Höhere Mathematik

Vorlesung von Prof. Dr. Harald Ita im Sommersemester 2019

Markus Österle   Damian Lanzenstiel

8. Mai 2019

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einführung

0.1 Wichtige Infos

e-mail `harals.ita@physik.uni-freiburg.de`

Zimmer 803

Homepage `www.qft.physik.uni-freiburg/Teaching`

Tutorate 24. Aprill ab 14:00 Einschreibungsbeginn
60% sind zum bestehen der Studienleistung erforderlich. Die Teilnahme an der Prüfung ist nicht daran gebunden und kann auch ohne bestehen mitgeschrieben werden.

0.2 Inhalt der Vorlesung

Die Vorlesung orientiert sich stark am Script von Prof. Dittmeier.

Teil I

Funktionentheorie

Theorie der Funktionen in einer komplexen Veränderlichen

Kapitel 1

Komplexe Zahlen

- natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ mit definierten Operatoren $+$ und $\times$
- ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots\}$ mit den Operationen $+$ mit Inversion und $\times$ ohne Inversion
- rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle| a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$ mit den Operatoren $+$ und $\times$ und ihren Inversionen

  $x^2 = z$ algebraisch unvollständig, konvergente Folge, die nicht in $\mathbb{Q}$ liegenden Limes hat (Cauchy Folge [1]).
- reelle Zahlen $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{irrationale Zahlen}\}$. Vollständiger Körper [2] aber algebraisch nicht abgeschlossen.

  $x^2 = -1$ nicht lösbar in $\mathbb{R}$
- komplexe Zahlen $\mathbb{C} = \mathbb{R}, i$ algebraisch abgeschlossen, vollständiger Körper

  konstuktion über imaginäre Einheit i mit $(i)^2 = (-1)$, Euler 1777

Def: komplexe Zahlen

a) komplexe Zahl z ist ein Zahlenpaar $z = (x, y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. x ist der Realteil von z mit $\Re(z) = x$ und y der Imaginärteil von z mit $\Im(z) = y$.

Definieren wir zwei komplexe Zahlen $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$, so ist:
die **Addition** definiert als:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

die **Multiplikation** definiert als:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

b) Das Symbol der Menge der komplexen Zahlen ist $\mathbb{C}$.

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{-\infty\}$$

c) Kurzschreibweise: $i = (0, 1)$; $z = (x, y) = x + i \cdot y$

[1] Mit einer Cauchy Folge kann gezeigt werden, dass eine Folge konvergiert, ohne dass der Limes bekannt ist.
[2] Bei einem vollständigen Körper liegen die Grenzwerte aller konvergenter Folgen wieder in dem Körper.

d) komplex konjugierte Zahl

$$z = (x, y) = x + iy \to \overline{z} = (x, -y) = x - iy$$

e) Betrag einer komplexen Zahl

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

f) Polardarstellung

$$z = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r\cos\varphi + i \cdot r\sin\varphi$$

$$\varphi \in (-\pi, \pi] \qquad r \in \mathbb{R}^+$$

r ist der **Betrag** von z: $r = |z|$. φ ist das **Argument** von z: $\varphi = \arg(z)$

1.1 Satz: Rechenregeln im $\mathbb{C}$

für $z_i \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \qquad \overline{\overline{z_1}} = z_1$$

$$\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \qquad \Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \qquad |\overline{z}| = |z|$$

$$|z| \geq 0 \quad \text{und} \quad |z| = 0 \quad \Rightarrow \quad z = (0,0) = 0 + i0 = 0$$

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$

Gaußsche Zahlenebene

$\mathbb{C}$ bildet einen 2-dimensionale Vektorraum wie $\mathbb{R}^2$. Es gibt also eine gemeinsame Struktur mit dem $\mathbb{R}^2$, dennoch ist $\mathbb{C}$ eine Erweiterung.

a) Vektoraddition, Multiplikation mt reeller zahl, Länge und Abstandsbegriff.

b) Multiplikation komplexer Zahlen → Darstellung in Polarform

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (r_1\cos\varphi_1, r_1\sin\varphi_1) \cdot (r_2\cos\varphi_2, r_2\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2 \cdot (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2, \cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1) \\ &= r_1 r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2), \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

⇒ Beträge multiplizieren, Argumente addieren

Kehrbruch einer komplexen Zahl

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} &= \frac{1}{r^2}(r\cos\varphi, -r\sin\varphi) \\ &= \frac{1}{r}(\cos(-\varphi), \sin(-\varphi)) \end{aligned}$$

mit $r' = \frac{1}{r}$, $\varphi' = -\varphi$

Riemannsche Sphäre

Kompaktifizierung der komplexen Zahlen Ebene $\mathbb{C}$ durch stereographische Projektion: $\hat{\mathbb{C}} = \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{-\infty\}$.

