Physiklabor für Anfänger*innen
Ferienpraktikum im Sommersemester 2018

Versuch 17: Trägheitsmomente/Steinerscher Satz

(durchgeführt am 17.09.2018 bei Adrian Hauber)
Gruppe 14: Andréz Gockel, Patrick Münnich
22. September 2018

1 Ziel des Versuchs

Dieser Versuch hat zwei Teile. Im ersten Teil wird mit Hilfe von einer hergeleiteten Formel (**??**), die den Trägheitsmoment mit der Periodendauer in Zusammenhang bringt das Trägheitsmoment eines ausgedehnten starren Körper berechnet. Dieses wird verglichen mit dem experimentell bestimmten Wert. Das Trägheitsmoment wird bestimmt von einer zylindrische Stange, die nicht im Schwerpunkt aufgehängt wird und die per hand in Schwingung versetzt wird, in dem die Schwingungsdauer gemessen wird und den Wert mit der hergeleiteten Formel berechnet wird. In dem zweiten Teil wird von einem Drehpendel den Zusammenhang von der Schwingungsdauer und dem Abstand von einer Zusatzmasse zum Mittelpunkt verwendet, um hiermit den Steinerschen Satz experimentell zu verifizieren.

2 Teil 1 - Trägheitsmomente

2.1 Herleitung der Schwingungsgelichung

Der unterschied von einem mathematischen Pendel und einem physikalischen Pendels ist dass, es sich nicht um eine punktförmige Masse handelt sondern den Schwerpunkt von einem starren Körper wo das Trägheitsmoment berücksichtigt werden muss. Mit der rücktreibenden Kraft $F_r = mg\sin\varphi$ und den Abstand von Aufhängepunkt zu Schwerpunkt d können wir das Drehmoment ausdrücken als:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{F_r} \times \boldsymbol{d} = dm\boldsymbol{g}\sin(\varphi)$$

mit der klein Winkel Näherung: $\sin\varphi \approx \varphi$:

$$\boldsymbol{M} = dm\boldsymbol{g}\varphi$$

Dies wird gleichgesetzt mit:

$$\boldsymbol{M} = \dot{\boldsymbol{L}} = -I \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = -I \cdot \ddot{\varphi}$$

$$\Rightarrow -I \cdot \ddot{\varphi} = dm\boldsymbol{g}\varphi \quad \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\underbrace{\left(\frac{dm\boldsymbol{g}}{I}\right)}_{\omega^2}\varphi \quad \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi$$

Mit $T = 2\pi\frac{1}{\omega}$ bekommt man: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{dmg}}$.

Zunächst wird das Trägheitsmoment eines starren Körpers, in diesem fall einen Vollzylinder berechnet. Allgemein für das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse gilt:

$$I = \int \boldsymbol{r}^2 \,\mathrm{d}m$$

mit $m = \rho V$ und angenommen der Zylinder ist homogen bekommt man: $I = \rho\int_V \boldsymbol{r}^2 \,\mathrm{d}V$

in Zylinderkoordinaten: $\boldsymbol{r^2} =$

$$I = \rho\int_0^{2\pi}\int_0^{l}\int_0^{r} \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r$$

wobei

2.2 Aufbau

Ein zylindrischer Stab der an einem Stativ gehängt werden kann. Zusätzlich wird benötigt ein Bandmass, Messschieber und eine Stoppuhr für die Messungen.

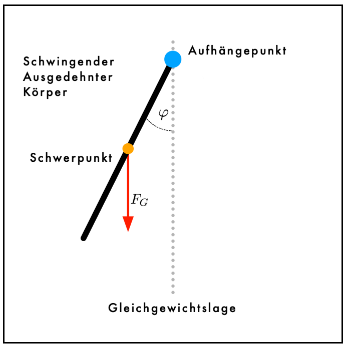

Abbildung B1: Versuchsaufbau

2.3 Durchführung

Zuerst wurde die Länge des Stabes mittels Bandmass gemißt. Zunächst wurde mittels Messschieber der Durchmesser des Stabes gemißt. Dann wurde der Stab and das Stativ gehängt und per hand zum pendeln gebracht. Es wurde mit der Stoppuhr 30 mal eine Periode zeitlich gemessen. Danach wurde ein mal 30 Perioden gemißt, um zu schauen welches verfahren ein kleineren Fehler hat. Dies ergab sich als das zweite verfahren.

2.3.1 Auswertung

Zu Bestimmende Werte	
Stablänge	$l = 95.6(3)\,\mathrm{cm}$
Radius	$r = 5.0(2)\,\mathrm{mm}$

$$\kappa = \frac{4\pi^2 mV}{A^2 p T_s^2} \tag{F1}$$

2.3.2 Aufgabenstellung

Die Messung wurde zweimal durchgeführt. Bei der ersten Durchführung wurde die Temperaturänderung über 50 Drehungen jeweils im Abstand von 10 Drehungen gemessen. Die zweite Durchführung wurde mit 100 Drehungen durchgeführt und die Temperatur alle 5 Drehungen notiert. Die genauen Messwerte befinden sich im Anhang. T1, T2.

