

Versuch 17: Trägheitsmomente/Steinerscher Satz

(durchgeführt am 17.09.2018 bei Adrian Hauber)
Gruppe 14: Andréz Gockel, Patrick Münnich
2. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel des Versuchs	2
2 Teil 1 - Trägheitsmomente	2
2.1 Herleitung der Schwingungsgleichung	2
2.2 Aufbau	3
2.3 Durchführung	3
2.3.1 Auswertung	3
3 Teil 2 - Steinerscher Satz	4
3.1 Aufbau	4
3.1.1 Durchführung	4
3.2 Auswertung	4
4 Diskussion	5
5 Anhang	6

Abbildungsverzeichnis

B1 Versuchsaufbau 1	3
B2 Versuchsaufbau 2	4
B3 Mittelwerte	6

Tabellenverzeichnis

1 Relevante Werte (Teil 2)	3
2 Relevante Werte (Teil 2)	4
3 Messwerte (Teil 2)	6

1 Ziel des Versuchs

Dieser Versuch hat zwei Teile. Im ersten Teil wird mit Hilfe von einer hergeleiteten Formel (??), die den Trägheitsmoment mit der Periodendauer in Zusammenhang bringt, das Trägheitsmoment eines starren Körpers berechnet. Dieses wird verglichen mit dem experimentell bestimmten Wert. Man bestimmt das Trägheitsmoment einer zylindrischen Stange, die nicht im Schwerpunkt aufgehängt wird und die per Hand in Schwingung versetzt wird, indem die Schwingungsdauer gemessen wird und der Wert mit der hergeleiteten Formel berechnet wird. In dem zweiten Teil wird von einem Drehpendel zur Untersuchung des Zusammenhangs von der Schwingungsdauer und dem Abstand von einer Zusatzmasse zum Mittelpunkt verwendet, um hiermit den Steinerschen Satz experimentell zu verifizieren.

2 Teil 1 - Trägheitsmomente

2.1 Herleitung der Schwingungsgleichung

Der Unterschied von einem mathematischen Pendel und einem physikalischen Pendels ist, dass es sich beim Physikalischen nicht um eine punktförmige Masse handelt, sondern der Schwerpunkt von einem starren Körper zur Rechnung verwendet wird, wobei das Trägheitsmoment berücksichtigt werden muss. Mit der rücktreibenden Kraft $F_r = mg \sin \varphi$ und dem Abstand vom Aufhängepunkt zu Schwerpunkt d können wir das Drehmoment ausdrücken als:

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}_r \times \mathbf{d} = dm\mathbf{g} \sin(\varphi)$$

mit der Kleinwinkelnäherung: $\sin \varphi \approx \varphi$:

$$\mathbf{M} = dm\mathbf{g}\varphi$$

Dies wird gleichgesetzt mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \dot{\mathbf{L}} = -I \cdot \ddot{\varphi} = -I \cdot \ddot{\varphi} \\ \Rightarrow -I \cdot \ddot{\varphi} &= dm\mathbf{g}\varphi \quad \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\left(\underbrace{\frac{dm\mathbf{g}}{I}}_{\omega^2}\right)\varphi \quad \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi \end{aligned}$$

Mit $T = 2\pi \frac{1}{\omega}$ bekommt man: $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{dm\mathbf{g}}}$.

Zunächst wird das Trägheitsmoment eines starren Körpers, in diesem Fall von einem Stab (Vollzylinder) berechnet. Allgemein für das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse gilt:

$$I = \int \mathbf{r}_{\perp}^2 dm$$

mit $dm = \rho dV$ und der Annahme, der Zylinder ist homogen, bekommt man:

$$I_{\text{Stab}} = \rho \int_V \mathbf{r}_{\perp}^2 dV$$

Da nur der senkrechte Anteil zu der Drehachse des Ortsvektors einen Beitrag hat bekommen wir in Zylinderkoordinaten, mit r als Radius und l als Länge:

$$I_{\text{Stab}} = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^l \int_0^r r^3 \sin^2 \phi + z^2 d\phi dz dr$$

und

$$I_{\text{Scheibe}} = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^l \int_0^r r d\phi dz dr$$

für die Scheibe da die Drehachse durch den Mittelpunkt geht und parallel zur y -Achse ist. aus diesen Gleichungen bekommt man:

$$I_{\text{Stab}} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2 \quad I_{\text{Scheibe}} = \frac{1}{2}mr^2 \quad (1)$$

2.2 Aufbau

Um diesen Versuchsteil zu durchzuführen wird ein zylindrischer Stab der an einem Stativ gehängt werden kann verwendet. Zusätzlich werden ein Bandmass, Messschieber und eine Stoppuhr für die Messungen benötigt.

