

Experimentelle Methoden

Vorlesung von Prof. Dr. apl. Horst Fischer im Sommersemester 2019

Markus Österle Damian Lanzenstiel

27. Mai 2019

Inhaltsverzeichnis

0	Einführung	2
0.1	Wichtige Infos	2
0.2	Programm der Vorlesung	2
1	Wechselwirkung geladener Teilchen mit Materie	3
1.1	Klassische Betrachtung der Rutherfordstreuung	3
1.2	Energieverlust von Elektronen e^- und Positronen e^+	4
1.2.1	Strahlungslänge	5
2	Wechselwirkungen von Quanten / Photonen	6
2.1	Photoeffekt	6
2.2	Compton Streuung	6
2.3	Paarbildung	7
2.3.1	Schwellen	7
3	Detektoren für die Orts- und Zeitmessung	8
3.1	Ionisationsdetektoren	8
3.2	Halbleiterzähler	9
3.2.1	Funktionsprinzip:	9
3.2.2	Grundlagen	10
3.3	Szintillationsdetektor	10
3.3.1	Funktionsprinzip	10
3.4	Photomultiplier	10
4	Teilchenidentifikation	11
4.1	Čerenkov Strahlung	11
4.2	Übergangsstrahlung	12
4.3	Kalorimeter	12
5	Statistik und Wahrscheinlichkeiten	14
5.1	Einführung	14
5.2	Verteilung einer Zufallsvariable	16
5.2.1	Diskussion der Verteilungsfunktion	16

Kapitel 0

Einführung

0.1 Wichtige Infos

Vorlesung Montag 14:15 - 15:45

Übungen ILIAS

Kontakt Horst Fischer Physikhochhaus Zi. 609
★hier fehlt was★ (email usw. Folie 1)

0.2 Programm der Vorlesung

- Grundlagen moderner Nachweissysteme
- Grundlagen der Statistik und Unsicherheitsbetrachtungen
- Grundlagen der Analogelektronik

Kapitel 1

Wechselwirkung geladener Teilchen mit Materie

Nachweis durch Wirkung des Teilchens auf die Materie

- Ionisation, Szintillation
- Čevenkov-, Übergangsstrahlung
- Rückstoß

⇒ Teilcheneigenschaften verändert

- Energieverlust
- Richtungsänderung
- Identitätsverlust

1.1 Klassische Betrachtung der Rutherfordstreuung

- stimmt mit QM in niederster Ordnung überein

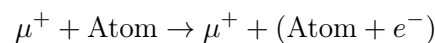
solange: „schwere Teilchen“

$v \gg v_e$ in Hülle

$\Delta E \gg$ Bindungsenergie von e^-

★hier fehlt eine Grafik★

Typisches Beispiel:



Coulomb-Kraft

$$F_{\parallel}(x) = F_{\parallel}(-x)$$
$$F_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z \cdot e \cdot Z \cdot e}{r^2} \frac{b}{|\mathbf{r}|}$$

Impulsübertrag

$$\Delta\rho_T = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\perp} df = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2Z \cdot z}{\beta cb}$$

$\beta = \frac{v}{c}$ Mehr zum Thema und die genaue Rechnung findet man im Lehrbuch von Jackson.

Energieübertrag

[Folie: Energieverlust: klassisch nach Bohr]

$$\Delta E = \frac{\Delta \rho_T^2}{2M} = \frac{e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2} \cdot \frac{Z^2 z^2}{M\beta^2 c^2 b^2} \propto \frac{1}{b^2}$$

bei Kohärenter Streuung

$$\frac{\Delta E \text{ Elektronenhülle}}{\Delta E \text{ Kern}} = \frac{2m_p}{m_e} \approx 4000$$