Die restlichen Messungen ergaben:

$$m_W = 79.18(3)\,\mathrm{g}, \quad m_{kal} = 98.05(3)\,\mathrm{g}, \quad d = 4.765(3)\,\mathrm{cm}$$

Für die Wärmekapazität gilt:

$$C = C_{Kal} + C_T + m_w c_w, \tag{1}$$

was umgestellt werden kann zu:

$$c_w = \frac{C - C_{Kal} - C_T}{m_w}. \tag{2}$$

C wird hier mittels der folgenden Gleichungen bestimmt:

$$C = \frac{Q}{\Delta T} \tag{3}$$

$$W_R = mgn\pi d = Q \tag{4}$$

Mit unseren Messwerten und dem *uncertainties* Paket [1] in Python berechnen wir damit:

Messung	1	2	Mittelwert	Gewichtet
Wärmekapazität [J/kgK]	8300 ± 1400	3500 ± 600	5900 ± 800	4187 ± 554

Diese Rechnungen wurden mit dem *uncertainties* Paket in Python durchgeführt. Diese Rechnungen können im Anhang gefunden werden..

Der Fehler der Messung mit dem Schürholz Apparat ist aufgrund der großen Ungenauigkeit der Temperatur und der Anzahl Drehungen sehr groß. Außerdem ist es recht wahrscheinlich, dass F_R und F_G sich nicht ständig ganz ausgleichen, also dadurch auch eine Unsicherheit entsteht. Dies ist einflussreich, da die Wärme, Q, von F_R via $W_R = \int F_R ds$ abhängig ist. Da F_R über F_G bestimmt wird und dies bei nicht korrekter Ausgleichung der Beiden nicht akkurat ist, ist also auch Q und dadurch c_w ungenau. Als systematischer Fehler kommt noch die Ungenauigkeit der Masse von 5 kg hinzu. Der Literaturwert hierzu ist 4182 J/kgK. Der Unterschied beim normalen Mittelwert ist aufgrund der Messungenauigkeiten und niedrigen Anzahl Messungen sehr groß.

Der gewichtete arithmetische Mittelwert ist jedoch sehr nahe an dem Literaturwert. Dies der Fall, da die zweite Messung wesentlich näher dran ist und der Fehler dort wesentlich kleiner ist. Aufgrund der Formel für den gewichteten arithmetischn Mittelwert,

$$\overline{x}_g = \frac{\sum_i g_i x_i}{\sum_i g_i}, \tag{5}$$

mit den Gewichtsfaktoren

$$g_i = u_i^{-2}, \tag{6}$$

wird hier also der zweite Wert stärker gewichtet und wir bekommen einen Mittelwert, der um $t = 0.009$ vom Literaturwert abweicht. Dies wurde mit

$$t = \frac{|x_0 - y|}{u_x} \tag{7}$$

berechnet.

2.4 Teil B - Umwandlung von elektrischer Arbeit in Wärme

2.4.1 Aufgabenstellung

Zur Bestimmung der Wärmekapazität durch Umwandlung von elektrischer Arbeit in Wärme nutzt man ein Kalorimeter mit einem Widerstand und Thermometer. Zum Aufwärmen des Wassers wird der Widerstand an eine Spannungsquelle angeschloßen. Die Temperaturänderung wird dann bis zu einem beliebigen Punkt abschnittsweise gemessen. Danach wird gemessen, ab welchem Zeitpunkt die Temperatur wieder abfällt.

2.4.2 Auswertung

Zu Bestimmende Werte	
Stablänge	$l = 95.6(3)\,\mathrm{cm}$
Radius	$r = 5.0(2)\,\mathrm{mm}$

Bekannte Werte	
Volumen des Glaskolbens	$V = (2225 \pm 5)\,\mathrm{cm}^3$

Es wurden zwei Messungen durchgeführt mit jeweils 116.94 g und 113.42 g Wasser. Die Wassermenge wurde so gewählt, damit der Widerstand und das Thermometer in dem Wasser eingetaucht sind. Die Dauern der Messungen waren 38 und 20 Minuten. Diese wurden so gewählt, dass sie möglichst kurz ausfallen sollten. Temperaturänderungen wurden im Abstand von 60 Sekunden gemessen, da diese sonst nicht auffällig genug wären, um etwas zu erkennen. Die Messwerte hierzu sind aufgrund ihrer Länge im Anhang.

