

Experimentalphysik IV

Atom-, Molekül- und Festkörperphysik

Vorlesung von Prof. Dr. Giuseppe Sansone im Sommersemester 2019

Markus Österle Damian Lanzenstiel

27. Mai 2019

Inhaltsverzeichnis

0	Einführung	2
0.1	Wichtige Infos	2
0.1.1	Programm	2
0.1.2	Übungen	2
0.1.3	Literatur	2
0.2	Leistungen	2
1	Quantenmechanik	3
1.1	Grundlagen	3
1.2	Drehimpulsoperator	7
1.3	Vektormodell	10
1.4	Experimente: Wasserstoffatom Spektrum	11
1.4.1	Spektrometer	15
1.4.2	Energie; Entartung	15
1.4.3	Zeeman Effekt	16
1.4.4	Stern-Gerlach Experiment	17
1.4.5	Spin	17
1.5	Feinstruktur des Wasserstoffatoms	20
1.5.1	Restenergie des Elektrons	20
1.5.2	Darwin Term (Compton Wellenlänge)	21
1.5.3	Normaler Zeeman Effekt	25
1.5.4	Pasch-Bach Effekt	26
1.5.5	Hyperfeinstruktur	26
1.5.6	Lamb Shift	27
1.5.7	Energieniveaus im Wasserstoffatom	28
1.6	Helium	28
1.6.1	Fermionen	29
1.6.2	Spinfunktion	30
1.6.3	Grundzustand	32
1.6.4	Störungstheorie	33
1.6.5	Angeregte Zustände des Heliumatoms	34
1.6.6	Angeregte Zustände	35

Kapitel 0

Einführung

0.1 Wichtige Infos

0.1.1 Programm

- Atomphysik
- Molekülphysik
- Festkörperphysik

0.1.2 Übungen

- Anfang ab dem 06.05. - 10.05.
- Übungsblatt 0 zum Einstieg wird nicht bewertet

0.1.3 Literatur

- Demtröder, Ex 3
- Haken-Wolf, Atom und Quantenphysik
- Christopher J. Foot, Atomic Physics
- Messiah Dover, Quantum Mechanics
- B.H. Bransden, Physics of atoms and molecules

0.2 Leistungen

Studienleistung: 50 % der Punkte aller Übungsblätter (kein Kriterium für die Zulassung zur Prüfung)

Prüfungsleistung: 50 % der Punkte und schriftliche Prüfung.

Termine:

Klausur 25.07.19 12-14 Uhr

Kapitel 1

Quantenmechanik

1.1 Grundlagen

- i) **Wellenfunktion** $\Psi(\mathbf{r})$ mit \mathbf{r} der **Ortsdarstellung**

$$P = \int_V |\Psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \quad \text{Wahrscheinlichkeit} \quad \int_V |\Psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = 1 \quad \text{Normierungsbedingung}$$

- ii) **Operatoren** \hat{O}

$$\hat{O}\Psi(\mathbf{r}) = \Psi'(\mathbf{r})$$

Korrespondenzprinzip

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}} \quad \hat{\mathbf{r}}\Psi(\mathbf{r}) = \Psi'(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\Psi(\mathbf{r}) \quad ; \quad \hat{x}\Psi(x) = x\Psi(x) = \Psi'(x)$$

$$\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}} \quad \hat{\mathbf{p}}\Psi(\mathbf{r}) = \Psi'(\mathbf{r}) = -i\hbar\nabla\Psi(\mathbf{r}) \quad ; \quad \hat{p}_x\Psi(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}\Psi(x) = \Psi'(x)$$

$\hat{\mathcal{H}}$ = Hamiltonian oder Hamilton-Operator. $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}})$

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})$$

- iii) **Zeitabhängige Schrödinger Gleichung**

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathcal{H}}\Psi(\mathbf{r}, t)$$

Die klassische Energie sieht so aus:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

In der QM dann folgendermaßen:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

Die **Zeitunabhängige Schrödinger Gleichung** sieht wie folgt aus:

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r})$$

Diese Gleichung ist eine Eigenwertgleichung. Der Hamilton Operator liefert also den Energie-Eigenwert E und die Eigenzustände $\Psi(\mathbf{r})$.

Stationäre Zustände

Jeder messbaren Physikalische Größe ist ein Operator \hat{O} zugeordnet. Bei einer physikalischen Messung wird der **Erwartungswert** gemessen: $\langle \hat{O} \rangle = \langle \Psi | \hat{O} | \Psi \rangle$.

$$\langle \hat{O} \rangle = \langle \Psi(\mathbf{r}) | \hat{O} | \Psi(\mathbf{r}) \rangle = \int \Psi^*(\mathbf{r}) \underbrace{\hat{O} \Psi(\mathbf{r})}_{\Psi'(\mathbf{r})} d\mathbf{r}$$

$$\langle \hat{O}(t) \rangle = \langle \Psi(\mathbf{r}, t) | \hat{O} | \Psi(\mathbf{r}, t) \rangle = \int \Psi^*(\mathbf{r}, t) \hat{O} \Psi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$$

Diese Gleichung können wir wie folgt umformen:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}, t=0) \underbrace{e^{-iEt/\hbar}}_{\text{Phasenfaktor}}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle &= \int \Psi^*(\mathbf{r}, t=0) \cancel{e^{iEt/\hbar}} \hat{O} \Psi(\mathbf{r}, t=0) \cancel{e^{-iEt/\hbar}} d\mathbf{r} \\ &= \int \Psi^*(\mathbf{r}, t=0) \hat{O} \Psi(\mathbf{r}, t=0) d\mathbf{r} \stackrel{*}{=} \langle \hat{O}(t=0) \rangle \end{aligned}$$

* : wenn \hat{O} nicht Zeitabhängig ist.

Stationäre Zustände

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H} \Psi(\mathbf{r}, t) \quad \text{mit} \quad \Psi(\mathbf{r}, t) e^{-iEt/\hbar} \Psi(\mathbf{r}, t=0)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\Psi} = -i \frac{\hat{H}}{\hbar} dt$$

Lösung der DGL mittels Variablen-Trennung

$$\ln \left[\frac{\Psi(\mathbf{r}, t)}{\Psi(\mathbf{r}, t=0)} \right] = -\frac{i\hat{H}t}{\hbar} \Rightarrow \Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \Psi(\mathbf{r}, t=0)$$

$$\hat{H} \Psi(\mathbf{r}, t=0) = E \Psi(\mathbf{r}, t=0)$$

Taylor Entwicklung:

$$e^x = e^{-i\hat{H}t/\hbar} = a \left(\hat{H} \right)^0 + b \left(\hat{H} \right)^1 + c \left(\hat{H} \right)^2 + \dots$$

$$\begin{aligned} e^{-i\hat{H}t/\hbar} \Psi(\mathbf{r}, t=0) &= a \Psi(\mathbf{r}, t=0) + b \hat{H} \Psi(\mathbf{r}, t=0) + c \hat{H} \cdot \hat{H} \Psi(\mathbf{r}, t=0) + \dots \\ &= a \Psi(\mathbf{r}, t=0) + b E \Psi(\mathbf{r}, t=0) + c E^2 \Psi(\mathbf{r}, t=0) + \dots \\ &= (a + bE + cE^2 + \dots) \cdot \Psi(\mathbf{r}, t=0) \\ &= e^{-iEt/\hbar} \Psi(\mathbf{r}, t=0) \end{aligned}$$

Wir können einen Operator in der e-Funktion schreiben, da diese mit der Taylorentwicklung als Reihe entwickelt werden kann.

iv) **Spin** (Elektronen)

\Rightarrow Wasserstoffatom (Stern-Gerlach)

\Rightarrow Helium (Pauli Prinzip)

v) Quantensysteme

- Freies Teilchen, Potentialstufe (Tunneln)
- Harmonischer Oszillator \Rightarrow Molekülphysik
- Coulomb Potential \Rightarrow Wasserstoffatom

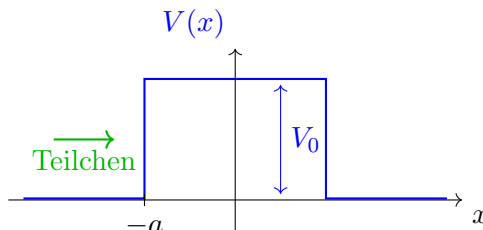


Abbildung 1.1: Darstellung einer Potentialbarriere. Beispiel für den Tunneleffekt eines hindurchfliegenden Teilchens, das eigentlich weniger Energie hat als klassisch nötig wäre um die Barriere zu überwinden. Dieses Bild wurde mit dem L^AT_EX-Paket Tikz erstellt.

vi) Kommutatoren

$$\begin{aligned} \hat{x} : \mathbf{p} &= \mathbf{p}_x & [\hat{x}, \hat{p}] &= \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} \\ \hat{A}; \hat{B} : & & [\hat{A}, \hat{B}] &= \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \end{aligned}$$

Wellenfunktion $\Psi(x)$ $[\hat{x}, \hat{p}] \Psi(x) = \Psi'(x)$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = x \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) - \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) x$$

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{p}] \Psi(x) &= \left\{ x \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) - \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) x \right\} \Psi(x) \\ &= x \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \Psi(x) \right) - \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) x \Psi(x) \\ &= -i\hbar x \frac{d\Psi}{dx} + i\hbar \frac{d}{dx} (x\Psi(x)) \\ &= \cancel{-i\hbar x \frac{d\Psi}{dx}} + \cancel{i\hbar x \frac{d\Psi}{dx}} + i\hbar \Psi(x) \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{=1} \\ &= i\hbar \Psi(x) = \Psi'(x) \end{aligned}$$

$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$

 \Rightarrow die zwei Operatoren vertauschen nicht !!!

Eigenschaft Kommutator

$$\hat{A}; \hat{B}$$

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|$$

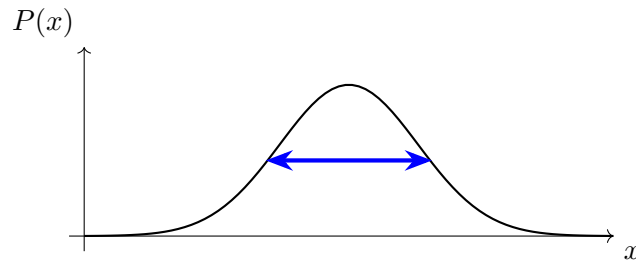


Abbildung 1.2: Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Gaußkurve. Der Pfeil soll die Standardabweichung darstellen. Dieses Bild wurde mit dem L^AT_EX Paket Tikz erstellt.

$[\hat{A}, \hat{B}]$ Operator \Rightarrow

$$\begin{aligned}\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle &= \langle \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \rangle \\ &= \langle \Psi | \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} | \Psi \rangle \\ &= \int \Psi^* (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) \Psi d\mathbf{r}\end{aligned}$$

$\Delta A, \Delta B$ Standardabweichung

$$\sigma_x = P(x) \quad \sigma_x = \left[\int (x - \mu)^2 P(x) dx \right]^{1/2} \quad \mu = \int x P(x) dx$$

$$\hat{A} = \hat{x}, \hat{B} = \hat{p}. [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

$$\begin{aligned}\Delta A \cdot \Delta B &\geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle| \\ \Delta x \cdot \Delta p &\geq \frac{1}{2} |i\hbar| = \frac{\hbar}{2}\end{aligned}$$

Morgen:

Operatoren die vertauschen: Drehimpulsoperator \mathbf{l} mit den Komponenten l_x, l_y, l_z und l^2 . Es gilt $[l^2, l_z] = 0$

$$\Delta l^2 \cdot \Delta l_z \geq 0$$

Man kann also Zustände finden, bei denen $\Delta l^2 = 0$; $\Delta l_z = 0$ sind. Diese Zustände können im Prinzip existieren und verletzen die Unschärferelation nicht! Diese Zustände sind dann gleichzeitig Eigenzustände von l^2 und l_z .

