Theoretische Physik I

Vorlesung von Prof.Dr. Gerhard Stock im Sommersemester 2018

Markus Österle
Andréz Gockel

17.04.2018

Inhaltsverzeichnis

Einleitung - Theoretische Physik

Einführung

- geht von grundlegenden Naturgesetzen aus, die als Postulate (=Axiome)
- benutzt mathematische Methoden um daraus physikalische Aussagen herzuleiten (z.B. $E_{kin} \sim v^2$)
- Eine Theorie basiert auf definierten (Def.) Annahmen

  $\rightarrow$ gilt innerhalb eines Anwendungsbereiches und muss hier experimentell (Exp.) verifizierbare Ergebnisse liefern
  z.B. klassische Mechanik funktioniert für

  - $v \ll c$
  - $\int (p) dx \gg \hbar$
- Ein theoretisches Modell macht oft idealisierende Annahmen um explizite Lösungen zu erlauben z.B. harmonischer Oszillator
- Computational Physics
  löst theoretische Ansätze numerisch

Bedeutung der klassischen Mechanik

- zentrale Rolle, da anschauliche Theorie
- Einführung:
  - zentrale Größen (z.B. Energie, Drehimpuls, Wirkung)
  - Methoden (z.B. Variationsrechnung, Störungstheorie)
  - Modelle (z.B. harmonischer Oszillator, wichtig in Quantenmechanik (QM), Feldtheorie, ...)
- praktische Bedeutung:
  - Himmelsmechanik

    - Statik
    - Molekül-
    - Chemie- und Biophysik
- nicht lineare Dynamik (z.B. Chaostheorie, Strukturbildung) sind Beispiele aktueller Forschung

Kapitel 1

Newtonsche Mechanik

1.1 allgemeine Begriffe

- Statik (ruhende Körper)
- Kinematik (Bewegung, ohne Beschreibung der Wechselwirkungen (WW))
- Dynamik (Bewegung mit Beschreibung der WW)

1.1.1 Bezugsystem

Ursprung O
Basisvektoren $\vec{e}_i = \begin{cases} x, y, z \\ 1, 2, 3 \end{cases}$
Ort: $\vec{r}$ eines Teilchens (Massenpunkte) (Bahnkurve, Trajektorie)
$\vec{r}(t) = \sum_i \vec{x}_i(t)\vec{e}_i$
Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$
Impuls: $\vec{p}(t) = m \cdot \vec{v}(t)$
Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$
z.B. geradlinige - gleichmäßige Bewegung
$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$
$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \vec{v}_0$
$\vec{a}(t) = 0$

1.2 Die Newtonsche Gesetze (1687)

NG1: Trägheitsgesetz
Kräftefreie Bewegung ist gleichförmig, d.h. $v = \text{const.}$
NG2: Grundgesetz der Mechanik
$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = ma\ m = \text{const.}$

def. Kraft und Masse, Bewegungsgleichung
NG3: Action = Reactio
$F_{12} = -F_{21}$
Kraft von 1 auf 2 = Kraft von 2 auf 1 Voraussetzung (Annahme):

- „absoluter" Raum
- „absolute" Zeit
- „absolute" Masse

$\rightarrow$ nur gültig für $\frac{v}{c} \ll 1$
($c =$Lichtgeschwindigkeit)
Diskussion NG1: Macht nur Sinn bei Angabe von Bezugsystem z.B. Vergleich rotierendes vs. ruhendes Bezugssystem
$\rightarrow$ Ein Bezugssystem, in dem das NG1 gilt heißt „Inertialsystem" (IS)
Bsp: Hörsaal, relativ zum Fixsternhimmel Näherung, z.B. wegen Erdrotation
$\rightarrow$ Foucaultsches Pendel
$\rightarrow$ physikalische Gesetze nehmen in IS eine besonders einfache Form an.

NG1: In einem IS ist die kräftefreie Bewegung durch $\vec{r}(t) = const.$ beschrieben Relativitätsprinzip (Galilei)
Geg. sei IS S mit Bahnkurve $\vec{r}(t)$
und IS $\bar{S}$ mit Bahnkurve $\vec{r}(t)$
worin $\bar{S}$ um $\vec{r}_0$ zu S verschoben sei und sich mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = const.$ dazu bewege:
Dann gilt die Galilei Transformation (Trafo)
$r \rightarrow \bar{r}$ mit

$$\bar{r}(t) = \vec{r}(t) + \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \tag{1}$$

$\rightarrow$ Relativitätsprinzip

Alle IS sind gleichwertig.

NG2: $F = \dot{p} = m \cdot \vec{a}$

- setzt ebenfalls ein IS voraus
- beschreibt Bewegung mittels Wirkung $m \cdot a$ und Ursache Kraft F
- Definition der Kraft und der (trägen) Masse m

- grundlegendes Postulat der klassischen Mechanik:
  sind alle Kräfte F_1 bekannt, so beschreibt
  $$m \cdot a = \sum_i F_i$$
  vollständig die Bewegung.

Für gegebene Kraft $\vec{F}$ ergibt sich vollständig die Bewegung.

NG3:
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

d.h die Kraft ergibt sich als WW zwischen Körpern.

$$\rightarrow \frac{d}{dt}p_1 = -\frac{d}{dt}p_2 \qquad \rightarrow \qquad \frac{d}{dt}(p_1 + p_2) = 0$$
$\rightarrow$ Impulserhaltung

eigentlich auf Grund der „Homogenität des Raumes“.

Zusatz: Kräfte addieren sich wie Vektoren

$$\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}_i$$

1.2.1 Bem:

- vorher Aristotelesche Mechanik: unterschied
  - Bewegung auf der Erde
  - Bewegung der Gestirne
- Newton vereinheitlichte beide Bereiche: Theorie gilt sowohl für Bewegung der Planeten als auch für fallenden Apfel

$\rightarrow$ immense Abstraktionsleistung!
allg. Ansatz: Vereinheitlichung von z.B. elektrischer und magnetischer WW
Maxwell

- Wesentliches Axiom ist das 2.NG. (das 1.NG definiert IS, 3.NG entspricht Impulserhaltung)

2.NG:

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

DGL 2.Ord, Lösung ergibt Bahnkurve $\vec{r}(t)$ „Bewegungsgleichung“
Integrationskonstanten gegeben durch Anfangsbedingungen: z.B. $\vec{r}(0), \dot{\vec{r}}(0)$

1.2.2 Beispiele:

1.) Konstante Kraft: $\vec{F} = \vec{F}_0$
z.B. $\vec{F} = m\vec{g}$
$\rightarrow \vec{r}(t) = \frac{1}{2m}\vec{F}_0 \cdot t^2 + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_0$

2.) Lineare Kraft: $\vec{F} \sim \vec{r}$
z.B. bei Federpendel mit $r =| \vec{r}|$
$m\ddot{r} = -kr$
mit $r(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} sin\omega t$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$

3.) Zentrale Kraft: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r} =\left| \vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|)$
z.B. Gravitation $\vec{F} = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$

4.) Lorenzkraft: (geschwindigkeitsabhängig)
$\vec{F} = \vec{r}(t) = F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = e[\hat{E}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)$ Ladung e im elektrischen Feld $\vec{E}$ und magnetischen Feld $\vec{B}$

5.) Reibungskräfte:

- Stokesche Reibung $\vec{F} = -\gamma\vec{v}$
- Luftreibung: $\vec{F} \sim \vec{v}^2\frac{\vec{v}}{v}$

1.3 Erhaltungssätze

- spielen Zentrale Rolle in der Physik
- sind allg. gültig, z.B. auch in der QM
- reflektieren Symmetrie des Systems

allg Form eines erhaltungssatzes der Größe $A(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$
$\frac{d}{dt}A = 0 \leftrightarrow$ A ist erhalten

1.3.1 Impulserhaltung

$\vec{F} = 0 \to \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \to \vec{p} = \text{const.}$

1.3.2 Drehimpulserhaltung

Vektorielle Multiplikation von NG2 mit $\vec{r}(t)$ ergibt:

$$m\vec{r}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{F}$$

Mit Drehimpuls:

$$\vec{T} = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = \vec{r} \times (m\dot{\vec{r}})$$

Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

ist

$$\frac{d}{dt}\vec{l} = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times (m\dot{\vec{r}})}_{=0} + \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} = \vec{M}$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{M}$$

$$\vec{M} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{l}}{dt} = 0, \quad \vec{l} \text{ erhalten}$$

Bsp: Zentralkraft

$\vec{F} \parallel \vec{r} \to \vec{M} = 0 \to \vec{l} = const.$ legt man oEdA $\vec{l}$ in z - Richtung

$$\vec{l} = l\vec{e}_z = m\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}$$

liegen $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ in x - y - Ebene.

1.3.3 Energieerhaltung

Ein Teilchen, das sich unter $\vec{F}$ von $\vec{r}$ nach $\vec{r} + d\vec{r}$ bewegt, verrichtet die Arbeit:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Längs eines eges C von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ ist die geleistete Arbeit

$$W = \int_C dW = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{F}$$

die von $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ und i.h. auch von der Wegführung abhängt-

Die pro Zeit verrichtete Arbeit heißt Leistung

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$[\oint_C = \text{ geschlossenes Wegintegral }]$$

Multiplikation von NG2 mit $\dot{\vec{r}}$ gibt:

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} \quad (\widehat{=} \text{ Leistung P })$$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{m(\dot{\vec{r}})^2}{2}}_{=T} = \frac{dT}{dt} = P = (\vec{F}_{\text{kons}} + \vec{F}_{\text{diss}}) \cdot \dot{\vec{r}}$$

Kinetische Energie T
konservative Kräfte $\vec{F}_{\text{kons}}$ und dissipative Kräfte $\vec{F}_{\text{diss}}$, wobei $\vec{F}_{\text{kons}}$ alle Anteile mit:

$$\vec{F}_{\text{kons}} \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{d}{dt} U(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U \cdot \dot{\vec{r}}$$

erhält, wobei k das Potential oder die potentielle Energie ist. Minuszeichen ist Konvention.

Zusammen:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + U(\vec{r})\right) = \vec{F}_{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}}} \tag{2}$$

Konservative Kraft $\Leftrightarrow E = T + U = \text{const.}$
Mit

$$\vec{F}_{\text{kons}} \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{dU(\vec{r}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= -\text{grad}(U(\vec{r})) \cdot \dot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} U \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})^\top$$

$$\text{grad}(U(\vec{r})) = (\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z})^\top$$

folgt :

$$\boxed{\vec{F}_{\text{kons}} = -\text{grad}(U(\vec{r}))} \tag{3}$$

Bsp: Der gedämpfter harmonischer Oszillator

$$F = -kx - \gamma\dot{x} = F_{\text{kons}} + F_{\text{diss}}$$

mit

$$F_{\text{kons}} = -\frac{dk}{dx} \to k(x) = \frac{k}{2}x^2$$

Da $F_{\text{diss}} \cdot \dot{x}$ quadratisch in $\dot{x}$, $\frac{dk(x)}{st}$ aber linear in $\dot{x}$ kann $F_{\text{diss}}\dot{x}$ nicht in der Form $\frac{dk}{dt}$ geschrieben werden.

Bedingung für konservative Kraft ist

$$\text{rot}(\vec{F}(\vec{r})) = \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}k(\vec{r})$$

Dann ist das Wegintegral:

$$W = \int_C d\vec{r}\ \vec{F}(\vec{r})$$

Wegunabhängig, verschwindet also für jeden geschlossenen Pfad :

$$\vec{F}_{\text{kons}} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) \quad \leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{F} = 0$$

allg.:

$$\vec{F}_{\text{kons}} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) + \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t)}_{\text{z.B. Lorenz-Kraft}}$$

da:

$$P_L = \dot{\vec{r}} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{R}) = 0$$

Anwendung: Vereinfachung von Bewegungsgleichungen

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}U(x)$$

DGL 2. Ordnung

Bsp: 1 Dimensionales System mit Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E$$

$$\to \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \qquad \text{DGL 1. Ordnung}$$

„erstes Integral“ (da eine Integration bereits vollzogen)

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}$$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x'))}}$$

Qualitative Diskussion der Bewegung:

$$E = T + U \geq U$$

<u>Numerische Integration der Bewegungsgleichung:</u> <u>Bsp:</u>

$$f(t) = m\ddot{x}(t) = m\dot{v}(t)$$

<u>Idee:</u> Taylor Entwicklung von x zur Zeit

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v}\underbrace{((t+\Delta t)-t)}_{\Delta t} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}}_{F/m=a}\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3x}{dt^3}\Delta t^3 + \mathcal{O}(t^4)$$

$$= x(t) + v(t)\Delta t + \frac{f(t)}{2m}\Delta t^2 + \frac{\Delta t^3}{3!} + \mathcal{O}(t^4)$$

z.B. Lösung durch Abbruch in 2.Ordnung (Euler-Algorithmus)
<u>Besser:</u>

$$x(t-\Delta t) = x(t) - v(t)\Delta t + \frac{f(t)}{2m}\Delta t^2 - \frac{\Delta t^3}{3!}\dddot{x} + \mathcal{O}(\Delta t^4)$$

$$x(t+\Delta t) + x(t-\Delta t) = 2x(t) + \frac{f(t)}{m}\Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^4)$$

bzw.

$$x(t+\Delta t) \approx 2x(t) - x(t-\Delta t) + \frac{f(t)}{m}\Delta t^2 \tag{1}$$

Geschwindigkeit über:

$$x(t+\Delta t) - x(t-\Delta t) = 2v(t)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

$$\Rightarrow v(t) \approx \frac{x(t+\Delta t) - x(t-\Delta t)}{2\Delta t} \tag{2}$$

Gl. (1) und (2) bestimmen den Verlet-Algorithmus

1.4 Beschleunigte Bezugsysteme

Newton Gesetze gelten für Inertialsysteme (IS), Bezugsystem, das relativ zu IS beschleunigt ist, ist kein IS $\rightarrow$ es treten sogenannte Scheinkräfte auf.
z.B. Beschleunigung bei linearer Bewegung

1.4.1 Rotierendes Bezugsystem:

Geg: IS S mit $\vec{r}(t)$
und nicht-IS S' mit $\vec{r}'(t)$, das gegenüber S mit einer Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \tag{1}$$

rotiert, $\vec{\varphi}, \vec{\omega}$ zeigen in Richtung der Drehachse.
oEdA: $\vec{\varphi} \sim \vec{e}_z$
Berechne Vektor $\vec{G}$, der in S' ruht. Änderung $d\vec{G}_{\text{rot}}$ aufgrund Rotation

$$|d\vec{G}_{\text{rot}}| = |d\vec{\varphi}||\vec{G}| \sin\theta$$

$$d\vec{G}_{\text{rot}} \perp \vec{\omega} \qquad d\vec{G}_{\text{rot}} \perp \vec{G}$$

$$\rightarrow d\vec{G}_{\text{rot}} = d\vec{\varphi} \times \vec{G} = (\vec{\omega}\, dt) \times \vec{G} \tag{2}$$

Beliebiger Vektor $\vec{G}(t)$, der sich in S' während dt um $d\vec{G}_{S'}$ ändert, ändert sich damit in S um:

$$d\vec{G}_S = d\vec{G}_{S'} + d\vec{G}_{\text{rot}}$$

Damit:

$$\boxed{\frac{d\vec{G}_S}{dt} = \frac{d\vec{G}_{S'}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{G}} \tag{3}$$

Für $\vec{G} = \dot{\vec{r}}$ ist:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \tag{4}$$

$$\vec{G} = \dot{\vec{r}} : \frac{d}{dt}\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\omega} \times (\dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' + \dot{\omega} \times \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Für $\omega =$ const. erhalten wir:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' + 2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

Für ein in S' kräftefreies Teilchen mit:

$$m\ddot{\vec{r}} = 0$$

erhalten wir dann:

$$m\ddot{\vec{r}}' = -\underbrace{2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}')}_{\text{Corioliskraft}} - \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{Zentrifugalkraft}}$$

$$F_z \sim \omega^2 r, \text{ zeigt von Drehachse weg}$$

$$F_c \sim \omega \dot{r}, \text{ steht} \perp \text{zur Bewegungsrichtung}$$

Bsp:

- Erddrehung, Foucaultsches Pendel
- Ball auf Drehscheibe

1.5 Mehr-Körper-Probleme

Betrachte N Teilchen (Massenpunkte) mit:
Ort: $\vec{r}_i$, Masse m_i und die auf sie wirkende Kraft $\vec{F}_i$

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i \qquad (i = 1, \dots, N)$$

Unterscheidung:
Innere Kräfte: Kräfte der Teilchen aufeinander. z.B. Coulomb-Kräfte $\vec{F}_{ij}$ von (geladenen) Teilchen i und j
Äußere Kräfte: $\vec{F}_i^A$ wirken von außen. z.B. Schwerkraft oder externes elektromagnetisches Feld.