Hülle: $M = Z \cdot m_e$

Kern: $M = A \cdot m_p = 2Z \cdot m_p$

\Rightarrow Die Streuung am Kern ist vernachlässigbar

Der gesamte (mittlere) Energieverlust ist dann:

$$\langle dE \rangle = \int \underbrace{\Delta E \cdot 2\pi b \, db}_{\text{Volumenelement}} \cdot \underbrace{Z \cdot \frac{\rho \cdot N_A}{A}}_{=n_e} dx$$

Bethe-Bloch Beziehung

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle &= D \cdot \underbrace{\frac{Z \cdot \rho}{A}}_{\text{Medium}} \cdot \underbrace{\left(\frac{z}{\beta} \right)^2}_{\text{Projektil}} \cdot \underbrace{\ln \left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}} \right)}_{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \gamma^2 \beta^2}{I} T_{\max} \right)} \\ &= D \cdot \underbrace{\frac{Z \cdot \rho}{A}}_{\text{Medium}} \cdot \underbrace{\left(\frac{z}{\beta} \right)^2}_{\text{Projektil}} \cdot \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \gamma^2 \beta^2}{I} T_{\max} \right) \end{aligned}$$

mit $I = \hbar\omega$: Ionisationspotential des Streuzentrums

und T_{\max} : der Energie des e^- tragen kann

[Folie: Energieverlust]

[Folie: Mittlerer Energieverlust nach Bethe Bloch]

[Folie: Relativistischer Anstieg]

[Folie: Materialabhängigkeit des mittleren Energieverlusts]

[Folie: Minimaler Energieverlust]

[Folie: Abhängigkeit vom Ionisationspotential]

[Folie: Reichweite von Teilchen in Materie]

[Folie: Bragg-Kurve](Einstrahl-Tiefe in einen Menschen)

[Folie: Anwendung Teilchenidentifizierung]

[Folie: Energieverlust von Teilchen durch Ionisation]

1.2 Energieverlust von Elektronen e^- und Positronen e^+

Bremsstrahlung führt zu zusätzlichem Energieverlust.

$$E_K \approx \frac{600 \dots 700}{Z} \text{ MeV} \quad \text{kritische Energie}$$

Z des Materials. Unterschiede zwischen fest, flüssig, gasförmig.

Material	E_K
Luft:	84,0 MeV
Pb:	7,4 MeV

$$\left. \frac{dE}{dx} \right|_{\text{Brems}} \propto \frac{Z^2}{m^2} \quad \begin{array}{l} \text{Target} \\ \text{Projektil} \end{array}$$

Bremsstrahlung wichtig für e^\pm

$$\frac{m_\mu^2}{m_e^2} \left(\frac{100}{0,5} \right)^2 = 40000$$

(Eigentlich 105 statt 100)

Bremsstrahlung führt zu

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dx} &= E_e \cdot 4\alpha r_e^2 N_A \frac{\rho Z}{A} \left\{ \ln \frac{183}{Z^{1/3}} + \frac{1}{18} - f(z) \right\} \\ f(z) &= \alpha Z \left\{ \frac{1}{1 + \alpha^2 Z^2} + 0.2 + \mathcal{O}(\alpha Z^2) \right\} \end{aligned}$$

α : gemessene Konstante $\alpha = 5,3$ für H | 3 Pb

1.2.1 Strahlungslänge

$$\frac{1}{L_{\text{rad}}} = 4\alpha r_e^2 N_A \frac{\rho Z}{A} \left\{ \ln \frac{183}{Z^{1/3}} + \frac{1}{18} - f(z) \right\} = \frac{dE}{dx} \cdot \frac{1}{E_e}$$

(Die Formale stammt von Bether Heitler).

