Experimentelle Methoden

Vorlesung von Prof. Dr. apl. Horst Fischer im Sommersemester 2019

Markus Österle   Damian Lanzenstiel

24. Juni 2019

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einführung

0.1 Wichtige Infos

Vorlesung Montag 14:15 - 15:45

Übungen ILIAS

Kontakt Horst Fischer Physikhochhaus Zi. 609
⋆hier fehlt was⋆ (email usw. Folie 1)

0.2 Programm der Vorlesung

- Grundlagen moderner Nachweissysteme
- Grundlagen der Statistik und Unsicherheitsbetrachtungen
- Grundlagen der Analogelektronik

Kapitel 1

Wechselwirkung geladener Teilchen mit Materie

Nachweis durch Wirkung des Teilchens auf die Materie

- Ionisation, Szintillation
- Čevenkov-, Übergangsstrahlung
- Rückstoß

⇒ Teilcheneigenschaften verändert

- Energieverlust
- Richtungsänderung
- Identitätsverlust

1.1 Klassische Betrachtung der Rutherfordstreuung

- stimmt mit QM in niederster Ordnung überein
  solange: „schwere Teilchen“
  $v \gg v_{e \text{ in Hülle}}$
  $\Delta E \gg$ Bindungsenergie von e^-

  ⋆hier fehlt eine Grafik⋆
  Typisches Beispiel:

$$\mu^+ + \text{Atom} \to \mu^+ + (\text{Atom} + e^-)$$

Coulomb-Kraft

$$F_\parallel(x) = F_\parallel(-x)$$

$$F_\perp = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z \cdot e \cdot Z \cdot e}{r^2} \frac{b}{|\boldsymbol{r}|}$$

Impulsübertrag

$$\Delta\rho_T = \int_{-\infty}^{\infty} F_\perp \mathrm{d}f = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2Z \cdot z}{\beta c b}$$

$\beta = \frac{v}{c}$ Mehr zum Thema und die genaue Rechnung findet man im Lehrbuch von Jackson.
Energieübertrag
[Folie: Energieverlust: klassisch nach Bohr]

$$\Delta E = \frac{\Delta \rho_T^2}{2M} = \frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \cdot \frac{Z^2 z^2}{M\beta^2 c^2 b^2} \propto \frac{1}{b^2}$$

bei Kohärenter Streuung

$$\frac{\Delta E \text{ Elektronenhülle}}{\Delta E \text{ Kern}} = \frac{2m_p}{m_e} \approx 4000$$

Hülle: $M = Z \cdot m_e$
Kern: $M = A \cdot m_p = 2Z \cdot m_p$

$\Rightarrow$ Die Streuung am Kern ist vernachlässigbar

Der gesamte (mittlere) Energieverlust ist dann:

$$\langle \mathrm{d}E \rangle = \int \Delta E \cdot \underbrace{2\pi b \, \mathrm{d}b}_{\text{Volumenelement}} \cdot Z \cdot \underbrace{\frac{\rho \cdot N_A}{A}}_{=n_e} \mathrm{d}x$$

Bethe-Bloch Beziehung

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} \right\rangle = D \cdot \underbrace{\frac{Z \cdot \rho}{A}}_{\text{Medium}} \cdot \underbrace{\left(\frac{z}{\beta}\right)^2}_{\text{Projektil}} \cdot \underbrace{\ln\left(\frac{b_{\text{max}}}{b_{\text{min}}}\right)}_{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2m_e c^2 \gamma^2 \beta^2}{I} T_{\text{max}}\right)}$$

$$= D \cdot \underbrace{\frac{Z \cdot \rho}{A}}_{\text{Medium}} \cdot \underbrace{\left(\frac{z}{\beta}\right)^2}_{\text{Projektil}} \cdot \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2m_e c^2 \gamma^2 \beta^2}{I} T_{\text{max}}\right)$$

mit $I = \hbar\omega$: Ionisationspotential des Streuzentrums
und T_{max}: der Energie des e^- tragen kann

[Folie: Energieverlust]
[Folie: Mittlerer Energieverlust nach Bethe Bloch]
[Folie: Relativistischer Anstieg]
[Folie: Materialabhängigkeit des mittleren Energieverlusts]
[Folie: Minimaler Energieverlust]
[Folie: Abhängigkeit vom Ionisationspotential]
[Folie: Reichweite von Teilchen in Materie]
[Folie: Bragg-Kurve](Einstrahl-Tiefe in einen Menschen)
[Folie: Anwendung Teilchenidentifizierung]
[Folie: Energieverlust von Teilchen durch Ionisation]

1.2 Energieverlust von Elektronen e^- und Positronen e^+

Bremsstrahlung führt zu zusätzlichem Energieverlust.

$$E_K \approx \frac{600 \ldots 700}{Z} \text{MeV} \qquad \textbf{kritische Energie}$$

Z des Materials. Unterschiede zwischen fest, flüssig, gasförmig.

