Physiklabor für Anfänger*innen
Ferienpraktikum im Sommersemester 2018

Versuch 22: Kreiselpräzession

(durchgeführt am 21.09.2018 bei Adrian Hauber)
Andréz Gockel, Patrick Münnich
4. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Ziel des Versuchs

Dieser Versuch dient dazu, freie Rotation eines Systems mit von außen wirkender Drehmomente darzustellen. Insbesondere wird hier auf Präzession eingegangen. Dazu Nutzt man einen Kreisel, an dem Präzession und Rotation betrachtet werden.

2 Versuch

2.1 Theorie

Starre Körper haben Trägheitsmomente in Form eines Tensors. Bestimmte Achsen sind jedoch vielsagend. Diese formen einen Trägheitsellipsoid mit den Hauptachsen I_A, I_B und I_C. Bei symmetrischen Kreisel, wie hier vorhanden, sind I_B und I_C gleich. I_A ist das Trägheitsmoment bezüglich der Figurenachse. Bei Kreiseln ist dieses gleichzeitig unsere größte Komponente beim Trägheitsellipsoid.

Trägheitsmomente sind allgemein mit der Drehgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ und dem Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ verbunden:

$$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega} \tag{1}$$

Stoßt man einen an der Figurenachse gebundenen Kreisel an, so wirkt ein Drehmoment:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{G} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

$\boldsymbol{r}$ bezeichnet hier den Vektor vom Unterstützungspunkt zum Schwerpunkt ud $\boldsymbol{G}$ die Gewichtskraft im Schwerpunkt.

Da dies sich nur in der senkrechten Komponente ändert, ändert sich der Betrag des Drehimpulses nicht. Die einzige Änderung ist die Richtung, welche zu einer Drehbewegung in der Senkrechte führt. Diese Bewegung wird als Präzession bezeichnet, mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_P$. Zusammen mit der Drehgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_F$ um die Figurenachse ergibt sich die momentane Drehgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$.

Bei einem präzedierenden Kreisel gibt es also eine Kreisbewegung mit Radius $L \sin\phi$ mit ϕ als Winkel zwischen $\boldsymbol{L}$ und der vertikalen Achse. Die Rotationsgeschwindigkeit hat einen Betrag von $\omega_P = {}^{\mathrm{d}\varphi}/_{\mathrm{d}t}$, wobei φ der azimutale Winkel ist. Die Äenderung des Drehimpulses ist also eine Richtungsänderung $\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}L}{L\sin\phi}$. Mit diesem Wissen kommen wir also zu

$$\omega_P = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t L \sin\phi}$$

Dies können wir umschreiben zu

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}_P \times \boldsymbol{L}. \tag{3}$$

Mit (2) kommen wir zu der Gleichung

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{G} = \boldsymbol{\omega}_P \times \boldsymbol{L} \tag{4}$$

Da wir in diesem Versuch mit einem schnell rotierenden Kreisel arbeiten, also $\omega_F >> \omega_P$, gilt näherungsweise $\sin(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{G}) = \sin(\boldsymbol{\omega}_P, \boldsymbol{L})$. Als nächstes schreiben wir (4) für die Beträge der Vektoren um:

$$rG\sin(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{G}) = \omega_P L \sin(\boldsymbol{\omega}_P, \boldsymbol{L}). \tag{5}$$

Nutzen wir unsere Näherung aus, so können wir schreiben

$$rG \approx \omega_A L \approx \omega_F L. \tag{6}$$

Hier ist ω_A die Drehgeschwindigkeitskomponente, die mit ω_B entlang zweier Hauptträgheitsachsen des Kreisels verläuft und sich mit I_A und I_B zusammen zu $\boldsymbol{L}$ vektoriell addieren lassen.

Mit $L \approx I\omega_A \approx I\omega_F$ können wir sagen, dass $L \approx \omega_P \omega_A I \approx I\omega_P\omega_F$. Damit kommen wir auf unsere gesuchte Gleichung

$$I_A = \frac{rG}{\omega_F \omega_P}, \tag{7}$$

welche wir für unsere Rechnungen benötigen.

