . . . .	7
4.1 Beweismethoden . . . . .	5	8.9 kleiner Satz von Fermat . . . . .	7
		8.10 Primzahltest von Wilson . . . . .	7

8.11	Restklassen . . . . .	7
8.12	Rechenregeln für das modulare Rechnen .	7
8.13	Potenzieren modulo $n$ . . . . .	7
8.14	Square and Multiply Algorithm . . . . .	7
8.15	Nullteiler . . . . .	7
8.16	Inverse Elemente . . . . .	7
8.17	Primitive Elemente / Erzeugende . . . . .	7
8.18	Einwegfunktionen . . . . .	7
8.19	Modulare Quadratwurzeln . . . . .	7
8.20	diskrete Logarithmus . . . . .	7
8.21	Diffie-Hellmann Schlüsselvereinbarung .	8
8.22	Symmetrische Verschlüsselung . . . . .	8
8.23	Asymmetrische Verschlüsselung . . . . .	8
8.24	Satz von Euler . . . . .	8
<b>9</b>	<b>Graphentheorie</b>	<b>8</b>
9.1	Grade . . . . .	8
9.2	Isomorphe Graphen . . . . .	8
9.3	Vollständiger Graph . . . . .	8
9.4	Eigenschaften eines Baumes . . . . .	8
9.5	Vollständige bipartite Graphen . . . . .	8
9.6	Page-Rank-Algorithmus . . . . .	8
9.7	Matrizen . . . . .	8
9.8	Wege und Kreise . . . . .	8
9.9	Planare Graphen . . . . .	9
9.10	Satz von Euler . . . . .	9
9.11	Satz von Kuratovsky . . . . .	9
9.12	Färbungen . . . . .	9
9.13	Dekompositionsgleichung . . . . .	9
9.14	Gerüste / Spannbäume . . . . .	9
9.15	Gewichtete Graphen . . . . .	9
9.16	Minimale aufspannende Bäume . . . . .	9
9.17	Algorithmus von Dijkstra . . . . .	9
9.18	Algorithmus von Prim . . . . .	9
9.19	Algorithmus von Kruskal . . . . .	9

## 1 Foundations

### 1.1 Operationen

Negation	$\neg p$	Verneinung
Konjunktion	$p \wedge q$	Und-Verknüpfung
Disjunktion	$p \vee q$	Oder-Verknüpfung
EXOR	$p \oplus q$	Exklusiv-Oder
Implikation	$p \rightarrow q$	falls $p$ dann $q$
Bikonditional	$p \leftrightarrow q$	$p$ genau dann wenn $q$

### 1.2 Prioritäten der Operationen

$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\oplus$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
1	2	3	4	5	6

### 1.3 Tautologie & Kontraktion

Tautologie	$p \vee \neg p$	immer wahre Aussage
Kontraktion	$p \wedge \neg p$	immer falsche Aussage

### 1.4 Logische Äquivalenzgesetze

Identität	$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$	$p \vee \mathbf{F} \equiv p$
Dominanz	$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$	$p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
Negation	$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$	$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$
Assoziativ 1	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	
Assoziativ 2	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	
Distributiv 1	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	
Distributiv 2	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	
De Morgan's 1	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	
De Morgan's 2	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	

### 1.5 Äquivalenzgesetze

$p \rightarrow q$	$\equiv$	$\neg p \vee q$
$p \rightarrow q$	$\equiv$	$\neg q \rightarrow \neg p$
$p \vee q$	$\equiv$	$\neg p \rightarrow q$
$p \wedge q$	$\equiv$	$\neg(p \rightarrow \neg q)$
$\neg(p \rightarrow q)$	$\equiv$	$p \wedge \neg q$

$p \leftrightarrow q$	$\equiv$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \leftrightarrow q$	$\equiv$	$\neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q$	$\equiv$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q)$	$\equiv$	$p \leftrightarrow \neg q$

$p \rightarrow (q \wedge r)$	$\equiv$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
$(p \vee q) \rightarrow r$	$\equiv$	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
$p \rightarrow (q \vee r)$	$\equiv$	$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$
$(p \wedge q) \rightarrow r$	$\equiv$	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