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^A + \sum_{j\neq i}\vec{F}_{ij}$$

Schwerpunktbewegung und Impuls Ortsvektor des Schwerpunktes

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i \qquad M = \sum_i m_i$$

Bewegungsgleichung für $\vec{R}$:

$$M\ddot{\vec{R}} = \sum_i m_i\ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\sum_i\sum_{j\neq i} F_{ij}}_{\text{3.NG:}F_{ij}=-F_{ji}}$$

$$M\ddot{\vec{R}} = \sum_i \vec{F}_i^A + 0 = \vec{F}^A$$

Schwerpunktsystem:
Schwerpunkt bewegt sich nur gemäß äußerer Kräfte
$\Rightarrow$ vergleiche Münchhausen-Trick
$\rightarrow$ Rechtfertigung der Idealisierung realer Körper durch Massepunkte

Auf ein abgeschlossenes System wirken keine (oder vernachlässigbare) äußeren Kräfte

$$\to \frac{d}{dt} M\dot{\vec{R}} = 0 \quad \to \vec{P} = M \cdot \dot{\vec{R}} = \text{const}$$

abgeschlossenes System $\leftrightarrow$ Schwerpunktsystem ist erhalten

Drehimpuls: Vektorielle Multiplikation des 2. NG mit r$\vec{r}_i$

$$\sum_i \vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$(\dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i = 0)$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i)}_{\vec{L}=\sum_i \vec{l}_i} = \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^k}_{\vec{M}=\sum_i \vec{M}_i} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}}_{\overset{?}{=}0}$$

$$\begin{aligned}\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = {} & \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}) \\ & \overset{3.\ \text{NG}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \underbrace{(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}}_{\text{Annahme: } \vec{F}_{ij} \| \vec{r}_i - \vec{r}_j} = 0\end{aligned}$$

d.h. innere Kräfte ergeben kein resultierendes Drehmoment.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^A = \vec{M}$$

abgeschlossenes System $\leftrightarrow$ Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ ist erhalten

Energie: Mult. von 2.NG mit $\dot{\vec{r}}_i$

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i &= \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2} \cdot \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}_{T} = \frac{dT}{dt} \\ &= \sum_i (\vec{F}_i^{\text{kons}} + \vec{F}_i^{\text{diss}}) \dot{\vec{r}}_i\end{aligned}$$

wobei

$$\sum_i \vec{F}_i^{\text{kons}} \cdot \dot{\vec{r}}_i = -\frac{dU(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)}{dt} = -\sum_i \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

mit

$$\frac{\partial U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)}{\partial \vec{r}_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y_i}\vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z_i}\vec{e}_z$$

Energiesatz:

$$\frac{d}{dt}(T+U) = \sum_i \vec{F}_i^{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

Kräfte konservativ $\leftrightarrow$ $E = T + U$ erhalten

Energieerhaltung gilt also auch bei äußeren Kräften, solange sie konservativ sind.

Aufteilung:

$$\begin{aligned}\vec{F}_i^{\text{kons}} &= \vec{F}_i^A(\vec{r}_i) + \sum_{i \neq j} F_{ij}^I(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \\ &= -\frac{\partial U^A(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)}{\partial \vec{r}_i} - \frac{\partial U^F(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)}{\partial \vec{r}_i}\end{aligned}$$

mit

$$U^A = \sum_i U_i(\vec{r}_i), \quad \vec{F}_i^A = -\frac{\partial U_i(\vec{r}_i)}{\partial \vec{r}_i}$$

äußere Kräfte wirken auf einzelne Teilchen

$$U^I = \sum_{i<j} U_{i,j}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$$

Annahme: 2 Teilchen WW.

mit $\frac{\partial U_{ij}}{\partial \vec{r}_i} \overset{3.NG}{=} -\frac{\partial U_{ij}}{\partial \vec{r}_j}$ hängt U nur von $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ ab
Annahme: $\vec{F}_{ij} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j = \vec{r}_{ij}$ $\quad \to$ hängt nur von $r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|$ ab

$$\vec{F}_{ij}^I = -\frac{\partial U_{ij}^I(r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}{\partial \vec{r}_{ij}}$$

$$U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = \sum_i U_i(\vec{r}_i) + \sum_{i<j} U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

z.B.:

$$U_i = q_i \Phi(\vec{r}_i)$$

$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Allgemein: Abgeschlossene N-Teilchen System ($N \geq 2$) mit ausschließlich konservativen Kräften haben also mindestens 10 Erhaltungsgrößen:

• der Gesamtimpuls	$\vec{P} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i$	$(*)$	3 Größen
• ein Vektor, der die Schwerpunktsbewegung beschreibt	$M\vec{R} - \vec{P} \cdot t$	(Int. von $(*)$)	3 Größen
• der Gesamtdrehimpuls	$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$		3 Größen
• und die Gesamtenergie	$E = T + U$		1 Größe
			<u>10 Größen</u>

Selten mehr: z.B. Lenzscher Vektor im Keplerproblem

1.6 Die Hamilton-Funktion (1833)

<u>Newton:</u> Kraft ist zentrale Größe
<u>Hamilton:</u> Energie ist zentrale Größe
Gegeben sei N-Teilchen System mit ausschließlich konservativen Kräften

$$F_i = -\frac{\partial U(r)}{\partial r_i} = \dot{p}_i \qquad \text{(3 DGL 2. Ordnung)} \tag{1}$$

$$r \equiv (r_1, r_2, \dots, r_{3N}) \quad p = (p_1, p_2, \dots, p_{3N}) \quad i = (1, \dots, 3N)$$

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} v_i^2 \overset{p_i = m_i v_i}{=} \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} \quad \text{, Potential U}$$

Gesamtenergie $E = T + U$ wird durch die Hamilton-Funktion beschrieben: „Hamiltonian“:

$$\boxed{\begin{aligned} H &= H(r,p) = T(p) + U(r) \\ &= \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m_i} + U(r) \end{aligned}} \tag{2}$$

Mit

$$\frac{\partial H}{\partial r_i} = \frac{\partial U}{\partial r_i} \overset{(1)}{=} -\dot{P}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m_i} = \dot{r}_i$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = \text{ Masse des ersten Teilchens}$$

$$m_4 = m_5 = m_6 = \text{ Masse des zweiten Teilchens}$$
$$\vdots$$

äquivalent zu den Newton Gleichungen: Hamilton-Gleichungen: Bewegungsgleichungen im Hamilton-Formalismus

$$\boxed{\begin{aligned} r_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial r_i} \end{aligned}} \tag{3}$$

6N DGL 1. Ordnung (Hamilton)
3N DGL 2. Ordnung (Newton)

$$\frac{d}{dt} H(r(t), p(t)) = \sum_i \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} \underbrace{\dot{p}_i}_{-\partial H/\partial r_i} + \frac{\partial H}{\partial r_i} \underbrace{\dot{r}_i}_{\partial H/\partial p_i} \right] = 0$$

d.h. Energie ist erhalten. Bem:

- Im Gegensatz zu vektoriellen Kräften ist der Hamiltonian (die Hamilton Funktion) ein Skalar, und damit wesentlich leichter aufzustellen.
- Hamilton-Funktion kann für allgemeine Fälle (z.B. geschw. abhängige Potentiale oder zeitabhängige Potentiale (siehe später)) und hat dann nicht notwendigerweise die Bedeutung der Gesamtenergie.
- (r, p) bilden den 2.3N dimensionalen Phasenraum der die Bewegung vollständig beschreibt.

Bsp: harmonischer Oszillator

gedämpfter harm. Oszillator

ebenes Pendel mit überschlag

Newtonsche Mechanik: theoretisches Konzept

1.Def:

- Masse, Kraft, Energie

- Innertialsystem, beschleunigte Bezugssysteme
- konservative/ dissipative, innere/ äußere Kräfte

2. Bew. Gl.: N Teilchen, konservative Kräfte mit Pot $U(r)$

$$r?(r_1, \ldots, 1_{3N})$$

$$m_i \ddot{r}_i = -\frac{\partial U(r)}{\partial r_i}$$

gewöhnlich = DGL 2. Ord i. A. nicht linear
3. Erhaltungssätze Schwerpunkt $\vec{R}, \vec{P}, M = \sum_i m_i$

- $\frac{d}{dt}\vec{p} = M \cdot \ddot{\vec{R}} = \underbrace{\vec{F}^A}_{\text{äußere Kraft}} \overset{\text{abgeschlossenes System}}{=} 0 \leftrightarrow \vec{p} = \text{const.}$
  Impulserhaltung
- $\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum_i \vec{r}_\times \vec{F}_i^A = \vec{M} \to 0 \leftrightarrow \vec{L} = \text{const.}$ Drehimpulserhaltung
- $\frac{d}{dt}(T + U) = \sum_i \vec{F}_i^{diss} \dot{\vec{r}}_i \xrightarrow{\text{Kräftegleichgewicht}} 0$
  $E = T + U = \text{const.}$ Energieerhaltung

Alternativ: Hamilton Funktion mit Impuls $p = (p_1, \ldots, p_{3N}) \widehat{=}$ Gesamtenergie

$$H(r,p) = T(p) + U(r) = \sum_i \frac{p_i^2}{dm} + U(r)$$

$$\to \dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i} \qquad 2 \times 3N\text{DGL 1. Ord}$$

(r,p) bilden den 2 3N dim Phasenraum

- Wichtig für Übergang zur QM und statistischen Mechanik
- Beschreibt Bewegung vollständig, d.h. geg. Bew. Gl. mit Anfangsbedingungen $r_i(0), p_i(0)$, so ist $r(t)$ und $p(t)$ für alle Zeiten vollständig bestimmt. Man sagt die klassische Mechanik ist deterministisch.

Nichtlineare Dynamik und Chaos

- Man kann zeigen: Existieren für ein System mit 2f-dim Phasenraum f Erhaltungsgrößen, so heißt das System Integrabel.
  Bsp.:
  1) Konservative Bewegung in 1D $\rightarrow f = 1$
     Energie ist erhalten $\rightarrow$ System ist Integrabel
  2) 2-Körperproblem: $f = 6$
     Erhaltung von Energie, Gesamtimpuls, $\vec{L}^2, L_z \rightarrow$ System ist integrabel
  3) 3-Körperproblem: $f = 9$
     6 Erhaltungsgrößen $\rightarrow$ i.A. nicht integrabel, kann chaotisch sein (Poincare' um 1900)
- Grund
  Nichtlineare Bwe. Gl. können instabile Lösungen haben d.h. bei geringstfügiger Änderung der Anfangsbedingungen zeigt System für lange Zeiten eine qualitativ andere Bewegung: „Schmetterlingseffekt“ sog. deterministisches Chaos
- Bedingung für chaotisches Verhalten
  - Anzahl der Freiheitsgrade $f \geq 2$
  - Nichtlinearität der Kraft
  - Bsp: Vergleiche
    harm Oszillator $F \sim r, U(r) \sim r^2$
    mit stabilem Fixpunkt und $H(r)$
    Pendel: $F \sim \sin\varphi, U \sim \cos\varphi$ und $U(\varphi)$
    mit stabilen Fixpunkten in sinus Tälern und instabilen Fixpunkten auf den sinus Bergen

1.7 Schwingungen

Harm. Oszillator ist ein zentrales Modell der Physik

- analytisch lösbar, auch mit Reibung und Antrieb und in vielen Dimensionen

- lineares System

1D System mit Harm. Fkt.

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + U(q)$$

das bei $q = q_0$ eine stable Gleichgewichtslage besitzt.
Idee(„harmonische Näherung“) : Taylor Entwicklung von k um q_0

$$U(q) = \underbrace{U(q_0)}_{\text{oEdA } = \ 0} + \underbrace{\left.\frac{dU}{dq}\right|_{q_0}}_{\substack{= \ 0\text{,da} \\ \text{GGWlage}}} (q-q_0) + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{d^2U}{dq^2}}_{=k}\Bigg|(q-q_0)^2 + \dots$$

$$\approx \frac{1}{2}k(q-q_0)^2 \equiv \frac{k}{2}x^2$$

<u>Bew Gl:</u>

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \qquad ; \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$$

oder:

$$m\ddot{m} + kx = 0$$

Lösungen sind $\sin \omega t, \cos \omega t$ mit $\omega^2 = \frac{k}{m}$ Die allg. Lösung mit Anfangsbedingungen $x_0 = x(0), p_0 = 0(0)$

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{m\omega} \sin \omega t$$

$$p(t) = p_0 \cos \omega t - m x_0 \omega \sin \omega t$$

Mit

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad (i^2 = -1)$$
$$x(t) = Re(Ae^{i\omega t} + Be^{i\omega t})$$

Im folgenden werden Schwingungen in 1D mit Reibung:

$$F_R = -\gamma \dot{x}(t)$$

und einer Zeitabhängigen externen Kraft:

$$F_{ext}(t) \quad \text{„Antrieb“}$$

bezeichnet.

1.7.1 Gedämpfte Schwingungen

$$\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

Grenzfälle:

- $\gamma = 0 \rightarrow$ harm. Oszillator, $x \sim e^{\pm i\omega t}$
- $\omega = 0, \quad \ddot{x} + \gamma\dot{x} = 0, \quad v = \dot{x}$
  $\dot{v} = -\gamma v \quad \rightarrow \quad v \sim e^{-\gamma t}$

Ansatz:

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad , \quad \lambda = a + ib \in \mathbb{C}$$

eingesetzt:

$$(\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2)e^{\lambda t} = 0$$

$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0$ charakteristische Gleichung

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2}$$

$\rightarrow$ i.A. 2 Lösungen $x_0(t) = e^{\lambda_1 t}, x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$
$D < 0$: d.h. $\gamma < 2\omega$, komplexe Lösungen

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}$$

allg. Lösung:

$$x(t) = e^{-\gamma\frac{1}{2}t(c_1 e^{i\Omega t} + c_2 e^{i\Omega t})}$$

γ bewirkt Dämpfung und Änderung der Frequenz
$D > 0$: $\gamma > 2\omega$: „Überdämpfte Schwingung“

$$\rightarrow x(t) = c_1 e^{i\lambda_2 t} + c_2 e^{i\lambda_2 t}$$

$D = 0$: $\gamma = 2\omega$
$\rightarrow$ wir erhalten

$$x(t) = Ce^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

d.h. nur eine Lsg. anstelle von 2 unabhängigen Lsg.
Variation der Konstanten:

$$x(t) = C(t)e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$\dot{x} = (\dot{C} - \frac{\gamma C}{2})e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$\ddot{x} = (\ddot{C} - \gamma\dot{C} + \frac{\gamma^2 C}{4})e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

<u>eingesetzt:</u>

$$\begin{aligned} 0 &= (\ddot{C} - \gamma\dot{C} + \frac{\gamma^2 C}{4} + \gamma\dot{C} - \frac{\gamma^2 C}{2} + \omega^2 C)e^{-\frac{\gamma}{2}t} \\ &= (\ddot{C} + C\underbrace{(\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4})}_{=v})e^{-\frac{\gamma}{2}t} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \ddot{C} = 0, C(t) = C_0 + C_1 t$$

$\rightarrow$ <u>allg:</u>

$$x(t) = C_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} + C_1 t e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

„kritische gedämpfte Schwingung“
<u>Bem:</u>

- Allg. <u>lineare</u> DGL (mit konstanten Koeffizienten) n-ter Ordnung können durch einen Exponentialansatz gelöst werden.
  $\rightarrow$ charakteristische Gl. ist Polynom vom Grad n
- Physikalische Bedeutung der Nullstellen von Polynomen:
  Komplexe Nullstellen $\widehat{=}$ oszillatorische Lösungen
  Reelle Nullstellen $\widehat{=}$ zerfallende Lösungen

Gedämpfte Schwingungen (Wiederholung)

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda_{1/2} = \underbrace{-\gamma/2}_{\text{Dämpfung}} \pm \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}_{\substack{\text{für } \omega > 2\gamma \rightarrow \text{schwingung} \\ \text{sonst Dämpfung}}}$$

1.7.2 Der getriebene Oszillator

$$\underbrace{\ddot{x} + \gamma\dot{x} - \omega_0^2 x}_{\text{homogene DGL}} = f(t) \quad \substack{\text{externer Antrieb } f(t) \\ \text{“Inhomogenität” der DGL}}$$

Lösung der DGL:

$$\underbrace{x_{tot}}_{\text{bereits bekannt}} = \underbrace{x_{hom}(t)}_{\text{partikuläre Lösung}} + x(t)$$

Betrachten periodischen Antrieb

$$f(t) = f\cos(\omega t) = \frac{f}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

bzw.

$$f(t) = fe^{\pm i\omega t}$$

mit Exp. ansatz: $x(t) = A \pm e^{\pm i\omega t}$
Eingesetzt: $[\omega \pm i\omega\gamma + \omega_0^2]\ A\pm \quad = \quad f \quad$ [Ermitteln mit $z^\star$]

$$\begin{aligned}
\rightarrow \quad A\pm =& f\frac{\omega_0^2 - \omega^2 \mp i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \\
\rightarrow \quad x(t) =& \frac{1}{2}(A_+ e^{i\omega t} + A_- e^{-i\omega t}) \\
=& f\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t + \gamma\omega\sin\omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} = a\cos\omega t + b\sin\omega t \\
=& A\cos(\omega t - \varphi)
\end{aligned}$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow A(\omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2\gamma^2}} \qquad \text{Amplitude}$$

$$\tan(y) = \frac{a}{b} \rightarrow y(\omega) = \arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \qquad \text{Phase}$$

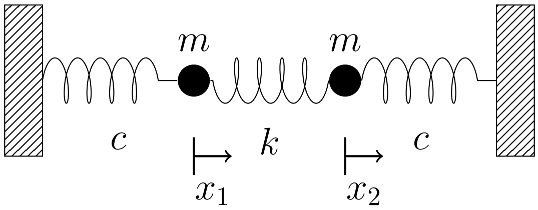
Resonanz bei $\omega = \omega_0$, A groß für γ klein $\gamma \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \omega_0$ „Resonanzkatastrophe“
z.B. Brücke, Tacoma Narrows Bridge 1940
Gesamtlösung

$$\begin{aligned}
x_{tot}^{(t)} &= x_{hom}^{(t)} - x(t) \\
&\stackrel{t\rightarrow\infty}{\rightarrow} x(t) \quad \text{„Stationäre Lösung“}
\end{aligned}$$

Resonanz wichtig:

- Schwingende Karrosserieteile
- Schwingkreis (E-Dynamik)
- Molekülschwingungen etc.

