

Lineare Algebra II

Vorlesung von Prof. Dr. Amador Martin - Pizarro im
Sommersemester 2018

Markus Österle
Andrés Gockel

17.04.2018

Inhaltsverzeichnis

I	Wiederholung	8
I.0.1	Def: Ringe	8
I.0.2	Def: Integritätsbereich	8
I.0.3	Def: Körper	8
I.0.4	Bew:	8
I.0.5	Bew:	9
I.0.6	Def: Polynomring	9
I.0.7	Satz:(Division mit Rest)	10
I.0.8	Def: Teiler	11
I.0.9	Def: Nullstelle	11
I.0.10	Bew:	12
I.0.11	Def: Vielfachheit der Nullstellen	12
I.0.12	Def: Algebraische Abgeschlossenheit	12
I.0.13	Frage:	12
I.0.14	Warum?:	13
I.0.15	Bew:	13
I.0.16	Def: Vektorraum	13
I.0.17	Def: Lineare Unabhängigkeit	14
I.0.18	Def: Basis = min. Erz. System	15
I.0.19	Satz: Basisergänzungssatz	15
I.0.20	Basisauswahlsatz	15
I.0.21	Def: Direkte Summe	15
I.0.22	Bsp:	16
I.0.23	Def: Lineare Abbildungen	16
I.0.24	Def: Rang	17
I.0.25	Satz: Basismatrix	17
I.0.26	Bew:	18
I.0.27	Def: Invertierbarkeit	18
I.0.28	Def: Äquivalenz und Ähnlichkeit	21
I.0.29	Def: Determinante	21

I.0.30	Def: Darstellungsmatrix	22
I.0.31	Def: Adjunkte	23
II	Lineare Algebra II	24
II.0.1	Def: Diagonalisierbarkeit	24
II.0.2	Def: Eigenvektor	24
II.0.3	Def: Eigenraum	25
II.0.4	Def: Diagonalisierbarkeit	25
II.0.5	Satz: Zu Eigenwerten	26
II.0.6	Def: Charakteristisches Polynom	26
II.0.7	Bsp:	26
II.0.8	Kor: Anzahl der Eigenwerte	27
II.0.9	Kor: Diagonalisierbarkeit	27
II.0.10	Bew:	27
II.0.11	Kor: Geometrische Vielfachheit	28
II.0.12	Bsp:	28
II.0.13	Def: Algebraische Vielfachheit	29
II.0.14	Bew:	29
II.0.15	Lemma: Quotientenraum Endomorphismus	30
II.0.16	Bew:	30
II.0.17	Satz: Diagonalisierbarkeit	31
II.0.18	Bew:	32
II.0.19	Def: Diag. und Ähnlichkeit	33
II.0.20	Def: Trigonalisierbarkeit	33
II.0.21	Satz: Trigonalisierbarkeit	33
II.0.22	Kor: Trigonalisierbarkeit	34
II.0.23	Bew: (Satz)	34
II.0.24	Beh:	35
II.0.25	Bew:	35
II.0.26	Frage:	35
II.0.27	Lemma: F^r & Polynome	35
II.0.28	Bew:	36
II.0.29	Satz: (Caley - Hamilton)	38
II.0.30	Bew:	38
II.0.31	Kor:	38
II.0.32	Satz: Minimalpolynom	39
II.0.33	Satz: Trigonalisierbarkeit	39
II.0.34	Satz: (Caley-Hamilton)	40
II.0.35	Kor: Charakteristische Polynome	40
II.0.36	Satz: normiertes Polynom	40
II.0.37	Def: minimal Polynom	40

II.0.38 Bew:	40
II.0.39 Lemma: Nullstellen von χ_F und m_F	42
II.0.40 Bew:	42
II.0.41 Satz: Diagonalisierbarkeit und Minimalpolynom	42
II.0.42 Bew:	43
III Die Jordansche Normalenform	47
III.0.1 Lemma: Invarianzen	47
III.0.2 Bsp:	47
III.0.3 Def: Hauptraum	47
III.0.4 Bew:	48
III.0.5 Lemma: Haupträume sind disjunkt	48
III.0.6 Bew:	49
III.0.7 Bem: Invarianzen	50
III.0.8 Lemma: Ordnung	50
III.0.9 Bew	50
III.0.10 Def: Nilpotenz	52
III.0.11 Lemma: Nilpotenz	53
III.0.12 Bew:	53
III.0.13 Satz: Jordan-Charelle Zerlegung	54
III.0.14 Bew:	55
III.0.15 Def: F-adaption	56
III.0.16 Bew:	56
III.0.17 Def: Index	57
III.0.18 Satz: Index	57
III.0.19 Bew:	57
III.0.20 Satz: F-adaptierte Basis	58
III.0.21 Kor:	58
III.0.22 Bew:	59
III.0.23 Folgerung	59
III.0.24 Kor: Jordansche Normalform	60
III.0.25 Bew:	60
IV Dualität	63
IV.0.1 Def: Dualraum	63
IV.0.2 Def: Duale Basis	63
IV.0.3 Bew:	63
IV.0.4 Lemma: kanonischer Monomorphismus	64
IV.0.5 Bew:	64
IV.0.6 Korollar:	64
IV.0.7 Bew:	64

IV.0.8	Lemma: Duale Transformation	65
IV.0.9	Bew:	65
IV.0.10	Def: duale Abbildung	65
IV.0.11	Bew:	66
IV.0.12	Bew:	67
IV.0.13	Bew:	68
IV.0.14	Korrolar: zu Duale Basen	68
IV.0.15	Bew:	69
IV.0.16	Lemma: V und V^*	69
IV.0.17	Lemma: Duale Endomorphismen	70
IV.0.18	Bew:	70
IV.1	Duale Paarung	72
IV.1.1	Def: Bilinearität	72
IV.1.2	Def: Duales Paar	73
IV.1.3	Lemma:	73
IV.1.4	Wiederholung	74
IV.1.5	Bew:	74
IV.1.6	Kor: Ausartung	75
IV.1.7	Bew:	76
IV.1.8	Kor: duale Basen	76
IV.1.9	Bew:	77
IV.1.10	Def: Orthogonales Komplement	77
IV.1.11	Bew:	77
IV.1.12	Lemma: zu Quotientenräumen	78
IV.1.13	wiederholung	78
IV.1.14	Def: Adjungierte	79
IV.1.15	Bew: Eindeutigkeit	79
IV.2	Euklidische Räume	80
IV.2.1	Def: Symmetrie	80
IV.2.2	Bew:	80
IV.2.3	Def: Quadratische Form	81
IV.2.4	Def: Definitheit	82
IV.2.5	Def: Skalarprodukt	82
IV.2.6	Def: Euklidischer Raum	83
IV.2.7	Def: Norm	83
IV.2.8	Def: Norm über Skalarprodukt	83
IV.2.9	Lemma:	83
IV.2.10	Bew:	84
IV.2.11	Bew:	84
IV.2.12	Def: Winkel zwischen Vektoren	85
IV.2.13	Wiederholung	85

IV.2.14	Satz: (des Pythagoras)	86
IV.2.15	Bew:	86
IV.2.16	Def: Orthogonal- und Orthonormalbasis	86
IV.2.17	Satz: φ symmetrisch \Rightarrow diagonalisierbar	87
IV.2.18	Kor:	88
IV.2.19	Bew:	88
IV.2.20	Kor: (Sylvester)	89
IV.2.21	Bew:	90
IV.2.22	Bew: falsch:	90
IV.2.23	Def: Signatur	91
IV.2.24	Wiederholung	91
IV.2.25	Bew: Kor Sylvester	91
V	Unitäre Räume	92
V.0.1	Def:	92
V.0.2	Bew:	92
V.0.3	Def: Orthonormalbasis	93
V.0.4	Bew:	93
V.0.5	Lemma: Orthonormalbasen	94
V.0.6	Bew:	94
V.0.7	Satz: (Geom-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren)	94
V.0.8	Bew:	95
V.0.9	Kor:	96
V.0.10	Def:	96
V.0.11	Def:	96
V.0.12	Bew:	97
V.0.13	Satz:	97
V.0.14	Bew:	97
V.0.15	Lemma:	98
V.0.16	Bew:	98
V.0.17	Def:	98
V.0.18	Satz:	99
V.0.19	Bew:	99
VI	Selbsadjungierte Endomorphismen und Hauptachsentransformationen	100
VI.0.1	Def:	101
VI.0.2	Def:	102
VI.0.3	Lemma:	103
VI.0.4	Bew:	103

VI.0.5	Def:	103
VI.0.6	Prop:	103
VI.0.7	Bew:	104
VI.0.8	Def:	105
VI.0.9	Lemma:	105
VI.0.10	Bew:	105
VI.0.11	Satz:	105
VI.0.12	Bew: (satz)	106
VI.0.13	Beh:	106
VI.0.14	Beh:	106
VI.0.15	Bew:	106
VI.0.16	Satz	108
VI.0.17	Def:	108
VI.0.18	Kor: Spektralsatz	108
VI.0.19	Bew:	108
VI.0.20	Lemma:	109
VI.0.21	Bew:	109
VI.0.22	Satz: Hauptachsentransformation	109
VI.0.23	Lemma 1:	110
VI.0.24	Bew:	110
VI.0.25	Lemma 2:	110
VI.0.26	Bew:	110
VI.0.27	Bew: Hauptachsentransformationssatz	110
VI.0.28	Korollar:	111
VI.0.29	Satz: Sylvester	112
VI.0.30	Bew:	112
VI.0.31	Kor: Spektralsatz	113
VI.0.32	Bew:	113
VI.0.33	Bew: Satz von Sylvester	114
VI.1	Orthogonale Abbildungen und Drehungen	115
VI.1.1	Def:	115
VI.1.2	Lemma:	116
VI.1.3	Bew:	116
VI.1.4	Wiederholung:	117
VI.1.5	Satz:	118
VI.1.6	Bew:	118
VI.1.7	Satz:	118
VI.1.8	Bew:	118
VI.1.9	Kor:	118
VI.1.10	Bew:	118
VI.1.11	Satz:	119

VI.1.12Bew:	119
VI.1.13Def:	119
VI.1.14Kor:	120
VI.1.15Bew:	120
VI.1.16Kor: zu irgendeinem Satz	120
VI.1.17Bew:	120
VI.1.18Def:	121
VI.1.19Prop:	121
VI.1.20Bew:	121
VI.1.21Kor:	121
VI.1.22Bew:	121
VI.1.23Def: Drehung	122
VI.1.24Satz:	122
VI.1.25Wid:	122
VI.1.26Bew: Satz	122
VI.1.27Satz:	124
VI.1.28Bew:	124
VI.2 Multilineare Algebra	125
VI.2.1 Def:	125
VI.2.2 Satz:	126
VI.2.3 Bew:	126
VI.2.4 Bew:	127
VI.2.5 Kor:	127
VI.2.6 Kor:	127
VI.2.7 Bew:	127
VI.2.8 Bew:	128
VI.2.9 Beh:	128
VI.2.10Lemma:	129
VI.2.11Bew:	129
VI.2.12Lemma:	129
VI.2.13Bew:	130

Kapitel I

Wiederholung

I.0.1 Def: Ringe

Ein (kommutativer) Ring (mit Einselement) ist eine Menge zusammen mit zwei binären Operationen $+$ und $*$, sodass:

- $(R, +, 0_R)$ ist eine abelsche Gruppe
- $(R, *, 1_R)$ ist eine kommutative Halbgruppe
- $(R, +, 0_R)$ die distributiven Gesetze:
 $x(y + z) = xy + xz$
 $(x + y)z = xz + yz$ gelten

I.0.2 Def: Integritätsbereich

Ein Integritätsbereich ist ein Ring ohne Nullteiler

$$\forall x, y \in R : \quad (x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } y = 0)$$

I.0.3 Def: Körper

Ein Körper K ist ein Ring derart, dass:

- $1_K = 0_K$
- $\forall x \in K \setminus \{0\} \exists x^{-1} x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1_K$

I.0.4 Bew:

Körper sind Integritätsbereiche

Bem: Ring Homomorphismus

Sei R ein nichttrivialer Ring ($0_R \neq 1_R$),

$$\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow R, n \mapsto \begin{cases} 1_R + \dots + 1_R & n \geq 0 \\ -(1_R + \dots + 1_R) & n < 0 \end{cases}$$

φ ist ein Ring Homomorphismus:

$$\ker(\varphi) = \{n \in \mathbb{Z} \mid \varphi(n) = 0\}$$

2 Möglichkeiten

a) $\ker(\varphi) = 0$ R hat Charakteristik 0

b) $\ker(\varphi) \neq 0$

→ es existiert ein kleinstes positives Element $p > 0$ in $\ker(\varphi)$

I.0.5 Bew:

R Integritätsbereich $\Rightarrow p$ eine Primzahl z.B.

$$\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$$

hat Charakteristik n .

Insbesondere enthält jeder Körper der Charakteristik p eine „Kopie“ von $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$

K Charakteristik $p \Rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \xrightarrow{\text{injektiv}} K$

$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ ist ein Körper: $a \in \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow a$ und p sind teilerfremd

$$1 = a \cdot b + p \cdot m \Rightarrow 1 = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

I.0.6 Def: Polynomring

Sei K ein Körper. Der Polynomring $K[T]$ in einer Variable T über K ist die Menge formeller Summen der Form

$$g, f := \sum_{i=0}^n a_i \cdot T^i, \quad a_i \in K$$

$$\text{grad}(f) := \max\{i \mid a_i \neq 0\}$$

$$\text{grad}(0) := -1$$

Bem:

$K[T]$ ist ein Integritätsbereich

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i \cdot T^i\right) + \left(\sum_{j=0}^m b_j \cdot T^j\right) = \sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} (a_k + b_k) \cdot T^k$$

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i \cdot T^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^m b_j \cdot T^j\right) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k \cdot T^k$$

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j$$

f, g beide $\neq 0$

$$\Rightarrow \text{grad}(f \cdot g) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$$

$f \cdot g \neq 0$

$$\text{grad}(f + g) \leq \max\{\text{grad}(f), \text{grad}(g)\}$$

I.0.7 Satz:(Division mit Rest)

Gegeben $f, g \in K[T]$

$\text{grad}(g) > 0$

Dann existieren eindeutige $q, r \in K[T]$

sodass $f = g \cdot q + r$

wobei $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$ eindeutig

$$f = g \cdot q + r = g \cdot q' + r'$$

$$g \cdot (q - q') = r' - r$$

$$g \neq g'$$

$$\text{grad}(g \cdot (q - q')) = \text{grad}(r' - r) = \max\{\text{grad}(r'), \text{grad}(r)\} < \text{grad}(g)$$

$$\text{grad}(g \cdot (q - q')) \stackrel{q \neq q'}{=} \text{grad}(g) + \text{grad}(q - q')$$

\Rightarrow Widerspruch (Wid)!

$$\Rightarrow q = q' \Rightarrow r = r'$$

Existenz Beweis: Induktion auf $\text{grad}(f)$

I.A.: $\text{grad}(f) = 0 \rightarrow f = g \cdot 0 + f$

„n+1“ $\text{grad}(f) = n + 1$

$$\text{grad}(f) < \text{grad}(g) = m$$

$$\rightarrow f = g \cdot 0 + f$$

OBdA $n + 1 = \text{grad}(f) \geq \text{grad}(g) = m > 0$

$$f = a_{n+1} \cdot T^{n+1} + \tilde{f}$$

$$\text{grad}(\tilde{f}) \leq n$$

$$a_{n+1} \neq 0$$

Sei

$$f' := f - b_m^{-1} \cdot a_{n+1} \cdot T^{n+1-m} \cdot g$$

$$\Rightarrow \text{grad}(f') \leq n$$

$$g = \sum_{i=0}^m b_i \cdot T^i$$

$$\stackrel{\text{I.A.}}{\Rightarrow} f' = g \cdot q' + r'$$

$$f - b_m^{-1} a_{n+1} T^{n+1-m} \cdot g$$

$$\text{grad}(r') < \text{grad}(g)$$

$$\rightarrow f = g(\underbrace{b_m^{-1} a_m T^{n+1-m} + q'}_q) + r' = \text{grad}(r') < \text{grad}(g)$$

$$(r' = r)$$

I.0.8 Def: Teiler

$$f, g \in K[T]$$

$$\text{grad}(g) > 0$$

$$g \text{ teilt } f \Leftrightarrow f = g \cdot q$$

$$(g|f) \ (r = 0)$$

I.0.9 Def: Nullstelle

$f \in K[T]$ besitzt eine Nullstelle $\lambda \in K$

gdw (genau dann wenn) $(T - \lambda)|f \Leftrightarrow f(\lambda) = 0$

$$f = (T - \lambda)q + r$$

Bem: Anzahl Nullstellen

$$f \in K[T], \quad f \neq 0, \text{grad}(f) = n$$

Dann besitzt f höchstens n viele Nullstellen in K .

I.0.10 Bew:

$$n = 0, f = a_0 \neq 0$$

$n > 0$ Falls f keine Nullstellen in K besitzt \Rightarrow Ok !