Die Strahlungslänge ist die Distanz, in der die e^\pm den Bruchteil $(1 - 1/e)$ der Energie durch Bremsstrahlung verlieren.

$$\left. \frac{dE}{dx} \right|_{\text{Brems}} = \frac{E_e}{L_{\text{rad}}}$$

Kapitel 2

Wechselwirkungen von Quanten / Photonen

2.1 Photoeffekt

Photoeffekt = Absorption eines Photons ist gebunden an Hüllenelektron

$$\gamma e^- A \rightarrow e^- A^+$$

★hier fehlt eine Grafik★

Wichtig $E_\gamma \gtrsim E_{\text{bindung}} \approx \mathcal{O}(100 \text{ keV})$. 10% der WW an e^- der inneren Schalen.

$$\sigma_{\text{tot}} \propto Z^5 \cdot \left(\frac{m_e c}{E_\gamma} \right)^{-7/2}$$

Wichtig: $\sigma_{\text{Photoeffekt}}$ ist pro Atom

2.2 Compton Streuung

[Folie: Wechselwirkung von Photonen mit Materie]

Streuung an quasi-freien e^- :

★hier fehlt eine Grafik★

Energie & Impulserhaltung

$$E_{\gamma'} = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

$$\lambda_{\gamma'} = \lambda_\gamma + \lambda_C (1 - \cos \theta)$$

Compton Wellenlänge

$$\lambda_C \leq \frac{\hbar}{m_e c^2} = \frac{r_e}{\alpha_{\text{em}}} = 39 \cdot 10^{-13} \text{ m}$$

Wichtig:

$$E_{\gamma'}^{\text{max}}(\theta = 0) = E_\gamma$$

$$E_{\gamma'}^{\text{min}} = \frac{E_\gamma}{1 + 2 \frac{E_\gamma}{m_e c^2}}$$

Wegen der Impulserhaltung gilt:

$$\theta_e^{\text{max}} \leq \frac{\pi}{2}$$

Wirkungsquerschnitt (aus der Quantenelektrodynamik (QED))

$$\sigma_{\text{Compton}} \propto \frac{1}{E_\gamma} \cdot \ln \frac{2E_\gamma}{m_e c^2}$$

Erzeugung hochenergetischer Photonen durch inverse Compton-Streuung.

2.3 Paarbildung

Paarbildung ist nur möglich in der Nähe eines Kerns (wegen Energie- und Impulserhaltung).

2.3.1 Schwellen

$$E_\gamma > 2m_e \approx 1,02 \text{ MeV} \quad \text{im Kernfeld}$$

$$E_\gamma > 4m_e \approx 2,04 \text{ MeV} \quad \text{im Elektronenfeld}$$

$$\gamma + A \rightarrow e^- e^+ (A)$$

★hier fehlt eine Grafik★

$$\gamma + e^- \rightarrow e^- e^+ e^-$$

(Indent-Reaktion)

★hier fehlt eine Grafik★

$$\sigma_{\text{Paar}} \propto \ln 183 Z^{-1/3} \propto \frac{1}{L_{\text{rad}}}$$

Insgesamt erhalten wir also für den Photoeffekt, die Compton-Streuung und die Paarbildung zusammen:

$$\sigma_{\text{tot}} \propto \sigma_{\text{Photo}} + \sigma_{\text{Compton}} + \sigma_{\text{Paar}}$$

$$\sigma_\gamma \propto c_1 Z^5 E^{7/2} + c_2 Z \frac{1}{E} \ln E + c_3 Z^2$$

Minimum bei $\mathcal{O}(10 \text{ MeV})$

\Rightarrow große Reichweite !

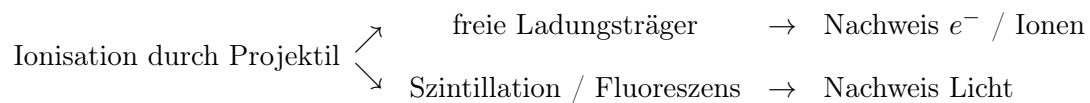
Kapitel 3

Detektoren für die Orts- und Zeitmessung

Programm Heute:

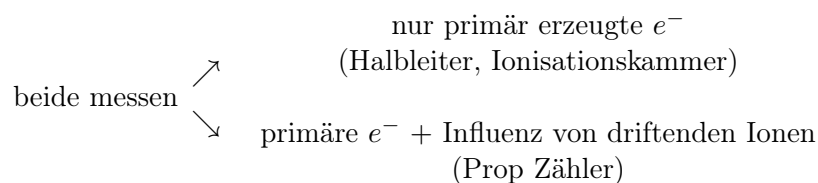
- Ionisationsdetektoren
- Szintillation
- Photomultiplier (PM)

