

## Versuch 70: Linsen und Linsensysteme

(durchgeführt am 28.09.2018 bei Daniel Bartel)  
Andréz Gockel, Patrick Münnich  
10. Oktober 2018

### Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ziel des Versuchs</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Aufbau</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Teil 1: Abbildungen mit Einzellinsen und Linsensystemen</b>	<b>2</b>
3.1	Theorie . . . . .	2
3.2	Durchführung . . . . .	2
3.3	Auswertung . . . . .	2
3.4	Diskussion . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Teil 2: Bessel-Verfahren: Bestimmung der Brennweite ohne Hauptebenen</b>	<b>3</b>
4.1	Theorie . . . . .	3
4.2	Durchführung . . . . .	3
4.3	Auswertung . . . . .	4
4.4	Diskussion . . . . .	4
<b>5</b>	<b>Teil 3: Abbe-Verfahren: Bestimmung von Brennweite und Hauptebenen</b>	<b>5</b>
5.1	Theorie . . . . .	5
5.2	Durchführung . . . . .	5
5.3	Auswertung . . . . .	6
5.4	Diskussion . . . . .	6
<b>6</b>	<b>Teil 4: Autokollimationsverfahren und Dispersion</b>	<b>7</b>
6.1	Theorie . . . . .	7
6.2	Durchführung . . . . .	7
6.3	Auswertung . . . . .	8
6.4	Diskussion . . . . .	8
<b>7</b>	<b>Anhang: Abbildungen</b>	<b>9</b>

## 1 Ziel des Versuchs

Das Ziel dieses Versuchs ist es, Einzellinsen und Linsenkombinationen zu untersuchen. Genauer schaut man, wann mit welchen Linsen scharfe Abbildungen von Gegenständen vorhanden sind.

## 2 Aufbau

Vorhanden sind: eine optische Bank, verschiedene Linsen (80 mm, 150 mm, −200 mm und 250 mm), ein Schirm, eine LED und ein Dia, alle mit jeweils eigenem Halterungsgerät. Für den letzten Teil sind auch noch rote und blaue Farbfilter, welche in die Halterung für das Dia passen, sowie auch ein Spiegel mit Halterung vorhanden.

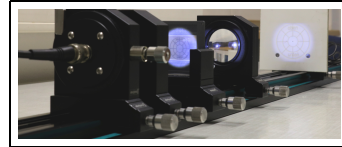


Abbildung BX: Versuchsaufbau Teil 1 [2]

## 3 Teil 1: Abbildungen mit Einzellinsen und Linsensystemen

### 3.1 Theorie

Für das Verständnis dieses Teils benötigt man die Abbildungsgleichung für dünne Linsen,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}, \quad (1)$$

und die entsprechende Gleichung für Linsensysteme mit zwei Linsen,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}. \quad (2)$$

Dieses lässt sich für kleine Abstände  $d$  zwischen den Linsen zu

$$\frac{1}{f} \approx \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

vereinfachen.

### 3.2 Durchführung

Eine Sammellinse als Objekt, die LED und der Schirm werden auf die optische Bank gesetzt. Reihenfolge ist LED, Dia, Linse und dann Schirm. Um die Messwerte zu bestimmen wird zuerst der Schirm in eine Position gebracht, dann die Linse bewegt, bis ein scharfes Bild entsteht. Dies wird mehrmals für verschiedene Positionen des Schirms und verschiedenen Linsensystemen (80 mm und nichts, 80 mm und 150 mm und 80 mm und −200 mm) durchgeführt. Bei jeder Messreihe sollen sowohl Maxima und Minima bestimmt werden, also wann eine große Abbildung am größten ist und wann die entsprechende kleine Abbildung am größten ist.

### 3.3 Auswertung

In diesem Teil wollen wir einfach  $1/b$  gegen  $1/g$  auftragen. Die geschätzten Fehler werden als Fehlerbalken eingezeichnet. Zum Vergleich werden noch Geraden addiert, welche für die Linse mit  $f = 80$  mm mit

$$\frac{1}{b} = \frac{g}{f}$$

berechnet wurde und für die Linsensysteme mit jeweils  $f_1 = 80 \text{ mm}$  und  $f_2 = 150 \text{ mm}$  bzw.  $f_1 = 80 \text{ mm}$  und  $f_2 = 200 \text{ mm}$  mit

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{1}{g}$$

bestimmt. Die resultierende Graphik mit Fehlerbalken kann im Anhang als Abbildung 1 gefunden werden.