Es wird also ein Punkt im unendlichen zu $\mathbb{C}$ hinzugefügt.
$N = (0, 0, 1)$
Sphäre mit Radius $R = 1$, um Koordinatenuhrsprung in $\mathbb{R}^3$. $\mathbb{C}$ wird identifiziert mit der (x, y)-Ebene.

stereographische Projektion = Zuordnung von Punkten auf Sphäre mit Punkten in (x, y)-Ebene.

Vorschrift: Gerade durch Punkt $(x_{\Re}, y_{\Im}, 0)$ und den Nordpol N. Durchstoßpunkt = projezierter Punkt auf Sphäre. Bildpunkte: $\boldsymbol{w}(z)$.

Def: Chordaler Abstand

$\chi(z_1, z_2) =$ „ Abstand der Bilder $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}(z_1)$, $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{w}(z_i)$ unter stereographischen Projektion im $\mathbb{R}^3$.“

$$\chi(z_1, z_2) = |\boldsymbol{w}(z_1) - \boldsymbol{w}(z_2)|$$

Def: Metrik

(Topologie, Stetigkeit, Limes)

Abstandsfunktion: $d(\cdot, \cdot)$ auf Menge $M: \ M \times M \to \mathbb{R}^+$

(a) $d(z_1, z_2) \geq 0 \ \forall z_i \in M$ ($\mathbb{C}$) sowie $d(z_1, z_2))0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$

(b) $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) - d(z_3, z_2) \ \forall z_i \in M$

Beispiele:

(i) $\mathbb{C} : d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$

(ii) $\overline{\mathbb{C}} : \chi(z_1, z_2)$ abgeleitet von Abstandsfunktion im $\mathbb{R}^3$ $d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \sqrt{(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)^2}$

Def: Metrischer Raum

$$\text{Metrischer Raum} = \text{Menge} + \text{Metrik}$$

1.1.1 Polarform und komplexe Wurzeln

a) Formel von Moivre ($\to$ Übungen)

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

b) Die n-te Wurzeln $\xi_n, \circ_n^2, \xi_n^3, \dots, \xi_n^n$ mit

$$\xi_n = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\xi_n^n = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2pi}{n}\right)\right)^2 = \cos\left(\frac{2\pi n}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi n}{n}\right) = 1$$

$$\left(\xi_n^k\right)^n = \xi_n^{kn} = \cos\left(\frac{2\pi kn}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi kn}{n}\right)$$
$$= 1 \qquad + \qquad i0 \qquad = 1$$

Wurzeln lösen $z^k = 1$
Für $n = 2$ und $z^2 = 1$ gibt es die Lösungen $z = \pm 1$

$$\xi_2 0 \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) = (-1)$$

$\xi_2^2 = 1$

c) Verallgemeinerung $z^n = a \Rightarrow$„ $\sqrt[n]{a}$“

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right)\xi_k^k \qquad \alpha = \arg(a), k = 0, \dots, n-1 \\ z_k^n &= \left(\sqrt[n]{|a|}\right)^n \left(\cos\left(\frac{\alpha}{n}\cdot n\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n}\cdot n\right)\right)(\xi_{n^k})^n \\ &= |a|\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)\cdot 1 = a \end{aligned}$$

Nützliche begriffe

Kreisscheiben: $K_R(z_0) = \{z_0 \in \mathbb{C}, R \in \mathbb{R}^+ : |z - z_0| < R\}$
Kreislinie: $C_R(z_0) = \{z_0 \in \mathbb{C}, R \in \mathbb{R}^+ : |z - z_0| = R\}$

1.2 Folgen und Reihen

Motivation: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$ mit $a_n \in \mathbb{C}$

Partialsummen, Folge der Partialsummen $(s_0, s_1, \dots, s_m)$

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$$

Konvergenz der unendlichen Reihe $\Leftrightarrow$ Konvergenz der Folge ihrer Partialsummen $(s_n)_{n=1,\infty}$

Def: Folge

Eine Folge ist eine geordnete Menge von Zahlen $(a_1, a_2, \dots)$, die Zuordnung von $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ darstellt.