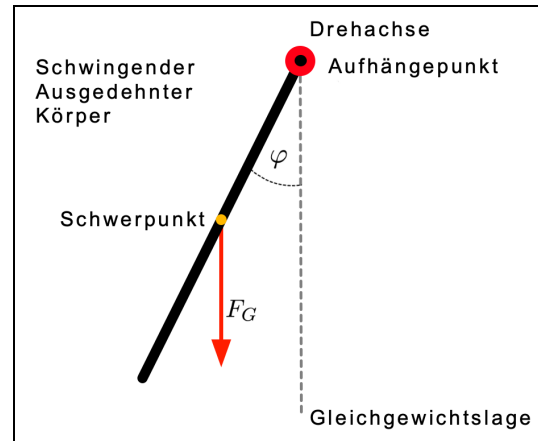


Abbildung B1: Versuchsaufbau 1

2.3 Durchführung

Zuerst wurde die Länge des Stabes mittels Bandmass gemessen. Daraufhin wurde mit dem Messschieber den Durchmesser des Stabes gemessen. Dann wurde der Stab an das Stativ gehängt und per hand zum Pendeln gebracht. Es wurde mit der Stoppuhr 30 mal eine Periode zeitlich gemessen. Danach wurde einmal 30 Perioden gemessen, um zu schauen welches verfahren ein kleineren Fehler hat. Der Fehler war etwas kleiner bei dem einmal messen von 30 Perioden.

2.3.1 Auswertung

Tabelle 1: Relevante Werte (Teil 2)

Zu Bestimmende Werte	
Stablänge	$l = 95.6(3) \text{ cm}$
Radius	$r = 5.0(2) \text{ mm}$

Zuerst wird mit den obigen Herleitungen der theoretische Wert bestimmt. Mit $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{dmg}}$, und dem Einsetzen von I_{Stab} bekommt man:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2}{dmg}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{3}l^2}{dg}}$$

mit $|g| = 9.802 \dots \text{ m/s}^2$ ¹ und $d = \frac{l}{2}$ ist der theoretische Wert $T = 1.6021(25) \text{ s}$ wobei die Unsicherheit $\Delta T = 0.0025 \text{ s}$ mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung gefunden wurde:

$$\Delta T =$$

Der experimentell bestimmte Mittelwert für 30 einzelne Perioden ist 1.59 s mit der Standardabweichung $s_T = 0.05 \text{ s}$. Der experimentell bestimmte Wert für eine Messung von 30 Perioden ist 1.594 s mit der Unsicherheit $\frac{s_T}{\sqrt{n}} = 0.001$

¹Dieser Wert wurde in einem anderen Versuch (Einleitungsversuch) bestimmt.

3 Teil 2 - Steinersche Satz

3.1 Aufbau

Zu diesem Versuch wurde ein Drehpendel verwendet, der aus einer Zusatzmasse, Drehtisch und einer Spiralfeder besteht. Die Zusatzmasse kann in verschiedenen Abständen von dem Mittelpunkt befestigt werden. Für die Messungen wurde eine Stoppuhr und ein Messschieber verwendet.

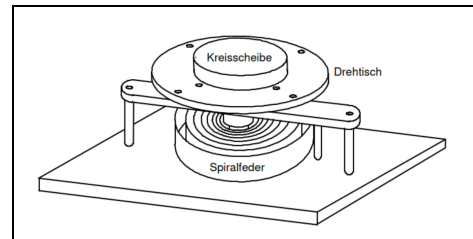


Abbildung B2: Versuchsaufbau 2 [1]

3.1.1 Durchführung

Es wurden Breite und Durchmesser der Zusatzmasse mit dem Messschieber gemessen. (Die Masse wurde schon vorher bestimmt und auf das Pendel oben drauf geschrieben.) Zunächst wurde die Zeit für 30 Perioden ohne Zusatzmasse gemessen. Danach wurde die Masse in den Mittelpunkt gesetzt und der Drehtisch wurde von Hand soweit aus gelenkt, dass 30 Perioden zeitlich gemessen werden konnten. Dies wurde wiederholt für 10 Perioden. Anschliessend wurde die Masse mit einem Abstand von 15 mm versetzt und wieder jeweils 30 und 10 Perioden gemessen. Diese Messung wurde wiederholt für vier weitere Abstände.

3.2 Auswertung

Tabelle 2: Relevante Werte (Teil 2)

Zu Bestimmende Werte	
Zusatzmasse	$m = 1.109(5) \text{ kg}$
Durchmesser	$d = 118.9(1) \text{ mm}$
Breite	$h = 12.9(1) \text{ mm}$
Bekannte Werte	
Abstände	$a = 15.0 \text{ mm}[1]$

Der theoretische Wert für das Trägheitsmoment der Drehscheibe ist mit der Formel 1:

$$I_{\text{Scheibe}} = 0.001960(9) \text{ kg m}^2$$

Die Unsicherheit wurde mit $\Delta I = \frac{I}{2} \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta r}{r}\right)^2}$ berechnet. Um das Trägheitsmoment ohne Zusatzmasse zu berechnen wird mit $M = -D \cdot \varphi$:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \Rightarrow I = \frac{T^2}{4\pi^2} D$$