$p \oplus q$	$\equiv$	$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
$\neg(p \oplus q)$	$\equiv$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \oplus q)$	$\equiv$	$p \leftrightarrow q$

### 1.6 Quantifikatoren

For All	$\forall$	für alle $x$ aus $P$ wahr
Exists	$\exists$	für mindestens ein $x$ aus $P$ wahr
Not Exists	$\neg \exists$	für alle $x$ aus $P$ falsch
Not For All	$\neg \forall$	für mindestens ein $x$ aus $P$ falsch

### 1.7 Negation von Quantifikatoren

$\neg \exists x P(x)$	$\equiv$	$\forall x \neg P(x)$
$\neg \forall x P(x)$	$\equiv$	$\exists x \neg P(x)$

### 1.8 Beweise

direkter Beweis	$p \rightarrow q$
indirekter Beweis	$\neg q \rightarrow \neg p$
Widerspruch	$\neg p \rightarrow q$
Vorgehen Widerspruch	$(\neg p \rightarrow \mathbf{f}) \Rightarrow (p \rightarrow \mathbf{w})$

## 2 Basic Structures

### 2.1 Mengen

$\mathbb{N}$	$= \{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	$= \{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	$= \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}^+$	$= \{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	$= \{p/q \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{R}$	die Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	die Menge der komplexen Zahlen

### 2.2 Spezielle Mengen

Teilmenge:	$A \subset B \equiv \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
Leere Menge:	$\emptyset \subset A$ gilt für jede Menge $A$
Kardinalität:	$ S $ beschreibt Anzahl Elmenete von $A$
Potenzmenge:	$P(S) = 2^S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
Kreuzprodukt:	$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

### 2.3 Mengenoperationen

Komplement:	$A^c = \overline{A} = \{m \in M : m \notin A\}$
Durchschnitt:	$A \cap B = \{m \in M \mid m \in A \wedge m \in B\}$
Vereinigung:	$A \cup B = \{m \in M \mid m \in A \vee m \in B\}$
Differenz:	$B - A = \{m \in M \mid m \in B \wedge m \notin A\}$

### 2.4 Rechenregeln für Mengen

Kommutativgesetz	$A \cup B = B \cup A$
Kommutativgesetz	$A \cap B = B \cap A$
Assoziativgesetz	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
Assoziativgesetz	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
Distributivgesetz	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Distributivgesetz	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgan's Gesetz	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
De Morgan's Gesetz	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

## 2.5 Definition von Funktionen

$$f: X \rightarrow Y \quad x \mapsto f(x) \quad f: x \mapsto f(x)$$

$$f(x) := \begin{cases} 5 & \text{für } x < 0 \\ x^2 + 5 & \text{für } x \in [0, 2] \\ 0.5x + 8 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

## 2.6 Arten von Funktionen

injektiv    *auf jedes Element in Y zeigt höchstens ein Pfeil*  
 surjektiv    *auf jedes Element in Y zeigt mindestens ein Pfeil*  
 bijektiv    *auf jedes Element in Y zeigt genau ein Pfeil*

## 2.7 Zusammengesetzte Funktion

$$g: X \rightarrow U \quad x \mapsto g(x)$$

$$f: U \rightarrow Y \quad u \mapsto f(u)$$

$$F = f \circ g: X \rightarrow Y \quad x \mapsto f(g(x))$$

## 2.8 Umkehrfunktion

$$y = f(x) \quad x = f^{-1}(y)$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(y) = f^{-1}(f(y)) = y$$

## 2.9 ceiling und floor-Funktion

$$\lceil \cdot \rceil: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto \lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} | x \leq n\}$$

$$\lfloor \cdot \rfloor: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$$

## 2.10 Folgen

harmonisch     $a_k = 1/k$   
 geometrisch     $a_k = a_0 * q^k$   
 arithmetisch     $a_k = a_0 + (k * d)$

## 2.11 Reihen

harmonisch     $\sum_{k=1}^n 1/k$   
 geometrisch     $a_0 * \sum_{k=0}^{n-1} q^k = a_0 \frac{q^n - 1}{q - 1}$   
 arithmetisch     $\sum_{k=0}^{n-1} (a_0 + kd) = n \frac{a_0 + a_{n-1}}{2}$

