

Höhere Mathematik

Vorlesung von Prof. Dr. Harald Ita im Sommersemester 2019

Markus Österle Damian Lanzenstiel

3. Mai 2019

Inhaltsverzeichnis

0	Einführung	2
0.1	Wichtige Infos	2
0.2	Inhalt der Vorlesung	2
I	Funktionentheorie	3
1	Komplexe Zahlen	5
1.1	Satz: Rechenregeln im \mathbb{C}	6
1.1.1	Polarform und komplexe Wurzeln	7
1.2	Folgen und Reihen	8
1.3	Elementare Funktionen	13
1.4	Topologie	14

Kapitel 0

Einführung

0.1 Wichtige Infos

e-mail `harals.ita@physik.uni-freiburg.de`

Zimmer 803

Homepage www.qft.physik.uni-freiburg/Teaching

Tutorate 24. April ab 14:00 Einschreibungsbeginn

60% sind zum bestehen der Studienleistung erforderlich. Die Teilnahme an der Prüfung ist nicht daran gebunden und kann auch ohne bestehen mitgeschrieben werden.

0.2 Inhalt der Vorlesung

Die Vorlesung orientiert sich stark am Script von Prof. Dittmeier.

Teil I

Funktionentheorie

Kapitel 1

Komplexe Zahlen

- natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ mit definierten Operatoren $+$ und \times
- ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ mit den Operationen $+$ mit Inversion und \times ohne Inversion
- rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$ mit den Operatoren $+$ und \times und ihren Inversionen
 $x^2 = z$ algebraisch unvollständig, konvergente Folge, die nicht in \mathbb{Q} liegenden Limes hat (Cauchy Folge ¹).
- reelle Zahlen $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{irrationale Zahlen}\}$. Vollständiger Körper ² aber algebraisch nicht abgeschlossen.
 $x^2 = -1$ nicht lösbar in \mathbb{R}
- komplexe Zahlen $\mathbb{C} = \mathbb{R}, i$ algebraisch abgeschlossen, vollständiger Körper
konstruktion über imaginäre Einheit i mit $(i)^2 = (-1)$, Euler 1777

Def: komplexe Zahlen

- a) komplexe Zahl z ist ein Zahlenpaar $z = (x, y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. x ist der Realteil von z mit $\Re(z) = x$ und y der Imaginärteil von z mit $\Im(z) = y$.

Definieren wir zwei komplexe Zahlen $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$, so ist:
die **Addition** definiert als:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

die **Multiplikation** definiert als:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

- b) Das Symbol der Menge der komplexen Zahlen ist \mathbb{C} .

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{-\infty\}$$

- c) Kurzschreibweise: $i = (0, 1)$; $z = (x, y) = x + i \cdot y$

¹Mit einer Cauchy Folge kann gezeigt werden, dass eine Folge konvergiert, ohne dass der Limes bekannt ist.

²Bei einem vollständigen Körper liegen die Grenzwerte aller konvergenter Folgen wieder in dem Körper.

d) komplex konjugierte Zahl

$$z = (x, y) = x + iy \rightarrow \bar{z} = (x, -y) = x - iy$$

e) Betrag einer komplexen Zahl

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

f) Polardarstellung

$$z = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r \cos \varphi + i \cdot r \sin \varphi$$

$$\varphi \in (-\pi, \pi] \quad r \in \mathbb{R}^+$$

r ist der **Betrag** von z : $r = |z|$. φ ist das **Argument** von z : $\varphi = \arg(z)$

1.1 Satz: Rechenregeln im \mathbb{C}

für $z_i \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad \overline{\bar{z}_1} = z_1$$

$$\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad |\bar{z}| = |z|$$

$$|z| \geq 0 \quad \text{und} \quad |z| = 0 \quad \Rightarrow \quad z = (0, 0) = 0 + i0 = 0$$

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$

Gaußsche Zahlenebene

\mathbb{C} bildet einen 2-dimensionalen Vektorraum wie \mathbb{R}^2 . Es gibt also eine gemeinsame Struktur mit dem \mathbb{R}^2 , dennoch ist \mathbb{C} eine Erweiterung.