Der Satz von Steiner lautet:

$$I_0 = I_a + ma^2$$

Daraus folgt:

$$\frac{T_0^2}{4\pi^2} D = \frac{T_a^2}{4\pi^2} D + ma^2 \Rightarrow T_0^2 = T_a^2 + 4\pi^2 \frac{m}{D} a^2$$

Eine lineare regression wurde in B3 mit Mathematica durchgeführt. Die Steigung dieser Funktion ist: $4.19(4) + 0.00050(2)x$

4 Diskussion

Literatur

- [1] Physikalisches Institut der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg (Hrsg.) (08/2018): Versuchsanleitungen zum Physiklabor für Anfänger*innen, Teil 1, Ferienpraktikum im Sommersemester 2018.

5 Anhang

Tabelle 3: Messwerte (Teil 2)

Abstand/mm	10 Perioden/s	30 Perioden/s	Mittelwert/s
Ohne Zusatzmasse	18.1	54.6	1.82(1)
0	20.6	60.3	2.04(4)
15.0	20.8	63.0	2.09(1)
30.0	21.8	63.2	2.14(5)
45.0	22.9	68.9	2.29(1)
60.0	24.9	72.0	2.45(6)

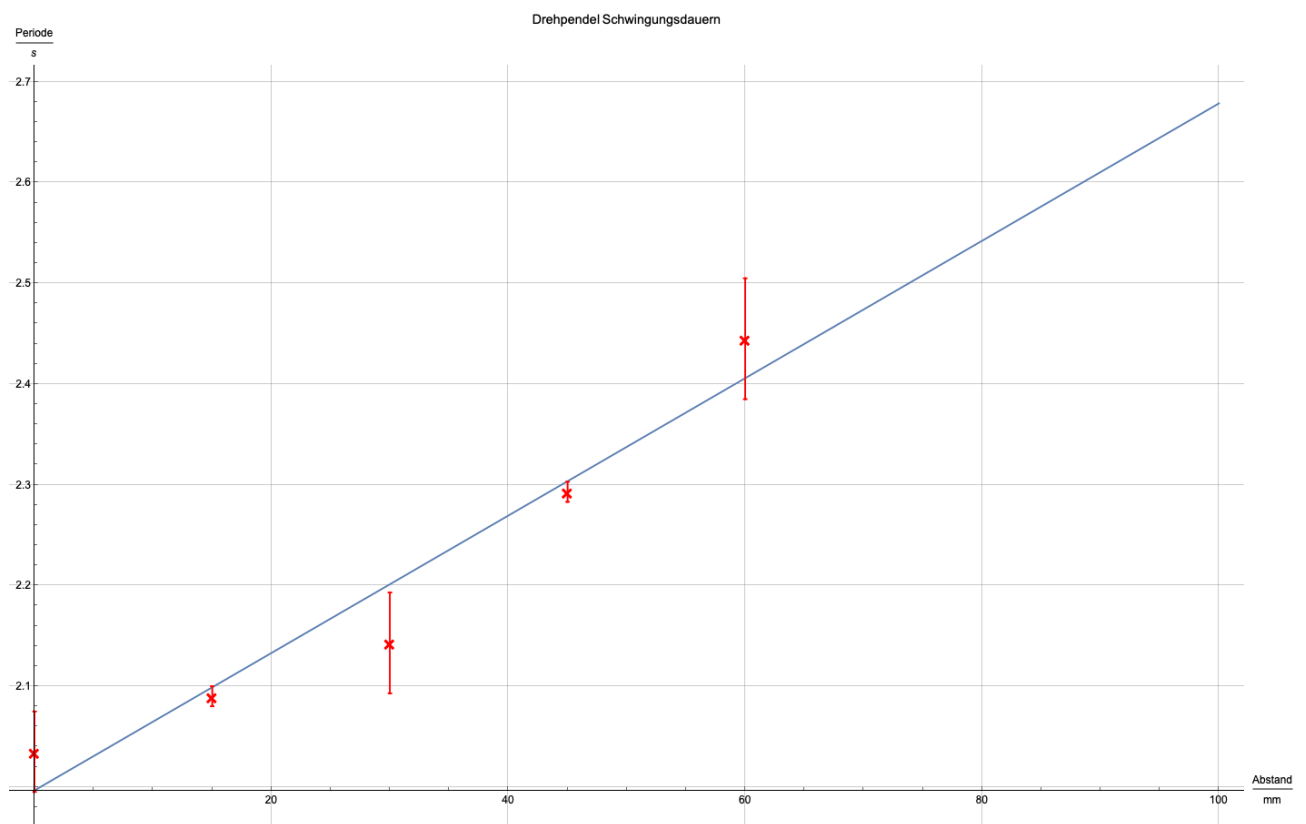


Abbildung B3: Mittelwerte