

Versuch 04: Dichte und Oberflächenspannung

(durchgeführt am 07.09.2018 bei Daniel Bartle)
Andréz Gockel, Patrick Münnich
10. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel des Versuchs	2
2 Teil A	2
2.1 Aufbau	2
2.2 Durchführung	2
2.3 Physikalische Zusammenhänge	2
2.4 Auswertung	3
2.4.1 Unsicherheitsvergleich mit Streuung	5
3 Teil B - Oberflächenspannung	6
3.1 Aufbau	6
3.2 Durchführung	6
3.3 Physikalische Zusammenhänge	6
3.4 Auswertung	6
3.4.1 Diskussion	7
4 Anhang: Tabellen und Diagramme	9

1 Ziel des Versuchs

Der Versuch ist in zwei Teile geteilt, welche dazu dienen, grundlegende Eigenschaften von Flüssigkeiten experimentell zu bestimmen. Im Teil A bestimmt man die Dichte von einem Festkörper und einer unbekannten Flüssigkeit mithilfe einer Jollyschen Federwaage. Im Teil B bestimmt man die Oberflächenspannung von Wasser durch Messen der Abrisskraft mithilfe eines Torsionskraftmessers.

2 Teil A

2.1 Aufbau

Für diesen Teil verwenden wir die Jollysche Federwaage (B1) diese hat zwei identische Waagschalen um die Auftriebskraft der Flüssigkeit an der Waagschale auszugleichen. Zuerst verwenden wir eine Metallkugel und ein Wasser gefüllten Becher den wir auf die verschiebbare Platte stellen sodass die zweite Waagschale sich in dem Wasser befindet. Nachdem die Kugel gemessen wurde wird das Wasser durch die unbekannte Flüssigkeit ersetzt.

Wichtig zu beachten ist, dass die Schale immer gleich tief in die Flüssigkeit getunkt wird und beim auflegen der Kugel darf die Waagschale den Boden des Bechers nicht berühren. Die Kugel darf nur trocken auf die obere Waagschale gesetzt werden, außerdem sollte die Waagschale den Innenrand des Bechers nicht berühren um den Einfluss von Reibkräften zu vermeiden.

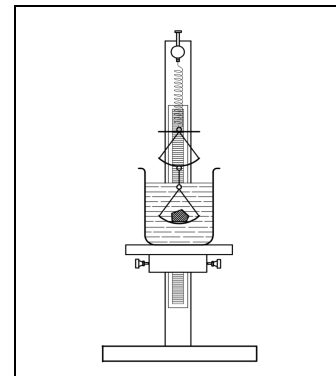


Abbildung B1: Jollysche Federwaage [4]

2.2 Durchführung

Anfangs wurde die Kugel mit der oberen Waagschale gewogen, und dann mit der im Wasser getunkten Waagschale. Zunächst wurde der verschiebbare Tisch auf dem sich der Becher befindet verstellt und den Aufhängepunkt der Feder so eingestellt, dass die Waagschale wieder gleich tief in dem Wasser ist. Dann wird noch mal gewogen und das ganze für fünf verschiedene Positionen wiederholt.

Dann wird das Wasser mit der unbekannten Flüssigkeit ersetzt und das Verfahren wurde nochmals fünf mal wiederholt.

2.3 Physikalische Zusammenhänge

Für das Dichteverhältniss gilt:

$$\frac{\rho}{\rho_{Fl}} = \frac{F_G}{F_G - F_{G'}} \quad (1)$$

$$F = -k(x - x_0), \quad (2)$$

wobei die Größen in (1)

- ρ und ρ_{Fl} jeweils die Dichten von dem Körper und der Flüssigkeit.
- F_G die Gewichtskraft des Körpers in Luft.

- $F_{G'}$ die Gewichtskraft des Körpers in einer Flüssigkeit.

und in (2)

- F die Federkraft
- k die Federkonstante
- x_0 die Ruhelage der Waage
- x die Auslenkung der Waage sind.

Daraus ergibt sich für die Dichte mit den Auslenkungen x_1 Objekt in Luft und x_2 Objekt in Flüssigkeit:

$$\rho = \rho_{Fl} \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_2}. \quad (3)$$

Die Formel (3) kann zu

$$\rho_{Fl} = \rho \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_0} \quad (4)$$

umgestellt werden.