### 3.4 Diskussion

Betrachten wir unsere Graphik, so können wir starke Abweichungen zwischen den Positionen der Geraden und denen der Verknüpfungsverläufe der Messwerte erkennen. Jedoch verlaufen die Messpunkte klar linear und haben auch sehr ähnliche Steigungen wie die theoretischen Werte.

Daraus schließen wir, dass die theoretischen Überlegungen durchaus sinnvoll sein sollten. Die Abweichungen der Positionen selbst liegt wohl aufgrund von Fehlern entweder beim Messen von  $g$  oder aufgrund von nicht vollständig korrekten Angaben bei den Linsen.

Verbesserungen könnten hier nur durch erleichterte Messung der genauen Position der Objekte stattfinden. Hierzu könnte man bspw. genau unter den Positionen Schlitze machen, wodurch man die genaue Position sehen kann.

## 4 Teil 2: Bessel-Verfahren: Bestimmung der Brennweite ohne Hauptebenen

### 4.1 Theorie

Für diesen Teil führen wir neue Variablen ein:

- Abstand  $s = g + b$  zwischen Gegenstand und Bild
- Differenz  $e = |g - b|$  zwischen den Linsenpositionen.

Diese Variablen setzen wir in (1) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{2}{s+e} + \frac{2}{s-e} \\ &= \frac{2s-2e+2s+2e}{s^2-e^2} \\ &= \frac{4s}{s^2-e^2} \\ f &= \frac{s^2-e^2}{4s} \end{aligned} \tag{3}$$

### 4.2 Durchführung

Wir können in diesem Teil den selben Versuchsaufbau und die selben Messwerte wie für den ersten Teil verwenden.

### 4.3 Auswertung

In diesem Teil wollen wir einfach mit unseren Messwerten und der Formel (3) zuerst unsere Werte für  $(s, e)$ :

Wir können hier die Rechnungen per Hand mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung durchführen. Hierzu müssen wir unsere Gleichung einfach nach jeweils  $e$  und  $s$  partiell ableiten:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{s^2 + e^2}{4s}$$
$$\frac{\partial f}{\partial e} = \frac{-e}{2s}$$

Dies können wir in

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial s} \Delta s\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial e} \Delta e\right)^2}$$

einsetzen und berechnen. In diesem Fall sind unsere Ergebnisse jedoch mit dem *uncertainties* Paket in Python berechnet worden. Siehe Anhang: *Rechnungen in Python* (In [12]) Dieses Paket hat die Fähigkeit, Korrelationen zwischen Variablen zu berücksichtigen [1].

Da uns hier die Mittelwerte interessieren, nutzen wir noch

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (4)$$

für die Berechnung des Mittelwerts und

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} \quad (5)$$

für der Berechnung der Unsicherheit dessen.

Wir erhalten daraus für die Linse mit  $f = 80$  mm  $\bar{f} = (91 \pm 1)$  mm, für das System mit  $f_1 = 80$  mm und  $f_2 = 150$  mm  $\bar{f} = (69 \pm 2)$  mm und für das Linsensystem mit  $f_1 = 80$  mm und  $f_2 = 200$  mm  $\bar{f} = (131 \pm 1)$  mm.

### 4.4 Diskussion

Unsere theoretischen Werte für die Brennweiten können wir einfach mit (2) berechnen.

Wir erhalten für die  $f = 80$  mm Linse offensichtlich  $f = 80$  mm.

Zum Vergleich nutzen wir die  $t$ -Funktion:

$$t = \frac{|x - y_0|}{u_x} \quad (6)$$

Wir erhalten  $t = 6.75$ . Da dies außerhalb des erwünschten  $t < 2$ -Bereichs liegt, impliziert dies Unverträglichkeit der Werte.

Für das System mit  $f_1 = 80$  mm und  $f_2 = 150$  mm erhalten wir mittels (2)  $f = 57$  mm und mit (6)  $t = 6.19$ . Gleich wie zuvor impliziert dies Unverträglichkeit.

Für das  $f_1 = 80$  mm und  $f_2 = -200$  mm System erhalten wir mittels (2)  $f = 11.4$  mm und (6)  $t = 12.2$ . Dies impliziert auch Unverträglichkeit.

