

## Versuch 04: Dichte und Oberflächenspannung

(durchgeführt am 07.09.2018 bei Daniel Bartle)  
Andréz Gockel, Patrick Münnich  
10. September 2018

### 1 Ziel des Versuchs

Der Versuch ist in zwei Teile geteilt, welche dazu dienen, grundlegende Eigenschaften von Flüssigkeiten experimentell zu bestimmen. Im Teil A bestimmt man die Dichte von Wasser und einer unbekannten Flüssigkeit mithilfe einer Jollyschen Federwaage. Im Teil B bestimmt man die Oberflächenspannung von Wasser durch Messen der Abrisskraft mithilfe eines Torsionskraftmessers.

### 2 Auswertung und Fehleranalyse

#### 2.1 Teil A - Dichte

##### 2.1.1 Aufgabenstellung

Mit Hilfe der Jollyschen Federwaage sind zu bestimmen

1. die Dichte eines geometrisch einfach gestalteten Körpers, wobei ein Vergleich mit den aus den geometrischen Abmessungen und dem Gewicht des Körpers gewonnenem Wert durchzuführen ist,
2. die Dichte einer unbekannten Flüssigkeit.

##### 2.1.2 Auswertung

Zur ersten Aufgabe:

Die Messungen wurden mit einer Metallkugel durchgeführt mit einem Durchmesser von  $d = (1.2 \pm 0.03)\text{cm}$  und einer Masse von  $m = (7.03 \pm 0.005)\text{g}$ . Mit der Formel für das Volumen,  $V = \frac{\pi}{6}d^3$ , und für die Dichte,  $\rho = \frac{m}{V}$ , ergibt sich ein Wert von  $(7810 \pm 550)\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Hierbei wurde der Fehler über die Potenzformel des Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes ( $\delta V = \frac{\Delta V}{V}$ ,  $\delta V = 3\delta d$ ) bei Vernachlässigung des Fehlers der Masse bestimmt.

|                                  |                         |     |     |     |     |     |
|----------------------------------|-------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| In Wasser :                      | Messung                 | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
| werte in mm                      | Ruhelage $x_0$          | 441 | 479 | 473 | 463 | 468 |
| Unsicherheit: $\pm 0.1\text{mm}$ | Nicht eingetaucht $x_1$ | 414 | 453 | 447 | 436 | 440 |
|                                  | Eingetaucht $x_2$       | 417 | 456 | 450 | 439 | 443 |

Für das Dichteverhältniss gilt:

$$\frac{\rho}{\rho_{Fl}} = \frac{F_G}{F_G - F_{G'}} \quad (1)$$

$$F = -k(x - x_0), \quad (2)$$

wobei die Größen in (1)

- $\rho$  und  $\rho_{Fl}$  jeweils die Dichten von dem Körper und der Flüssigkeit.
- $F_G$  die Gewichtskraft des Körpers in Luft.
- $F_{G'}$  die Gewichtskraft des Körpers in einer Flüssigkeit.

und in (2)

- $F$  die Federkraft
- $k$  die Federkonstante
- $x_0$  die Ruhelage der Waage
- $x$  die Auslenkung der Waage sind.

Daraus ergibt sich für die Dichte mit den Auslenkungen  $x_1$  Objekt in Luft und  $x_2$  Objekt in Flüssigkeit:

$$\rho = \rho_{Fl} \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_2}. \quad (3)$$

Für unsere Messwerte aus Tabelle 1 erhalten wir

| Messung                            | 1           | 2           | 3           | 4           | 5           |
|------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Dichte $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ] | 8982 ± 4260 | 8649 ± 4104 | 8649 ± 4104 | 8982 ± 4260 | 9314 ± 4416 |

Der Mittelwert unserer Messung beträgt also  $\rho = (8900 \pm 1800) \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Diese Rechnungen wurden mit dem *uncertainties* Paket in Python durchgeführt. Siehe Abbildung (2.1.2).

Der Fehler der Messung mit der Jollyschen Waage ist aufgrund des großen Dichteunterschieds zwischen dem Metall und der Flüssigkeit so groß. Dadurch ist die Auftriebskraft im Vergleich zur Gewichtskraft der Kugel klein und man erhält im Nenner von (3) die Differenz zweier nahezu gleichen Messwerte, deren Fehler dann groß ist.

Zur zweiten Aufgabe:

Die Rechnungen wurden mit den Messwerten aus dem ersten Aufgabenteil durchgeführt und es wurde die gleiche Apparatur verwendet. Als Wert für die Dichte des Körpers wurde der Mittelwert auf dem ersten Aufgabenteil genutzt. Die Formel (3) wurde zu

$$\rho_{Fl} = \rho \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_0} \quad (4)$$

umgestellt.