## 2.12 Summenformeln

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{k=0}^n x^k, |x| < 1 = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k, x \neq 0, x \neq 1 = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1}, |x| < 1 = \frac{1}{(1-x)^2}$$

## 3 Fundamentals

### 3.1 Wachstum von Funktionen

$f$  = "sehr komplizierte Funktion"  
 $g$  = "einfachere Funktion"  
 $|f(x)| \leq C|g(x)|, \forall x > 2$   
 $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$

## 3.2 Exponentialfunktionen

$$a^r * a^s = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = (a^s)^r = a^{r*s}$$

## 3.3 Logarithmusfunktionen

$$\log_a(u * v) = \log_a(u) + \log_a(v)$$

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$$

$$\log_a(u^v) = v * \log_a(u)$$

## 3.4 Komplexität von Algorithmen

konstant     $\mathcal{O}(1)$   
 logarithmisch     $\mathcal{O}(\log n)$   
 linear     $\mathcal{O}(n)$   
 n log n     $\mathcal{O}(n * \log n)$   
 polynomial     $\mathcal{O}(n^b)$   
 exponentiell     $\mathcal{O}(b^n), b > 1$   
 faktorielle     $\mathcal{O}(n!)$

## 3.5 Zahlen und Division

$$a|b \wedge a|c \rightarrow a|(b+c)$$

$$a|b \rightarrow \forall c (a|bc)$$

$$a|b \wedge b|c \rightarrow a|c$$

## 3.6 Primzahl

$$\nexists a (a|n \wedge (1 < a < n))$$

## 3.7 Mersenne Primes

$$M_n = 2^p - 1, p \in \text{"Primzahlen"}$$

## 3.8 Primzahlsatz

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)}$$

## 3.9 ggT und kgV

$$a = dq + r, \text{ wobei } (0 \leq r < d)$$

$$q = a \text{ div } d \text{ und } r = a \bmod d$$

$$ab = \text{ggT}(a, b) * \text{kgV}(a, b)$$

## 3.10 Kongruenz

$$a \equiv b \bmod m, m|(a-b)$$

## 3.11 Addition zweier Matrizen

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

### 3.12 Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

### 3.13 Multiplikation von Matrizen

$$A \times B = C \quad \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = (a_{11} * b_{11}) + (a_{12} * b_{21}) + \cdots + (a_{1n} * b_{m1})$$

### 3.14 Transponierte Matrix

$A^T$  durch Vertauschen von Zeilen und Spalten

### 3.15 Symmetrie einer Matrix

ist symmetrisch, falls  $A^T = A$

ist antisymmetrisch, falls  $A^T = -A$

### 3.16 Einheitsmatrix

$I_n$  ist eine Matrix bei der alle Elemente auf der Diagonalen Eins und alle anderen Null sind

### 3.17 Inverse Matrix

$$A^{-1} * A = A * A^{-1} = I_n$$

### 3.18 Boolesches Produkt zweier Matrizen

$$A \odot B = [c_{ij}],$$

wobei  $c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{in} \wedge b_{nj})$

## 4 Reasoning

### 4.1 Beweismethoden

Direkter Beweis	$p \rightarrow q$
Beweis durch Kontraposition	$\neg q \rightarrow \neg p$
Beweis durch Widerspruch	$\neg p \rightarrow q$

### 4.2 Induktionsbeweis

Induktionshypothese	$P(k)$
Induktionsverankerung	$P(1)$
Induktionsschritt	$P(k) \rightarrow P(k+1)$

$$[P(1) \wedge \forall k(P(k) \rightarrow P(k+1))] \rightarrow \forall n P(n)$$

### 4.3 Schlussregeln / Inferenzregeln

Modus ponens	$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
Modus tollens	$((\neg q \wedge (p \rightarrow q))) \rightarrow \neg p$
Hypothetischer Syllogismus	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
Disjunktiver Syllogismus	$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$
Addition	$p \rightarrow (p \vee q)$
Simplifikation	$(p \wedge q) \rightarrow p$
Konjunktion	$((p) \wedge (q)) \rightarrow p \wedge q$
Resolution	$((p \wedge q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$

