Physiklabor für Anfänger*innen
Ferienpraktikum im Sommersemester 2018

Versuch 06: Elastizitätskonstante

(durchgeführt am 24.09.2018 bei Julia Müller)
Andréz Gockel, Patrick Münnich
2. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Ziel des Versuchs

Das Ziel des Versuchs ist es, den Elastizitätsmodul von drei unterschiedlichen isotropen Festkörpern mittels Biegung zu ermitteln. Außerdem soll die Abhängigkeit der Biegung eines Stabes mit rechteckigen Querschnitt vom Material, der Ausrichtung und der Länge untersucht werden.

2 Versuch

2.1 Theorie

Wird eine (nicht all zu große) Kraft F auf einen elastischen Festkörper ausgeübt, so führt dies zu einer Längenänderung Δl. Für hinreichend kleiner Kräfte ist die Längenänderung proportional zur angreifenden Kraft. Den Kehrwert dieser Proportionalitätskonstante wird als Elastizitätsmodul E bezeichnet (*Hooke*'sches Gesetz):

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{EA} = \frac{\sigma}{E} \tag{1}$$

Wie in Abbildung 1 zu erkennen, führt die Biegung eines Balkens zu Stauchung und Streckung oberhalb und unterhalb der sog. *neutralen Faser*.

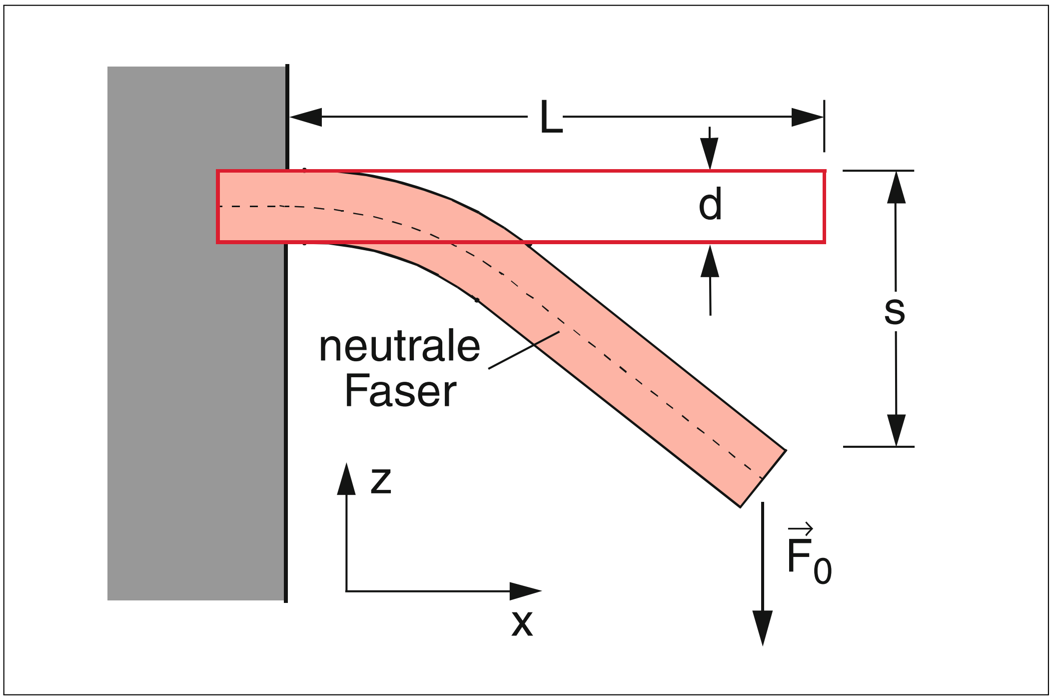

Abbildung 1: Biegung eines Stabes unter Einfluss einer Kraft F_0 mit neutraler Faser [3]