Sonst, bei $\lambda \in K$ eine Nullstelle von f .

$$f = (T - \lambda) \cdot g$$

$$\text{grad}(g) = n - 1 < n$$

$\xrightarrow{\text{I.A.}}$ besitzt g höchstens $n - 1$ viele Nullstellen.

Jede Nullstelle von f ist λ oder eine Nullstelle von $g \Rightarrow f$ hat höchstens n viele Nullstellen.

I.0.11 Def: Vielfachheit der Nullstellen

$f \in K[T], f \neq 0, \lambda \in K$ Nullstellen von f

$$\rightarrow f = (T - \lambda)^{K_\lambda} \cdot g, \quad (g(\lambda) \neq 0)$$

(K_λ ist die Vielfachheit der Nullstelle λ in f)

I.0.12 Def: Algebraische Abgeschlossenheit

Ein Körper heißt algebraisch abgeschlossen falls jedes Polynom über K positiven Grades eine Nullstelle in K besitzt.

I.0.13 Frage:

Ist \mathbb{R} algebraisch abgeschlossen ?

Nein: $T^2 + 1$

Bem:

\mathbb{C} ist algebraisch abgeschlossen

Bem: Unendlichkeit

Jeder alg. abg. Körper muss unendlich sein!

I.0.14 Warum?:

(Beweis läuft wie unendlichkeit der Primzahlen)

$$K = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

$$f = (T - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (T - \lambda_n) + 1$$

Bem: Algebraische Abgeschlossenheit

K ist genau dann alg. abg. wenn jedes Polynom f positiven Grades in lineare Faktoren zerfällt:

$$f = (T - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (T - \lambda_n) \in K$$

I.0.15 Bew:

„ \Leftarrow “ Trivial

„ \Rightarrow “ $\text{grad}(f) = n > 0$

$$\rightarrow f = (T - \lambda_n) \cdot g$$

$$(\text{grad}(g) \leq n - 1 < n)$$

$$\stackrel{\text{I.A.}}{\rightarrow} g = c(T - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (T - \lambda_n)$$

$$\Rightarrow f = c(T - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (T - \lambda_n) \checkmark$$

I.0.16 Def: Vektorraum

Vektorraum V über K ist eine abelsche Gruppe $(V, +, 0_V)$ zusammen mit einer Verknüpfung

$$K \times V \mapsto V$$

$$(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$$

sodass:

$$1.) \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$$

$$2.) \lambda(\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$$

$$3.) (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$$

$$4.) 1_K \cdot v = v \quad \forall v \in V$$

Ein Untervektorraum $U \subset V$ ist eine Untergruppe, welche unter Skalarmultiplikation, abg. ist.

Bem: Untervektorräume

$\{U_i\}_{i \in I}$ Unterräume von V

$\rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i$ ist auch ein Unterraum.

Insbesondere gegeben $M \subset V$ existiert :

$\text{span}(M) = \langle M \rangle =$ der kleinste Untervektorraum von V , welcher M enthält

$$\text{span}(M) = \left\{ \sum_{i \in I}^n \lambda_i m_i, n \in M, \lambda \in K, n \in \mathbb{N} \right\}$$

M ist also ein erzeugendes System für $\text{span}(M)$

$\{U_i\}_{i \in I}$ Unterräume von V

$$\rightarrow \sum_{i \in I} U_i = \text{span}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right)$$

$$M_1 \subset M_2 \Rightarrow \text{span}(M_1) \subset \text{span}(M_2)$$

I.0.17 Def: Lineare Unabhängigkeit

$V : VR/K$

$v_1, \dots, v_n \in V$ lin. unabh. falls $\forall \lambda_1, \dots, \forall \lambda_n \in K :$

$$\sum \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

$M \subset V$ ist lin. unabh. falls jede endliche Teilmenge von M lin. unabh. oder äquivalent dazu sind. Falls kein Element m aus M sich schreiben lässt als linear kombination von $M \setminus \{m\}$. $\lambda_i \neq 0$

$$\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \dots + \lambda_n m_n = 0 \Rightarrow m = \sum -\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) m_i$$

I.0.18 Def: Basis = min. Erz. System

Eine Basis \mathcal{B} von V ist ein lin. unabh. erzeugendensystem von V , äquivalent dazu, wenn jedes Element von V sich eindeutig schreiben lässt als lin. kombi. von Elementen aus \mathcal{B} . Äquivalent dazu: \mathcal{B} ist min. Erzeugenden System, max. lin. unabh.

I.0.19 Satz: Basisergänzungssatz

$M \subset V$ lin. unabh. $\Rightarrow \exists \mathcal{B} \subset V$ Basis welche M enthält

Insbesondere hat jeder VR eine Basis „Je zwei Basen sind eine Bijektion“
 V ist endlichdimensional, falls V eine endliche Basis besitzt. Sonst ist V unendlichdimensional.

$$\dim(V) = |\mathcal{B}|$$

(\mathcal{B} eine Basis)

I.0.20 Basisauswahlsatz

$M \subset V$ erzeugendensystem $\rightarrow \exists \mathcal{B} \subset M$ Basis von V

Bem: Dimensions Addition

$U \overset{UR}{\subset} V$, $\dim(V) < \infty \Rightarrow \dim(U) < \infty$ \dim ist modular:

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$$

I.0.21 Def: Direkte Summe

$$V = U_1 \oplus U_2 \quad \Leftrightarrow \quad V = U_1 + U_2 \text{ und } U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

$\oplus = \text{direkte Summe}$

$$V = \oplus_{i \in I} U_i \quad \Leftrightarrow \quad V = \sum_{i \in I} U_i \text{ und } \forall i \in I$$

Die Familie

$$\{U_i\}_{i \in I} \rightarrow U_i \cap \left(\sum_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} U_j \right) = \{0\}$$

ist konversal.

I.0.22 Bsp:

K^2 ist ein $K - VR$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1, e_2$$

$$U = \text{Span}(e_1) \rightarrow K^2 = U \oplus \text{Span}(e_2) = U \oplus \text{Span}(e_1, e_2)$$

I.0.23 Def: Lineare Abbildungen

$F : V \rightarrow W$ ist linear, falls

$$D(\lambda v + \mu u) = \lambda F(v) + \mu F(u)$$

(F UR von V)

$$\text{Ker}(F) = \{v \in V | F(v) = 0\}$$

(F UR von W)

$$\text{Im}(F) = \{w \in W | \exists v \in V, F(v) = w\}$$

Bem: Dimensionssatz

Falls \mathcal{B} eine Basis von v ist $\Rightarrow F(\mathcal{B})$ ist ein erzeugendensystem von $\text{Im}(F)$

$$F \text{ injektiv} \Leftrightarrow \text{Ker}(F) = \{0\}$$

V endlich

$$\rightarrow \dim(V) = \dim(\text{Ker}(F)) + \dim(\text{Im}(F))$$

$$v / \text{Ker}(F) \cong \text{Im}(F)$$

Bem: Isomorphie

V, W endlich $\{r_1, \dots, r_n\}$ eine Basis von V

$$V \cong K^n$$

$$v_i \mapsto e_i$$

$$F : V(\dim = n) \rightarrow W(\dim = m)$$

$$\begin{array}{ccc}
\{v_1, \dots, v_n\} & & \{w_1, \dots, w_m\} \\
V & \xrightarrow{F} & W \\
R & & R \\
K^n & & K^m \\
\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} & \rightarrow & A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}
\end{array}$$

Wie bekommt man die Matrix A ?

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

$$F(v_1) \dots F(v_n)$$

$$\begin{pmatrix} 1_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ Matrix

I.0.24 Def: Rang

$$\text{Rg}(A) = \dim(\text{Span}(\text{Spaltenvektorraum})) = \dim(\text{Span}(\text{Zeilenvektorraum}))$$

$F : V \rightarrow W$ linear

$$\text{Rg}(F) = \text{Rg}(A) = \dim(\text{Im}(F))$$

I.0.25 Satz: Basismatrix

V, W endlichdim.

Es existieren Basen $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V , $\{w_1, \dots, w_m\}$ von W , sodass die Darstellungsmatrix von F die Form :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

hat.

I.0.26 Bew:

Sei $U = \text{Ker}(F)$ und wähle $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ eine Basis von U .

Sei U' ein Komplement von U in $V \rightarrow V = U \oplus U'$

Sei $\{v_1, \dots, v_r\}$ eine Basis von U'

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ist eine Basis von V

$\text{Im}(F)$ hat $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ als Basis

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i F(v_i) = 0$$

$$F\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \in U \cap U' = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i = 0 \quad \Rightarrow \underline{\lambda_i = \dots = \lambda_r = 0}$$

Ergänze $\{F(v_1), \dots, F(v_r)\}$ zu einer Basis $\mathcal{B}' = w_1, \dots, w_m$ Basis von W

$$F(v_1) \dots F(v_r), F(v_{r+1}) \dots F(v_n)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

□

I.0.27 Def: Invertierbarkeit

$A \in M_{n \times n}(K)$ ist invertierbar, falls es eine Matrix $B \in M_{n \times n}(K)$ gibt, sodass:

$$B \cdot A = A \cdot B = E_n$$

$$GL(n, K) = GL_n(K) = \{A \in M_{n \times n}(K) \text{ invertierbar}\}$$

$GL_n(K)$ ist eine Gruppe

$$A \in GL_n(K) \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$$

also invertierbar \Leftrightarrow regulär

Bem: Eindeutige Lösung

Wenn A regulär ist, dann besitzt ein Gleichungssystem

$$A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung:

$$A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Bem: Zeilenoperationen

A ist regulär gdw. A sich durch elementare zeilenoperationen in E_n überführen lässt.

$E_{ij} \leftarrow$ Die Matrix die 1 an der Stelle (i, j) hat und 0 sonst.

Multiplizieren der i-ten Zeile mit λ

Addieren λ mal j-te Zeile zur i-ten Zeile $= E_n + \lambda E_{ij}$

Vertauschen der i-ten Zeile mit der j-ten Zeile: $E_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ji} + E_{ij}$

$$(A \mid E_n)$$

$$\hookrightarrow \text{Zeilenoperationen} \rightarrow (E_n \mid A^{-1})$$

$$\underbrace{B_n \cdot \dots \cdot B_2 \cdot B_1 \cdot A}_{A^{-1}} = E_n$$

Übergangsmatrizen: $\dim(V) = n$

$$\{v_1, \dots, v_n\}$$

$$\{v'_1, \dots, v'_n\}$$

$$v'_i = \sum S_{ij} v_{ji}$$

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{1j} \\ S_{i1} & S_{ij} \end{pmatrix}$$

Vektorraum $V/K \rightarrow \mathcal{B}$ Basis
 V ist endlich, falls es eine endliche Basis besitzt.

$$\dim(V) = |\mathcal{B}|$$

$$F : V \rightarrow W$$

F : lineare Abbildung

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$$

Basis von V

$$\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$$

Basis von W

$$F(v_1), \dots, F(v_n)$$

$$F(v_j) = \sum_{ij} w_i$$

sind lin. unabh. von der Basis von W F hat Darstellungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$V \mapsto V$$

$$v_i \mapsto v'_i$$

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \quad \mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$$

$$S = (s_{ij}) \rightarrow v'_j = \sum s_{ij} v_i \in K$$

Transformationsmatrix von \mathcal{B}' nach \mathcal{B}

$$\begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

S^{-1} ist die Transformationsmatrix von \mathcal{B} nach \mathcal{B}'

$$V \xrightarrow{F} W$$

$$\begin{array}{ccc} \{v_1, \dots, v_n\} & \xrightarrow{A} & \{w_1, \dots, w_n\} \\ \uparrow S & & \uparrow T \\ \{v'_1, \dots, v'_n\} & \xrightarrow{D} & \{w'_1, \dots, w'_n\} \end{array}$$

Wie sieht die Darstellungsmatrix von F bzgl. diesen Matrizen aus?
Darstellungsmatrix von F bzgl. $\{v'_1, \dots, v'_n\}, \{w'_1, \dots, w'_n\}$ ist $T^{-1} \cdot A \cdot S$.

I.0.28 Def: Äquivalenz und Ähnlichkeit

Zwei (mxn)-Matrizen A, A' sind äquivalent, falls es reguläre Matrizen $T \in GL_m(K), S \in GL_n(K)$ gibt, sodass:

$$A' = T^{-1} \cdot A \cdot S$$

A, A' $\in M_{n \times n}(K)$ sind ähnlich, falls es $S \in GL_n(K)$ gibt, sodass:

$$A' = S^{-1} \cdot A \cdot S$$

Bem: Ähnlichkeit

Ähnlichkeit (Än) auf $M_{n \times n}(K) \Rightarrow$ Äquivalenz (Äq) auf $M_{m \times n}(K)$

I.0.29 Def: Determinante

Die Determinante

$$\det(K^n) \mapsto K$$

multilineare alternierende Abbildung derart, dass $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$.

$$A \in M_{n \times n}(K)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det(a_1, \dots, a_n)$$

$$A = (a_{ij})$$

$$\det(A) = \sum_{\substack{\pi \in \underbrace{S_n}_{B_{ij}(\{1, \dots, n\})}}} \text{sign}(\pi) \cdot \prod_{i=1}^n a_{\pi(i)i}$$

$\text{sign}(\pi)$ (-1) Anzahl von Fehlständen $\{(ij) | i < j, \pi(i) > \pi(j)\}$,
 (-1) Anzahl von Faktoren von π als Produkt von Transpositionen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

derlineEigenschaften

- 1) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- 2) A invertierbar genau dann wenn $\det(A) \neq 0$
- 3) $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
- 4) $\det(A^T) = \det(A)$
 \parallel
 (a_{ji})
 $E_n + (-E_n)$ ist nicht invertierbar.

Laplascher Entwicklungssatz

Sei j_0 ein Spaltenindex, $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j_0} a_{ij_0} \det(A_{j_0})$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn} \end{array} \right)$$

Cramersche Regel

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b$$

Falls A regulär ist, dann gibt es eine einzige Lösung zum System:

$$x_j = \frac{\det(a_i, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_n)}{\det(A)}$$

I.0.30 Def: Darstellungsmatrix

$\det(F) = \det(a)$, Darstellungsmatrix von F bzgl. der Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$

I.0.31 Def: Adjunkte

Sei $A (= a_{ij})$ eine $n \times n$ -Matrix
definiere die Adjunkte von A ,

$$\text{adj}(A) = (\gamma_{ij})$$

wobei

$$\gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Bem: Determinante und Adjunkte

Sei c_j die j -te Zeile von $\text{adj}(A)$.

Sei a_i die i -te Spalte von A

$$\begin{aligned} \overbrace{(\gamma_{j1}, \dots, \gamma_{jn})}^{c_j} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}}_{a_i} &= \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} a_{ki} = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{ki} \det(A_{jk}) \\ &= \det(a_1, \dots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

$$(\text{Laplacesche Entwicklung}) = \begin{cases} \det(A) & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

A regulär:

$$\begin{aligned} \text{adj}(A) \cdot A &= \det(A) \cdot E_n \\ \Rightarrow \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} \cdot A &= E_n = A^{-1} \cdot A \\ \Rightarrow \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} &= A^{-1} \quad \Rightarrow \quad A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot E_n \end{aligned}$$

Kapitel II

Lineare Algebra II

II.0.1 Def: Diagonalisierbarkeit

V Vektorraum

$\{U_i\}_{i=1}^k$ Unterräume von V

$$V = \bigoplus_{i=1}^k U_i \Leftrightarrow \begin{cases} V = \sum_{i=1}^k U_i & 1 \leq i \leq k \\ U_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k U_j = \{0\} \end{cases}$$

Äquivalent dazu, wenn jeder Vektor $v \in V$ sich eindeutig schreiben lässt als Linearkombination von den Vektoren

$$\bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$$

\mathcal{B} ist Basis von V

II.0.2 Def: Eigenvektor

Ein Endomorphismus

$$F : V \rightarrow V$$

besitzt einen Eigenvektor, falls es $v \in V \setminus \{0\}$ derart gibt, dass $F(v) = \lambda \cdot v$ für ein $\lambda \in K$

Falls $F(v) = \lambda \cdot v$

λ ist eindeutig bestimmt von F und $v \Rightarrow \lambda$ ist Eigenwert von F

$$F(v) = \mu \cdot v = \lambda \cdot v \Rightarrow (\lambda - \mu) \cdot v = 0$$

II.0.3 Def: Eigenraum

$\lambda \in K \quad F : V \rightarrow V$ Endomorphismus

$$V(\lambda) = \{v \in V \mid F(v) = \lambda \cdot v\}$$

$V(\lambda)$ ist Eigenraum zum Wert λ
und ist ein Unterraum

Bem: Eigenwert

λ ist ein Eigenwert von F gdw. $\dim(V(\lambda)) \geq 1$.

Bem: Eigenwerte

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ verschiedene Eigenwerte von F

$$\rightarrow V(\lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k V(\lambda_j) = \{0\}$$

II.0.4 Def: Diagonalisierbarkeit

V endlich VR / $K \quad F : V \rightarrow V$ Endomorphismus (bzw. eine Matrix $A = K^n \rightarrow K^n$) ist diagonalisierbar, falls

$$V = \bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ verschiedene Eigenwerte von F

Äquivalent dazu, wenn V eine Basis von Eigenvektoren von F besitzt. Äquivalent dazu, wenn F bzgl. einer Basis von V die Darstellungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

hat.