Def: Konvergenz einer Folge

Eine Folge Konvergiert gegen den Grenzwert a, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ einen Index $N(\varepsilon)$ gibt, so dass $\forall n \geq N(\varepsilon), n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$

Satz: Konvergenzkriterium von Cauchy

Eine Folge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ gibt, so dass $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$ für $n, m \geq N(\varepsilon)$

Satz: Rechenregeln zu Limite

$(z_n), (w_n)$ seinen Folgen, die in $\mathbb{C}$ konvergieren, dann konvergieren auch die Folgen: $(z_n + w_n)$, $(z_n \cdot w_n)$ und $({}^{z_n}/_{w_n})$ hier muss $w_n \neq 0$ geordert werden.

Schreibweise:

$$\lim_{n\to\infty} = z, \lim_{n\to\infty} w_n = w$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) &= \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n = z + w \\ \lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) &= \left(\lim_{n\to\infty} z_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty}\right) \\ \lim_{n\to\infty}(z_n/w_n) &= \left(\lim_{n\to\infty} z_n\right) \Big/ \left(\lim_{n\to\infty} w_n\right) \end{aligned}$$

Def: unendliche Reihen

Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ ist definiert als Grenzwert der Folge $(s_n)_{n=0,\infty}$ der Partialsummen $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

Def: Absolute Konvergenz

$\left(\sum a_n \to \sum |a_n| \stackrel{?}{=} \text{konvergenz ? } (|a_n| \in \mathbb{R}^+)\right)$

Eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Satz: Jede absolut konvergente Reihe konvergiert

Beweis:

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= \left| \sum_{\substack{k=n+1 \\ n<m}}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \quad \leftarrow \text{Differenz von Partialsummen von} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \\ &= |\hat{s}_m - \hat{s}_n| \quad \leftarrow \text{Partialsummen von} \uparrow \end{aligned}$$

$$\hat{s}_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

absolute Konvergenz: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ sodass $|\hat{s}_m - \hat{s}_n| < \varepsilon$ für $m, n \geq n_0$.

$\Rightarrow$ Konvergenz von $\sum_{k=n+1}^{m} a_k$ $\star$hier fehlt was$\star$

Bemerkung

Nicht jede konvergente Reihe ist absolut konvergent. Zum Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{divergiert,} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{konvergiert}$$

$$s_{2n}-s_m=\underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2m}}_{m}>\underbrace{\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}+\cdots+\frac{1}{2m}}_{m}=\frac{m}{2m}=\frac{1}{2}$$

$\rightarrow$ Cauchy Kriterium nicht erfüllt.

Satz: Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert (absolut)

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}\Re(a_n) \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\Im(a_n) \quad \text{konvergieren (absolut)}$$

Dabei gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n=\sum_{n=0}^{\infty}\Re(a_n)+i\sum_{n=0}^{\infty}\Im(a_n)$$

Beweis:

Konvergenz: Aussage über Folge $s_n, \Re(s_n), \Im(s_n)$

$$s_n=\sum_{k=0}^{n} a_k \qquad , \qquad \hat{s}_n^{\Re}=\sum_{k=0}^{n}\Re(a_k)=\Re\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)=\Re(s_n)$$

außerdem gilt auch:

$$\hat{s}_n^{\Im}=\Im(s_n)$$

a) $|s_n-s_m|<\varepsilon$ für $m,n\geq n_0$

$$\varepsilon>|s_n-s_m|=|\Re(s_n-s_m)+i\Im(s_n-s_m)|\geq|\Re(s_m)-\Re(s_n)|$$

Hierbei sind $\Re(s_m)$ Partialsummen von $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Re(a_n)$

$\Rightarrow$ Konvergenz analog für $\sum\Im(a_n)$

b) $|s_n-s_m|=|\Re(s_n-s_m)+i\Im(s_n-s_m)|\leq\underbrace{|\Re(s_n-s_m)|}_{<\varepsilon/2}+\underbrace{|\Im(s_n-s_m)|}_{<\varepsilon/2}<\varepsilon \quad$ für $m,n>n_0$

(neue Vorlesung aber anscheinend selbe Aufzählung)

a) Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent: ε, n_0, sodass $[s_n=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|]$ $|s_n-s_m|<\varepsilon \quad$ für $n,m>n_0$

$$\varepsilon>|s_n-s_m|\underbrace{\geq}_{m>m'}\left|\sum_{k=m'-1}^{m}|a_k|\right|\geq\left|\sum_{k=m'-1}^{m}|\Re(a_k)\right|=|s_m^{\text{Re,abs}}-s_n^{\text{Re,abs}}|$$

da gilt: $|a_k|\geq|\Re(a_k)|$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty}|\Re(a_k)| \quad \text{konvergent} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty}|\Re(a_k)| \quad \text{absolut konvergent}$$

b) Sind $\sum|\Re(a_k)|$ und $\sum|\Im(a_k)|$ konvergent, so folgt $\Rightarrow \sum|a_k|$ ist ebenfalls konvergent.