Exkurs: Varianz und Standardabweichung in der Quantenmechanik

Wellenfunktion $\Psi(x)$ mit Wahrscheinlichkeit $P(x) = |\Psi(x)|^2$

$$\begin{aligned}\mu &= \int x P(x) dx = \int x |\Psi(x)|^2 dx \\ \sigma &= \int x^2 P(x) dx = \int x^2 |\Psi(x)|^2 dx\end{aligned}$$

Die Varianz ist definiert als:

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= \int (x - \mu)^2 P(x) dx = \int (x^2 + \mu^2 - 2\mu x) P(x) dx \\
 &= \int x^2 P(x) dx + \mu^2 \int P(x) dx - 2\mu \int x P(x) dx \\
 &= \int x^2 P(x) dx + \mu^2 - 2\mu\mu = \int x^2 P(x) dx - \mu^2 \\
 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2
 \end{aligned}$$

Programm Heute

- Drehimpulsoperator
- Kugelflächenfunktionen (Wasserstoffatom)
- Vektormodell (klassische Darstellung)
Macht es leichter z.B. die Wechselwirkung zwischen Drehimpulsoperator und Magnetfeld zu verstehen. Dieses klassische Modell macht Voraussagen über die QM.
- Experimente (Spektrum des Wasserstoffatoms)
- Schrödinger Gleichung des Wasserstoffatoms

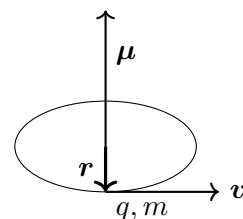
1.2 Drehimpulsoperator

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

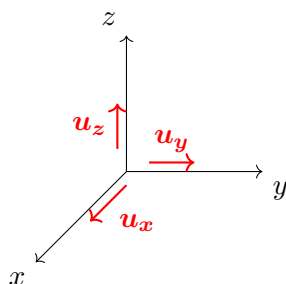
$$\mathbf{r} \Rightarrow \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{p} \Rightarrow \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla$$

$$\mathbf{l} \Rightarrow \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{r} \times (-i\hbar \nabla) = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla$$



$$\hat{\mathbf{l}} = -i\hbar \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = -i\hbar$$



$$l_x = -i\hbar \left\{ y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right\}$$

$$l_y = -i\hbar \left\{ z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

$$l_z = -i\hbar \left\{ x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right\}$$

$$[l_x, l_y] = l_x l_y - l_y l_x \neq 0$$

Vertauschungsregeln

$$[l_x, l_y] = i\hbar l_z$$

$$[l_y, l_z] = i\hbar l_x$$

$$[l_z, l_x] = i\hbar l_y$$

Das Betragsquadrat berechnet sich wie folgt: $l^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2$

Vertauschungsregeln

$$[l^2, l_x] = [l^2, l_y] = [l^2, l_z] = 0$$

Wir werden bevorzugt l_z verwenden.

Die Eigenzustände von l_z

$$l_z = -i\hbar \left\{ x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right\} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$l_z \Rightarrow$ Drehung um die z -Achse

Wir suchen die Operatoren $\Phi(\varphi)$. Hierzu stellen wir eine Eigenwertgleichung auf und lösen diese.

$$l_z \Phi(\varphi) = m\hbar \Phi(\varphi) \Rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi(\varphi) = m\hbar \Phi(\varphi) \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\Phi} = im \partial \varphi$$

$$\int \frac{\partial \Phi}{\Phi} = \int im \partial \varphi \Rightarrow \Phi(\varphi) = a e^{im\varphi}$$

Aufgrund der Definition von φ erwarten wir, dass unsere Funktion bei den Winkeln φ_0 und $\varphi_0 + n \cdot 2\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) gleich sind. $\Phi(\varphi_0) = \Phi(\varphi_0 + 2\pi)$

$$\Rightarrow a e^{im\varphi_0} = a e^{im\varphi_0} e^{im2\pi} \Rightarrow e^{im2\pi} = 1$$

$$m = 0$$

$$m = 1 \Rightarrow e^{i2\pi} = 1!$$

$$m = 2 \Rightarrow e^{i4\pi} = 1!$$

$$m = -1 \Rightarrow e^{-i2\pi} = 1!$$

$$m = -2 \Rightarrow e^{-i4\pi} = 1!$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$m = \text{Magnetische Quantenzahl}$$

\Rightarrow Zeemann Effekt

$$l_x \Phi(\varphi) = m\hbar \Phi_m(\varphi) \quad \Phi_m(\varphi) = a e^{im\varphi}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \Phi_m^*(\varphi) \Phi_m(\varphi) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$$

Eigenzustände l^2

$$\begin{cases} l^2 \mathcal{Y}_{l,m}(\theta, \varphi) = l(l+1) \hbar^2 \mathcal{Y}_{l,m}(\theta, \varphi) \\ l_z \mathcal{Y}_{l,m}(\theta, \varphi) = m \hbar \mathcal{Y}_{l,m}(\theta, \varphi) \end{cases}$$

$\hat{l}^2 = l^2$, $\hat{l}_z = l_z$; beide Ausdrücke sind Operatoren, auch wenn sie ohne Dach geschrieben werden.

Operatoren $\hat{A}\rho(\mathbf{r}) = a\rho(\mathbf{r}) \Rightarrow$ Eigenzustände und Eigenwerte.

m = magnetische Quantenzahl

l = Drehimpuls Quantenzahl

$$\mathcal{Y}_{l,m}(\theta, \varphi) \propto e^{im\varphi} P_l^m(\cos(\theta)) \cdot a$$

P_l^m sind die **Legendre Polynome**.

Wir haben bereits gesehen, dass $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \in \mathbb{Z}$ und $l = 0, 1, 2, \dots \in \mathbb{N}$ sein müssen. Es gilt $-l \leq m \leq l$.

Also $m = -l, m = -l + 1, m = -l + 2, \dots, m = 0, \dots, m = l - 2, m = l - 1, m = l$

$$\int d\Omega \mathcal{Y}_{l,m}^*(\theta, \varphi) \mathcal{Y}_{l,m}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\begin{matrix} l' = l \\ m' = m \end{matrix} \Rightarrow \int d\Omega |\mathcal{Y}_{l,m}(\theta, \varphi)|^2 = 1$$

$$l' = l \Rightarrow \delta_{ll'} = 0 \Rightarrow \int d\Omega \mathcal{Y}_{0,m}^*(\theta, \varphi) \mathcal{Y}_{0,m}(\theta, \varphi) = 0$$

Kugelflächenfunktionen

$l = 0, m = 0 \Rightarrow$

$$\mathcal{Y}_{0,0}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$l = 1, m = -1$

$$\mathcal{Y}_{1,-1}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \underbrace{\sin \theta}_{P_1^m(\cos \theta)} e^{-i\varphi}$$

$l = 1, m = 0$

$$\mathcal{Y}_{1,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$l = 1, m = 1$

$$\mathcal{Y}_{1,1}(\theta, \varphi) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot e^{i\varphi} \cdot \sin \theta$$

[Folie: Betragsquadrat der Kugelflächenfunktionen] (Darstellung der Elektronen-Orbitale)

$\mathcal{Y}_{l,m}(\theta, \varphi)$

$l = 0 \Rightarrow s$ – Orbital

$l = 1 \Rightarrow p$ – Orbital

$l = 2 \Rightarrow d$ – Orbital

$l = 3 \Rightarrow f$ – Orbital

1.3 Vektormodell

Die Kugelflächenfunktionen sind die Eigenzustände von l^2 und l_z und liefern die Eigenwerte $l(l+1)\hbar^2$ und $m\hbar$.

Die Länge von \mathbf{l} ist $\sqrt{l(l+1)\hbar^2}$, die von der z -Komponente l_z ist $m\hbar$.

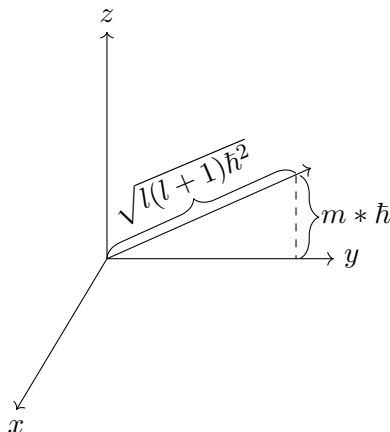


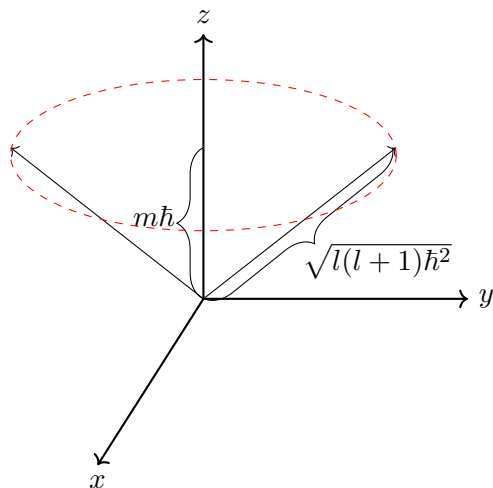
Abbildung 1.3: Grafische Darstellung des Vektormodells

Klassisch wissen wir z -Komponente Länge $|\mathbf{l}|$ und müssen für die anderen beiden Komponenten zurück zur QM.

$$\langle l_x \rangle = \langle \mathcal{Y}_{l,m}(\theta, \varphi) | l_x | \mathcal{Y}_{l,m}(\theta, \varphi) \rangle = \int \mathcal{Y}_{l,m}^*(\theta, \varphi) l_x \mathcal{Y}_{l,m}(\theta, \varphi) d\Omega \stackrel{*}{=} 0$$

(*) kann mathematisch gezeigt werden, ist aber nicht Teil der Vorlesung.

Das selbe gilt auch für l_y : $\langle l_y \rangle = 0$



$$\begin{aligned} |\mathbf{l}| &= \sqrt{l(l+1)\hbar^2} \\ l_z &= m\hbar \\ \langle l_x \rangle &= 0 \\ \langle l_y \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Abbildung 1.4: Intuitives Modell wobei die rote Kreisbahn den Abstand $\sqrt{l(l+1)\hbar^2}$ zum Mittelpunkt hat und parallel zur x, y -Achse liegt

Beispiel:

$$l = 2, m = -2, -1, 0, 1, 2$$

$$\Rightarrow |\mathbf{l}| = \sqrt{6}\hbar$$

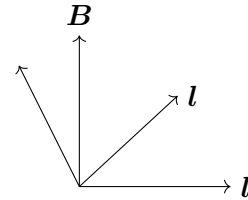
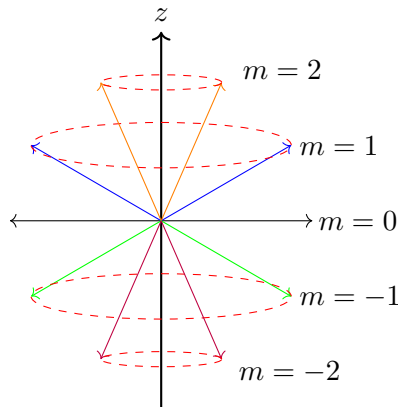


Abbildung 1.6: Zeeman Effekt

Abbildung 1.5: Präzession um die z -Achse hängt von der Quantenzahl m ab.

1.4 Experimente: Wasserstoffatom Spektrum

Präsentation auf Folien: Wasserstoffatom

[Folie: Balmer Series: Wasserstoffatom]

Es gibt verschiedene Zustände im Atom. Man misst das Licht, dass von diesem Atom emittiert wird mit einem Spektrometer. Man erhält Spektrallinien (zunächst einmal die **Balmer Serie**). Beispielsweise die schwarzen Absorptionslinien im Sonnenspektrum oder diskrete Emissionslinien im Wasserstoffspektrum. Die Linien befinden sich im sichtbaren Spektrum und im nahen UV. Die Position der Linien führte auf die **Balmer Gleichung**:

$$\lambda = B \left(\frac{m^2}{m^2 - 4} \right)$$

[Folie: Lyman Series: Wasserstoffatom] Später wurde dann die **Lyman Serie**. Diese Linien sind eher im UV Bereich zu finden. Auch für ihre Positionen konnte eine Gleichung aufgestellt werden.

$$\lambda = \frac{1}{R_H} \left(\frac{m^2}{m^2 - 1} \right)$$

[Folie: Bohrsches Atommodell]

Im Bohrschen Atommodell geht man von festen Umlaufbahnen der Elektronen um den Atomkern aus. Bohr hat eine Quantisierung des Drehimpulses eingeführt als die Stationären Zustände der De-Broglie Wellenlänge der Elektronen.

Mit der Quantisierung der Umlaufbahnen kommt man zu Schlussfolgerung, dass die Energie der Elektronen nicht beliebig sondern diskret ist. Durch die Energie der emittierten Photonen konnte die **Rydberg-Formel** aufgestellt werden, die die Wellenlängen der Balmer- und der Lyman-Serie beschreibt.

$$\lambda = \frac{hc}{R_y} \left(\frac{m^2 n^2}{m^2 - n^2} \right)$$

[Folie: Rydberg Saal in Lund]

Bild der Originalen Gleichung von Rydman an einer Wand verewigt.