Für Matrizen:

A ist diagonalisierbar genau dann wenn es eine reguläre Matrix S gibt, sodass

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

II.0.5 Satz: Zu Eigenwerten

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$$

$$\lambda \in K$$

λ ist ein Eigenwert von A genau dann wenn

$$\lambda E_n - A \text{ nicht regulär ist} \Leftrightarrow \det(\lambda \cdot E_n - A) = 0$$

II.0.6 Def: Charakteristisches Polynom

Das charakteristische Polynom einer Matrix

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$$

ist

$$\chi_A(T) = \det(T \cdot E_n - A)$$

Bem: Eigenwerte als Nullstellen

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } A \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$$

II.0.7 Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$\chi_A(T) = T^2 + 1 = \det \begin{pmatrix} T & -1 \\ 1 & T \end{pmatrix} (= T \cdot E_2 - A)$$

Bem: Spur

A und A' ähnlich $A' = S^{-1}AS$

$$\Rightarrow \chi_A(T) = \chi_{A'}(T)$$

Insbesondere, können wir über das charakteristische Polynom eines Endomorphismus

$$\chi_F(T) \quad F : V \rightarrow V$$

sagen:

$$(a_{ij}) = A \in M_{n \times n}(K)$$

$$\chi_A(T) = T^n + b_{n-1}T^{n-1} + \dots + b_0$$

wobei

$$b_0 = (-1)^n \det(A)$$

$$b_{n-1} = -\text{Tr}(A) = -\sum_{i=1}^n a_{i(i \text{ oder } j)}$$

Tr = Trace = Spur von A

II.0.8 Kor: Anzahl der Eigenwerte

$\dim(V) = n$

Ein Endomorphismus

$$F : V \rightarrow V$$

kann höchstens n viele Eigenwerte besitzen.

II.0.9 Kor: Diagonalisierbarkeit

$$F : V \rightarrow V$$

mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$ ist diagonalisierbar gdw.

$$n = \sum_{i=1}^k d_i$$

$$d_i = \dim(V(\lambda_i)) = \{v \in V \mid F(v) = \lambda \cdot v\}$$

d_i = geometrische Vielfachheit von λ_i

II.0.10 Bew:

\Rightarrow

F ist diag. gdw. V eine Basis aus Eigenvektoren besitzt, welche aus

$$n = |B| = \bigcup_{i=1}^n |\mathcal{B}_i| \quad \mathcal{B}_i = \text{Basis von } V(\lambda_i)$$

$$|\mathcal{B}_i| = d_i = \dim(V(\lambda_i))$$

\Leftarrow

$$n = \sum d_i \Rightarrow \dim(\sum_{i=1}^k V(\lambda_i)) = n \Rightarrow V = \sum_{i=1}^k V(\lambda_i)$$

Da die Eigenräume transversal sind, und ein Vektorraum nur einen UVR der dimension $\dim(V)$ hat, sich selbst.

□

Bem: Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit

$F : V \rightarrow V$ Endomorphismus $0 \neq v \in V$ ist ein Eigenvektor für F

$$F(v) = \lambda v, \lambda \in K$$

$$V(\lambda) = \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\}$$

λ ist Eigenwert $\Leftrightarrow \dim(V(\lambda)) = 1$

$V(\lambda) = \ker(F - \lambda Id_V)$ F ist diagonalisierbar wenn V eine Basis von Eigenvektoren besitzt.

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(T) = \det(T \cdot E_n - A)$$

$$A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K) = T^n + b_{n-1}T^{n-1} + \dots + b_0 \text{ normiert}$$

$$\lambda \in K \text{ ist } \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \text{ Eigenwert von } A$$

II.0.11 Kor: Geometrische Vielfachheit

$F : V \rightarrow V$ ist diagonalisierbar \Leftrightarrow geometrische Vielfachheit von Eigenwert $n = \dim(V) = \sum_{i=1}^k \dim(V(\lambda_i)) = \lambda_1 \dots \lambda_k$ sind die Eigenwerte von F

II.0.12 Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(K)$$

$$\chi_A(T) = \det \begin{pmatrix} T & -1 \\ 0 & T \end{pmatrix} = T^2$$

0 ist der einzige Eigenwert von A ,
 A ist diagonalisierbar gdw.

$$2 = \dim(\ker(A))$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \quad 2 \neq 1 \Rightarrow A \text{ ist nicht diagonalisierbar}$$

$$\Rightarrow \dim(\ker(A)) = 1$$

II.0.13 Def: Algebraische Vielfachheit

$\dim(V) < \infty$ $F : V \rightarrow V$ Endomorphismus
 $\lambda \in K$ Eigenwert

$$\Rightarrow \chi_F(\lambda) = 0$$

algebraische Vielfachheit von λ $K = \text{ord}_\lambda(F)$

$$\chi_F(T) = (T - \lambda) \cdot G(T) \quad G(T) = 0$$

Bem:

$$\text{ord}_\lambda(F) \geq \dim V(\lambda)$$

II.0.14 Bew:

Sei $\{v_1, \dots, v_k\}$ Basis von $V(\lambda)$ und erweitern sie zu einer Basis
 $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ von V .

Die Darstellungsmatrix von F bzgl. \mathcal{B}

$$F(v_1) \dots F(v_k), F(v_{k+1}) \dots F(v_n)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & & \\ 0 & \lambda & 0 & & \\ 0 & 0 & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & \\ & & & & & C_1 \end{pmatrix} \quad C_2$$

$$C_1(\text{vllt. } C_2) \in \text{Mat}_{n-k \times k}(K)$$

$$\chi_{F(\text{vllt}|U)}(T) = \det(T E_n - M) = (T - \lambda)^k \cdot \underbrace{\det(T E_{n-k} \cdot C_1)}_{H(\lambda)}$$

$$\Rightarrow k = \text{ord}_\lambda(F)$$

(weil es sein könnte, dass $H(\lambda) = 0$)

□

II.0.15 Lemma: Quotientenraum Endomorphismus

Sei V endlichdim. $F : V \rightarrow V$ Endomorphismus
 $U \subset V$ F -invarianter Unterraum ($F(U) \subset U$)

$$\tilde{F} : V/U \rightarrow V/U \quad \text{lineare Abbildung}$$
$$\bar{v} \mapsto \overline{F(v)}$$

\tilde{F} ist wohldefiniert und ferner

$$\chi_F(T) = \chi_{F|U}(T) \cdot \chi_{\tilde{F}}(T)$$

II.0.16 Bew:

\tilde{F} ist wohldefiniert:

$$\bar{v}_1 = \bar{v} \stackrel{\text{zu zeigen}}{\Rightarrow} \overline{F(v)} = \tilde{F}(v_1) = \tilde{F}(v) = \overline{F(v)}$$

$$\Rightarrow v_1 = v + \underbrace{(v_1 - v)}_{\in U}$$
$$F(v_1) = F(v) + \underbrace{F(v_1 - v)}_{\in U}$$
$$\Rightarrow \overline{F(v_1)} = \overline{F(v)}$$

Restklassen sind linear und \tilde{F} ist linear $\Rightarrow \tilde{F}$ ist linear Sei $\{u_1, \dots, u_k\}$ eine Basis von U und erweitere sie zu einer Basis $\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ von V .

Bem:

$\{\overline{v_{k+1}}, \dots, \overline{v_n}\}$ ist eine Basis von V/U

Bem: Darstellungsmatrizen

Einfach Darstellungsmatrix von F bzgl. \mathcal{B} .

$$F(u_1) \dots F(u_k), F(v_{k+1}) \dots F(v_n)$$

$$\begin{array}{lcl} u & \rightarrow & \\ \vdots & & \\ u_k & \rightarrow & \\ v_{k+1} & \rightarrow & \\ \vdots & & \\ v_n & \rightarrow & \end{array} \left(\begin{array}{ccc} & A & C_2 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ C_1 \\ \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \chi_F(T) &= \det(T \cdot E_n - H) \\ &= \det \left(T \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & C_2 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} TE_k - A & -C_2 \\ 0 & TE_{n-k} - C_1 \end{pmatrix} \\ &= \det(TE_k - A) \cdot \det(TE_{n-k} - C_1) \end{aligned}$$

A ist die Darstellungsmatrix von $F|U$ bzgl. $\{u_1, \dots, u_k\}$

$$\Rightarrow \det(TE_k - A) = \chi_{F|U}(T)$$

C_j ist die Darstellungsmatrix von \tilde{F} bzgl. $\{\overline{v_{k+1}}, \dots, \overline{v_n}\}$

$$\Rightarrow \det(TE_{n-k} - A) = \chi_{\tilde{F}}(T)$$

II.0.17 Satz: Diagonalisierbarkeit

$\dim(V) < \infty$ K Körper

$F : V \rightarrow V$ Endomorphismus

F ist diagonalisierbar gdw. $\chi_F(T)$ in linearfaktoren zerfällt

$$\chi_F(T) = (T - \lambda_1)^k \dots (T - \lambda_r)^{k_r}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r =$ Nullstellen (verschwinden) und für jeden Faktor $T - \lambda_i$ gilt:

$$\text{ord}_{\lambda_i}(F) = \dim(V(\lambda_i))$$

II.0.18 Bew:

\Rightarrow Sei $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von Eigenvektoren.
Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschwindenden Eigenwerte.

$$v_1, \dots, v_{\alpha_1} \in V(\lambda_1)$$

$$v_{\alpha_1+1}, \dots, v_{\alpha_1+\alpha_2} \in V(\lambda_2)$$

$$v_{d_1} + \dots + v_{d_{r-1}}, \dots, \underbrace{v_{d_1} + \dots + d_r}_{n} d_i = \dim(V(\lambda_i)) \text{ Die Darstellungsmatrix}$$

von F bzgl. \mathcal{B}

$$F(v_1) \dots F(v_d), F(v_{d+1}) \dots F(v_n)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \lambda_r \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix} \begin{matrix} \} d_1 \\ \\ \\ \} d_2 \\ \\ \\ \} d_r \end{matrix}$$

Wobei d_i viele λ_i auf der Diagonalen liegen

$$\chi_F(T) = \det(T E_n - A) = (T - \lambda_1)^{d_1} \dots \underbrace{(T - \lambda_r)^{d_r}}_{a(T)}$$

$$a_q(\lambda_1) \neq 0 \quad (\lambda \neq \lambda_i, i \neq 1)$$

\Leftarrow

$$\chi_F(T) = (T - \lambda_1)^{d_1} \dots (T - \lambda_r)^{d_r}$$

$$(\text{Grad}(\chi_F) = n)$$

$$d_i = \dim(V(\lambda_i))$$

$$F \text{ ist diagonalisierbar} \Leftrightarrow n = \dim(V) = \sum d_i$$

II.0.19 Def: Diag. und Ähnlichkeit

Eine Matrix $A \in M_{n \times n}(K)$ ist trigonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

endlichdim VR / K $F : V \rightarrow V$ Endomorphismus
 A Darstellungsmatrix bzw. B

$$\chi_F(T) = \det(T \cdot E_n - A)$$

normiert

$$\chi_F(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \text{ Eigenwerte von } F \Leftrightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} F(v) = \lambda \cdot v$$

$U \subset V$ Untervektorraum F -invariant ($F(U) \subset U$)

$$\chi_F = \chi_{F|U} \cdot \chi_{\tilde{F}}$$

$$\tilde{F} : V/U \rightarrow V/U$$

$$\bar{v} \mapsto \overline{F(v)}$$

F ist dia/tri ? gonalisierbar $\Leftrightarrow \chi_A$ in Linearfaktoren zerfällt und $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_k$ Eigenwerte

$$\dim(V(\chi)) = \text{ord}_{\lambda_i}(\chi_F)$$

II.0.20 Def: Trigonalisierbarkeit

$$F : V \rightarrow V$$

F trigonalisierbar ist, falls es eine Darstellungsmatrix von F gibt, welche in oberer Dreiecksform ist.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

II.0.21 Satz: Trigonalisierbarkeit

$F : V \rightarrow V$ ist trigonalisierbar, gdw χ_F in Linearfaktoren zerfällt

$$\chi_F(T) = (T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$$

(eventuell mit Wiederholungen)

II.0.22 Kor: Trigonalisierbarkeit

Jeder Endomorphismus eines endlichdim VR über einem alg. abg. Körper (z.B. \mathbb{C}) ist trigonalisierbar.

II.0.23 Bew: (Satz)

\Rightarrow

F ist Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\chi_F(T) = \det(T \cdot E_n - A) = \prod_{i=1}^n (T - a_{ii})$$

\Leftarrow

Induktion über $n = \dim(V)$

$n = 1 \rightarrow$ Jede 1×1 Matrix ist in oberer Dreiecksform $\rightarrow a_n !$

$n \geq 2$

$$\chi_F(T) = (T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$$

λ_1 ist ein Eigenwert

$$\rightarrow \exists v_1 \in V \setminus \{0\} \quad F(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1$$

$$U = \text{span}(v_1) \subset V$$

ist F-invariant

$$\begin{array}{ccc} \chi_F(T) & = & \chi_{F|U} \cdot \chi_{\tilde{F}} \\ \parallel & & \parallel \\ (T - \lambda_1) \prod_{i=2}^n (T - \lambda_i) & & (T - \lambda_1) \end{array}$$

$K[T]$ ist ein Integritätsbereich

$$\Rightarrow \chi_{\tilde{F}}(T) = \prod_{i=2}^n (T - \lambda_i)$$

$$\dim(V/U) < \dim(V)$$

\Downarrow I.A. Es gibt eine Basis $\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ von V/U derart, dass \tilde{F} bzgl. dieser Basis Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix} = (\mu_{ij})$$

II.0.24 Beh:

Seien $v_i \in V \quad \bar{v}_i = \overline{v_i} \quad 2 \leq i \leq n$
 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ist eine Basis von V

II.0.25 Bew:

(Übungsaufgabe)

II.0.26 Frage:

Wie sieht die Darstellungsmatrix von F bezüglich $\{v_1, \dots, v_n\}$ aus?

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\bar{v}_j) &= \overline{F(v_j)} \\ \Rightarrow \sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} \bar{v}_i &= \overline{\sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} v_i} \\ \Rightarrow \mu_{ij} \in K \mid_{F(v_j)} &= \mu_{2j} v_1 + \sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} v_j = \sum_{1 \leq i \leq j} \mu_{ij} v_j \\ F(v), F(v_2) \dots F(v_n) \\ &\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_{12} & \cdots & * \\ & \lambda_2 & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

II.0.27 Lemma: F^r & Polynome

V endlichdim / K
 $v \in V \setminus \{0\} \quad \exists r \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} F^r(v) &= \sum_{i=0}^{r-1} \underbrace{a_i}_{\substack{\text{eindeutig} \\ \text{bestimmt}}} F^i(v) \\ \parallel \\ \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_{r\text{-Mal}} \end{aligned}$$

Insb. ist

$$U = \text{Span}(v, F(v), \dots, F^{n-1}(v))$$

ist F -invariant, hat Basis $\{v_1, \dots, F^{n-1}(v)\}$

$F \mid U$ hat Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_1 \\ & 1 & 0 & \dots & a_2 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & a_{r-1} \end{pmatrix}$$

$$\chi_{F|U}(T) = T^r - a_{r-1}T^{r-1} \dots - a_0$$

II.0.28 Bew:

$n = \dim(V)$ $v, F(v), \dots, F^r(v)$ lin. unabh.