1.7.3 gekoppelte Oszillatoren



m_1 und m_2 sind aneinander und an zwei wänden mit federn gekoppelt (äußere federn mit c und innere feder mit k)

$$m\ddot{x}_1 = -cx_1 + k(x_2 - x_1) \tag{1}$$
$$m\ddot{x}_2 = -cx_2 - k(x_2 - x_1) \tag{2}$$

System von gekoppelten DGL. Mit

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \qquad y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$$

ist (1) + (2):

$$m\ddot{y}_1 = -cy_1$$

(1) − (2):

$$m\ddot{y}_2 = -(c + 2k)y_2$$

→ entkoppelte DGL
mit Frequenzen

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c+2k}{m}}$$

Anfangsbedingungen: z.B. $X_2(0) = a, \quad x_1(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$

$$y_1(t) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos\omega_1 t \quad , \quad y_2 = -\frac{a}{\sqrt{2}} \cos\omega_2 t \text{ Eigenschwingungen}$$

eingesetzt:

$$x_1(t) = \frac{a}{2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t)$$
$$x_2(t) = \frac{a}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$$

<u>Zusammenhang mit Eigenwertproblem</u>

$$m\ddot{\vec{x}} = -V\vec{x}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x2 \end{pmatrix} \quad , \quad V = \begin{pmatrix} c+k & -k \\ -k & c+k \end{pmatrix}$$

Ansatz:

$$x_1(t) = a_1 e^{i\omega t}$$
$$\ddot{x}_i(t) = -\omega^2 a_i e^{i\omega t}$$

eingesetzt:

$$-m\omega^2 e^{i\omega t}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = -V\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

mit $\lambda = m\omega^2$

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad (V - \lambda 1)\vec{a} = 0$$

Lösung für

$$\det(V - \lambda 1) = 0$$

$$(c + k - \lambda)^2 - k^2 = 0$$
$$\lambda^2 - 2(c+k)\lambda + (c-k)^2 - k^2 = 0$$

„Eigenfrequenzen“ Eigenwerte

$$\rightarrow \lambda_1 = c \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$
$$\lambda_2 = c + 2k \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c+2k}{m}}$$

Lösung der Eigenwertgleichung (1) für die Eigenwerte ergibt die „Eigenvektoren“ hier Eigenschwingungen

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\underbrace{V}_{\substack{\text{Operator}\\\text{Abbildung}\\\text{Matrix}}} \cdot \underbrace{\vec{a}_i}_{\text{Eigenvektor}} = \underbrace{\lambda_i}_{\text{Eigenwert}} \cdot \underbrace{\vec{a}_i}_{\text{Eigenvektor}}}$$

Eigenschwingungen

z.B. betrachte Molekül mit N Atomen (nicht lineare Mol)(für lineare Mol. $3N - 5$ FG)

$$3N - 3 - 3 = 3N - 6$$

-3 Translation -3 Rotation also $3N-6$ Freiheitsgrade für innere Bewegung
$f = 3N - 6$ innere FG $x_1, \dots x_f$
mit Gleichgewichtslage $x_1^{(0)}$, $\quad \rightarrow \frac{\partial V}{\partial x_i}\big|_{x_i^{(0)}} = 0$
und Potential $V(x_1, \dots, x_f)$
Entwickle V um $\vec{x}^{(0)}$

$$\underbrace{V(x_1, \dots, x_f)}_{\text{oEdA } = 0} = V(x_1^{(0)}, \dots, x_f^{(0)}) + \sum_i \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)_{x_i^{(0)}}}_{=0} (x_i - x_i^{(0)})$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0}_{V_{ij}} \underbrace{(x_i - x_i^{(0)})}_{\equiv x_i} \underbrace{(x_j - x_j^{(0)})}_{\equiv x_j} + \dots$$

Hessematrix: $V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} x_i x_j$ harmonische Näherung <u>Bew. GL:</u>

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = -\sum_i V_{ij} x_j$$

massenbehaftete Koordinaten: $q_i = \sqrt{m_i} x_i$

$$\rightarrow \boxed{\ddot{q}_i + \sum_i V_{ij} q_j = 0} \qquad V_{ij} = \frac{V_{ij}}{\sqrt{m_i m_j}}$$

<u>Exp. Ansatz:</u> $q_i(t) = q_i r^{i\omega t}$

$$\rightarrow \sum_i V_{ij} a_J - \omega^2 a_i = 0 \text{ charakteristische Gl.}$$

Mit

$$\mathcal{V} = \{V_{ij}\} \quad , \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ist $(\mathcal{V} - \lambda 1)\vec{a} = 0$ Eigenwertproblem

1.7.4 Eigenschwingungen

$\mathcal{V} = \{v_{ij}\} \qquad i, j = 1, \dots, N \qquad \vec{a} = (a_1, \dots, a_N)$
Eigenwertproblem: $\boxed{\mathcal{V}\vec{a} = \lambda \vec{a}} \qquad \lambda = \omega^2$

Eigenwerte λ_k $\det(\mathcal{V} - \lambda 1) \overset{!}{=} 0 \qquad (1)$
charakteristische Gleichung., Polynom N-ter Ordung
Eigenvektoren $\vec{a}_k$: Lösungen (1) mit $\lambda = \lambda_k$
orthogonal (bzw. Orthonormal)

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\rightarrow$ Eigenwertproblem $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_N)$ ist orthogonal

$$A^\top = A^{-1} \rightarrow AA^\top = 1 A^\top A$$

A ist diagonalisierbar die Hessematrix $\mathcal{V}$

$$\boxed{A^\top V A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \Lambda}$$

$$\rightarrow \underline{\text{Lösungen:}} \quad q_i(t) = a_{ik} e^{i\omega_k t} \quad (k = 1, \dots, N)$$

Allg. Lsg.:

$$q_i(t) = \sum_k C_k \, q_{ik} \, e^{i\omega_k t}$$

mit Koeffizienten C_k aus Anfangsbedingungen

$$\boxed{q_i(t) = \sum_k a_{ik} \, Q_k(t) \leftrightarrow \vec{q} = A\vec{Q}}$$

$$\boxed{Q_k(t) = C_k e^{i\omega_k t}}$$ „Eigenschwingung“ oder Normalmoden

Pot.Energie:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} v_{ij} q_i q_j = \frac{1}{2} \vec{q} V \vec{q} \\ &= \frac{1}{2} \vec{Q}^\top \underbrace{A^\top V A}_{\Lambda} \vec{Q} = \frac{1}{2} \vec{Q}^\top \Lambda \vec{Q} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} w_k^2 Q_k^2 \quad \text{pot. Energie in } \vec{Q}_k \text{ ist diagonal} \end{aligned}$$

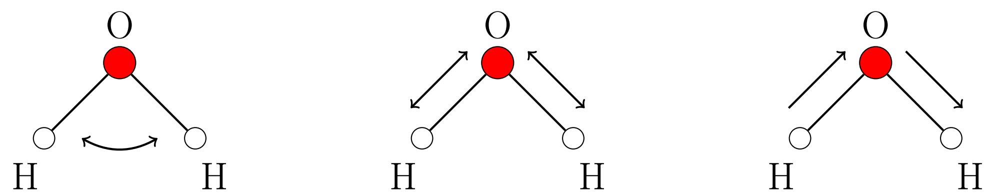
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_i \dot{q}_i^2 = \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^\top \dot{\vec{q}} \\ &= \frac{1}{2}\dot{\vec{Q}}^\top \underbrace{A^\top A}_{=1} \dot{\vec{Q}} = \frac{1}{2}\dot{\vec{Q}}^\top \dot{\vec{Q}} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \dot{Q}_k^2 \qquad \text{kin. Energie ist auch Diagonal} \end{aligned}$$

Mit $P_k = \dot{Q}_k$ ist damit der Hamiltonian

$$\boxed{H(Q,P) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(p_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2)}$$

der in ein System unabhängiger Oszillatoren seperiert.

Bsp: Normalmoden von Wasser



Biegeschwingung

symmetrische- asymmetrische-

Streckschwingung

Bilder: Wasser Molekül mit Biegeschwingung und symmetrischer oder asymmetrischer Streckschwingung.

Anwendung: Wasser absorbiert (infrarot) Licht mit den Eigenfrequenzen: ω_k sind exp. observable Größen

$\rightarrow$ Schwingungsspektroskopie

1.8 Das Zweikörperproblem

- beschränkt z.B. das Keplerproblem (Erde,Sonne) das H-atom, das 2-atomige Molekül
- analytisch lösbar

- Anwendung von Symmetrieüberlagerungen

2 Körper mit Masssen m_i, Orten $\vec{r}_i$, Impulsen $\vec{p}_i$ $(i = 1, 2)$ Wechselwirken durch ein Zentralpotential $U(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$. abgeschlossenes, konservatives System mit Energie

$$H = T + U = \sum_{i=1}^{2} \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + U(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \tag{1}$$

<u>Vorgehen:</u>

- Seperation der Schwerpunktsbewegung (Impulserhaltung) $\rightarrow$ Reduktion auf Einkörperproblem (3 statt 6 Freiheitsgrade)
- Drehimpulserhaltung $\rightarrow$ 1D Problem
- Diskussion des Keplerproblems , $k \sim 1/r$

<u>(1.) Trafo in Schwerpunkts- und Relativbewegung</u> Schwerpunktskoordinaten:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Relativkoordinaten:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$T = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_2} = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2}$$

$$\stackrel{(2)}{\rightarrow} \underbrace{\frac{m_1 + m_2}{2}}_{M/2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}_{\mu/2} \dot{\vec{r}}^{\,2} = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2\mu} \tag{3}$$

Gesamtmasse: $M = m_1 + m_2$
reduzierte Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \rightarrow \begin{cases} m_1 \text{ für } \frac{m_1}{m_2} \ll 1 & \text{Sonne Erde} \\ \frac{m}{2} \text{ für } m_1 = m_2 = m & \text{2-atom Modell} \end{cases}$$

Da Gesamtimpuls erhalten ist

$$\vec{P} = M\vec{R} = \vec{P}_0 = \text{const.}$$

ist schwerpunktsbewegungs, die unabhängig von Relativbewegung ist

$$\vec{R}(t) = \vec{R}(0) + \frac{\vec{P}(0)}{\mu}t$$

$\rightarrow$ Seperation von SP- und Relativbewegung
oder Entkopplung $\rightarrow$ Einkörperproblem mit 3 (statt 6) Freiheitsgraden
Beobachte Relativbewegung

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -\nabla k(|\vec{r}|)$$

(2.) Drehimpulserhaltung Das Zentralproblem, d.h.

$$\vec{L} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \text{const.} \quad \text{also auch Richtung konstant}$$

oEdA sei $\vec{L} = l\vec{e}_z$
Mit $\vec{L} \perp \vec{r}$, ist $\vec{r} \perp \vec{e}_z$ und damit $z(t) = \text{const.} \overset{\text{oEdA}}{=} 0$
d.h. Bewegung findet in x-y-Ebene statt. (nur noch 2 FG)
Polarkoordinaten:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \quad , \quad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

mit:

$$l = \mu(x\dot{y} - y\dot{x}) = \mu r\cos\varphi(\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi) - \mu r\sin\varphi(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)$$

$$l = \mu r^2\dot{\varphi} = \text{const.}$$

ergibt sich für die Gesamtenergie

$$\boxed{E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r) = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r)} \tag{7}$$

effektives Ptential $U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$ hat neben dem „normalen“ Radialterm $U(r)$ noch den sogenannten Zentrifugalterm $\frac{l^2}{2\mu r^2}$ oder Zentrifugalbarriere

$\rightarrow$ 1D Syste, Bewegungsglechung ist lösbar

Lösung durch

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r))}$$

ist:

$$\int_{t_0}^{t} dt' = t - t_0 = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r'))}}$$

was $r = r(t, E, l, r_0)$ ergibt die Bahnkurve $r(\varphi)$ und wir erhalten

$$\dot{r}(\varphi) = \frac{dr(\varphi)}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r))}}{\frac{l}{\mu r^2}}$$

$$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \pm\frac{l}{\sqrt{\mu}} \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{(E - U_{\text{eff}}(r))}}$$

r_0, p_0, E, l sind dann Anfangsbedingungen

1.8.1 Diskussion des Zweikörperproblems

$$\varphi - \varphi_0 = \pm\frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r')}}$$

$r_0, \varphi_0, E, l \mathrel{\widehat{=}}$ Anfangsbedingungen des 3D Problems
($z(0) = \dot{z}(0) = 0$ Anfangsbedingungen des 3D Problems)

- wegen $\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}$ kann $\dot{\varphi}$ nicht das Vorzeichen wechseln $\rightarrow$ Drehung immer in selbe Richtung d.h. für $E = U_{\text{eff}}$ ist $r' = 0 \rightarrow$ Umkehrpunkte
- Bsp: Sei $U_{\text{eff}}(r) = dr^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2}$
  $\alpha > 0, l \neq 0, E = E_0$
- r oszilliert zwischen r_{min} und r_{max}
- Form der Bahnkurve zwischen je 2 Umkehrpunkten gleich
  $\rightarrow$ Bahn ist durch Teilschleife festgelegt
- Bahn ist nicht notwendigerweise geschlosssen $\Delta\varphi$ zwischen zwei Umkehrpunkten

  $$\Delta\varphi = 2\int_{r_{\text{min}}}^{r_{\text{max}}} \frac{\frac{l}{r^2}dr}{\sqrt{2\mu(E - U_{\text{eff}}(r))}}$$

  $\rightarrow$ geschlossen, wenn nach n Umlaufen $n\Delta\varphi = m\pi \quad (n, m \in \mathbb{N})$

- Bsp: r^2 oder $\frac{1}{r}$ Potential $\Delta\varphi = \pi$

- Für $E = E_{\text{kin}}$ ist $r = r_0 = \text{const.} \rightarrow$ Kreisbahn mit $\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{l}{\mu r_0^2} t$
- Für $l = 0$ verschwindet Zentrifugalbarriere
- $\dot{\varphi} = 0, \vec{r} \parallel \dot{\vec{r}} \rightarrow$ Bewegung zentral
- je nach Potential wird auch $N \rightarrow 0$ möglich (unelastisch, wegen endlicher Größe der Teilchen)
- Standartfall $l \neq 0$

$$\begin{array}{ll} U_{\text{eff}} \overset{r\to 0}{\rightarrow} \infty & \text{(endliche größe)} \\ U_{\text{eff}} \overset{r\to\infty}{\rightarrow} 0 & \text{WW nicht „gebundener Zustand“} \\ U_{\text{eff}} = \text{min.} & \text{„gebundener Zustand“} \end{array}$$

$E < 0$: gebundene Bewegung (auch bei H-Atomen, Elektronenstruktur, H_2-Molekül, Kernbewegung)

$E > 0$: Streuung d.h. Teilchen kommt aus dem Unendlichen fliegt bis zum Umkehrpunkt r_0 und verschwindet wieder Abstoßung bei r_0 wegen Zentrifugalbarriere $\frac{l^2}{2\mu r^2}$

bilder zu anziehendem-/abstoßendem Potential

1.8.2 Keplerproblem

d.h. $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ $\quad (\alpha > 0)$
$\alpha = G m_1 m_2$ $\quad$ Gravitations-Potential
$\alpha = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$ Coulomb-Potential

$$U_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

$$\frac{dU_{\text{eff}}}{dr} = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{2l^2}{2\mu r^3} \overset{!}{=} \qquad r_0 = \frac{l^2}{\alpha\mu}$$

Mit:

$$q = \int dr \frac{\frac{l}{r^2}}{\sqrt{2\mu E + 2\mu\frac{\alpha}{r} - \frac{l^2}{r^2}}}$$

mit

$$r = \frac{1}{s} \quad s = \frac{1}{r} \quad \frac{ds}{dr} = -\frac{1}{r^2}$$

$$q = -\int ds(2\mu\frac{E}{l^2} + 2\mu\alpha\frac{s}{l^2} - s^2)^{-\frac{1}{2}}$$

und

$$\int dx(c + 2bx - x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\arccos\frac{x-b}{\sqrt{b^2+c}}$$

ist

$$\varphi(r) - \varphi_0 = \arccos\frac{\frac{1}{r} - \frac{\alpha\mu}{l^2}}{\sqrt{\mu^2\frac{\alpha^2}{l^4}2p\frac{E}{l^2}}} = \arccos\frac{\frac{l^2}{\alpha\mu}(\frac{1}{r}) - 1}{\sqrt{1 + 2l^2\frac{E}{\mu\alpha^2}}}$$