Material	E_K
Luft:	84,0 MeV
Pb:	7,4 MeV

$$\left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right|_{\text{Brems}} \propto \frac{Z^2}{m^2} \quad \begin{array}{l}\text{Target}\\ \text{Projektil}\end{array}$$

Bremsstrahlung wichtig für $e^{\pm}$

$$\frac{m_\mu^2}{m_e^2}\left(\frac{100}{0{,}5}\right)^2 = 40000$$

(Eigentlich 105 statt 100)

Bremsstrahlung führt zu

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = E_e \cdot 4\alpha r_e^2 N_A \frac{\rho Z}{A}\left\{\ln\frac{183}{Z^{1/3}} + \frac{1}{18} - f(z)\right\}$$
$$f(z) = \alpha Z\left\{\frac{1}{1+\alpha^2 Z^2} + 0.2 + \mathcal{O}(\alpha Z^2)\right\}$$

α: gemessene Konstante $\alpha = 5{,}3$ für H $\big|$3 Pb

1.2.1 Strahlungslänge

$$\frac{1}{L_{\text{rad}}} = 4\alpha r_e^2 N_A \frac{\rho Z}{A}\left\{\ln\frac{183}{Z^{1/3}} + \frac{1}{18} - f(z)\right\} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{1}{E_e}$$

(Die Formale stammt von Bether Heitler).
Die Strahlungslänge ist die Distanz, in der die $e^{\pm}$ den Bruchteil $(1 - 1/e)$ der Energie durch Bremsstrahlung verlieren.

$$\left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right|_{\text{Brems}} = \frac{E_e}{L_{\text{rad}}}$$

Kapitel 2

Wechselwirkungen von Quanten / Photonen

2.1 Photoeffekt

Photoeffekt = Absorption eines Protons ist gebunden an Hüllenelektron

$$\gamma e^- A \to e^- A^+$$

⋆hier fehlt eine Grafik⋆

Wichtig $E_\gamma \overset{<}{\approx} E_{\text{bindung}} \approx \mathcal{O}(100\,\text{keV})$. 10% der WW an e^- der inneren Schalen.

$$\sigma_{\text{tot}} \propto Z^5 \cdot \left(\frac{m_e c}{E_\gamma}\right)^{-7/2}$$

Wichtig: $\sigma_{\text{Photoeffekt}}$ ist pro Atom

2.2 Compton Streuung

[Folie: Wechselwirkung von Photonen mit Materie]

Streuung an quasi-freien e^-:

⋆hier fehlt eine Grafik⋆

Energie & Impulserhaltung

$$E_{\gamma'} = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)}$$

$$\lambda'_{\gamma'} = \lambda_\gamma + \lambda_C (1 - \cos\theta)$$

Compton Wellenlänge

$$\lambda_C \leq \frac{\hbar}{m_e c^2} = \frac{r_e}{\alpha_{\text{em}}} = 39 \cdot 10^{-13\,\text{m}}$$

Wichtig:

$$E_{\gamma'}^{\text{max}}(\theta = 0) = E_\gamma$$

$$E_{\gamma'}^{\text{min}} = \frac{E_\gamma}{1 + 2\frac{E_\gamma}{m_e c^2}}$$

Wegen der Impulserhaltung gilt:

$$\theta_e^{\text{max}} \leq \frac{\pi}{2}$$

Wirkungsquerschnitt (aus der Quantenelektrodynamik (QED))

$$\sigma_{\text{Compton}} \propto \frac{1}{E_\gamma} \cdot \ln \frac{2E_\gamma}{m_e c^2}$$

Erzeugung hochenergetischer Photonen durch inverse Compton-Streuung.

2.3 Paarbildung

Paarbildung ist nur möglich in der Nähe eines Kerns (wegen Energie- und Impulserhaltung).

2.3.1 Schwellen

$$E_\gamma > 2m_e \approx 1{,}02\,\text{MeV} \quad \text{im Kernfeld}$$

$$E_\gamma > 4m_e \approx 2{,}04\,\text{MeV} \quad \text{im Elektronenfeld}$$

$$\gamma + A \to e^- e^+ (A)$$

⋆hier fehlt eine Grafik⋆

$$\gamma + e^- \to e^- e^+ e^-$$

(Indent-Reaktion)
⋆hier fehlt eine Grafik⋆

$$\sigma_{\text{Paar}} \propto \ln 183 Z^{-1/3} \propto \frac{1}{L_{\text{rad}}}$$

Insgesamt erhalten wir also für den Photoeffekt, die Compton-Streuung und die Paarbildung zusammen:

$$\sigma_{\text{tot}} \propto \sigma_{\text{Photo}} + \sigma_{\text{Compton}} + \sigma_{\text{Paar}}$$

$$\sigma_\gamma \propto c_1 Z^5 E^{7/2} + c_2 Z \frac{1}{E} \ln E + c_3 Z^2$$

Minimum bei $\mathcal{O}(10\,\text{MeV})$
⇒ große Reichweite !