Sei $r > 0$ kleinste rat. Zahl, sodass: $v, F(v), \dots, F^r(v)$ lin. abh.

$$v, F(v), \dots, F^{r-1}(v)$$

lin. unabh. (aus der Minimalität von r)

⇓ Austauschprinzip:

$$F^r(v) = \sum_{i=0}^{r-1} \underbrace{a_i}_{\substack{\text{eindeutig} \\ \text{bestimmt}}} F^i(v)$$

$$U = \text{Span}(v, F(v), \dots, F^{r-1}(v)) \quad \text{ist } F\text{-invariant}$$

$$v \in U \quad v = \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i F^i(v)$$

$$F(v) = \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i F^{i+1}(v)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i F^{i+1}(v) \\ &= \underbrace{\sum_{i=0}^{r-2} \mu_i F^{i+1}(v)}_{\in U} + \underbrace{\mu_{r-1} \overbrace{F^r(v)}^{\sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v)}}_{\in U} \end{aligned}$$

$\{v, F(v), \dots, F^{r-1}(v)\}$ ist eine Basis von U .

$$F(v), \dots, \overbrace{F(F^{r-1}(v))}^{F^r(v)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & & a_1 \\ & 1 & 0 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & a_{r-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_{F|U}(T) &= \det(T \cdot E_n - A) \\ &= \det \begin{pmatrix} T & 0 & \dots & a_0 \\ -1 & T & & 0 \\ & -1 & T & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T - a_{r-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Laplacescher Entwicklungssatz nach der r-ten Spalte)

$$\begin{aligned} &= (-1)^{r+1}(-a_0) \det \begin{pmatrix} -1 & T & & \\ & -1 & T & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^T \end{pmatrix} + \\ &+ (-1)^{r+2}(-a_1) \det \begin{pmatrix} -1 & T & & \\ & -1 & T & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^T \end{pmatrix} + \dots + \\ &+ (-1)^{2r}(T - a_{r-1}) \det \begin{pmatrix} -1 & T & & \\ & -1 & T & \\ & & \ddots & \\ & & & T \end{pmatrix} \\ &= (-1)^r a_0 (-1)^{r-1} a_1 + (-1)^{r+1} a_1 T (-1)^{r-1} + \dots + (-1)^{2r} (T - a_{r-1}) T^{r-1} \\ &= -a_0 - a_1 T - \dots - a_{r-1} T^{r-1} + T^r \end{aligned}$$

Notation

$$\begin{aligned} P(T) &\in K[T] \\ &\parallel \\ &\sum_{i=0}^m a_i T^i \end{aligned}$$

$F : V \rightarrow V$ Endomorphismus

$P(F) : V \rightarrow V$

$v \mapsto \sum_{i=0}^m a_i F^i(v)$

Mit dieser Notation haben wir, das im vorherigen Lemma

$$\chi_{F|U}(v) = F^r(v) - \sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v) = 0$$

II.0.29 Satz: (Calay - Hamilton)

$F : V \rightarrow V$ Endomorphismus endlichdim. $\chi_F(F)$ ist der 0 Endomorphismus auf V

II.0.30 Bew:

Zu Zeigen: $\forall v \in V : \chi_F(F)(v) = 0$

$v = 0$ \rightarrow ok

sonst $v \neq 0 \rightarrow \exists r \in \mathbb{N}$

$$U = \text{Span}(v, F(v), \dots, F^{r-1}(v))$$

ist F in V U F -invariant

$$\Rightarrow \chi_F = \chi_{F|U} \cdot \chi_{\tilde{F}} = \chi_{\tilde{F}} \cdot \chi_{F|U}$$

$\tilde{F} : V/U \rightarrow V/U$

$\bar{w} \mapsto F(\bar{w})$

Aufgabe

$R(T) = P \cdot C$ allg. Polynom $\Rightarrow R(F) = P \cdot (G(F))$ als Endomorphismen

$$\chi_F(F)(v) = \overbrace{\chi_{\tilde{F}} \cdot (\chi_{F|U}(v))}^{\substack{0 \\ \parallel}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\substack{\parallel \\ 0}}$$

II.0.31 Kor:

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$

$$\chi_A(T) = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot T^i$$

$$\Rightarrow A^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot A^i = 0$$

da $n \times n$ Matrix

II.0.32 Satz: Minimalpolynom

$F : V \rightarrow V$ Endomorphismus V endlichdim. /K

Dann existiert genau ein normierter Polynom kleinsten Grades m_F derart, dass $\forall P \in K[T]$

$$m_F|_P \Leftrightarrow P(T) = 0 \quad \text{als Endomorphismus von } F$$

Insb. gilt $m_F(F) = 0$

Das Polynom $m_F (= \mu_F)$ heißt das Minimalpolynom von F .

II.0.33 Satz: Trigonalisierbarkeit

$F : V \rightarrow V$ Endomorphismus V endlich dim. und trigonalisierbar falls es eine Basis \mathcal{B} von V gibt, sodass F Darstellungsmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

Falls $\chi_F(T)$ in Linearfaktoren zerfällt dann ist F trigonalisierbar (Insb. falls K alg. abg. ist z.B. \mathbb{C})

$$F^0 = Id_v$$

$$F^i = \underbrace{F \circ \dots \circ F}_{i \text{ mal}}$$

$$P \in K[T] \quad P = \sum_{i=0}^m T^i$$

$$P(F) : \sum a_i F^i : V \rightarrow V, v \mapsto \sum a_i F^i(v)$$

Aufgabe:

Komposition des Endomorphismus ... Produkt im Polynom

$$P(F) \circ f(F) = (P \cdot G)(F)$$

II.0.34 Satz: (Caley-Hamilton)

$$\chi_F(F) = 0_{iv}$$

als Endomorphismus

II.0.35 Kor: Charakteristische Polynome

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$$

$$\chi_A(T) = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i T^i$$

$$\Rightarrow A^n + b_{n-1}A^{n-1} + \dots + b_0 E_n = 0$$

II.0.36 Satz: normiertes Polynom

Vendlichdim/ $KF : V \rightarrow V$ Endomorphismus Dann existiert genau ein normiertes und minimales Polynom $m_F(T)$ kleinsten Grades derart, dass $\forall P \in K[T]$:

$$m_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0$$

II.0.37 Def: minimal Polynom

Das Polynom $m_F(T)$ heißt das Minimalpolynom von F. Insb. $m_F(F) = 0$

II.0.38 Bew:

Sei

$$\mathcal{F} = \{P \in K[T] \text{ normiert} \mid P(F) = 0 \text{ als Endomorphismus}\}$$

Caley.Hamilton

$$\chi_F(T) \in \mathcal{F} \neq \emptyset$$

Sei $m_F(T) \in \mathcal{F}$ Polynom kleinsten Grades.

Zu Zeigen: $\forall P \in K[T]$

$$m_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0$$

\Rightarrow

$$m_F|_P \Leftrightarrow \exists G \in K[T] \quad P = G \cdot m_F$$

$$P(F) = G(F) \circ \underbrace{m_F(F)}_{=0(m_F(F) \in \mathcal{F})} = 0$$

\Leftarrow

Sei $P \in K[T] \mid P(F) = 0$

Division mit Rest $\rightarrow \exists G \overset{r}{\in} K[T] \ P = G \cdot m_F + r \quad \text{grad}(r) < \text{grad}(m_F)$

$$0 = P(F) = G(F) \circ \underbrace{m_F(F)}_{\substack{\parallel \\ 0}} + r(F)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\parallel \\ 0}}$$

$\Rightarrow r(F) = 0$ als Endomorphismus

$\Rightarrow r = 0$ (Sonst $\frac{1}{a_{(\text{grad}(r))}} \cdot r(T) \in \mathcal{F}$) Eindeutigkeit

Angenommen m'_F ist normiert. wäre auch so:

$$m'_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0 \forall P \in K[T]$$

$$\Rightarrow m_F|_{m'_F} \quad \& \quad m'_F|_{m_F}$$

$$\left. \begin{array}{l} m_F = Q \cdot m'_F \\ m'_F = H \cdot m_F \end{array} \right\} \rightarrow Q, H \text{ sind beide } \underline{\text{normiert}}$$

Zu zeigen: $Q = H = 1$

$$m_F = Q \cdot m'_F = Q \cdot H \cdot m_F$$

$K[T]$ Integritätsbereich

$$\Rightarrow 1 = Q \cdot H$$

$$\text{grad}(G \cdot H) = \text{grad}(1) = 0$$

$$\text{grad}(G) + \text{grad}(H) \Rightarrow G, H \in K \text{ und normiert}$$

$$(\text{als Polynom}) \Rightarrow Q = H = 1$$

□

Bsp: Minimalpolynom mit Hauptraum

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

m_A ?

$$\chi_A(T) = T^2 = \det \begin{pmatrix} T & -1 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

$$m_A|_{T^2} \Rightarrow m_A = \begin{cases} T \\ T^2 \end{cases}$$

$$m_A = 0 \rightarrow m_A(T) \neq T (A \neq 0)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow m_A(T) = T^2$$

II.0.39 Lemma: Nullstellen von χ_F und m_F

Gegeben $F : V \rightarrow V$ Endomorphismus V endlichdim / K , dann haben χ_F und m_F dieselben Nullstellen in K .

II.0.40 Bew:

$$m_F|_{\chi_F} \Rightarrow \chi_F = G \cdot m_F$$

$$\forall \lambda \in K, \text{ falls } m_F(\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \chi_F(\lambda) = 0$$

$$\text{Sei } \lambda \in K | \chi_F(\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } F$$

$$\Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} | F(v) = \lambda \cdot v$$

$$\text{Sei } m_F(T) = T^d + \sum_{i=0}^{d-1} c_i T^i$$

$$\begin{aligned} 0 &= m_F(F)(v) \\ &= (F^d + \sum c_i F^i)(v) \\ &= F^d(v) + \sum c_i F^i(v) \\ &= \lambda^d v + \sum c_i \lambda^i \cdot v \\ &= \underbrace{(\lambda^d + \sum c_i \lambda^i)}_{\substack{\parallel \\ m_F(\lambda)}} \cdot v \end{aligned}$$

$$v \neq 0 \quad m_F(\lambda) = 0$$

□

II.0.41 Satz: Diagonalisierbarkeit und Minimalpolynom

$F : V \rightarrow V$ Endomorphismus V endlichdim. / K ist diagonalisierbar gdw m_F in lauter verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

$$m_F(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i) : \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j$$

Die λ_i sind die Eigenwerte von F

II.0.42 Bew:

\Rightarrow

Sei F diagonalisierbar. Dann gilt

$$\chi_F(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{d_i}$$

wo die λ_i Eigenwerte von F sind

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_i & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_k \end{pmatrix} \quad \chi_F(T) = \det(T \cdot E_n - \tilde{F})$$

Außerdem ist $V = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$

Sei $v \in V$ beliebig. Dann gilt $V = \sum_{i=1}^k V_i$, wobei $v_i \in V(\lambda_i)$

Setze

$$p(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i) \quad (\stackrel{?}{=} m_F(T))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p(F)v &= \prod_{i=1}^k (F - \lambda_i)v \\ &= \prod_{i=1}^k (F - \lambda_i) \left(\sum_{j=1}^k v_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^k \left(\prod_{i=1}^k (F - \lambda_i)v_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^k (F - \lambda_1 \cdot Id) \circ \dots \circ (F - \lambda_i \cdot Id) \circ \dots \\ &\quad \dots \circ (F - \lambda_{i+1} \cdot Id) \circ \dots \circ (F - \lambda_j \cdot Id)(v_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

da $v_j \in V(\lambda_i)$.

v war beliebig $\Rightarrow P(F) = 0 \in \text{end}(V)$

also $m_F|_p \Rightarrow P(T) = Q(T) \cdot m_F(T)$

Aber $m_F(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{s_i} \quad s_i \geq 1$

$$P(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i) = Q(T) \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{s_i}$$

$\Rightarrow s_i = 1$ für $i = 1, \dots, k$

sonst wäre Grad (rechte Seite) > Grad (linke Seite)

$$\Rightarrow m_F(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i)$$

Dies war zu zeigen (\Rightarrow).

\Leftarrow

Sei $m_F(T) = (T - \lambda_1) \circ \dots \circ (T - \lambda_k) \quad (\lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j)$

zu zeigen ist F ist diagonalisierbar ($\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sind die Eigenwerte von F)

Es genügt zu zeigen, dass $V = \bigoplus_i V(\lambda_i)$

Beweis erfolgt durch Induktion über $\dim(V)$

Sonderfälle:

(1) Sei $\dim(V) = 1 \Rightarrow m_F(T) = (T - \lambda_1) \Rightarrow \lambda_1$ ist Eigenwert von F

$$\exists v \in V : Fv = \lambda_1 v \Rightarrow V = \text{span}\{v\} = V(\lambda_1)$$

($v \neq 0$)

(2) Sei nun $\dim(V) = \underbrace{n}_{\in \mathbb{N}} \geq 2$ und $k = 1 \Rightarrow m_F(T) = (T - \lambda_1)$

Nach definition von m_F gilt: $m_F(F) \Rightarrow F - \lambda_1 = 0 \in \text{end}(V)$

für jeden Vektor $v \in V$ gilt: $(F - \lambda_1)v = 0 \Rightarrow Fv = \lambda_1 v$

$\Rightarrow V = V(\lambda_1)$

Induktionsannahme (für den allgemeinen Fall):

Unser Satz gilt für $\dim(V) < n$ ($n \in \mathbb{N}$) fest

Also sei $\dim(V) = n \geq 2$ & $k \geq 2$

(*) Beh:

$$V = \underbrace{\ker(F - \lambda_i \cdot I_d)}_{\substack{V(\lambda_i) \\ (\dim(V(\lambda_i)) \geq 1)}} \oplus \underbrace{\text{im}(F - \lambda_i \cdot I_d)}_{\substack{\text{zu zeigen:} \\ (=V(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V(\lambda_k))}}$$

Bew: Sei $R(T) := \prod_{i=2}^k (T - \lambda_i) \quad \left[\Rightarrow m_f(T) = R(T)(T - \lambda_1) \right]$

Division mit Rest: $\exists Q(T) \& r \in K$, sodass: $R(T) = Q(T)(T - \lambda_1) + r$

$$0 \neq R(\lambda_1) = 0 + r \Rightarrow r \neq 0 \in K$$

$$\text{Sei } v \in V \text{ beliebig } R(F)v = Q(F)(F - \lambda_1)v + r \cdot v$$

$$\Rightarrow v = \underbrace{\frac{1}{r}R(F)r}_{\in \ker(F-\lambda_1)} \neq (F - \lambda_1) \circ \underbrace{\left(-\frac{1}{r}Q(F)r\right)}_{\in \text{im}(F-\lambda_1)}$$

$$(F - \lambda_1)R(F)v = \underbrace{m_F(F)}_0 v = 0 \Rightarrow V = \ker(F - \lambda_1) + \text{im}(F - \lambda_1)$$

Wir wollen zeigen, dass die Summe direkt ist $\Leftrightarrow \ker(F - \lambda_1) \cap \text{im}(F - \lambda_1) = \{0\}$

$$\text{Sei } v \in \ker(F - \lambda_1) \cap \text{im}(F - \lambda_1) \Rightarrow v = (F - \lambda_1)w \quad w \in V$$

$$R(F)v = Q(F)(F - \lambda \cdot I_d)v + r \cdot v$$

$$\underbrace{R(F) \circ (F - \lambda_1)}_{m_F(F)=0} w = \underbrace{Q(F)(F - \lambda_1 \cdot I_d)}_{=0} v + r \cdot v \Rightarrow r \cdot v = 0 \Rightarrow \underbrace{v}_{\parallel 0} \in V$$

$$\Rightarrow V = \underbrace{\ker(F - \lambda_1 I_d)}_{V(\lambda_1)} \oplus \text{im}(F - \lambda_1 I_d)$$

□(*)

Beweis durch Induktion · Fortsetzung · $\dim(V) = n \geq 2, k \geq 2$

Setzte $W = \text{im}(F - \lambda_1)$ (W ist UVR von V mit $\dim(W) \subset \dim(V)$)

(**) Beh: W ist F-invariant

Bew: Sei $v \in W$ beliebig $\Rightarrow v = (F - \lambda_1)w \quad w \in W$

$$\Rightarrow F(v) = F \circ (F - \lambda_1)w = (F - \lambda_1) \circ \underbrace{F(w)}_{\in V} \in W$$

□(**)

(***) Beh: (setzte $F' = F|_W \in \text{end}(W)$)

$$m_F(T) = \prod_{i=2}^k (T - \lambda_i) \quad (:= R(T))$$

Bew: Sei $v \in W$ beliebig $\Rightarrow v = (F - \lambda_1)w \quad w \in V$

$$R(F')(v) = R(F) \circ \underbrace{(F - \lambda_1)}_{m_F(F)=0} w = 0$$

$$\Rightarrow R(F') = 0 \in \text{end}(W)$$

$$m_{F'}(T)|_{R(T)} \Rightarrow R(T) = H(T) \cdot m_{F'}(T)$$

Es gilt auch

$$0 = \underbrace{m_{F'}(F') \circ (F - \lambda_1)}_{=0} \underbrace{(V)}_{v \in V \text{ beliebig}}$$

$$\begin{aligned}
m_{F'}(F') \circ (F - \lambda_1) &= 0 \in \text{end}(V) \\
m_F(T) &|_{m_{F'}(T) \cdot (T - \lambda_1)} \\
\Rightarrow m_{F'}(T) \cdot (T - \lambda_1) &= Q(T) \cdot m_F(T) = Q(T) \cdot R(T) \cdot (T - \lambda_1) \\
\Rightarrow m_{F'}(T) &= Q(T) \cdot R(T) = Q(T) \cdot H(T) \cdot m_{F'}(T) \Rightarrow Q(T) = H(T) = 1 \\
\Rightarrow R(T) &= m_{F'}(T) \Rightarrow \text{Induktionsannahme: } W = \bigoplus_{i=1}^k W(\lambda_i) \text{ Eigenraum von } \\
F' \text{ zu } \lambda_i \\
\Rightarrow V &= V(\lambda_1) \bigoplus_{i=2}^k W(\lambda_i) \text{ zu zeigen: } W(\lambda_i) = V(\lambda : i) \\
\text{dann gilt: } V &= \bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i) \\
\text{Es gilt: } W(\lambda_i) &= \{w \in W : F'(w) = \lambda_i w\} \subseteq \{v \in V : F(v) = \lambda_i \cdot v\} := V(\lambda_i) \\
\text{Sei } v \in V(\lambda_i) &\Rightarrow F(v) = \lambda_i v \text{ Setze: } w = \underbrace{\frac{1}{(\lambda_i - \lambda_1)}}_{(i>1)} \cdot v \in V(\lambda_i) \\
\Rightarrow F(w) - \lambda_i w &= v \Rightarrow v \in \text{im}(F - \lambda_i) = W \\
\Rightarrow v \in \bigoplus_{j=2}^k W(\lambda_j) &\Rightarrow v \in W(\lambda_{i \text{oder } 1}) \text{ Warum?} \\
v = \sum_{j=2}^k \alpha_j w_j &\text{ f\"ur } w_j \in W(\lambda_j) \quad \alpha_j \in K \quad (\subseteq V(\lambda_j)) \text{ Also nur } \alpha_i \neq 0 \\
\text{Aber } +V(\lambda_j) &= \oplus V(\lambda_j) \text{ oder } v \in V(\lambda_i) \Rightarrow v = \alpha_i w_i \in W(\lambda_i)
\end{aligned}$$

□

Bem:

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \quad A^2 = E_n$$

$\Rightarrow A$ ist diagonalisierbar

$$\text{da } A^2 = E_n \Rightarrow (T^2 - 1)(A) = 0$$

$$m_F|_{T^2-1}$$

$$m_F = \begin{cases} T^2 - 1 &= (T - 1)(T + 1) \\ T - 1 \\ T + 1 \end{cases}$$

Kapitel III

Die Jordansche Normalenform

III.0.1 Lemma: Invarianzen

$F : V \rightarrow V$ Endomorphismus $U \subset V$ Untervektorraum:

Dann ist U F -invariant gdw U $(F - \lambda Id)$ -invariant ist für $\forall \lambda \in K$

III.0.2 Bsp:

$F : V \rightarrow V$ Endomorphismus V endlichdim. derart, dass $F^m = 0$ als Endomorphismus) und $m > 0$ minimal („ F ist nilpotent“)

$F^{m-1} \neq 0 \rightarrow \exists v \in V | F^{m-1}(v) \neq 0$ $\{v, F(v), \dots, F^{m-1}(v)\}$ ist linear unabh.