$$\frac{\varepsilon}{2}>\left|\sum_{k=m'-1}^{m}|\Re(a_k)|\right| \quad \text{mit } m,m'>n$$

$$\text{Analog für:} \qquad \sum_{k=m'-1}^{m} \Im(a_k) \quad \text{für} \frac{\varepsilon}{2} \text{und} \hat{m}, \hat{m}' \geq \tilde{n}$$

$\hat{n} = \max(n, \tilde{n})$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} > \left| \sum_{k=m'+1}^{m} |\Re(a_k)| \right| + \left| \sum_{k=m'+1}^{m} |\Im(a_k)| \right| \qquad \text{für} m > m' \text{und} m, m' > \hat{n}$$

$$> \left| \sum_{k=m'+1}^{m} |\Re(a_k)| + |\Im(a_k)| \right| \geq \left| \sum_{k=m'+1}^{m} |a_k| \right| \quad \Rightarrow \quad \text{konvergenz von } \sum |a_k|$$

Satz: Majoranten-/Minorantenkriterium

Die Motivation bei diesem Konvergenzkriterium ist der **Vergleich von Reihen**.

Sei (b_k) eine reelle, positive Folge:

a) gilt $|a_k| \leq b_k \quad \forall k > n_0$ und ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{ist konvergent}$$

⋆hier fehlt eine Grafik⋆

b) ist $|a_k| \geq b_k \quad \forall k > n_0$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \quad \text{ist divergent} \sim \text{nicht absolut konvergent}$$

Satz: Quotientenkriterium

Geometrische Reihe + Majoranten-/Minorantenkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n \quad (\text{endlich viele } a_k = 0)$$

a) Gibt es ein reelles $q < 1$ und $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \quad \forall k > n,$$

dann konvergiert die Reihe absolut.

b) Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \quad \forall m > n,$$

dann divergiert die Reihe

Beispiel:

a)

$$
\begin{aligned}
|a_{k+1}| &= \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\left|\frac{a_k}{a_{k-1}}\right|\dots\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|a_n \\
&\leq q \cdot q \cdot \dots \cdot |a_n| \\
&= \underbrace{q^{k-n} \cdot |a_n|}_{b_{k+1}}
\end{aligned}
$$

$$
|a_n| \sum_{k=0}^{\infty} q^k \stackrel{*}{=} \frac{|a_k|}{1-q} \quad \text{ist konvergent}
$$

$*$: für $0 \leq q < 1$

b)

$$
|a_{k+1}| = \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right|\left|\frac{a_m}{a_{m-1}}\right| \dots a_n \geq |a_n|
$$

$\Rightarrow$ alle $|a_m|$ keine Nullfolge
$\Rightarrow$ Reihe $\sum |a_m|$ nicht konvergent

Satz: Rechnen mit Reihen

Seien $A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $B = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente, komplexe Reihen.

a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ konvergiert auch

$$
\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha A + \beta B
$$

b) Falls $\sum a_k$ absolut konvergiert, so ist auch das „Cauchy Produkt“ konvergent mit:

$$
AB = \sum_{k=0}^{\infty} a_n \qquad a_n = \sum_{m=0}^{n} (a_m b_m)
$$

generell gilt für Produkte von endlichen Summen:

$$
\sum_{k=0}^{m_1} a_k \times \sum_{k=0}^{m_2} b_k
$$

Dieses Produkt ergibt eine Matrix mit den Einträgen:

$$
\begin{pmatrix}
a_0 b_0 & \dots & a_0 b_{m_2} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{m_1} B_0 & \dots & a_{m_1} b_{m_2}
\end{pmatrix}
$$

Die einzelnen Einträge können bei endlichen Summen in beliebiger Reihenfolge aufsummiert werden. Bei unendlichen Summen geht man hier vor wie bei der Aufzählung der Rationalen Zahlen in Cantors erstem Diagonalbeweis (also immer die Summe von diagonalen angefangen oben bei $a_0 b_0$). $\Rightarrow$ Beweis siehe Übung

1.3 Elementare Funktionen

Motivation: Reihen $\sim$ Approximation, Potenzreihen, Polynome, rationale Funktionen $\sim$ natürliche Erweiterung reeller Funktionen ins Komplexe.

