Physiklabor für Anfänger*innen
Ferienpraktikum im Sommersemester 2018

# Versuch 19: Gekoppeltes Pendel

(durchgeführt am 19.09.2018 bei Adrian Hauber)
Gruppe 14: Andréz Gockel, Patrick Münnich
4. Oktober 2018

## Inhaltsverzeichnis



## Tabellenverzeichnis



## Abbildungsverzeichnis

# 1 Ziel des Versuchs

Das Ziel dieses Versuchs ist einen gekoppelten Oszillator durch einen gekoppelten Pendel zu veranschaulichen. Hierzu werden erst die Differentialgleichungen hergeleitet und durch das Drehmoment entkoppelt, um die Eigenfrequenzen zu berechnen womit die Schwebungsdauer aus den Schwingungsdauern berechnet werden kann. In diesem Versuch werden Periodendauern bei verschiedenen Kopplungsgraden gemißt und zusätzlich die Schwebungsdauer. Der Kopplungsgrad wird verändert indem die Kopplungsfeder verschoben wird. Zusätzlich wird der Koppelungsgrad durch die Schwingdauern berechnet.

# 2 Messung der Schwingungsdauern

## 2.1 Theorie

Um den Koppelungsgrad zu bestimmen wird zunächst die Differentialgleichung des gekoppelten Pendels hergeleitet.

Wir beginnen dazu mit dem rücktreibenden Moment infolge der Schwerkraft bei kleinen Auslenkungen $\varphi$:

$$M = -mgl\varphi = D_g\varphi \tag{1}$$

Dazu gibt es bei jedem Pendel ein Kopplungsmoment $D_f(\varphi_2 - \varphi_1)$. Es existiert noch ein weiteres Moment, welches von der Vorspannung der Feder her rührt. Dieses gibt es, da die Feder schon wenn die Pendel in paralleler Lage stehen eine gewisse Spannung besitzt. Beide Pendel weisen in der Ruhelage einen Ausschlag $\alpha$ bzw. $-\alpha$ in Bezug auf die Vertikallage auf. Wenn man aber die Auslenkungen $\varphi_1$ und $\varphi_2$ von der Gleichgeweichtslage aus rechnet, so fällt dieses Moment aus der Rechnung raus, da es durch ein Moment $mgl \pm \alpha$ kompensiert wird. Wir erhalten also als Momentengleichungen:

$$\begin{aligned} M_1 &= -D_g\varphi_1 + D_f(\varphi_2 - \varphi_1) \\ M_2 &= -D_g\varphi_2 - D_f(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned} \tag{2}$$

Setzen wir diese in die Bewegungsgleichung eines physikalischen Pendels

$$I\ddot{\varphi} = M = -mgl\sin\varphi$$

ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} I\frac{\mathrm{d}^2\varphi_1}{\mathrm{d}t^2} &= -D_g\varphi_1 + D_f(\varphi_2 - \varphi_1) \\ I\frac{\mathrm{d}^2\varphi_2}{\mathrm{d}t^2} &= -D_g\varphi_2 - D_f(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned} \tag{3}$$

Addieren bzw. subtrahiert man die Differentialgleichungen für die Winkelsumme $(\varphi_2 + \varphi_1)$ bzw. die Winkeldifferenz $(\varphi_2 - \varphi_1)$, so liefert dies:

$$\begin{aligned} I\frac{\mathrm{d}^2(\varphi_2 + \varphi_1)}{\mathrm{d}t^2} &= -D_g(\varphi_2 + \varphi_1) \\ I\frac{\mathrm{d}^2(\varphi_2 - \varphi_1)}{\mathrm{d}t^2} &= -(D_g + 2D_f)(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned} \tag{4}$$

Nutzt man hierauf den Lösungsansatz

$$\begin{aligned} (\varphi_2 + \varphi_1) &= 2A\cos(\omega t + \delta) \\ (\varphi_2 - \varphi_1) &= 2B\cos(\Omega t + \Delta), \end{aligned} \tag{5}$$

so erhält man die Kreisfrequenzen

$$\omega = \sqrt{\frac{D_g}{I}} \text{ und } \Omega = \sqrt{\frac{D_g + 2D_f}{I}} \tag{6}$$

Mit $I = mr^2$, hier ist $r$ der Abstand $L$ zwischen Masse und Rotationsachse, und (1) kommen wir also auf:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \text{ und } \Omega = \sqrt{\frac{g}{L} - \frac{2D_f l^2}{mL^2}} \tag{7}$$

Dies sind die Kreisfrequenzen für gleich- und gegensinnige Schwingung.

Wichtig ist für diesen Versuch noch die Gleichung für den Kopplungsgrad,

$$K = \frac{T_B^2 - T_A^2}{T_B^2 + T_A^2} \tag{8}$$

## 2.2 Aufbau

In diesem Versuch haben wir zwei Pendel mit die aus einer festen Stange und einem Zusatzkörper bestehen. Eine Feder die beide Pendel koppelt hängt mit der verstellbaren Länge $l$ von dem Aufhängepunkt des Pendels. Vor beginn der Messungen ist zu beachten:

- das der Aufbau komplett eben sein muss
- das beide Pendel mit gleicher Periodendauer schwingen

Unsere Kalibriermessung ergab 18.70(5) s für 10 Schwingungen beider Pendel. Die länge der Pendel von Aufhängepunkt zu der Masse ist jeweils $L = 95.0(5)$ cm.