Wir müssen also davon ausgehen, dass unsere Messreihen nicht ausreichend gut durchgeführt wurden oder, dass systematische Fehler vorliegen. Diese müssten gleich wie beim vorherigen Teil sein.

Da beim vorherigen Teil zumindest die Steigung korrekt aussieht müssen wir davon ausgehen, dass entweder die Linsen schlechte Werte bedruckt hatten oder ein Rechenproblem bei diesem Aufgabenteil vorliegt. Ein derartiges Problem konnte jedoch nicht identifiziert werden.

## 5 Teil 3: Abbe-Verfahren: Bestimmung von Brennweite und Hauptebenen

### 5.1 Theorie

Für das Abbe-Verfahren führen wir den Abbildungsmaßstab ein:

$$\beta = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (7)$$

Dies machen wir, da wir  $b$  und  $g$  nicht direkt bestimmen können, jedoch die Bildgröße  $B$  und Gegenstandsgröße  $G$  problemlos bestimmen können.

Die Hauptebenen befinden sich dann um  $h_{1/2}$  vor bzw. hinter diesem Punkt. Mit unserer messbaren scheinbaren Gegenstandsgröße  $g'$  und scheinbare Bildweite  $b'$  haben wir also

$$g' = (1 + 1/\beta) f_1 + h_1 \quad (8)$$

$$b' = (1 + \beta) f_2 + h_2 \quad (9)$$

### 5.2 Durchführung

Eigentlich ist die Durchführung ähnlich zu denen von den vorherigen Teilen. Der Unterschied hier ist, dass für Linsensysteme von 80 mm & -200 mm und -200 mm & 80 mm zehn verschiedene Messreihen gemacht werden, wobei nur die Position der Linse für die große Abbildung und die Größe der großen Abbildung untersucht werden.

### 5.3 Auswertung

In diesem Teil wollen wir zuerst mit den Formeln (7), (8) und (9)  $g'$ ,  $b'$ ,  $\beta$  und  $\Delta\beta$  bestimmen. Wir erhalten aus unseren Messreihen:

Um dies visuell darzustellen, tragen wir  $1 + 1/\beta$  gegen  $g'$  und  $1 + \beta$  gegen  $b'$  auf. Diese Graphen können im Anhang als Abbildung 2 und 3 gefunden werden.

Aus der linearen Regression können wir  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $h_1$  und  $h_2$  bestimmen.

Zur Bestimmung der linearen Regression wenden wir folgende Formeln an:

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (10)$$

$$\Delta a = s \sqrt{\frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}, \quad (11)$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (12)$$

$$\Delta b = s \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \quad (13)$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i)]^2}, \quad (14)$$

Die  $a$  und  $b$  sind jeweils  $f$  und  $h$  gleich.

Wir erhalten als Werte:

Tabelle 1: Berechnete Werte für Brennweiten und Abstand Hauptebenen von  $\beta$

Wert	$f_1/\text{mm}$	$f_2/\text{mm}$	Ergebnis/cm
$f_1$	80	-200	$11.0 \pm 0.3$
$h_1$	80	-200	$3.9 \pm 0.4$
$f_2$	80	-200	$11.6 \pm 0.1$
$h_2$	80	-200	$2.0 \pm 0.4$
$f_1$	-200	80	$11.5 \pm 0.3$
$h_1$	-200	80	$0.6 \pm 0.4$
$f_2$	-200	80	$11.93 \pm 0.06$
$h_2$	-200	80	$3.2 \pm 0.4$

Zur Klarifizierung fertigen wir noch eine (außer der Linsen) maßstabsgetreue Skizze an. Diese kann im Anhang als Abbildung 7 gefunden werden.

### 5.4 Diskussion

Betrachten wir unsere Maßstabsgetreue Skizze, so stimmen zumindest in diesem Fall unsere berechneten Wert für  $f$  prima überein. Dies deutet schonmal darauf, dass diese Werte gut sein sollten.