2.4 Auswertung

Zur ersten Aufgabe:

Die Messungen wurden mit einer Metallkugel durchgeführt mit einem Durchmesser von $d = (1.20 \pm 0.03)$ cm und einer Masse von $m = (7.030 \pm 0.005)$ g. Mit der Formel für das Volumen, $V = \frac{\pi}{6}d^3$, und für die Dichte, $\rho = \frac{m}{V}$, ergibt sich ein Wert von (7800 ± 600) kg/m³. Hierbei wurde der Fehler über die Potenzformel des Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes ($\delta V = \frac{\Delta V}{V}$, $\delta V = 3\delta d$) bei Vernachlässigung des Fehlers der Masse bestimmt. Das Vernachlässigen ist deswegen möglich, weil der Fehler wesentlich kleineren Einfluss hat.

Die Fehlerfortpflanzung funktioniert hier folgendermaßen:

Für $\rho = \frac{m}{V}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{1}{V}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial V} = -mV^{-2}$$

Eingesetzt:

$$\Delta \rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m} \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial V} \Delta V\right)^2}$$

Tabelle 1: Messwerte Kugel

	Messung	1	2	3	4	5	
In Wasser :	Ruhelage	x_0	441	479	473	463	468
werte in mm	Nicht eingetaucht	x_1	414	453	447	436	440
Fehler: $\pm 0.1\text{mm}$	Eingetaucht	x_2	417	456	450	439	443

Um (3) mit Unsicherheit angeben zu können rechnen wir: Für (3): Zuerst leiten wir partiell nach den Variablen ab:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_0} = \frac{1}{x_1 - x_2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_1} = \frac{x_1 - x_0}{(x_1 - x_0)^2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_2} = \frac{x_1 - x_0}{(x_1 - x_2)^2}$$

Dann setzen wir ein:

$$\Delta \rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_0} \Delta x_0\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2}$$

Für unsere Messwerte aus Tabelle 1 erhalten wir mit (3)

Tabelle 2: Dichte Kugel

Messung	1	2	3	4	5
Dichte ρ [kg/m ³]	9000 ± 4000	9000 ± 4000	9000 ± 4000	9000 ± 4000	9000 ± 4000

Zur Berechnung des Mittelwerts verwenden wir:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (5)$$

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} \quad (6)$$

Der Mittelwert unserer Messung beträgt also $\rho = (9000 \pm 2000) \text{ kg/m}^3$. Diese Rechnungen wurden mit dem *uncertainties* Paket in Python durchgeführt. Siehe Anhang: *Rechnungen in Python* (In [1]). [1] Der Fehler der Messung mit der Jollyschen Waage ist aufgrund des großen Dichteunterschieds zwischen dem Metall und der Flüssigkeit relativ groß. Dadurch ist die Auftriebskraft im Vergleich zur Gewichtskraft der Kugel klein und man erhält im Nenner von (3) die Differenz zweier nahezu gleichen Messwerte, deren Fehler dann groß ist.

Zur zweiten Aufgabe:

Die Rechnungen wurden mit den Messwerten aus dem ersten Aufgabenteil durchgeführt und es wurde die gleiche Apparatur verwendet. Als Wert für die Dichte des Körpers wurde der Mittelwert auf dem ersten Aufgabenteil genutzt. Wir verwenden hier Gleichung (4).

Für die unbekannte Flüssigkeit wurde gemessen:

Tabelle 3: Messwerte Flüssigkeit

In Flüssigkeit : werte in mm Fehler: ±0.1mm	Messung	1	2	3	4
	Ruhelage x_0	449	466	440	482
	Nicht eingetaucht x_1	424	438	414	455
	Eingetaucht x_2	427	441	417	458

Mit (4) ergibt sich dann:

Tabelle 4: Dichte Flüssigkeit

Messung	1	2	3	4
Dichte ρ [kg/m ³]	1100 ± 300	1000 ± 300	1000 ± 300	1000 ± 300

Hier ist der Mittelwert dann $\rho_{Fl} = (1000 \pm 300) \text{ kg/m}^3$. Die Rechnungen wurden hier wieder mit dem *uncertainties* Paket in Python durchgeführt. Siehe Anhang: *Rechnungen in Python* (In [2]).

2.4.1 Unsicherheitsvergleich mit Streuung

Zur Berechnung der Streuung verwenden wir:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (7)$$

Aus den 5 bzw. 4 Einzelwerten der beiden Messungen ergeben sich folgende Streuungen:

$$s_\rho = 279 \text{ kg/m}^3, \quad s_{\rho_{Fl}} = 49.1 \text{ kg/m}^3$$

Diese Werte sind erheblich kleiner als erwartet. Der Grund dafür könnte bei einer zu groben Abschätzung der Messungenauigkeit oder aufgrund der geringen Anzahl an Einzelmessungen (5 bzw. 4) liegen.