Für die unbekannte Flüssigkeit wurde gemessen:

|                      |                         |     |     |     |     |
|----------------------|-------------------------|-----|-----|-----|-----|
| In Flüssigkeit :     | Messung                 | 1   | 2   | 3   | 4   |
| werte in mm          | Ruhelage $x_0$          | 449 | 466 | 440 | 482 |
| Unsicherheit: ±0.1mm | Nicht eingetaucht $x_1$ | 424 | 438 | 414 | 455 |
|                      | Eingetaucht $x_2$       | 427 | 441 | 417 | 458 |

Mit (4) ergibt sich dann:

| Messung                            | 1          | 2         | 3          | 4         |
|------------------------------------|------------|-----------|------------|-----------|
| Dichte $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ] | 1068 ± 523 | 953 ± 469 | 1026 ± 504 | 989 ± 486 |

Hier ist der Mittelwert dann  $\rho_{Fl} = (1010 \pm 300) \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Die Rechnungen wurden hier wieder mit dem *uncertainties* Paket in Python durchgeführt. Siehe Abbildung (2.1.2).

```

import numpy as np
from uncertainties import ufloat

#Messwerte
x_0=np.array([ufloat(441,1),ufloat(479,1),ufloat(473,1),ufloat(463,1),ufloat(468,1)])
x_1=np.array([ufloat(414,1),ufloat(453,1),ufloat(447,1),ufloat(436,1),ufloat(440,1)])
x_2=np.array([ufloat(417,1),ufloat(456,1),ufloat(450,1),ufloat(439,1),ufloat(443,1)])

#Dichte von Wasser bei 20 Grad Celsius
rho_o2=998

#Formel fuer Dichte des Objektes
rho=rho_o2*(x_1-x_0)/(x_1-x_2)

print(rho)

#Mittelwert (Bestwert) und Standardabweichung
print(sum(rho)/len(rho))

[8982.0+/-4019.6266272157945 8649.333333333334+/-3863.6464194231066
8649.333333333334+/-3863.6464194231066 8982.0+/-4019.6266272157945
9314.666666666666+/-4175.669787332267]
(8.9+/-1.8)e+03

```

Abbildung 1: Rechnungen mit Python und *uncertainties* Paket.

```

import numpy as np
from uncertainties import ufloat

#Messwerte
x_0=np.array([ufloat(449,1),ufloat(466,1),ufloat(440,1),ufloat(482,1)])
x_1=np.array([ufloat(424,1),ufloat(438,1),ufloat(414,1),ufloat(455,1)])
x_2=np.array([ufloat(427,1),ufloat(441,1),ufloat(417,1),ufloat(458,1)])

#Dichte von Objekt
rho_obj=ufloat(8900,1800)

#Formel fuer Dichte der Fluessigkeit
rho_fl=rho_obj*(x_1-x_2)/(x_1-x_0)

print(rho_fl)

#Mittelwert (Bestwert) und Standardabweichung
print(sum(rho_fl)/len(rho_fl))

[1068.0+/-522.8397046896878 953.5714285714286+/-468.9668212968814
1026.923076923077+/-503.5523383517077
988.8888888888889+/-485.6423916573196]
(1.01+/-0.30)e+03

```

Abbildung 2: Rechnungen mit Python und *uncertainties* Paket.

### 2.1.3 Unsicherheitsvergleich mit Streuung

Aus den 5 bzw. 4 Einzelwerten der beiden Messungen ergeben sich folgende Streuungen:

$$s_\rho = 279, \text{ kg/m}^3, \quad s_{\rho_{Fl}} = 49.1, \text{ kg/m}^3$$

Diese Werte sind erheblich kleiner als erwartet. Der Grund dafür könnte bei einer zu groben Abschätzung der Messungenauigkeit oder aufgrund der geringen Anzahl an Einzelmessungen (5 bzw. 4) liegen.

Geht man von einer halb so großen Messungenauigkeit aus, so erhält man Fehlerabschätzungen von etwa  $2000 \text{ kg/m}^3$ , was immer noch nicht konsistent mit der Abschätzung mittels  $s_\rho$  ist. Daher müssen wir davon ausgehen, dass die kleinen Werte von  $s_\rho$  und  $s_{\rho_{Fl}}$  durch die geringe Anzahl an Einzelmessungen zustande gekommen sind.