Wie man an der allgemeineren Rydberg-Formel kann man erkennen, dass die Balmer Serie ein

Spezialfall für $n = 2$ und die Lyman-Serie ein Spezialfall für $n = 1$ ist.

[Folie: Übergänge zwischen stationären Zuständen]

Alle weiteren bekannten Serien wie: Balmer, Lyman, Paschen, Brackett, und Pfund.

Morgen

- Energie des Wasserstoffatoms
- Korrespondenzprinzip: ($\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}$, $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$) Zeitunabhängige Schrödingergleichung
- Energiezustände und Eigenwerte
- Drehimpulsoperator \mathbf{l} und Kugelflächenfunktionen $\mathcal{Y}_{l,m}(\theta, \varphi)$

Lach und Sachgeschichten, heute mit:

- Wasserstoffatom mit Schrödingergleichung
 - Wellenfunktion (Quantenzahlen)
 - Energieniveaus (Entartung)
- Spektroskopie
 - Wasserstoffatom
 - Spektrometer
 - Balmer-Serie
- Zeeman Effekt
- und natürlich mit der Maus

★hier fehlt eine Grafik★

Energie des Wasserstoffatoms:

$$E = \frac{p_k^2}{2M} + \frac{p_e^2}{2m_e} + V(r) = \underbrace{\frac{p_k^2}{2M}}_{\text{Kern}} + \underbrace{\frac{p_e^2}{2m_e}}_{\text{Elektron}} - \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}}_{\text{Coulomb}} \frac{1}{r}$$

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{R}_{cM} + \mathbf{r}_k$$

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_{cM} + \mathbf{r}_1$$

Energie des Wasserstoffatoms im Schwerpunktsystem:

$$E = \frac{p_{cM}^2}{2M_{tot}} + \frac{p^2}{2\mu} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

- $M_{tot} = M + m$
- $\mathbf{m}_{cM} = (m_e + M)\mathbf{v}_{cM}$ Impuls des Schwerpunktes
- $\mu = \frac{m_e M}{m_e + M} = \frac{m_e}{\frac{m_e}{M} + 1} \approx m_e$ Reduzierte Masse mit $m_e \ll M$
- $\mathbf{p} = \frac{1}{M + m_e} [m_e \mathbf{p}_k - M \mathbf{p}_1]$ relatives Moment

Hamiltonoperator lässt sich in ähnlicher Weise auseinander ziehen.

$$E_{cM} = \frac{p_{cM}^2}{2M_{tot}} \quad E_0 = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$E \Rightarrow \hat{H} \equiv H$$

$$H = H_{cM} + H_0$$

$$H_{cM} = \frac{p_{cM}^2}{2M_{tot}} \stackrel{*}{=} -\frac{\hbar^2}{2M_{tot}} \nabla_{cM}^2$$

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

(*) p_{cM} als Operator da H ein Operator ist: $p_{cM} = -i\hbar\nabla_{cM}$ Eigenzustände für H_{cM} und H_0 :

H_{cM} ist der Hamilton für ein freies Teilchen

$$\stackrel{\text{Schrödinger GL}}{\Rightarrow} H_{cM} * \Psi_{cM} = E_{cM} \Psi_{cM} \Rightarrow \frac{-\hbar^2}{2M_{tot}} \nabla^2 \Psi_{cM} = E_{cM} \Psi_{cM}$$

Für die Wellengleichung eines freien Teilchens gilt:

$$\Psi_{cM}(\mathbf{R}_{cM}) = C e^{i(\mathbf{p}_{cM} \mathbf{R}_{cM})} \frac{1}{\hbar}$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2M_{tot}} \nabla^2 \Psi_{cM} = -\frac{\cancel{\hbar^2}}{2M_{tot}} \frac{-\mathbf{p}_{cM}^2}{\cancel{\hbar^2}} \cancel{\Psi_{cM}} = E_{cM} \cancel{\Psi_{cM}}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbf{p}_{cM}^2}{2M_{tot}} = E_{cM}$$

Schwerpunkt:

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \stackrel{\mu=m_e}{\approx} \frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

Relative Bewegung des Wasserstoffs:

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Psi(\mathbf{r}) = E_0 \Psi(\mathbf{r})}$$

Lösen der Gleichung mit Kugelkoordinaten:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{l^2}{\hbar^2 r^2}$$

l^2 = Drehimpulsoperator deshalb verwenden wir Kugelflächenfunktionen da wir dort diesen auch vorfinden.

Aufspalten der Wellenfunktion in einen Radial und einen Winkelanteil:

$$\Psi(r) = \underbrace{R_{E_0,l}(r)}_{\text{Radialteil}} \underbrace{\mathcal{Y}_{l,m}(\theta, \phi)}_{\text{Winkelanteil}}$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m_e} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)\hbar^2}{\hbar^2 r^2} \right] R_{E_0,l}(r) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} R_{E_0,l}(r) = E_0 R_{E_0,l}(r)$$

$$l^2 \mathcal{Y}_{l,m}(\theta, \phi) = l(l+1)\hbar^2 \mathcal{Y}_{l,m}(\theta, \phi)$$

$$\begin{aligned}
U_{E_0,l}(r) &= r R E_{0,l}(r) \\
\frac{d^2 U_{E_0,l}(r)}{dr^2} + \frac{2m_e}{\hbar} [E_0 - V_{eff}(r)] U_{E_0,l}(r) &= 0 \\
V_{eff}(r) &= \underbrace{-\frac{l^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}}_{\text{Coulomb Potential}} + \underbrace{\frac{l(l+1)\hbar^2}{2m_e r^2}}_{\text{Zentrifugalpotential}}
\end{aligned} \tag{1.1}$$

[Folie: Zentrifugalpotential]

Durch lösen von (1.1) erhält man die Hauptquantenzahlen n

$$\Psi_{l,n,m}(r) = R_{n,l}(r) \mathcal{Y}_{l,m}(\theta, \phi)$$

Dies sind die drei Quantenzahlen die die Wellenfunktion eines Wasserstoffatoms beschreiben.

- $n = 1, 2, 3, 4, \dots$
- $0 \leq l \leq (n-1)$
- $-l \leq m \leq l$

Beispiel

$$\begin{aligned}
n = 2 &\Rightarrow l = 0 \rightarrow m = 0 \\
&\Rightarrow l = 1 \rightarrow m = 1, m = 0, m = -1
\end{aligned}$$

Energie hängt im Wasserstoffatom nur von der Hauptquantenzahl ab, im Gegensatz zur Wellenfunktion die von drei abhängig ist.

$$E_n = -\frac{1}{2n^2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{m_e}{\hbar^2}$$

Radialer Anteil der Wellenfunktion mit $n = 1 \Rightarrow l = 0$

$$R_{10} = 2 \left(\frac{1}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{r}{a_0}} \quad \underbrace{a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e l^2}}_{\text{Bohrradius (erste Umlaufbahn)}}$$

[Folie: Radialer Anteil der Wellenfunktion: $R_{n,l}(r)$]

$$\begin{aligned}
|\psi_{nlm}(\mathbf{r})|^2 &\Rightarrow r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi \\
\int |\psi_{nlm}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} &= \int_{r_0}^{r_1} dr \int_{\Omega} \sin \theta d\theta d\varphi |\psi_{nlm}(\mathbf{r})|^2 \\
&= \int_{r_0}^{r_1} r^2 dr \int_{\Omega} \sin \theta d\theta d\varphi |R_{nl}(\mathbf{r})|^2 \cdot |\mathcal{Y}_{lm}(\theta, \varphi)|^2 \\
&= \int_{r_0}^{r_1} r^2 |R_{nl}(\mathbf{r})|^2 dr \underbrace{\int_{\Omega} \sin \theta |\mathcal{Y}_{lm}(\theta, \varphi)|^2 d\theta d\varphi}_{\Omega=4\pi} \\
&= \int_{r_0}^{r_1} r^2 |R_{nl}(\mathbf{r})|^2 dr
\end{aligned}$$

1.4.1 Spektrometer

★hier fehlt eine Grafik★ [Folie: Spektrometer]

NIST Database für Spektrallinien von Atomen und Molekülen.
<https://www.nist.gov/pml/atomic-spectra-database> und
https://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/lines_form.html.

Balmer Linie

$$\begin{aligned}n = 3 &\Rightarrow n = 2! \\n = 4 &\Rightarrow n = 2! \\n = 5 &\Rightarrow n = 2!? \\n = 6 &\Rightarrow n = 2!??\end{aligned}$$

[Folie: Transmission von SiO_2 bei verschiedenen Wellenlängen]
[Folie: Extreme ultraviolet (XUV) Spektrometer]

Programm Heute

- Wasserstoffatom: Energie Entartung
- Normaler Zeeman Effekt Magnetfeld \mathbf{B}
- Stern-Gerlach Experiment \Rightarrow Spin \mathbf{s}
- Spin \mathbf{s}
- Zusammenfassung zweier Drehimpulsen $\mathbf{l}, \mathbf{s} \Rightarrow \mathbf{l} + \mathbf{s}$
- Feinstruktur der Energie des Wasserstoffatoms

1.4.2 Energie; Entartung

$$E_n = -\frac{1}{2n^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{m_e}{\hbar^2}$$

$$n = 1 \quad l = 0 \quad m = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 \quad 1s$$

★hier fehlt was★

Entartungsgrad

$$K = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$$

Radialanteil der Wellenfunktionen

$$n = 1 \quad l = 0 \quad R_{10}(r) = 2 \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} e^{-r/a_0}$$

$$n = 2 \quad l = 0 \quad R_{20}(r) = 2 \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{r}{2a_0} \right) e^{-r/2a_0}$$

$$n = 2 \quad l = 1 \quad R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2a_0} \right)^{3/2} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0}$$

1.4.3 Zeeman Effekt

Klassisches Modell:

★hier fehlt eine Grafik★

Drehimpuls $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

Strom $I = \frac{-e}{T} = -e \frac{v}{2\pi R}$

Magnetisches Moment \mathbf{p}_m

$$\mathbf{p}_m = I \cdot A \cdot \mathbf{u}_n = I \pi R^2 \cdot \mathbf{u}_n = -\frac{ev}{2\pi R} \pi R^2 \mathbf{u}_n = -\frac{evRu_n}{2}$$

$$\begin{cases} \mathbf{p}_m = -\frac{evRu_n}{2} \\ \mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m_2 v R \mathbf{u}_n \end{cases}$$

$$\mathbf{p}_m = -\frac{e}{2m_e} m_e v R \mathbf{u}_n = -\frac{e}{2m_e} \cdot \mathbf{l} = -\frac{e\hbar}{2m_e} \frac{\mathbf{l}}{\hbar} = -\mu_B \frac{\mathbf{l}}{\hbar}$$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}} \quad \text{Bohrsches Magneton}$$

Elektrisches Feld

$$E = -\mathbf{p}_{el} \cdot \mathbf{E}$$

Magnetisches Feld

$$E = -\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B} \Rightarrow E = \mu_B \frac{\mathbf{l}}{\hbar} \cdot \mathbf{B} = \mu_B \frac{l_z}{\hbar} \cdot B$$

$$\mathbf{B} = B \mathbf{u}_z$$

Damit erhalten wir:

$$E = \mu_B \frac{1}{\hbar} \cdot B l_z$$

mit $l_z = m\hbar$ führt dieser Zusammenhang zu:

$$Em = \mu_B \frac{1}{\hbar} B m \hbar = m \mu_B \cdot B$$

★hier fehlt eine Grafik★

Die Differenz der Entarteten Energieniveaus ist $\mu_B B$.

Hamilton Operator

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \mathcal{H}_0 \quad \text{Wasserstoffatom}$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_0 + \mu_B \frac{1}{\hbar} B l_z$$

Das \mathcal{H}_B stammt aus der Wechselwirkung zwischen Wasserstoffatom und \mathbf{B} -Feld.