Kapitel 3

Detektoren für die Orts- und Zeitmessung

Programm Heute:

- Ionisationsdetektoren
- Szintillation
- Photomultiplier (PM)

„Rekation“ im Material auf elektrische geladenes Teilchen oder Quanten

$$\text{Ionisation durch Projektil} \begin{array}{l} \nearrow \quad \text{freie Ladungsträger} \quad \rightarrow \quad \text{Nachweis } e^- \text{ / Ionen} \\ \searrow \quad \text{Szintillation / Fluoreszens} \quad \rightarrow \quad \text{Nachweis Licht} \end{array}$$

3.1 Ionisationsdetektoren

- mit flüssigem oder gasförmigen Edelgas + Beimischungen als „Quentscher“
- Halbleiter

$$\text{beide messen} \begin{array}{l} \nearrow \quad \begin{array}{c}\text{nur primär erzeugte } e^- \\ \text{(Halbleiter, Ionisationskammer)}\end{array} \\ \searrow \quad \begin{array}{c}\text{primäre } e^- + \text{Influenz von driftenden Ionen} \\ \text{(Prop Zähler)}\end{array} \end{array}$$

⋆hier fehlt eine Grafik⋆ Strohalmdetektor

Elektrisches Feld aus statischen Maxwellgleichungen:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\int_S \boldsymbol{E} \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V$$

auf Drahtlänge Δz befindet sich die Ladung ΔQ

$$E(r) \cdot 2\pi r \Delta z = \frac{1}{\varepsilon_0}\Delta Q$$

$$\Rightarrow \quad E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}z}$$

Das $\boldsymbol{E}$-Feld wird durch angelegte Spannung erzeugt. Aus der Abbildung oben folgt dann:

$$\int_{r_i}^{r_a} E(r)\mathrm{d}r = U = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}z}$$

$$E(r_0) = \frac{U}{r_0 \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}$$

[Folie: Arbeitsbereiche von Gasionisationsdetektoren]
[Folie: Funktionsprinzip Gasionisationsdetektoren]
Ionisationszähler →Dosimetrie / Dosimeter
Proportionalitätsbereich → Teilchennachweis (Ort und Zeit)
Geiger Müller Zähler ist selbst verstärkend → keine extra Geräte notwendig

Elektronen & Ionen, die im Abstand r_0 erzeugt werden driften zur Anode/Kathode.
z:.B.

$$\Delta t^- = \int_{r_i}^{r_a} \frac{\mathrm{d}r}{\theta_0^-} = \int_{r_i}^{r_a} \frac{\mathrm{d}r}{\mu^- \cdot E} = \frac{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}{2\mu^- E}$$

[Folie: Eigenschaften von Edelgasen]
[Folie: Vieldrahtproportional- und Driftkammern]
[Folie: MICROMEGAS]
[Folie: GEM / THGEM]

3.2 Halbleiterzähler

Kristallines Si & Ge. Ideoal für $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$ hochauflösende Ortsmessung

3.2.1 Funktionsprinzip:

- Diode in Sperrrichtung
- ionisierende Strahlung erzeugt e^-/Loch Paare
- äußere Betriebsspannung saugt e^-/Löcher ab

Vorteile:

a) $\langle E\rangle$ zur Erzeugung eines e^-/Loch Paars $\langle E\rangle_{\mathrm{Si}} = 3{,}6\,\mathrm{eV}$ und $\langle E\rangle_{\mathrm{Ge}} = 2{,}8\,\mathrm{eV}$.
Zum Vergleich $\langle E\rangle_{\mathrm{Gas}} \approx 10.40\,\mathrm{eV}$ und $\langle E\rangle_{\mathrm{Szint}} = 100\,\mathrm{eV}$-$1\,\mathrm{keV}$

b) hohe spezifische Dichte $\Rightarrow \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$ groß

c) sehr schnelle ⋆hier fehlt was⋆

d) kompakte ⋆hier fehlt was⋆

3.2.2 Grundlagen

Festkörper:

⋆hier fehlt eine Grafik⋆

Direkte Rekombination $\mathcal{O}(s)$ weil e^- & Loch Energie- und Impulserhaltung.
[Folie: Funktionsprinzip (Halbleiter)]
[Folie: Funktionsprinzip: Streifenzähler]
[Folie: Ultrasonic Bonding]
[Folie: ATLAS Silizium Spurdetektor]
[Folie: Silizium Detektoren als Spur Detektor (CMS: Currently the Most Silicon)]
[Folie: Halbleiter-Pixelzähler]
[Folie: Zukunft: 3D-Technologie]

3.3 Szintillationsdetektor

$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} \to$ Anregung der Atome/Moleküle $\to$ Lichtemission $\propto \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$.
Wichtig dabei ist die Transparenz des Detektors für das erzeugte Licht. Vorteilhaft ist deswegen, wenn die Spektralemission im sichtbaren Bereich ist.

Typen:

- organische Kristalle, Flüssigkeiten oder Plastik
- anorganische Kristalle
- flüssige, gasförmige Edelgase

3.3.1 Funktionsprinzip

a) Anorganisch

- Dotieren mit Farbzentren (Aktivatorzentren) (Leerstellen im Gitter)
- Ionisation führt zu freien e^-
- $\Rightarrow$ Rekombination in Aktivatorzentren $\to$ Anregung selbige $\to$ Übergang in Grundzustand unter ⋆hier fehlt was⋆ $\}\,\mathcal{O}(\mu s)$

b) Organisch

- Ionisation & Anregung von Molekülen
- $\to$ emittiert beim Zerfall UV- Licht + Wellenlängenverschiebung $\Rightarrow$ sichtbares Licht

[Folie: Szintillatoren]
[Folie: Einsatzprinzip]
[Folie: Emission]
[Folie: Organische Szintillatoren - Licht Absorption]

3.4 Photomultiplier

[Folie: Photomultiplier]
[Folie: Quanteneffizienz]
[Folie: PMT und Szintillator Handhabung]

Kapitel 4

Teilchenidentifikation

Programm Heute

- Cherenkov Strahlung
- Übergangsstrahlung
- Energiemessung
- Elektromagnetische Kalorimeter
- Hadronische Kalorimeter

4.1 Čherenkov Strahlung

⋆hier fehlt eine Grafik⋆

Čherenkov Strahlung wird emittert wenn $v > v_{\text{Phase}}$ (Medium) also bei $\beta > \frac{1}{n_{\text{Medium}}}$.

