

## Versuch 06: Elastizitätskonstante

(durchgeführt am 24.09.2018 bei Julia Müller)  
Andréz Gockel, Patrick Münnich  
2. Oktober 2018

### Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ziel des Versuchs</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Versuch</b>	<b>3</b>
2.1	Theorie . . . . .	3
2.2	Aufbau . . . . .	4
2.3	Durchführung . . . . .	4
2.4	Auswertung . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Diskussion</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Anhang: Messwerte</b>	<b>12</b>

### Tabellenverzeichnis

1	Berechnete Werte für $E$ . . . . .	10
2	Berechnete Werte für $E$ . . . . .	10

### Abbildungsverzeichnis

1	Biegung eines Stabes unter Einfluss einer Kraft $F_0$ mit neutraler Faser . . . . .	3
2	Versuchsaufbau . . . . .	4
1	Vergleich der Biegung von Aluminium, Stahl und Messing . . . . .	6
2	Vergleich von Biegung von Aluminium bei verschiedenen Ausrichtungen . . . . .	7
3	Vergleich von Biegung von Aluminium bei verschiedenen Längen . . . . .	8



# 1 Ziel des Versuchs

Das Ziel des Versuchs ist es, den Elastizitätsmodul von drei unterschiedlichen isotropen Festkörpern mittels Biegung zu ermitteln. Außerdem soll die Abhängigkeit der Biegung eines Stabes mit rechteckigen Querschnitt vom Material, der Ausrichtung und der Länge untersucht werden.

## 2 Versuch

### 2.1 Theorie

Wird eine (nicht all zu große) Kraft  $F$  auf einen elastischen Festkörper ausgeübt, so führt dies zu einer Längenänderung  $\Delta l$ . Für hinreichend kleiner Kräfte ist die Längenänderung proportional zur angreifenden Kraft. Den Kehrwert dieser Proportionalitätskonstante wird als Elastizitätsmodul  $E$  bezeichnet (*Hooke'sches Gesetz*):

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{EA} = \frac{\sigma}{E} \quad (1)$$

Wie in Abbildung 1 zu erkennen, führt die Biegung eines Balkens zu Stauchung und Streckung oberhalb und unterhalb der sog. *neutralen Faser*.

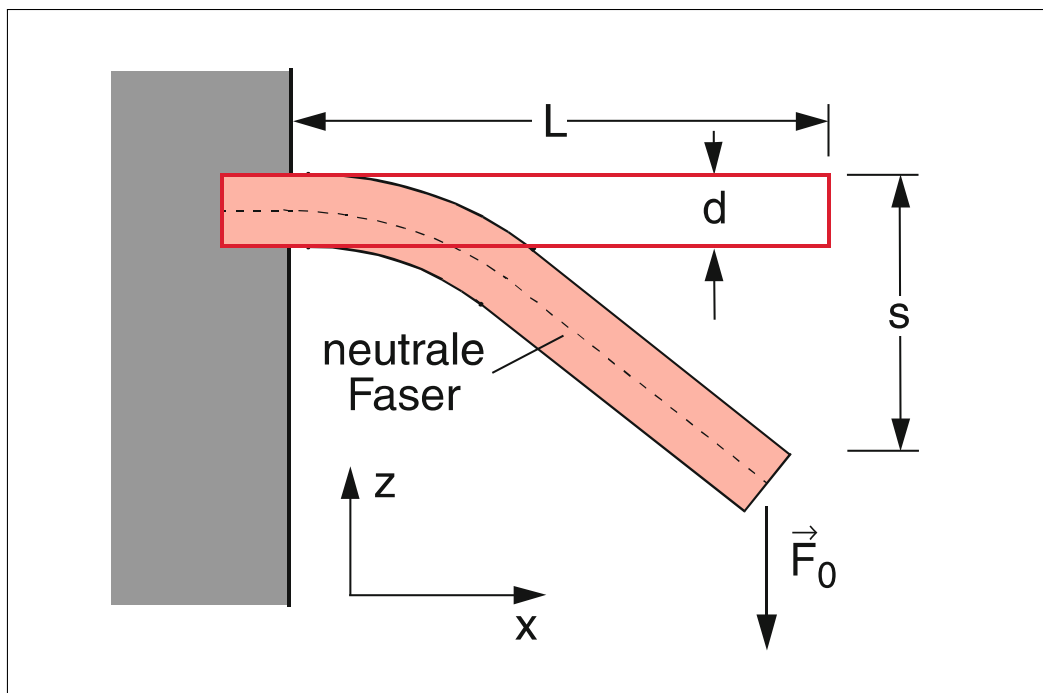


Abbildung 1: Biegung eines Stabes unter Einfluss einer Kraft  $F_0$  mit neutraler Faser [2]