Wir haben gesehen, dass die Operatoren l^2 und l_z vertauschen.

$$\text{Wasserstoffatom} \quad [l^2, l_z] = 0 \quad \mathcal{Y}_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$\{\mathcal{H}_0; l^2, l_z\} \Rightarrow \psi_{nlm}(\mathbf{r})$$

$$\mathcal{H}_0 \psi_{nlm}(\mathbf{r}) = E_n \quad \psi_{nlm}(\mathbf{r})$$

$$l^2 \psi_{nlm}(\mathbf{r}) = l(l+1)\hbar^2 \quad \psi_{nlm}(\mathbf{r})$$

$$l_z \psi_{nlm}(\mathbf{r}) = m\hbar \quad \psi_{nlm}(\mathbf{r})$$

$$[\mathcal{H}_0 \mathcal{H}_B] = 0$$

$$\mathcal{H}_B = \frac{\mu_B}{\hbar} B l_z \quad \mathcal{H}_B |\psi_{nlm}(\mathbf{r})\rangle = \frac{\mu_B B}{\hbar} l_z |\psi_{nlm}(\mathbf{r})\rangle = \frac{\mu_B B}{\hbar} \cdot m \hbar |\psi_{nlm}(\mathbf{r})\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{nlm}(\mathbf{r}) | \mathcal{H}_B | \psi_{nlm}(\mathbf{r}) \rangle &= \langle \psi_{nlm}(\mathbf{r}) | \mu_B B m | \psi_{nlm}(\mathbf{r}) \rangle \\ &= \mu_B B m \langle \psi_{nlm}(\mathbf{r}) | \psi_{nlm}(\mathbf{r}) \rangle = \boxed{\mu_B B m} \end{aligned}$$

1.4.4 Stern-Gerlach Experiment

$$Ag = \underbrace{[Kr] 4d^{10}}_{\text{volle Schale}} 5s^1$$

★hier fehlt eine Grafik★

⇒ Wasserstoffähnlich !

s Zustand $l = 0 \Rightarrow m = 0$

$$\mathbf{F} = -\nabla E_m = \mathbf{p}_m \cdot \nabla B$$

Dieses Modell beschreibt die experimentellen Beobachtungen nicht ausreichend. Daher wurde die Hypothese aufgestellt, dass das Elektron einen weiteren Freiheitsgrad besitzt: den **Spin**.

1.4.5 Spin

$$\boldsymbol{\mu}_s = -g_s \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{s} \quad \text{Spinimpuls}$$

$$\mathbf{p}_m = \boldsymbol{\mu}_l = -\frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{l} \quad \text{Bahndrehimpuls}$$

Hierbei ist g_s der Landé Faktor.

Da wir festgestellt haben, dass bei bekanntem l , m nur die ganzzahligen Werte zwischen $-l$ und l annehmen kann ($-l \leq m \leq l$).

Da wir für den Spin nur 2 Möglichkeiten haben werden diese $s = +\frac{1}{2}$ sodass:

$$\Rightarrow m_s = -\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}$$

Da wir fordern $-s \leq m_s \leq s$

\mathbf{s} Spin-Operator: $\mathbf{s}: s_x; s_y; s_z$

$$\begin{aligned} [s_x, s_y] &= i\hbar s_z & [s_x, s_z] &\neq 0 & [s_y, s_z] &\neq 0 \\ [l_x, l_y] &= i\hbar l_z & [l_x, l_z] &\neq 0 & [l_y, l_z] &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [s^2, s_z] &= [s^2, s_x] = [s^2, s_y] = 0 \\ [l^2, l_z] &= [l^2, l_x] = [l^2, l_y] = 0 \end{aligned}$$

$$l \quad \text{Drehimpuls Quantenzahl} \quad -l \leq m \leq +l$$

$$s \quad \text{Spinquantenzahl} \quad -s \leq m_s \leq +s \quad \xRightarrow{\text{Elektronen (Fermionen)}} s = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} l^2; l_z &\Rightarrow \mathcal{Y}_{lm}(\theta, \varphi) & l^2 \mathcal{Y}_{lm}(\theta, \varphi) &= l(l+1)\hbar^2 \mathcal{Y}_{lm}(\theta, \varphi) \\ & & l_z \mathcal{Y}_{lm}(\theta, \varphi) &= m\hbar \mathcal{Y}_{lm}(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

$$s^2; s_z \Rightarrow \chi_{1/2, m_s} \quad s^2 \chi_{1/2, m_s} = s(s+1)\hbar^2 \chi_{1/2, m_s} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right) \hbar^2 \chi_{1/2, m_s} = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_{1/2, m_s}$$

$$b_2 \chi_{1/2, m_s} = m_s \hbar \chi_{1/2, m_s}$$

★hier fehlt was★

★hier fehlt eine Grafik★

$$|\alpha\rangle: s^2|\alpha\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|\alpha\rangle \Rightarrow |\mathbf{s}| = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$$

$$s_z|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{2}|\alpha\rangle$$

$$\chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$$

spin-up

$$|\beta\rangle: s^2|\beta\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|\beta\rangle \Rightarrow |\mathbf{s}| = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$$

$$s_z|\beta\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\beta\rangle$$

$$\chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$$

spin-down

Wasserstoffatom

$$\psi_{nlm}(\mathbf{r})$$

$$\text{Spin: } \chi_{\frac{1}{2}, m_s}$$

Die gesamte Wellenfunktion des Wasserstoffatoms

$$\psi(q) = \underbrace{\psi_{nlm}(\mathbf{r})}_{\text{Räumlicher Anteil}} \underbrace{\chi_{\frac{1}{2}, m_s}}_{\text{Spin Anteil}} \quad \text{mit } q \equiv (\mathbf{r}, s)$$

$$\mathbf{l} \Rightarrow \mathbf{p}_m = \boldsymbol{\mu}_l = -\frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{l}$$

$$\mathbf{s} \Rightarrow \boldsymbol{\mu}_s = -g_s \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{s}$$

$$g_s = g\text{-Faktor} = 2 \Rightarrow \text{Q.E.D}$$

- Zusammensetzung 1 \mathbf{s}
- Feinstruktur des Wasserstoffatoms

$$\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s} \quad \text{Gesamtdrehimpuls}$$

$$j_x; j_y; j_z$$

$$[j_x, j_y] = [l_x + s_x; l_y + s_y] = \underbrace{[l_x, l_y]}_{i\hbar l_z} + [l_x, s_y] + [s_x, l_y] + \underbrace{[s_x, s_y]}_{i\hbar s_z} = i\hbar \{l_z + s_z\} = i\hbar j_z$$

\mathbf{j} Drehimpulsoperator

$$\underbrace{j^2; j_z}_{l^2; l_z} \Rightarrow \mathcal{Y}_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$\underbrace{s^2; s_z} \Rightarrow \chi_{1/2; m_s}$$

$$j^2 \rightarrow j(j+1)\hbar^2 \quad \text{Eigenwerte} \quad j \text{ Gesamtdrehimpulsquantenzahl}$$

$$j_z \rightarrow m_j \hbar \quad \text{Eigenwerte} \quad -j \leq m_j \leq j$$

Quantenzahlen l und s angegeben $\Rightarrow j = ?$

Wasserstoffatom in einem p -Zustand $2p$ $\begin{matrix} l = 1 \\ s = \frac{1}{2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} m_l = \pm 1; 0 \\ m_s = \pm \frac{1}{2} \end{matrix}$

$$\begin{array}{ccc} & j_z = l_z + s_z & \\ \mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s} & \downarrow & \\ & m_j = m_l + m_s & \end{array}$$

★hier fehlt was★ ★hier fehlt eine Grafik★

$$\begin{array}{lcl} m_j = -\frac{3}{2} \Rightarrow j = \frac{3}{2} & \Rightarrow & m_j = -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}; +\frac{3}{2} \\ m_j = -\frac{1}{2} \Rightarrow j = \frac{1}{2} & \Rightarrow & m_j = -\frac{1}{2}; +\frac{1}{2} \end{array}$$

Zusammensetzung zweier Bahndrehimpulse

$$\begin{array}{ccccc} \text{Helium} & \mathbf{l}_1 & \mathbf{l}_2 & \mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 & L^2 \Rightarrow L(L+1)\hbar^2 \quad L_z \Rightarrow m_L \hbar \\ & \downarrow & \downarrow & & \\ & \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & & \end{array}$$

$$l_1 = 1 \Rightarrow m_{l_1} = \pm 1; 0$$

$$l_2 = 2 \Rightarrow m_{l_2} = \pm 2; \pm 1; 0$$

$$[j_x, j_y] = [l_{1x} + l_{2x}, l_{1y} + l_{2y}] = \underbrace{[l_{1x}, l_{1y}]}_{i\hbar l_{1z}} + [l_{1x}, l_{2y}] + [l_{2x}, l_{1y}] + \underbrace{[l_{2x}, l_{2y}]}_{i\hbar l_{2z}} = i\hbar \{l_{1z} + l_{2z}\} = i\hbar L_z$$

★hier fehlt eine Grafik★

$$(-1; 0) = (m_{l_1} = -1; m_{l_2} = 0)$$

$$(0; -1) = (m_{l_1} = 0; m_{l_2} = -1)$$

$$m_L = 3 \Rightarrow L_3 \Rightarrow m_L = \pm 3; \pm 2; \pm 1; 0$$

$$m_L = 2 \Rightarrow L_2 \Rightarrow m_L = \pm 2; \pm 1; 0$$

$$m_L = 1 \Rightarrow L_1 \Rightarrow m_L = \pm 1; 0$$

$$\begin{matrix} l_1 = 1 \\ l_2 = 2 \end{matrix} \Rightarrow L = 1, 2, 3$$

$$|l_2 - l_1| \leq L \leq l_1 + l_2$$

$$-L \leq m_L \leq L$$

$$\begin{matrix} l = 1 \\ s = \frac{1}{2} \end{matrix} \Rightarrow j = \frac{1}{2}; \frac{3}{2}$$

$$|l - s| \leq j \leq l + s$$

$$-j \leq m_j \leq j$$

Vektormodell

$\mathbf{l}; l_z$

★hier fehlt eine Grafik★

$$\langle j_x \rangle = 0$$

$$\langle j_y \rangle = 0$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$$

$$\mathcal{Y}_{lm}(\theta, \varphi) \quad \chi_{1/2, m_s}$$

★hier fehlt eine Grafik★

$$j_z \Rightarrow m_j = \frac{1}{2} \begin{cases} \nearrow & m_l = 0; m_s = \frac{1}{2} \\ \searrow & m_l = 1; m_s = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

★hier fehlt eine Grafik★

$$1s: m = 1 \quad s \Rightarrow l = 0 \quad l = 0 \text{ und } b = \frac{1}{2} \Rightarrow j = \frac{1}{2} \quad q s_{1/2}$$

★hier fehlt was★

1.5 Feinstruktur des Wasserstoffatoms

$$\left. \begin{array}{l} E_{1s} \approx -13,6 \text{ eV} \\ E_{2s} \approx -3,4 \text{ eV} \\ E_{3s} \approx -1,5 \text{ eV} \end{array} \right\} \approx 10 \text{ eV}$$

$$\text{Feinstruktur} \approx 10^{-4} \div 10^{-5} \text{ eV}$$

- (Rest-) Ruheenergie des Elektrons
- Darwin Term (Compton Wellenlänge)
- Spin-Bahn Kopplung

1.5.1 Restenergie des Elektrons

$$-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_e}$$

$$\psi_{nlm}(\mathbf{r})$$

$$\Delta E_1 = \langle \psi_{nlm}(\mathbf{r}) | -\frac{1}{8} \frac{p^4}{m_e^3 c^2} | \psi_{nlm}(\mathbf{r}) \rangle = \int d\mathbf{r} \psi_{nlm}^* \left[-\frac{p^4}{m_e^3 c^2} \right] \psi_{nlm}(\mathbf{r})$$

$\hat{p} \Rightarrow -i\hbar \nabla$ einsetzen liefert:

Korrekturterm

$$\Delta E_1 = -E_n \frac{\alpha^2}{n^2} \left[\frac{3}{4} - \frac{n}{e + \frac{1}{2}} \right]$$

$$n = \text{Hauptquantenzahl}$$

$$\alpha = \text{Feinstrukturkonstante } \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

$n = 1, l = 0$ 1s Zustand

$$\Delta E_1 = -E_{100} \frac{\alpha^2}{1} \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right] = -E_{100} \alpha^2 \left(-\frac{5}{4} \right) = \frac{5}{4} \alpha^2 E_{100} \simeq 9 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$$

$$E_{100} = E_{nlm} = -13,5 \text{ eV}$$

1.5.2 Darwin Term (Compton Wellenlänge)

★hier fehlt eine Grafik★

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$\lambda\nu = c \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$\left. \begin{array}{l} E = m_e c^2 \\ E = h\nu = h \frac{c}{\lambda} \end{array} \right\} \Rightarrow m_e c^2 = h \frac{c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{h}{m_e c}$$

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow V_{\text{eff}}(r) = \int d\mathbf{r}' \frac{e}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r} + \mathbf{r}')$$

Im folgenden soll λ_C die reduzierte Compton-Wellenlänge also $\frac{\lambda_C}{2\pi}$ bezeichnen.