2.2 Aufbau

Es wurde ein Kreiselrad mit verstellbarer Kreiselachse verwendet. Dieses wurde auf ein Stativ mit einer drehbaren Halterung gesetzt, das dem Kreisel ermöglichte, eine Präzessionsbewegung zu durchlaufen. Eine Federwaage wurde verwendet um die Masse des Kreisels zu bestimmen. Es wurden zwei Stoppuhren benutzt, um jeweils die Präzessionsfrequenz und die Rotationsfrequenz zu messen.

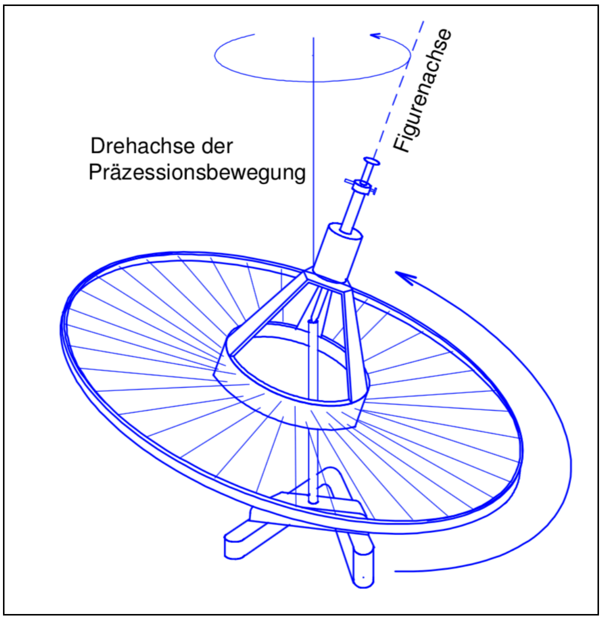

Abbildung B1: Präzessierender Kreisel [1]

2.3 Durchführung

Zuerst wurde Masse des Kreisels gemessen. Zunächst wurde die Kreiselachse eingestellt, dann wurde das Kreiselrad angehoben und per hand im Uhrzeigersinn gedreht. Der rotierende Kreisel wurde dann vorsichtig auf die Halterung platziert und gekippt. Dann wurden 10 Rotationen zeitlich gemessen, und eine Präzessionsbewegung. Dies wurde für 10 verschiedene Kreiselachsen vier mal durchgeführt. Die Drehrichtung der Präzessionsbewegung wurde jedesmal notiert. Es konnten nur die Drehrichtung bestimmt werden für die Einstellungen wo der Schwerpunkt nicht zu nahe dem Unterstützungspunkt war.

2.4 Auswertung

Erstmals ist es wichtig zu wissen, dass unser gesuchtes I_A eine Konstante ist. Wollen wir diese mit (7) finden, so brauchen wir r, m, g, ω_F und ω_P. Die Masse m können wir leicht messen und wir bekommmen als Ergebnis (4.52 ± 0.020) kg. Für g verwenden wir einfach 9.81 m/s². ω_F und ω_P können wir über die Periodendauer T berechnen:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Uns fehlt also nur noch r. Da I_A eine Konstante ist, können wir aus der Gleichung (7) schließen:

$$r = \frac{\omega_F \omega_P}{G} \tag{8}$$

Für die rechte Seite der Gleichung ist alles gemessen. Wir können dies in eine Graphik auftragen, in der wir dann einen linearen Zusammenhang sehen werden. Wir folgern, dass r wohl aus unserem eingestellten Abstand x summiert mit einem Offset x_0 besteht.

Nutzen wir für als lineare Gleichung für eine Ausgleichsgrade von dne Messpunkten

$$y = a + bx,$$

so können wir unser x_0 als $-\frac{a}{b}$ festlegen.