a) Vektoraddition, Multiplikation mit reeller Zahl, Länge und Abstandsbegriff.

b) Multiplikation komplexer Zahlen \rightarrow Darstellung in Polarform

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (r_1 \cos \varphi_1, r_1 \sin \varphi_1) \cdot (r_2 \cos \varphi_2, r_2 \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 \cdot (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2), \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

\Rightarrow Beträge multiplizieren, Argumente addieren

Kehrbruch einer komplexen Zahl

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{r^2}(r \cos \varphi, -r \sin \varphi) \\ &= \frac{1}{r}(\cos(-\varphi), \sin(-\varphi)) \end{aligned}$$

mit $r' = \frac{1}{r}$, $\varphi' = -\varphi$

Riemannsche Sphäre

Kompaktifizierung der komplexen Zahlen Ebene \mathbb{C} durch stereographische Projektion: $\hat{\mathbb{C}} = \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{-\infty\}$.

Es wird also ein Punkt im unendlichen zu \mathbb{C} hinzugefügt.

$N = (0, 0, 1)$

Sphäre mit Radius $R = 1$, um Koordinatenuhrsprung in \mathbb{R}^3 . \mathbb{C} wird identifiziert mit der (x, y) -Ebene.

stereographische Projektion = Zuordnung von Punkten auf Sphäre mit Punkten in (x, y) -Ebene.

Vorschrift: Gerade durch Punkt $(x_{\Re}, y_{\Im}, 0)$ und den Nordpol N . Durchstoßpunkt = projezierter Punkt auf Sphäre. Bildpunkte: $\mathbf{w}(z)$.

Def: Chordaler Abstand

$\chi(z_1, z_2) =$ „Abstand der Bilder $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}(z_1)$, $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}(z_i)$ unter stereographischen Projektion im \mathbb{R}^3 .“

$$\chi(z_1, z_2) = |\mathbf{w}(z_1) - \mathbf{w}(z_2)|$$

Def: Metrik

(Topologie, Stetigkeit, Limes)

Abstandsfunktion: $d(\cdot, \cdot)$ auf Menge $M : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$

- (a) $d(z_1, z_2) \geq 0 \quad \forall z_i \in M$ (\mathbb{C}) sowie $d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$
- (b) $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2) \quad \forall z_i \in M$

Beispiele:

- (i) $\mathbb{C} : d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$
- (ii) $\overline{\mathbb{C}} : \chi(z_1, z_2)$ abgeleitet von Abstandsfunktion im \mathbb{R}^3 $d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sqrt{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2}$

Def: Metrischer Raum

Metrischer Raum = Menge + Metrik

1.1.1 Polarform und komplexe Wurzeln

- a) Formel von Moivre (\rightarrow Übungen)

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$$

- b) Die n -te Wurzeln $\xi_n, \xi_n^2, \xi_n^3, \dots, \xi_n^n$ mit

$$\xi_n = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\xi_n^n = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^n = \cos\left(\frac{2\pi n}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi n}{n}\right) = 1$$

$$\begin{aligned} (\xi_n^k)^n &= \xi_n^{kn} = \cos\left(\frac{2\pi kn}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi kn}{n}\right) \\ &= 1 + i0 = 1 \end{aligned}$$

Wurzeln lösen $z^k = 1$

Für $n = 2$ und $z^2 = 1$ gibt es die Lösungen $z = \pm 1$

$$\xi_2^0 \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) = (-1)$$

$$\xi_2^2 = 1$$

c) Verallgemeinerung $z^n = a \Rightarrow \sqrt[n]{a}$

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[n]{|a|} \left(\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n}\right) \right) \xi_k^k & \alpha = \arg(a), k = 0, \dots, n-1 \\ z_k^n &= \left(\sqrt[n]{|a|} \right)^n \left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} \cdot n\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} \cdot n\right) \right) (\xi_k^n)^n \\ &= |a| (\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot 1 = a \end{aligned}$$