Mit $p = \frac{l^2}{\alpha p}$ Abstand r_0

$\epsilon = \sqrt{1 + 2l^2\frac{E}{\mu\alpha^2}}$ „Exzentrität“

$\varphi_0 = 0$

folgt $\varphi = \arccos\frac{\frac{p}{r} - 1}{\epsilon}$

oder:

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\varphi}}$$

Polar-Gleichung für Kegelschnitte:

$\epsilon > 1$ $E > 0$ Hyperbolen

$\epsilon = 1$ $E = 0$ Parabel

$\epsilon < 1$ $E < 0$ Ellipse

Bsp:

Merkur:	$\epsilon = 0,206$	schwer zu beobachten)
Erde:	$\epsilon = 0,017$	
Mars:	$\epsilon = 0,043$	an ihm entdeckt)

gebundene bewegung $\rightarrow$ Keplersche Gesetze

1) Planetenbewegung sind Ellipsen mit Sonne in einen Brennpunkt

$$test \qquad \frac{(x + a\epsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2) Flächensatz
   Die vom Fahrstrahl pro Zeit dt überstrichene Fläche ist konstant

$$dA = r^2 \frac{d\varphi}{2}$$

3) Umlaufzeit T und die große Halbachse a verhalten sich wie

$$T^2 = \text{const.} a^3$$

- Kepler (1571-1701): aufgrund von Beobachtungen der Planeten
- Newton leitete Gravitationsgesetz aus Keplerschen Gesetzen ab
- KG3: $\frac{r^3}{T^2} = \text{const.}$
  Kreisbahn: $\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow r^3\omega^2 = \text{const.} \rightarrow r\omega^2 = \text{const.} \frac{1}{r^2}$

$$\vec{r}(t) = r \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}(t) \sim \omega^2 \vec{r}(t) \qquad |F| \sim \frac{1}{r^2} \qquad \text{Gravitationsgesetz}$$

Streuung:

- $\epsilon = 1, E = 0 \rightarrow$ Parabel als Grenzfall
- $\epsilon > 1, E > 0 \rightarrow$ Hyperbeln

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \leftrightarrow \frac{p}{r} = 1 + \epsilon\cos\varphi$$

attraktives Potential: $\alpha > 0$
$\rightarrow p = \frac{l^2}{\mu\alpha} > 0$
Asymptoten: def Richtung durch $\cos\varphi_\infty = -\frac{1}{\epsilon}$

repulsives Potential: $\alpha < 0 \rightarrow p < 0$

Kapitel 2

Lagrange-Formalismus

nach J-L Lagrange (1736-1813)
1788„Mechanique Analytique“
section 0. Motivation

- Newtonsche Mechanik: alle Kräfte müssen bekannt sein

$$m\ddot{r} = \sum_i \vec{F}_i$$

- Aber oft nur Wirkung, nicht Kraft selbst bekannt
  bsp: Pendel (Abstand fest)
  oder Gas im geschlossenen Gefäß (Moleküle „gefangen“)

2.1 Zwangsbedingungen

$\rightarrow$ schränken Bewegung des Systems auf einen Unterraum ein (z.B. Achterbahn, Bewegung in 2D)
Bsp.: Fadenpendel

- Gravitationskraft $\vec{F}_a$ wirkt nach unten aber Faden der Länge l hat Masse m auf Kreisbahn (allg. Kugelschale)

$$\rightarrow \text{ ZB } y = 0 \qquad x^2 + z^2 = l^2 \tag{1}$$

- übersetzen der ZB Newtonschen Bew. Gl.
  $\rightarrow$ Zwangskraft $\vec{Z}$

$$m\ddot{r} = \vec{F}_G \vec{Z} \tag{2}$$

- $\vec{Z}$ nicht von vornherein bekannt, nur Wirkung (1)

<u>LösunganSätze</u>

- $\vec{Z}$ bestimmern: <u>Lagrange-Gln 1. Art</u>
- Zwangsbedingungen durch Wahl geeigneter Koordinaten eliminieren (Bsp: $\varphi(r)$anstatt$r(t)$)
  → Bew.-Gl. für neue Koordinaten
  → <u>Lagrange-Gln 2.Art</u>

<u>Klassifizierung von ZB</u>

- System mit f Freiheitsgraden (N Massenpkt $f = 3N$)
  $x_1, \ldots, x_f \rightarrow$ Anzahl ZB $R < f$
- Formulierung der ZB:

$$g_\alpha(x_1, \ldots, x_f, t) = 0 \quad \alpha = 1, \ldots, R \tag{3}$$

  Bsp: $f = 3$
  $g_\alpha(x, y, z, t) = y = 0$
  $g_\alpha(x, y, z, t) = x^2 + z^2 - l^2 = 0$
- jede ZB reduziert Anzahl der Freiheitsgrade
  1 Massenpunkt:
  keine ZB: Bew. 3D
  erste ZB: Bew. auf Fläche
  zweite ZB: Bew. auf Schnitt 2-er Flächen
  - ZB der Art (3) heißen <u>holonom</u>
  - ZB die Zeit t explizit enthalten → <u>rheonom</u>
  - ZB die Zeit t <u>nicht</u> explizit enthalten → <u>skleronom</u>
- Bsp für nicht-holonom:
  $g_k(\vec{r}) = r - R < 0$ (Inneres einer Kugel)
  $g_k(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = 0$ (Geschw. benötigt)

2.2 Lagrange-Gl 1.Art

- Eine holonome ZB: Beschränkung der Bewegung eines Teilchens auf eine Fläche
  $g_1(\vec{r}, t) = y = 0 \quad (xz - Ebene)$
  oder
  $g_2(\vec{r}, t) = x^2 + z^2 - l^2 = 0$ (Kugelschale mit Radius l)
- keine weitere Einschränkung der Bew. innerhalb dieser Fläche durch die ZB
  $\rightarrow \vec{Z}$ kann keiner Komponente tangential zur Fläche haben
  $\rightarrow \vec{Z}$ ist orthogonal zur Fläche, die durch g gegeben ist
  $\rightarrow$ wird erfüllt durch Ansatz

$$\vec{Z}(\vec{r}, t) = \lambda(t) \quad \nabla g(\vec{r}, t) \tag{4}$$

  mit zeitabhängigem Parameter $\lambda(t)$
  Bsp: $\nabla g_1(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla g_2(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix}$
- Ansatz (4) zwar plausibel, kann aber nicht bewiesen werden
  $\rightarrow$ (4) ost eigenständiges Axiom der Mechanik

Bemerkung

1. Skalare Fkt 2er Variablen $f(x, y) \rightarrow$ „Gebirge“ in 3D
   $\rightarrow$ partielle Abl. zeigen in Richtung des maximalen Anstiegs
   Bsp: Kreiskegel
   $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
   $\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
   „Höhenlinien“
2. Implizit durch holonome ZB $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$
   Bsp: $F = z^2 - x^2 - y^2 = 0$
   $\vec{\nabla} F = - \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} \rightarrow$ senkrecht auf Kugel

3. Kraft $\sim \vec{\nabla} g$ legt nahe, dass ZB g als Art „Potential" verstanden werden kann

- Aus (4) und (2) $\rightarrow$ Lagrange-Gln 1. Art
  für 1 Teilchen unter einer ZB:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F} + \lambda(t)\vec{\nabla} g(\vec{r}, t) \qquad (5)\\
g(\vec{r}, t) &= 0
\end{aligned}
$$

  (4 Gln für 4 Unbekannte x, y, z, λ)

- Zwei holonome ZB Beschränken die Bewewgung auf Raumkurve

  $\rightarrow \vec{\nabla} g_1$ und $\vec{\nabla} g_2$ unabhängig voneinander, senkrecht auf Kurve
  $\rightarrow \vec{Z}(\vec{r}, t) = \lambda_1(t)\vec{\nabla} g_1(\vec{r}, t) + \lambda_2(t)\vec{\nabla} g_2(\vec{r}, t)$
  $\rightarrow$ Senkrecht (häckchen)

- Verallgemeinerung auf R ZB und N Teilchen ($f = 3N$) $x \equiv (x_1, \dots, x_{3N})$

$$
\boxed{m_n \ddot{x}_n = F_n + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t) \frac{\partial g_\alpha(x, t)}{\partial x_n} \qquad n = 1, \dots, 3N}
$$

$$
\boxed{g_\alpha(x, t) = g_\alpha(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0 \qquad \alpha = 1, \dots, R}
$$

  Lagrange-Gln 1.Art für $3N$ Variablen und R holonome ZB ($3N + R$ Gln für 3N+R unbekannte x_n, λ_α)

Bsp: 2 Teilchen, 1ZB $g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$

- $g = g(\vec{r}_1, t) \rightarrow \vec{Z}_1 = \lambda(t)\vec{\nabla}_1 g(\vec{r}_1, t)$
- $g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = g(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - l = 0$
  $\rightarrow \vec{Z}_1 = -\vec{Z}_2$

Bemerkungen

1. Zusätzliches Axiom (4) $\rightarrow$ nichttriviale Verallgemeinerung der Newton-Axiome

2. d'alembertsche Prinzip (virtuelle Verrückungen)
3. LG 1 insbesondere in technischer Mechanik. Physik haupsächlich LG 2. Art
4. Erhaltung von Impuls, Energie, Drehimpuls wenn Zwangsbedingungen entsprechende Symmetrie erhalten

Lagrange Formalismus

Beispiele Zwangsbedingungen:

- Körper auf Tisch $\rightarrow z = 0$
- Fadenpendel $\rightarrow y = 0 \rightarrow g_1 = y = 0 \quad x^2 + z^2 = l^2 \rightarrow g_2 = x^2 + z^2 - l^2 = 0$

allgemein: R ZB $g_\alpha(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad \alpha = 1, \ldots, R$
holonome ZB
Zwangskräfte: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_G + \vec{Z}$

- bechränkt Bewegung auf eine Fläche
- innerhalb Fläche keine Einschränkung

$\rightarrow \vec{Z}$ ist orthogonal zur Fläche (zu Beweisendes axiom)

Ansatz: $\vec{Z}(\vec{r}, t) = \lambda(t)\mathrm{grad}g(\vec{r}, t)$

hier fehlt was vielleicht was

Bsp: Tisch: $\quad g = z = 0$

hier fehlt was noch mehr

Lagrange-Gl. 1. Art $3N + R \quad$ Gl.
Bsp: Atwoodsche Fallmaschiene (1784)
massenlose Rolle (Radius R), über die 2 Massen (reibungslos) verbunden sind, d.h. 2 Massen $\rightarrow$ 6 Freiheitsgrade

ZB
$y_1 = 0 = y_2$
$x_1 = -R, x_2 = R$
$g(z_1, z_2) = z_1 + z_2 + l = 0 \qquad l = L - \pi R l = \text{Seillänge}$
$\rightarrow$ keine Dynamik in x_i und y_i
$\rightarrow$ es reicht, Bewegungs-Gl. für z_i zu betrachten
Zwangskräfte: $z_i = \lambda\frac{\partial y}{\partial z_i} = \lambda$ in Richtung z_i

$$m_1\ddot{z}_1 = -m_1 g + \lambda$$
$$m_2\ddot{z}_2 = -m_2 g + \lambda$$
$$\frac{d^2}{dt^2}g(z_1, z_2) = \ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = 0$$
$$\Rightarrow -g + \frac{\lambda}{m_1} - g + \frac{\lambda}{m_2} = 0 \Rightarrow \lambda 2g\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$
$$\ddot{z}_1 = -g + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} = g\frac{2m_2 - (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} = g\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$$
$$z_1(t) = z_1(0) + \dot{z}_1(0)t + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\frac{g}{2}t^2$$

2.3 Lagrange-Gl. 2. Art

Ausgangspunkt: Lag. Gl. 1. Art. (1)

$$m_1\ddot{x}_1 = F_n + \sum_\alpha \frac{\partial g_\alpha(x)}{\partial x_n} \tag{1}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_3 N) \quad n = 1, \ldots, 3N \quad g_\alpha(x) = 0 \quad \alpha = 1, \ldots, R$$

Die Anzahl der Freiheitsgrade $f = 3N - R$
Idee: Führe „generalisierte“ (oder verallgemeinerte) Koordinaten ein $q = (q_1, \ldots, q_t)$

- die die Lage aller Teilchen festlegen, d.h.

$$x_n = x_n(q, t) = x_n(q_1, \ldots, q_t, t) \qquad n = 1, \ldots, 3N \tag{2}$$

- ZB q_α sollen für beliebige q_i

  hier fehlt was

$$g_\alpha(x_1(q,t),\dots,x_{3N}(q,t),t)=0 \tag{3}$$

$\rightarrow$ ZB schränken Bewegung der q_i nicht ein

Bsp: Ebenes Pendel mit variabler Länge $l(t)$
$x = l(t)\sin\varphi = x(\varphi,t)$
$z = -l(t)\cos\varphi = z(\varphi,t)$
$y = 0 = y(\varphi,t)$
d.h. φ ist verallg. Koord. , die die ZB

$$\begin{aligned} g(\vec{r},t) &= x^2(\varphi,t)+y^2(\varphi,t)-l^2(t) \\ &= l^2\cos^2\varphi + l^2\sin^2 - l^2 = 0 \end{aligned}$$

für alle Werte φ erfüllt.
2. Bsp: Teilchen im Kreiskegel $\rightarrow$ general. Koord. r,φ
Zylinderkoordinaten
$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$z = r\cot\alpha$ alpha Azimutalwinkel phi Himmelsrichtungs Winkel
Eliminierung der Zwangskräfte
Ausgangspunkt: Gl. (1)
Nach (3) hängen ZB g_α nicht von q_i ab

$$\frac{dg_\alpha}{dq_k} = \sum_{n=1}^{3N}\frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{q_k} = 0 \quad k=1,\dots,f \tag{4}$$

Gl. (1) multipliziert mit $\partial x_n/\partial q_n$ ergibt:

$$\sum_n m_n\ddot{x}_n\frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \sum_n\left[F_n\frac{\partial x_n}{\partial q_k}+\sum_\alpha\lambda_\alpha\frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial q_k}\right]$$

$$\boxed{\sum_n\left[m_n\ddot{x}_n - F_n\right]\frac{\partial x_n}{\partial q_q} = 0} \tag{5}$$

$n=1,\dots,3N \quad k=1,\dots,f$
Bem:

- (5) enthält keine Zwangskräfte, nur f Gl. aber die Transformation $\frac{\partial x_n}{\partial q_k}$
- Durch Einführung der Lagrange-Funktion $L = T - U$ kann (5) wesentlich vereinfacht werden

Dazu betrachten wir:

$$\dot{x}_n = \frac{d}{dt} x_n(q,t) = \sum \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_n}{\partial t} = \dot{x}_n(q, \dot{q}, t) \tag{6}$$

mit general. Geschw. $\dot{q}_i$ Es gilt:

$$\frac{\partial \dot{x}_n(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_n(q,t)}{\partial q_k} \tag{7}$$

Mit

$$T = T(\dot{x}) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \dot{x}_n^2 \tag{8}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} T = T(q,\dot{q},t) &= \frac{1}{2} \sum_n m_n \left[\sum_k \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_n}{\partial t} \right] \left[\sum_i \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_n}{\partial t} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \sum_n m_n \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_k \underbrace{\sum_n m_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \frac{\partial x_n}{\partial t}}_{=m_{ik}} \dot{q}_k \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_n m_n \left(\frac{\partial x_n}{\partial t} \right)^2 \end{aligned}$$

$$T(q,\dot{q},t) \equiv \sum_{i,k} m_{ik}(q,t) \dot{q}_1 \dot{q}_k + \sum_k b_k(q,t) \dot{q}_k + c(q,t) \tag{9}$$

<u>Bem:</u>

- Die Größe T in (8) und (9) bezeichnet verschiedene Funktionen der Argumente, stellt aber die gleiche physikalische Größe dar.
- Da x_n linear in $\dot{q}_k$ ist (7), ist die kin. Energie maximal quadratisch in den $\dot{q}_k$
- Hängen die x_n nicht explizit von der Zeit ab, $x_n = x_n(q)$ so wird Gl. (9)
$$T(q,\dot{q}) = \sum_{i,k} m_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k$$

Wir bilden die Ableitung

$$\frac{\partial T(q,\dot{q},t)}{\partial q_k} \overset{(8)}{=} \sum_n m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k} \tag{10}$$

$$\frac{\partial T(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} = \sum_n m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_n} \overset{(7)}{=} \sum_n m_n \dot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \tag{11}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum n m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} + \sum_n m_n x_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k} \tag{12}$$

