

Diskrete Mathematik

Patrick Bucher & Lukas Arnold

12. Juni 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Foundations	1	4.2 Induktionsbeweis	4
1.1 Operationen	1	4.3 Schlussregeln / Inferenzregeln	4
1.2 Prioritäten der Operationen	1	5 Counting	4
1.3 Tautologie & Kontraktion	1	5.1 Produktregel	4
1.4 Logische Äquivalenzgesetze	1	5.2 Summenregel	4
1.5 Äquivalenzgesetze	2	5.3 Einschluss-/Ausschlussprinzip	4
1.6 Quantifikatoren	2	5.4 Verallgemeinertes Schubfachprinzip	4
1.7 Negation von Quantifikatoren	2	5.5 Permutationen	4
1.8 Beweise	2	5.6 Anzahl Permutationen	4
2 Basic Structures	2	5.7 Kombinationen	4
2.1 Mengen	2	5.8 Anzahl Kombinationen	4
2.2 Spezielle Mengen	2	5.9 Binomialkoeffizienten	4
2.3 Mengenoperationen	2	5.10 Binomialsatz	4
2.4 Rechenregeln für Mengen	2	6 Diskrete Wahrscheinlichkeitsrechnung	4
2.5 Definition von Funktionen	2	6.1 Wahrscheinlichkeit nach Laplace	4
2.6 Arten von Funktionen	2	6.2 Komplement der Wahrscheinlichkeit	4
2.7 Zusammengesetzte Funktion	2	6.3 Additionsregel	4
2.8 Umkehrfunktion	2	6.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit	4
2.9 <i>ceiling</i> und <i>floor</i> -Funktion	2	6.5 Unabhängige Ereignisse	4
2.10 Folgen	2	6.6 Satz der totalen Wahrscheinlichkeit	4
2.11 Reihen	2	6.7 Satz von Bayes	5
2.12 Summenformeln	3	6.8 Binomialverteilung	5
3 Fundamentals	3	6.9 Hypergeometrische Verteilung	5
3.1 Wachstum von Funktionen	3	6.10 Poissonverteilung	5
3.2 Exponentialfunktionen	3	6.11 Verteilung einer Zufallsvariablen	5
3.3 Logarithmusfunktionen	3	6.12 Erwartungswert einer Zufallsvariable	5
3.4 Komplexität von Algorithmen	3	6.13 Varianz einer Zufallsvariable	5
3.5 Zahlen und Division	3	6.14 Standardabweichung einer Zufallsvariable	5
3.6 Primzahl	3	7 Advanced Counting Techniques	5
3.7 Mersenne Primes	3	7.1 Rekursionsbeziehungen	5
3.8 Primzahlsatz	3	7.2 Erzeugende Funktion	5
3.9 ggT und kgV	3	7.3 Ein- / Ausschlussprinzip	5
3.10 Kongruenz	3	7.4 Anzahl Derangements	5
3.11 Addition zweier Matrizen	3	8 Zahlentheorie	5
3.12 Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl	3	8.1 Division mit Rest	5
3.13 Multiplikation von Matrizen	3	8.2 Kongruenz modulo n	5
3.14 Transponierte Matrix	3	8.3 Euklidischer Algorithmus	5
3.15 Symmetrie einer Matrix	3	8.4 Diophantische Gleichung	5
3.16 Einheitsmatrix	3	8.5 erweiterter Euklidischer Algorithmus	5
3.17 Inverse Matrix	3	8.6 Chinesischer Restsatz	5
3.18 Boolesches Produkt zweier Matrizen	3	8.7 Eulersche ϕ -Funktion	5
4 Reasoning	4	8.8 Primzahl	5
4.1 Beweismethoden	4	8.9 kleiner Satz von Fermat	5
		8.10 Primzahltest von Wilson	6