Schon im vorherigen Teil wurden die theoretischen Brennweiten für ein Linsensystem aus Linsen mit Brennweiten von  $f_1 = 80 \text{ mm}$  und  $f = -200 \text{ mm}$  berechnet. Zur Erinnerung lag dieser Wert bei  $f = 11.4 \text{ mm}$ . Vergleichen wir unsere Werte, so ist es sinnvoll, zuerst diese zu mitteln. Wir verwenden dazu wieder (4) und (5). Unsere Werte lauten dann:

- $f_1 = 80 \text{ mm}$  und  $f_2 = -200 \text{ mm}$  hat  $\bar{f} = (11.3 \pm 0.2) \text{ cm}$
- $f_1 = -200 \text{ mm}$  und  $f_2 = 80 \text{ mm}$  hat  $\bar{f} = (11.7 \pm 0.1) \text{ cm}$

Erstmal ohne Fehler und  $t$ : Der erste Wert ist 99% von dem theoretischen und der zweite 103%. Diese Werte sind also wesentlich näher am erwünschten Ergebnis als die vorher berechneten.

Nutzen wir aber (6), so erhalten wir für die erste Messreihe  $t = 73.9$  und für die zweite  $t = 80.2$ . Dies impliziert starke Unverträglichkeit der Ergebnisse mit dem theoretischen Wert. Unsere Fehler wurden also zu klein abgeschätzt. Jedoch muss man auch damit rechnen, dass die Fehler aus den vorherigen Versuchsteilen hier auch existieren.

Da unsere  $t$ -Werte jedoch so viel größer sind wäre es vermutlich sinnvoll gewesen, größere Fehler für die Bildgröße zu verwenden. Andere Fehler die in den vorherigen Teilen nicht existierten gibt es ja nicht. Zu schlechtes Abmessen und nicht perfektes Finden der besten Punkte für die Schärfe könnten diese Werte stark beeinflusst haben.

In den Graphiken kann man sich noch überlegen, ob es Sinn machen würde, bei beiden Geraden die gleichen Steigungen zu erzwingen. Dies ist jedoch nicht wirklich nötig, da die Werte schon nah genug aneinander sind.

Es gelten die gleichen Verbesserungsvorschläge wie zuvor auch.

## 6 Teil 4: Autokollimationsverfahren und Dispersion

### 6.1 Theorie

Das Autokollimationsverfahren lässt einen leicht Brennweiten bestimmen. Die Idee hier ist einfach:

$$f = D \quad (15)$$

Hier steht  $D$  für den Abstand zwischen Gegenstand und Linsenmitte.

Dies gilt für den unten beschriebenen Versuchsaufbau.

Um zusätzlich noch den Einfluss der Brechzahl zu überprüfen, betrachten wir die Formel für die Brennweite bei symmetrischen dünnen Linsen:

$$f = \frac{1}{n-1} \left( \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right) \quad (16)$$

Dies impliziert, dass

$$1/f \propto n - 1. \quad (17)$$

### 6.2 Durchführung

Wie schon erwähnt werden hier Spiegel und Farbfilter zunutze gemacht. Zuerst nimmt man kein Farbfilter, aber setzt den Spiegel direkt hinter der Linse. Man bewegt die Linse dann so, bis das zurückgespiegelte Bild maximal scharf ist, und notiert die Position dann. Dies wird für Linsensysteme mit 80 mm, 150 mm, 80 mm & 150 mm, 80 mm & -200 mm und -200 mm & 80 mm durchgeführt.

Für den Teil mit den Farbfiltern untersuchen wir ähnlichermaßen die Position der 250 mm Linse, bei der das zurückgespiegelte Bild maximal ist. Hierfür wird unser Farbfilter hinter das Dia gestellt. Dies wird für rot, blau und weiß durchgeführt.

### 6.3 Auswertung

Mit unseren Messdaten kommen wir mittels (15) und (2) auf folgende Ergebnisse:

Tabelle 2: Berechneten und gemessenen Brennweiten für verschiedene Linsensysteme

Erste Linse/mm	Zweite Linse/mm	Berechnet/mm	Gemessen/mm
0	80	8.0	8.0
0	150	15.0	14.9
80	150	5.7	7.1
80	-200	11.4	14.6
-200	80	11.4	10.7

Unsicherheiten: Gemessene Brennweite:  $\pm 0.3\text{mm}$

Für den Vergleich der Brechzahlen bekommen wir theoretisch mittels (17) einen Unterschied von 1%. Hier wurde gerechnet:

$$\alpha_t = \frac{n_b}{n_r}$$

Für die gemessenen Werte rechnen wir dann

$$\alpha_c = \frac{D_r}{D_b}.$$

Wir erhalten einen Unterschied von  $2\% \pm 2\%$ .