„Rekation“ im Material auf elektrische geladenes Teilchen oder Quanten



3.1 Ionisationsdetektoren

- mit flüssigem oder gasförmigen Edelgas + Beimischungen als „Quentscher“
- Halbleiter



★hier fehlt eine Grafik★ Strohalmdetektor

Elektrisches Feld aus statischen Maxwellgleichungen:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \\ \int_S \mathbf{E} d\mathbf{S} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV\end{aligned}$$

auf Drahtlänge Δz befindet sich die Ladung ΔQ

$$\begin{aligned}E(r) \cdot 2\pi r \Delta z &= \frac{1}{\varepsilon_0} \Delta Q \\ \Rightarrow E(r) &= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \frac{dQ}{dz}\end{aligned}$$

Das \mathbf{E} -Feld wird durch angelegte Spannung erzeugt. Aus der Abbildung oben folgt dann:

$$\int_{r_i}^{r_a} E(r) dr = U = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \cdot \frac{dQ}{dz}$$

$$E(r_0) = \frac{U}{r_0 \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}$$

[Folie: Arbeitsbereiche von Gasionisationsdetektoren]

[Folie: Funktionsprinzip Gasionisationsdetektoren]

Ionisationszähler → Dosimetrie / Dosimeter

Proportionalitätsbereich → Teilchennachweis (Ort und Zeit)

Geiger Müller Zähler ist selbst verstärkend → keine extra Geräte notwendig

Elektronen & Ionen, die im Abstand r_0 erzeugt werden driften zur Anode/Kathode.

z.B.

$$\Delta t^- = \int_{r_i}^{r_a} \frac{dr}{\theta_0^-} = \int_{r_i}^{r_a} \frac{dr}{\mu^- \cdot E} = \frac{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}{2\mu^- E}$$

[Folie: Eigenschaften von Edelgasen]

[Folie: Vieldrahtproportional- und Driftkammern]

[Folie: MICROME GAS]

[Folie: GEM / THGEM]

3.2 Halbleiterzähler

Kristallines Si & Ge. Ideoal für $\frac{dE}{dx}$ hochauflösende Ortsmessung

3.2.1 Funktionsprinzip:

- Diode in Sperrrichtung
- ionisierende Strahlung erzeugt e^- /Loch Paare
- äußere Betriebsspannung saugt e^- /Löcher ab

Vorteile:

a) $\langle E \rangle$ zur Erzeugung eines e^- /Loch Paars $\langle E \rangle_{\text{Si}} = 3,6 \text{ eV}$ und $\langle E \rangle_{\text{Ge}} = 2,8 \text{ eV}$.

Zum Vergleich $\langle E \rangle_{\text{Gas}} \approx 10.40 \text{ eV}$ und $\langle E \rangle_{\text{Szint}} = 100 \text{ eV}-1 \text{ keV}$

b) hohe spezifische Dichte $\Rightarrow \frac{dE}{dx}$ groß

c) sehr schnelle ★hier fehlt was★

d) kompakte ★hier fehlt was★

3.2.2 Grundlagen

Festkörper:

★hier fehlt eine Grafik★

Direkte Rekombination $\mathcal{O}(s)$ weil e^- & Loch Energie- und Impulserhaltung.

[Folie: Funktionsprinzip (Halbleiter)]

[Folie: Funktionsprinzip: Streifenzähler]

[Folie: Ultrasonic Bonding]

[Folie: ATLAS Silizium Spurdetektor]

[Folie: Silizium Detektoren als Spur Detektor (CMS: Currently the Most Silicon)]

[Folie: Halbleiter-Pixelzähler]

[Folie: Zukunft: 3D-Technologie]

3.3 Szintillationsdetektor

$\frac{dE}{dx} \rightarrow$ Anregung der Atome/Moleküle \rightarrow Lichtemission $\propto \frac{dE}{dx}$.