Ergänze das System zu einer Basis \mathcal{B} von V : $\{v, \dots, F^{m-1}(v), \dots, v_n\}$

$$F^{m-1}(v) F^{m-2}(v) \dots, v, v_{m+1}, \dots, v_n$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & * \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & * \end{pmatrix}$$

III.0.3 Def: Hauptraum

Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $F : V \rightarrow V$ Endomorphismus V endlichdim.

$$V(\lambda) = \ker(F - \lambda)$$

Eigenraum von F bzgl. λ

$$\ker(F - \lambda) \subset \ker(F - \lambda)^2 \subset \ker(F - \lambda)^3 \subset \dots$$

$$V_\lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker(F - \lambda)^n$$

ist ein *Hauptraum* von F bzgl. λ

Bem:

V_λ ist ein Unterraum und V_λ ist F -invariant.

Warum ? Weil V_λ $(F - \lambda)$ -invariant ist.

Bem:

Falls $(\ker(F - \lambda)) = V(\lambda) = 0$

$$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker(F - \lambda)^n = 0$$

III.0.4 Bew:

Sei $v \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (F - \lambda)^n$

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid (F - \lambda)^n(v) = 0$$

$n = 0$

$\rightarrow \underbrace{Id(v)}_{=V} = 0$ sonst:

$$(F - \lambda)((F - \lambda)^{n-1}(v)) = 0$$

$$\Rightarrow (F - \lambda)^{n-1}(v) \in \ker(F - \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow (F - \lambda)^{n-1}(v) = 0$$

III.0.5 Lemma: Haupträume sind disjunkt

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ verschiedene Elemente aus K (Eigenwerte)

$$\Rightarrow V_{\lambda_i} \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k V_{\lambda_j} = \{0\}$$

III.0.6 Bew:

V_{λ_j} ist $(F - \lambda_j)$ -invariant

$\Rightarrow V_{\lambda_j}$ ist F -invariant

$\Rightarrow V_{\lambda_j}$ ist $(F - \lambda_i)$ -invariant

Wir wollen zuerst zeigen, dass $F - \lambda_i|_{V_{\lambda_j}}$ ein Automorphismus ist ($i \neq j$)

\Rightarrow Es genügt zu zeigen, dass $F - \lambda_i$ injektiv auf V_{λ_j} ist.

Sei $w \in V_{\lambda_i} \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \text{ kleinstes } (F - \lambda_i)^m(w) = 0$$

$$\stackrel{(m > 0 (w \neq 0))}{\Rightarrow} (F - \lambda_j)^{m-j}(w) \neq 0$$

$$\Rightarrow (F - \lambda_j)^{m-1}(\underbrace{(\lambda_i - \lambda_j)(w)}_{\neq 0}) \neq 0$$

$$\begin{aligned} \text{So } 0 &\neq (F - \lambda_j)^{n-1}([F(w) - \lambda_j w] - (F(w) - \lambda_i w)) \\ &= \underbrace{(F - \lambda_j)^m(w)}_{=0} + (F - \lambda_j)^{m-1}(F - \lambda_i)(w) \\ &\Rightarrow (F - \lambda_i)(w) \neq 0 \text{ OK!} \end{aligned}$$

Insb. ist jede Potenz $(F - \lambda_i)^k$ ein Automorphismus von V_{λ_i}

$$V_{\lambda_i} \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k V_{\lambda_j} = \{0\}$$

$$v \in V_{\lambda_i} \cap \sum_{j \neq i}^k V_{\lambda_j}$$

$$v = \sum_{j \neq i} \underbrace{v_j}_{\in V_{\lambda_j}}$$

$\Rightarrow \exists m_j$ kleinstes

$$(F - \lambda_j)^{m_j}(v_i) = 0$$

$$M = (F - \lambda_i)^{m_1} \circ \dots \circ (F - \lambda_{i-1})^{m_{i-1}} \circ (F - \lambda_{i+1})^{m_{i+1}} \circ \dots \circ (F - \lambda_K)^{m_K}$$

ist ein Automorphismus von V_{λ_i}

Wiederholung:

$F : V \rightarrow V$ Endomorphismus $\dim_k V = n$ $\lambda \in K$

$$V_\lambda = \bigcup_{\substack{\parallel \\ (F-\lambda) \circ \dots \circ (F-\lambda)}} \ker(F - \lambda)^n$$

$$V(\lambda) = \ker(F - \lambda) = \{0\} \Leftrightarrow \chi_F(\lambda) \neq 0 \Rightarrow V_\lambda = \{0\}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ verschiedene Eigenwerte

$$\Rightarrow V_{\lambda_i} \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k V_{\lambda_i} = \{0\}$$

III.0.7 Bem: Invarianzen

V_λ ist $(F - \lambda)$ -invariant

$\Rightarrow V_\lambda$ ist F -invariant

III.0.8 Lemma: Ordnung

Sei $\lambda \in K$

$$\dim V_\lambda = \text{ord}_\lambda(\chi_F)$$

Ferner hat $F \upharpoonright V_\lambda$ Matrixdarstellung der Form $\begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$

III.0.9 Bew

Sei $K = \text{ord}_\lambda(\chi_F(T)) \Rightarrow \chi_F(T) = (T - \lambda)^K \cdot Q(T)$ wobei: $Q(T) \neq 0$

Behauptung:

Es gibt einen F -inv. Unterraum $U \subset V$ der dimension K , so dass $F \upharpoonright U$ matrix darstellung

$$\begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

Falls $n = 0 \rightarrow \text{Ok!}$

OBdA ist $k \geq 1$ Wir beweisen die Behauptung mit Induktion auf $n = \dim V$

$n=1 \Rightarrow$

$$\exists v \in V \setminus \{0\} \quad F(v) = \lambda \cdot v$$

$$\Rightarrow V = \underbrace{\text{span}(v)}_{\substack{\parallel \\ U_0}}$$

$$n \geq 2$$

λ ist ein Eigenwert

$$\Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} \quad F(v) = \lambda \cdot v$$

$$U = \text{span}(v) \rightarrow \dim 1 \quad F\text{-invariant} \Rightarrow \tilde{F} : V/U_0 \rightarrow V/U_0; \bar{\omega} \mapsto \overline{F(\omega)}$$

$$\begin{array}{ccc} \chi_F(T) & = & \chi_{F|U}(T) \cdot \chi_{\tilde{F}}(T) \\ \parallel & & \parallel \\ (T-\lambda)(T-\lambda^{k-1}) \cdot Q(T) & & (T-\lambda) \end{array}$$

da $K[T]$ Integritätsbereich:

$$\Rightarrow \chi_{\tilde{F}}(T) = (T - \lambda)^{k-1} \cdot Q(T)$$

$$Q(\lambda) \neq 0$$

Nach I.A. existiert einen \tilde{F} -Invarianten Unterraum $\tilde{U} \subset V/U$ der Dimension $n - 1$, so dass die Matrixdarstellung von \tilde{F} der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

besitzt. Sei $\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_K$ eine Basis von \tilde{U} so dass die Darstellungsmatrix von \tilde{F} bzgl. $\{\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_K\}$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Die Vektoren $\underbrace{\{v, v_2, \dots, v_K\}}_{\text{Vektoren aus } \underline{V}}$ sind linear unabhängig.

$U = \text{span}(v, v_2, \dots, v_K)$ hat Dimension K .

U ist F -Invariant

$$\begin{aligned} F\left(\sum_{i=1}^K \mu_i v_i\right) &= \sum \mu_i F(v_i) \\ &= \underbrace{\mu_1 \lambda v_1 + \sum_{i=2}^k \mu_i F(v_i)}_{\in U} \end{aligned}$$

da: $F(v_i) \stackrel{\text{nach } U_0}{=} \sum_{j \leq i} a_j = v_j \quad F \upharpoonright U$

$$F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_k)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & * \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Zu Zeigen: $U = V_\lambda$
 $U \subset V_\lambda$:

$$\chi_{F|U} = (T - \lambda)^k$$

\Downarrow Caley Hamilton

$$(F - \lambda)^k = 0 \quad \text{auf } U$$

$$\Rightarrow U \subseteq \underbrace{\ker(F - \lambda)^k}_{\subset V_\lambda}$$

Falls $U \subsetneq V_\lambda$

$$\Rightarrow \dim V_\lambda / U \geq 1$$

$$\begin{array}{ccc} \chi_F(T) & = & \chi_{F|U}(T) \cdot \chi_{\tilde{F}}(T) \\ \parallel & & \parallel \\ (T - \lambda) \cdot Q(T) & & (T - \lambda)^k \end{array}$$

$$\tilde{F} : V/U \rightarrow V/U$$

$$\Rightarrow \chi_{\tilde{F}(T)} = Q(T)$$

aber $Q(\lambda) \neq 0 \Rightarrow \lambda$ ist kein Eigenwert von \tilde{F} !!

\Rightarrow Der Hauptraum für λ von $\tilde{F} : V/U \rightarrow V/U$ ist trivial

Sei $\omega \in V_\lambda$

$$\Rightarrow \exists s \in \mathbb{N}$$

$$(F - \lambda)^s(\omega) = 0 \Rightarrow (F - \lambda)^s(\bar{\omega}) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{\omega} = 0 \Rightarrow \omega \in U$$

III.0.10 Def: Nilpotenz

$F : V \rightarrow V$ Endomorphismus heißt nilpotent falls es eine feste Zahl m existiert, so dass $\underbrace{F \circ \dots \circ F}_m = F^m = 0$ auf V ist.

III.0.11 Lemma: Nilpotenz

Sei $F : V \rightarrow V$ Endomorphismus $\dim V = n$ Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1) F ist nilpotent
- 2) $\forall v \in V \exists m_v \in \mathbb{N} : F^{m_v}(v) = 0$
- 3) Es existiert eine Basis von V , so dass F Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

hat

- 4) $\chi_F(T) = T^n$

III.0.12 Bew:

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Trivial
 $\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Induktion auf $n = \dim V$ $n = 1 : \exists v \in V \setminus \{0\}$
 $\exists m_v \in \mathbb{N}$ kleinstes
 $F^{m_v}(v) = 0$
 $\Rightarrow m_v \neq 0$
 $\Rightarrow F^{m_v-1}(v) \neq 0$
 $\Rightarrow V = \text{span}(F^{m_v-1}(v))$ Ferner $F(F^{m_v-1}(v)) = 0$
 \rightarrow Darstellungsmatrix bzgl. $\{F^{m_v-1}(v)\}$ ist (0)
 $n \geq 2$
 Sei $v_i \in V \setminus \{0\}$, so dass $F(v_i) = 0$
 $\Rightarrow U = \text{span}(v_i)$ ist F -invariant
 $\Rightarrow \tilde{F} : V/U \rightarrow V/U$
 $\underbrace{\dim < n}_{\parallel}$
 $n-1$
 \Rightarrow I.A. es existiert eine Basis $\{\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ von V/U , so dass \tilde{F} Darstellungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

hat. Die Familie $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ist eine Basis von V und hat Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & & * \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{3 \Rightarrow 4}$$

$$\chi_F(T) = \det \left(T \cdot E_n - \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} T & & * \\ & \ddots & \\ & & T \end{pmatrix} = T^n$$

$$\boxed{4 \Rightarrow 1} \text{ Caley-Hamilton}$$

$$F^n = \chi_F(F) = 0$$

□

III.0.13 Satz: Jordan-Charelley Zerlegung

$F : V \rightarrow V$ Endomorphismus V endlichdim.

Falls $\chi_F(T)$ in linearfaktoren zerfällt dann ist $V = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$ $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte und F lässt sich als Blockmatrix darstellen

$$F = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ & & & \ddots \\ & & & & A_k \end{pmatrix} \quad A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$$\text{insb. ist } F = \underbrace{G}_{\text{diagonalisierbar}} + \underbrace{H}_{\text{nilpotent}}$$

$$G \circ H = H \circ G$$

Sei $G : V \rightarrow V$ $G_{V_{\lambda_i}}$ = Multiplikation mit λ_i . E hat diagonale Matrix bzgl. der Basis \mathcal{B}

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

setzt $H = F - G$ die Darstellungsmatrix von H bzgl. \mathcal{B} ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & & * & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & * \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 & & * \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 & & * & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & * \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 & & * \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}} \right\} V_{\lambda_1} \\ \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 & & * & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & * \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 & & * \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}} \right\} V_{\lambda_2} \end{matrix} \Rightarrow H \text{ ist nilpotent}$$

III.0.14 Bew:

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ verschiedene Eigenwerte

$$\chi_F(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{d_i}$$

$$\dim V = \text{grad} \chi_F(T) = n \sum_{i=1}^k \frac{d_i}{\dim V_{\lambda_i}}$$

$$\dim \left(\sum_{i=1}^k V_{\lambda_i} \right) \stackrel{V_{\lambda_i} \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k V_{\lambda_j} = \{0\}}{=} \sum d_i = n = \dim V$$

$$\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$$

V besitzt eine Basis \mathcal{B} , welche aus der Vereinigung der Basen jedes V_{λ_i} besteht.

F wird durch $F \upharpoonright V_{\lambda_1}, \dots, F \upharpoonright V_{\lambda_k}$ bestimmt

$$\begin{matrix} \parallel & & \parallel \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \lambda_k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix} \\ \parallel & & \parallel \\ A_1 & & A_k \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_K \end{pmatrix}$$

zu Zeigen: $G \circ H = H \circ G$ Beachte, dass jedes V_{λ_i} G -Invariant.
 $\Rightarrow V_{\lambda_i}$ ist H -Invariant.

Es genügt zu zeigen, dass $G \circ H = H \circ G$ auf $\underline{\underline{V_{\lambda_i}}}$

$w \in V_{\lambda_i}$

$$H \circ G(w) = H(\lambda \cdot w)$$

$$G \circ H(w) \stackrel{W(w) \in V_{\lambda_i}}{=} \lambda_1 H(w)$$

III.0.15 Def: F-adaption

$F : V \rightarrow V$ Endomorphismus V endlichdim.

Eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist F -adaptiert, falls:

$$F(v_1) = 0$$

$$2 \leq j \leq n \quad F(v_j) = \begin{cases} 0 \\ v_{j-1} \end{cases}$$

Bem:

Falls V eine F -adaptierte Basis besitzt, dann ist $F : V \rightarrow V$ Endomorphismus nilpotent.