8.11	Restklassen	6
8.12	Rechenregeln für modularen Rechnen . .	6
8.13	Potenzieren modulo n	6
8.14	Square and Multiply Algorithm	6
8.15	Nullteiler	6
8.16	Inverse Elemente	6
8.17	Primitive Elemente / Erzeugende	6
8.18	Einwegfunktionen	6
8.19	Modulare Quadratwurzeln	6
8.20	diskrete Logarithmus	6
9	Graphentheorie 1	6
9.1	(Ecken)grade	6
9.2	Wichtige Graphen	6
9.3	Baum	6
9.4	Page-Rank-Algorithmus	6
9.5	Matrizen	6
9.6	Wege und Kreise	6
10	Graphentheorie 2	7
10.1	Satz von Euler	7
10.2	Satz von Kuratovsky	7
10.3	Färbungen	7
10.4	Dekompositionsgleichung	7
10.5	Gerüste	7
11	Graphentheorie 3	7

1 Foundations

1.1 Operationen

Negation	$\neg p$	<i>Verneinung</i>
Konjunktion	$p \wedge q$	<i>Und-Verknüpfung</i>
Disjunktion	$p \vee q$	<i>Oder-Verknüpfung</i>
EXOR	$p \oplus q$	<i>Exklusiv-Oder</i>
Implikation	$p \rightarrow q$	<i>falls p dann q</i>
Bikonditional	$p \leftrightarrow q$	<i>p genau dann wenn q</i>

1.2 Prioritäten der Operationen

\neg	\wedge	\vee	\oplus	\rightarrow	\leftrightarrow
1	2	3	4	5	6

1.3 Tautologie & Kontraktion

Tautologie	$p \vee \neg p$	<i>immer wahre Aussage</i>
Kontraktion	$p \wedge \neg p$	<i>immer falsche Aussage</i>

1.4 Logische Äquivalenzgesetze

Identität	$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$	$p \vee \mathbf{F} \equiv p$
Dominanz	$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$	$p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
Negation	$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$	$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$
Assoziativ 1	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	
Assoziativ 2	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	
Distributiv 1	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	
Distributiv 2	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	
De Morgan's 1	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	
De Morgan's 2	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	

1.5 Äquivalenzgesetze

$p \rightarrow q$	\equiv	$\neg p \vee q$
$p \rightarrow q$	\equiv	$\neg q \rightarrow \neg p$
$p \vee q$	\equiv	$\neg p \rightarrow q$
$p \wedge q$	\equiv	$\neg(p \rightarrow \neg q)$
$\neg(p \rightarrow q)$	\equiv	$p \wedge \neg q$
$p \leftrightarrow q$	\equiv	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \leftrightarrow q$	\equiv	$\neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q$	\equiv	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q)$	\equiv	$p \leftrightarrow \neg q$
$p \rightarrow (q \wedge r)$	\equiv	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
$(p \vee q) \rightarrow r$	\equiv	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
$p \rightarrow (q \vee r)$	\equiv	$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$
$(p \wedge q) \rightarrow r$	\equiv	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$
$p \oplus q$	\equiv	$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
$\neg(p \oplus q)$	\equiv	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \oplus q)$	\equiv	$p \leftrightarrow q$

1.6 Quantifikatoren

For All	\forall	für alle x aus P wahr
Exists	\exists	für mindestens ein x aus P wahr
Not Exists	$\neg\exists$	für alle x aus P falsch
Not For All	$\neg\forall$	für mindestens ein x aus P falsch

1.7 Negation von Quantifikatoren

$\neg\exists x P(x)$	\equiv	$\forall x \neg P(x)$
$\neg\forall x P(x)$	\equiv	$\exists x \neg P(x)$

1.8 Beweise

direkter Beweis	$p \rightarrow q$
indirekter Beweis	$\neg q \rightarrow \neg p$
Widerspruch	$\neg p \rightarrow q$
Vorgehen Widerspruch	$(\neg p \rightarrow \mathbf{f}) \Rightarrow (p \rightarrow \mathbf{w})$

2 Basic Structures

2.1 Mengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
 $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
 $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\}$
 $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$
 \mathbb{R} : die Menge der reellen Zahlen
 \mathbb{C} : die Menge der komplexen Zahlen

2.2 Spezielle Mengen

Teilmenge:	$A \subset B \equiv \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$
Leere Menge:	$\emptyset \subset A$ gilt für jede Menge A
Kardinalität:	$ S $ beschreibt Anzahl Elemente von A
Potenzmenge:	$P(S) = 2^S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
Kreuzprodukt:	$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