Wichtig dabei ist die Transparenz des Detektors für das erzeugte Licht. Vorteilhaft ist deswegen, wenn die Spektralemission im sichtbaren Bereich ist.

Typen:

- organische Kristalle, Flüssigkeiten oder Plastik
- anorganische Kristalle
- flüssige, gasförmige Edelgase

3.3.1 Funktionsprinzip

a) Anorganisch

- Dotieren mit Farbzentren (Aktivatorzentren) (Leerstellen im Gitter)
- Ionisation führt zu freien e^-
- \Rightarrow Rekombination in Aktivatorzentren \rightarrow Anregung selbige \rightarrow Übergang in Grundzustand unter ★hier fehlt was★ } $\mathcal{O}(\mu s)$

b) Organisch

- Ionisation & Anregung von Molekülen
- \rightarrow emittiert beim Zerfall UV- Licht + Wellenlängenverschiebung \Rightarrow sichtbares Licht

[Folie: Szintillatoren]

[Folie: Einsatzprinzip]

[Folie: Emission]

[Folie: Organische Szintillatoren - Licht Absorption]

3.4 Photomultiplier

[Folie: Photomultiplier]

[Folie: Quanteneffizienz]

[Folie: PMT und Szintillator Handhabung]

Kapitel 4

Teilchenidentifikation

Programm Heute

- Cherenkov Strahlung
- Übergangsstrahlung
- Energiemessung
- Elektromagnetische Kalorimeter
- Hadronische Kalorimeter

4.1 Čerenkov Strahlung

★hier fehlt eine Grafik★

Čerenkov Strahlung wird emittiert wenn $v > v_{\text{Phase}}(\text{Medium})$ also bei $\beta > \frac{1}{n_{\text{Medium}}}$.

Der Abstrahlwinkel ist:

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta \cdot n} = \frac{v_{\text{Phase}}(\text{Medium})}{v_{\text{Teilchen}}} \Rightarrow \frac{c}{n} \cdot \frac{1}{v_{\text{Teilchen}}}$$

mit n dem Brechungsindex im Medium.

Der maximale Abstrahlwinkel ϑ :

$$\Theta^{\max} = \arccos \frac{1}{n}$$

Schwellenenergie E_s ab der Čerenkov Strahlung auftritt

$$\gamma_s = \frac{E_s}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_s^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}$$

[Folie: Leuchten eines Kernreaktors]

[Folie: Čerenkov Effekt]

Anzahl emittierter Photonen

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = 2\pi\alpha Z^2 \left(1 - \frac{1}{(p_n)^2}\right) \frac{d\lambda}{\lambda^2} \approx 2\pi\alpha Z^2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} \sin^2 \theta$$

$n = n(\lambda)$

für [400 nm, 700 nm] $\frac{dN}{dx} \approx$ ★hier fehlt was★

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\check{C}} \approx 10^{-2} \left(\frac{dE}{dx'}\right)_{\text{Ionis}}$$

als Radiator: alle transparente Stoffe: NaCl, Diamant, Bleiglas, H₂O.

[Folie: Čerenkov Winkel vs. Teilchengeschwindigkeit]

[Folie: Photonenausbeute]

[Folie: Verschiedene Typen]

4.2 Übergangsstrahlung

★hier fehlt eine Grafik★

Teilchen + Spiegelladung \Rightarrow veränderlicher Dipol \Leftrightarrow Übergangsstrahlung