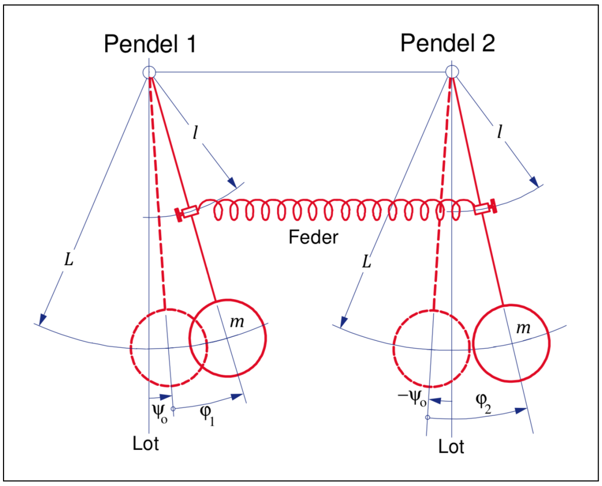


Abbildung B1: Gekoppeltes Pendel [1]

## 2.3 Durchführung

Zuerst haben wir die Periodendauer für 20 Schwingungen bei gegen- und gleichsinniger Schwingung gemessen. Daraufhin die Schwingungsdauer für Schwebung. In unserem Fall wurde nicht beachtet, dass die Schwingungsdauer die doppelte Zeit zwischen zwei Stillständen des gleichen Pendels ist.

Nachdem diese Werte gemessen wurden, wurde dies mit insgesamt drei anderen Kopplungsstärken nochmals durchgeführt. Hierzu wird die Kopplungsfeder einfach nach oben bzw. nach unten verschoben. Hierbei wichtig war, dass die Kopplung nicht zu stark sein sollte.

Wir erhalten also vier Messreihen, aus denen wir dann unsere Kopplungsgrade berechnen und die gemessenen und berechneten Werte für die Periodendauer der Schwebung vergleichen.

### 2.4 Auswertung

Wir beginnen damit, dass wir von unseren Messwerten die Mittelwerte von den Periodendauern für jeweils gleichsinnige, gegensinnige, und schwebende Schwingungen berechnen. Die Rechnung hierfür folgt über die allgemeinen Formeln für die Berechnung von Mittelwerten und dessen Fehler:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} I_{V_i}}{n} \tag{9}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \tag{10}$$

Diese Werte werden dann für die Berechnung unseres Kopplungsgrades genutzt. Die Formel für den Kopplungsgrad ist von $T_A$, der Periodendauer für entgegengesetzte Schwingung, und $T_B$, der Periodendauer für gleichsinnige Schwingung, abhängig, welche beide einen Fehler beinhalten. Zur Fehlerberechnung benutzen wir die Gaußsche Fehlerfortpflanzung. Wir leiten also einmal partiell nach $T_A$ und einmal nach $T_B$ ab:

$$\frac{\partial K}{\partial T_A} = -\frac{4T_A T_B^2}{(T_A^2 + T_B^2)^2}$$

$$\frac{\partial K}{\partial T_B} = \frac{4T_A^2 T_B}{(T_B^2 + T_B^2)^2}$$

Daraus erhalten wir als Unsicherheiten von K:

$$\Delta K = \sqrt{\left(\Delta T_A \frac{\partial K}{\partial T_A}\right)^2 + \left(\Delta T_B \frac{\partial K}{\partial T_B}\right)^2} \tag{11}$$

Um die Periodendauer der Schwebung zu berechnen nutzen wir die folgende Funktion:

$$T_S = 2\frac{T_A T_B}{T_B - T_A} \tag{12}$$

Wir können wieder gleich wie zuvor die Formel für Quotienten verwenden und erhalten als Ableitungen:

$$\frac{\partial T_S}{\partial T_A} = 2\frac{T_B^2}{(T_A - T_B)^2}$$

$$\frac{\partial T_S}{\partial T_B} = -2\frac{T_A^2}{(T_B - T_A)^2}$$

Die Unsicherheit von $T_S$ setzt sich dann auch wie zuvor folgendermaßen zusammen:

$$\Delta T_S = \sqrt{\left(\Delta T_A \frac{\partial T_S}{\partial T_A}\right)^2 + \left(\Delta T_A \frac{\partial T_S}{\partial T_A}\right)^2} \tag{13}$$

Wir erhalten aus diesen Rechnungen für $K$:

- $0.112 \pm 0.008$
- $0.160 \pm 0.010$
- $0.036 \pm 0.008$
- $0.229 \pm 0.009$

Für $T_S$ dann:

- $31 \pm 2.4$
- $21 \pm 1.3$
- $100 \pm 23$
- $15.9 \pm 0.4$

Berechnete Werte für $T_S$ lauten:

- $30.9 \pm 0.4$
- $20.6 \pm 0.4$
- $98.0 \pm 0.4$
- $15.9 \pm 0.4$

## 3 Diskussion

Betrachten wir erstmal unsere berechneten und gemessenen Werte für die Periodendauer von Schwebung:
Beim ersten Blick auf die Werte fällt klar auf, dass die dritte Periodendauer einen sehr großen Fehler besitzt. Dies stammt daraus, dass die Differenz der Frequenzen von der gleich- und gegensinnigen Schwingungen sehr klein sind. Betrachten wir wieder unsere Formel für $T_S$, so sehen wir, dass der Fehler sehr groß sein muss, wenn $T_B - T_A$ klein ist. In diesem Fall ist dies geschehen, also ist es vollkommen verständlich, dass der Fehler so groß geraten ist.
Auffällig ist auch, dass die Werte von der letzten Messung nicht ganz synchron sind. Dies ist zwar bedenklich, jedoch können wir die Fehler betrachten und erkennen, dass sie immer noch im $2 - \sigma$ bereich von einander entfernt sind.
Insgesamt ist jedoch klar, dass die Werte der berechneten und gemessen $T_S$ sind übereinzustimmen scheinen.
Würden wir noch bessere Werte bekommen wollen, so könnten wir beispielsweise ein Gerät verwenden, welches die Schwingungen und Schwebungen automatisch misst. Erst recht bei Schwebungen würde dies wahrscheinlich helfen, da ein genauer Anfang bzw. ein genaues Ende der Periode recht schwer zu erkennen sein kann.
Außerdem könnte man mehr und längere Messungen durchführen. Dies würde die Fehler der Periodendauern klar senken.
Klar ist bei dieser Messung die größte Fehlerquelle das Messen mit bloßem Auge. Reaktionszeit und die Schwierigkeit, die Periode der Schwebung genau zu definieren, sind beides Fehler, welche deswegen auftreten. Auch bei den hier verwendeten Messwerten ist dies leicht zu erkennen, da die Messung bei Schwebungen nur für eine halbe Periodendauer lief, nicht für eine ganze.
Die Feder selbst stellt auch noch einen systematischen Fehler da. Es ist klar, dass wir keine ideale Feder vorhanden haben, also dass

$$F = -Ds$$

zwar verwendet wird, aber nicht ganz der Fall ist.
Es könnte durchaus auch möglich sein, dass die Feder nicht perfekt horizontal zwischen den Pendeln sitzt. Zwar wurde dies vor jeder Messreihe überprüft, jedoch ist selbstverständlich auch ein Fehler auf unserem Messgerät und wir können nicht vollkommen sicher sein.
Ähnlicherweise stellt auch das loslassen der Pendel einen systematischen Fehler da, da wir nicht ganz sicher sein können, dass die verwendete Apparatur beide Pendel gleichzeitig losgelassen hat. Die Funktionsweise des Geräts war, dass man einen Stab mit drei Befestigungen, welche nach außen zeigten und verschoben werden konnten. Da diese sowohl in die horizontale als auch in die vertikale Ebene verschoben werden konnten, ist es durchaus möglich, dass eine höher als die andere war, also ein Pendel früher losgelassen werden konnte. Außerdem kann es auch sein, dass sie nicht die gleiche Auslenkung eingestellt hatten. Zwar wurde dies auch gemessen, jedoch ist wie zuvor das Messgerät auch nicht ganz perfekt.
Ein anderer Fehler, welcher zwar überprüft wurde, aber nicht ganz klar ist, ist, dass die Pendel eventuell nicht die gleichen Gewichte haben. Dies wurde anfangs überprüft, indem die Periodendauern beider Pendel ungekoppelt gemessen wurden und verglichen wurden. Stimmen diese nicht ganz überein, so ist klar, dass dies einen Einfluss haben würde.

# 4 Anhang: Tabellen und Diagramme

Tabelle 1: Messwerte

| Gleichsinnig | Entgegen | Schwebung | Koppelungsfeder |
|---|---|---|---|
| 20 Perioden/s | 20 Perioden/s | 2 Schwebungen/s | Abstand/cm |
| 37.2 | 33.2 | 15.4 | 55.5 |
| 37.1 | 33.2 | 15.6 | |
| 37.2 | 31.5 | 10.4 | 70.5 |
| – | 32.0 | 10.2 | |
| 37.2 | 35.8 | 48.8 | 31.0 |
| 37.1 | 35.8 | 49.3 | |
| 37.4 | 28.9 | 8.2 | 80.5 |
| 37.2 | 30.2 | 7.8 | |

Unsicherheiten:
Zeit: $\pm 0.3\,\mathrm{s}$
Länge: $\pm 0.5\,\mathrm{cm}$

## Literatur

[1] Physikalisches Institut der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg (Hrsg.) (08/2018): Versuchsanleitungen zum Physiklabor für Anfänger*innen, Teil 1, Ferienpraktikum im Sommersemester 2018.