2.3 Mengenoperationen

Komplement:	$A^c = \overline{A} = \{m \in M \mid m \notin A\}$
Durchschnitt:	$A \cap B = \{m \in M \mid m \in A \wedge m \in B\}$
Vereinigung:	$A \cup B = \{m \in M \mid m \in A \vee m \in B\}$
Differenz:	$B - A = \{m \in M \mid m \in B \wedge m \notin A\}$

2.4 Rechenregeln für Mengen

Kommutativgesetz	$A \cup B = B \cup A$
Kommutativgesetz	$A \cap B = B \cap A$
Assoziativgesetz	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
Assoziativgesetz	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
Distributivgesetz	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Distributivgesetz	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgan's Gesetz	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
De Morgan's Gesetz	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

2.5 Definition von Funktionen

$$f: X \rightarrow Y \quad x \mapsto f(x) \quad f: x \mapsto f(x)$$

$$f(x) := \begin{cases} 5 & \text{für } x < 0 \\ x^2 + 5 & \text{für } x \in [0, 2] \\ 0.5x + 8 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

2.6 Arten von Funktionen

injektiv	auf jedes Element in Y zeigt höchstens ein Pfeil
surjektiv	auf jedes Element in Y zeigt mindestens ein Pfeil
bijektiv	auf jedes Element in Y zeigt genau ein Pfeil

2.7 Zusammengesetzte Funktion

$$g: X \rightarrow U \quad x \mapsto g(x)$$

$$f: U \rightarrow Y \quad u \mapsto f(u)$$

$$F = f \circ g: X \rightarrow Y \quad x \mapsto f(g(x))$$

2.8 Umkehrfunktion

$$y = f(x) \quad x = f^{-1}(y)$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(y) = f^{-1}(f(y)) = y$$

2.9 ceiling und floor-Funktion

$$\lceil \cdot \rceil: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto \lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid x \leq n\}$$

$$\lfloor \cdot \rfloor: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$

2.10 Folgen

harmonisch	$a_k = 1/k$
geometrisch	$a_k = a_0 * q^k$
arithmetisch	$a_k = a_0 + (k * d)$

2.11 Reihen

harmonisch	$\sum_{k=1}^n 1/k$
geometrisch	$a_0 * \sum_{k=0}^{n-1} q^k = a_0 \frac{q^n - 1}{q - 1}$
arithmetisch	$\sum_{k=0}^{n-1} (a_0 + kd) = n \frac{a_0 + a_{n-1}}{2}$

2.12 Summenformeln

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{k=0}^n x^k, |x| < 1 = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1}, |x| < 1 = \frac{1}{(1-x)^2}$$

3 Fundamentals

3.1 Wachstum von Funktionen

$f =$ "sehr komplizierte Funktion"
 $g =$ "einfachere Funktion"
 $|f(x)| \leq C|g(x)|, \forall x > k$
 $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$

3.2 Exponentialfunktionen

$$\begin{aligned} a^r * a^s &= a^{r+s} \\ \frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s} \\ (a^r)^s &= (a^s)^r = a^{r*s} \end{aligned}$$

3.3 Logarithmusfunktionen

$$\begin{aligned} \log_a(u * v) &= \log_a(u) + \log_a(v) \\ \log_a\left(\frac{u}{v}\right) &= \log_a(u) - \log_a(v) \\ \log_a(u^v) &= v * \log_a(u) \end{aligned}$$

3.4 Komplexität von Algorithmen

konstant	$\mathcal{O}(1)$
logarithmisch	$\mathcal{O}(\log n)$
linear	$\mathcal{O}(n)$
n log n	$\mathcal{O}(n * \log n)$
polynomial	$\mathcal{O}(n^b)$
exponentiell	$\mathcal{O}(b^n), b > 1$
faktorielle	$\mathcal{O}(n!)$

3.5 Zahlen und Division

$$\begin{aligned} a|b \wedge a|c &\rightarrow a|(b + c) \\ a|b &\rightarrow \forall c(a|bc) \\ a|b \wedge b|c &\rightarrow a|c \end{aligned}$$