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial x_n}{\partial q_k} - \sum_l \frac{\partial^2 x_n}{\partial q_l \partial q_k} q_l + \frac{\partial^2 x_n}{\partial t \partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_l \frac{\partial x_n}{\partial q_l} q_l + \frac{\partial x_n}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{d x_n}{dt}\right]$$

Beachte: Der erste und der zweite Term von (12) kommt auch in (5)
<u>Def:</u> verallgemeinerung der Kräfte:

hier fehlt was

Beachte konservative Kräfte

$$F_n = -\frac{\partial U(x)}{\partial x_n}$$

Mit Trafo $x_n = x_n(q,t)$ ist $U(q,t) = U(x_q(q,t), \dots, x_{3N}(q,t))$
Damit ergibt sich die verallgemeinerte Kraft:

$$Q_k = \sum_n F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = -\sum_n \frac{\partial U(x)}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial q_k} = -\frac{\partial U(q,t)}{\partial q_k} \tag{15}$$

Damit wird (14) (da $\partial U / \partial \dot{q}_k = 0$)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial (T-U)}{\partial q_k} \tag{16}$$

Def der sogenannten Lagrange Funktion:

<u>Lagrange-Gleichungen</u>
N Teilchen, $x = (x_1, \dots, x_{3N}) = \{x_n\} \quad k = 1, \dots, 3N$
R Zwangsbedingungen $g_\alpha(x,t) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, R$
Lagrange-Gl- 1. Art:

$$m_n \ddot{x}_n = F_n + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial g_\perp}{\partial x_n}$$

Verallg. Koord.: $1 = (q_1, \ldots, q_f) = \{q_k\} \quad k = 1, \ldots, f \quad f = 3N - R$
mit $x_n = x_n(q,t) \quad , \quad g_\alpha = g_\alpha(q,t) = 0$

$$\rightarrow \frac{\partial g_\alpha}{\partial g_k} = 0$$

Eliminierung der Zwangskräfte

$$\sum_n m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \underbrace{\sum_n F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k}}_{Q_k} \qquad k = 1, \ldots, f \text{ Gl. ohne Zwangskräfte}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k = -\frac{\partial U(q,t)}{\partial q_k}$$

Lagrange-Fkt.: $L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - U(q,t)$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}} \qquad \text{Lagrange-Gl (2. Art)}$$

Diskussion:

1.) Gl: (18) stellt ein System von $f = 3N - R$ DGLn 2. rd. dar d.h. eine Vereinfachung der Lagrange-Gl. 1. Art, aber ohne explizit gegebene Zwangskräfte

2.) Da es i.a. unterschiedliche verallg. Koord. q_k für gegebene Probleme gibt, ist L nicht eindeutig. Weiterhin sind Zusatztherme zu L möglich, die die Bew. Gl. nicht ändern (siehe Übungen).
Daher ist L eine theoretische Größe, im Vergleich zu direkt messbaren Größen wie T und U.
Die allg. Form der Lagrange-Gl. bleibt aber gleich „Forminvarianz"
(Nicht so bei den Nowton-Gl. z.B. in Polar Koord. gilt $m\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r}$ und $mr^2\ddot{\varphi} \neq -\frac{\partial U}{\partial r}$)

3.) L ist eine Skalare Größe $\rightarrow$ Leichter aufzustellen als vektorielle Kräfte im $\mathbb{R}^{3N}$. Zudem ist L eine einfache Funktion der Variablen.

4.) Liegen keine Zwangskräfte vor, so sind die q_k einfach die kartesischen Koordinaten x_n und mit

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\sum_n^{3N} m_n \dot{x}_n^2 - U(x)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} = m_n \ddot{x}_n$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = -\frac{\partial U}{\partial x_n}$$
$$\to m_n \ddot{x}_n = -\frac{\partial U}{\partial x_n} \quad \text{Newton Bwe- Gl.}$$

5.) Bei geschwindigkeitsabhängigem Potential muss die Def. der allg. Kraft erweitert werden, $U = U(q, \dot{q}, t)$

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}$$

$\to$ führt wieder auf Lagrange-Gl.
wichtigstes Bsp. ist Lorenz Kraft mit Potential

$$U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \underbrace{e\Phi(\vec{r}, t)}_{\text{el. Pol}} - \underbrace{\frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}}}_{\text{Vektorpotential}}$$

6.) Wesentlich ist die Wahl der verallg. Koord. q_k, die das betrachtete „System“ definieren.
Restliche Freiheitsgrade werden vernachlässigt oder über Reibungstherme oder externe zeitabhängige Funktionen berücksichtigt.

Bsp 1: Schiefe Ebene mit Steigung α. Achse s liegt in der schiefen Eben ist also die verallg. Koord

$$x(t) = s(t)\cos\alpha \qquad z(t) = s(t)\sin\alpha$$

Mit $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)$ und $U = mgz$
ist
$$L(s, \dot{s}) = T - U = \frac{m}{2}\dot{s}^2 - mg\sin\alpha s$$

mit Lagrange-Gl.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\ddot{s} = \frac{\partial L}{\partial s} = -mg\sin\alpha$$

mit Lösung:
$$s(t) = -\frac{g}{2}\sin\alpha t^2 + v_0 t + s_0$$

Bsp 2: Kreiskegel [bild]
kart. Koord: $L = T + U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$

Zylinder Koord:
$x = r\cos\varphi \quad \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi}$
$y = r\sin\varphi \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi}$
$z = r\cot\alpha \quad \dot{z} = \dot{r}\cot\alpha$
$\to$ verallg. Koord. z.B. r, φ

$$L = \frac{m}{2}\left[r^2\varphi^2 + \dot{r}^2(1+\cot^2\alpha)\right] - mgr\cot\alpha = L(r,\dot{r},\varphi,\dot{\varphi})$$

Lagrange-Gl.:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \boxed{\frac{m}{2}(1+\cot^2\alpha)2\ddot{x} - mr\dot{\varphi}^2 + mg\cot\alpha = 0}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left[2r^2\dot{\varphi}\right] = \boxed{m\left[2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}\right] = 0}$$

Reibungskräfte
z.B. Stokessche Reibungskraft

$$F_n^R = -\gamma_n\dot{x}_n$$

Reibungskräften kann kein Potential zugeordnet werden
Daher zurück zu Gl.(15)

$$\sum_n m_n\ddot{x}_n\frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \sum_n F_n\frac{\partial x_n}{\partial q_k} = Q_k$$

mit verallg. Kräften

$$Q_k^R = sum_n F_n^R\frac{\partial x_n}{\partial q_k}$$

Rayleisghsche Dissipationsfunktion

$$D(\dot{x}) = \sum_n \frac{\gamma_n}{2}\dot{x}_n^2$$

$$\to D(q,\dot{q},t) = \sum_n \frac{\gamma_n}{2}x_n(q,\dot{q},t)$$

$$Q_k^R = -\sum_n \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_n}\frac{\partial x_n}{\partial q_k} \overset{(7)}{=} -\sum_n \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_n}\frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial D(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k}$$

$$(7): \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_n}{\partial q_k}$$

$\to$ Lagrange-Gl. mit Reibung

2.3.1 Lagrange Formalismus

verallgemeinerte Koordinaten $q = (q_1, \dots, q_f) \quad f = 3N - R$
n beschw. $q = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$

$$L(q, \dot{q}, t) = T - U$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad K = 1, \dots, F$$

2.3.2 Energieerhaltung

Wir betrachten

$$\frac{d}{dt}\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = \sum_k \dot{q}_k \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{\partial L/\partial q_k} + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$\rightarrow$ Erhaltungssatz
wenn $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ ist $\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L$ erhalten.
$\rightarrow k = U(q) \neq U(q, t)$
Hängen zB nicht explizit von der Zeit ab, $x_n = x - n(q) \neq x_n(q, t)$ sowie das Potential U nicht explizit von den geschwind. $U = U(q)$
ist

$$T = \sum_{k,l} m_{kl}(q)\dot{q}_k\dot{q}_l = T(q, \dot{q})$$

und

$$\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = 2T(q, \dot{q})$$

Damit folgt mit: $\partial L/\partial t = 0$

$$\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = -L = T + U = E = \text{ conts.} \quad \text{Energieerhaltung}$$

2.4 Symmetrie und Erhaltungsgrößen

Lagrange-Formelismus erleichtert das Finden von Erhaltungsgrößen

Def: 1) Zyklische Koordinate q_k

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

2) Verallgemeinerte (oder "kanonisch konjungierter") Impuls

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

Mit $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$
Wenn q_k Zyklisch, ist p_k erhalten

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \to p_k = \text{const.}}$$

Bsp: freies Teilchen

$$L = T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 \text{ hängt von } \vec{r} \text{ ab} \to \vec{r} \text{ ist zyklisch Koord.}$$

$\to$ damit $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ erhalten
Bem: Bezeichnung verallg. Impuls p

$$L = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - U(r) \to p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \text{ kinematischer Impuls}$$

Die Äquivalenz zwischen verallg. Impuls (2) und kinematischen Impuls $m\dot{r}$ gilt für Geschw.-unabhängige Potentiale.
(gegen)- Bsp: elektormagnetisches Potential mit Vektorpotential $\vec{A}$

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A} \quad \text{kan. Impuls}$$
$$m\dot{\vec{r}} = \vec{p} - q\vec{A} \quad \text{kinem. Impuls}$$

Gl. (3) beschreibt Zusammenhang zwischen

- Symmetrie oder Invarianz
  zB System verändert sich nicht bei Translation in q_k d.g. L kann nicht von q_k abhängen $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ und

- Erhaltung
  zugehöriger verallg. Impuls p_k ist erhaltern: $\frac{dp_k}{dt} = 0$

allg. Idee:
geg. Erhaltungsgröße f, mit $\frac{d}{dt}f(q,\dot{q},t) = 0$ bildet eine "Konstante der Bewegungöder ërtes Integral"
$\rightarrow$ erleichtert Lösung der Lagrange-Gl.
$\rightarrow$ Wähle verallg. Koord. so, da möglichst viele Erhaltungsgrößen aufgestellt werden, da

- jede Erhaltungsgröße (zB $E, \vec{p}, \vec{L}$) verringert die Anzahl der Integrationen der Bew.Gl unter 1.
- Erhaltungsgößen sind nützlich bei Interpretation zB Drehimpulserhaltung $\rightarrow$ 2. Keplersche Gesetz
- geg. genügende Anzahl von Erhalt. größen
  $\rightarrow$ system kann nicht chaotisch sein

Bsp: kreiskegel: verallg. Koord. r, φ

$$L = \frac{m}{2}[r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2(1+\cot^2\alpha)] - mg\cot\alpha\, r$$

Bew.Gl:

$$2\dot{r}\dot{\varphi} - r\ddot{\varphi} = 0 \tag{1}$$

$$(1+\cot^2\alpha)\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - g\cot\alpha = 0 \tag{2}$$

L hängt nicht von φ ab $\rightarrow$ φ ist zykl. Koord.

$$\rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\varphi} = mr^2\dot{\varphi} = \text{const.} \tag{3}$$

- Erhaltung der z-Komp. der Drehimpulses
- Energieerhaltung

$$E = T + U = \text{const.} \tag{4}$$

(3) und (4) sind DGL 1. Ord. während Gl. (1), (2) DGL 2. Ord. sind.
$\rightarrow$ leite (3), (4) aus (1), (2) her:

1. Mutiplikation: (1), r: $2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = 0$
   $\to \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \to r^2\dot{\varphi} = \text{const.}$

2. Multiplikation von (2) mit $\dot{r}$: $(1 + \cot^2\alpha)\dot{r}\ddot{r} - \dot{r}\frac{p_\varphi^2}{m^2r^3} + g\cot\alpha\;\dot{r} = 0$ und Gl. (3)

$$\begin{aligned}\to \frac{d}{dt}[(1+\cot^2\alpha)\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{1}{m^2r^2}p_\varphi^2 + g\cot\alpha\; r] = 0 \\ = \frac{d}{dt}\left(\frac{E}{m}\right) = 0\end{aligned}$$

   Intergration von (4) mit

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = [E - \frac{m}{2}\frac{p_\varphi^2}{m^2r^2} - mg\cot\alpha]\frac{2}{m}\frac{1}{(1+\cot^2\alpha}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{a\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1/\sin^2\alpha$$

   Separation der Variablen:

$$t = \pm\int\frac{dr}{\frac{2}{m}[E - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - mg\cot\alpha\; r]\sin\alpha} \tag{5}$$

und damit $r(t)$
Damit kann Gl. (3) integriert werden

$$\varphi(t < 9) = \frac{p_\varphi}{m}\int\frac{dt}{r^2(t)} \tag{6}$$

Vgl mit Zentralproblem: effektives Potential

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{mg\cot\alpha\; r}{\gamma} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}$$

minimum bei: $\frac{\partial U_{\text{eff}}}{dr} = \gamma\frac{p_\varphi^2}{2mr^3} = 0$

2.4.1 Noether-Theorem

Emmi Noether (1882 - 1935), deutsche Mathematikerin
Verallg. des Zusammenhangs zwischen Invarianz und Erhaltung
Geg: $L = L(q, \dot{q}, t)$ mit Lösung $q(t) = (q_1(t), \ldots, q_f(t))$

„Noether Theorem“

Ist L invariant unter der Trafo

$$q_i(t) \to q_i(t, \alpha) \tag{1}$$

also

$$L(q(t,\alpha), \dot{q}(t,\alpha), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t) \tag{2}$$

so ist die größe

$$\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} \tag{3}$$

erhalten.

Bsp. für Trafos sind:
- Transformation $q_i = q_i + \alpha$
- Rotation um geg. Achse mit Winkel α

Beweis:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t,\alpha), \dot{q}(t,\alpha), t)\bigg|_{\alpha=0} \overset{(2)}{=} \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t)\dot{q}(t), t)\bigg|_{\alpha=0} = 0$$

$$0 = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right)\bigg|_{\alpha=0}$$

$$= \sum_i \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right]}_{=0,\text{ wenn } q_i \text{ Lösung}} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} + \underbrace{\frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0}}_{=0} = 0$$

Bem: Beweis gilt für alle α, also auch für $\alpha = 0$. Mit $\alpha = 0$ werden oft Ausdrücke einfacher.

Invarianz

Zyklische Variable q_a mit $\frac{\partial L}{\partial q_a} = 0 \leftrightarrow$ verallg. Impuls $p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \text{const.}$

zB: $L = \frac{m}{l}\dot{x}^2 \to p = m\dot{x} = \text{const.}$

Allg: Ist $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ invariant bzgl. $q_i(t) \to q_i(t, \alpha)$ ist die Größe

$$\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \dot{\alpha}}\bigg|_{\alpha=0} \quad \text{erhalten}$$

Verallg.: Falls L nicht invariant bzgl. Trafo, aber gilt

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t,\alpha), \dot{q}(t,\alpha), t)\bigg|_{\alpha=0} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t), \dot{q}(t), t)}_{=0} + \frac{d}{dt} F(q(t), \dot{q}(t), t)$$

mit beliebiger Funktion F, so folgt

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial L}{\partial \alpha} + \frac{dF}{dt} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \, \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \, \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} + \frac{dF}{dt} \\ &= \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \, \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + F \right]}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

und damit

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \, \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + F(q, \dot{q}, t) \tag{$*$}$$

ist erhalten.

Translation: Lagrange Funktion $L(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_N, t)$ sei invariant unter Trafo

$$\vec{r}_i(t) \to \vec{r}_i(t, \alpha) = \vec{r}_i(t) + \alpha \vec{e}$$

wobei $\vec{e}$ ein beliebiger (aber konst.) Einheitsvektor ist.
Gilt zB wenn Pot. U nur von Differenzvektoren abhängt

$$\vec{r}_i(t, \alpha) - \vec{r}_j(t, \alpha) = \vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)$$

Damit ist

$$\frac{\partial \vec{r}_i(t, \alpha)}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = \vec{e}$$

und

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \vec{e} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{e} = \vec{p} \cdot \vec{e} \quad \text{ist die erhaltene Größe}$$

Da $\vec{e}$ beliebig ist, ist Gesamt Impuls erhalten. Bei speziellen Vektor $\vec{e}_0$ ist nur $\vec{p} \cdot \vec{e}_0$ Komponente erhalten d.h.

Invarianz bzgl. Translation um $\vec{e} \leftrightarrow$ Impuls p_e ist erhalten.
Symmetrie: „Homogenität der Raumes"

anschaulich: keine Hindernisse im Raum

Rotationsinvarianz Sei

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x^2 + y^2 + z^2)$$

in Zylinderkoord:

$$L(r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(r^2, z)$$

ist bzgl. der Trafo $\varphi \to \varphi + \alpha$ invariant
Folglich ist

$$\frac{\partial L}{\dot{\varphi}} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\bigg|_{\alpha=0} = mr^2\dot{\varphi}\frac{\partial(\varphi + d)}{\partial \alpha} = mr^2\dot{\varphi} = L_z$$

erhalten

Invarianz bzgl. Drehung um $\vec{e} \leftrightarrow$ Drehimpuls L_e ist erhalten.
Symmetrie: Isotropie des Raumes

d.h. keine Richtung ausgezeichnet.