III.0.16 Bew:

Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ F -adaptiert

Es genügt zu zeigen, dass $F^n = 0$ (als Endomorphismus)

$$F^n \left(\begin{array}{c} v \\ \parallel \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j \end{array} \right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \underbrace{F^n(v_j)}_{=0} = 0$$

Notation:

$$\mathcal{N}_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{K})$$

$$\mathcal{N}_j = (0)$$

$$\mathcal{N}_m^m = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

III.0.17 Def: Index

$F : V \rightarrow V$ Endomorphismus nilpotent. Es gibt $m \leq n$ kleinste Zahl, sodass

$$\ker(F^m) \subsetneq \dots \subsetneq \ker(F^m) \subsetneq \ker(F^{m+1}) \subsetneq \dots \subsetneq V$$

m heißt der Index von F

$$V = \ker(F^m) \bigoplus F^m(V)$$

III.0.18 Satz: Index

Sei $F : V \rightarrow V$ Endomorphismus $\dim(V) = n$ und \mathcal{B} eine F -adaptierte Basis von F . Dann hat F Matrixdarstellung der Form

$$\begin{pmatrix} \mathcal{N}_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{N}_{k_r} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^r k_j = n \quad \text{Index}(F) = \max\{k_j\}_{1 \leq j \leq r} \text{ oder } n$$

III.0.19 Bew:

Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ F -adaptiert

Sei $k \leq i_1 < \dots < i_r < n$ eine Aufzählung der Menge $\{j | F(v_{j+1}) = 0\}$

$$v_1, v_2, \dots, v_{i_j}, v_{i_{j+1}}, \dots$$

$$\begin{array}{cccccc}
 v_1 & v_2 & \dots & v_{i_1} & v_{i_j+1} & \\
 \left(\begin{array}{cccccc}
 0 & 1 & & & & \\
 & 0 & & & & \\
 & & \ddots & & & \\
 & & & 0 & 1 & \\
 & & & & 0 & \\
 & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & 0
 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} i_1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ i_2 - i_1 \end{array}
 \end{array}$$

III.0.20 Satz: F-adaptierte Basis

Sei $F : V \rightarrow V$ nilpotent mit Index k . Gegeben einen Unterraum $U \subset V$ derart, dass $U \cap \ker(F^{k-1}) = \{0\}$. Dann lässt sich jede Basis von U zu einer F -adaptierten Basis von V ergänzen.

III.0.21 Kor:

Jeder nilpotente Endomorphismus besitzt eine F -adaptierte Basis

$$\ker F \subsetneq \ker F^2 \subset \dots \subset \ker F^{k-1} \subsetneq \ker F^k = \dots = V$$

$$B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_{k-1} \subset B_k$$

$$\left(F(U_1) \dots F(U_r) \rightarrow B_{k-1} \quad U_1, \dots, U_r \in B_k \setminus \ker(F^{k-1}) \right)$$

$\ker F^{K-1}$ hat ein Komplement U in $\ker F^k$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ U_1 \\ \vdots \\ U_j \end{array}$$

Behauptung:

$\{F(U_1), \dots, F(U_r)\}$ sind lin. unabh.

→ sie bilden die Basis von $F(w)$

III.0.22 Bew:

$$\sum_{i=1}^r \lambda F(U_i) = 0 = F\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i U_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i U_i \in \ker(F)$$

$$\Downarrow W \cap V = \{0\}$$

$$\sum \lambda_i U_i = 0$$

$$\Downarrow \{U_1, \dots, U_i\} \text{ sind lin. unabh.}$$

$$\underline{\lambda_1 = \dots = \lambda_i = 0}$$

Aus unserer Induktionsannahme

$$F(w) \text{ und } F \upharpoonright V' : V' \rightarrow V'$$

\Rightarrow Es gibt eine adaptive Basis $\{v'_1, \dots, v'_m\}$ von V' ,

welche $\{F(U_1), \dots, F(U_r)\}$ ergänzt.

$F(U_j) = v'_{i_j}$ wobei $i_1 < \dots < i_r$ (sonst ordne v'_j 's um !)

$$v_1 = v'_1$$

$$v_2 = v'_2$$

$$\vdots$$

$$v_{i_1} = v'_{i_1}$$

$$v_{i_1+1} = U_1$$

\rightarrow Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von $V(W \cap V' = \alpha_i)$

$$v_{i_1+2} = v'_{i_1+1}$$

$$\vdots$$

$$v_{i_2} = v'_{i_2-1}$$

$$v_{i_2+1} = v'_{i_2}$$

$$v_{i_2+2} = U_2$$

III.0.23 Folgerung

Jeder nilpotente Endomorphismus lässt sich bezüglich einer geeigneten Basis durch eine Blockmatrix darstellen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

III.0.24 Kor: Jordansche Normalform

Jeder Endomorphismus eines endl. dimensionalen VR, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, lässt sich bezüglich einer geeigneten Basis durch eine Blockmatrix folgender Form darstellen:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & \\ & \lambda_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_1 & 1 & \\ & & & & \lambda_1 & 0 \\ & & & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & & & \lambda_2 \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & & & & & & \lambda_2 \\ & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & \lambda_3 & 1 \\ & & & & & & & & & & & & \lambda_3 \\ & & & & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & & & & \lambda_3 & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

III.0.25 Bew:

Induktion auf n

$k = 1$

$F = 0$ als Endomorphismus \rightarrow Jede Basis ist F-adaptiert

$k \geq 2$

Sei $V' = \ker(F^{k-1}) \subsetneq V$

Sei $\{u_1, \dots, u_j\}$ eine Basis von U . $U \cap V' = \{0\}$ $U + V' = U \oplus V'$ hat eine

Basis: $\{u_1, \dots, u_j, \overbrace{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n}^{\text{Basis von } V'}\}$
 Ergänze diese Basis zu einer Basis von V $\{u_1, \dots, u_j, u_{j+1}, \dots, u_r, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$
 $U \subset \mathcal{W} = \text{span}(u_1, \dots, u_j)$
 $W \cap V' = \{0\}$
 $F(W) \subset \ker(F^{k-1}) = V'$ (Weil $F^k = 0$), V' ist F -invariant und
 $F \upharpoonright V' = V' \rightarrow V'$ hat Index $k-1$.

Beh:

$\{0\} = F(\mathcal{W}) \cap \ker(F^{k-2})$
 Sei $u \in F(\mathcal{W}) \cap \ker(F^{k-2})$
 $\Rightarrow F^{k-2}(u) = 0$
 es existiert ein $w \in \mathcal{W} \mid u = F(w)$
 $0 = F^{k-2}(u) = F^{k-1}(w) \rightarrow w \in \ker(F^{k-1} = V')$
 $\Rightarrow w = 0 \Rightarrow U = F(w) = 0$
 $W \cap V' = \{0\}$

Es genügt zu zeigen, dass die Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ F-adaptiert ist.
 z.B.

$$F(v_{j+1}) = V'_{i_1} = F(u_1)$$

$$\Rightarrow u_1 - \underbrace{v_i + 1}_{\in V'} \in \ker(F) \subset V'$$

$$\Rightarrow u_1 \in V' \cap W = \{0\} \text{ Widerspruch !}$$

$F : V \rightarrow V$ Endomorphismus nilpotent Index K .

□

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

$$\chi_A(T) = \det \begin{pmatrix} T-1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & T-2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & T-2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & T-3 \end{pmatrix}$$

$$= (T-2) \det \begin{pmatrix} T-1 & 0 & -1 \\ 1 & T-2 & -1 \\ 1 & 0 & T-3 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(T) = (T-2)^4 \rightarrow 2 \text{ ist der einzige Eigenwert.}$$

$$A - 2E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist } \underline{\underline{\text{Nilpotent}}}$$

$$\ker(A - 2E_4) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid -x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$$

Kapitel IV

Dualität

IV.0.1 Def: Dualraum

Sei V ein K -VR. Der Dualraum V^* ist die Kollektion aller linearen Abbildungen $V \rightarrow K$.

Bem:

V^* ist ein K -Vektorraum.

$F + G : V \rightarrow K, v \mapsto F(v) + G(v)$ ist linear.

$\lambda \in K, \lambda \cdot F : V \rightarrow K, v \mapsto \lambda \cdot F(v)$ ist linear.

IV.0.2 Def: Duale Basis

Sei V endlichdim und wähle eine Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ von V .

Die duale Basis $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, \dots, b_n^*\}$ ist eine Kollektion linearer Abbildungen

derart, dass $b_i^*(b_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Insbesondere:

$$b_i^*(v) = b_i^*\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot b_j\right) = \lambda_i$$

Bem:

Falls V endlichdim. ist, dann ist \mathcal{B}^* eine Basis von V^* und sonst $V \simeq V^*$

IV.0.3 Bew:

$b_1^* \dots b_n^*$ sind linear unabhängig.

warum?

$$\sum \lambda_i b_i^* = 0 \quad (\text{als lin. Abbildung})$$

$$\sum \lambda_i \underbrace{b_i^*}_{\substack{\parallel \\ \lambda_j \text{ für } 1 \leq j \leq n}}(b_j) = 0$$

$$\lambda_1 \cdots = \lambda_n = 0 \rightarrow \text{OK!}$$

$$\text{span}(b_1^* \dots b_n^*) = V^*$$

Sei $F : V \rightarrow K$ beliebig

$$F(b_i) = \lambda_i \in K \quad 1 \leq i \leq n$$

$$(F - \sum \lambda_i b_i^*)(b_j) = 0 = F(b_j) - \underbrace{\sum \lambda_i b_i^*(b_j)}_{\substack{\parallel \\ \lambda_j}} \quad 1 \leq j \leq n$$

Insb. $V \rightarrow V^*$ ist ein Isomorphismus $b_i \mapsto b_i^*$

Achtung: Der Isomorphismus $V \simeq V^*$ hängt von der Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ ab!
 NICHT KANONISCH □

IV.0.4 Lemma: kanonischer Monomorphismus

kanonischer Monomorphismus $V \xrightarrow{\varphi} (V^*)^*, v \mapsto \varphi_v : \quad V^* \rightarrow K, F \mapsto F(v)$

IV.0.5 Bew:

φ ist wohldefiniert

$$\varphi_v(F + G) = (F + G)(v) = F(v) + G(v) \quad \text{Ok!}$$

Zu zeigen: φ ist injektiv (Übungsaufgabe !)

IV.0.6 Korollar:

Wenn V endlichdim. ist, $V \simeq V^*$ *kanonisch*

IV.0.7 Bew:

$$\dim V = \dim V^* = \dim (V^*)^* \Rightarrow \varphi : V \rightarrow (V^*)^* \text{ ist surjektiv}$$

\Rightarrow ein Isomorphismus □

IV.0.8 Lemma: Duale Transformation

Sei V endlich und wähle Basen $\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_i\}$ und $\mathcal{B}' = \{b'_1 \dots b'_i\}$ von V .

Seien \mathcal{B}^* und $(\mathcal{B}')^*$ die entsprechenden dualen Basen in V^* . Wenn A die Transformationsmatrix von \mathcal{B} nach \mathcal{B}' ist, dann ist die Transformationsmatrix \mathcal{B}^* nach $(\mathcal{B}')^*$: $(A^\top)^{-1}$

IV.0.9 Bew:

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b'^*_1 \\ \vdots \\ b'^*_n \end{pmatrix} = X \cdot \begin{pmatrix} b^*_1 \\ \vdots \\ b^*_n \end{pmatrix}$$

Sei X die Transformationsmatrix von \mathcal{B}' nach $(\mathcal{B}')^*$

$$\begin{pmatrix} b^*_1 \\ \vdots \\ b^*_n \end{pmatrix} \cdot (b_1 \dots b_n) = E_n \quad \begin{pmatrix} b'^*_1 \\ \vdots \\ b'^*_n \end{pmatrix} \cdot (b'_1 \dots b'_n) = E_n$$

$$\begin{aligned} E_n &= \begin{pmatrix} b'^*_1 \\ \vdots \\ b'^*_n \end{pmatrix} \cdot (b'_1 \dots b'_n) \\ &= X \cdot \begin{pmatrix} b^*_1 \\ \vdots \\ b^*_n \end{pmatrix} \left(A \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right)^\top \\ &= X \cdot \begin{pmatrix} b^*_1 \\ \vdots \\ b^*_n \end{pmatrix} \cdot (b_1 \dots b_n) \cdot A^\top \end{aligned}$$

$$E_n = X \cdot E_n \cdot A^\top = X \cdot A^\top \Rightarrow X = (A^\top)^{-1}$$

□

IV.0.10 Def: duale Abbildung

Sei $F : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Definiere die duale Abbildung $F^* : W^* \rightarrow V^*$, $\psi \mapsto \psi \circ F$

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{F} & W \\
 & \searrow & \downarrow \Psi \\
 \Psi \circ F & & K \\
 \parallel & & \\
 F^*(\Psi) & &
 \end{array}$$

Bem:

F^* ist linear.

$$F^*(\psi_1 + \psi_2) = (\psi_1 + \psi_2) \circ F = \psi_1 \circ F + \psi_2 \circ F = F^*(\psi_1) + F^*(\psi_2)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xrightarrow{G} & V & \xrightarrow{F} & W \\
 W^* & \xrightarrow{F^*} & V^* & \xrightarrow{G^*} & U^*
 \end{array}$$

von W^* nach U^* :

$$(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$$

IV.0.11 Bew:

$$\Psi \in W^* \quad \Psi \circ W \rightarrow K$$

$$(F \circ G)^*(\Psi) = \underbrace{\Psi \circ F}_{F^*(\Psi)} \circ G = G^* \circ F^*(\Psi)$$

Eigenschaften:

$$\text{a) } (Id_V)^* = Id_{V^*}$$

$$\text{b) } (F + G)^* = F^* + G^*$$

$$\text{c) } (F \circ G)^* = G^* \circ F^*$$

$$\text{d) } (\mu F)^* = \mu F^*$$

$$(Id_v)^*(\psi) = \psi \circ Id_v = \psi$$

Bem:

Falls $F^* = 0$ dann ist $\underline{F=0}$. Feiner, falls V und W endlich dimensional sind.

$$G : W^* \rightarrow V^* \text{ lin. Abbildung}$$

dann gilt es

$$F : V \rightarrow W \text{ so dass } F^* = G$$

IV.0.12 Bew:

$$F^* = 0$$

Sei $v \in V$ fest.

Zu Zeigen: $F(v) = 0$

Definiere

$$\begin{array}{c} W^* \rightarrow \psi \mapsto \psi(F(v)) \\ \parallel \\ F^*(\psi)(v) \end{array}$$

Erinnerung: $W \xrightarrow{\varphi} (W^*)^*, w \mapsto \varphi_{wi} \quad W^* \rightarrow K, \psi \mapsto \psi(w)$
 \parallel
 $\varphi(wi)$

$$\varphi_{F(v)}(\psi) = \psi(F(v) = \underbrace{F^*(\psi)(v)}_{=0} \equiv \underline{\underline{0}}$$

Aber: φ ist ein Monomorphismus

$\Rightarrow F(v) = 0 \Rightarrow F = 0$ als Homomorphismus $V \rightarrow W$

Die Operation:

$$*: \text{Hom}(V, W) \mapsto \text{Hom}(W^*, V^*)$$

Falls V, W endlichdim. sind:

$(V \approx K^n \approx V^* \text{ und } W \approx K^m \approx W^*)$

$$\dim \text{Hom}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$$

$$\parallel \qquad \parallel$$

$$\dim \text{Hom}(W^*, V^*) = \dim V^* \cdot \dim W^*$$

Aber $*: \text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(W^*, V^*)$ ist injektiv \Rightarrow Surjektiv

$$\dim V = n, \quad \dim W = m$$

□

Bem:

$F: V \rightarrow W$ hat Darstellungsmatrix A bezüglich $\mathcal{B} = \{b_i \dots b_n\}$ von V und $\mathcal{B}' = \{b'_i \dots b'_m\}$ von W . Seien \mathcal{B}^* und $(\mathcal{B}')^*$ die entsprechenden dualen Basen aus V^* , und W^* .

Dann hat F^* Darstellungsmatrix A^\top bzgl $(\mathcal{B}')^*$ und \mathcal{B}^* .