### 6.4 Diskussion

Zur Überprüfung der Korrektheit des ersten Satzes an Messungen können wir wieder einfach (6) anwenden. Wir erhalten

Tabelle 3:  $t$ -Werte für ersten Teil des vierten Versuchsteils

Erste Linse/mm	Zweite Linse/mm	$t$
0	80	0.0
0	150	0.3
80	150	4.6
80	-200	10.6
-200	80	2.4

Unsere  $t$ -Werte für die Linsensysteme mit nur einer Linse sind also verträglich, während die anderen dies nicht sind. Es kann also sein, dass die angegebenen Werte für die Distanz der Linsen nicht ganz korrekt ist. Dies wäre ein systematischer Fehler auf unser Ergebnis.

Dies impliziert, dass bei den vorherigen Messreihen eventuell schlecht abgelesen wurde oder ein allgemeiner Fehler dort vorhanden ist, welcher hier durch die Vorgehensweise eliminiert wurde.

Als Vorschlag gibt es zu diesem Teil nur, dass man eventuell noch selbst die Distanz zwischen den Linsen berechnen sollte.

Für den zweiten Teil ist eigentlich auch klar, dass die Werte verträglich sind, da der gemessene Unterschied  $1/2\sigma$  von dem berechneten entfernt ist. Dies impliziert wieder, dass die Messung auf diese Weise besser funktioniert als die vorherige. Die Farbfilter scheinen auch gut auf die erwünschten Wellenlängen eingeschränkt zu haben. Dies ist ansonsten als systematischer Fehler zu behandeln. Vorschläge gibt es hier keine.



## Literatur

- [1] "Correlations between variables are automatically handled, which sets this module apart from many existing error propagation codes." - <https://pythonhosted.org/uncertainties/>
- [2] Physikalisches Institut der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg (Hrsg.) (08/2018): Versuchsanleitungen zum Physiklabor für Anfänger\*innen, Teil 1, Ferienpraktikum im Sommersemester 2018.