Nach dem *Hooke*'schen Gesetz ist diese Biegung/Stauchung für kleine Gewichte proportional zur angreifenden Kraft. Für einen Balken, der an beiden Enden unterstützt wird (Abbildung 2), ergibt sich

$$s := z(x = {}^{l}\!/\!{}_{2}) = \frac{1}{E}\frac{l^3}{4h^3b}F \qquad (2)$$

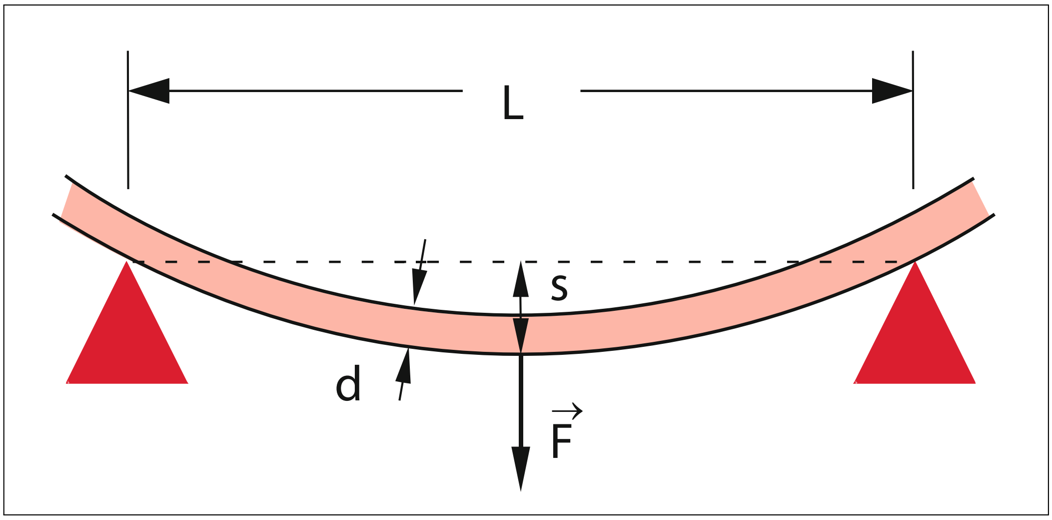

Abbildung 2: Versuchsaufbau [3]

2.2 Aufbau

2.3 Durchführung

XXXX

2.4 Auswertung

Um die Messwerte anständig darzustellen, können wir eine einfache Lineare Regression durchführen. Da die Werte schon von allein sehr linear verlaufen, werden die Grenzgeraden weggelassen. Dies sind dann wesentlich ästhetischer aus.

Die für die lineare Regression benötigten Formeln sind bekannterweise:

$$a = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \tag{3}$$

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \tag{4}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + b x_i)]^2} \tag{5}$$

$$\Delta a = s \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \tag{6}$$

$$\Delta b = s \sqrt{\frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \tag{7}$$

Der Graph für den Vergleich der Materialien sieht dann folgendermaßen aus:

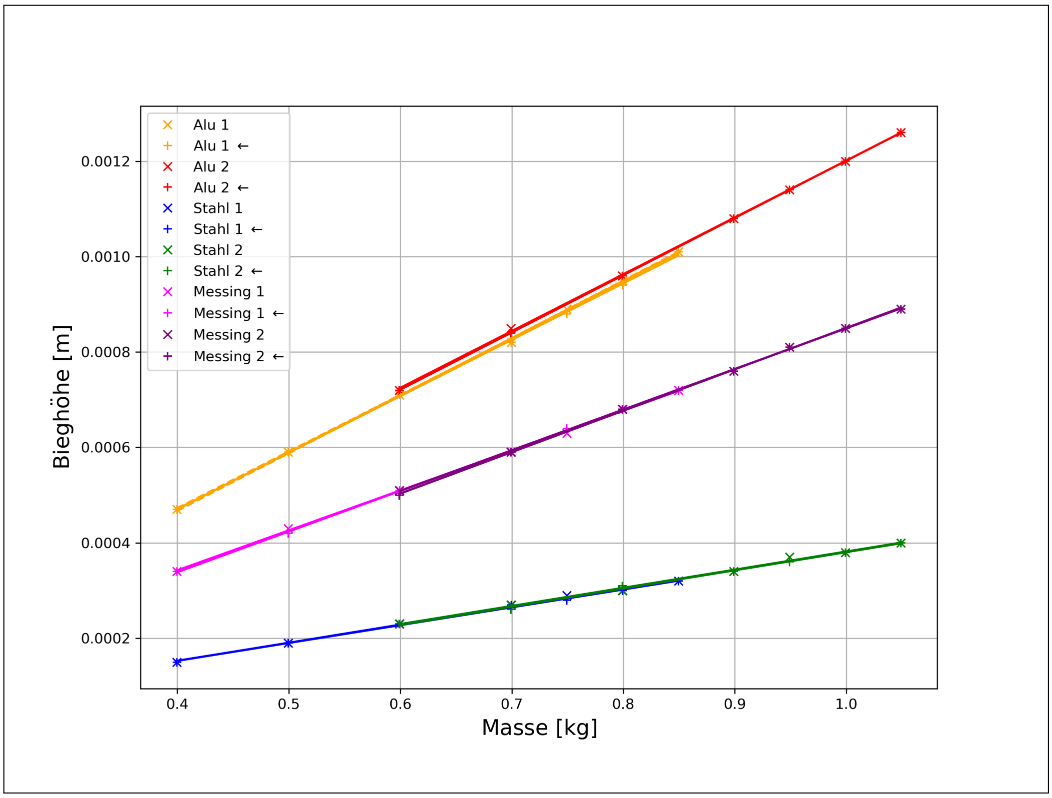

Abbildung 1: Vergleich der Biegung von Aluminium, Stahl und Messing

Dies wurde bei einem Abstand von $40.5 \pm 0.5\,\mathrm{cm}$ zwischen den beiden Auflegepunkten für den Stab durchgeführt.

Wieder beim selben Abstand wurde dann auch der Einfluss der Änderung der Ausrichtung bei Aluminium überprüft:

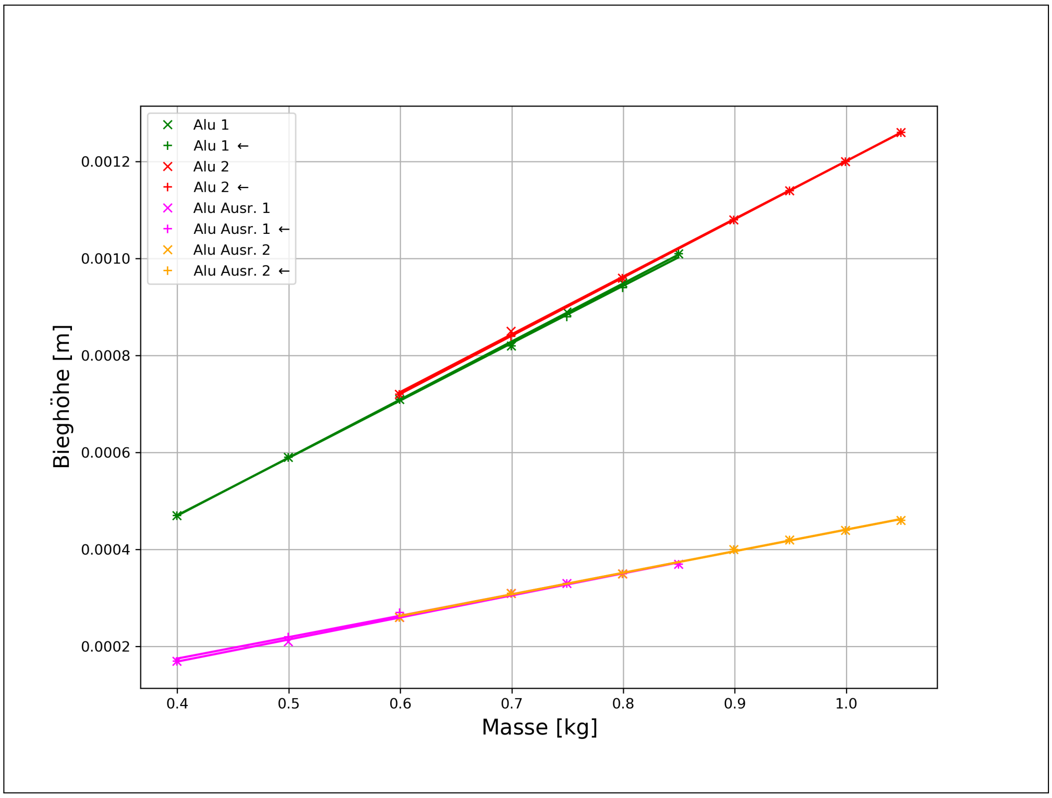

Abbildung 1: Vergleich von Biegung von Aluminium bei verschiedenen Ausrichtungen

Als letztes der Vergleich von verschiedenen Längen:

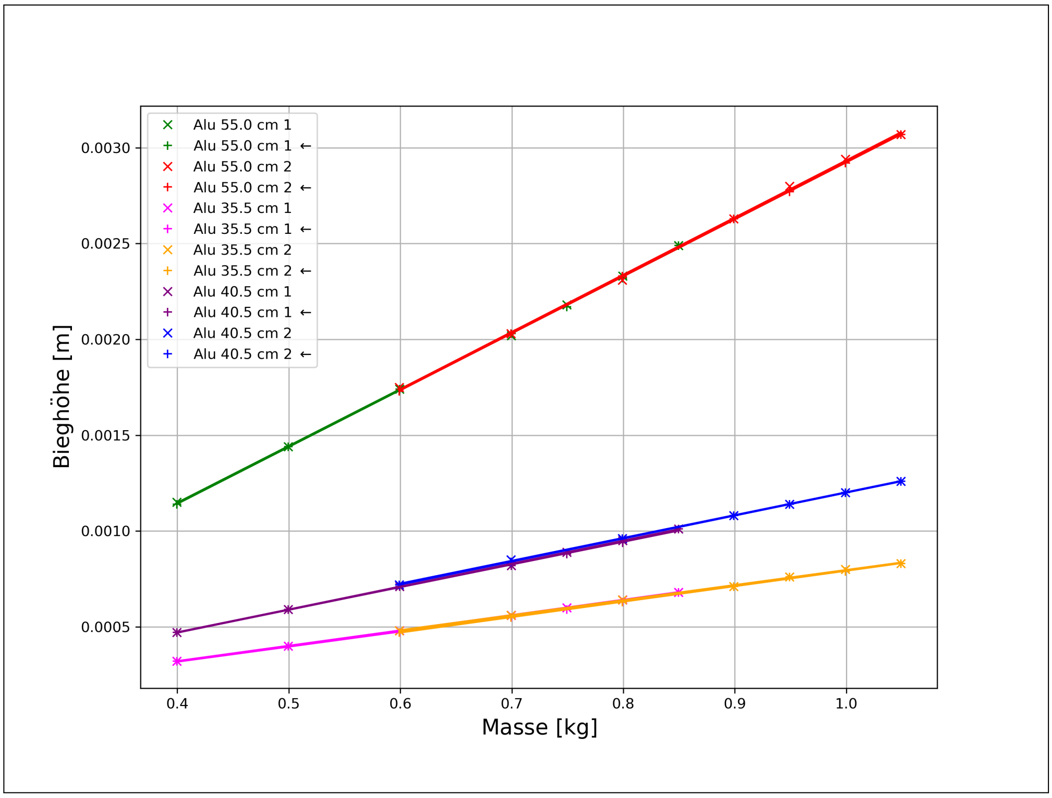

Abbildung 1: Vergleich von Biegung von Aluminium bei verschiedenen Längen

Um von hier auf unser Ziel, der Elastizitätsmodul, zu kommen, nutzen wir die Formel (1) aus der Theorie. Diese müssen wir jedoch erstmal nach E umstellen. Da wir ja in Abhängigkeit von m arbeiten, drücken wir zuerst unser F als mg aus und lassen dieses m alleine auf der rechten Seite stehen:

$$E = \frac{l^3 g}{s 4 h^4 b} m$$

Wir benötigen also die Länge, Breite und Höhe des verwendeten Stabteils, sowie dessen Durchbiegung bei verschiedenen Massen. Wir betrachten erstmal die Formel für Fehlerrechnung bei Produkten und Quotienten:

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = \sqrt{\left(a\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(b\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \ldots} \text{ für } z = x^a \, y^b \ldots \tag{8}$$

Mit unserer Formel dann:

$$\left|\frac{\Delta E}{E}\right| = \sqrt{\left(3\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta s}{s}\right)^2 + \left(-4\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta b}{b}\right)^2} \tag{9}$$

Da die Unsicherheit der Steigung klein ist und nur das 1-Fache dessen in die Unsicherheit von E eingeht, ist diese zu vernachlässigen. Die Unsicherheit von b können wir auch vernachlässigen.

FUCK YOUR DERIVATIVES

Wir nutzen also unsere Steigung aus der linearen Regression als s und rechnen hiermit als Werte für E:

Tabelle 1: Berechnete Werte für E

Unsicherheiten:
Länge: $\pm 0.005\,\mathrm{cm}$

Messreihe	Länge [cm]	Elastizitätsmodul [N/m²]
Aluminium	40.5	$(6.75 \pm 0.025) \times 10^{10}$
Stahl	40.5	$(2.137 \pm 0.008) \times 10^{11}$
Messing	40.5	$(9.49 \pm 0.035) \times 10^{10}$
Alu umgedreht	40.5	$(6.46 \pm 0.024) \times 10^{10}$
Aluminium	55.0	$(6.78 \pm 0.018) \times 10^{10}$
Aluminium	33.5	$(5.74 \pm 0.026) \times 10^{10}$
Alu 10 Messungen	40.5	$(6.76 \pm 0.025) \times 10^{10}$

Die genauen Werte für die Breite und Höhe der Stäbe sind im Anhang zu finden. Wir verwenden als Wert für g $9.81\,\mathrm{m/s^2}$.

3 Diskussion

Die entsprechenden Literaturwerte lauten:

- Aluminium :$E = (69 \ldots 72.5) \times 10^3\,\mathrm{N/mm^2}$
- Stahl: $E = (195 \ldots 210) \times 10^3\,\mathrm{N/mm^2}$
- Messing: $E = (90 \ldots 95) \times 10^3\,\mathrm{N/mm^2}$

Um die Verträglichkeit unserer Werte zu überprüfen betrachten wir die $2 - \sigma$ Bereiche unserer gemessenen Werte:

Tabelle 2: Berechnete Werte für E

Unsicherheiten:
Länge: $\pm 0.005\,\mathrm{cm}$

Messreihe	Länge [cm]	2-σ Bereich von E [N/m²]
Aluminium	40.5	$(6.75 \pm 0.050) \times 10^{10}$
Stahl	40.5	$(2.137 \pm 0.016) \times 10^{11}$
Messing	40.5	$(9.49 \pm 0.070) \times 10^{10}$
Alu umgedreht	40.5	$(6.46 \pm 0.048) \times 10^{10}$
Aluminium	55.0	$(6.78 \pm 0.036) \times 10^{10}$
Aluminium	33.5	$(5.74 \pm 0.052) \times 10^{10}$
Alu 10 Messungen	40.5	$(6.76 \pm 0.050) \times 10^{10}$

Wir können klar erkennen, dass für Aluminium keine Messung im 2-σ Bereich mit den Literaturwerten übereinstimmt. Alle liegen unterhalb des Wertebereichs. Am auffälligsten ist hier die Messung bei einer Länge von 33.5 cm, da dieser deutlich am weitesten entfernt ist.