Aus den Unsicherheiten der Einzelmessungen ergeben sich Standardabweichungen des Mittelwerts von:

$$s_{\bar{\rho}} = (3987 \pm 125) \text{ kg/m}^3, \quad s_{\bar{\rho}_{Fl}} = (505 \pm 25) \text{ kg/m}^3$$

Bei der Messreihe mit der unbekannten Flüssigkeit gibt es einen systematischen Fehler aufgrund der verwendeten gemessenen Dichte des Körpers, die unter Umständen zu groß oder zu klein geschätzt wurde und als Referenz dient.

## 2.2 Teil B - Oberflächenspannung

Die Oberflächenspannung von Wasser und Ethanol wurde mit der Abreißmethode gemessen. Für diese gilt:

$$\sigma = \frac{F_{s_{max}}}{2l} \quad (5)$$

Die Länge  $l$  des Drahts beträgt  $2.63 \pm 0.03 \text{ cm}$ . Die Messwerte befinden sich in Tabelle (2.2) für Wasser und (??) für Ethanol. Deren Graphische Darstellungen in den Graphiken (2.2) und (2.2). Die Sigmoidfunktion

$$d \times \frac{1}{1 + \exp(-c \times (x - a))} + b$$

wurde mit der `curve_fit` Funktion von Python an die Messpunkte angepasst. Aus den Graphiken lesen wir folgende Werte für  $F_{s_{max}}$  ab:

Messwerte:

| Höhe [mm]  | 2               | 4               | 5              | 6               | 8               | 9               | 10             |
|------------|-----------------|-----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|
| Kraft [mN] | $0.26 \pm 0.03$ | $0.33 \pm 0.03$ |                | $1.25 \pm 0.03$ | $3.9 \pm 0.03$  | $4.75 \pm 0.03$ |                |
| Kraft [mN] | $0.23 \pm 0.03$ | $0.25 \pm 0.03$ | $0.3 \pm 0.03$ | $0.83 \pm 0.03$ | $3.85 \pm 0.03$ | $4.6 \pm 0.03$  | $4.7 \pm 0.03$ |

| Höhe [mm] |            |
|-----------|------------|
| 0         |            |
| 1         |            |
| 3.5       |            |
| 3.75      |            |
| 4         |            |
| 4.5       |            |
| 5         |            |
| 5.5       |            |
| 6         |            |
| 6.2       |            |
| 6.4       |            |
| 6.5       |            |
| 6.6       |            |
| 7         |            |
| 8         | Kraft [mN] |
| -0.35     |            |
| -0.2      |            |
| 0         |            |
| 0.67      |            |
|           |            |
| 1.25      |            |
| 1.25      | Kraft [mN] |
| -0.35     |            |
| 0         |            |
| 0.85      |            |
| 1.1       |            |
| 1.3       |            |
| 1.35      | Kraft [mN] |
| 0         |            |
| 0.15      |            |
| 0.46      |            |
| 1.1       |            |
| 1.25      |            |
| 1.4       |            |
| 1.43      |            |
| 1.4       |            |
| 1.3       | 5          |

$F_{s_{max}}$ :

| Messung                  | 1               | 2               |
|--------------------------|-----------------|-----------------|
| Kraft $F_{s_{max}}$ [mN] | $5.16 \pm 1.03$ | $4.75 \pm 0.95$ |

| Messung                  | 1               | 2               | 3               |
|--------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Kraft $F_{s_{max}}$ [mN] | $1.27 \pm 0.25$ | $1.42 \pm 0.28$ | $1.38 \pm 0.28$ |

Die Fehler wurden durch Streuung der Messpunkte um die angepassten Kurven abgeschätzt.

Mit der Formel (5) ergibt sich für die Oberflächenspannung

| Messung                         | 1               | 2               | Mittelwert      |
|---------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Oberflächenspannung [ $mN/cm$ ] | $0.98 \pm 0.20$ | $0.90 \pm 0.18$ | $0.94 \pm 0.13$ |

| Messung                         | 1               | 2               | 3               | Mittelwert      |
|---------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Oberflächenspannung [ $mN/cm$ ] | $0.24 \pm 0.05$ | $0.27 \pm 0.05$ | $0.26 \pm 0.05$ | $0.26 \pm 0.03$ |