Der Abstrahlwinkel ist:

$$\cos\theta = \frac{1}{\beta \cdot n} = \frac{v_{\text{Phase(Medium)}}}{v_{\text{Teilchen}}} \Rightarrow \frac{c}{n} \cdot \frac{1}{v_{\text{Teilchen}}}$$

mit n dem Brechungsindex im Medium.

Der maximale Abstrahlwinkel ∢:

$$\Theta^{\max} = \arccos\frac{1}{n}$$

Schwellenenergie E_s ab der Čherenkov Strahlung auftritt

$$\gamma_s = \frac{E_s}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_s^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}$$

[Folie: Leuchten eines Kernreaktors]
[Folie: Čherenkov Effekt]

Anzahl emittierter Photonen

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} = 2\pi\alpha Z^2 \left(1 - \frac{1}{(p_n)^2}\right)\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2} \approx 2\pi\alpha Z^2 \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2}\sin^2\theta$$

$n = n(\lambda)$
für $[400\,\text{nm}, 700\,\text{nm}]$ $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} \approx$ ⋆hier fehlt was⋆

$$\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\check{\text{C}}} \approx 10^{-2}\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x'}\right)_{\text{Ionis}}$$

als Radiator: alle transparente Stoffe: NaCl, Diamant, Bleiglas, H_2O.

[Folie: Črenenkov Winkel vs. Teilchengeschwinkdigkeit]
[Folie: Photonenausbeute]
[Folie: Verschiedene Typen]

4.2 Übergangsstrahlung

⋆hier fehlt eine Grafik⋆

Teilchen + Spiegelladung ⇒ veränderlicher Dipol ⇔ Übergangsstrahlung

⋆hier fehlt was⋆

Abstrahlungscharakteristik

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega} = \frac{h\alpha}{\pi^2}\beta^2 \cdot f(\theta)$$

ω : Plasmafrequenz

a) nicht relativistischer Fall $f(\theta) = \sin^2\theta$

b) relativistischer Fall $f(\theta) = \frac{\sin^2\theta}{1-\beta\cos^2\theta}$

c) $v = \frac{E}{m} \gg 1000$ u.s. Bereich der Röntgenstrahlung

Polarisationsebene definiert durch

- bewegte Ladung
- Abstrahlrichtung des Photonen

Bsp e^- mit $E = 15\,\text{GeV}$, $\gamma_e = 30000$, $\gamma_\pi = 110$

Wahrscheinlichster Abstrahlwinkel:

$$\theta \approx \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{\omega_p}{\omega}} \approx \frac{1}{\gamma}$$

⇒ **Kein Grenzwinkel!** verstärkung des Effekts durch mehrfache Übergänge zwischen Medien.

[Folie: Winkelverteilung Übergangsstrahlungsstrahlung]
[Folie: Übergangsstrahlungsdetektoren]

4.3 Kalorimeter

Aufgabe: Messung der Gesamtenergie in Abhängigkeit von der Bauweise

- homogene Schauerzähler/Kalorimeter
- sampling Schauerzähler/Kalorimeter (Stichprobenmessung) → Einfluss auf die Auflösung bei der Energiemessung

a) Elektron-Photon Schauer
Einfache Abschätzung

$$N_{e^\pm,\gamma} \approx 2^t \qquad E(t) \approx \frac{E_0}{2^t}$$

t : konstante Zeit / Eindringtiefe Schnitte
$x_0 = \frac{1}{C_{\text{RAD}}}$ Strahlungslänge

- Elektronen: $1 - \frac{1}{e} \approx 63\%$ der Energie wird durch Abstrahlung in Photonen abgegeben

- Photonen $1 - \frac{1}{e^{7/9}} \approx 54\%$ Intensität geht durch e^+, e^- Paarbildung verloren

$t_{\text{max}} = \frac{\ln E_0/E_{\text{Krit}}}{\ln 2} \approx 10{,}5 X_0$
$N_{\text{max}} = \frac{E_0}{E_{\text{Krit}}} \approx 1400$ für $Z = 82$
genau auf $O(x3, \ldots, x5)$ genauer mit EGS GEANT

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \propto t^a e^{-bt}$$

mit $t = \frac{x}{x_0}$ (Anzahl Strahlungslängen)

$\star$hier fehlt was$\star$

[Folie: Bremsstrahlung (Bethe-Heitler)]
[Folie: Naives Schauerbild]
[Folie: Longitudinal und Transverse Schauer Profile]
[Folie: Longitudinale Schauerentwicklung]

Kapitel 5

Statistik und Wahrscheinlichkeiten

Literatur

- S.Brandt „Datenanalyse“
- G.Cowan „Statistical Data Analysis“
- R.Barlow „A Guide to the Use os Statistical Methods in Physical Sciences“
- F.James „Statistical and Computational Methods in Experimental Physics“

[Folie: Einführung: Compass Experiment]
[Folie: Einführung in die Statistik]