★hier fehlt was★

Abstrahlungscharakteristik

$$\frac{dE}{d\omega d\Omega} = \frac{h\alpha}{\pi^2} \beta^2 \cdot f(\theta)$$

ω : Plasmafrequenz

a) nicht relativistischer Fall $f(\theta) = \sin^2 \theta$

b) relativistischer Fall $f(\theta) = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \beta \cos^2 \theta}$

c) $v = \frac{E}{m} \gg 1000$ u.s. Bereich der Röntgenstrahlung

Polarisationsebene definiert durch

- bewegte Ladung
- Abstrahlrichtung des Photonen

Bsp e^- mit $E = 15$ GeV, $\gamma_e = 30000$, $\gamma_\pi = 110$

Wahrscheinlichster Abstrahlwinkel:

$$\theta \approx \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{\omega_p}{\omega}} \approx \frac{1}{\gamma}$$

\Rightarrow **Kein Grenzwinkel!** verstärkung des Effekts durch mehrfache Übergänge zwischen Medien.

[Folie: Winkelverteilung Übergangsstrahlungsstrahlung]

[Folie: Übergangsstrahlungsdetektoren]

4.3 Kalorimeter

Aufgabe: Messung der Gesamtenergie in Abhängigkeit von der Bauweise

- homogene Schauerzähler/Kalorimeter
- sampling Schauerzähler/Kalorimeter (Stichprobenmessung) \rightarrow Einfluss auf die Auflösung bei der Energiemessung

a) Elektron-Photon Schauer
Einfache Abschätzung

$$N_{e^\pm, \gamma} \approx 2^t \quad E(t) \approx \frac{E_0}{2^t}$$

t : konstante Zeit / Eindringtiefe Schnitte

$x_0 = \frac{1}{C_{\text{RAD}}}$ Strahlungslänge

- Elektronen: $1 - \frac{1}{e} \approx 63\%$ der Energie wird durch Abstrahlung in Photonen abgegeben

- Photonen $1 - \frac{1}{e^{7/9}} \approx 54\%$ Intensität geht durch e^+, e^- Paarbildung verloren

$$t_{\max} = \frac{\ln E_0/E_{\text{Krit}}}{\ln 2} \approx 10,5 X_0$$

$$N_{\max} = \frac{E_0}{E_{\text{Krit}}} \approx 1400 \text{ für } Z = 82$$

genau auf $O(x_3, \dots, x_5)$ genauer mit EGS GEANT

$$\frac{dE}{dt} \propto t^a e^{-bt}$$

mit $t = \frac{x}{x_0}$ (Anzahl Strahlungslängen)

★hier fehlt was★

[Folie: Bremsstrahlung (Bethe-Heitler)]

[Folie: Naives Schauerbild]

[Folie: Longitudinal und Transverse Schauer Profile]

[Folie: Longitudinale Schauerentwicklung]

Kapitel 5

Statistik und Wahrscheinlichkeiten

Literatur

- S.Brandt „Datenanalyse“
- G.Cowan „Statistical Data Analysis“
- R.Barlow „A Guide to the Use of Statistical Methods in Physical Sciences“
- F.James „Statistical and Computational Methods in Experimental Physics“

[Folie: Einführung: Compass Experiment]

[Folie: Einführung in die Statistik]

5.1 Einführung

2 mögliche Ansätze

a) **Frequentist (Zählmensch) Axiome:**

Ereignismenge:

$$E := \{\dots, A, B\}$$

1)

$$P(A) \geq 0 \quad \forall A \in E$$

2)

$$\sum_{A \in E} P(A) = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{d.h.} \quad P(E) = 1$$

wenn A_i tatsächlich Ereignisse sind, dann schließen sich A und B gegenseitig aus

3)

$$P(A \wedge B) = P(A) + P(B)$$

nur gültig für den Fall A, B exklusiv

\vee : oder \neg : nicht

\wedge : und \setminus : ohne

$$P(A \wedge \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

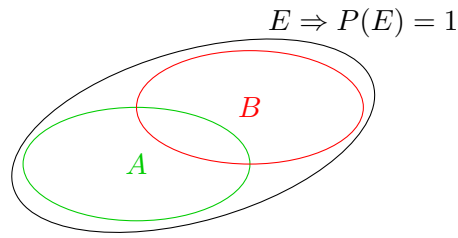


Abbildung 5.1: Gesamtmenge E aller Ereignisse und zwei Ereignisse $A, B \in E$.