Geht man von einer ein viertel so großen Messungenauigkeit aus, so erhält man Fehlerabschätzungen von etwa 2000 kg/m^3 , was immer noch nicht konsistent mit der Abschätzung mittels s_ρ ist. Daher müssen wir davon ausgehen, dass die kleinen Werte von s_ρ und $s_{\rho_{Fl}}$ durch die geringe Anzahl an Einzelmessungen zustande gekommen sind.

Aus den Unsicherheiten der Einzelmessungen ergeben sich Standardabweichungen des Mittelwerts von (wieder mit (6) zu berechnen):

$$s_{\bar{\rho}} = (4000 \pm 100) \text{ kg/m}^3, \quad s_{\bar{\rho}_{Fl}} = (500 \pm 20) \text{ kg/m}^3$$

Bei der Messreihe mit der unbekannten Flüssigkeit gibt es einen systematischen Fehler aufgrund der verwendeten gemessenen Dichte des Körpers, die unter Umständen zu groß oder zu klein geschätzt wurde und als Referenz dient. Dieser Fehler wird jedoch mitbetrachtet bei der Rechnung.

3 Teil B - Oberflächenspannung

3.1 Aufbau

Für diesen Versuchsteil wird eine Torsionswaage verwendet. Zusätzlich werden zwei gleiche Drahtbügel verwendet. Benötigt wird noch Ethanol, um die Drahtbügel von Fettspuren zu reinigen. Ein kleinen Becher der zuerst mit Wasser und später mit Ethanol gefüllt wird. An den enden der Waage befindet sich jeweils ein Häkchen wo die Drahtbügel angehängt werden.

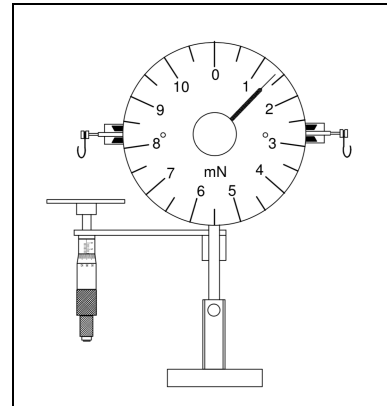


Abbildung B2: Torsionswaage [4]

3.2 Durchführung

Erst wurden die Drahtbügel mit dem Ethanol gewischt, dann gewogen. Die Drahtbügel werden an die Haken gehängt und der Wasserbecher wird auf den Messtisch unter dem linken Drahtbügel gestellt. Als nächstes wurde die Waage kalibriert und die Auftriebskraft des Wassers ausgeglichen. Hierzu wird zuerst die Kraftwaage auf null gestellt, um den Gewicht unterschied auszugleichen. Zunächst wird der Drahtbügel in das Wasser getunkt und der Messtisch so eingestellt, dass die an dem Drahtbügel gebildete Lamelle gerade reißt. Die Auftriebskraft wird dann ausgeglichen durch abwechselndes drehen der beiden Knöpfe an der Kraftwaage. Danach wurde der Drahtbügel wieder in das Wasser getunkt und die Lamelle erneut gebildet. Dann wird die Kraft gemessen die an dem Punkt auftritt genau vor die Lamelle reißt.

3.3 Physikalische Zusammenhänge

Für die Oberflächenspannung von Wasser und Ethanol gilt:

$$\sigma = \frac{F_{s_{max}}}{2l} \quad (8)$$

3.4 Auswertung

Die Oberflächenspannung von Wasser und Ethanol wurde mit der Abreißmethode gemessen. Wir nutzen hier also (8)

Die Länge l des Drahts beträgt (2.63 ± 0.03) cm. Die Messwerte für Wasser und Ethanol befinden sich im Anhang. Deren Graphische Darstellungen in den Graphiken sind auch im Anhang.

Aus den Graphiken lesen wir folgende Werte für $F_{s_{max}}$ ab:

Tabelle 5: Kräfte bei Wasser

Messung	1	2
Kraft $F_{s_{max}}$ [mN]	5.2 ± 1.0	4.8 ± 1.0

Tabelle 6: Kräfte bei Ethanol

Messung	1	2	3
Kraft $F_{s_{max}}$ [mN]	1.3 ± 0.3	1.4 ± 0.3	1.4 ± 0.3

Die Fehler wurden durch Streuung der Messpunkte um die angepassten Kurven abgeschätzt. Mit der Formel (8) ergibt sich für die Oberflächenspannung