★hier fehlt eine Grafik★

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} \frac{1}{2\pi}$$

$$\rho(\mathbf{r} + \mathbf{r}') = \begin{cases} -\frac{e}{(\frac{4}{3}\pi\lambda^3 c)} & |\mathbf{r}'| < \lambda_C \\ 0 & |\mathbf{r}'| > \lambda_C \end{cases}$$

$$V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = V(r) + \frac{\pi}{2} \lambda^2 c \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \delta(\mathbf{r})$$

↓
Dirac Delta

$$\Delta E_2 = \frac{\pi}{2} \lambda^2 c \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \langle \psi_{nlm}(\mathbf{r}) | \delta(\mathbf{r}) | \psi_{nlm}(\mathbf{r}) \rangle$$

$l = 0$ s-Zustände

$$\Delta E_2 = -E_n \frac{\alpha^2}{n}$$

mit n der Hauptquantenzahl

$$\frac{\Delta E_2}{E_{100}} = -\alpha^2 = -5,3 \cdot 10^{-5}$$

Programm Heute

- Spin-Bahn Kopplung
- Feinstruktur des Wasserstoffs
 - Anomaler Zeeman Effekt
- Zeeman Effekt → Normaler Zeeman Effekt
 - Paschen-Back Effekt
- Spin Bahn Kopplung

$$L = 1 : 2$$

$$2p \rightarrow \begin{matrix} 2p_{1/2} \\ 2p_{3/2} \end{matrix}$$

$$\bar{L} \Rightarrow \boldsymbol{\mu}_C = -\frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{L}$$

$$\bar{s} \Rightarrow \boldsymbol{\mu}_s = -g_s \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{s}$$

★hier fehlt eine Grafik★

Bio Savart Gesetz:

Bezugssystem des Elektrons:

★hier fehlt eine Grafik★

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\mathbf{l} \times \Delta\mathbf{r}}{|\Delta\mathbf{r}|^3} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

$$I = \frac{e}{T} \frac{ev_K}{2\pi r_K} \rightarrow B = \frac{\mu_0}{2r} \frac{ev_K}{2\pi r_K} = \frac{\mu_0 ev_K r_K}{4\pi r_K^3}$$

$$B = \frac{\mu_0 ev_K r_K}{4\pi r_K^3} \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 e}{4\pi r_K^3} = \frac{\mu_0 e}{4\pi r_K^3 m_e} \mathbf{r}_K \times m_e \mathbf{v}_K$$

$$B = \frac{\mu_0 e}{4\pi r^3 m_e} (\mathbf{r} \times m_e \mathbf{v}) \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Thomas Faktor aus Lorenz Transformation}}$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 e}{8\pi r^3 m_e} L}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m_e \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$E = - \underbrace{\boldsymbol{\mu}_s}_{\text{Magnetisches Dipolmoment}} \cdot \underbrace{\mathbf{B}_r}_{\text{äußeres Magnetfeld}} = - \underbrace{(-g_s \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{s})}_{\mu_s} \cdot \underbrace{\frac{\mu_0 e}{8\pi r^3 m_e} \mathbf{L}}_B = \underbrace{g_s \mu_B \frac{\mu_0 e}{8\pi r^3 m_e} \frac{1}{\hbar} \mathbf{s} \mathbf{L}}_{\text{nur abhängig von } r, \mathbf{s}, \mathbf{L}}$$

$$\text{Suchen } \mathbf{s} \cdot \mathbf{L} : \mathbf{j} = \mathbf{L} + \mathbf{s} \Rightarrow \mathbf{j}^2 = \mathbf{L}^2 + \mathbf{s}^2 + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{s} \Leftrightarrow \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} = \frac{1}{2}(\mathbf{j}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{s}^2)$$

Eigenzustände: $j^1; L^2; s^2$

Basen: $\{L^2; L_2; s^2; s_2\}$

$$\boxed{\{j^2; L_2; s^2; j_2\}}$$

Fokus auf die 2. da dort j dabei ist.

$$E = \frac{\mu e^2}{8\pi r^3 m_2^2} \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{L} = \frac{\mu_0 e^2}{8\pi r^3 m_e^2} \frac{1}{2} [j^2 - L^2 - s^2] \Rightarrow H_{SO} = \text{Spin-Bahn Kopplung}$$

$$E = \langle H_{SO} \rangle = \frac{\mu_0 e^2}{8\pi m_e^2} \frac{1}{2} \left\langle njLsj_z \left| \frac{1}{r^3} Lj^2 - L^2 - s^2 \right| njLsj_z \right\rangle$$

$$E = \langle H_{SO} \rangle = \underbrace{\frac{\mu_0 e^2}{8\pi m_e^2} \frac{1}{2} r^3 nL}_{\text{radial Anteil}} \underbrace{\langle jLsj_z | Lj^2 - L^2 - s^2 | jLsj_z \rangle}_{\text{Winkelanteil}}$$

$$\langle 1/r^3 \rangle = \langle nL | 1/r^3 | nL \rangle = \frac{1}{r^3 m_e}$$

$$E = \langle H_{SO} \rangle = \frac{\mu_0 e^2}{8\pi m_e^2} \frac{1}{2} \frac{1}{r^3 m_e} \{j(j+1)\hbar^2 - L(L+1)\hbar^2 - s(s+1)\hbar^2\}$$

$$\boxed{E = \langle H_{SO} \rangle = \frac{a}{2} [j(j+1) - L(L+1) - s(s+1)]}$$

$$a = \frac{\mu_0 e^2}{8\pi m_e^2} \frac{1}{r m_e} \hbar^2$$

- $j = L - \frac{1}{2}$

$$E = \langle H_{SO} \rangle = \frac{a}{2} [(L - 1/2)(L + 1/2) - L(L + 1) - 3/4] \\ = -\frac{a}{2}(L + 1)$$

- $j = L + \frac{1}{2}$

$$E = \langle H_{SO} \rangle = \frac{a}{2} [(+ - 1/2)(L + 1/2) - L(L + 1) - 3/4] \\ = \frac{aL}{2}$$

Aufspaltung der Energie einmal größer einmal kleiner. ★hier fehlt eine Grafik★

$$\frac{\Delta e_3}{E_{210}} = -\frac{\alpha^2}{12} = -4 \cdot 44 \cdot 10^{-6}$$

$$210 \Rightarrow n = 2, L = 1 \Rightarrow 2p \text{ Zustand} \Rightarrow j = \frac{3}{2}$$

$\Delta E_1, \Delta E_2, \Delta E_3$ alle Beschrieben

Feinstruktur der Energieniveaus

$$\Delta E_{\text{FS}} = \Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3 = E_m \left[\frac{\alpha^2}{n} \left(\frac{1}{j + 1/2} - \frac{3}{4n} \right) \right]$$

nur von n und j abhängig.

★hier fehlt eine Grafik★

Zeeman Effekt:

Wechselwirkung mit dem äußeren Magnetfeld:

$$\mathcal{H}_0 + \xi(r)\mathbf{l}\mathbf{s} + \frac{\mu_B}{\hbar}(\mathbf{l} + 2\mathbf{s})\mathbf{B} \quad (1.2)$$

$\xi(r)\mathbf{l}\mathbf{s}$ = Spin-Bahn Kopplung

$\frac{\mu_B}{\hbar}(\mathbf{l} + 2\mathbf{s})\mathbf{B}$ = Wechselwirkung mit äußerem B-Feld

Die Wellenfunktionen kann man in zwei Fälle unterscheiden.

1. $\mathbf{l}\mathbf{s} = \frac{1}{2}[j - l^2 - s^2]$ Dies sind Eigenzustände von den zwei Basen: $(j^2, l^2, s^2, j_z); (j, l, s, m)$
2. $\mathbf{l} + 2\mathbf{s}\mathbf{B} = (l_z + 2s_z)\mathbf{B}$ Wir wollen Eigenzustände von l_z und s_z . D.h wir wählen als Basis: $(l^2, l_z, s^2, s_z); (l, m_l, s, m_s)$

In Fall 1 gilt $E_B \ll E_{so} \Rightarrow (j^2, l^2, s^2, j_z)$. Dieser Fall wird anomaler Zeeman-Effekt genannt.

In Fall 2 gilt $E_{so} \ll E_B \Rightarrow (l^2, l_z, s^2, s_z)$. Dieser Fall wird anomaler Paschen-Back-Effekt genannt.

Es existiert noch ein dritter Fall als ein Spezialfall von Fall 1 dieser ist der Klassische oder Normale-Zeeman-Effekt. Hierbei wird der Spin 0 wodurch sich ein Klassischer Fall ergibt. \Rightarrow

$$H = H_{z.B:\text{He}} + \frac{\mu_B}{\hbar}\mathbf{l}\mathbf{B}$$

Für den Anormalen Zeeman-Effekt gilt:

$$\begin{aligned} l &\Rightarrow \mu_l = -\frac{\mu_B}{\hbar} l \\ s &\Rightarrow \mu_s = -g_s \frac{\mu_B}{\hbar} s \\ \Rightarrow \mu_l + \mu_s &= -\frac{e}{2m_e} (\hbar l + 2\hbar s) \quad \text{mit} \quad g_s \approx 2 \end{aligned}$$

[Folie: Anomaler Zeeman Effekt 1][Folie: Anomaler Zeeman Effekt 2]Vorgehen:

1.Schritt $(\mu_j)_j$ Berechnen

2.Schritt Zerlegen von $(\mu_j)_j B \Rightarrow ((\mu_j)_j)_z$ Entlang der B-Feld Richtung.

[Folie: Anomaler Zeeman Effekt 3]

1.Schritt

$$\langle \mu_j \rangle = (\mu_j)_j = \underbrace{\mu_j}_{*} \cdot \frac{j}{|j|} = -\frac{e}{2m_e} (\hbar l + 2\hbar s) \frac{j}{|j|} = -\frac{e}{2m_e} \left(\frac{l j}{|j|} + 2 \frac{s j}{|j|} \right)$$

Wie vorher hergeleitet wurde gilt: $j = l + s$; $|j| = [j(j+1)\hbar^2]$

$$l j = \frac{1}{2} [j^2 + l^2 - s^2] \Rightarrow l j = \frac{1}{2} [j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)] \hbar$$

$$s j = \frac{1}{2} [j^2 - l^2 + s^2] \Rightarrow s j = \frac{1}{2} [j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)] \hbar$$

$$\mu_j = -g_j \frac{\mu_B}{\hbar} |j|$$

Hier ist g_j der Lande Faktor mit der folgenden Definition:

Lande Faktor g_j

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$$

Beispiel 1

$$s = 0; j = l \Rightarrow g_j = 1$$

$$\langle \mu_j \rangle = -\frac{\mu_B}{\hbar} |j|$$

Beispiel 2

$$l = 0; j = s \Rightarrow g_j = 2$$

$$\langle \mu_j \rangle = -2 \frac{\mu_B}{\hbar} |j|$$

Wenn man sich den Anormalen Zeeman Effekt anschaut sieht man dass hier auch der Unterschied gerade der Faktor g_s ist.

Elektron:

$$s = \frac{1}{2} \Rightarrow j = l + \frac{1}{2} \Rightarrow g_j = \frac{2l+2}{2l+1} \xrightarrow{\text{für } l=1} g_j = \frac{2}{3}$$

$$s = -\frac{1}{2} \Rightarrow j = l - \frac{1}{2} \Rightarrow g_j = \frac{2l}{2l+1} \xrightarrow{\text{für } l=1} g_j = \frac{2}{3}$$

Es spielt also eine Rolle für die Wechselwirkung mit dem B Feld wie s und l eingestellt sind. Mathematisch wird dies durch den Lende Faktor beschrieben.