5.1 Einführung

2 mögliche Ansätze

a) **Frequentist (Zählmensch) Axiome:**

Ereignismenge:

$$E := \{\dots, A, B\}$$

1)

$$P(A) \geq 0 \quad \forall A \in E$$

2)

$$\sum_{A \in E} P(A) = 1 \quad \Rightarrow \text{ d.h.} \quad \text{P(E)} = 1$$

wenn A_i tatsächlich Ereignisse sind, dann schließen sich A und B gegenseitig aus

3)

$$P(A \wedge B) = P(A) + P(B)$$

nur gültig für den Fall A, B exklusiv

$$\begin{array}{ll} \vee : \text{oder} & \neg : \text{nicht} \\ \wedge : \text{und} & \setminus : \text{ohne} \end{array}$$

$$P(A \wedge \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$$
$$\Rightarrow \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

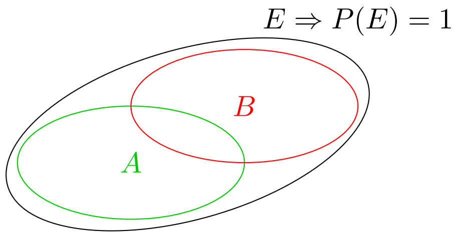

Abbildung 5.1: Gesamtmenge E aller Ereignisse und zwei Ereinisse $A, B \in E$.

$$\begin{aligned}
P(A + B + \dots) &= P(A) + P(B) + \dots \\
P(\overline{A}) &= P(E \setminus A) = 1 - P(A) \\
P(A \vee B) &= P(A) + P(B) - P(A \wedge B) \\
P(A \wedge B) &= P(A) + P(B) - P(A \vee B) \\
(A \wedge B) + P(A \vee B) &= P(A) + P(B)
\end{aligned}$$

b) **Bayes Statistik (bedingte Wahrscheinlichkeit)**

$$P(B|A) = \frac{P(A \wedge B)}{P(A)}$$

Allgemein:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{\sum_i P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

Beispielrechnung:
Es gibt eine Krankheit und 0,1% der Bevölkerung sind erkrankt (Durchsendung). Es gibt einen Test um die Krankheit festzustellen mit einer 98% Effizienz ($\widehat{=}$ Gewissheit) und 3% Fehlalarm ($\widehat{=}$ Reinheit)

Frage: Was ist die Wahrscheinlichkeit erkrankt zu sein bei einem positiven Testergebnis (Befund) $P(\text{krank}|+)$

$$\begin{aligned}
P(\text{krank}) &= 0{,}001 \\
P(\text{gesund}) &= 0{,}999 \\
P(+|\text{krank}) &= 0{,}98 \\
P(-|\text{krank}) &= 0{,}02 \\
\text{Fehlalarm:} \quad P(+|\text{gesund}) &= 0{,}03 \\
P(-|\text{gesund}) &= 0{,}97
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\text{krank}|+) &= \frac{P(+|\text{krang}) \cdot P(\text{krank})}{P(+|\text{krank}) \cdot P(\text{krang}) + P(+|\text{gesund}) \cdot P(\text{gesund})} \\
&= \frac{0{,}98 \cdot 0{,}001}{0{,}98 \cdot 0{,}001 + 0{,}03 \cdot 0{,}0999} = 0{,}032
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, bei einem positiven Testergebnis, krank zu sein ist also nur 3,2%!!!

5.2 Verteilung einer Zufallsvariable

Population Alle möglichen Ereignisse/Messungen

Stichprobenraum Untermenge ausgewählter Stichproben

Zufallsvariable
- diskret
- kontinuierlich

Verteilung einer Zufallsvariable x mit $-\infty \leq x \leq +\infty$

Wahrscheinlichkeitsverteilung Beispiel: Würfel $P = \frac{1}{6}$
⋆hier fehlt eine Grafik⋆ Wkeit.vert. Würfel

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\max(x)} x p_i$$

monoton. $\max(x) =$ ist der größte Wert für x.

Wahrscheinlichkeitsdichte von x

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = F'(x)$$

ist das Maß für die Wahrscheinlichkeit X eines Ereignisses X

$$x \leq X \leq x + \mathrm{d}x$$

⋆hier fehlt eine Grafik⋆ ⋆hier fehlt eine Grafik⋆
[Folie: Histogrammdarstellung]

5.2.1 Diskussion der Verteilungsfunktion

a) falls die Wahrscheinlichkeitsdichte differenzierbar ist
⇒ **Wahrscheinlichster Wert**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x) < 0$$

b) **Median** $x_{0.5}$ (50% der Werte kleiner, 50% der WErte größer)
oder auch: Verteilungsfunktion hat den Wert; $\frac{1}{2}$

$$F(0.5) = P(X < x_{0.5})$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{x_{0.5}} f(x) \mathrm{d}x \stackrel{!}{=} 0.5$$

analog geht man vor für die Momente der Verteilung:

$$E(x^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) \mathrm{d}x$$

hängt ab von der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung.

Mittelwert (erstes Moment)
$n = 1$

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x$$

Streuung um Mittelwert

$$E(x-\mu)^n = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^n f(x)\mathrm{d}x$$

um den Wahren Wert μ.

Varianz
$n = 2$

$$E(x-\mu)^2 = E(x^2) - \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

bei $n = 3$: Schiefe

5.11 Wichtige Verteilungen

Motivation

Experiment + Theorie $\rightarrow$ PDF $f(N, \bar{E}, w)$.