3.6 Primzahl

$$\nexists a(a|n \wedge (1 < a < n))$$

3.7 Mersenne Primes

$$M_n = 2^p - 1, p \in \text{"Primzahlen"}$$

3.8 Primzahlsatz

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)}$$

3.9 ggT und kgV

$$\begin{aligned} a &= dq + r, \text{ wobei } (0 \leq r < d) \\ q &= a \text{ div } d \text{ und } r = a \bmod d \\ ab &= ggT(a, b) * kgV(a, b) \end{aligned}$$

3.10 Kongruenz

$$a \equiv b \bmod m, m|(a - b)$$

3.11 Addition zweier Matrizen

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

3.12 Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

3.13 Multiplikation von Matrizen

$$A \times B = C \quad \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = (a_{11} * b_{11}) + (a_{12} * b_{21}) + \cdots + (a_{1n} * b_{n1})$$

3.14 Transponierte Matrix

A^T durch Vertauschen von Zeilen und Spalten

3.15 Symmetrie einer Matrix

ist symmetrisch, falls $A^T = A$
ist antisymmetrisch, falls $A^T = -A$

3.16 Einheitsmatrix

I_n ist eine Matrix bei der alle Elemente auf der Diagonalen Eins und alle anderen Null sind

3.17 Inverse Matrix

$$A^{-1} * A = A * A^{-1} = I_n$$

3.18 Boolesches Produkt zweier Matrizen

$$A \odot B = [c_{ij}], \text{ wobei } c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{in} \wedge b_{nj})$$

4 Reasoning

4.1 Beweismethoden

Direkter Beweis	$p \rightarrow q$
Beweis durch Kontraposition	$\neg q \rightarrow \neg p$
Beweis durch Widerspruch	$\neg p \rightarrow q$

4.2 Induktionsbeweis

Induktionshypothese	$P(k)$
Induktionsverankerung	$P(1)$
Induktionsschritt	$P(k) \rightarrow P(k+1)$
$[P(1) \wedge \forall k(P(k) \rightarrow P(k+1))] \rightarrow \forall n P(n)$	

4.3 Schlussregeln / Inferenzregeln

Modus ponens	$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
Modus tollens	$((\neg q \wedge (p \rightarrow q))) \rightarrow \neg p$
Hypothetischer Syllogismus	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
Disjunktiver Syllogismus	$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$
Addition	$p \rightarrow (p \vee q)$
Simplifikation	$(p \wedge q) \rightarrow p$
Konjunktion	$((p) \wedge (q)) \rightarrow p \wedge q$
Resolution	$((p \wedge q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$

5 Counting

5.1 Produktregel

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$$

5.2 Summenregel

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

5.3 Einschluss-/Ausschlussprinzip

für 2 Mengen:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

für 3 Mengen:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

5.4 Verallgemeinertes Schubfachprinzip

Falls man N Objekte auf k Schubfächer verteilt, dann gibt es wenigstens ein Schubfach, welches mindestens $\lceil N/k \rceil$ Objekte enthält

5.5 Permutationen

geordnete Anordnung von r der n Elemente

5.6 Anzahl Permutationen

Bedingung	$0 \leq r \leq n \in \mathbb{N}$
ohne Wiederholung	$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
mit Wiederholung	$P(n, r) = n^r$

5.7 Kombinationen

ungeordnete Auswahl von r dieser n Elemente

5.8 Anzahl Kombinationen

Bedingung	$0 \leq r \leq n \in \mathbb{N}$
ohne Wiederholung	$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$
mit Wiederholung	$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n+r-1}{r}$

5.9 Binomialkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha * (\alpha-1) * \dots * (\alpha-k+1)}{k!}$$

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = C(n, n-k)$$

5.10 Binomialsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = 3^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

6 Diskrete Wahrscheinlichkeitsrechnung

6.1 Wahrscheinlichkeit nach Laplace

$$p(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{\text{Anzahl guenstige}}{\text{Anzahl moegliche}}$$