Nützliche begriffe

Kreisscheiben: $K_R(z_0) = \{z_0 \in \mathbb{C}, R \in \mathbb{R}^+ : |z - z_0| < R\}$

Kreislinie: $C_R(z_0) = \{z_0 \in \mathbb{C}, R \in \mathbb{R}^+ : |z - z_0| = R\}$

1.2 Folgen und Reihen

Motivation: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$ mit $a_n \in \mathbb{C}$

Partialsummen, Folge der Partialsummen (s_0, s_1, \dots, s_m)

$$s_m = \sum_{n=0}^m a_n$$

Konvergenz der unendlichen Reihe \Leftrightarrow Konvergenz der Folge ihrer Partialsummen $(s_n)_{n=1, \infty}$

Def: Folge

Eine Folge ist eine geordnete Menge von Zahlen (a_1, a_2, \dots) , die Zuordnung von $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ oder $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ darstellt.

Def: Konvergenz einer Folge

Eine Folge konvergiert gegen den Grenzwert a , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ einen Index $N(\varepsilon)$ gibt, so dass $\forall n \geq N(\varepsilon), n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$

Satz: Konvergenzkriterium von Cauchy

Eine Folge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ gibt, so dass $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$ für $n, m \geq N(\varepsilon)$

Satz: Rechenregeln zu Limite

$(z_n), (w_n)$ seien Folgen, die in \mathbb{C} konvergieren, dann konvergieren auch die Folgen: $(z_n + w_n)$, $(z_n \cdot w_n)$ und (z_n/w_n) hier muss $w_n \neq 0$ geordert werden.

Schreibweise:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = z, \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n + \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = z + w$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot w_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} w_n \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n/w_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \right) / \left(\lim_{n \rightarrow \infty} w_n \right)$$

Def: unendliche Reihen

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ ist definiert als Grenzwert der Folge $(s_n)_{n=0, \infty}$ der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad .$$

Def: Absolute Konvergenz

$$\left(\sum a_n \rightarrow \sum |a_n| \stackrel{?}{=} \text{konvergenz} \quad ? \quad (|a_n| \in \mathbb{R}^+) \right)$$

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Satz: Jede absolut konvergente Reihe konvergiert

Beweis:

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= \left| \sum_{\substack{k=n+1 \\ n < m}}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| \quad \leftarrow \text{Differenz von Partialsummen von } \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \\ &= |\hat{s}_m - \hat{s}_n| \quad \leftarrow \text{Partialsummen von } \uparrow \end{aligned}$$

$$\hat{s}_n = \sum_{k=0}^n |a_k|$$

absolute Konvergenz: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$ sodass $|\hat{s}_m - \hat{s}_n| < \varepsilon$ für $m, n \geq n_0$.

\Rightarrow Konvergenz von $\sum_{k=n+1}^m a_k$ ★hier fehlt was★

Bemerkung

Nicht jede konvergente Reihe ist absolut konvergent. Zum Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{divergiert,} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{konvergiert}$$

$$s_{2n} - s_m = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2m}}_m > \underbrace{\frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \dots + \frac{1}{2m}}_m = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$$

→ Cauchy Kriterium nicht erfüllt.

Satz: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert (absolut)

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \Re(a_n) \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \Im(a_n) \quad \text{konvergieren (absolut)}$$

Dabei gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \Re(a_n) + i \sum_{n=0}^{\infty} \Im(a_n)$$

Beweis:

Konvergenz: Aussage über Folge $s_n, \Re(s_n), \Im(s_n)$

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad , \quad \hat{s}_n^{\Re} = \sum_{k=0}^n \Re(a_k) = \Re\left(\sum_{k=0}^n a_k\right) = \Re(s_n)$$

außerdem gilt auch:

$$\hat{s}_n^{\Im} = \Im(s_n)$$

a) $|s_n - s_m| < \varepsilon$ für $m, n \geq n_0$

$$\varepsilon > |s_n - s_m| = |\Re(s_n - s_m) + i\Im(s_n - s_m)| \geq |\Re(s_m) - \Re(s_n)|$$