5.11.1 Binomialverteilung

Versuch mit zwei möglichen Ereignissen A und $\bar{A}$ Z.B. Münzwurf. Die Wahrscheinlichkeiten dafür sind jeweils $P(A) = p$ und $P\bar{A} = 1 - p = q$. Bei N Wiederholungen des Versuchs ist die Wahrscheinlichkeit für

$$X = (\underbrace{A, A, A, \ldots, A}_{n}, \underbrace{\bar{A}, \bar{A}, \bar{A}, \ldots, \bar{A}}_{N-n})$$

gleich

$$P(X) = p^n \cdot q^{N-n}$$

Diese Ereignisse können an

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

auftreten.

$$B = f(n, N, p) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$$

mit der Anzahl des Auftretens von A als Laufparameter $n \in \mathbb{N}_0$.

Erwartungswert

$$E(B(N,p)) = \sum_{n=0}^{N} n \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = \cdots = N \cdot p$$

Summenregel für Erwartungswerte

$$E[X_1 + \cdots + X_N] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_N] = NE[X_1] = N \cdot p$$

Varianz

$$V[n] = E[n^2] - E[n]^2 = N \cdot p(1-p) = Npq$$

Beispiel 1: Münzwurf wird übersprungen.

Beispiel 2: 10 Exp Messungen einer Größe

Fehler mit $p = 0{,}683$ liegt der Wahre Wert in dem Intervall $[x, \pm\sigma]$

$$B(10, 10, 0{,}683) = 0{,}683^{10} \approx 0{,}02$$

Man würde also erwarten, dass die Fehler überschätzt wurden.

5.11.2 Poisson Verteilung

Beschreibt im Wesentlichen die Binomialverteilung im Grenzfall für $N \to \infty$ und $p \to 0$. $\Rightarrow$ $N \cdot p = \nu$ endlich.

$$B(n, N, p) \to f(n, \nu) = \frac{\nu^n}{n!} e^{-\nu}$$

Erwartungswert

$$E[n] = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{\nu^n}{n!} \cdot e^{-\nu} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{\nu^n}{n!} \cdot e^{-\nu} = \nu e^{-\nu} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu^{n-1}}{(n-1)!}}_{e^{\nu}} = \nu$$

Varianz

$$V[n] = \sum_{n=0}^{\infty} (n-\nu)^2 \frac{\nu^n}{n!} e^{-\nu} = \nu$$

Standartabweichung $\sigma = \sqrt{\nu}$

Beispiel 3: 50 Szintillatoren 1 Jahr Messen

$$P(A) = 0{,}01 = 1\%$$

Wobei $A \widehat{=}$ Szintillator kaputt nach ≤ 1 Jahr

$$\text{Binomial}: \quad B(0, 50, 0{,}01) = \binom{50}{0} 0{,}01^0 \cdot 0{,}93^{50} = 0{,}067$$

$$\text{Poisson}: \quad f(0, 0{,}5) = e^{-0{,}5} = 0{,}607$$

$\nu = N \cdot p = 0{,}5$

5.11.3 Gleichverteilung

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Erwartungswert und Varianz:

$$E[x] = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$
$$V[x] = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2$$

5.11.4 Gauß-Verteilung / Normalverteilung

Definition einer Wahrscheinlichkeitsdichte:

1. $f(x) \geq 0 \; \forall x$
2. $f(x)$ muss integrierbar sein.
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{d}x = 1$

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

2 Parameter:

- $\mu =$ Mittelwert
- $\sigma =$ Standartabweichung

Erwartungswert

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x; \mu, \sigma^2) \mathrm{d}x = \cdots = \mu$$

Varianz

$$V[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x; \mu, \sigma^2) = \cdots = \sigma^2$$

$$\text{Verteilungs Dichte (PDF)} \xrightarrow{\text{Integration}} \text{Verteilungsfunktion (CDF)}$$

Oft betrachtet man die Standard Normalverteilung:

$$\mu = 0 \qquad \sigma = 1$$

$$x = \frac{x}{\sigma} - \mu$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}t^2} \mathrm{d}t$$

Verteilungsfunktion der Standard Normalverteilung

Kapitel 7

Stichproben und Schätzwerte

Die **Grundgesamtheit** entspricht allen (unendlich vielen) Werten. Die **Stichprobe** 1 und die Stichprobe 2 sind Teilmengen davon.

Stichprobenvektor $\boldsymbol{X}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ entspricht der Durchführung eines Experiments.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist:

$$f(X) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \cdots \cdot f(x_n)$$

Die Aufgabe ist es dann die Wahrscheinlichkeitsdichte zu beschreiben mit

$$f(X, \theta)$$

mittels einer geeigneten Schätzung.

θ: unbekannter wahrer Parameter
$\hat{\theta}$: Schätzwert von θ (Achtung: ebenfalls Zufallsvariable).