Nach dem *Hooke'schen* Gesetz ist diese Biegung/Stauchung für kleine Gewichte proportional zur angreifenden Kraft. Für einen Balken, der an beiden Enden unterstützt wird (Abbildung 2), ergibt sich

$$s := z(x = l/2) = \frac{1}{E} \frac{l^3}{4h^3b} F \quad (2)$$

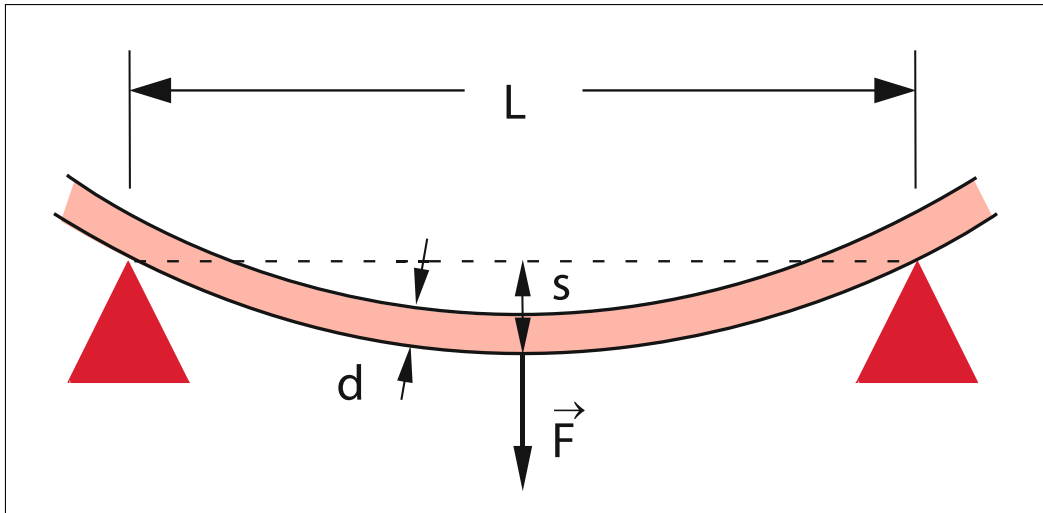


Abbildung 2: Versuchsaufbau [2]

## 2.2 Aufbau

Vorhanden waren drei Stäbe, jeweils aus Stahl, Aluminium und Messing, welche auf eine optische Bank mit zwei Schneiden platziert werden konnte. An der optischen Bank montiert war ein digitales Messgerät, welches die Halterung der Gewichte oben berührt hat. Um die Maßstäbe und Gewichte zu messen, waren ein Bandmaß, eine Messschraube und eine Waage vorhanden. Wie die Stäbe beim Beugen auf den Schneiden lagen kann in Abbildung 2 betrachtet werden.

## 2.3 Durchführung

Zu Beginn werden die Stäbe in Länge, Breite und Höhe gemessen. Da die Messschraube für die Länge zu klein ist, wird sie nur für Messung der Breite und Höhe genutzt. Für die Länge muss das Maßband verwendet werden. Am Besten werden alle Messungen mehrmals an verschiedenen Stellen durchgeführt.

Nachdem alle drei Stäbe ausreichend gemessen wurden, können die Gewichte mit der Waage gewogen werden. Um später genauer das Gewicht bestimmen zu können, kann man jedes Gewicht einzeln messen und mit einem Stift oder Post-its Markierungen setzen, damit das drangewogene Gewicht genauer bestimmt werden kann.

Um die Messung der Biegung durchführen zu können, wird dann ein Stab auf die Schneiden platziert. Man misst zudem noch den Abstand der Auflageflächen. Dies ist später die Länge, mit der gerechnet wird.

Von dort aus muss zuerst die Linearität überprüft werden. Hierzu werden nacheinander Gewichte drangelegt, sodass man insgesamt für zehn verschiedenen Gewichten die Biegung hat. Die Biegung wird nach jeder neu drangehängten Masse gemessen und notiert. Hat man die zehn Gewichte drauf, so wird der Vorgang rückwärts wiederholt. Diese Messung wird insgesamt zweimal durchgeführt.