Translation in der Zeit

$$t \to t + \alpha. \text{ d.h. } q_i(t, \alpha) = q_i(t + \alpha)$$

Damit

$$\frac{\partial q_i(t, \alpha)}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = \frac{\partial q_i}{\partial t}\frac{\partial \alpha}{\partial t}\bigg|_{\alpha=0} = q_i$$

$$\frac{\partial \dot{q}_i(t, \alpha)}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = \ddot{q}_i$$

Betrachte

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}L(q(t+\alpha),\dot{q}(t+\alpha),t)\Big|_{\alpha=0} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\,\frac{\partial q_i(t+\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\frac{\partial \dot{q}_i(t+\alpha}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0}$$

$$= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

und

$$\frac{dL(q(t),\dot{q}(t),t)}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial L}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = \frac{dL}{dt} \text{ falls } L \text{ nicht explizit von Ziel abhängt d.h. } \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

mit $(*)$ und $F(q,\dot{q},t) = -L(q,\dot{q},t)$, somit ist erhalten

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L(q,\dot{q}) \text{ Formel hergeleitet bei Energieerhaltung}$$

$$= T + U = E = \text{ const. d.h. Energieerhaltung}$$

Invarianz unter Zeittranslation $\leftrightarrow$ Energieerhaltung
Symmetrie: Homogenität der Zeit

anschaulich: Experiment verläuft heute genauso wie morgen

Bem:

- Die durch das Noether Theorem beschriebene Beziehung

  Invarianz/Symmetrie $\leftrightarrow$ Erhaltung

  ist fundamental und allg. gültig. Gilt also auch in QM und relativistischer Mechanik.

- zB: liefert die Erhaltung von Ladung, Isospin,...
  Konstruktionsbedingungen für entsprechende Theorien.

2.5 Hamiltonsches Prinzip

2.5.1 Funktionale und Variationsrechnung

- Funktion $x \to y = f(x)$ ordnet jeder Zahl x eine Zahl y zu.
  Extrema durch Nullstellen der Ableitung $\frac{df}{dx}$
- Funktional $y = f(x) \to J[y]$ ordnet einer Funktion $f(x)$ eine Zahl J zu.

Bsp1: Kürzeste Wegstrecke Wegstrecke:

$$\begin{aligned} J = J[y] &= \int_1^2 ds \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} dx \, \sqrt{1 + y'(x)^2} \end{aligned}$$

kürzeste Wegstrecke: $J[y] = \min.$
(Ergebnis aus Kurvenintegral)

Bsp2: Brachistochrone Bernulli (1696)
Masse m gleitet reibungslos wegen Schwerkraft auf Kurve y(x). Für welcher y(x) ist die Zeit T minimal?

$$\left.\begin{array}{l} \text{Mit } v = \frac{ds}{dt} \quad dt = \frac{ds}{V} \\ ds = \sqrt{1 + y^{12}} \, dx \\ \frac{1}{2} m v^2 = mgy \to v = \sqrt{2gy} \end{array}\right\} \to T = \int_{x_1}^{x_2} dx \, \sqrt{\frac{1 + y^{12}}{2gy(x)}}$$

2.5.2 Euler-Lagrange-Gl.

Problem: Welche Funktion $y(x)$ macht Funktional

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \; F(y, y', x) \tag{1}$$

minimal, wobei differentierter Funktion F und $y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2)$ bekannt sind.

Sei $y(x)$ die gesuchte Funktion mit $J[y] = \min$.
Die Variation

$$y(x) \rightarrow y(x) + \epsilon\eta(t) \tag{2}$$

mit infinit. ϵ und beliebigen diff. baren Funktion $\eta(1)$ die die Randbeding. $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$

$$J[y + \epsilon\eta] \text{ ist minimal bei } \epsilon = 0 \quad \forall\eta \tag{3}$$

Die Bestimmung von y über (3) wird als Variationsrechnung bezeichnet.

$$J[y + \epsilon\eta] = \int_{x_1}^{x_2} dx\ F(y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta', x)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx\ [F(y, y', x) + \frac{\partial F}{\partial y}(y, y', x)\epsilon\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}(y, y', x)\epsilon\eta'(x)$$

Damit

$$0 = \left.\frac{dJ(y + \epsilon\eta)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx\ [\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)]$$

[Par. Int: $\int uv' = \int uv - \int vu'$ für 2. Term]

$$\underbrace{\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\eta(t)\right|_{x_1}^{x_2}}_{=0,\text{ da }\eta(x_1)=\eta(x_2)=0} + \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\eta(t)$$

Da η beliebig sein kann, muss Klammer verschwinden

$$\rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dx}\frac{\partial F(y, y', t)}{\partial y'} = \frac{\partial F(y, y', t)}{\partial y}} \tag{4}$$

Euler-Lagrange-Gl.

- Hängt nicht von $\eta(x)$ ab
- notwendige Bedingung für Extremum

Mit variation $\delta_y = \epsilon\eta(x)$ können wir (3) schreiben

$$\begin{aligned} \delta J &= J[y+\delta y] - J[y] = 0 \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\delta F}{\delta y} \right) \delta y = \int_{x_1}^{x_2} dx \ + \delta F(y, y', t) \end{aligned} \tag{5}$$

wobei

$$\frac{\delta F}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \text{ als Funktionalableitung bezeichnet wird}$$

Gl. (4) und (5) sind äquivalent

„Variationsprinzip“

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} \leftrightarrow \delta J = 0$$

2.5.3 Variationsrechnung

Funktional:$y = f(x) \rightarrow J[y]$
z.B. Weglänge s der Kurve $y(x)$

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$$

allg:

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y', x)$$

Extrema über Variation $\delta_y = \epsilon\eta(x)$

$$\left. \frac{\partial J}{\partial t} \right|_{\epsilon=0} = 0$$

$$\delta J = J[y + \delta_y] - J[y] = 0 \leftrightarrow \text{ Extrema von } J$$

äquivalent zu den Euler-Lagrange-Gl

Extremalbedingungen

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial F}{\partial y} \quad \leftrightarrow \quad \delta J = 0$$

<u>Bsp: Kürzeste Verbindung</u>

$$J = \int ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\sqrt{1+y'^2}}_{F} = \text{ min}$$

<u>Euler-Lagrange-Gl.</u>

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \frac{d}{dx}\frac{2y'(x)}{2\sqrt{1+y'^2}} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

<u>Integration:</u>

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\int_{x_1}^{x_2} = \frac{y'(x_2)}{\sqrt{1+y'(x_2)^2}} - \frac{y'(x_1)}{\sqrt{1+y'(x_1)^2}} = 0$$

$$\to y' = \text{const.} \quad , \quad y(x) = ax + b$$

a, b aus x_1, x_2

Verallgemeinerung:

(1) Hängt F von meheren Funktionen $y_i \quad (i = 1, \dots, f)$ ab, so erhalten wir $\frac{\partial J}{\partial \epsilon_i}\big|_{\epsilon_i=0} = 0$ und damit f Euler-Lag-Gl.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} = \frac{\partial F}{\partial y_i}}$$

(2) Hängt y von mehreren Argumenten ab, $y = y(x_1, \dots, x_n)$ so erhalten wir

$$J[y] = \int dx_1 \cdots \int dx_n F(y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}, x)$$

Mit $\frac{\partial J}{\partial E}\Big|_{\epsilon=0} = 0$

<u>Euler-Lagrange-Gl:</u>

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial y/\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

2.6 3. Hamiltonsche Prinzip

Die Korrespondierenz

$$\begin{aligned} y_i(x) \quad &\leftrightarrow \quad q_i(t) \\ F(y, y', x) \quad &\leftrightarrow \quad L(q, \dot{q}, t) \\ \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} = \frac{\partial F}{\partial y} \quad &\leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \end{aligned}$$

$y = (y_1, \ldots, y_f) \qquad q = (q_1, \ldots, q_f)$

$\rightarrow$

- Lösungsverfahren der Lagrange-Gl. (z.B. über Erhaltungssätze) können in Variationsrechnung verwendet werden
- physikalische Bedeutung der Variationsrechnung

Wir ordnen jeder Bahnkurve $q(t)$ ein Wirkungsfunktional

$$\boxed{S = S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q, \dot{q}, t)}$$

S wird oft Wirkung genannt
Gemäß dem Variationsprinzip sind damit die Lagrange-Gleichungen äquivalent zu der Formulierung, dass die Variation der Wirkung gleich Null ist:

„Hamiltonsche Prinzip“

$$\delta S[q] = 0$$

Bewegung verläuft so, dass Bahnkurve $q(t)$ die Wirkung S minimiert: „ Prinzip der kleinsten Wirkung“
Bem:

- Anstele von DGL (wie Newton, Lagrange) kann das Grundgesetz der Mechanik also auch als Variationsprinzip formuliert werden
- andere Bsp:

– Optik: Fermatsche Prinzip
  Licht nimmt seinen Weg so, dass die Laufzeit
  $t[x] = \frac{1}{C} \int_{x_1}^{x_2} dx\; n(x) \stackrel{!}{=}$ min $\quad n(x)$: Brechungsindex
– Thermodynamik: 2. Hauptsatz
  Entropie S nimmt immer zu
– auch die QM kann durch ein Variationsprinzip beschrieben werden

2.6.1 Schwingung einer Seite

Seite zwischen zwei wänden mit Abstand l auf der x Achse Auslenkung $n(x,t) \widehat{=}$ Feld

- Bsp für Kontinuumsmechanik, d.h. Dynamik elastischer Körper inklusive Balkenbiegung und Hydrodynamik
- Bsp für einfahce klassische Feldtheorie
- führt auf Wellengleichung
- Analogie zu QM

Bsp für Felder: el.Feld $\vec{E}(\vec{r},t)$, Temperaturfeld $T(\vec{r},t)$, Wellenfunktion $\Psi(\vec{r},t)$ zentrale Größe in Feldtheorie
Bewegungsgleichung für Felder, sogenannte Feldgleichung, sind partielle DGL

Herleitung der Wellengleichung

Ansatz:

- Saite $\widehat{=} N$ Massenelemente Δm durch Federn verbunden
- zuletzt: $N \to \infty$ „Kontinuumslimes“
- $l = N\Delta x \quad N \gg 1$
- Massen Δm_i bei $x_i - (i - \frac{1}{2})\Delta x \quad (i = 1, \ldots, N)$ Auslenkung $u_i(t) = u(x_i, t)$

$$T = \sum_i \frac{\Delta m_i}{2} \left(\frac{du_i}{dt} \right)^2 = \sum_i \frac{\rho \Delta x}{2} \dot{u}_i^2 \tag{1}$$

mit Massendichte $\rho =$ Masse/Länge
Abstand zwischen i-ten und $(i+1)$-ten Massenpunkt

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + (u_{i+1} - u_i)^2}$$

für kleine Auslenkungen

$$\approx \Delta x [1 + \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{2 \Delta x^2}]$$

(keine wurzel mehr wegen 1. Ordnung Entwicklung ...)
In Ruhelage $\Delta s = \Delta x$ existiert eine Vorspannkraft P der Seite
Beitrag zur pot. Energie $\sim P \cdot (\Delta s - \Delta x)$

$$U = \sum_i P \Delta x \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{2 \Delta x^2} \tag{2}$$

$N \to \infty : \quad u_i(t) \to u(x,t)$

$$\begin{aligned} T &= \lim_{N \to \infty} \frac{\rho}{2} \sum_i \Delta x \left(\frac{\partial u(x_i, t)}{\partial t} \right)^2 \\ &= \frac{\rho}{2} \int_0^l dx \underbrace{\left(\frac{\partial u(x_i, t)}{\partial t} \right)^2}_{=: \dot{u}^2} \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{\Delta x} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = u'$$

$$\begin{aligned} U &= \lim_{N \to \infty} \frac{\rho}{2} \sum_i \Delta x \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{\Delta^2 x} \\ &= \frac{\rho}{2} \int_0^l dx \underbrace{\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2}_{=: u'^2} \end{aligned}$$

Damit ist

$$L(\dot{u}, u') = \int_0^l dx \quad \underbrace{\left[\frac{\rho}{2} \dot{u}^2 - \frac{P}{2} u'^2 \right]}_{\underline{\text{Lagrange-Dichte}} \quad \mathcal{L}(\dot{u}, u')} \tag{3}$$

Hamilton Prinzip

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \mathcal{L}(\dot{u}, u') = 0$$

Euler-Lagrange-Gl.
für 2 Argumente $x_1 = x, x_2 = t$
und $F = \mathcal{L}, y = u$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0$$
$$\rho \ddot{u} + P u'' - 0 = 0$$

mit $c = \sqrt{\frac{P}{S}}$ „ Wellengeschwindigkeit“

Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t} = 0$$

Randbedingungen: $U(0,t) = u(l,t) = 0$
Anfangsbedingungen: $U(x,t_0) = u_0\ ,\ \dot{u}(x,t_0) = \dot{u}_0$

Lösung der Wellengleichung: Ansatz:
$u(x,t) = u_0 e^{\pm i(kx - \omega t)}$
Amplitude u_0, Wellenvektor k, Frequenz ω
eingesetzt: $u'' = \frac{1}{c^2}\ddot{u} \to -uk^2 = -\frac{1}{c^2}\omega^2 u$
Lösung, falls $\boxed{\omega = ck}$ Dispersionsrelation
allg. Lösung durch Linearkombination im Kontinuumlimit erhalten

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\ u(k) e^{\pm(kx - \omega t)} \qquad \text{Fourier-Trafo}$$

Bsp: Stehende Welle
Superposition zwischen rechtslaufenden und linkslaufenden Wellen

$$\begin{aligned} u &= \cos(kx - \omega t) - \cos(-kx + \omega t) \\ &= \text{Re}\ e^{ikx} \underbrace{\left(e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}\right)}_{2i \sin \omega t} \\ &= 2\ \text{Im}\ e^{ikx} \sin \omega t = 2 \sin kx \sin \omega t \end{aligned}$$

d.h. unabhängig von t erhält man „Knoten“ (Nullstellen) für $\sin kx = 0$
Randbedingung: $u(x=0,t) = u(x=l,t) = 0$
$\sin kl = 0 \to k = \pi \frac{n}{l}$
s.h. es können nur Wellen mit bestimmten Wellenlängen λ_n auftreten

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k} = \frac{2l}{n}$$
$$\omega_n = ck = \frac{n\pi c}{l}$$

$n = 1, 2, 3 \ldots$
ein Wellenbauch → „Grundschwinung“
zwei Bäuche (doppelte Frequenz) „1. angeregte Schwingung“ 1. Oberton
drei Bäuche (1,5 fache Frequenz) „2. angeregte Schwinung“ 2. Oberton
Analogie zum QM Teilchen im Kasten
→ Quantisierung

2.6.2 Der Starre Körper

- System von Massenpunkten mit $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{const.}$
  z.B.
  - starres Molekül
  - Näherung für kontinuierliche Massenverteilung
- Bewegung besteht aus
  - Translation, d.h. alle Teilchen haben gleiche Geschwindigkeit
  - Drehung um einen körperfesten Koordinaten Ursprung 0

  → $2 + 3 = 6$ Freiheitsgrade

Raumfestes Inertialsystem (IS) mit x, y, z und
Körperfestes Koord.system (KS) x_1, x_2, x_3
KS: Ursprung bei 0 $\widehat{=}$ im IS $\vec{r}_0(t)$
(z.B. der Schwerpunkt) → $\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt}$
KS dreht sich relativ zum IS mit

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

$\vec{r}_n$ seien die Orte des n-ten Teilchens im KS
$\vec{r}_{n,\text{IS}}$ seien die Orte des n-ten Teilchens im IS

$$\vec{r}_n = \vec{r}_{r,\text{IS}} - \vec{r}_0$$

Geschwindigkeit im IS:

$$\frac{d\vec{r}_{r,\text{IS}}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}_0}{dt}}_{=v_0} + \frac{d\vec{r}_n}{dt}$$

Mit I.4 Beschleunigte Bezugssysteme:
für beliebigen Vektor $\vec{G}$ ist

$$\frac{d\vec{G}_{\text{IS}}}{dt} = \frac{d\vec{G}_{\text{KS}}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{G}_{\text{KS}} \tag{$*$}$$

$$\text{z.B.} \quad \frac{d\vec{r}_{\text{IS}}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{v}_{n,\text{IS}} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_n \tag{1}$$

Kinetische Energie

$$\begin{aligned}
T &= \sum_n \frac{m_n}{2} \vec{v}_{n,\text{IS}}^{\,2} = \sum_n \frac{m_n}{2} [\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_n] \qquad\qquad n = 1, \dots, N \\
&= \sum_n \frac{m_n}{2} \vec{v}_0^{\,2} + \underbrace{\sum_n m_n \vec{v}_0 (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)}_{\downarrow \text{ Spatprodukt}} + \sum_n \frac{m_n}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2 \\
&= \frac{M}{2} \vec{v}_0^{\,2} + (\vec{v}_0 \times \vec{\omega}) \sum_n m_n \vec{r}_n + \sum_n \frac{m_n}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2 \\
&= T_{\text{trans}} + T_{\text{rot-trans}} + T_{\text{rot}}
\end{aligned} \tag{2}$$