Hierbei sind $\Re(s_m)$ Partialsummen von $\sum_{n=0}^{\infty} \Re(a_n)$

⇒ Konvergenz analog für $\sum \Im(a_n)$

b) $|s_n - s_m| = |\Re(s_n - s_m) + i\Im(s_n - s_m)| \leq \underbrace{|\Re(s_n - s_m)|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{|\Im(s_n - s_m)|}_{< \varepsilon/2} < \varepsilon \quad \text{für } m, n > n_0$

(neue Vorlesung aber anscheinend selbe Aufzählung)

a) Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent: ε, n_0 , sodass $|s_n - s_m| < \varepsilon$ für $n, m > n_0$

$$\varepsilon > |s_n - s_m| \underset{m > m'}{\geq} \left| \sum_{k=m'-1}^m |a_k| \right| \geq \left| \sum_{k=m'-1}^m \Re(a_k) \right| = |s_m^{\text{Re,abs}} - s_n^{\text{Re,abs}}|$$

da gilt: $|a_k| \geq |\Re(a_k)|$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |\Re(a_k)| \quad \text{konvergent} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\Re(a_k)| \quad \text{absolut konvergent}$$

b) Sind $\sum |\Re(a_k)|$ und $\sum |\Im(a_k)|$ konvergent, so folgt $\Rightarrow \sum |a_k|$ ist ebenfalls konvergent.

$$\frac{\varepsilon}{2} > \left| \sum_{k=m'-1}^m |\Re(a_k)| \right| \quad \text{mit } m, m' > n$$

Analog für: $\sum_{k=m'-1}^m \Im(a_k)$ für $\frac{\varepsilon}{2}$ und $\hat{m}, \hat{m}' \geq \tilde{n}$

$$\hat{n} = \max(n, \tilde{n})$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} &> \left| \sum_{k=m'+1}^m \Re(a_k) \right| + \left| \sum_{k=m'+1}^m \Im(a_k) \right| \quad \text{für } m > m' \text{ und } m, m' > \hat{n} \\ &> \left| \sum_{k=m'+1}^m \Re(a_k) + \Im(a_k) \right| \geq \left| \sum_{k=m'+1}^m |a_k| \right| \Rightarrow \text{Konvergenz von } \sum |a_k| \end{aligned}$$

Satz: Majoranten-/Minorantenkriterium

Die Motivation bei diesem Konvergenzkriterium ist der **Vergleich von Reihen**.

Sei (b_k) eine reelle, positive Folge:

a) gilt $|a_k| \leq b_k \quad \forall k > n_0$ und ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ ist konvergent}$$

★hier fehlt eine Grafik★

b) ist $|a_k| \geq b_k \quad \forall k > n_0$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ ist divergent} \sim \text{nicht absolut konvergent}$$

Satz: Quotientenkriterium

Geometrische Reihe + Majoranten-/Minorantenkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n \quad (\text{endlich viele } a_k = 0)$$

a) Gibt es ein reelles $q < 1$ und $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \quad \forall k > n,$$

dann konvergiert die Reihe absolut.

b) Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \quad \forall m > n,$$

dann divergiert die Reihe

Beispiel:

a)

$$\begin{aligned} |a_{k+1}| &= \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \left| \frac{a_k}{a_{k-1}} \right| \dots \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| |a_n| \\ &\leq q \cdot q \cdot \dots \cdot |a_n| \\ &= \underbrace{q^{k-n} \cdot |a_n|}_{b_{k+1}} \end{aligned}$$

$$|a_n| \sum_{k=0}^{\infty} q^k \stackrel{*}{=} \frac{|a_k|}{1-q} \quad \text{ist konvergent}$$

*: für $0 \leq q < 1$

b)

$$|a_{k+1}| = \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| \left| \frac{a_m}{a_{m-1}} \right| \dots |a_n| \geq |a_n|$$

\Rightarrow alle $|a_m|$ keine Nullfolge

\Rightarrow Reihe $\sum |a_m|$ nicht konvergent

Satz: Rechnen mit Reihen

Seien $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $B = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente, komplexe Reihen.