Ist dieser Teil erledigt worden, so misst man als letztes die Durchbiegung gleichermaßen für drei verschiedene Materialien und für jeweils ein Material zwei verschiedene Ausrichtungen und Längen. Hierbei kann man weniger Gewichte insgesamt dranhängen.

## 2.4 Auswertung

Um die Messwerte anständig darzustellen, können wir eine einfache Lineare Regression durchführen. Da die Werte schon von allein sehr linear verlaufen, werden die Grenzgeraden weggelassen. Dies sind dann wesentlich ästhetischer aus.

Aufgrund der mehreren Messwerte für jede Biegung berechnen wir hier mit Mittelwerten. Diese werden mit den folgenden Funktionen berechnet:

$$\frac{\sum_{i=1}^n IV_i}{n} \quad (3)$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (4)$$

Die für die lineare Regression benötigten Formeln sind bekannterweise:

$$a = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (5)$$

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (6)$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i)]^2} \quad (7)$$

$$\Delta a = s \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \quad (8)$$

$$\Delta b = s \sqrt{\frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \quad (9)$$

Der Graph für den Vergleich der Materialien sieht dann folgendermaßen aus:

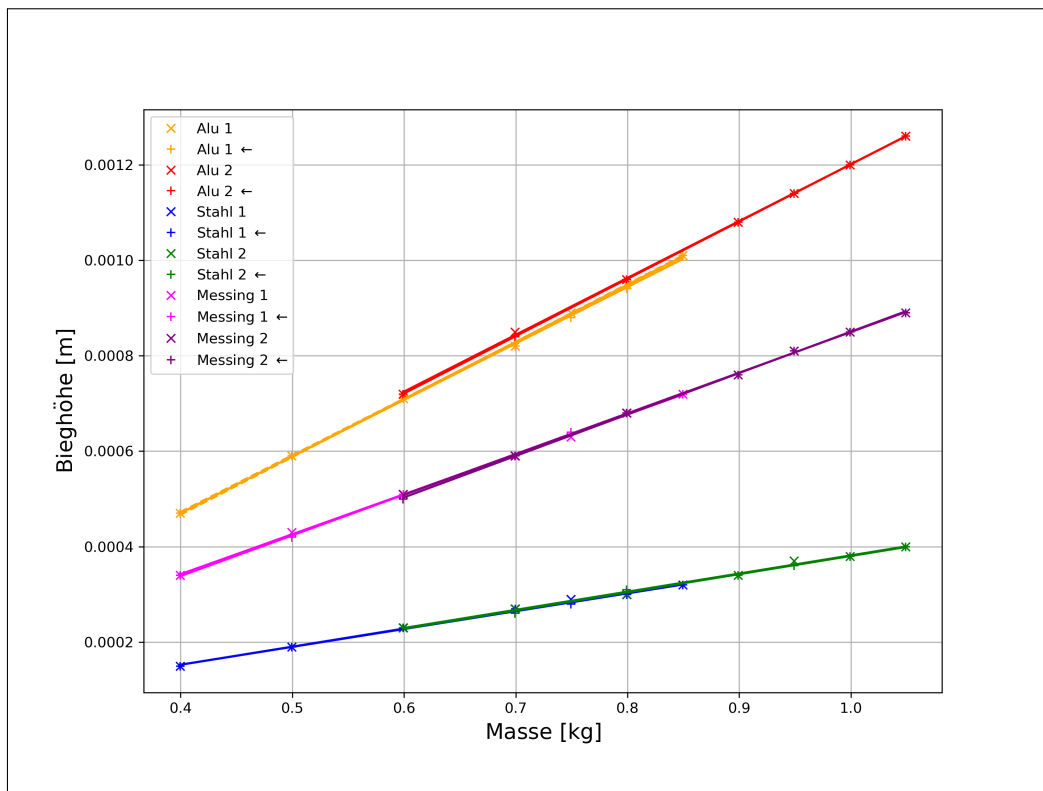


Abbildung 1: Vergleich der Biegung von Aluminium, Stahl und Messing

Dies wurde bei einem Abstand von  $(40.5 \pm 0.5)$  cm zwischen den beiden Auflegepunkten für den Stab durchgeführt.