Um unser a und b zu finden, sowie auch die Standardunsicherheiten von y, a und b, nehmen wir folgende Formeln zunutze:

$$a = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \tag{9}$$

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \tag{10}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx_i)]^2} \tag{11}$$

$$\Delta a = s \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \tag{12}$$

$$\Delta b = s \sqrt{\frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \tag{13}$$

Unsere letzte Messreihe hat eine zu große Abweichung, was zu einer ungenaueren Geraden führt. Erläuterung des Grundes dessen ist in der Diskussion zu finden. Die resultierende Graphik ist im Anhang als Abbildung D1 zu finden. Wir nutzen also die letzte Messreihe nicht aus. Um dann unseren Offset x_0 und seine Standardunsicherheit zu finden, rechnen wir

$$x_0 = \frac{-a}{b}$$

$$\Delta x_o = x_0 \times \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$$

Aus unseren Messwerten, welche in Tabelle (1) im Anhang gefunden werden kann, folgern wir also:

- Offset $x_0 = 4.70$
- Unsicherheit Offset $\Delta x_0 = 0.20$
- $\Delta x_0 / x_0 = 0.04 = 4\%$

Um das gesuchte I_A zu berechnen, nutzen wir Gleichung (7). Damit bekommen wir als Mittelwert

$$I_A = (14.5 \pm 0.6)\,\mathrm{kgcm}^2$$

Den Fehler des Mittelwerts berechnen wir über die allgemeine Formel:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}. \tag{14}$$

3 Diskussion

Da I_A eine Konstante ist, können wir aus der Gleichung für I_A schlussfolgern, dass

$$\frac{\omega_F \omega_P}{G}$$

linear verlaufen muss. Tragen wir dies mit allen Messwerten auf, so bekommen wir den Graph, der im Anhang als Abbildung (D2) gefunden werden kann.

Dies sieht zwar relativ linear aus, jedoch können wir ohne dem letzten Punkt einen klar lineareren Verlauf feststellen. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die letzte Messreihe bei $x = 10$ durchgeführt wurde und unser Offset $x_0 = 4.70$ ist. Da 10 im Vergleich zu den anderen Messwerten schon weit entfernt ist von 4.70, ist klar, dass dessen Werte nicht besonders gut sein wird.

Unser Ergebnis (zur Wiederholung: $I_A = (14.5 \pm 0.6)\,\mathrm{kgcm}^2$) verfügt über keinen Literaturwert, mit dem wir das vergleichen können. Da unser Fehler bei 4% liegt deutet dies darauf, dass er genau sein sollte.

Es ist jedoch ein systematischer Fehler vorhanden, unzwar, dass die Reibung des Kreisels die Drehgeschwindigkeit verlangsamt. Wie stark dessen Einfluss ist kann man rausfinden, indem man die Periodendauer über einen Zeitraum mehrmals misst. Bei einem Zeitraum von 10 s wurde bei dem hier verwendeten Kreisel gemessen, dass sich die Periodendauer von 10 Umdrehungen von 6.3 s bzw. 5.6 s auf 7.1 s bzw. 6.1 s gesinkt ist. Dies entspricht jeweils 13% bzw. 9%. Es ist also durchaus möglich, dass die Reibung den Wert beeinflusst. Betrachten wir die Gleichung zum Berechnen von I_A,

$$I_A = \frac{rG}{\omega_F \omega_P},$$

so können wir klar sehen, dass I_A von zwei von T abhängigen Werten, r, ω_F und ω_P abhängt. Setzen wir T zu dem 1.10-Fachen, so erhalten wir mit der gleichen Rechnung wie zuvor $(17.5 \pm 0.7)\,\mathrm{kgcm}^2$.

Dieser Wert ist das (1.20 ± 0.05)-Fache von unserem vorher berechneten Wert.

Vergleichen wir diese Werte mit der folgenden Formel:

$$t = \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}, \tag{15}$$

so erhalten wir $t = 4.13$. Dies ist außerhalb des erwünschten $t < 2$ Bereichs. Diese beiden Werte sind also unverträglich. Zwar ist keines der beide ein Literaturwert, jedoch können wir dadurch deutlich erkennen, dass der durch die Reibung entstehende Fehler einen großen Einfluss hat.

Literatur

[1] Physikalisches Institut der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg (Hrsg.) (08/2018): Versuchsanleitungen zum Physiklabor für Anfänger*innen, Teil 1, Ferienpraktikum im Sommersemester 2018.