IV.0.13 Bew:

$$F \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \vec{x}$$

$$F^* \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\Psi_1 \quad \dots \quad \Psi_m) \circ \underbrace{F \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{A \cdot \vec{x}}$$

Die Darstellungsmatrix von F^* ist:

$$F^* \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_m \end{pmatrix} = (\Psi_1 \quad \dots \quad \Psi_m) \cdot A$$

$$F^* \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_m \end{pmatrix} = \left(A^\top \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_m \end{pmatrix} \right)^\top$$

→ Die Darstellungsmatrix von F^* ist A^\top

IV.0.14 Korollar: zu Duale Basen

$$\det(F^*) = \det(F)$$

Wid: $VK - VR, V^* = \text{Hom}(V, K)$ ist ein $K - VR, V$ endlich dimensional
 $\rightarrow V \simeq V^*, \mathcal{B} = \{b_1 \dots b_n\} \rightarrow \mathcal{B}^*$ duale Basis.
 \parallel
 $\{b_1^* \dots b_n^*\}$

$$b_i^*(b_j) = \delta_{ij} \text{ (kronecker delta)}$$

$$\varphi : V \hookrightarrow (V^*)^* \text{ Monomorphismus, } v \mapsto \varphi_v : V^* \rightarrow K, F \mapsto F(v)$$

Folgerung

$$\forall v \in V \setminus \{0\} \exists F : V \rightarrow K \text{ linear } F(v) \neq 0$$

$$* : \text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(W^*, V^*)$$

$$F : V \rightarrow W \rightarrow F^* \rightarrow V^*$$

$$\underbrace{\Psi}_{W \rightarrow K} \mapsto \underbrace{\Psi \circ F}_{V \rightarrow K}$$

$(F \circ G)^* G^* \circ F^*$
 $(Id_V)^* = Id_{V^*}$
 V, W endlichdim \rightarrow * Isomorphismus

Bem

$F : V \rightarrow V$ Endomorphismus lineare Abb. mit Darstellungsmatrix $A = (a_{ij})$
 bzgl. der Basen $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}, \mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$

$$F^* : W^* \rightarrow V^*$$

$$\mathcal{C}^* = \{c_1^*, \dots, c_m^*\} (\rightarrow) \mathcal{B}^* = \{b_1^*, \dots, b_n^*\}$$

Darstellungsmatrix von F^* bzgl. $\mathcal{C}^* \mathcal{B}^*$ ist A^\top

IV.0.15 Bew:

$$F^*(c_k^*) = \sum_{1 \leq \varphi \leq n} \lambda_{\varphi k} b_\varphi^* \quad (1 \leq k \leq m)$$

$$F(b_i) = \sum_{1 \leq j \leq m} a_{ij} c_j$$

$$\begin{aligned} F^*(c_k^*)(b_i) &= (\sum \lambda_{\varphi k} b_\varphi^*)(b_i) \\ &\parallel \\ C_k^*(F(b_i)) &= \lambda_{ik} \rightarrow A^\top \text{ ist die Darstellungsmatrix} \\ &\parallel \\ C_k^*(\sum a_{ji} c_j) &= a_{ki} \end{aligned}$$

□

IV.0.16 Lemma: V und V^*

$$V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$$

$$\Rightarrow V^* \simeq \bigoplus_{i=1}^n V_i^*$$

$F : V \rightarrow K$ ist eindeutig bestimmt durch $F \upharpoonright V_1, \dots, F \upharpoonright V_n$

IV.0.17 Lemma: Duale Endomorphismen

$F : V \rightarrow V$ Endomorphismus linear

- a) F injektiv $\Leftrightarrow F^*$ surjektiv
- b) F surjektiv $\Leftrightarrow F^*$ injektiv
- c) F Isomorphismus $\Leftrightarrow F^*$ isomorphismus

IV.0.18 Bew:

a) $\boxed{\Rightarrow} F : V \hookrightarrow W$ injektiv.

Zu Zeigen:

$F^*W^* \rightarrow V^* \ni \psi : V \rightarrow K$ surjektiv ist

$$\begin{array}{c} \exists \Theta : W \rightarrow K, \quad F^*(\Theta) = \psi \\ \parallel \\ \Theta \circ F \end{array}$$

$$\forall v \in V, \quad \Theta(F(v)) = \psi(v)$$

$$\underbrace{\text{Im}(F)}_{\simeq V} \subset W \quad (\forall v \in \text{Im}(F) \exists! v \in V, w = F(v))$$

Sei Z ein Komplement von $\text{Im}(F)$ in $W \Rightarrow W = \text{Im}(F) \oplus Z$

$$\forall w \in W : \quad w = \underbrace{w'}_{\in \text{Im}(F)} + \underbrace{\tilde{w}}_{\in Z} \text{ eindeutig}$$

Definiere $\Theta : W \rightarrow K$

$$W = F(v) + \tilde{w} \mapsto \Psi(v) \quad \tilde{w} \in Z$$

Zu Zeigen: Θ ist linear

$$\begin{array}{ccccccc} \Theta(& w_1 & + & w_2 &) = \Theta(& F(v_1) + F(v_2) + \underbrace{\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2}_{\in Z} &) \\ & \parallel & & \parallel & & \parallel & \\ & F(v_1) + \tilde{w}_1 & & F(v_2) + \tilde{w}_2 & & F(v_1 + v_2) & \end{array}$$

$$\Theta(w_1) + \Theta(w_2) = \Psi(w_1) + \Psi(w_2) = \Psi(v_1 + v_2) (= F(v_1 + v_2))$$

$\boxed{\Leftarrow} F^* : W^* \rightarrow V^*$ surjektiv

Zu Zeigen: $F : V \rightarrow W$ injektiv

$$v \in V / F(v) = 0$$

$$\begin{aligned}
v \neq 0 &\Rightarrow \exists \Psi : V \rightarrow K \quad \Psi(v) \neq 0 \\
&\xRightarrow{F^* \text{ surj.}} \exists \Theta : W \rightarrow K \\
&\quad \Theta \circ F = F^*(\Theta) = \Psi \\
&\Rightarrow \underbrace{\Theta(F(v))}_{=0} = \Psi(v) \text{ Wid !} \\
&\quad \text{b) } \boxed{\Rightarrow} F : V \twoheadrightarrow W \text{ surjektiv.}
\end{aligned}$$

Zu Zeigen:

$$F^* : W^* \hookrightarrow V^* \text{ injektiv}$$

Sei $\Theta \in W^*/F^*(\Theta) = 0$ als lineare Abbildung $V \rightarrow K$

$$F^*(\Theta) = \Theta \circ F$$

Zu Zeigen:

$$\forall w \in W, \Theta(w) = 0$$

$$w \in W \rightarrow \exists v \in V / F(v) = w$$

$$F \text{ surjektiv} \quad \Theta(w) = \Theta(F(v)) = F^*(\Theta)(v) = 0$$

$$\boxed{\Leftarrow} F^* : W^* \hookrightarrow V^* \text{ injektiv}$$

Zu Zeigen:

$$F : V \twoheadrightarrow W \text{ surjektiv}$$

Sei Z ein Komplement von $\text{Im}(F)$ in $W = \text{Im}(F) \oplus Z$

Zu Zeigen:

$$Z = \{0\}$$

Sonst sei \mathcal{B} eine Basis von Z .

$$G : W \mapsto K \text{ linear der art}$$

$$G|_{\text{Im}(F)} = 0 \text{ und } G(b) = 1, \forall b \in \mathcal{B}$$

$$\Rightarrow G \in W^*$$

$$F^*(G) = G \circ F : V \rightarrow K$$

Sei $v \in V$

$$G \circ F(v) = G(F(v)) = 0$$

$$\Rightarrow F^*(G) \text{ ist die triviale Abbildung}$$

$$\xRightarrow{F^* \text{ inj.}} G = 0 \text{ als lineare Abbildung}$$

$$\Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow Z = 0 \Rightarrow F \text{ surjektiv}$$

IV.1 Duale Paarung

IV.1.1 Def: Bilinearität

Seien V, W K-VR

Eine Abbildung $\varphi : V \times W \mapsto K$ ist bilinear, wenn φ linear in jeder Koordinate ist.

$$\text{a) } \varphi(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 \varphi(v, w_1) + \lambda_2 \varphi(v, w_2)$$

$$\text{b) } \varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 \varphi(v_1, w) + \lambda_2 \varphi(v_2, w)$$

Bem: !!!

Falls V, W endlich dimensional mit Basen $\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_n\}$ von V und $\mathcal{C} = \{c_1 \dots c_m\}$ von W . Dann ist φ eindeutig bestimmt durch die $(n \times m)$ -Matrix $A = (\varphi(b_i, c_j))$

$$\begin{aligned} \varphi(v, w) &= \varphi\left(\sum_{i \leq n} \lambda_i b_i, \sum_{j \leq m} \mu_j c_j\right) \\ &= \sum_{i \leq n} \lambda_i \varphi\left(b_i, \sum_{j \leq m} \mu_j c_j\right) \\ &= \sum_{i \leq n} \lambda_i \sum_{j \leq m} \mu_j \varphi(b_i, c_j) \\ &= (\lambda_1, \dots, \lambda_n) A \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bem:

Falls wir Basen \mathcal{B}' von V und \mathcal{C}' von W gewählt hätten, dann ist die Darstellungsmatrix von φ

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^\top \cdot A \cdot \mathcal{M}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} &= \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} &= \mathcal{M}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \begin{pmatrix} \mu'_1 \\ \vdots \\ \mu'_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(\lambda_1 \ \dots \ \lambda_n) = (\lambda'_1 \ \dots \ \lambda'_n) \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^\top$$

Folgerung Der Rang hängt nicht von der Auswahl der Basen ab $\Rightarrow \text{Rg}(\varphi)$ ist wohldefiniert.

IV.1.2 Def: Duales Paar

Ein Tripel (V, W, φ) ist ein duales Paar, falls $\dim V = \dim W < \infty$

$\varphi : V \times W \rightarrow K$ ist bilinear und $\text{Rg}(\varphi) = \dim(V) = \dim(W)$

Bem:

Falls $\varphi : V \times W \rightarrow K$ bilinear ist, dann ist $\varphi' : W \times V \rightarrow K \quad (w, v) \mapsto \varphi(v, w)$ auch bilinear.

Aufgabe:

(V, W, φ) duales Paar $\Rightarrow (W, V, \varphi')$ auch!

IV.1.3 Lemma:

V, W fest

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\{\varphi : V \times W \rightarrow K\}}_{\text{bilinear}} & \xleftrightarrow{\text{Bijektion } \Phi} & \underbrace{\{F : V \rightarrow W^*\}}_{\text{linear}} \\ \\ \varphi : V \times W \rightarrow K & \xrightarrow{\Phi} & \begin{array}{l} F_\varphi : V \rightarrow W^* \\ v \mapsto F_\varphi(v) : \quad \begin{array}{l} W \rightarrow K \\ w \mapsto \varphi(v, w) \end{array} \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} \varphi_F : V \times W \rightarrow K \\ (v, w) \mapsto F(v)(w) \end{array} & \xleftarrow{\Phi^{-1}} & F : V \rightarrow W^* \end{array}$$

Ferner, falls $\dim V, \dim W < \infty$:

$$\begin{aligned} (V; W; \varphi) \text{ duales Paar} &\Leftrightarrow F_\varphi : V \rightarrow W^* \text{ Isomorphismus} \\ &\Phi^{-1} \circ \Phi(\varphi)(v, w) \\ &\Phi^{-1} \left(F_\varphi(v) : w \mapsto \varphi(v, w) \right) = \varphi(v, w) \end{aligned}$$

IV.1.4 Wiederholung

$\varphi : V \times W \rightarrow K$ Bilinearform

$\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_n\}$ von V

$\mathcal{C} = \{c_1 \dots c_m\}$ von W

φ hat eine Darstellungsmatrix

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \varphi(b_1, c_1) & \dots & \varphi(b_1, c_m) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(b_n, c_1) & \dots & \varphi(b_n, c_m) \end{pmatrix}$$

$$\varphi\left(\sum \lambda_i b_i, \sum \mu_j c_j\right) = (\lambda_1 \dots \lambda_n) A_\varphi \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}$$

$\text{Rg}(\varphi)$ ist eindeutig bestimmt.

(V, W, φ) ist ein duales Paar, falls $\text{Rg}(\varphi) = \dim V = \dim W < \infty$

$\varphi : V \times W \rightarrow K$ duales Paar

$\rightarrow \varphi' = W \times V \rightarrow K, (w, v) \mapsto \varphi(v, w)$ dual

$$\varphi'(w, v) \mapsto \varphi(v, w)$$

IV.1.5 Bew:

Φ ist Wohldefiniert

$F_\varphi(v) \in W^*$, weil $\varphi(v, ???)$ linear in der Koordinate ist F_φ ist linear weil φ linear in der ersten Koordinate ist (da es Wohldefiniert ist)

$$\Phi^{-1} \circ \Phi = Id_\chi$$

$$\Phi \circ \Phi^{-1} = Id_y$$

Falls V, W endlich dimensional sind, mit Basen $\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_n\}$, $\mathcal{C} = \{c_1 \dots c_m\}$, A_φ die Darstellungsmatrix von φ bzg. dieser Basen

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{ij} \\ \parallel \\ \varphi(b_i, c_j) \end{pmatrix}$$

Sei $\mathcal{C}^* = \{c_1^* \dots c_m^*\}$ die duale Basis zu \mathcal{C} in W^*

$$c_i^*(c_j) = \delta_{ij}$$

Die Darstellungsmatrix von

$$\begin{aligned}
& F_\varphi \text{ bzgl. } \mathcal{B}, \mathcal{C}^* \\
& (\lambda_{kl}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(K) \\
& F_\varphi(b_k) = \sum \lambda_{lk} c_l^* \\
& F_\varphi(b_k)(c_r) = \varphi(b_k, c_r) \\
& \parallel \\
& (\sum \lambda_{lk} c_l^*)(c_r) \\
& = \sum \lambda_{lk} c_l^*(c_r) = \lambda_{rk} \\
& \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots \\ \lambda_{21} & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix} = A_\varphi^\top
\end{aligned}$$

Wobei $\lambda_{12} = \varphi(b_2, c_1) = a_{21}$, und $\lambda_{21} = a_{12}$

$$\text{Rg}(A_\varphi^\top) = \text{Rg}(A_\varphi)$$

$$\begin{aligned}
(V, W, \varphi) \text{ ist ein duales Paar} & \Leftrightarrow \dim V = \dim W = \text{Rg}(A_\varphi) \\
& \parallel \qquad \parallel \\
& \dim W^* \qquad \text{Rg}(A_\varphi^\top)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow F_\varphi \text{ Isomorphismus.}$$

IV.1.6 Kor: Ausartung

Seien V, W endlich dimensional, $\varphi : V \times W \rightarrow K$ Bilinearform. Dann ist (V, W, φ) duales Paar, genau dann wenn φ nicht-ausgeartet ist d.h.

$$\begin{aligned}
a) & \forall v \in V : \varphi(v, w) = 0 \quad \forall w \in W \Rightarrow v = 0 \\
b) & \forall w \in W : \varphi(v, w) = 0 \quad \forall v \in V \Rightarrow w = 0
\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
a) & \forall v \in V \setminus \{0\} : \exists w \in W : \varphi(v, w) \neq 0 \\
b) & \forall w \in W \setminus \{0\} : \exists v \in V : \varphi(v, w) \neq 0
\end{aligned}$$

IV.1.7 Bew:

\Rightarrow

- a) Sei $v \in V$ fest $\varphi(v, w) = 0 \quad \forall w \in W$
 $\varphi(v, w) = F_\varphi(v)(w) \Rightarrow F_\varphi(v) = 0$ als Abbildung $\Rightarrow v = 0$
(V, W, φ) duales Paar $\Rightarrow F_\varphi$ Isomorphismus
- b) (V, W, φ) duales Paar $\Rightarrow (W, V, \varphi')$ auch dual $\Rightarrow F_{\varphi'} : W \rightarrow V^*$ Isomorphismus
 $v \in V, \varphi(v, w) = 0 \quad \forall w \in W$
 $\varphi(v, w) = 0 = \varphi'(w, v) = F_{\varphi'}(w)(v) \Rightarrow F_{\varphi'}(w) = 0 \Rightarrow w = 0$

\Leftarrow Es genügt zu zeigen, dass $F_\varphi : V \rightarrow W^*$ Isomorph ist:
Eigenschaft:

- a) $\Rightarrow F_\varphi$ Isomorph (bijektiv)
 $\Rightarrow \dim V \leq \dim W = \dim W$
es genügt zu zeigen, dass $\dim V = \dim W^*$ (da F_φ injektiv) und, dass
daraus folgt: (W, V, φ') ($\varphi' =$ bilinearform)
- b) $\Rightarrow F_{\varphi'} : W \rightarrow V^*$ injektiv $\Rightarrow \dim W = \dim V^* = \dim V$
 $\Rightarrow \dim V = \dim W$

□

Beispiel:

$$(\mathbb{R}^2, <, >)$$

$$< x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n > = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}.$$

$$< (x_1 \dots x_n), (1, 0 \dots 0) > = x_1 = 0$$

IV.1.8 Kor: duale Basen

Sei (V, W, φ) ein duales Paar. Für jede Basis $\{c_1 \dots c_n\}$ aus W gibt es eine Basis $\{b_1 \dots b_n\}$ aus V , welche „dual“ zu $\{c_1 \dots c_n\}$ ist:

$$\varphi(b_i, c_j) = \delta_{ij}$$

IV.1.9 Bew:

Für $\{c_1 \dots c_n\}$ aus W eine Basis. Sei $\{c_1^* \dots c_n^*\}$ die duale Basis aus W^*

$$F_\varphi : V \rightarrow W^* \text{ Iso}$$

Sei $b_i = F_\varphi^{-1}(c_i^*)$, $\{b_1 \dots b_n\}$ ist eine duale Basis von V

$$\varphi(b_i, c_j) = \underbrace{F_\varphi(b_i)}_{\parallel c_i^*}(c_j) = \delta_{ij}$$

□

IV.1.10 Def: Orthogonales Komplement

Sei (V, W, φ) ein duales Paar. $U \subset V$ Unterraum von V .
Definiere

$$U^\perp = \{w \in W \mid \varphi(u, w) = 0 \ \forall u \in U\}$$

U^\perp ist ein UVR von W

Bem:

U^\perp ist ein Unterraum von W .

$$(0)^\perp = V$$

$$V^\perp = \{0\}, \text{ weil } \varphi \text{ nicht-ausgeartet ist!}$$

$$U \subset V$$

$$(U^\perp)^\perp = \{v \in V \mid \forall w \in U^\perp \ \varphi(v, w) = 0\} = U$$

$$\parallel$$

$$U$$

IV.1.11 Bew:

$$U \subset (U^\perp)^\perp$$

$$u \in U \Rightarrow u \in (U^\perp)^\perp \Rightarrow \forall w \in U^\perp, \varphi(u, w) = 0$$