<u>2 Fälle:</u>

- Körper wird in keinem Punkt festgehalten
  Mit $\vec{0} = \vec{R}$ (Schwerpunkt) ist $\sum\limits_i m_i \vec{r}_i = 0$

  $$\rightarrow T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}}$$

- Körper wird in mindestens einem Punkt festgehalten
  Mit $\vec{0} = \vec{P}$ ist $\vec{v}_0 = 0$ (z.B. bei Kreisel)

  $$\rightarrow T = T_{\text{rot}}$$

Mit $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad \vec{r}_n = (x_{1n}, x_{2n}, x_{3n})$
Und der Identität

$$\begin{aligned}(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 &= \omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2 \\ &= \sum_{k=1}^{3} \omega_k^2 r^2 - \sum_{i,k}^{3} \omega_i x_i - \omega_k x_k \qquad i, j, k = 1, 2, 3 \\ &= \sum_{i,k} \omega_i \omega_k (r^2 \delta_{ik} - x_i x_k)\end{aligned}$$

wird

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} m_1 (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2 \\ &\equiv \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{3} I_{ik} \omega_i \omega_k\end{aligned}$$

mit dem <u>Trägheitstensor</u>

$$\boxed{I_{ik} = \sum_{n=1}^{N} m_n (r_n^2 \delta_{ik} - x_{ik} x_{kn})} \tag{3}$$

Im Matrixschreibweise $I = \{I_{ik}\}$ ist

$$\boxed{T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} I \vec{\omega}} \tag{4}$$

Bem:

- Begriff Tensor: ursprünglich von Spannungstensor (Physik)
  Mathe: Tensor
  1. Stufe $\widehat{=}$ Vektor
  2. Stufe $\widehat{=}$ Matrix
- (4) ist eine Bilinearform
- Dreht sich Kürper um eine körperfeste Achse (z.B. $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega z \end{pmatrix}$)

  so geht (4) über in

$$T_{\text{rot}} = \frac{I_z}{2} \omega_z^2$$

I_z: Trägheitsmoment des Körpers bzgl. $\vec{e}_z$

- Bei kontinuierlicher Massenverteilung mit Dichte $\rho(\vec{r})$ ist

$$I_{ij} = \int d\vec{r}\rho(\vec{r})(\vec{r}^2\delta_{ij} - rir_j)$$

Trägheitstensor ist symm., $T_{ij} = T_{ji}$ und kann daher mit einer orthogonalen Trafo U
$(U^+ = U^{-1}, U^+U = 1 = UU^+)$
auf Diagonalform gebracht werden

$$U^+IU = \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & I_2 & \\ 0 & & i_3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ Eigenwert Problem „Hauptachsen-Trafo“}$$

wobei die Eigenvektoren die Hauptträgheitsachsen und die Eigenwere I_i $(i = 1, 2, 3)$ die Hauptträgheitsmomente sind.
Symmetrie des Körpers legt die Achse fest z.B. bei Kreisel

- „Kugelkreisel“; wenn alle I_i gleich sind
  (Kugel, Würfel, Zylinder mit $h = \sqrt{3}r$)
- Symmetrischer Kreisel; $I_1 = I_2, I_3 \neq I_1$
- asymmetrischer Kreisel; alle I verschieden

Drehimpuls:

in KS ist

$$\vec{L} = \sum_{n=1}^{N} m_n(\vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n)$$
$$\overset{(1)}{=} \sum_{n} m_n(\vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n))$$

Mit

$$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}r^2 - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{r})$$
$$= \sum_{i,k=1}^{3} (r^2\delta_{ij} - x_ix_n)\omega_k\vec{e}_i$$

ist

$$\vec{L} = \sum_{i,k=1}^{3} I_{ik}\omega_k \vec{e}_i = \sum_i L_i \vec{e}_i$$

oder

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}} \tag{5}$$

Eulersche Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{L} &= \frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{N} m_n(\vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n) = \frac{d}{dt}(I \cdot \vec{\omega}) \\ &= \vec{M} = \sum_{n=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_n^A \end{aligned}$$

Mit Gl. $(*)$ ist dann

$$\frac{d}{dt}(I\vec{\omega})_{\text{IS}} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega})_{\text{KS}} + \vec{\omega} \times (I\vec{\omega}) = \vec{M} \tag{6}$$

Ist KS das Haupsachsensystem mit

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & I_2 & \\ 0 & & I_3 \end{pmatrix}$$

so ist

$$\frac{d}{dt}(I\vec{\omega})_{\text{KS}} = \begin{pmatrix} I_1\dot{\omega}_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_2\omega_2 \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2\omega_3(I_3 - I_2) \\ \omega_1\omega_3(I_1 - I_3) \\ \omega_1\omega_2(I_2 - I_1) \end{pmatrix}$$

und damit

Eulersche Gleichungen

$$
\begin{aligned}
I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= M_1 \\
I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= M_2 \\
I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 &= M_3
\end{aligned} \tag{7}
$$

I.A. Schwer zu Lösen, da nicht linear und M zeitabhängig

Bsp: Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Körper steht auf Schwerpunkt (wie falschrumer Blumentopf) (x_3 in der Kreiselsymmetrieachse: „ Figurenachse“)
$I_1 = I_2 \quad I_3 \neq I_1 \rightarrow$ relationssymm. bzgl. x_3 Achse
$\vec{M} = 0$ Damit:

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = 0 \rightarrow \dot{\omega}_1 - \Omega\omega_2 = 0 \tag{a}$$

$$I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = 0 \rightarrow \dot{\omega}_2 - \Omega\omega_1 = 0 \tag{b}$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = 0 \rightarrow \omega_3 = \text{ const. } \equiv \omega_0$$

$$\Omega = \frac{I_1 - I_3}{I_1}\omega_0$$

$\frac{d}{dt}(a)$ mit $(b) : \ddot{\omega}_1 + \Omega^2\omega_1 = 0$

$$\rightarrow \omega_1(t) = a\sin(\Omega t + \varphi_0) \tag{8}$$

$$\omega_2 = \frac{\dot{\omega}_1}{\Omega} \quad \rightarrow \omega_2(t) = a\cos(\Omega t + \varphi_0) \tag{8}$$

$$\omega_3 = \omega_0$$

Mit

$$\vec{\omega}^2 = \omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) + \omega_3^2 = \text{const.}$$

hat die Projektiion von $\vec{\omega}$ auf x_1- x_2-Ebene die konst. Länge a und rotiert mit Ω.
D.h. im KS rotiert Kreisel auf einem Polkegel (mit ω_0 um die eigene symm. Achse)
$\gamma = \arctan\frac{a}{\omega_0} = \text{ const.}$

Zur Betrachtung im IS brauchen wir verallg. Koord. um die Beziehung zwischen KS und IS zu beschreiben
$\rightarrow$ Eulersche Winkel Φ, Ψ, Θ $\rightarrow$ siehe Übung

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\Phi} \sin\Theta \sin\Psi + \Theta \cos\Psi \\ \omega_2 &= \dot{\Phi} \sin\Theta \cos\Psi + \Theta \sin\Psi \\ \omega_3 &= \dot{\Phi} \cos\Theta + \dot{\Psi} \end{aligned}} \tag{9}$$

Einsetzen von (9) in (8), ergibt nach Lösung von (9)

$$\Psi(t) = \Omega t + \Psi_0 \qquad \Phi(t) = \frac{q}{\sin\Theta_0} + \Phi_0$$

$$\tan\Theta_0 = \frac{q}{\omega_0} \frac{I_1}{I_2}$$

2.6.3 Rotation des Starren Körpers

IS $\vec{r}_{IS}$ und KS $\vec{r}$

$$\frac{d\vec{r}_{IS}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} m_n (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{3} I_{ik} \omega_i \omega_k \\ &= \frac{1}{2} \vec{\omega} I \vec{\omega} \end{aligned}$$

$$I_{ik} = \sum_n m_n \left(r_n^2 \delta_{ik} - x_{in} x_{kn} \right) \quad \underline{\text{Trägheitstensor}}$$

orthogonale Trafo : $U^+ I U = \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & I_2 & \\ 0 & & I_3 \end{pmatrix}$

$I_i \widehat{=}$ Hauptträgheitsmomente, Hauptträgheitsachse

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_n m_n (\vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n) \\ &= I\omega \end{aligned}$$

Mit $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ folgen Euler-Gl. (in KS)
Kräftefreier Kreisel: $\vec{M} = 0 \rightarrow$ Präzession

Schwerer Kreisel

Betrachte symm. Kreisel mit den Hauptträgheitsmomenten $I_1 = I_2, I_3 \neq I_1$ (fixer Auflagepunkt Rotation um x_3 Präzession um z mit Winkel θ zwischen z und x_3 und der Schwerpunkt S auf x_3 höhe s des Kegelkreisels wird mit mg in Richtung -z gezogen)

Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = T - U = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{\vec{R}}^2}_{=0} + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 - mgs\cos\theta$$

Mit Eulerwinkel

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \dot{\Phi}\sin\Theta\sin\Psi + \dot{\Theta}\cos\Psi \\
\omega_2 &= \dot{\Phi}\sin\Theta\cos\Psi - \Theta\sin\Psi \\
\omega_3 &= \dot{\Phi}\cos\Theta + \dot{\Psi}
\end{aligned}$$

Φ : Drehwinkel um $\vec{e}_z$, Ψ : Drehwinkel um $\vec{e}_{x_3}$

$$\mathcal{L} = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\Phi}^2\sin^2\Theta + \Theta^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\Phi}\cos\Theta + \dot{\Psi}\right)^2 - mgs\cos\Theta \qquad (1)$$

Symmetrien:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi} = 0$$

Erhaltungsgrößen „erste Integrale“

Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} E &= T + U \\ &= \frac{I_1}{2}\left(\dot\Phi^2 \sin^2\Theta + \dot\Theta^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot\Phi\cos\Theta + \dot\Psi\right)^2 + mgs\cos\Theta = \text{const.} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} l_z &= \frac{\partial L}{\partial\dot\Phi} \qquad \text{Drehimpulskomponente } l_z \\ &= I_1\sin^2\Theta\dot\Phi + I_3\underbrace{\left(\cos\Theta\dot\Psi + \cos^2\Theta\dot\Phi\right)}_{(\dot\Psi+\dot\Phi\cos\Theta)\cos\Theta} = \text{const.} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} l_3 &= \frac{\partial l}{\partial\dot\Psi} \qquad \text{Drehimpulskomponente } l_3 \\ &= I_3\left(\dot\Psi + \dot\Phi\cos\Theta\right) = \text{const.} \end{aligned} \tag{4}$$

Durch Einsetzen von (3) und (4) in (2) werden $\dot\Phi$ und $\dot\Psi$ eliminiert. Mit:

$$l_z - l_3\cos\Theta = I_1\sin^2\Theta\dot\Phi \tag{5}$$

ist

$$\frac{(l_z - l_3\cos\Theta)}{2I_1\sin^2\Theta} = \frac{I1}{2}\sin^2\Theta\dot\Phi^2 \qquad \text{in (2)}$$

$$E = \frac{I_1}{2}\dot\Theta^2 + \frac{(l_z - l_3\cos\Theta)}{2I_1\sin^2\Theta} + \frac{l_3^2}{2I_3} + mgs\cos\Theta = \text{const.} \tag{6}$$

Wir schreiben

$$E = \frac{I_1}{2}\dot\Theta^2 + U_{\text{eff}}(\Theta)$$

$$U_{\text{eff}} = \frac{(l_z - l_3\cos\Theta)}{2I_1\sin^2\Theta} + \frac{l_3^2}{2I_3} + mgs\cos\Theta \tag{7}$$

Ähnlichkeit zum Kepplerproblem ergibt sich hier eine 1D Bewegungsgleichung mit effektive, Potential.
Aufgelöst nach $\frac{d\Theta}{dt}$ und integriert ist:

$$t = t_0 + \int_{\Theta_0}^{\Theta} d\Theta' \sqrt{\frac{I_1/2}{E - U_{\text{eff}}(\Theta')}}$$

nicht elementar Lösbar aber Graphisch diskutierbar

Graphische Disskusion der Lösung

- $U_{\text{eff}}(\Theta) \stackrel{\Theta\to 0}{\longrightarrow} \infty$ und $\stackrel{\Theta\to\pi}{\longrightarrow}$
- dazwischen ein Minimum

(Parabel mit 2 Schnittpunkten mit E Energie des Systems an den Winkeln Θ_1 und Θ_2 und dazwischen Minimum) aus $E = U_{\text{eff}}$ ergeben sich Umkehrpunkte Θ_1, Θ_2 Während die Figurenachse zwischen Θ_1 und Θ_2 oszilliert „Notation", präzediert sie mit (5)

$$\dot{\Phi} = \frac{l_z - l_3 \cos\Theta}{I_1 \sin^2\Theta} \qquad \text{um die raumfeste z-Achse}$$

Bewegung ist definiert durch Kreiselparameter m, s, I_1, I_2 und Anfangsbedingungen E, l_z, l_3
Für $\Theta_1 = \Theta_2$ verschwindet Notation „reguläre Präzession"
Im kräftefreien Limes (Grenzfall) $(g \to 0)$ ergibt sich $\Theta = \Theta_0$, $\dot{\Phi} = \text{const.}$

2.7 9 Hamilton-Formalismus

Bereits für konservative Systeme wurde

$$\text{Hamilton Funktion} \quad \mathcal{H}(q,p,t) \quad \text{„Hamiltonian"}$$

und Hamilton Gleichungen hergeleitet.
Ausgehend vom kanonischen Impuls $p = (p_1, \ldots, p_f)$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{1}$$

leiten wie nun $\mathcal{H}(q,p,t)$ von $\mathcal{L}(q,\dot{q},t)$ her.

Legendre-Trafo

$$d(x,y) \to g(u,y) \quad \text{mit} \quad u = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{2}$$

Ausgehend von

$$df = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{:=u} dx + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{:=v} dy = u\,dx + v\,dy$$

definierten wir die Funktion $g = f - ux$ mit:

$$dg = df - u\,dx - v\,du = v\,dy - x\,du \tag{3}$$

Folglich ist g die gewünschte Funktion

$$dg = \frac{\partial g}{\partial u}du \rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}dy \tag{4}$$

$$v = \frac{\partial g}{\partial y} \quad , \quad x = -\frac{\partial g}{\partial u}$$

2.8 Hamiltonsche Mechanik

Ausgehend von $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \qquad q = (q_1, \ldots, q_f)$ und

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \tag{1}$$

def. wir den Hamlitonian $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p, t)$ über Legendre Trafo: <u>Ansatz:</u> Löse Gl. (1) nach $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t)$ und def. Hamiltonian $\mathcal{H}$ als Legendre-Transformation von $\mathcal{L}$

$$\boxed{\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_i \dot{q}_i(q, p, t)p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}(q, p, t), t)}$$

Mit

$$d\mathcal{H} = \sum_i \left[d\dot{q}_i p_i + \dot{q}_i dp_i - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i} dq_i - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} d\dot{q}_i \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt$$

$$= \sum_i \left[\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt$$

Verifizieren wir, dass $\mathcal{H}$ von q, p, t abhängt. Das Totale Differential von $\mathcal{H}$:

$$d\mathcal{H} = \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}dp_i \right] - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}dt$$

liefert durch Koeffizientenvergleich

Hamilton-Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \tag{1}$$

$i = 1, \dots, f$ und:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}} \tag{2}$$

Bemerkung:

- Gl. (1) wegen Einfachheit und Symmetrie auch kanonische Gl. genannt
- Die $2f$ Variablen q_i und p_i sind völlig gleichberechtigt,
  - p_i heißt auch zu „ q_i konjugierter Impuls“
  - q_i, p_i heißt „Paar konjugierter Variablen“
- Wichtig: $\mathcal{H}$ darf keine Geschwindigkeit enthalten
- In Kapitel I.6 wurde bereits gezeigt, dass Energie erhalten ist für $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$ da $\mathcal{H}$ nicht explizit von der Zeit abhängt.
- Zyklische Koordinaten:
  Hängt $\mathcal{H}(p, q)$ nicht von q_i ab, $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = 0$
  $\to p_i =$ const. Erhaltungsgröße

Für ein konservatives System mit

$$\mathcal{L} = T - U = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{q}_i^2 - U(t)$$

mit den kanonischen Impulsen $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i$ entspricht

$$\mathcal{H} = \sum_i i \frac{p_i^2}{m_i} - \frac{p_i^2}{2m_i} + U(t)$$

$$\boxed{\mathcal{H}(p, q) = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + U(t) = T + U} \tag{3}$$

also der Gesamtenergie.
Hier ist der kanonische Impuls $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ gleich dem kinetischen Impuls $m_i \dot{q}_i$.
Gilt für zeitunabhängige, holonome Zwangsbedingungen ruhenden Koordinaten und konservativen Kräften

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

[Bsp: harm. Oszillator: $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$

$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q} = -m\omega^2 q = F$

$F = \dot{p} = m\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q}$]

- Geht aber nicht, z.B. bei:
  - geschw. abhängigen Kräften (Lorenz-Kraft)
  - zeitabhängigen Zwangsbedingungen

Standartfall von f Freiheitsgraden q_i

- erhalten durch die Elimination von zeitunabhängigen holonomen Zwangsbedingungen (oder ohne diese)
- die nicht explizit zeitabhängigen sind (z.B. externer Antrieb)
- die konservativen Kräften genügen ist:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T - U = \sum_i \frac{m_i}{2}\dot{q}_i^2 - U(q)$$

$$\mathcal{H}(q, p) = T + U = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + U(q)$$

mit: Bewegungsgleichungen sind äquivalent

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = m_i \ddot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \;\rightarrow\; m_i \ddot{q}_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

$$F_i = m_i \ddot{q}_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Mechanik nach:

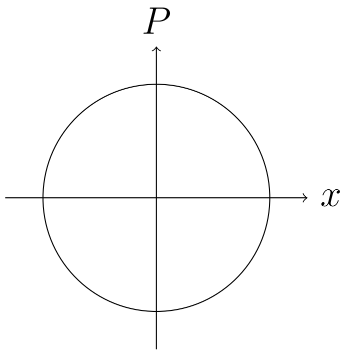
Newton:
- über Def. der Kraft
- einfach und anschaulich

Lagrange:
- über Def. von $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$
- berücksichtigung von Zwangsbedingungen
- Zwangskräfte (Lag. Gl. 1. Art)
- Konzept von verallg. Koord. q_i
- Konzept von zyklischen Variablen, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$
  $\rightarrow$ Erhaltung von $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$
- Hamilton-Prinzip
- Ableitung von Feldtheorien

Hamilton:
- über Def. von $\mathcal{H}(q, p, t)$
- Zwangsbedingungen nur implizit
- Konzept des Phasenraums

$\rightarrow$ Ausgangspunkt für statistische Mechanik und QM

2.9 Phasenraum



Harm. Oszill.