2.Schritt Wir setzen nun das B-Feld entlang der z-Achse. D.h wir zerlegen unser $\langle \mu_j \rangle$ entlang der z-Achse

$$\langle \mu_j \rangle_z = -g_j \frac{\mu_B}{\hbar}; \quad j_z \text{ Eigenwert} = -\frac{\mu_B}{\hbar} m_j \hbar = -g_j \mu_B m_j$$

$$E = -\mu_j B \Rightarrow E = -g_j \mu_B m_j B = m_j g_j \mu_B B$$

$$\Delta E m_j = m_j g_j \mu_B B \Rightarrow \text{Anormaler Zeeman-Effekt}$$

g_j gibt an wie groß der Bahn-Spin Magnetismus ist.

Programm Heute:

- Anormaler Zeeman Effekt j
- Normaler Zeeman Effekt
- Paschen-Back Effekt
- Hyperfeinstruktur (Wasserstoffatom): Atomuhr
- Lamb Shift

1.5.3 Normaler Zeeman Effekt

$S = 0$ Helium $S = s_1 + s_2$ Beim Heliumatom gibt es zwei Spins für die beiden Elektronen. Es gibt hier zwei Möglichkeiten: entweder up-up und down-down **oder** up-down und down-up. Deher gibt es zwei Möglichkeiten für den Gesamtspin.

$$\begin{array}{l} \nearrow S = 0 \Rightarrow \text{Normaler Zeeman Effekt} \\ \searrow S = 1 \Rightarrow \text{Anormaler Zeeman Effekt} \end{array}$$

$$H = H_0 + \frac{\mu_B}{\hbar_0} \mathbf{L} \cdot \mathbf{B} \quad \mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$$

Energie Verschiebung

$$E_B = \frac{\mu_B}{\hbar_0} \mathbf{L} \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_B}{\hbar_0} L_z \cdot B$$

mit $L_z = m_z \hbar$

$$E_B = \frac{\mu_B}{\hbar_0} m_z \hbar B = \mu_B m_z B$$

1.5.4 Pasch-Bach Effekt

$$E_{so} \ll E_B$$

$$H = H_0 + \frac{\mu_B}{\hbar} (\mathbf{l} + 2\mathbf{s}) \cdot \mathbf{B} = H_0 + \frac{\mu_B}{\hbar} (l_z + 2s_z) \cdot B$$

Operatoren $l^2; l_z; s^2, s_z$

$$E_B = \frac{\mu_B}{\hbar} (m_l \hbar + 2m_s \hbar) \cdot B = \mu_B (m_l + 2m_s) \cdot B$$

Betrachten wir hierzu ein Beispiel:

Was passiert mit dem p -Zustand wenn wir ein starkes äußeres Magnetfeld anlegen, sodass die Spin-Bahn-Kopplung vernachlässigbar klein wird: p -Zustand $l = 1 \quad s = \frac{1}{2}$

m_l	m_s	$m_l + 2m_s$	
-1	-1/2	-2	
-1	+1/2	0	
0	-1/2	-1	$B \neq 0$
0	+1/2	+1	
1	-1/2	0	
1	+1/2	+2	

★hier fehlt eine Grafik★

$p \dots$ mit $l = 1 \quad s = \frac{1}{2} \quad m_l = 0; \pm 1 \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$

[Folie: Anormaler Zeeman- und Paschen-Bach-Effekt Kombination beider Effekte]

[Folie: Natrium Energieniveaus] $[\text{Na}] = [\text{NA}] 3s^1 n^{2s+1} L_j$

$$n^{2s+1} L_j \quad \mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$$

$$s = \frac{1}{2} = S \quad 2S + 1 = 2$$

$$l = 0 = L$$

$$\Rightarrow \mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} = \frac{1}{2}$$

1.5.5 Hyperfeinstruktur

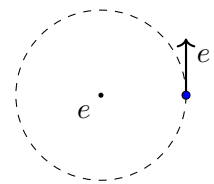
$$10^{-6} \div 10^{-8} \text{ eV}$$

Drehimpuls des Kerns \mathbf{I} (des Protons) Wasserstoff

$$E_{HFS} = -\boldsymbol{\mu}_I \cdot \mathbf{B}_j \quad \boldsymbol{\mu}_I = g_I \frac{\mu_K}{\hbar} \mathbf{I}$$

g_I = Kern ρ Faktor

μ_K = Kernmagneton



$$\mu_K = \frac{e}{2m_p} \hbar = \frac{e}{2m_e} \hbar \frac{m_e}{m_p} = \mu_B \frac{m_e}{m_p} = \mu_B \frac{1}{1836}$$

$$\mathbf{B}_i \propto -\mathbf{i}$$

$$E_{HFS} = -\boldsymbol{\mu}_I \cdot \mathbf{B}_j = -|\boldsymbol{\mu}_j| \cdot B_j \cos(\boldsymbol{\mu}_I, \mathbf{B}_j) = |\boldsymbol{\mu}_I| B_j \cos(\mathbf{I}, \mathbf{j})$$

$$\cos(\mathbf{j}, \mathbf{I}) = \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{I}}{|\mathbf{j}| |\mathbf{I}|} \Rightarrow \mathbf{j} \cdot \mathbf{I}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{j} = \text{Gesamtdrehimpuls des Atoms} \quad \begin{array}{l} \mathbf{I} \Rightarrow \text{Kern (proton)} \\ \mathbf{j} \Rightarrow \text{Elektron} \end{array}$$

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{F(F+1)} \hbar \quad -f \leq m_F \leq f$$

$$\cos(\mathbf{I}, \mathbf{j}) = \frac{1}{2} \frac{(F^2 - I^2 - j^2)}{|\mathbf{j}||\mathbf{I}|} = \frac{1}{2} \frac{[F(F+1)\hbar^2 - I(I+1)\hbar^2 - j(j+1)\hbar^2]}{\sqrt{j(j+1)}\hbar\sqrt{I(I+1)}\hbar}$$

Ähnliches wurde Vorhin in der Vorlesung bei der Spin-Bahn Kopplung festgestellt.

$$E_{HFS} = |\boldsymbol{\mu}_I| B_j \cos(\mathbf{I}, \mathbf{j}) = |\boldsymbol{\mu}_I| B_j \frac{1}{2} \frac{[F(F+1) - I(I+1) - j(j+1)]}{\sqrt{j(j+1)}\sqrt{I(I+1)}}$$

$$= \frac{A}{2} [F(F+1) - I(I+1) - j(j+1)]$$

$$A = \frac{g_I \mu_K B_j}{\sqrt{j(j+1)}}$$

Wasserstoff Grundzustand

$$\begin{array}{llll} l=0 & s=\frac{1}{2} & \text{Elektron} & j=\frac{1}{2} \\ I=\frac{1}{2} & & \text{Proton} & I=\frac{1}{2} \end{array} \Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{j} \quad |I-j| \leq F \leq I+j \quad \begin{array}{l} \nearrow F=1 \\ \searrow F=0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} E_{HFS}(F=0) &= \frac{A}{2} [F(F+1) - I(I+1) - j(j+1)] = \frac{A}{2} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= \frac{A}{2} \left(-\frac{3}{2} \right) = -\frac{3A}{2} \end{aligned}$$

$$E_{HFS}(F=1) = \frac{A}{2} \left[1 \cdot 2 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right] = \frac{A}{4}$$

★hier fehlt eine Grafik★

$$\Delta E = 5,9 \cdot 10^{-6} \text{ eV}$$

$$\nu = 1420 \text{ MHz}$$

$$\lambda = 21 \text{ cm (Radioastronomie)}$$

Wasserstoff erster angeregter Zustand

$$\begin{array}{llll} l=1 & s=\frac{1}{2} & \text{Elektron} & j=\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \\ I=\frac{1}{2} & & \text{Proton} & I=\frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{ll} j=\frac{1}{2}; I=\frac{1}{2} & \Rightarrow F=0,1 \\ j=\frac{3}{2}; I=\frac{1}{2} & \Rightarrow F=1,2 \end{array}$$

[Folie: Atomuhr]

Die Zeit wird hierbei mit einem Bestimmten Energieübergang definiert. Hierfür ist die Hyperfeinstruktur sehr wichtig.

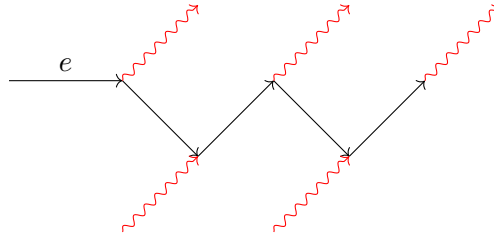
[Folie: Cäsium energy levels]

1.5.6 Lamb Shift

$$\text{Feinstrukturen } n; j \quad 2s_{1/2}; 2p_{1/2} \Rightarrow \text{Lamb Shift}$$

In der Quantenelektrodynamik (QED) gilt:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$



Zitterbewegung: ★hier fehlt eine Grafik★

$$E_{\text{pot}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Rightarrow \langle E_{\text{pot}} \rangle = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \frac{1}{r + \delta r} \right\rangle$$

$2s_{1/2}$	$2p_{1/2}$
$l = 0$	$l = 1$
$\left\langle \frac{1}{r + \delta r} \right\rangle_{2s}$	$\left\langle \frac{1}{r + \delta r} \right\rangle_{2p}$
$2s_{1/2}$	$2p_{1/2}$
$\Delta E = 4,3 \cdot 10^{-6} \text{ eV}$	$\Delta E = -5,95 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$

[Folie: Lamb-Verschiebung: Lamb-Rutherford Experiment]

1.5.7 Energieniveaus im Wasserstoffatom

- Feinstruktur
- Hyperfeinstruktur
- Lamb-Shift

★hier fehlt eine Grafik★ Feinstruktur Lambshift HFS

Spektrale Übergänge:

$3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 2$

[Folie: Atom mit zwei Elektronen]

1.6 Helium

In einem Helium herrscht die Wechselwirkung zwischen Kern und den $2 e^-$ und die Wechselwirkung der beiden e^- untereinander. Die klassische Energie ist dann:

$$E = \underbrace{\frac{p_k^2}{2M} + \frac{p_1^2}{2m_e} + \frac{p_2^2}{2m_e}}_{E_{\text{kin}}} - \underbrace{\frac{2e^-}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_1|} - \frac{2e^-}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_2|} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}}_{\text{Wechselwirkungen}}$$

mit $M =$ Masse des Kerns: $^4\text{He} \approx 99,9\%$ und $^3\text{He} \approx 0,0002\%$

$$E = E_{CM} + E' \quad E_{CM} = \frac{p_{CM}^2}{2M_{\text{Tot}}}$$

wobei CM für “Center of Mass” steht.

$$E' = \frac{p_1^2}{2m_e} + \frac{p_2^2}{2m_e} - \frac{2e^-}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{2e^-}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \cancel{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}}$$

Wir nehmen zunächst an, dass der letzte Term, der Ordnung $-\mathcal{O}_e$ Näherungsweise nicht existiert.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &\Rightarrow -i\hbar\nabla_1 & \mathbf{p}_2 &\Rightarrow -i\hbar\nabla_2 \\ \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_2 &\Rightarrow \mathbf{r}_2 \end{aligned}$$

$$H' = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_{\mathbf{r}_1}^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_{\mathbf{r}_2}^2 - \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1} - \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_2} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

$$H' = -\frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{r}_1}^2 - \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{r}_2}^2 - \frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_2} + \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} := \frac{1}{r_{12}}$$

$$H'\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

$$\psi(q_1, q_2), \quad q \equiv (\mathbf{r}, s) \quad \begin{array}{l} q_1 = (\mathbf{r}_1, s_1) \\ q_2 = (\mathbf{r}_2, s_2) \end{array}$$

$$\psi(q_1, q_2) = \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \chi(1, 2)$$

Für Wasserstoff haben wir $\chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ und $\chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$

Wasserstoff:

$$\psi(a) = \psi(\mathbf{r}) \chi_{\frac{1}{2}, m_s}$$

[Folie: Niels Bohr in Göttingen 1922]

[Folie: Wolfgang Pauli in Copenhagen 1922]

[Folie: Ausschließungsprinzip oder Pauli Prinzip/Verfahren]

Die folgenden Aussagen sind damit **Aquivalent**:

- keine 2 e^- besetzen den selben Quantenzustand
- die Wellenfunktion muss Antisymmetrisch sein

(bei Fermionen, also Teilchen mit Halbzahligem Spin)

(bei Bosonen (mit ganzzahligem Spin) muss ψ symmetrisch sein!)