6.2 Komplement der Wahrscheinlichkeit

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

6.3 Additionsregel

$$p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2)$$

6.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

6.5 Unabhängige Ereignisse

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)p(B)}{p(B)} = p(A)$$

6.6 Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$p(A) = \sum_{i=1}^k p(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^k p(A|B_i) \cdot p(B_i)$$

$$p(A|C) = \frac{1}{p(C)} \sum_{i=1}^k p(A \cap (B_i \cap C))$$

$$p(A|C) = \sum_{i=1}^k p(A|B_i) \cdot p(B_i|C)$$

Spezialfall für 2 Mengen:

$$p(A) = p(A|B) \cdot p(B) + p(A|\bar{B}) \cdot p(\bar{B})$$

6.7 Satz von Bayes

$$p(B_j|A) = \frac{p(A|B_j) p(B_j)}{p(A)} = \frac{p(A|B_j) p(B_j)}{\sum_{i=1}^k p(A|B_i) \cdot p(B_i)}$$

Spezialfall für 2 Mengen:

$$p(B|A) = \frac{p(A|B) p(B)}{p(A|B) \cdot p(B) + p(A|\bar{B}) \cdot p(\bar{B})}$$

6.8 Binomialverteilung

$$B(k|n, p) = B_{n,p}(k) = C(n, k) p^k (1-p)^{n-k}$$

$$B(k|n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bedingung:

$$p = M/N \text{ und } n \leq M/10 \leq (N-M)/10$$

6.9 Hypergeometrische Verteilung

$$p(k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

6.10 Poissonverteilung

$$f(k) = \frac{u^k}{k!} e^{-u}$$

Bedingung:

$$u = np \text{ und } p \leq 0.1, n \geq 100$$

6.11 W'keitsverteilung einer Zufallsvariablen

$$\{(r, p(X = r)) | \forall r \in X(S)\}$$

6.12 Erwartungswert einer Zufallsvariable

$$E(C) = \sum_{s \in S} X(s) \cdot p(s) = \sum_{r \in X(S)} r \cdot p(X = r)$$

6.13 Varianz einer Zufallsvariable

$$V(X) = \sum_{s \in S} (X(s) - E(X))^2 \cdot p(s)$$

$$V(X) = \sum_{r \in X(S)} (r - E(X))^2 \cdot p(X = r)$$

6.14 Standardabweichung einer Zufallsvariable

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

7 Advanced Counting Techniques

7.1 Rekursionsbeziehungen

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1), \forall n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}^+$$

7.2 Erzeugende Funktion

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

7.3 Ein- / Ausschlussprinzip

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

7.4 Anzahl Derangements

$$D_n = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right]$$

8 Zahlentheorie

8.1 Division mit Rest

$$A = q * n + r \text{ wobei } 0 \leq r < |n|$$

8.2 Kongruenz modulo n

$$a \equiv b \pmod{n} \iff n | (a - b)$$

$$\iff \exists q : a - b = q * n$$

$$\iff \exists q : a = b + q * n$$

8.3 Euklidische Algorithmus

$$\begin{array}{rclcl} 963 & = & 4 & * & 218 & + & 91 \\ 218 & = & 2 & * & 91 & + & 36 \\ 91 & = & 2 & * & 36 & + & 19 \\ 36 & = & 1 & * & 19 & + & 17 \\ 19 & = & 1 & * & 17 & + & 2 \\ 17 & = & 8 & * & 2 & + & 1 \\ 8 & = & 2 & * & 1 & + & 0 \end{array}$$

8.4 Diophantischer Gleichung

$$n_1 * x + n_2 * y = n$$

8.5 erweiterter Euklidischer Algorithmus

$$\begin{array}{rclcl} 67 & - & 1 & 0 \\ 24 & 2 * & 0 & 1 \\ 19 * & 1 & 1 * & -2 * & 19 = 67 \% 24 \\ 5 & 4 & -1 & 3 & 2 = 67 \text{ div } 24 \\ 4 & 1 & 4 & -11 & 1 = 1 - 2 * 0 \\ 1 & & -5 & 14 & -2 = 0 - 2 * 1 \end{array}$$

