

2018 离散 ii 真题默写 by 押题小王子

计算题 (5 道\*6 分=30 分)

- 1、从 1-9 中选择 3 个奇数和 3 个偶数，奇数偶数间隔排列，这样的 6 位数有多少个？
- 2、有一批篮球，放入 5 个筐，至少有 1 个筐有 9 个球，问这批篮球最少多少个？
- 3、 $x_1 + x_2 + x_3 = 21$  有多少解，其中  $x_1 \geq 1, x_2 \geq 5, x_3 \geq 8$
- 4、求递推关系  $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 1$  的解
- 5、有  $n$  个水果，取自  $ABCD$  四类。 $A$  中取偶数个， $B$  中取 5 的倍数个， $C$  中取不超过 4 个， $D$  中取 0 个或 1 个，问有多少种取法？

二、英文题 (10 分)

A computer system considers a string of Octal digits a valid code-word if and only if it contains an even number of 7s.

- (a) Find a recurrence relation for  $a_n$ .
- (b) What is the initial condition?
- (c) Using generating functions to find an explicit formula for  $a_n$ .

三、英文题 (10 分) 证明容斥原理。

Proving the equation:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

- 四、(10 分) 设  $\langle G, * \rangle$  是群,  $H = \{a \mid a \in G, \forall x \in G, a * x = x * a\}$ , 证明  $H$  是  $G$  的子群

- 五、(10 分) 设  $\langle G, \cdot \rangle$  是有限半群，且消去律成立，证明  $G$  是群。

- 六、(15 分) 设  $\langle G, * \rangle$  是无限循环群。  
证明  $G$  与整数加法群  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$  同构。

- 七、(15 分) 设  $\langle G, +, \cdot \rangle$  是环，1 是其乘法幺元。  
在  $S$  上定义运算  $\oplus$  和  $\odot$ ：  
 $a \oplus b = a + b + 1, a \odot b = a + b + a \cdot b$   
证明  $\langle S, \oplus, \odot \rangle$  是一个可交换的含幺环。