## 5 Counting

### 5.1 Produktregel

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| * |A_2| * \cdots * |A_n|$$

### 5.2 Summenregel

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

### 5.3 Einschluss-/Ausschlussprinzip

für 2 Mengen:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

für 3 Mengen:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

### 5.4 Verallgemeinertes Schubfachprinzip

Falls man  $N$  Objekte auf  $k$  Schubfächer verteilt, dann gibt es wenigstens ein Schubfach, welches mindestens  $\lceil N/k \rceil$  Objekte enthält

### 5.5 Permutationen

geordnete Anordnung von  $r$  der  $n$  Elemente

### 5.6 Anzahl Permutationen

Bedingung	$0 \leq r \leq n \in \mathbb{N}$
ohne Wiederholung	$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
mit Wiederholung	$P(n, r) = n^r$

### 5.7 Kombinationen

ungeordnete Auswahl von  $r$  dieser  $n$  Elemente

### 5.8 Anzahl Kombinationen

Bedingung	$0 \leq r \leq n \in \mathbb{N}$
ohne W'holung	$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$
mit W'holung	$C(n+r-1, r) = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r}$

## 5.9 Binomialkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha * (\alpha-1) * \dots * (\alpha-k+1)}{k!}$$

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = C(n, n-k)$$

## 5.10 Binomialsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = 3^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

## 6 Diskrete Wahrscheinlichkeitsrechnung

### 6.1 Wahrscheinlichkeit nach Laplace

$$p(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{\text{Anzahl guenstige}}{\text{Anzahl moegliche}}$$

### 6.2 Komplement der Wahrscheinlichkeit

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

### 6.3 Additionsregel

$$p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2)$$

### 6.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

### 6.5 Unabhängige Ereignisse

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)p(B)}{p(B)} = p(A)$$

### 6.6 Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$p(A) = \sum_{i=1}^k p(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^k p(A|B_i) \cdot p(B_i)$$

$$p(A|C) = \frac{1}{p(C)} \sum_{i=1}^k p(A \cap (B_i \cap C))$$

$$p(A|C) = \sum_{i=1}^k p(A|B_i) \cdot p(B_i|C)$$

Spezialfall für 2 Mengen:

$$p(A) = p(A|B) \cdot p(B) + p(A|\bar{B}) \cdot p(\bar{B})$$

### 6.7 Satz von Bayes

$$p(B_j|A) = \frac{p(A|B_j) p(B_j)}{p(A)} = \frac{p(A|B_j) p(B_j)}{\sum_{i=1}^k p(A|B_i) \cdot p(B_i)}$$

Spezialfall für 2 Mengen:

$$p(B|A) = \frac{p(A|B) p(B)}{p(A|B) \cdot p(B) + p(A|\bar{B}) \cdot p(\bar{B})}$$

### 6.8 Binomialverteilung

$$B(k|n, p) = B_{n,p}(k) = C(n, k) p^k (1-p)^{n-k}$$

$$B(k|n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bedingung:

$$p = M/N \text{ und } n \leq M/10 \leq (N-M)/10$$

## 6.9 Hypergeometrische Verteilung

$$p(k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

## 6.10 Poissonverteilung

$$f(k) = \frac{u^k}{k!} e^{-u}$$

Bedingung:

$$u = np \text{ und } p \leq 0.1, n \geq 100$$

## 6.11 W'keitsverteilung einer Zufallsvariablen

$$\{(r, p(X=r)) | \forall r \in X(S)\}$$

## 6.12 Erwartungswert einer Zufallsvariable

$$E(C) = \sum_{s \in S} X(s) \cdot p(s) = \sum_{r \in X(S)} r \cdot p(X=r)$$

## 6.13 Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

$$\forall r_1 \in \mathbb{R} \text{ und } \forall r_2 \in \mathbb{R} \text{ gilt } p(X(s) = r_1 \wedge Y(s) = r_2) = p(X(s) = r_1) * p(Y(s) = r_2)$$