7.0.1 Def: Konsistenz

$$\lim_{n \to \infty} P\left(|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon\right) = 0$$

$\Rightarrow$ d.h. Messung ist sinnvoll. Konsistenz ist Mindestanforderung an guten Schätzwert.
Schätzwert finden: Parameter Anpassen

7.0.2 Def: Bias (Versatz) des Schätzwerts

Erwartungswert für Schätzwert $\hat{\theta}$:

$$E[\hat{\theta}(x)] = \int\int\int \hat{\theta}(x) f(x_1) f(x_2) f(x_3) \cdot \cdots \cdot f(x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

Der Bias ist dann:

$$b = E[\hat{\theta}] - \theta$$

Asymptotische Erwartungstreue bedeutet:

$$\lim_{n \to \infty} b \to 0$$

$\widehat{=}$ **"unbiased"** Messung

7.1 Arithmetisches Mittel

7.1.1 Def:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$\bar{x}$: Stichprobenmittel $\neq$ Erwartungswert $E[X] = \mu$
Gesetz der großen Zahlen $n \to \infty \Rightarrow \bar{x} \to \mu$

$$E[X] = E\left[\frac{1}{n}\sum x_i\right] = \frac{1}{n}\sum \mu_i = \mu$$

d.h. Mittelwert ist ohne Bias.

7.1.2 Def: Varianz der Stichprobe

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2$$

Faktor $\frac{1}{n-1}$ so gewählt, dass $E[s^2] = \sigma^2$

Analog für Wertepaare
Kovarianz

$$\begin{aligned} V_{xy} &= \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ &= \frac{n}{n-1}(\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}) \end{aligned}$$

7.2 Anmerkungen zu Unsicherheit

a) **Statistische Unsicherheit**

- statistische Fluktuationen
- zugrundeliegende Verteilung falsch angenommen
- Messbedingungen identisch?
- Weglassen von Datenpunkten

Beispiel: Messung mit Untergrund:

⋆hier fehlt eine Grafik⋆

gegeben: Messgröße $\bar{x}_s = E[x_s]$

Sei Erwartungswert der Ereignisklasse „Signal“ mit Wahrscheinlichkeitsverteilung $f_s(x)$ und sei nicht trennbar von Untergrund. Der Anteil des Untergrunds ist $\alpha \pm \delta\alpha$.

Lösung: Unterteilen der Signalregion in 5σ weg vom Signal $\to$ 2 Messreihen

1.) Bestimme

$$\bar{x}_n = E[x_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

in Signalfreier Region.
Varianz:

$$\sigma^2(\bar{x}_n) = \frac{\sum x_i^2 - m\bar{x}_n^2}{m(m-1)} = \frac{s_n^2}{m}$$

2.) Bestimme

$$\bar{x}_n = E[x_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

mit Varianz

$$\sigma^2(\bar{x}) = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}_n^2}{n(n-1)} = \frac{s^2}{n}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung in Signalregion:

$$f(x) = (1-\alpha)f_s(x) + \alpha f_u(x)$$

$$E[x] = (1-\alpha)E[x_s] + \alpha E[x_n]$$

$$\bar{x}_s = \frac{1}{1-\alpha}\bar{x} - \frac{1}{1-\alpha}\bar{x}_n \pm d$$

$$d^2 \frac{1}{(1-\alpha)^2}\frac{s^2}{n} + \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2}\frac{s_n}{m} + \left(\frac{\bar{x} - x_u}{(1-\alpha)^2}\right)^2 \delta\alpha^2$$

b) **Systematische Unsicherheiten**

Bsp.: Metermaß falsch skaliert. Messungen werden in gleicher Weise beeinträchtigt
$\Rightarrow$ Messungen untereinander konsistent also falsch. können zu Bias führen.

Unabhängige Systematische Unsicherheiten

$$\sigma_{\text{sys}}^2 = \sigma_{\text{sys1}}^2 + \sigma_{\text{sys2}}^2 + \dots$$

Am besten immer den statistischen und systematischen Fehler (Unsicherheit) getrennt angeben. z.B.:

$$l = (1 \pm 0{,}5(\text{stat}) \pm 0{,}1(\text{syst}))$$

Kapitel 8

Schätzmethoden (Fit)

8.1 Maximum Likelihood

gegeben: Zufallsvariablen $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$
Annahme: Wahrscheinlichkeitsdichte $f : f(x, \theta)$ (= Hypothese)
gesucht: Parameter $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots)$

Bei n wiederholten Messungen von x ist die Wahrscheinlichkeit x_i im Intervall $x_i \pm \mathrm{d}x_i$ zu finden $P(x, \theta)$. Für n Messungen gilt:

$$P(x, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)\mathrm{d}x_i$$

$P(\theta)$:

- groß wenn hypothese & Parameter richtig
- klein, falls H- **oder** P. falsch sind

generelle Likelihood-Funktion

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$$

Suche das Madimum:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta_i} = 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

welches der beste Schätzwert für Parametersatz $\theta : \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$

Im allgemeinen in der Praxis sucht man oft das Minimum der negativen Likelihood:

$$L(\theta) \to -\ln(L(\theta))$$

Logarithmus sorgt dafür, dass das Produkt zu einer Summe wird (stammt auf Effizienzgründen in der Programmierung solcher Algorithmen).