Das extrapolationsverfahren der 1. Messreihe ergibt $T_{max} = 26.5°\mathrm{C}$ da der Temperaturabfall erst nach 30 begann. Für die 2. Messreihe ergibt das extrapolationsverfahren $T_{max} = 41.45°\mathrm{C}$ **??**, **??**, T3

Extrapolationverfahren

Messreihe	a in °C	u_a in °C	b in °C/s	u_b in °C/s
1	26.5	0.037	-33.579	2.105 $\times 10^{-5}$
2	42.65	1.605	-0.0025	0.001443

Tabelle T3: Wertetabelle für die extrapolation

Uns ist bekannt, dass W_{el} vollständig in Wärmeenergie, Q, umgewandelt wird. Folgende Formeln gelten:

$$Q = (C_{Kal} + m_w c_w)\Delta T \tag{8}$$

$$W_{el} = \int P\mathrm{d}t = \int UI\mathrm{d}t. \tag{9}$$

Da P konstant ist, kann man hier einfach mit

$$W_{el} = UI\Delta t \tag{10}$$

rechnen. Bei unserer Messreihe waren die werte für U und I jeweils 14.9 V und 1.5 A.

Stellen wir (8) nach c_w um und setzen (10) ein, so bekommen wir als Formel:

$$c_w = \frac{UI\frac{\Delta t}{\Delta T} - C_{Kal}}{m_w}. \tag{11}$$

Messung	1	2	Mittelwert	Gewichtet
Wärmekapazität [J/kgK]	7330 ± 0.09	8790 ± 0.11	8060 ± 0.10	7931 ± 0.07

Tabelle T3: Wertetabelle Wärmekapazität

Unser m_w, die Masse des Wassers, ist wie oben erwähnt bei der ersten Messreiehe 116.94(3) g und bei der zweiten 113.42(3) g. Somit ergeben unsere Werte für c_w:

Der gewichtete arithmetische Mittelwert wurde gleich wie beim ersten Teil berechnet. Mit der Formel für die Abweichung aus Teil A, (7), sind wir hier $t = 53543$ von dem Literaturwert entfernt.

Der große Unterschied zwischen den Abweichungen liegt vermutlich dabei, dass beim zweiten Versuch man wesentlich ungenauer ablesen musste. Dieses Problem ist durch die kurze Erwärmungsphase vergrößert wordene. Hätte man zu einer höheren Temperatur erwärmt, so würde es sich auch schneller abkühlen und man könnte einen größeren Temperaturabstand als Indikator für das Senken der Temperatur wählen.

Außerdem haben wir noch einen systematischen Fehler aufgrund des Rührens des Wassers, was zur Mischung dient, aber wodurch kinetische Energie hinzugefügt wird, welches das Wasser auch aufwärmt. Dazu kann man noch erwähnen, dass die Außentemperatur steigt, wodurch das Wasser nicht immer gleich abkühlt. Dies ist jedoch aufgrund der kurzen Dauer der Messung nicht sehr einflussreich.

Literatur

[1] "Correlations between variables are automatically handled, which sets this module apart from many existing error propagation codes." - https://pythonhosted.org/uncertainties/

3 Anhang

Messreihe 1

Rotationen $n \pm 0.3$	Temperatur $T \pm 0.05°\mathrm{C}$
0	24
10	24.1
20	24.3
30	24.5
40	24.6
50	24.8

Tabelle T1: Messreihe 1 für Teil A

Messreihe 2

Rotationen $n \pm 0.3$	Temperatur $T \pm 0.05°\mathrm{C}$
0	24.3
5	24.3
10	24.4
15	24.5
20	24.6
25	24.7
30	24.8
35	24.9
40	25
45	25.1
50	25.2
55	25.2
60	25.4
65	25.5
70	25.5
75	25.6
80	25.6
85	25.7
90	25.8
95	26
100	26

Tabelle T2: Messreihe 2 für Teil A

		Luft	Argon
Messreihe	Periode	Zeit in s	Zeit in s
1	200±14	78.53	75.06
	400±20	156.89	149.50
	600±25	235.78	223.57
	800±28	314.35	297.25
	1000±32	392.34	370.68
2	200±14	78.44	73.03
	400±20	156.87	145.91
	600±25	235.38	218.79
	800±28	313.95	291.47
	1000±32	392.52	364.06
3	100±10	39.09	36.10
	100±10	38.96	36.18
	100±10	39.16	36.14
	100±10	39.00	36.10
	100±10	39.96	36.16

Tabelle T1: 1. Messwerte

Unsicherheiten:

Zeit:	±0.03s
Temperatur:	±0.02°C
Strom:	±0.018A
Spannung:	±0.12V

Wasser 113.42(3) g

t in s	T in °C	I in A	U in V
0	22	1.5	14.9
60	22	1.5	14.9
120	23	1.5	14.9
180	24	1.5	14.9
240	26	1.5	14.9
300	27	1.5	14.9
360	28	1.5	14.9
420	29.2	1.5	14.9
480	30.3	1.5	14.9
540	31.9	1.5	14.9
600	33	1.5	14.9
660	33.7	1.5	14.9
720	35	1.5	14.9
780	35	1.5	14.9
840	36	1.5	14.9
900	37	1.5	14.9
960	38.2	0	0
1020	39.5	0	0
1080	40	0	0
1140	40	0	0
1200	39.5	0	0

Tabelle T5: 2. Messwerte für Teil B