## 6.14 Varianz einer Zufallsvariable

$$V(X) = \sum_{s \in S} (X(s) - E(X))^2 \cdot p(s)$$

$$V(X) = \sum_{r \in X(S)} (r - E(X))^2 \cdot p(X=r)$$

## 6.15 Standardabweichung einer Zufallsvariable

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

## 7 Advanced Counting Techniques

### 7.1 Rekursionsbeziehungen

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1), \forall n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}^+$$

### 7.2 Erzeugende Funktion

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots$$

### 7.3 Anzahl Derangements

$$D_n = n! \left[ 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right]$$

## 8 Zahlentheorie

### 8.1 Division mit Rest

$$A = q * n + r \text{ wobei } 0 \leq r < |n|$$

### 8.2 Kongruenz modulo n

$$a \equiv b \pmod{n} \iff n | (a-b)$$

$$\iff \exists q : a - b = q * n$$

$$\iff \exists q : a = b + q * n$$

### 8.3 Euklidischer Algorithmus

$$\begin{array}{rclcl}
 963 & = & 4 & * & 218 & + & 91 \\
 218 & = & 2 & * & 91 & + & 36 \\
 91 & = & 2 & * & 36 & + & 19 \\
 36 & = & 1 & * & 19 & + & 17 \\
 19 & = & 1 & * & 17 & + & 2 \\
 17 & = & 8 & * & 2 & + & 1 \\
 8 & = & 2 & * & 1 & + & 0
 \end{array}$$

### 8.4 Diophantischer Gleichung

$$\begin{aligned}
 n_1 * x + n_2 * y &= n \\
 n_1 * (x + k * n_2) + n_2 * (y - k * n_1) &= 1
 \end{aligned}$$

### 8.5 erweiterter Euklidischer Algorithmus

$$\begin{array}{rclcl}
 67 & - & 1 & 0 \\
 24 & 2 * & 0 & 1 \\
 19 * & 1 & 1 * & -2 * & 19 = 67 \% 24 \\
 5 & 4 & -1 & 3 & 2 = 67 \text{ div } 24 \\
 4 & 1 & 4 & -11 & 1 = 1 - 2 * 0 \\
 1 & & -5 & 14 & -2 = 0 - 2 * 1
 \end{array}$$

### 8.6 Chinesischer Restsatz

$$\begin{aligned}
 m &= m_1 * m_2 * m_3 * \dots \\
 M_i &= \frac{m}{m_i} \\
 M_i * y_i &\equiv 1 \pmod{m_i} \\
 x &= \sum_{i=1}^k r_i * M_i * y_i
 \end{aligned}$$

### 8.7 Eulersche $\phi$ -Funktion

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Z}_n &:= \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \\
 \mathbb{Z}_n^* &:= \{x \in \mathbb{Z}_n \mid x > 0 \text{ und } \text{ggT}(x, n) = 1\} \\
 |\mathbb{Z}_n^*| &:= \text{Anzahl Elemente in } \mathbb{Z}_n^*
 \end{aligned}$$

$$\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto |\mathbb{T}_n^*| =: \phi(n)$$

$$\begin{aligned}
 \phi(p) &= p-1 \\
 \phi(p * q) &= (p-1) * (q-1) \\
 \phi(m) &= (p_1-1) * p_1^{r_1-1} * (p_2-1) * p_2^{r_2-1} * \dots
 \end{aligned}$$

### 8.8 Primzahl

$$n = p_1^{e_1} * p_2^{e_2} * p_3^{e_3} * \dots * p_n^{e_n}$$

### 8.9 kleiner Satz von Fermat

$$m^p \pmod p = m \pmod p$$

### 8.10 Primzahltest von Wilson

falls  $(n-1)! + 1$  durch  $n$  teilbar ist

### 8.11 Restklassen

$$[r] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv r \pmod n\}$$

### 8.12 Rechenregeln für das modulare Rechnen

$$\begin{aligned}
 a \oplus_n b &= b \oplus_n a = a + b \pmod n = R_n(a + b) \\
 a \odot_n b &= b \odot_n a = a * b \pmod n = R_n(a * b) \\
 a \odot_n (b \oplus_n c) &= (a \odot_n b) \oplus_n (a \odot_n c)
 \end{aligned}$$