4 Anhang: Tabellen und Diagramme

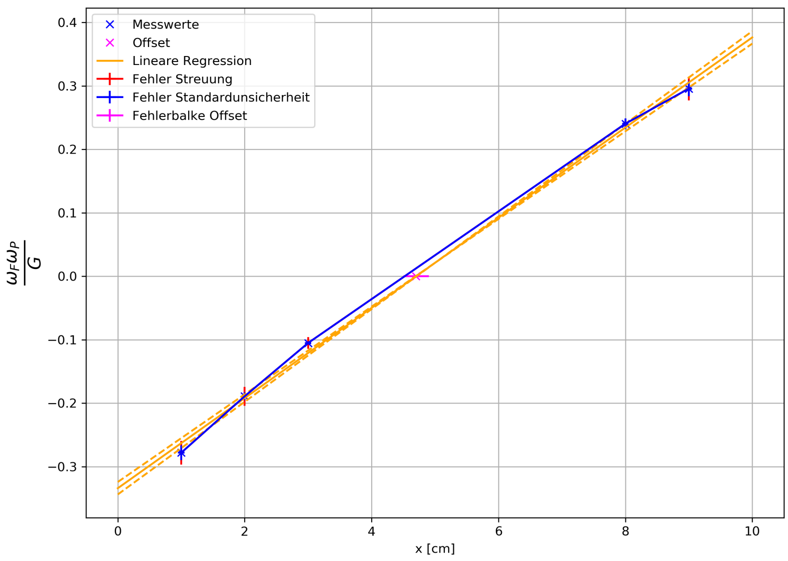

Abbildung D1: Ausgleichsgerade

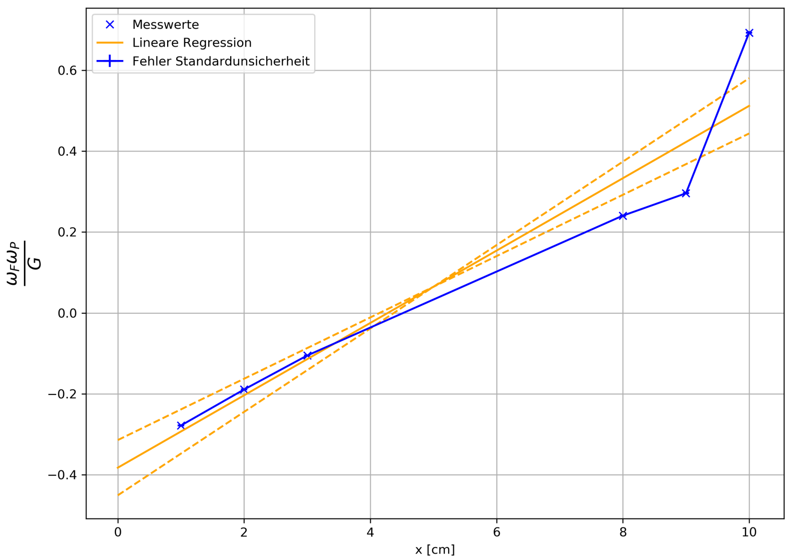

Abbildung D2: Vergleichsgraphik

Tabelle 1: Messwerte

l in cm	Präzession umlaufdauer in s	10 Rotationen umlaufdauer in s
1	6.6	5.1
1	4.7	6.9
1	3.6	8.1
1	7.9	4.2
2	6.5	6.7
2	6.7	6.7
2	7.0	6.0
2	9.4	5.5
3	13.7	6.8
3	14.4	6.2
3	9.8	7.8
3	13.4	6.1
8	5.7	6.4
8	6.6	5.5
8	5.6	6.6
8	6.4	6.0
9	5.1	5.7
9	4.7	6.5
9	4.1	8.0
9	6.3	4.5
10	1.7	6.7
10	2.7	5.0
10	3.9	3.6
10	3.2	4.0

Unsicherheiten:
Zeit: $\pm\,0.3$s
Länge: $\pm\,0.05$cm