- (q, p) bilden einen $2f$-dim. Phasenraum (PR)
- Zustand ist im Phasenraum eindeutig beschrieben, d.h. ($\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$) schneiden sich Bahnen im Phasenraum nicht.
- $\mathcal{H}(p, q) = E = \text{const.}$ entspricht einer $2f - 1$ - dim. Fläche im PR, welche das $2f$-dim. *Phasenraumvolumen*

$$V_{PR}(E) = \int dq_1 \dots dq_f \int dp_1 \dots dp_f$$
$$\mathcal{H}(p, q) < E$$

- Klassisch entspricht ein endliches Phasenraumvolumen ∞ Systemzustände

- QM entspricht ein endliches Phasenraumvolumen endlich viele System zustände

Bsp:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = \mathcal{H}(q,p)$$

$\cong$ Ellipse mit Halbachsen

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \quad , \quad b = \sqrt{2mE}$$

d.h. PR-Volumen ist Fläche der Ellipse

$$V_{PR}(E) = \pi ab = \frac{2\pi E}{\omega}$$

Der WM Oszillator hat die dikrete Energiezustände [siehe Theo Phys III]

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2) \quad n = 0, 1, 2, 3$$

Damit ist Anzahl der Zustände mit Energie $< E$

$$N_E = \sum_{E_n < E} 1 \simeq \frac{E}{\hbar\omega} = \frac{V_{PR}(E)}{2\pi\hbar} \qquad (N_E \gg 1)$$

d.h. wir messen das PR Volumen in Einheiten des Plankschen Wirkungsquantum $2\pi\hbar = h$ eund erhalten somit die Anzahl der energetisch erreichbaren Zustände
Für f Freihaitsgrade ist

$$N_E \simeq \frac{V_{PE}(E)}{(2\pi\hbar)f}$$

Durch Einführung von <u>abzählbaren</u> Zuständen liefert die PR-Beschreibung die Grundlage für die <u>Statische Mechanik</u>

2.9.1 Zeitentwicklung im Phasenraum (PR)

Poissonklammer

Zeitentwicklung von $A(q(t), p(t), t)$ ist gegeben

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A(q(t), p(t), t) &= \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) - \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} \end{aligned}$$

Def: Poissonklammer zweier PR-Funktion $f(p,q,t)$ und $g(p,q,t)$ ist

$$\boxed{\{f,g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)} \tag{1}$$

Ist A explizit zeitabhängig $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$, gilt

$$\frac{d}{dt}A(q(t),p(t)) = \{A, \mathcal{H}\} \tag{2}$$

D.h. wenn $\{A, \mathcal{H}\} = 0 \leftrightarrow A$ ist erhaltene Größe
Bsp:

- für radialsymmetrisches Potential ist Drehimpuls l_i erhalten
  $\{l_i, \mathcal{H}\} = 0$
- Bewegungs-Geichung:

$$\{q_j, \mathcal{H}\} = \sum_i \left(\underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_i}}_{\delta_{ij}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_i}}_{=0} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = \dot{q}_j$$

$$\{p_j, \mathcal{H}\} = \sum_i \left(\underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_i}}_{=0} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_i}}_{\delta_{ij}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \dot{p}_j$$

$$\{q_i, p_i\} = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}} - \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_{=0} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \delta_{ij}$$

Korrespondenz zur QM

$$\underbrace{[g,f]}_{\text{klass. Poissonklammer}} \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{i\hbar}[g,f]}_{\text{QM kommutator}} = \frac{1}{i\hbar}(gf - fg) \tag{4}$$

Aus Gl (3) folgt, dann die QM Unschärferelation.
Zeitentwicklung einer QM Größe A

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A, \mathcal{H}] + \frac{\partial A}{\partial t}$$

2.9.2 PR-Dichte

Bsp: gedämpfter harmonischer Oszillator.

(Ortsraum p, t Graph abklingende Cosinus Schwingung, im Phasenraum p, q kleiner werdende Spirale)

Wir betrachten viele Teilchen ($N \gg 1$) mit kontinuierlich verteilten Anfangsbedingungen $q_i(t_0)$, $p_i(t_0)$ wie z.B. in exp. Messung eines Ensembles von Teilchen

Def: PR Dichte $\rho(q, p, t)$ entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass sich zur Zeit t am Phasenraumpunkt (p, p) ein Teilchen befindet. Ist die Teilchenzahl erhalten, gilt:

$$\int dq\ dp\ \rho(q, p, t) = N \qquad \text{„Normierungsbedingung“}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

d.h. die Phasenraumdichte ist Zeitlich konstant. „Liouville Theorem“

Wir erhalten die Liouville-Gl.

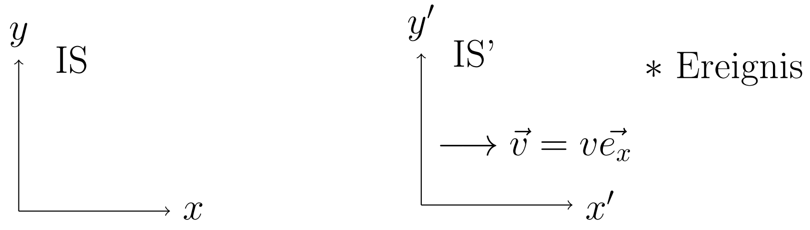
$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = \{\mathcal{H}, \rho\}} \tag{6}$$

Mit Ersetzung (4) wird daraus in der Quantenmechanik die Liouville von Neumann Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [\mathcal{H}, \rho] \tag{7}$$

Kapitel 3

Relativistische Mechanik



IS stillstehend und IS' in Bewegung $\vec{v} = v\vec{e_x}$

Galilei Trafo:

$$x' = x + vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \tag{1}$$

Def: Ein Ereignis ist definiert durch Raum-Zeit-Koord. (x, y, z, t) und hat in IS und IS' verschiedene Koordinatenwerte.

Bsp: Schallwellen
Luft ist Träger für Schallwellen. Bewegt sich die Luft mit $\vec{v} = v\vec{e_x}$, dann breitet sich der Schall

- bei ruhender Luft $(v = 0)$ mit $\frac{dx}{dt} = c$ aus
- in Richtung von $\vec{v}$ mit $\frac{dx}{dt} = v + c$ aus
- in Richtung entgegen $\vec{v}$ mit $\frac{dx}{dt} = c - v$ aus

Bsp: Elektromagnetische Wellen
Photon wird bei $t = t' = 0$, $x = x' = 0$ in x-Richtung ausgesendet und bewegt sich in IS mit der Geschwindigkeit c. (hier IS mit v in x und IS' stillstehend)

Galilei Trafo.: IS $\xrightarrow{\vec{v}}$ IS'

$$\frac{dx}{dt} = c \longrightarrow \frac{dx'}{dt'} = c + v$$

Michelson Experiment (1885)

Interferenz Exp zum Nachweis des „Äthers“ als Träger der Lichtwellen, gemessen mit und gegen die Erdbewegung
$\rightarrow$ Lichtgeschwindigkeit ist konstant !

3.1 Relativistische Mechanik

Michelson: (Vakuum-) Lichtgeschwindigkeit $c = \text{const.}$

- die von Galilei-Trafo vorhergesagte Addition von Geschwindigkeiten gilt nicht allg, obwohl gut bestätigt für $v \ll c$
- Naturgesetze hängen nicht von der Wahl des Inertialsystems ab
  $\rightarrow$ es können nur relative Bewegungen gemessen werden also keine absoluten Geschwindigkeiten
- Maxwell-Gl. enthalten Lichtgeschw. als Konstante c, e.m. Wellen breiten sich (im Vakuum) immer mit c aus
  - Mit Galilei-Trafo wären damit Maxwell-Gl. in unterschiedlichen IS verschieden
  - Gemäß Michelson-Exp wären Maxwell-Gl. in allen IS gültig „relativistische Gl.“

3.1.1 Einsteinsches Relativitätsprinzip (1905)

- Konzept von Äther falsch
- Mechanik und Edynamik sollen unter gleiche Trafos form-invariant sein

→ 1.) Alle IS sind gleichwertig

2.) Licht breitet sich in allen IS mit Geschw. c aus

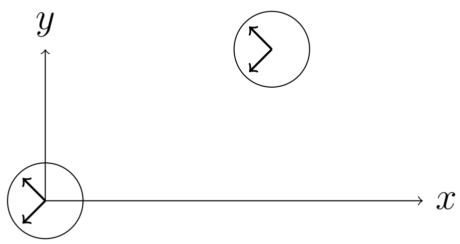
→ Dann muss Galilei Trafo (1) in eine allgemeine Form bringen: „Lorenz Trafo“ (1904)
Für $v \ll c$ muss Gl.(1) als Grenzfall enthalten sein

Bem:

- Einsteinsche Rel. prinzip und die daraus folgende Lorentz-Trafo sind unschwer nachzuvollziehen
- Die Konsequenzen daraus, insbesondere die Relativität von Raum und Zeit sind auch heute nicht leicht zu verstehen, da sie alltäglich Erfahrungen wiedersprechen und zu Paradoxien führen.

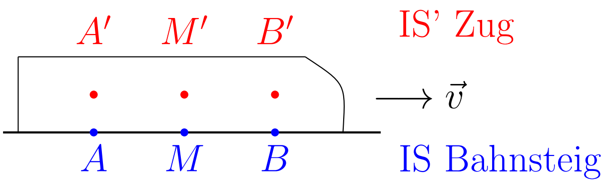
Def: Längenmessung Länge eines in IS ruhenden Objekts kann durch ruhende geeichte Maßstäbe bestimmt werden. Die sogenannte Eichlänge hängt nicht vom IS ab, ist also Lorenz-invariant.

Def: Zeitmessung: Synchronisierte Uhren



- Standartuhr ist im Ursprung
- synchronisierte Uhr an andrem Ort soll gleiche Zeit anzeigen
  Synchronisation erfolgt durch Austausch von Signalen
  d.h. zur Zeit t sendet Standartuhr ein Signal zur anderen Uhr , das sofort wieder zurückgeschickt wird und zur Zeit $t+\Delta t$ ankommt → Bei Empfangen des Signals von der anderen Uhr war Zeitpunkt $t + \frac{\Delta t}{2}$

Gleichzeitigkeit



Betrachte Bahnsteig „IS“ und Zug mit konstanter Geschw. $\vec{v}$ „IS'“
A und B sind zwei punkte im IS, in der Mitte M Steht der Beobachter. Dazu Gehören die Gleichen Punkte im IS' A', B' und M'

1.) Zur Zeit t_1 werden bei A und B <u>gleichzeitigkeit</u> 2 Lichtquellen eingeschalten.

2.) Im Zug haben Lichtquellen zu t_1 die Position A' und B'. Ein Zugreisender bei M' sieht zuerst das von B' kommende Licht (der fahrende Zug verkürzt die Strecke $\overline{\text{M'B}}$)
Er weis, dass A' und B' gleich weit entfernt sind und dass Licht isotrop ausbreitet.
$\rightarrow$ Für ihn wurde das Licht in B' früher eingeschaltet als in A' und damit <u>nicht gleichzeitig</u>.

3.) Etwas später erreichen Beobachter M <u>gleichzeitig</u> die beiden Lichtsignale.

4.) Zuletzt sieht M' das von A ausgesandte Lichtsignal.

> Gleichzeitigkeit hängt vom Bezugssystem ab, es ist also ein relativer Begriff.

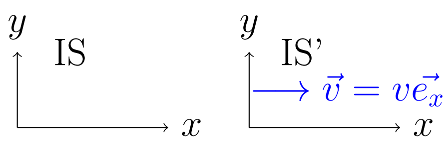
Dieser Effekt verschwindet, wenn Lichtgeschw. $c \rightarrow \infty$, also bei <u>instantaner</u> Signalübertragung.

3.2 Lorenz-Trafo

Zur Konstruktion verwenden wir die Symmetrien

- Homogenität von Raum und Zeit
  d.h. alle Raumzeitpunkte sind äquivalent, man kann also seinen Ursprung beliebig Wählen

- Isotropie des Raumes
  d.h. alle Raumrichtungen sind äquivalent



O.B.d.A. betrachten wir Bewegung entlang x-Achse (IS' in x-Richtung mit $\vec{v} = v\vec{e}_x$) d.h. am Anfang $y = y' \quad z = z'$
Zur Zeit $z = 0$ fallen IS und IS' zusammen.

Wegen Homogenität von Raum und Zeit muss Trafo <u>linear</u> sein

- sonst könnte Koord. Ursprung nicht beliebig gewählt werden
- sonst wäre ein gleichförmig bewegter Körper in IS beschleunigt in IS'

<u>Ansatz:</u>

$$x' = a_{11}x + a_{12}t + b_1$$
$$y' = y \quad , \quad z' = z$$
$$z' = a_{21}x + a_{22}t + b_2$$

Aufgrund der Anfangsbed. für $t = 0$ ist:

$$x_0 = x_0' = 0 \quad , \quad t_0 = t_0' = 0$$

ist: $b_1 = b_2 = 0$, d.h. :

$$x' = a_{11}x + a_{12}t \tag{1}$$
$$t' = a_{21}x + a_{22}t \tag{2}$$

wobei $a_{ij} = a_{ij}(v)$

Betrachte Bewegung des Ursprungs in IS' im IS d.h. $x' = 0$. Gl. (1) ergibt:

$$0 = a_{11}x + a_{12}t \rightarrow -\frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{x}{t} = v \tag{3}$$

Eingesetzt in (1):

$$x' = a_{11}(v)(x - vt) \tag{4}$$

Analog: Bewegung von Ursprung von IS in IS': $x = 0$

$$x = a_{11}(-v)[x' - (-v)t'] \tag{5}$$

Wegen Isotropie des Raumes ist

$$a_{11}(v) = a_{11}(-v) \quad \text{oder} \quad a_{ij} = a_{ij}(v^2)$$

Betrachten wir nun eine Lichtquelle, die in IS bei $x = 0$ ruht und sich daher in IS' mit $-\vec{v}$ bewegt, und zur Zeit $t_0 = t'_0$ einen kurzen Lichtblitz aussendet. Wegen $c = c'$ gilt für den Ort des Photons:

$$x = ct \quad x' = ct' \tag{6}$$

Setze $t = \frac{x}{c}$ und $t' = \frac{x'}{c}$ in (4) und (5) ein:

$$x' = a_{11}(v^2)x(1 - \frac{v}{c}) \tag{7}$$

$$x = a_{11}(v^2)x'(1 + \frac{v}{c}) \tag{7}$$

Ineinander eingesetzt und geteilt durch x':

$$1 = a_{11}^2(a - \frac{v}{c})(1 + \frac{v}{c}) \tag{3.1}$$

$$a_{11}^2 = \frac{1}{1 - (\frac{v}{c})^2} \tag{3.2}$$

Da Galilei-Trafo als Grenzfall sein soll, nur positive Wurzel

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{8}$$

Mit (3) ist

$$a_{12} = \frac{-v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$(2) : t' = a_{21}x + a_{12}t$$

$$(5) : x = a_{11}x' + a_{11}vt'$$

$$\begin{aligned} t' &= \frac{x}{a_{11}v} - \frac{a_{12}}{a_{11}v}\frac{(x - vt)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ &= \frac{x}{v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{(x - vt)}{v\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ &= \frac{x(1 - \frac{v^2}{c^2}) - x + vt}{v\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ &= \frac{t - \frac{v^2}{c^2}x}{1 - v'} \end{aligned}$$