1.6.1 Fermionen

$\psi(q_1, q_2)$ Bei Fermionen ist die Wellenfunktion Antisymmetrisch

$$P\psi(q_1, q_2) = \psi(q_2, q_1) = -\psi(q_1, q_2)$$

Es gilt $P\psi(q_1, q_2) = \psi(q_2, q_1)$

Einschub: Bosonen

Bei Bosonen ist die Wellenfunktion Symmetrisch

$$P\psi(q_1, q_2) = \psi(q_2, q_1) = \psi(q_1, q_2)$$

Dies ist nur mit der Quantenfeldtheorie erklärbar.

Was passiert wenn beide e^- den selben Zustand besetzen ?

$$q_1 = q, q_2 = q$$

$$\psi(q_2, q_1) = -\psi(q_1, q_2) \Rightarrow \psi(q, q) = -\psi(q, q) \Rightarrow \psi(q, q) = 0$$

$$P(2 e^- \text{ am selben Ort}) = 0 \Rightarrow 2e^- \text{ nie im selben Quantenzustand !}$$

Der Permutator P vertauscht nicht nur \mathbf{r} sondern auch den Spin der Elektronen!

Wie wollen eine Spinfunktionen $\chi_{\frac{1}{2}, m_s}$ finden, die Symmetrisch oder Antisymmetrisch sind und mit Raumanteilen $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ kombinieren, die umgekehrt also Antisymmetrisch oder Symmetrisch sind.

Somit stellen wir sicher, dass $\psi(q_1, q_2)$ immer Antisymmetrisch (bei Fermionen nötig) ist.

1.6.2 Spinfunktion

$\chi_{1,2}$ Helium $\chi(1,2)$ Symmetrisch
Antisymmetrisch

bei Wasserstoff haben wir zwei Spinfunktionen eingeführt

$$\begin{array}{lll} \chi_{\frac{1}{2},+\frac{1}{2}} & \uparrow & |\alpha\rangle \quad \alpha \\ \chi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} & \downarrow & |\beta\rangle \quad \beta \end{array}$$

Im Helium gilt:

$$\begin{array}{llll} \alpha(1) & \beta(1) & \text{Erstes Elektron} & s_1^2; s_{z1} \\ \alpha(2) & \beta(2) & \text{Zweites Elektron} & s_2^2; s_{z2} \end{array} \Rightarrow \mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 \quad S_z = s_{z1} + s_{z2}$$

Welche Quantenzahlen darf \mathbf{S} annehmen?

$$|s_1 - s_2| \leq S \leq s_1 + s_2 \quad s_1 = s_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq S \leq 1 \quad \begin{array}{l} S = 0 \\ S = 1 \end{array}$$

$$m_s = m_{s1} + m_{s2} = \pm 1; 0$$

Daraus ergeben sich vier Quantenzustände

$$\begin{array}{lll} S = 0 & \Rightarrow & m_s = 0 \quad \text{Singulett Zustand} \\ S = 1 & \Rightarrow & m_s = -1; 0; +1 \quad \text{Triplett Zustand} \end{array}$$

Wir erhalten also die Spinfunktionen:

$$\begin{array}{l} \chi_1(1,2) = \alpha(1)\alpha(2) \\ \chi_2(1,2) = \alpha(1)\beta(2) \\ \chi_3(1,2) = \beta(1)\alpha(2) \\ \chi_4(1,2) = \beta(2)\beta(2) \end{array}$$

Die Funktionen χ_1 und χ_4 sind Symmetrisch:

$$\begin{array}{l} P\chi_1(1,2) = \chi_1(2,1) = \alpha(2)\alpha(1) = \alpha(1)\alpha(2) = \chi_1(1,2) \\ P\chi_4(1,2) = \chi_4(2,1) = \beta(2)\beta(1) = \beta(1)\beta(2) = \chi_4(1,2) \end{array}$$

Die Spinfunktionen χ_2 und χ_3 weisen keine besondere Symmetrieform auf. D.h. sie sind weder Symmetrisch noch Antisymmetrisch:

$$\begin{array}{l} P\chi_2(1,2) = \chi_2(2,1) = \alpha(2)\beta(1) = \chi_3(1,2) \neq \pm\chi_2 \\ P\chi_3(1,2) = \chi_3(2,1) = \beta(2)\alpha(1) = \chi_2(1,2) \neq \pm\chi_3 \end{array}$$

Dafür haben aber χ_2 und χ_3 eine Verbindung untereinander.

Um für χ_2 und χ_3 ebenfalls besondere Symmetrien zu erhalten erstellen wir neue Spinfunktionen aus Linearkombinationen der beiden.

$$\begin{array}{ll} P\{\chi_2(1,2) + \chi_3(1,2)\} = \chi_3(1,2) + \chi_2(1,2) = \{\chi_2(1,2) + \chi_3(1,2)\} & \text{Symmetrisch} \\ P\{\chi_2(1,2) - \chi_3(1,2)\} = \chi_3(1,2) - \chi_2(1,2) = -\{\chi_2(1,2) - \chi_3(1,2)\} & \text{Antisymmetrisch} \end{array}$$

Zustand	Darstellung	Symmetrie	s	m_s
$\chi_{0,0}(1,2)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(1)\beta(2) - \beta(1)\alpha(2)]$	Antisymmetrisch	0	0
$\chi_{1,1}(1,2)$	$\alpha(1)\alpha(2)$	Symmetrisch	1	1
$\chi_{1,0}(1,2)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(1)\beta(2) + \beta(1)\alpha(2)]$	Symmetrisch	1	0
$\chi_{1,-1}(1,2)$	$\beta(1)\beta(2)$	Symmetrisch	1	-1

Wie kommt man nun auf den Wert für m_s ? (Notation: $\chi_{a,b} : s = a, m_s = b$)
 Beispielrechnung für $\chi_{1,-1}$:

$$\begin{aligned} S_z \chi_{1,-1}(1, 2) &= S_z \beta(1) \beta(2) = (s_{z_1} + s_{z_2}) \beta(1) \beta(2) \\ &= s_{z_1} \beta(1) \beta(2) + s_{z_2} \beta(1) \beta(2) \\ &= \left[s_{z_1} \beta(1) \right] \beta(2) + \beta(1) \left[s_{z_2} \beta(2) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \hbar \beta(1) \beta(2) + \beta(1) \left(-\frac{1}{2} \hbar \right) \beta(2) \\ &= -\hbar \beta(1) \beta(2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \beta(1) \beta(2)$ ist Eigenzustand von S_z mit dem Eigenwert $m_s \hbar = -1 \cdot \hbar \Rightarrow m_s = -1$

Für S^2 gilt:

$$\begin{aligned} S^2 \chi_{1,-1}(1, 2) &= S^2 \beta(1) \beta(2) = [s_1^2 + s_2^2 + 2 \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2] \beta(1) \beta(2) \\ &= \frac{3}{4} \hbar^2 \beta(1) \beta(2) + \frac{3}{4} \hbar^2 \beta(1) \beta(2) + 2 \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 \beta(1) \beta(2) \\ &= \frac{3}{2} \hbar^2 \beta(1) \beta(2) + 2 \underbrace{\{s_{1_x} s_{2_x} + s_{1_y} s_{2_y}\}}_{\text{noch zu Beweisen}} + \underbrace{s_{1_z} s_{2_z}}_{\text{kein Problem Eigenzustände}} \beta(1) \beta(2) \end{aligned}$$

Dies ist mit den Leiteroperatoren lösbar:

$$\begin{aligned} s_{1+} &= s_{1_x} + i s_{1_y} \\ s_{1-} &= s_{1_x} - i s_{1_y} \end{aligned}$$

[Folie: Vektormodell mit 2 Spin]

Programm Heute

- 1) Modell der unabhängigen Elektronen
- 2) Zentralfeldnäherung
- 3) Zusammensetzung Drehimpulse (Termschema)
- 4) Angeregte Zustände { Coulomb-; Austauschintegral }

Aus der Schrödingergleichung des Wasserstoffatoms erhalten wir den Hamiltonian als Lösung:

$$H = -\frac{1}{2} \nabla_{r_1}^2 - \frac{1}{2} \nabla_{r_2}^2 - \frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_2} + \frac{1}{r_{12}} = k_1 + k_2 + \frac{1}{r_{12}}$$

mit den einzelnen Hamilton-Operatoren ohne Kreuzterme:

$$k_1 = -\frac{1}{2} \nabla_{r_1}^2 - \frac{2}{r_1} \quad k_2 = -\frac{1}{2} \nabla_{r_2}^2 - \frac{2}{r_2}$$

Wir nähern:

$$H \approx k_1 + k_2$$

$$H \psi^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E^{(0)} \psi^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

$$\psi^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_{n_1 l_1 m_1}(\mathbf{r}_1) \psi_{n_2 l_2 m_2}(\mathbf{r}_2)$$

n_i, l_i, m_i sind die Quantenzahlen eines Wasserstoffähnlichen Atoms mit $Z = 2$

$$k_1 \psi_{n_1 l_1 m_1}(\mathbf{r}_1) = E_1^{(0)} \psi_{n_1 l_1 m_1}(\mathbf{r}_1)$$

$$k_2 \psi_{n_2 l_2 m_2}(\mathbf{r}_2) = E_2^{(0)} \psi_{n_2 l_2 m_2}(\mathbf{r}_2)$$

$$\begin{aligned} H\psi^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= (k_1 + k_2)\psi^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (k_1 + k_2)\psi_{n_1 l_1 m_1}(\mathbf{r}_1)\psi_{n_2 l_2 m_2}(\mathbf{r}_2) \\ &= k_1 \cdot \psi_{n_1 l_1 m_1}(\mathbf{r}_1)\psi_{n_2 l_2 m_2}(\mathbf{r}_2) + k_2 \cdot \psi_{n_1 l_1 m_1}(\mathbf{r}_1)\psi_{n_2 l_2 m_2}(\mathbf{r}_2) \\ &= \left[k_1 \cdot \psi_{n_1 l_1 m_1}(\mathbf{r}_1) \right] \psi_{n_2 l_2 m_2}(\mathbf{r}_2) + \psi_{n_1 l_1 m_1}(\mathbf{r}_1) \left[k_2 \cdot \psi_{n_2 l_2 m_2}(\mathbf{r}_2) \right] \\ &= E_1^{(0)} \psi_{n_1 l_1 m_1}(\mathbf{r}_1)\psi_{n_2 l_2 m_2}(\mathbf{r}_2) + \psi_{n_1 l_1 m_1}(\mathbf{r}_1) E_2^{(0)} \psi_{n_2 l_2 m_2}(\mathbf{r}_2) \\ &= \left[E_1^{(0)} + E_2^{(0)} \right] \psi_{n_1 l_1 m_1}(\mathbf{r}_1)\psi_{n_2 l_2 m_2}(\mathbf{r}_2) \\ &= \left[E_1^{(0)} + E_2^{(0)} \right] \psi^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \end{aligned}$$

$$E^{(0)} = E_1^{(0)} + E_2^{(0)}$$

$$E_1^{(0)} = -\frac{1}{2} \frac{Z^2}{n_1^2} \quad E_2^{(0)} = -\frac{1}{2} \frac{Z^2}{n_2^2} \quad E^{(0)} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{Z^2}{n_1^2} + \frac{Z^2}{n_2^2} \right\}$$

1.6.3 Grundzustand

Es gilt im Folgenden immer $n_1 = 1, n_2 = 1$

$$E^{(0)} = -\frac{1}{2} [Z^2 + Z^2] = -Z^2 = -4$$

$$E^{(0)} \approx -108,8 \text{ eV}$$

★hier fehlt eine Grafik★ Heliumatom mit 2 e^- oder schon Ionisiert mit nur einem e^-

Im Experiment stellen wir fest die erste und zweite Ionisationsenergien sind $\hbar\omega_{\text{XUV}} = 24,6 \text{ eV} = I_{p_1}$ und $\hbar\omega_{\text{XUV}_2} \approx 54,4 \text{ eV} = I_{p_2}$. I_p steht hierbei für „Ionisationspotential“.

Die Summe $I_{p_1} + I_{p_2} \approx 79,0 \text{ eV}$, also

$$E_{\text{exp}} \approx -79,0 \text{ eV}$$

ist aber wesentlich geringer, als die zuvor bestimmte Energie von $E^{(0)} \approx -108,8 \text{ eV}$. Allerdings bemerken wir:

$$E = -108,8 \text{ eV} \quad \Rightarrow \quad \frac{E}{2} = 54,4 \text{ eV}$$

Dies ist dasselbe wie die zweite Ionisationsenergie! In unserem Modell wird also die Wechselwirkung der Elektronen miteinander nicht beschrieben, was zu dem falschen Ergebnis führt. Um eine bessere Näherung zu machen und ein besseres Modell aufzustellen verwenden wir im Folgenden die Störungstheorie.