8.6 Chinesischer Restsatz

$$M_i = \frac{m}{m_i}$$

$$M_i * y_i \equiv 1 \pmod{m_i}$$

$$x = \sum_{i=1}^k r_i * M_i * y_i$$

8.7 Eulersche ϕ -Funktion

$$\mathbb{Z}_n := \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

$$\mathbb{Z}_n^* := \{x \in \mathbb{Z}_n | x > 0 \text{ und } \text{ggT}(x, n) = 1\}$$

$$|\mathbb{Z}_n^*| := \text{Anzahl Elemente in } \mathbb{Z}_n^*$$

$$\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto |\mathbb{T}_n^*| =: \phi(n)$$

$$\begin{array}{rcl} \phi(p) & = & p - 1 \\ \phi(p * q) & = & (p - 1) * (q - 1) \\ \phi(m) & = & (p_1 - 1) * p_1^{r_1-1} * (p_2 - 1) * p_2^{r_2-1} * \dots \end{array}$$

8.8 Primzahl

$$n = p_1^{e_1} * p_2^{e_2} * p_3^{e_3} * \dots * p_n^{e_n}$$

8.9 kleiner Satz von Fermat

$$m^p \pmod{p} = m \pmod{p}$$

8.10 Primzahltest von Wilson

falls $(n-1)! + 1$ durch n teilbar ist

8.11 Restklassen

$$[r] = \{x \in \mathbb{Z} | x \equiv r \pmod{n}\}$$

8.12 Rechenregeln für modularen Rechnen

$$\begin{aligned} a \oplus_n b &= b \oplus_n a = a + b \mod n = R_n(a + b) \\ a \odot_n b &= b \odot_n a = a * b \mod n = R_n(a * b) \\ a \odot_n (b \oplus_n c) &= (a \odot_n b) \oplus_n (a \odot_n c) \end{aligned}$$

8.13 Potenzieren modulo n

$$x^m = x^{2^k+l} = x^{2^k} * x^l = (x^k)^2 * x^l$$

8.14 Square and Multiply Algorithm

1. Exponent binär schreiben
2. Q bedeutet quadrieren und M multiplizieren
3. Ersetze 1 durch QM und 0 durch Q
4. das erste (links) QM streichen
5. Reihenfolge von Quadrieren und Multipliziere
6. Exponent einsetzen
7. entsprechend Quadrieren und Multiplizieren
8. immer wieder modular reduzieren

8.15 Nullteiler

$a \in \mathbb{Z}_n, a \neq 0, b \in \mathbb{Z}_n, b \neq 0$
falls $a \odot_n b = 0$, dann ist a Nullteiler von \mathbb{Z}_n

8.16 Inverse Elemente

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_n^* &= \{a \in \mathbb{Z}_n \mid \text{ggT}(a, n) = 1\} \\ a^{-1} &= R_p(a^{p-2}) = a^{p-2} \mod p, (p = \text{Primzahl}) \end{aligned}$$

8.17 Primitive Elemente / Erzeugende

falls jedes Element $a \in \mathbb{Z}_p^*$ eine Potenz von z ist

8.18 Einwegfunktionen

Quadrieren modulo n	$x \mapsto x^2 \mod n$
Potenzieren modulo n	$x \mapsto x^e \mod n$
Exponentialfunktion modulo p	$x \mapsto b^x \mod p$

8.19 Modulare Quadratwurzeln

$$\sqrt{a} \mod n = \{x \in \mathbb{Z}_n^* \mid x^2 = a \mod n\}$$

=> Für ein a kann es mehrere Quadratwurzeln geben

8.20 diskrete Logarithmus

$$\exp_b(k) = b^k \mod p$$

9 Graphentheorie 1

9.1 (Ecken)grade

$$\begin{aligned} \text{Eckengrad: } \sum_{v \in V} \deg(v) &= 2 \cdot |E| \\ \text{Maximalgrad: } \Delta(G) &= \max_{v \in V(G)} \deg(v) \\ \text{Minimalgrad: } \delta(G) &= \min_{v \in V(G)} \deg(v) \end{aligned}$$

9.2 Wichtige Graphen

Vollständiger Graph K_n mit n Knoten: genau eine Kante zwischen je zwei Knoten (m Kanten).
 $m = \binom{n}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$

9.3 Baum

Baum mit n Knoten: $n - 1$ Kanten.

Baum mit i inneren Knoten: $n = m \cdot i + 1$ Knoten
 m -facher Baum der Höhe h : höchstens m^h Blätter.