a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ konvergiert auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha A + \beta B$$

b) Falls $\sum a_k$ absolut konvergiert, so ist auch das „Cauchy Produkt“ konvergent mit:

$$AB = \sum_{k=0}^{\infty} a_n \quad a_n = \sum_{m=0}^n (a_m b_m)$$

generell gilt für Produkte von endlichen Summen:

$$\sum_{k=0}^{m_1} a_k \times \sum_{k=0}^{m_2} b_k$$

Dieses Produkt ergibt eine Matrix mit den Einträgen:

$$\begin{pmatrix} a_0 b_0 & \dots & a_0 b_{m_2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m_1} b_0 & \dots & a_{m_1} b_{m_2} \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Einträge können bei endlichen Summen in beliebiger Reihenfolge aufsummiert werden. Bei unendlichen Summen geht man hier vor wie bei der Aufzählung der Rationalen Zahlen in Cantors erstem Diagonalbeweis (also immer die Summe von diagonalen angefangen oben bei $a_0 b_0$). \Rightarrow Beweis siehe Übung

1.3 Elementare Funktionen

Motivation: Reihen \sim Approximation, Potenzreihen, Polynome, rationale Funktionen \sim natürliche Erweiterung reeller Funktionen ins Komplexe.

Def: Reihen im komplexen

$$\begin{aligned}\exp(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} & (\exp(z) \sim e^z) \\ \cos(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \\ \sin(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\end{aligned}$$

Satz:

Die Reihen $\exp(z)$, $\cos(z)$ und $\sin(z)$ konvergieren auf \mathbb{C} und erfüllen die Relationen:

$$\begin{aligned}\exp(iz) &= \cos(z) + i \sin(z) & \forall z \in \mathbb{C} \\ \exp(z_1 + z_2) &= \exp(z_1) \cdot \exp(z_2) & \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

Beweis

a) Konvergenz:

$$(i) \quad z = 0 \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 1$$

(ii) $z \neq 0$
mit ii) Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \left| \frac{z^{m+1}}{(m+1)!} \frac{m!}{z^m} \right| = \left| \frac{z}{m+1} \right| \leq q < 1 \quad \text{für } m > |z|$$

\Rightarrow Kriterium erfüllt für $m \geq n_0$ (es muss gelten $n_0 \geq |z|$)

Ähnliches Vorgehen für $\cos(z)$ und $\sin(z)$

b) Relationen

i)

$$\cos(z) = \sum_{\substack{k=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} (i)^n \frac{z^k}{k!}$$

$$(i)^n = (i)^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$$

$$\begin{aligned}i \sin(z) &= i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (i)^{2k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{(iz)^m}{m!}\end{aligned}$$

$$\cos(z) + i \sin(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iz)^m}{m!} = \exp(iz)$$

ii)

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$$

→ Skriptum

weitere Relationen

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$$

Beweis:

$$\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(z - z) = \exp(0) = 1$$

$$\rightarrow \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$$

weitere Relationen:

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x) \cdot \exp(iy) = \exp(x) \cdot (\cos(y) + i \sin(y))$$

für $z = x + iy$

$$\cos(-z) = \cos(z)$$

$$\sin(-z) = -\sin(z)$$

$$1 = \cos^2(z) + \sin^2(z) = \exp(iz) \cdot \exp(-iz) = [\cos(z) + i \sin(z)] + [\cos(z) - i \sin(z)]$$

1.4 Topologie

Motivation: Komplexe Zahlenebene, Kugeloberfläche, Doughnut oder Torus, usw. und Erweiterungen von \mathbb{C} .

a) Topologie → offene Menge → **Stetigkeit**

b) 1-dimensionale Integrale in Teilen von \mathbb{C}

★hier fehlt eine Grafik★

„Äquivalenz“ von Kurven, Besonderheit geschlossener Kurven, das auslassen gewisser Bereiche in der komplexen Zahlenebene zur Lösung von Integralen.