### 8.13 Potenzieren modulo n

$$x^m = x^{2*k+l} = x^{2*k} * x^l = (x^k)^2 * x^l$$

### 8.14 Square and Multiply Algorithm

1. Exponent binär schreiben
2. Q bedeutet quadrieren und M multiplizieren
3. Ersetze 1 durch QM und 0 durch Q
4. das erste (links) QM streichen
5. Reihenfolge von Quadrieren und Multiplizieren
6. Exponent einsetzen
7. entsprechend Quadrieren und Multiplizieren
8. immer wieder modular reduzieren

### 8.15 Nullteiler

$$\begin{aligned}
 a \in \mathbb{Z}_n, a \neq 0, b \in \mathbb{Z}_n, b \neq 0 \\
 \text{falls } a \odot_n b = 0, \text{ dann ist } a \text{ Nullteiler von } \mathbb{Z}_n
 \end{aligned}$$

### 8.16 Inverse Elemente

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Z}_n^* &= \{a \in \mathbb{Z}_n \mid \text{ggT}(a, n) = 1\} \\
 a^{-1} &= R_p(a^{p-2}) = a^{p-2} \pmod p, (p = \text{Primzahl})
 \end{aligned}$$

### 8.17 Primitive Elemente / Erzeugende

falls jedes Element  $a \in \mathbb{Z}_p^*$  eine Potenz von  $z$  ist

### 8.18 Einwegfunktionen

$$\begin{array}{ll}
 \text{Quadrieren modulo } n & x \mapsto x^2 \pmod n \\
 \text{Potenzieren modulo } n & x \mapsto x^e \pmod n \\
 \text{Exponentialfunktion modulo } p & x \mapsto b^x \pmod p
 \end{array}$$

$n = pq$  (Multiplikation zweier Primzahlen)

### 8.19 Modulare Quadratwurzeln

$$\begin{aligned}
 \sqrt{a} \pmod n &= \{x \in \mathbb{Z}_n^* \mid x^2 = a \pmod n\} \\
 \Rightarrow \text{Für ein } a \text{ kann es mehrere Quadratwurzeln geben}
 \end{aligned}$$

### 8.20 diskrete Logarithmus

$$\exp_b(k) = b^k \pmod p$$

## 8.21 Diffie-Hellmann Schlüsselvereinbarung

1. Wähle zwei natürliche Zahlen  $p$  und  $s$
2.  $A$  wählt eine Zufallszahl  $a < p$   
 $A$  berechnet  $\alpha = s^a \bmod p$   
 $A$  sendet  $\alpha$  über einen Kanal an  $B$
3.  $B$  wählt eine Zufallszahl  $b < p$   
 $B$  berechnet  $\beta = s^b \bmod p$   
 $B$  sendet  $\beta$  über einen Kanal an  $A$
4.  $A$  berechnet  $\beta^a \bmod p = s^{b \cdot a} \bmod p$
5.  $B$  berechnet  $\alpha^b \bmod p = s^{a \cdot b} \bmod p$
6. Beide haben den gemeinsamen Schlüssel

## 8.22 Symmetrische Verschlüsselung

Verschlüsselungsfunktion  $f$ , Schlüssel  $k$ , Klartext  $m$ ,  
 Geheimtext  $c$ , Entschlüsselungsfunktion  $f^*$

$$m \mapsto c = f(k, m) \text{ und } c \mapsto m = f^*(k, c)$$

Bedingung:  $f^*(k, f(k, m)) = m$

## 8.23 Asymmetrische Verschlüsselung

privater Schlüssel  $d = d_T$ , öffentlicher Schlüssel  $e = e_T$ ,  
 Klartext  $m$ , Geheimtext  $c$

$$m \mapsto c = f_e(m) \text{ und } c \mapsto m' = f_d(c)$$

Bedingung:  $m' = f_d(c) = f_d(f_e(m)) = m$

## 8.24 Satz von Euler

$$m^{k\phi(n)+1} \bmod n = m^{k(p-1)(q-1)+1} \bmod n = m$$

# 9 Graphentheorie

## 9.1 Grade

$$\begin{aligned} \text{Eckengrad} & \quad \sum_{v \in V} \deg(v) = 2 * |E| \\ \text{Maximalgrad} & \quad \Delta(G) = \max_{v \in V(G)} \deg(v) \\ \text{Minimalgrad} & \quad \delta(G) = \min_{v \in V(G)} \deg(v) \end{aligned}$$