## 7 Anhang: Abbildungen

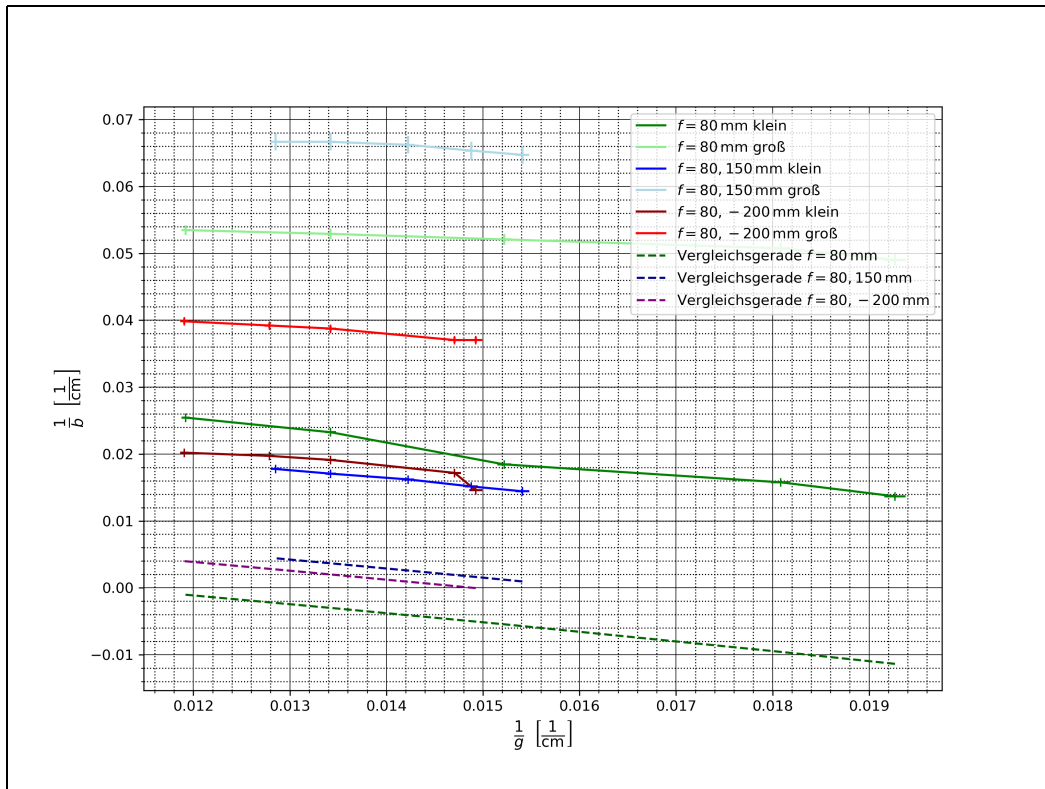


Abbildung 1: Graphik zum ersten Teil;  $1/b$  gegen  $1/g$ .