Die Vorteile der Maximum Likelihood Methode:

- Einfache Anwendung
- erfordert kein „binning“ der Messwerte

Die Nachteile:

- Analytische Berechnung der Varianz des für θ (also auf den Schätzer) schwierig

Möglichkeiten die Varianz zu bestimmen:

- grafisch
- Monte Carlo Simulationen
- Rao Cramé-Fressnell Ungleichung

$$V[\theta] \geq \left(1 + \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 \Big/ E\left[-\frac{\mathrm{d}^2 \ln(L)}{\mathrm{d}\theta^2}\right]$$

„=“ Zeichen gilt für effiziente Schätzer (in meisten Fällen angenommen). $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\theta}$ wird meistens „$= 0$“ gesetzt.
d.h. $\sigma = E[\theta] - \theta = 0$

Beispiel: Bestimmung mittlerer Lebensdauer τ für Zerfall eines Kern

a)
$$f(t,\tau) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

mit $\tau = \frac{1}{\lambda}$ und λ der Zerfallskonstante

$$\ln(L(\tau)) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(f(t,\tau)\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\tau} - \frac{t_1}{\tau}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln(L)}{\mathrm{d}\tau} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \hat{\tau} = \frac{1}{n}\sum t_i$$

d.h. M_0, L_0 ist arithmetisches Mittel aller gemessener Werte t_i mit Erwartungswert

$$\begin{aligned} E\left[\hat{\tau}(t_1, t_2, \ldots, t_n)\right] &= \int \cdots \int \hat{\tau}(t_1, t_2, \ldots, t_n) f(t_1, t_2, \ldots, t_n; \tau) \mathrm{d}t_1, \ldots \mathrm{d}t_n \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \tau = \tau \end{aligned}$$

das entspricht dem Erwartungswert ohne Bias.

b) Bestimmung der Zerfallskonstanten

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}a} \cdot \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\theta} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}a} = 0 \quad \text{bei} \quad a = a(\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{\tau}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i}$$

aber Achtung: Erwartungswert:

$$E[\hat{\lambda}] = \lambda \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{1}{\tau}\frac{n}{n-1}$$

biasfrei nur gültig wenn $n \to \infty$

Die Werte einfach logarithmisch aufzutragen und eine Gerade zu fitten hat einige Nachteile gegenüber dieser Methode.

8.2 Methode der kleinsten Quadrate

„Least-squares Function“
gegeben:

- N unabhängig gemessenen Zufallsvariablen
  $y_i \quad i = 1, \ldots, N$
  die jeweils Gauß-Verteilung folgen:
  $\Rightarrow$ Mittelwerte λ_i, Varianzen σ_i^2
- Messwerte hängen von zweiter Variablen x_i ab
- Messwerte sind unabhängig

$$\ln(L(\theta)) = -\frac{1}{2} \sum \frac{(y_i - \lambda(x_i, \theta))^2}{\sigma_i^2}$$

hat Maximum, wenn:

$$\chi^2(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \lambda(x_i, \theta)^2}{\sigma_i^2}$$

im Minimum.
Wir suchen also das Minimum von $\lambda^2(\theta)$.

Bei N-dim Gauß mit Kovarianz V (= Fehlermatrix)

$$\ln(L(\theta)) = \frac{1}{2} \sum (y_i - \lambda(x_i, \theta)) \cdot V^{-1} \cdot y_i - \lambda(x_\theta)$$

Beispiel: Polynomfit

$\theta = a, b, c,\ \lambda = a + bx + cx^2$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \left(y_i - a - bx_i - cx_i^2 \right)^2$$

Ableitung für Minimum Suche

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\chi^2 &= -2 \sum \frac{1}{\sigma_i^2} (y_i - a - bx_i - x_i^2)^2 \stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\chi^2 &= -2 \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} (-\text{''}-) \stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}\chi^2 &= -2 \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} (-\text{''}-) \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

umsortieren (alle $\frac{1}{\sigma_i^2}$ weglassen!) [!!! Das geht nur bei Messungen mit gleicher Varianz!!!]

$$\begin{aligned}
\sum y_i &= a \sum 1 + b \sum x_i + c \sum x_i^2 \\
\sum x_i y_i &= a \sum x_i + b \sum x_i^2 + c \sum x_i^3 \\
\sum x_i^2 y_i &= a \sum x_i^2 + b \sum x_i^3 + c \sum x_i^4
\end{aligned}$$

Die Lösung ist dann

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum 1 & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{vmatrix}$$

und damit erhalten wir:

$$a = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i y_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 y_i & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{vmatrix}$$

$$b = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum 1 & \sum y_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i y_i & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^2 y_i & \sum x_i^4 \end{vmatrix}$$

$$c = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum 1 & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 y_i \end{vmatrix}$$

Allgemeine lineare Funktion:

$$y(x) = a_o + \sum_{j=1}^{n} a_j X_j(x)$$

führt zur Lösung

$$X_j := \frac{\sum \frac{1}{\sigma_i^2} X_j(x_i)}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}} \qquad \overline{y} := \frac{\sum \frac{1}{\sigma_i^2} y_i}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Kovarianzmatrix:

$$S_{jk}^2 = \frac{\frac{1}{n-1} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \left(X_i + \overline{X}_j\right) \left(X_k - \overline{X}_k\right)}{\frac{1}{n} \sum \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Varianz: $s_j^2 = s_{ji}^2$
lineare Korrelations-Koeffizienten

$$r_{jk} = \frac{s_{jk}^2}{s_j s_k}$$

Die Lösung ist dann:

$$a_0 = \overline{y} - \sum a_j \overline{X}_j \quad j \cdot a_j = \frac{s_y}{s_j} \sum r_{ky} r_{ky}^{-1}$$