Spezielle Ecken:

$$\begin{aligned} \text{isolierte Ecke} & \quad \deg(v) = 0 \\ \text{Endecke} & \quad \deg(v) = 1 \end{aligned}$$

## 9.2 Isomorphe Graphen

isomorph, falls es eine Bijektion  $f: V \rightarrow V'$   
 $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E'$

## 9.3 Vollständiger Graph

Vollständiger Graph mit  $n$  Knoten: genau eine Kante zwischen je zwei Knoten ( $m$  Kanten).

$$m = \binom{n}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$$

## 9.4 Eigenschaften eines Baumes

Baum mit  $n$  Knoten  $n - 1$  Kanten  
 Baum mit  $i$  inneren Knoten  $n = m \cdot i + 1$  Knoten  
 $m$ -facher Baum der Höhe  $h$  höchstens  $m^h$  Blätter

## 9.5 Vollständige bipartite Graphen

Bedingung:  $U \cup W = V$  und  $U \cap W = \emptyset$

1. keine Kante zwischen Knoten aus  $U$
2. keine Kante zwischen Knoten aus  $W$
3. Knoten aus  $U$  sind genau durch eine Kante verbunden
4.  $\forall u \in U, u$  ist mit jedem Knoten aus  $W$  verbunden
5.  $\forall w \in W, w$  ist mit jedem Knoten aus  $U$  verbunden

## 9.6 Page-Rank-Algorithmus

Gewicht der Seite  $PR_i$  in einem Netz mit  $N$  Seiten

Dämpfungsfaktor  $d$  mit  $0 \leq d \leq 1$

$C_j$  von Seite  $j$  abgehende Links

$$PR_i = \frac{1-d}{N} + d \cdot \sum_j \frac{PR_j}{C_j}$$

## 9.7 Matrizen

$n$  Ecken,  $m$  Kanten

**Adjazenzmatrix**  $A(G)$   $n \times n$  - Matrix  
 mit Anzahl Kanten zwischen den Ecken

**Inzidenzmatrix**  $B(G)$   $n \times m$  - Matrix  
 Ecke liegt auf Kante (0 oder 1)

**Gradmatrix**  $D(G)$   $n \times n$  - Diagonal-Matrix  
 Grade der Knoten auf der Diagonalen

## 9.8 Wege und Kreise

Anzahl Wege der Länge  $l$  von Knoten  $i$  zu  $j$   
 Eintrag  $(i, j)$  von  $A(G)^l$  (Adjazenzmatrix hoch  $l$ )

Weg Folge von Kanten  
 Kreis gleicher Anfangs- und Endpunkt  
 einfacher Kreis jede Kante höchstens einmal  
 Eulerweg jede Kante genau einmal  
 Eulerkreis jede Kante genau einmal  
 Hamiltonweg jeden Knoten genau einmal  
 Hamiltonkreis jeden Knoten genau einmal

Satz von Dirac

ein Graph mit  $n \geq 3$  Knoten mit  $\deg(v) \geq n/2$  hat einen Hamiltonkreis

Satz von Ore

ein Graph mit  $n \geq 3$  mit  $\deg(v) + \deg(u) \geq n$  für jedes Paar  $u, v$  von nicht benachbarten Ecken hat einen Hamiltonkreis



## 9.9 Planare Graphen

wenn er sich ohne Kantenkreuzungen zeichnen lässt

## 9.10 Satz von Euler

Für ein zusammenhängender, planarer Graph mit  $|V|$  Knoten,  $|E|$  Kanten und  $|R|$  Regionen gilt:

$$2 = |V| - |E| + |R|$$

## 9.11 Satz von Kuratovsky

Ein Graph ist genau dann nicht planar, wenn er einen Untergraphen vom Typ  $K_{3,3}$  oder  $K_5$  enthält

## 9.12 Färbungen

$c : V \rightarrow C$  so dass  $c(u) \neq c(v)$  falls  $\{u, v\} \in E$

Abschätzung:  $1 \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Anzahl mögliche Färbungen mit  $x$  Farben:

Graph mit  $E = \emptyset$   $P(G, x) = x^n$

Vollständiger Graph  $P(K_n, x) = x * \dots * (x - n + 1)$

Baum  $P(T_n, x) = x * (x - 1)^{n-1}$

## 9.13 Dekompositionsgleichung

Graph  $G = (V, E)$  mit Kante  $e = a, b$

$G - e$  Graph  $G$  unter Weglassung der Kante  $e$

$G_e$  Graph  $G$  mit zusammengezogener Kante  $e$   
unter Weglassung aller parallelen Kanten

Anzahl Färbungen von  $G$  mit  $x$  Farben:

$$P(G, x) = P(G - e, x) - P(G_e, x)$$

Ziel:

Rückführung des Graphen auf Bäume und vollständige Graphen mit errechenbarer Anzahl von Färbungen

Chromatische Zahl eines Graphen:

$$\chi(G) = \min\{x \in \mathbb{N} : P(G, x) > 0\}$$

## 9.14 Gerüste / Spannbäume

zusammenhängender, kreisfreier Unterbaum, der alle Knoten aus  $V$  enthält

$G - e$  Graph  $G$  unter Weglassung der Kante  $e$

$G/e$  Graph  $g$  unter Zusammenziehung der Kante  $e$   
und Weglassen aller Schlingen

Anzahl der Gerüste des Graphen:

$$G: t(G) = t(G - e) + t(G/e)$$

Ziel:

Rückführung des Graphen  $G$  auf Kreise und Bäume mit bekannter/errechenbarer Anzahl Gerüste

## 9.15 Gewichtete Graphen

$$w : E \rightarrow (0, \infty)$$

Länge / Gewicht eines Weges:

$$w(u_0, u_1, \dots, u_n) = w(u_0, u_1) + \dots + w(u_{n-1}, u_n)$$

Abstand  $d(u, v)$ :

Minimum der Längen aller Wege von  $u$  nach  $v$

## 9.16 Minimale aufspannende Bäume

Bedingung:  $T \subseteq E$

$$w(T) = \sum_{\{u,v\} \in T} w(u, v)$$

## 9.17 Algorithmus von Dijkstra

Länge des kürzesten Weges von  $a$  nach  $u$  für jeden Knoten  $u$  aus  $V$

$$S := \emptyset \quad L(a) := 0 \quad L(u) := \infty$$

Wiederhole:

1. Wähle einen Knoten  $s \in V - S$  mit minimalem  $L(s)$
2. Falls  $L(s) = \infty$ , dann HALT
3. Füge der Menge  $S$  den Knoten  $s$  hinzu
4. Falls  $S = V$ , dann HALT
5. Für jeden Nachbarn  $y \in V - S$  des Knoten  $s$ :  
Falls  $L(y) > L(s) + w(s, y)$ , ersetze  $L(y)$  durch  $L(s) + w(s, y)$ ; andernfalls tue nichts

## 9.18 Algorithmus von Prim

minimalen aufspannenden Baum  $T$  von  $G$

$$S := \{a\} \quad T := \emptyset$$

Wiederhole so lange wie möglich:

1. Wähle eine Kante  $\{x, y\} \in E$  minimalen Gewichts mit  $x \in S$  und  $y \in V - S$
2. Füge der Menge  $S$  den Knoten  $y$  hinzu
3. Füge der Menge  $T$  die Kante  $\{x, y\}$  hinzu

## 9.19 Algorithmus von Kruskal

berechnet einen minimalen aufspannenden Wald  $T$  und die Menge  $R$  der Zusammenhangskomponenten

$$R := \{\{x\} | x \in V\} \quad T := \emptyset$$

Wiederhole so lange wie möglich:

1. Wähle eine Kante  $\{x, y\} \in E - T$  minimalen Gewichts, so dass  $x$  und  $y$  nicht zur gleichen Klasse von  $R$  gehören
2. Ersetze in  $R$  die beiden Klassen von  $x$  und  $y$  durch ihre Vereinigung.
3. Füge der Menge  $T$  die Kante  $\{x, y\}$  hinzu