Unsere Messungen für Stahl und Messing stimmen jedoch überein. Interessant ist hier aber, dass beide an der oberen Grenze des Bereichs vom Literaturwert liegen.

Die Ursache hiervon ist vermutlich ein zu fein geschätzter Fehler des für die Längenmessung genutzten Bandmaßes. Verdoppeln wir diesen Fehler, so verdoppeln sich auch die Fehler unserer Endergebnisse. Vergleichen wir die Werte nach dieser Verdopplung, so liegt nur noch die Messung von Aluminium bei 33.5 cm außerhalb des 2-σ Bereichs. In diesem Fall wären alle anderen Messwerte mit den Literaturwerten verträglich.

Jedoch muss man sich immer noch fragen, weshalb die Werte von Messing und Stahl an der oberen und die von Aluminium an der unteren Grenze des Wertebereichs liegen. Offensichtlich haben andere Fehler noch einen Einfluss.

Erstmal klar ist, dass noch zusätzliche Kräfte wirken, welche durch das Eigengewicht der Stäbe, das Gewicht der Halterung und der Andruckkraft des Messgeräts ausgeübt werden. Da dieser Versuch sich aber im Proportionalitätsbereich aufhält, müssen diese Kräfte nicht berücksichtigt werden, da sie nur den Nullpunkt des Messgeräts verschieben. Dies ist also vermutlich nicht die Ursache.

Suchen wir nach anderen Fehlern, so muss zuerst die Form der Literaturwerte klarifiziert werden; Stahl-, Aluminium- und Messingstäbe werden je nach Werkstoffzusammensetzung andere Elastizitätsmodule haben. Wir können also davon ausgehen, dass die Stäbe in diesen Wertebereichen ihre Elastizitätsmodule haben und nicht aufgrund von unreiner Zusammensetzung als systematischer Fehler gelten können.

Die nächste Fehlerquelle, die wie betrachten werden, ist die, dass die Halterungen der Stäbe möglicherweise Bewegungsanfällig waren, wodurch die Längen noch ungenauer werden würden. Gleichermaßen könnten die Stäbe auch nicht gerade auf den Halterungen stehen. Hätte das Gerät bessere Halterungen, bei denen die Stäbe immer zentriert wären und keine Bewegung möglich ist, so wären eventuell bessere Ergebnisse möglich.

Betrachten wir nochmal unsere Gleichung für E:

$$E = \frac{l^3 g}{s 4 h^4 b} m$$

Klar ist, dass g keinen größeren Einfluss hat und auch schon relativ genau gewählt wurde. Außerdem wurden die Massen der einzelnen Gewichte vor der Messung alle gemessen und Markierungen gesetzt, wodurch wir ein Problem mit den Massen ausschließen können. Uns bleiben also noch Fehler auf s, h und b. Da für die Messung der Breite und Höhe eine Messschraube genutzt wurde, ist ein Problem hier eher unwahrscheinlich. Vermutlich könnte also unser Fehler auch bei dem digitalen Messgerät liegen.

4 Anhang: Tabellen und Diagramme

Tabelle 3: XXXX

Unsicherheiten:
XXXX: $\pm XX$XX

XXXX/XX	XXXX/XX	XXXX/XX
2	0.26	0.23
4	0.33	0.25
5		0.3
6	1.25	0.83
8	3.9	0.83
9	4.75	4.6
10	4.7	

Literatur

[1] ”Correlations between variables are automatically handled, which sets this module apart from many existing error propagation codes.” - `https://pythonhosted.org/uncertainties/`

[2] Physikalisches Institut der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg (Hrsg.) (08/2018): Versuchsanleitungen zum Physiklabor für Anfänger*innen, Teil 1, Ferienpraktikum im Sommersemester 2018.

[3] Demtröder, Experimentalphysik 1, `https://www.springer.com/us/book/9783662464151`, Kapitel 6.2.4