Wieder beim selben Abstand wurde dann auch der Einfluss der Änderung der Ausrichtung bei Aluminium überprüft:

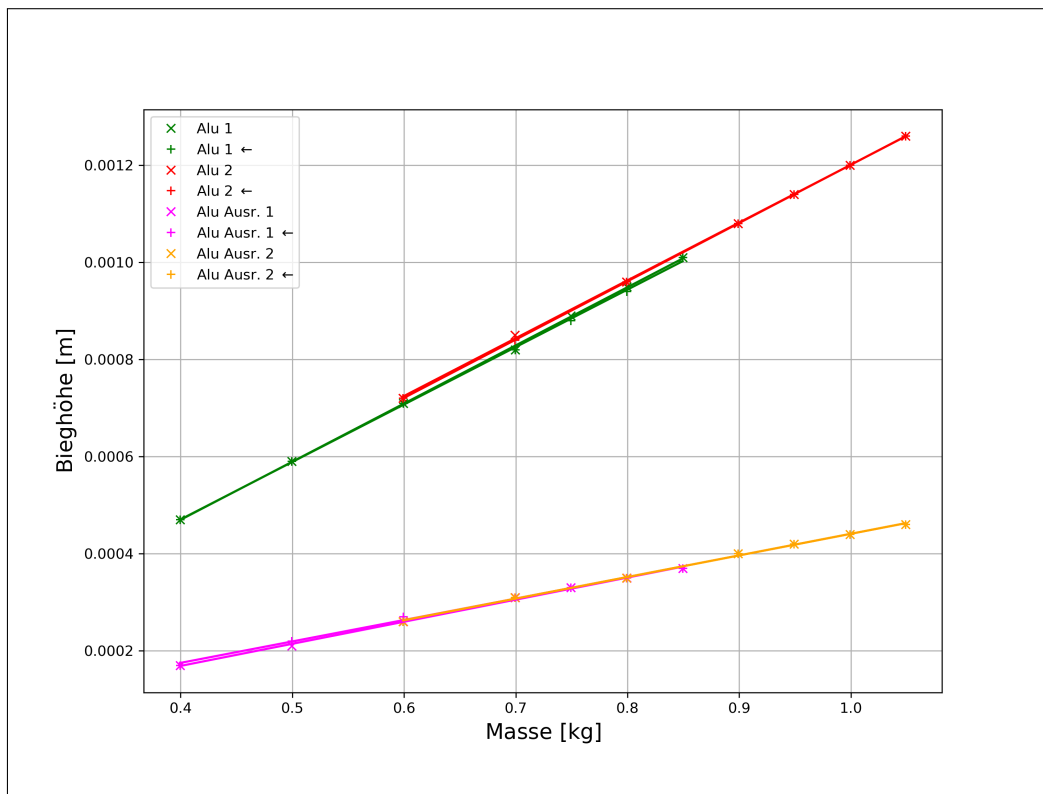


Abbildung 2: Vergleich von Biegung von Aluminium bei verschiedenen Ausrichtungen

Als letztes der Vergleich von verschiedenen Längen:

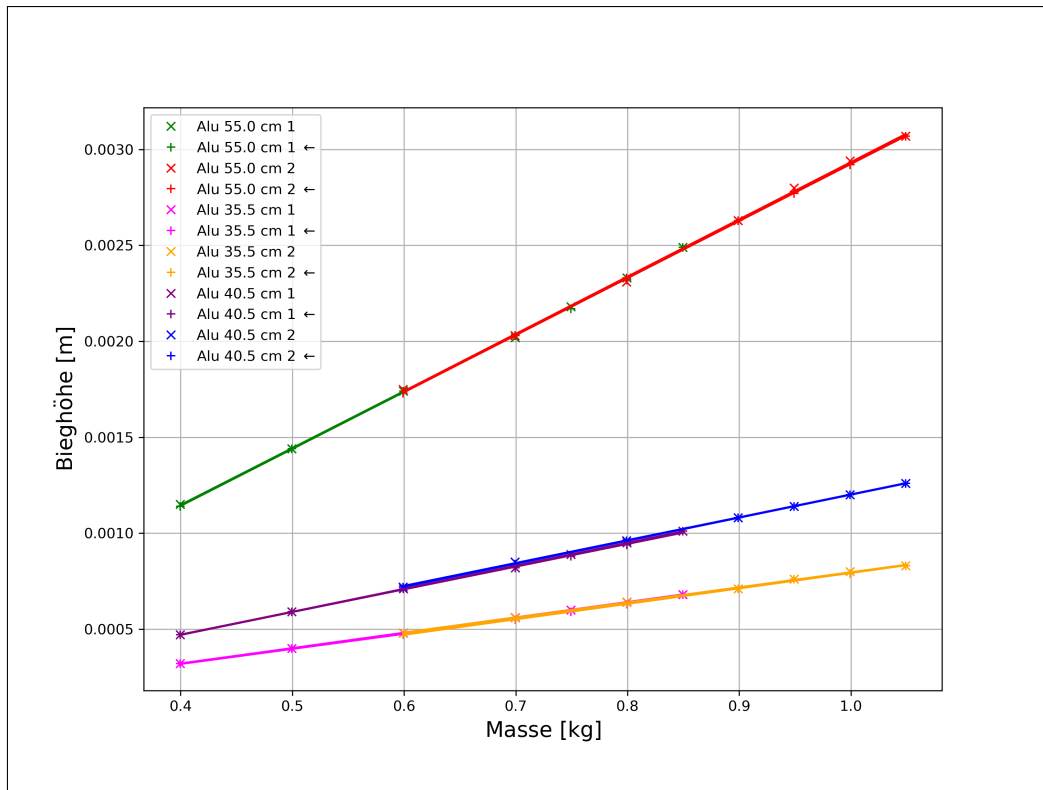


Abbildung 3: Vergleich von Biegung von Aluminium bei verschiedenen Längen



Um von hier auf unser Ziel, der Elastizitätsmodul, zu kommen, nutzen wir die Formel (1) aus der Theorie. Diese müssen wir jedoch erstmal nach  $E$  umstellen. Da wir ja in Abhängigkeit von  $m$  arbeiten, drücken wir zuerst unser  $F$  als  $mg$  aus und lassen dieses  $m$  alleine auf der rechten Seite stehen:

$$E = \frac{l^3 g}{s 4 h^4 b} m$$

Wir benötigen also die Länge, Breite und Höhe des verwendeten Stabteils, sowie dessen Durchbiegung bei verschiedenen Massen. Wir betrachten erstmal die Formel für Fehlerrechnung bei Produkten und Quotienten:

$$\left| \frac{\Delta z}{z} \right| = \sqrt{\left( a \frac{\Delta x}{x} \right)^2 + \left( b \frac{\Delta y}{y} \right)^2 + \dots} \text{ für } z = x^a y^b \dots \quad (10)$$

Mit unserer Formel dann:

$$\left| \frac{\Delta E}{E} \right| = \sqrt{\left( 3 \frac{\Delta l}{l} \right)^2 + \left( -\frac{\Delta s}{s} \right)^2 + \left( -4 \frac{\Delta h}{h} \right)^2 + \left( -\frac{\Delta b}{b} \right)^2} \quad (11)$$

Da die Unsicherheit der Steigung klein ist und nur das 1-Fache dessen in die Unsicherheit von  $E$  eingeht, ist diese zu vernachlässigen. Die Unsicherheit von  $b$  können wir auch vernachlässigen.

Wir nutzen also unsere Steigung aus der linearen Regression als  $s$  und rechnen hiermit als Werte für  $E$ :

Tabelle 1: Berechnete Werte für  $E$

	Messreihe	Länge [cm]	Elastizitätsmodul [N/m <sup>2</sup> ]
Unsicherheiten: Länge: $\pm 0.005$ cm	Aluminium	40.5	$(6.75 \pm 0.025) \times 10^{10}$
	Stahl	40.5	$(2.137 \pm 0.008) \times 10^{11}$
	Messing	40.5	$(9.49 \pm 0.035) \times 10^{10}$
	Alu umgedreht	40.5	$(6.46 \pm 0.024) \times 10^{10}$
	Aluminium	55.0	$(6.78 \pm 0.018) \times 10^{10}$
	Aluminium	33.5	$(5.74 \pm 0.026) \times 10^{10}$
	Alu 10 Messungen	40.5	$(6.76 \pm 0.025) \times 10^{10}$

Die genauen Werte für die Breite und Höhe der Stäbe sind im Anhang zu finden. Wir verwenden als Wert für  $g$   $9.81 \text{ m/s}^2$ .

### 3 Diskussion

Die entsprechenden Literaturwerte lauten [1]:

- Aluminium :  $E = (69 \dots 72.5) \times 10^3 \text{ N/mm}^2$
- Stahl:  $E = (195 \dots 210) \times 10^3 \text{ N/mm}^2$
- Messing:  $E = (90 \dots 95) \times 10^3 \text{ N/mm}^2$

Um die Verträglichkeit unserer Werte zu überprüfen betrachten wir die  $2 - \sigma$  Bereiche unserer gemessenen Werte:

Wir können klar erkennen, dass für Aluminium keine Messung im  $2 - \sigma$  Bereich mit den Literaturwerten übereinstimmt. Alle liegen unterhalb des Wertebereichs. Am auffälligsten ist hier die Messung bei einer Länge von 33.5 cm, da dieser deutlich am weitesten entfernt ist.