Tabelle 7: Oberflächenspannung bei Wasser

Messung	1	2	Mittelwert
Oberflächenspannung [mN/cm]	1.0 ± 0.2	0.9 ± 0.2	0.9 ± 0.1

Tabelle 8: Oberflächenspannung bei Ethanol

Messung	1	2	3	Mittelwert
Oberflächenspannung [mN/cm]	0.24 ± 0.05	0.27 ± 0.05	0.26 ± 0.05	0.26 ± 0.03

Dieses Verfahren kann folgendermaßen mit Fehlerfortpflanzung durchgeführt werden:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial l} = -\frac{F_{s_{max}}}{2l^2}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial F_{s_{max}}} = -\frac{1}{2l}$$

$$\Delta \sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial \sigma}{\partial l} \Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial F_{s_{max}}} \Delta F_{s_{max}}\right)^2}$$

3.4.1 Diskussion

An dieser Stelle ist noch zu beachten, dass das Finden von $F_{s_{max}}$ via Abschätzung nach einer selbst gezeichneten Kurve ein systematischer Fehler ist. Es ist auch nicht optimal, dass nur zwei bzw. drei Kurven verwendet wurden. Würde man also mehr Messungen machen, also öfter Messen bei den einzelnen Messreihen und mehr Messreihen durchführen, so wäre das Ergebnis besser.

Der Literaturwert von Wasser bei 25°C ist $71.99 \pm 0.05 \text{ mN/m}$. [2] Unser Mittelwert, der $90 \pm 10 \text{ mN/m}$ beträgt, beinhaltet mit dem Fehler einberechnet den Literaturwert.

Um dies zu klarifizieren nutzen wir die folgende Funktion:

$$\frac{|x - y_0|}{u_x} \quad (9)$$

Wir erhalten als Wert $t = 1.8$. Wir liegen also im $2\text{-}\sigma$ Bereich. Dies impliziert Verträglichkeit.

Ethanol hat bei 25°C einen Literaturwert von 22.39 mN/m . [3] Der hier berechnete Mittelwert, $26 \pm 3 \text{ mN/m}$, beinhaltet den Literaturwert auch nicht, ist aber schon näher dran mit $t = 1.2$. Vermutlich sind also die Messungen bei Ethanol besser verlaufen als die bei Wasser. Ein möglicher Grund des größeren Unterschieds bei Wasser als bei Ethanol kann auf die weniger Messwerte und Mangel an Erfahrung beim Durchführen des Versuchs zurückgeführt werden.

Literatur

- [1] "Correlations between variables are automatically handled, which sets this module apart from many existing error propagation codes." - <https://pythonhosted.org/uncertainties/>
- [2] https://en.wikipedia.org/wiki/Surface-tension_values#cite_note-one-2 (10. Oktober 2018)
- [3] https://en.wikipedia.org/wiki/Surface_tension (10. Oktober 2018)
- [4] Physikalisches Institut der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg (Hrsg.) (08/2018): Versuchsanleitungen zum Physiklabor für Anfänger*innen, Teil 1, Ferienpraktikum im Sommersemester 2018.

4 Anhang: Tabellen und Diagramme

Tabelle 9: Messwerte für Wasser (Teil B)

	Höhe/mm	Kraft/mN	Kraft/mN
	2	0.26	0.23
	4	0.33	0.25
Unsicherheiten:	5		0.3
Höhe: $\pm 0.03\text{mm}$	6	1.25	0.83
Kraft: $\pm 0.02\text{mN}$	8	3.9	0.83
	9	4.75	4.6
	10	4.7	

Tabelle 10: Messwerte für Ethanol (Teil B)

	Höhe/mm	Kraft/mN	Kraft/mN	Kraft/mN
	0	-0.35	-0.35	
	1	-0.2		
	3.5			0
	3.75	0	0	
	4			0.15
Unsicherheiten:	4.5			4.6
Höhe: $\pm 0.03\text{mm}$	5	0.67	0.85	1.1
Kraft: $\pm 0.02\text{mN}$	5.5		1.1	1.25
	6		1.3	1.4
	6.2			1.43
	6.4			1.4
	6.5		1.35	
	6.6			1.3
	7	1.25		
	8	1.25		