9.4 Page-Rank-Algorithmus

Gewicht der Seite PR_i in einem Netz mit N Seiten, Dämpfungsfaktor d ($[0; 1]$), C_j von Seite j abgehende Links:

$$PR_i = \frac{1-d}{n} + d \cdot \sum_j \frac{PR_j}{C_j}$$

9.5 Matrizen

n Ecken, m Kanten

- Adjazenzmatrix $A(G)$: $n \times n$ -Matrix (Knoten/Knoten) mit Anzahl Kanten zwischen den Ecken.
- Inzidenzmatrix $B(G)$: $n \times m$ -Matrix (Knoten/Kanten) mit 1 (Knoten liegt auf Kante) oder 0 (Knoten *nicht* auf Kante)
- Gradmatrix $D(G)$: $n \times n$ -Diagonal-Matrix (Knoten/Knoten), Grade der Knoten auf der Diagonalen

9.6 Wege und Kreise

Anzahl Wege der Länge l von Knoten i zu j : Eintrag (i, j) von $A(G)^l$ (Adjazenzmatrix hoch l)

- Weg: Folge von Kanten $e_1 = a, b, e_2 = b, c, \dots$
- Kreis: Weg mit übereinstimmendem Anfangs- und Endpunkt (Länge > 0)
- einfacher Kreis: jede Kante kommt höchstens einmal vor
- Eulerweg: Weg, der jede Kante einmal durchläuft
- Eulerkreis: Kreis, der jede Kante einmal durchläuft
- Hamiltonweg: Weg, der jeden Knoten einmal durchläuft
- Hamiltonkreis: Kreis, der jeden Knoten einmal durchläuft
- Satz von Dirac: ein Graph mit $n \geq 3$ Knoten mit Grad $\geq n/2$ hat einen Hamiltonkreis.
- Satz von Ore: ein Graph mit $n \geq 3$ mit $\deg(v) + \deg(u) \geq n$ für jedes Paar u, v von nicht benachbarten Ecken hat einen Hamiltonkreis.

10 Graphentheorie 2

10.1 Satz von Euler

Für ein zusammenhängender, planarer Graph G mit $|V|$ Knoten, $|E|$ Kanten und $|R|$ Regionen gilt:

$$2 = |V| - |E| + |R|$$

10.2 Satz von Kuratovsky

Ein Graph ist genau dann nicht planar, wenn er einen Untergraphen vom Typ $K_{3,3}$ oder K_5 enthält.

10.3 Färbungen

Anzahl mögliche Färbungen des Graphen G mit x Farben: $P(G, x)$

- Graph G mit n Knoten und leerer Kantenmenge:
 $P(G, x) = x^n$
- Vollständiger Graph G mit n Knoten: $P(K_n, x) = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdots (x-n+1)$
- Baum mit n Knoten: $P(T_n, x) = x \cdot (x-1)^{n-1}$

10.4 Dekompositionsgleichung

Graph $G = (V, E)$ mit Kante $e = a, b$

- $G - e$: Graph G unter Weglassung der Kante e
- G_e : Graph G mit zusammengezogener Kante e unter Weglassung aller parallelen Kanten
- Anzahl Färbungen von G mit x Farben: $P(G, x) = P(G - e, x) - P(G_e, x)$
- Ziel: Rückführung des Graphen G auf Bäume (T) und vollständige Graphen (K) mit errechenbarer Anzahl von Färbungen

Chromatische Zahl eines Graphen: $\chi(G) = \min\{x \in \mathbb{N} : P(G, x) > 0\}$ (das kleinste x , wofür das chromatische Polynom P eine positive Zahl liefert)

10.5 Gerüste

- Gerüst oder Spannbaum eines Graphen $G = (V, E)$: zusammenhängender, kreisfreier Unterbaum, der alle Knoten aus V enthält.
- Baum: 1 Gerüst
- Kreis mit n Kanten: je ein Gerüst durch Entfernung einer Kante (n Gerüste)
- $G - e$: Graph G unter Weglassung der Kante e
- G/e : Graph G unter Zusammenziehung der Kante e und Weglassen aller Schlingen
- Anzahl der Gerüste des Graphen G : $t(G) = t(G - e) + t(G/e)$
- Ziel: Rückführung des Graphen G auf Kreise und Bäume mit bekannter/errechenbarer Anzahl Gerüste

11 Graphentheorie 3

TODO: Pädü