Def: Reihen im komplexen

$$\begin{aligned}
\exp(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad (\exp(z) \sim e^z) \\
\cos(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \\
\sin(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}
\end{aligned}$$

Satz:

Die Reihen $\exp(z), \cos(z)$ und $\sin(z)$ konvergieren auf $\mathbb{C}$ und erfüllen die Relationen:

$$\begin{aligned}
\exp(iz) &= \cos(z) + i\sin(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \\
\exp(z_1 + z_2) &= \exp(z_1) \cdot \exp(z_2) \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Beweis

a) Konvergenz:

(i) $z = 0 \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 1$

(ii) $z \neq 0$
mit ii) Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \left|\frac{z^{m+1}}{(m+1)!}\frac{m!}{z^m}\right| = \left|\frac{z}{m+1}\right| \leq q < 1 \quad \text{für} m > |z|$$

$\Rightarrow$ Kriterium erfüllt für $m \geq n_0$ (es muss gelten $n_0 \geq |z|$)

Ähnliches Vorgehen für $\cos(z)$ und $\sin(z)$

b) Relationen

i)

$$\cos(z) = \sum_{\substack{k=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} (i)^n \frac{z^k}{k!}$$

$(i)^n = (i)^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$

$$\begin{aligned}
i\sin(z) &= i\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (i)^{2k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{(iz)^m}{m!}
\end{aligned}$$

$$\cos(z) + i\sin(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iz)^m}{m!} = \exp(iz)$$

ii)

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$$

$\rightarrow$ Skriptum

weitere Relationen

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$$

Beweis:

$\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(z - z) = \exp(0) = 1$
$\rightarrow \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$

weitere Relationen:

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x) \cdot \exp(iy) = \exp(x) \cdot (\cos(y) + i\sin(y))$$

für $z = x + iy$

$$\cos(-z) = \cos(z)$$
$$\sin(-z) = -\sin(z)$$

$$1 = \cos^2(z) + \sin^2(z) = \exp(iz) \cdot \exp(-iz) = [\cos(z) + i\sin(z)] + [\cos(z) - i\sin(z)]$$

1.4 Topologie

Motivation: Komplexe Zahlenebene, Kugeloberfläche, Doughnut oder Torus, usw. und Erweiterungen von $\mathbb{C}$.

a) Topologie $\rightarrow$ offene Menge $\rightarrow$ **Stetigkeit**

b) 1-dimensionale Integrale in Teilen von $\mathbb{C}$

   ⋆hier fehlt eine Grafik⋆

   „Äquivalenz“ von Kurven, Besonderheit geschlossener Kurven, das auslassen gewisser Bereiche in der komplexen Zahlenebene zur Lösung von Integralen.

- offene, geschlossene, kompakte Menge:
  ε-Umfang:

  $$D_\varepsilon(z_1) = \left\{z \middle| |z - z_0| < \varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ z, z_0 \in \mathbb{C}\right\}$$

  ⋆hier fehlt eine Grafik⋆

  offene Mengen:

  1)

  $$\mathcal{O} \subseteq \mathbb{C},\ \text{sodass für jeden } z \in \mathcal{O} \exists D_\varepsilon(z) \subseteq \mathcal{O}$$

  ⋆hier fehlt eine Grafik⋆

  2) Leere Menge: $\emptyset$

  3) gesamte Menge $\mathbb{C}$

Intuition: Schnitt & Vereinigung funktionieren auf natürliche Art und Weise

abgeschlossene Mengen: Komplemente der $\mathcal{O}$ in $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{O}$$

kompakte Menge: jede offene Überdeckung enthält endliche Überdeckungen $\mathbb{C}$ ist nicht kompakt aber eine Abdeckung von $\mathbb{C}$ also $\overline{\mathbb{C}}$ wie z.B. die Riemannsche Sphäre ist kompakt.

Umgebung U eines Punktes $z \in U \subseteq \mathbb{C}$ $\quad \exists D_3(z) \subseteq U$

⋆hier fehlt eine Grafik⋆ ⋆hier fehlt eine Grafik⋆

- **Topologischer Raum:** Menge $M+$ System offener Mengen $\{\mathcal{O}_i\}$
- **Hausdorff Raum:** Topologischer Raum + **Trennungsaxiom**

  Trennungsaxiom: für beliebige $z_1, z_2 \in M$ $\exists U_{1,2}$ mit $z_1 \in U_1$, $z_2 \in U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

  Intuition: eindeutige Grenze für konvergente Folgen, Begriff stetiger Funktionen

  Hier: $\begin{array}{l} \mathbb{C}+ \text{ Metrik } d(z_1, z_2) \\ \overline{\mathbb{C}}+ \text{ Metrik } \chi(z_1, z_2) \end{array}$ $\Rightarrow$ implizieren $\mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}}$ Topologische Räume + Hausdorff Eigenschaft.