1.6.4 Störungstheorie

$$E^{(1)} = \left\langle \psi^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \left| \frac{1}{r_{12}} \right| \psi^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right\rangle \quad \frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

Wie sieht die Wellenfunktion $\psi^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ im Grundzustand (Groundstate (GS)) aus?

Es gilt: $n_1 = 1, l_1 = 0, m_1 = 0, n_2 = 1, l_2 = 0, m_2 = 0$.

Zunächst einmal erhalten wir eine Symmetrischen Wellenfunktion:

$$\psi_{GS}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_{100}(\mathbf{r}_1)\psi_{100}(\mathbf{r}_2)$$

Wir brauchen aber eine Antisymmetrische. Dies erreichen wir mit der Antisymmetrischen Spinfunktion $\chi_{0,0}$.

$$\psi_{GS}^{(0)}(q_1, q_2) = \underbrace{\psi_{GS}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}_{\text{Symm.}} \underbrace{\chi_{0,0}(1, 2)}_{\text{Antisymm.}} = \psi_{GS}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(1)\beta(2) - \beta(1)\alpha(2)]$$

$$[\psi_{100}(\mathbf{r}_1)\psi_{100}(\mathbf{r}_2) - \psi_{100}(\mathbf{r}_2)\psi_{100}(\mathbf{r}_1)] = 0$$

\Rightarrow Es gibt keinen Antisymmetrischen Raumanteil für ψ

$$\begin{aligned} E^{(0)} &= \left\langle \psi^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \left| \frac{1}{r_{12}} \right| \psi^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right\rangle \\ &= \int \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \underbrace{\psi_{100}^*(\mathbf{r}_1)\psi_{100}^*(\mathbf{r}_2)}_{\psi^{*(0)}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \frac{1}{r_{12}} \underbrace{\psi_{100}(\mathbf{r}_1)\psi_{100}(\mathbf{r}_2)}_{\psi^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)} \end{aligned}$$

Da $\frac{1}{r_{12}}$ als Operator nur ein Vorfaktor ist und keine Ableitung oder ähnliches sind die Terme vertauschbar.

$$\begin{aligned} E^{(1)} &= \int \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 |\psi_{100}(\mathbf{r}_1)|^2 \frac{1}{r_{12}} |\psi_{100}(\mathbf{r}_2)|^2 \\ \rho_1(\mathbf{r}_1) &= |\psi_{100}(\mathbf{r}_1)|^2 (-e) \quad \rho_2(\mathbf{r}_2) = |\psi_{100}(\mathbf{r}_2)|^2 (-e) \\ E^{(1)} &= \int \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \rho_1(\mathbf{r}_1) \frac{1}{r_{12}} \rho_2(\mathbf{r}_2) = \int \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \rho_1(\mathbf{r}_1) \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \rho_2(\mathbf{r}_2) \end{aligned}$$

Die genaue Berechnung wird hier übersprungen.

$$E^{(1)} = \frac{5}{8} Z \stackrel{Z=2}{=} \frac{5}{4}$$

$$E_{GS} = E^{(0)} + E^{(1)} = -Z^2 + \frac{5}{8}Z = -\frac{11}{4} \text{ a.u.} = \boxed{-74,8 \text{ eV}}$$

a.u. steht hierbei für "atomic units".

Erwartet waren $E = -79,0 \text{ eV}$. Diese Näherung ist also schon um einiges besser.

Zentralfeldnäherung

$$H = H_0 + H'$$

H' ist eine kleine Zentralfeldstörung

$$\begin{aligned} H_0 &= -\frac{1}{2} \nabla_{r_1}^2 + V_{\text{eff}}(r_1) - \frac{1}{2} \nabla_{r_2}^2 + V_{\text{eff}}(r_2) \\ H' &= \frac{1}{r_{12}} - \frac{2}{r_1} - V_{\text{eff}}(r_1) - \frac{2}{r_2} - V_{\text{eff}}(r_2) \end{aligned}$$

V_{eff} ist das Effektive Potential, dass nur von $r = |\mathbf{r}|$ und nicht von \mathbf{r} abhängt.

$$V_{\text{eff}} = -\frac{2-S}{r} = \underbrace{-\frac{2}{r}}_{\text{Coulomb Potential mit } Z=2} + \underbrace{\frac{S}{r}}_{\text{Abschirmungs-Konstante, die Kernpotential reduziert}}$$

$S = \text{Konstante oder Parameter}$

$$S \approx 0,3 \Rightarrow Z' = Z_e = 1,7$$

★hier fehlt eine Grafik★ Heliumatom mit 2 Elektronen

$$V_{\text{eff}} = -\frac{Z_e}{r} \quad Z_e = Z - S \quad \text{effektive Kernladungszahl}$$

Im Grundzustand gilt dann:

$$\psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{Z_e^3}{\pi} e^{-Z_e(r_1+r_2)}$$

Ansonsten ist der Term komplizierter.

Die Variationsrechnung (Analytisch berechenbar) liefert:

$$E[\psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] = \frac{\langle \psi_0 | H_0 | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} = Z_e^2 - 2ZZ_e + \frac{5}{8}Z_e \quad \text{mit } Z = 2$$

und

$$Z_e \approx Z - \frac{5}{16} = Z - S \quad S = \frac{5}{16}$$

$E[\psi_0] \approx -78,02 \text{ eV}$

Verglichen mit den Experimentell bestätigten $E_{\text{exp}} = -79,0 \text{ eV}$ ist dies eine gute Näherung.

1.6.5 Angeregte Zustände des Heliumatoms

Die Wellenfunktion sieht dann folgendermaßen aus:

$$\psi = \psi_{n_1 l_1 m_1}(\mathbf{r}_1) \psi_{n_2 l_2 m_2}(\mathbf{r}_2)$$

und hat keine besondere Form wie Symmetrie oder Antisymmetrie. Es gilt außerdem $n_1, l_1, m_1 \neq n_2, l_2, m_2$.

Wir definieren:

$$\psi_+(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_{n_1 l_1 m_1}(\mathbf{r}_1) \psi_{n_2 l_2 m_2}(\mathbf{r}_2) + \psi_{n_1 l_1 m_1}(\mathbf{r}_2) \psi_{n_2 l_2 m_2}(\mathbf{r}_1) \} \quad \text{Symmetrisch}$$

$$\psi_-(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_{n_1 l_1 m_1}(\mathbf{r}_1) \psi_{n_2 l_2 m_2}(\mathbf{r}_2) - \psi_{n_1 l_1 m_1}(\mathbf{r}_2) \psi_{n_2 l_2 m_2}(\mathbf{r}_1) \} \quad \text{Antisymmetrisch}$$

Für den Grundzustand gilt also:

$$\begin{aligned} \psi_+(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \psi_{100}(\mathbf{r}_1) \psi_{100}(\mathbf{r}_2) \Rightarrow \chi_{0,0}(1,2) \quad \text{Singulett Zustand} \\ \psi_-(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= 0 \quad \text{(es gibt keinen Triplett Grundzustand.)} \end{aligned}$$

$\chi_{0,0}(1,2)$	$S = 0$	$2S + 1 = 1$	Singulett Zustand	Parahelium
$\chi_{1,m_S}(1,2)$	$S = 1$	$2S + 1 = 3$	Triplett Zustand	Orthohelium

Notation

$$n^{2S+1}L_J$$

$$L = l_1 + l_2 \quad |l_1 - l_2| \leq L \leq l_1 + l_2$$

$$1^1S \Rightarrow 1S \ 1S$$

$$2^1S \Rightarrow 1S \ 2S \quad S = 0$$

$$2^3S \Rightarrow 1S \ 2S \quad S = 1$$

$$2^1P \Rightarrow 1S \ 2P \quad S = 0$$

$$2^3P \Rightarrow 1S \ 2P \quad S = 1$$

Programm Heute

- Angeregte Zustände des Heliumatoms (Coulomb-; Austauschintegral)
- Spektren von Helium
- Auswahlregeln (Übergänge)

1.6.6 Angeregte Zustände

$$\psi_+(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_{n_1 l_1 m_1}(\mathbf{r}_1) \psi_{n_2 l_2 m_2}(\mathbf{r}_2) + \psi_{n_1 l_1 m_1}(\mathbf{r}_2) \psi_{n_2 l_2 m_2}(\mathbf{r}_1) \}$$

$$n_1 = 1, l_1 = 0, m_1 = 0$$

$$\psi_+(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_{100}(\mathbf{r}_1) \psi_{nlm}(\mathbf{r}_2) + \psi_{100}(\mathbf{r}_2) \psi_{nlm}(\mathbf{r}_1) \}$$

$$\psi_-(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_{100}(\mathbf{r}_1) \psi_{nlm}(\mathbf{r}_2) - \psi_{100}(\mathbf{r}_2) \psi_{nlm}(\mathbf{r}_1) \}$$

$$H' = \frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

$$E_{\pm}^{(1)} = \langle \psi_{\pm}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) | \frac{1}{r_{12}} | \psi_{\pm}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle$$

Beim Folgenden wurde die Herleitung weggelassen. Wir erhalten jedoch für die Energien eine Aufspaltung in Singulett und Triplett Zustände:

$$E_+^{(1)} = J_{nl} + K_{nl} \quad E_-^{(1)} = J_{nl} - K_{nl}$$

Der erste Ausdruck J_{nl} ist dabei das Coulombintegral:

Coulombintegral

$$J_{nl} = \int \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 |\psi_{100}(\mathbf{r}_1)|^2 \frac{1}{r_{12}} |\psi_{nlm}(\mathbf{r}_2)|^2$$

Wobei

$$\rho_{100}(\mathbf{r}_1) = |\psi_{100}(\mathbf{r}_1)|^2 \quad \rho_{nlm}(\mathbf{r}_2) = |\psi_{nlm}(\mathbf{r}_2)|^2$$

Der zweite Term ist das Austauschintegral:

Austauschintegral

$$K_{nl} = \int \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \psi_{100}^*(\mathbf{r}_1) \psi_{nlm}^*(\mathbf{r}_2) \frac{1}{r_{12}} \psi_{100}(\mathbf{r}_2) \psi_{nlm}(\mathbf{r}_1)$$

Dieses Austauschintegral ist eine Folge des Pauli-Prinzips. Wir erhalten also eine Singulett/Triplett Aufspaltung, obwohl wir mit einem Hamiltonoperator **ohne** Spinanteil begonnen haben.

Schauen wir uns jetzt die Energien im Angeregten Zustand an.

$$E_{nl+} = -\frac{Z^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + J_{nl} + K_{nl}$$

$$E_{nl-} = -\frac{Z^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + J_{nl} - K_{nl}$$

Wobei $K_{nl} > 0$ gelten muss.

$$\begin{array}{lll}
 1S \ 2S & \nearrow & 2^1S \quad \text{Singulett} \quad E_{1,2}^{(0)} + J_{20} + K_{20} \\
 & \searrow & 2^3S \quad \text{Triplett} \quad E_{1,2}^{(0)} + J_{20} - K_{20}
 \end{array}$$

$l = 1 \rightarrow$ P-Zustand

Die Energien sind dabei:

$$\begin{aligned}
 J_{20} &= J_{1S,2S} \approx 9,1 \text{ eV} & J_{21} &= J_{1S,2P} \approx 10 \text{ eV} \\
 K_{20} &= K_{1S,2S} \approx 0,4 \text{ eV} & K_{21} &= K_{1S,2P} \approx 0,1 \text{ eV}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{nl\pm} &= J_{nl} - \frac{1}{2\hbar^2} (\hbar^2 + \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2) K_{nl} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 \\
 \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 \quad \mathbf{S} &= \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}^2 = \mathbf{s}_1^2 + \mathbf{s}_2^2 + 2\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 \\
 &\Rightarrow \quad \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = \frac{1}{2} \{S^2 - s_1^2 - s_2^2\}
 \end{aligned}$$

Für den Singulett Zustand gilt: $S = 0, s_1 = \frac{1}{2}, s_2 = \frac{1}{2}$

$$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \hbar^2 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \hbar^2 \right\} = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{3}{4} 2\hbar^2 \right\} = -\frac{3}{4} \hbar^2$$