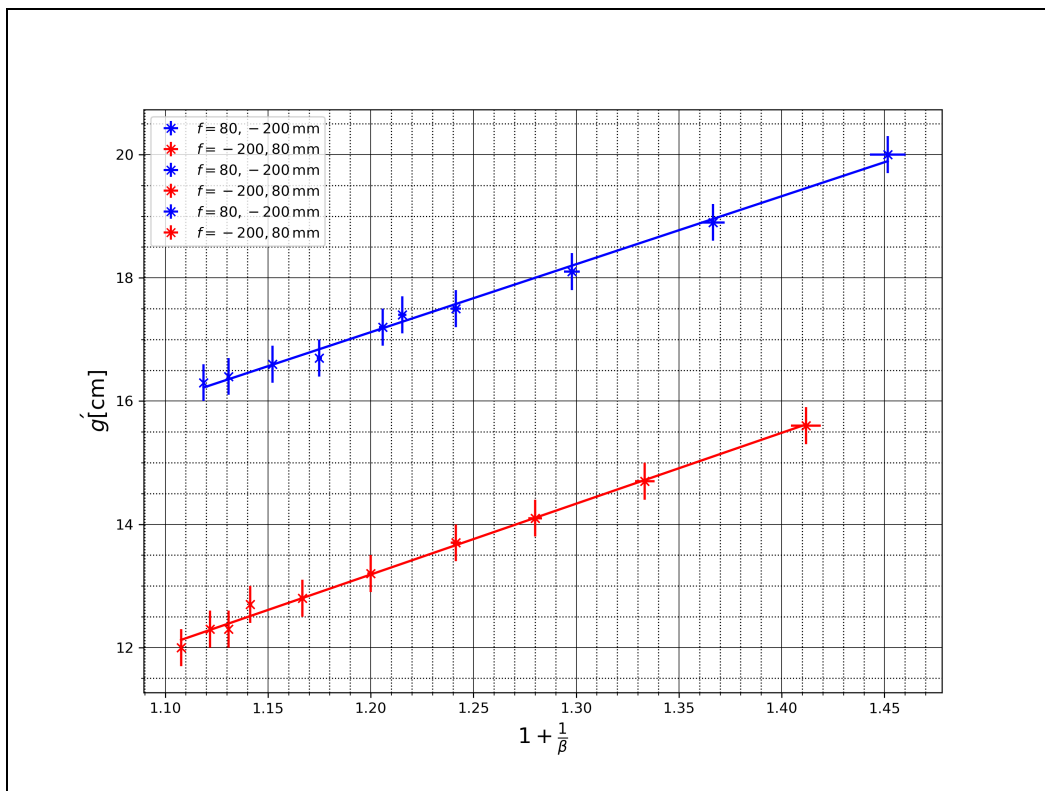


Abbildung 2:  $1 + \frac{1}{\beta}$  gegen  $g'$  dargestellt

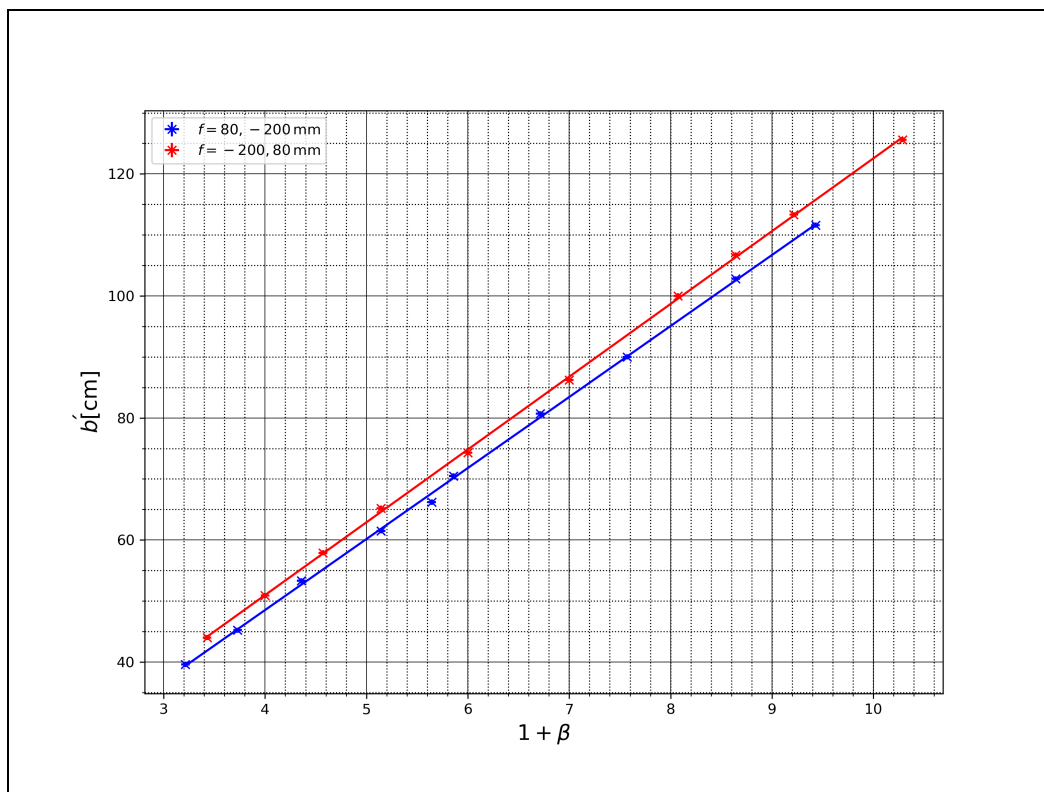


Abbildung 3:  $1 + \beta$  gegen  $b'$  dargestellt

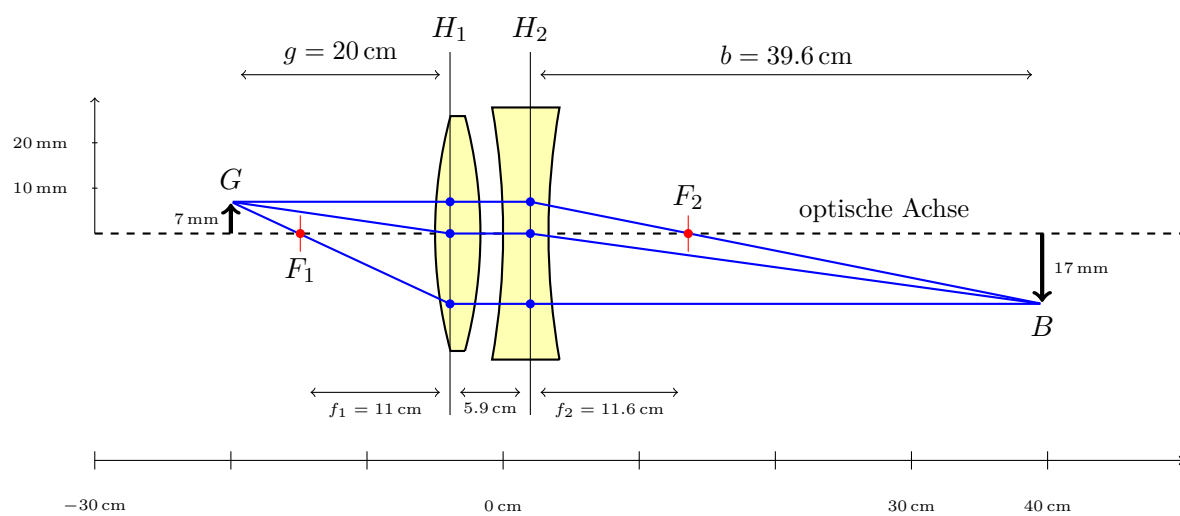


Abbildung 4: Außerhalb von Linsen Maßstabsgetreue Skizze des dritten Versuchs