  Eigenschaften: kompakte Menge in $\mathbb{C}$ sind die abgeschlossene & beschränkte Menge. z.B. $K = \{z \big| |z| \leq R \in \mathbb{R}^2\}$.

  Durchschnitt (Vereinigung) endlich vieler offener (abgeschlossener) Mengen gibt offene (abgeschlossene) Menge.

$$A_n = \left[\frac{1}{n+1}, 1 - \frac{1}{n+1}\right] \quad n \in \mathbb{N} \qquad A_n \subseteq \mathbb{R} \qquad \cup_n A_n = (0, 1)$$

  ⋆hier fehlt eine Grafik⋆

- **Grenzwerte:**
  Häufungspunkt z_0 einer Menge M: in jeder $D_\varepsilon(z_0)$ liegt zumindest ein $z + z_0, z \in M$.

  Intuition: „innerer Punkt"

  ⋆hier fehlt eine Grafik⋆ ⋆hier fehlt eine Grafik⋆ ⋆hier fehlt eine Grafik⋆

  Isolierter Punkt z_0 von Menge M: falls $\exists D_\varepsilon(z_0)$, so dass $D_\varepsilon(z_0) \cap M = z_0$.

- zusammenhängende Mengen, Gebiete:
  stetiger Weg $\alpha \subseteq \mathbb{C}$ von $a \in \mathbb{C}$ nach $b \in \mathbb{C}$ mit:

$$\alpha = \left\{z(t) \in \mathbb{C} \middle| z(t) = x(t) + iy(t), 0 \leq t, z(0) = a, z(1) = b, x(t), y(t) \text{ stetige Funktionen}\right\}$$

  ⋆hier fehlt eine Grafik⋆ ⋆hier fehlt eine Grafik⋆ stetiger und nicht stetiger Weg

  zusammenhängende Menge:

  Je zwei Punkte $z_1, z_2 \in M$ lassen sich durch den stetigen Weg α verbinden, der ganz in M liegt; $\alpha \subseteq M$.

  ⋆hier fehlt eine Grafik⋆ ⋆hier fehlt eine Grafik⋆ zusammenhängend und α zwischen Mengen

  einfach zusammenhängende Menge:

jeder geschossene stetiger Weg α mit $a = b$ lässt sich in M auf einen Punkt Zusammenziehen.

⋆hier fehlt eine Grafik⋆ zusammenhängend und nicht zusammenhängend

Gebiet: zusammenhängende, offene Menge

Rand: $z \in M$ Randpunkt einer Menge M, falls jede Umgebung von z mindestens einen Punkt von M und von $\mathbb{C} \setminus M$ enthält.

⋆hier fehlt eine Grafik⋆

∂U = Rand der Menge U

$$D_\varepsilon \cap M \neq \emptyset \qquad D_\varepsilon \cap (\mathbb{C} \setminus M) \neq \emptyset \qquad \varepsilon \text{ beliebig}$$

Eigenschaft: stetiger Weg von $a \in U$ nach $b \in \mathbb{C} \setminus U$ enthält mindestens einen Randpunkt $z_0 \in \partial U$

1.5 Holomorphe Funktionen

Motivation: ausgezeichnete Funktionen durch Stetigkeit & Differenzierbarkeit → besondere „physikalische Eigenschaften“

1) Stetigkeit & Grenzwert:

   komplexe Funktion $f : D \to W$ mit D = Definitionsbereich, W = Wertebereich; $D, W \subseteq \overline{\mathbb{C}}$

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \qquad x, y \in \mathbb{R}, z = x + iy,\ u, v \text{ reelle Funktionen}$$

   Def: Stetigkeit

   komplexe Funktion $f : D \to W$ heißt stetig in $z_0 \in D$, wenn für jede $D_\varepsilon(w_0) \in W$ mit $w_0 = f(z_0)$ eine $D_\delta(z_0)$ existiert, so dass $f(z) \in D_\varepsilon(w_0)$ für $z \in D_\delta(z_0)$.

   ⋆hier fehlt eine Grafik⋆