$$P(A + B + \dots) = P(A) + P(B) + \dots$$

$$P(\bar{A}) = P(E \setminus A) = 1 - P(A)$$

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$$

$$P(A \wedge B) = P(A) + P(B) - P(A \vee B)$$

$$(A \wedge B) + P(A \vee B) = P(A) + P(B)$$

b) Bayes Statistik (bedingte Wahrscheinlichkeit)

$$P(B|A) = \frac{P(A \wedge B)}{P(A)}$$

Allgemein:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{\sum_i P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

Beispielrechnung:

Es gibt eine Krankheit und 0,1% der Bevölkerung sind erkrankt (Durchsendung). Es gibt einen Test um die Krankheit festzustellen mit einer 98% Effizienz ($\hat{=}$ Gewissheit) und 3% Fehllalarm ($\hat{=}$ Reinheit)

Frage: Was ist die Wahrscheinlichkeit erkrankt zu sein bei einem positiven Testergebnis (Befund) $P(\text{krank}|+)$

$$P(\text{krank}) = 0,001$$

$$P(\text{gesund}) = 0,999$$

$$P(+|\text{krank}) = 0,98$$

$$P(-|\text{krank}) = 0,02$$

$$\text{Fehllalarm: } P(+|\text{gesund}) = 0,03$$

$$P(-|\text{gesund}) = 0,97$$

$$\begin{aligned} P(\text{krank}|+) &= \frac{P(+|\text{krank}) \cdot P(\text{krank})}{P(+|\text{krank}) \cdot P(\text{krank}) + P(+|\text{gesund}) \cdot P(\text{gesund})} \\ &= \frac{0,98 \cdot 0,001}{0,98 \cdot 0,001 + 0,03 \cdot 0,999} = 0,032 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, bei einem positiven Testergebnis, krank zu sein ist also nur 3,2%!!!

5.2 Verteilung einer Zufallsvariable

Population Alle möglichen Ereignisse/Messungen

Stichprobenraum Untermenge ausgewählter Stichproben

Zufallsvariable • diskret

• kontinuierlich

Verteilung einer Zufallsvariable x mit $-\infty \leq x \leq +\infty$

Wahrscheinlichkeitsverteilung Beispiel: Würfel $P = \frac{1}{6}$

★hier fehlt eine Grafik★ Wkeit.vert. Würfel

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\max(x)} xp_i$$

monoton. $\max(x)$ = ist der größte Wert für x .

Wahrscheinlichkeitsdichte von x

$$f(x) = \frac{dF}{dx} = F'(x)$$

ist das Maß für die Wahrscheinlichkeit X eines Ereignisses X

$$x \leq X \leq x + dx$$

★hier fehlt eine Grafik★ ★hier fehlt eine Grafik★

[Folie: Histogrammdarstellung]

5.2.1 Diskussion der Verteilungsfunktion

- a) falls die Wahrscheinlichkeitsdichte differenzierbar ist
 \Rightarrow **Wahrscheinlichster Wert**

$$\frac{d}{dx}f(x) = 0 \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x) < 0$$

- b) **Median** $x_{0.5}$ (50% der Werte kleiner, 50% der Werte größer)
oder auch: Verteilungsfunktion hat den Wert; $\frac{1}{2}$

$$F(0.5) = P(X < x_{0.5})$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{x_{0.5}} f(x) dx \stackrel{!}{=} 0.5$$

analog geht man vor für die Momente der Verteilung:

$$E(x^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$$

hängt ab von der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung.

Mittelwert (erstes Moment)

$n = 1$

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Streuung um Mittelwert

$$E(x - \mu)^n = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^n f(x) dx$$

um den Wahren Wert μ .

Varianz

$n = 2$

$$E(x - \mu)^2 = E(x^2) - \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

bei $n = 3$: Schiefe