Tabelle 2: Berechnete Werte für  $E$ 

	Messreihe	Länge [cm]	2- $\sigma$ Bereich von $E$ [N/m <sup>2</sup> ]
Unsicherheiten: Länge: $\pm 0.005$ cm	Aluminium	40.5	$(6.75 \pm 0.050) \times 10^{10}$
	Stahl	40.5	$(2.137 \pm 0.016) \times 10^{11}$
	Messing	40.5	$(9.49 \pm 0.070) \times 10^{10}$
	Alu umgedreht	40.5	$(6.46 \pm 0.048) \times 10^{10}$
	Aluminium	55.0	$(6.78 \pm 0.036) \times 10^{10}$
	Aluminium	33.5	$(5.74 \pm 0.052) \times 10^{10}$
	Alu 10 Messungen	40.5	$(6.76 \pm 0.050) \times 10^{10}$

Unsere Messungen für Stahl und Messing stimmen jedoch überein. Interessant ist hier aber, dass beide an der oberen Grenze des Bereichs vom Literaturwert liegen.

Die Ursache hiervon ist vermutlich ein zu fein geschätzter Fehler des für die Längenmessung genutzten Bandmaßes. Verdoppeln wir diesen Fehler, so verdoppeln sich auch die Fehler unserer Endergebnisse. Vergleichen wir die Werte nach dieser Verdopplung, so liegt nur noch die Messung von Aluminium bei 33.5 cm außerhalb des 2- $\sigma$  Bereichs. In diesem Fall wären alle anderen Messwerte mit den Literaturwerten verträglich.

Jedoch muss man sich immer noch fragen, weshalb die Werte von Messing und Stahl an der oberen und die von Aluminium an der unteren Grenze des Wertebereichs liegen. Offensichtlich haben andere Fehler noch einen Einfluss.

Erstmal klar ist, dass noch zusätzliche Kräfte wirken, welche durch das Eigengewicht der Stäbe, das Gewicht der Halterung und der Andruckkraft des Messgeräts ausgeübt werden. Da dieser Versuch sich aber im Proportionalitätsbereich aufhält, müssen diese Kräfte nicht berücksichtigt werden, da sie nur den Nullpunkt des Messgeräts verschieben. Dies ist also vermutlich nicht die Ursache.

Suchen wir nach anderen Fehlern, so muss zuerst die Form der Literaturwerte klarifiziert werden; Stahl-, Aluminium- und Messingstäbe werden je nach Werkstoffzusammensetzung andere Elastizitätsmodule haben. Wir können also davon ausgehen, dass die Stäbe in diesen Wertebereichen ihre Elastizitätsmodule haben und nicht aufgrund von unreiner Zusammensetzung als systematischer Fehler gelten können.

Die nächste Fehlerquelle, die wir betrachten werden, ist die, dass die Halterungen der Stäbe möglicherweise Bewegungsanfällig waren, wodurch die Längen noch ungenauer werden würden. Gleichmaßen könnten die Stäbe auch nicht gerade auf den Halterungen stehen. Hätte das Gerät bessere Halterungen, bei denen die Stäbe immer zentriert wären und keine Bewegung möglich ist, so wären eventuell bessere Ergebnisse möglich.

Betrachten wir nochmal unsere Gleichung für  $E$ :

$$E = \frac{l^3 g}{s 4 h^4 b} m$$

Klar ist, dass  $g$  keinen größeren Einfluss hat und auch schon relativ genau gewählt wurde. Außerdem wurden die Massen der einzelnen Gewichte vor der Messung alle gemessen und Markierungen gesetzt, wodurch wir ein Problem mit den Massen ausschließen können. Uns bleiben also noch Fehler auf  $s$ ,  $h$  und  $b$ . Da für die Messung der Breite und Höhe eine Messschraube genutzt wurde, ist ein Problem hier eher unwahrscheinlich. Vermutlich könnte also unser Fehler auch bei dem digitalen Messgerät liegen.

## 4 Anhang: Messwerte

### Literatur

- [1] Physikalisches Institut der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg (Hrsg.) (08/2018): Versuchsanleitungen zum Physiklabor für Anfänger\*innen, Teil 1, Ferienpraktikum im Sommersemester 2018.
- [2] Demtröder, Experimentalphysik 1, <https://www.springer.com/us/book/9783662464151>, Kapitel 6.2.4