### 3 Anhang: Tabellen und Diagramme

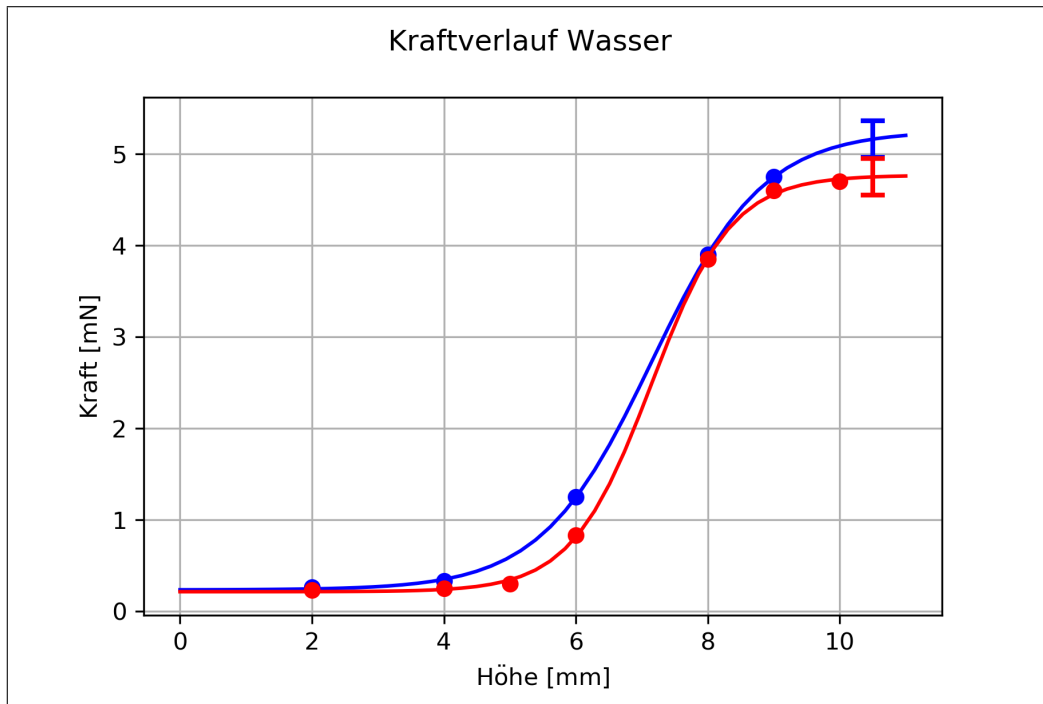


Abbildung 3: Verlauf der Kraft  $F$  als Funktion der Position  $x$  beim Herausziehen des Bügels aus der Flüssigkeit.

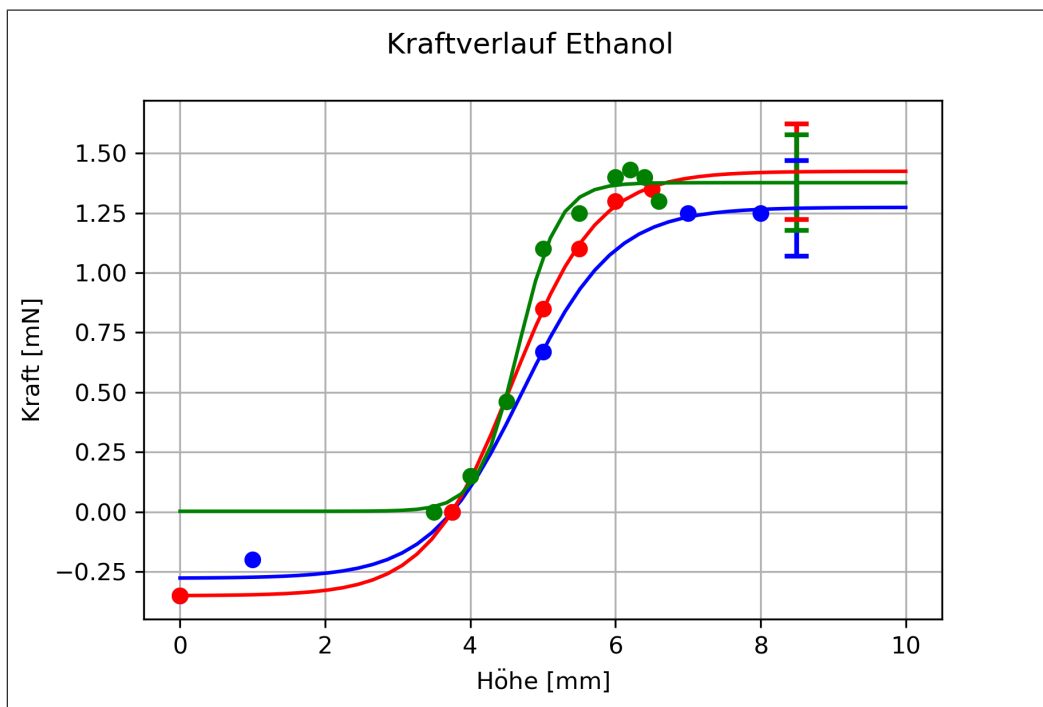


Abbildung 4: Verlauf der Kraft  $F$  als Funktion der Position  $x$  beim Herausziehen des Bügels aus der Flüssigkeit.