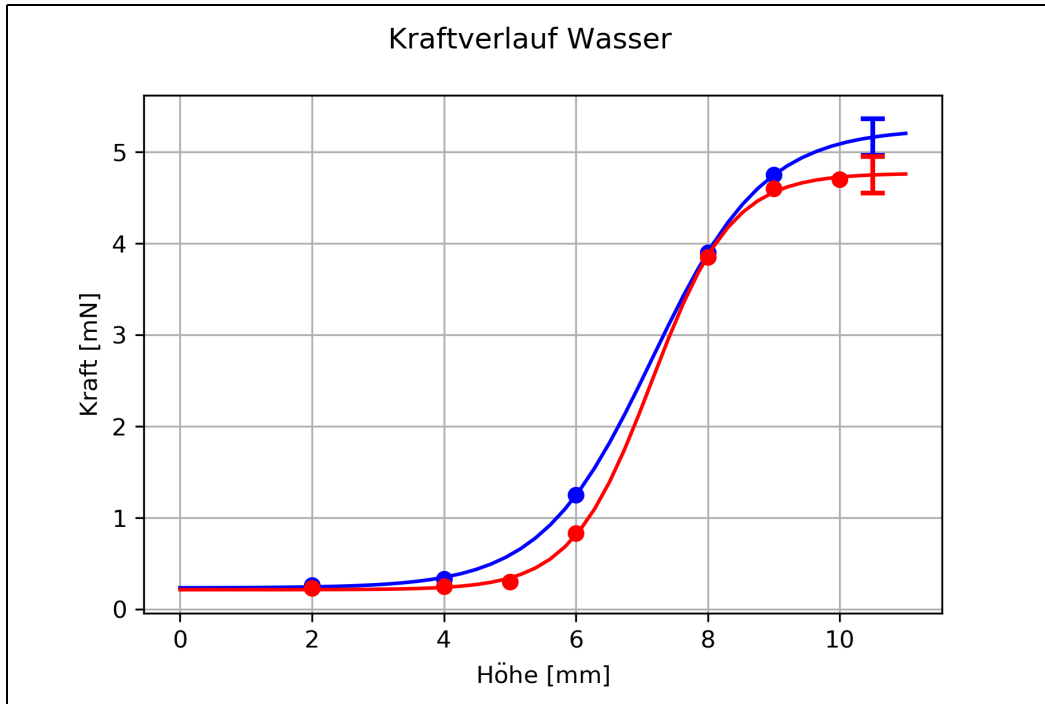


Abbildung B3: Verlauf der Kraft F als Funktion der Position x beim Herausziehen des Bügels aus der Flüssigkeit.

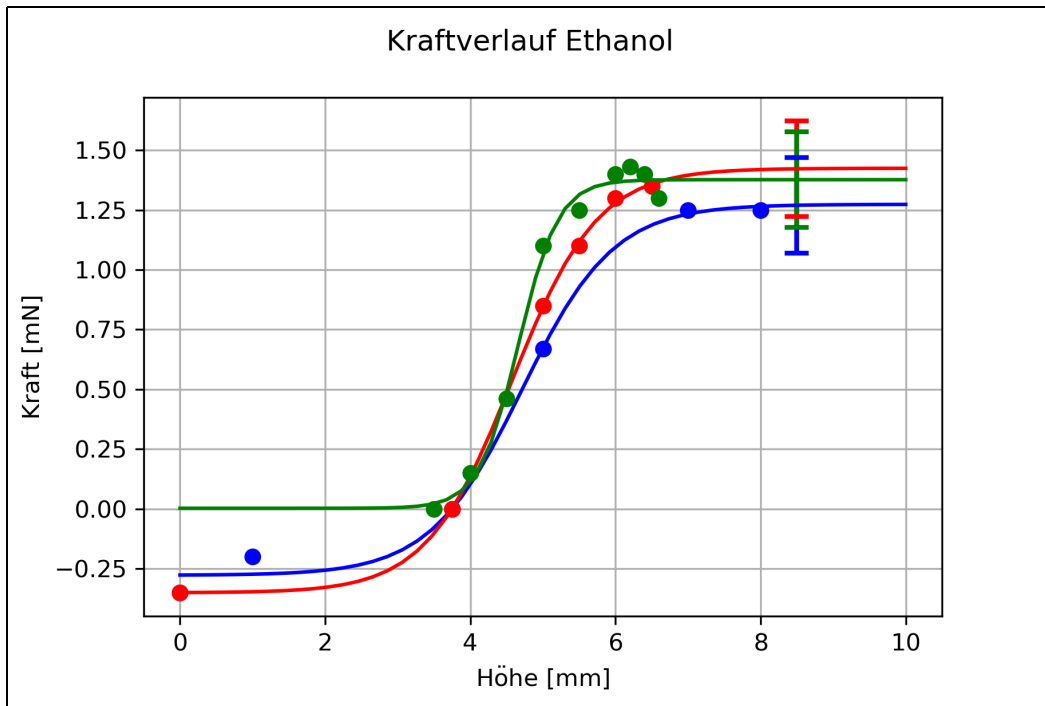


Abbildung B4: Verlauf der Kraft F als Funktion der Position x beim Herausziehen des Bügels aus der Flüssigkeit.