Sei $v \notin U$.

z.zeigen: $v \notin (U^\perp)^\perp$

Es gibt $G : V \rightarrow K$ derart, $G \upharpoonright U = 0$, $G(v) = 1$

$$G \in V^* \simeq W \text{ } F_{\varphi'} \text{ (Isomorphismus)}$$

$$\Rightarrow \exists w \in W \quad F_{\varphi'}(w) = G$$

D.h. $\forall z \in V \quad G(z) = \varphi'(w, z) = \varphi(z, w)$

$u \in U$

$$0 = G(u) = \varphi(u, w) \rightarrow w \in U^\perp$$

$$1 = G(u) = \varphi(u, w) \rightarrow u \notin (U^\perp)^\perp$$

□

IV.1.12 Lemma: zu Quotientenräumen

Sei (V, W, φ) ein duales Paar $U \subset V$ ein UVR

Dann ist $(V/U, U^\perp, \tilde{\varphi})$ duales Paar, wobei $\tilde{\varphi}(v + u, w) = \varphi(u, w)$

Insbesondere gilt

$$\dim V = \dim U + \dim U^\perp$$

Bew:

Übungsaufgabe

$$(V/U, U^\perp, \varphi^\perp) \quad \text{ein duales Paar}$$

\Downarrow

$$\underbrace{\dim V/U}_{\dim V - \dim U} = \dim U^\perp$$

IV.1.13 wiederholung

V, W endlich, (V, W, φ) duales Paar

$$\Leftrightarrow \dim V = \dim W = \text{Rg}(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow F_\varphi : V \rightarrow W^* \text{ Isom.}$$

$$v \mapsto F_\varphi(v), \quad W \rightarrow K, \quad w \mapsto \varphi(v, w)$$

$\Leftrightarrow \varphi$ nicht-ausgeartet ist: $\varphi(v, -) : W \rightarrow K$ die Null Abbildung $\Rightarrow v = 0$

$\varphi(-, w) : V \rightarrow K$ die Null Abbildung $\Rightarrow w = 0$

$$U \subset V \text{ UR, } U^\perp = \{w \in W \mid \varphi(u, w) = 0\} \text{ UR}$$

$$\rightarrow (U^\perp)^\perp = U \rightarrow \dim V = \dim U + \dim U^\perp$$

$$\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_n\} \text{ Basis von } V$$

ist dual zu der Basis von $W \{c_1 \dots c_n\}$ falls $\varphi(b_i, c_j) = \delta_{ij}$

IV.1.14 Def: Adjungierte

Sei (V, W, φ) duales Paar und $G : W \rightarrow W$ Endomorphismus.
Der *adjungierte Endomorphismus* $G^\top : V \rightarrow V$ wird definiert als

$$G^\top : F^{-1} \circ G^* \circ F_\varphi$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{F_\varphi^{-1}} & W^* \\ G^\top \uparrow & & \uparrow G^* \\ V & \xrightarrow{F_\varphi} & W^* \end{array} \quad \begin{array}{c} W \\ \downarrow G \\ W \end{array}$$

$$G^*(\Phi) = \Phi \circ G \quad \Phi : W \rightarrow K$$

Bem:

G^* ist eindeutig bestimmt durch die Gleichung

$$\varphi(G^\top(v), w) \stackrel{(*)}{=} \varphi(v, G(w)) \quad \forall v \in V, \forall w \in W$$

IV.1.15 Bew: Eindeutigkeit

Falls $G : V \rightarrow V$ die selbe Eigenschaft erfüllt

$$\begin{aligned} \varphi(G_1(v) - G^*(v), w) &= \varphi(G(v), w) - \varphi(G^\top(v), w) \\ &\quad \parallel \quad \parallel \\ &= \varphi(v, G(w)) - \varphi(v, G(w)) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G_1(v) = G_1^\top \Rightarrow G_1 = G^\top \quad \forall v \in V, \forall w \in W \quad \varphi \text{ nicht-ausgeartet}$$

zu Zeigen: G^\top die Eigenschaft (x) besitzt.

Seien $v \in V, w \in W$

$$\varphi(v, G(w)) = F_\varphi(v)(G(w))$$

$$\varphi(v, G(w)) = \underbrace{\overbrace{F_\varphi(v)}^{\in W^*} \circ G(w)}_{G^*(F_\varphi(v))}$$

$$\begin{aligned} G^\top(v) &= v_1 \\ \parallel & \\ F_\varphi^{-1} \circ G^* \circ F_\varphi(v) &\Leftrightarrow G^* \circ F_\varphi(v) = F_\varphi(w) \end{aligned}$$

$\rightarrow \forall w \in W :$

$$\begin{array}{rcl} & \varphi(G^*(v), w) & \\ & \parallel & \\ F_\varphi(v_1)(w) & = & \varphi(v_1, w) \\ & \parallel & \\ \underbrace{G^* \circ F_\varphi(v)}_{\in W^*}(w) & = & \varphi(v, G(w)) \end{array}$$

□

IV.2 Euklidische Räume

IV.2.1 Def: Symmetrie

Eine Bilinearform $\varphi : V \times V \rightarrow K$ ist symmetrisch, falls $\varphi = \varphi'$

$$\Leftrightarrow \forall u, v \in V : \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$$

Bem:

Seien \mathcal{B}, \mathcal{C} Basen von V und A die Darstellungsmatrix von φ bzgl. \mathcal{B}, \mathcal{C} .

$$\varphi \text{ symmetrisch} \Leftrightarrow A = A^\top = (\varphi(b_i, c_j))$$

IV.2.2 Bew:

\Rightarrow Siehe Übungsblatt

\Leftarrow

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= u^\top \cdot A \cdot v \\ &= (A^\top \cdot u)^\top \cdot v \\ &= v^\top \cdot \left((A^\top \cdot u)^\top \right)^\top \\ &= v^\top \cdot \underbrace{A^\top}_{A} \cdot u = \varphi(v, u) \end{aligned}$$

Bem:

φ symmetrisch

\Rightarrow Der Begriff der Orthogonalität ist wohldefiniert und vor allem symmetrisch

$$\begin{aligned}
u \perp v &\Leftrightarrow \varphi(u, v) = 0 \\
&\Updownarrow \\
v \perp u &\Leftrightarrow \varphi(v, u) = 0
\end{aligned}$$

Beispiel

\mathbb{R}^n

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{x}, \vec{y}) &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ symmetrisch} \\
\varphi(\vec{x}, \vec{x}) &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0
\end{aligned}$$

IV.2.3 Def: Quadratische Form

Sei $\varphi : V \times V \rightarrow K$ symmetrische Bilinearform.

Die zugehörige quadratische Form:

$$\begin{aligned}
g : V &\rightarrow K \\
v &\mapsto \varphi(v, v)
\end{aligned}$$

Anmerkung:

$\dim V = n$

Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis $\rightarrow \varphi$ hat Darstellungsmatrix $\underline{\underline{A}}$ bzgl. \mathcal{B} .

$$\begin{aligned}
g(v) \text{ auch } q(v) &= \varphi(v, v) = \varphi\left(\sum \lambda_i b_i, \sum \lambda_j b_j\right) \\
&= (\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \\
&= \sum a_{ij} \lambda_i \lambda_j
\end{aligned}$$

Folgerung:

(char $K \neq 2$)

Jede symmetrische Bilinearform ist durch ihre quadratische Form eindeutig

bestimmt.

$$\begin{aligned} q(u+v) &= \varphi(u+v, u+v) \\ &= \varphi(u, u) + \varphi(v, u) + \varphi(u, v) + \varphi(v, v) \\ &= \underbrace{\varphi(u, u)}_{q(u)} + \underbrace{\varphi(v, v)}_{q(v)} + 2\varphi(u, v) \\ q(u-v) &= \dots = q(u) + q(v) - 2\varphi(u, v) \end{aligned}$$

Insb:

$$\varphi(u, v) = \frac{q(u+v) - q(u-v)}{4}$$

IV.2.4 Def: Definitheit

Sei V ein endlich dimensionaler \mathbb{R} -VR. und $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ Symmetrische Bilinearform. Wir sagen, φ ist:

1. positiv semidefinit, falls $\varphi(u, u) \geq 0 \ \forall u \in V$
2. negativ semidefinit, falls $\varphi(u, u) \leq 0 \ \forall u \in V$
3. positiv definit, falls φ pos. semidefinit ist und $\varphi(v, v) > 0 \ \forall v \in V \setminus \{0\}$
4. negativ definit, falls φ neg. semidefinit ist und $\varphi(v, v) < 0 \ \forall v \neq 0$
5. indefinit sonst.

Beispiele:

- (a) Standard Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n ist positiv def.
- (b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1 y_1$ ist positiv semidefinit aber nicht pos.def. $\varphi((0, 1), (0, 1)) = 0$
- (c) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1 y_1 - x_2 y_2$ indefinit

Bem:

φ ist posit (semi)-def., $-\varphi$ ist neg (semi)-def.

IV.2.5 Def: Skalarprodukt

Ein Skalarprodukt auf einem endlichdimensionalen \mathbb{R} -VR V ist eine *positiv definite symmetrische Bilinearform*: $\varphi(u, v) \xrightarrow{\text{bijektion ???}} \langle u, v \rangle$

IV.2.6 Def: Euklidischer Raum

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist ein euklidischer Raum, wenn V ein \mathbb{R} -VR endlichdimensional und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist.

IV.2.7 Def: Norm

Eine Norm auf einem \mathbb{R} -VR V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass:

1. $\|v\| \geq 0, \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \|v\|$
3. Dreiecksungleichung $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$(V, \|\cdot\|)$ ein normierter \mathbb{R} -VR ist

Beispiele: \mathbb{R}^n

(a) Euklidische Norm $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

(b) $\|\vec{x}\|_{\infty} = \sum |x_i|$

(c) $\|\vec{x}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

IV.2.8 Def: Norm über Skalarprodukt

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Raum und definiere $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$,
 $v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$ wohldefiniert. Wir wollen Zeigen, dass es eine Norm auf V
induziert.

IV.2.9 Lemma:

(Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung)

$$\forall v, w \in V$$

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

IV.2.10 Bew:

Falls $w = 0 \rightarrow \text{ok!}$

OBdA ist $w \neq 0 \rightarrow \|w\| > 0$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig

$$0 \leq \langle v - \lambda w, v - \lambda w \rangle = \|v\|^2 + \lambda^2 \|w\|^2 - 2\lambda \langle v, w \rangle$$

Insb:

$$2\lambda \langle v, w \rangle \leq \|v\|^2 + \lambda^2 \|w\|^2$$

Falls

$$\lambda = \frac{\langle v, w \rangle}{\underbrace{\|w\|^2}_{\neq 0}} \in \mathbb{R}$$

$$2 \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2} \leq \|v\|^2 + \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2} \Rightarrow \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2} \leq \|v\|^2$$

$$\rightarrow \langle v, w \rangle^2 \leq \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$$

$$\rightarrow |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

□

Folgerung:

(V, \langle, \rangle) euklidischer Raum

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle} \end{aligned}$$

ist eine Norm.

IV.2.11 Bew:

1) klar

$$2) \|\lambda \cdot v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle v, v \rangle} = |\lambda| \cdot \|v\|$$

3) Es genügt zu zeigen, dass $\|u + v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + 2\langle u, v \rangle \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \\ &\leq (\|u\| + \|v\|)^2\end{aligned}$$

IV.2.12 Def: Winkel zwischen Vektoren

(V, \langle, \rangle) euklidischer Raum

$$-1 \leq \underbrace{\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}}_{\cos \theta} \leq 1$$

$\theta \in [0, \pi]$ eindeutig bestimmt.

θ ist der Winkel zwischen u und v

Bem:

$u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow$ der Winkel $\frac{\pi}{2}$ ist $u \uparrow \rightarrow v$

IV.2.13 Wiederholung

$\varphi : V \times V \rightarrow K$ symmetrisch gdw $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$

$\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V

$A = (\varphi(b_i, b_j))$ Darstellungsmatrix von φ

φ symmetrisch $\Leftrightarrow A = A^\top$

$g(v) = g(\sum (\lambda_i b_i)) = \sum a_{ij} \lambda_i \lambda_j$

$\text{char } k \neq 2 \rightarrow q$ bestimmt φ

$\varphi(u, v) = \frac{q(u+v) - q(u-v)}{4}$

φ symmetrisch ist positiv definit, falls $\varphi(u, u) = q(u) \geq 0 \leftarrow$ Körper ist \mathbb{R}

$q(u) = \varphi(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0$

Ein Skalarprodukt auf einem \mathbb{R} -VR V ist eine symmetrische positiv definite

Bilinearform $\varphi(u, v) \rightarrow \langle u, v \rangle$

$\|v\| = \sqrt{q(v)} = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ Norm.

1) $\|v\| \geq 0 (= 0 \Leftrightarrow v = 0)$

2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

$$3) \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $|\langle v, v \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

$$-1 < \frac{\langle v, w \rangle}{\underbrace{\|v\| \|w\|}_{\substack{\| \\\cos \theta, \theta \in [0, \pi]}}} < 1$$

θ ist Winkel zwischen v und w .

$v \perp w$ (orthogonal)

$$\Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$$

\Leftrightarrow Der Winkel ist $\frac{\pi}{2}$

IV.2.14 Satz: (des Pythagoras)

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ endlichdimensionaler Raum

$$v \perp w \Leftrightarrow \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

IV.2.15 Bew:

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + 2 \langle v, w \rangle \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \langle v, w \rangle \\ \text{mit: } v \perp w &\Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0 \Leftrightarrow \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 \end{aligned}$$

IV.2.16 Def: Orthogonal- und Orthonormalbasis

$\varphi : V \times V \rightarrow K$ symmetrische Bilinearform

Ein orthogonales System bzgl. φ ist eine Kollektion M von Vektoren $0 \notin M$ $u, v \in M$ verschieden $\varphi(u, v) = 0$

Ein orthonormales System M ist eine Kollektion von Vektoren

$$\varphi(u, v) = \begin{cases} 0 & v \neq u \\ 1 & u = v \end{cases}$$

Dementsprechend definieren wir Orthogonalbasis und Orthonormalbasis (ONB)

Beispiel: Standardbasis $\{o_1, \dots, o_k\}$ $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

standard skalarprodukt

IV.2.17 Satz: φ symmetrisch \Rightarrow diagonalisierbar

(Char(K) $\neq 2$)

Jede Symmetrische Bilinearform φ auf einem endlich dimensionalen K -VR V lässt sich bei einer geeigneten Basisauswahl durch eine Diagonalmatrix darstellen. Ferner ist φ nicht-ausg. \Leftrightarrow kein Eigenwert der Matrix null ist.

Bem:

Es genügt zu zeigen, dass (V, φ) eine Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ besitzt welche aus paarweise orthogonalen Vektoren besteht.

Dann ist die Darstellungsmatrix von φ bzgl. $\{b_1, \dots, b_n\}$

$$\begin{pmatrix} \varphi(b_1, b_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi(b_2, b_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi(b_n, b_n) \end{pmatrix}$$

Sei $q : V \rightarrow K \ v \mapsto \varphi(u, v)$ die zugehörige quadratische Form

Falls $q(v) = 0 \ \forall v \in V$

$\rightarrow \varphi(u, v) = 0 \ \forall u, v \in V$

\rightarrow Jede Basis von V besteht aus paarweise orthogonalen Vektoren.

Sonst, existiert $b_1 \in V \setminus g(b_1) \neq 0, \quad F : V \rightarrow K, \ v \mapsto \varphi(v, b_1)$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \varphi(b_1, b_1) \end{array}$$

$$\text{Im}(F) = K \text{ als } \underline{K\text{-VR}}$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ \dim \ker(F) = n-1 \end{array}$$

$$\ker(F) = \{v \in V \setminus \varphi(v, b_1) = 0\} = \{v \in V \setminus v \perp b_1\} = \text{Span}(b_1)^\perp$$

Induktion auf die Dimension von $V \Rightarrow$ Es existiert eine Basis $b_1 \dots b_n$ von $\ker(F)$ welches aus paarweise orthogonal Vektoren besteht.

Die Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ ist eine orthogonale Basis von V.

Bem:

Die Eigenwerte der Matrix hängen nicht von der Basis ab

\rightarrow Eigenwerte sind $\varphi(b_1, b_1), \dots, \varphi(b_n, b_n)$

$$\begin{array}{cc} \parallel & \parallel \\ \mu_1 & \mu_n \end{array}$$

\Rightarrow Angenommen, dass

$$\mu_j = \varphi(b_j, b_j) = 0$$

wäre

$$\varphi(b_j, b_i) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

i beliebig

$\varphi(b_j, -) : V \rightarrow K$ ist die triviale Abbildung \Rightarrow Wid! $b_j \neq 0$

\Leftarrow Sei $v \in V \setminus \{0\}$ beliebig.

Zu Zeigen: $\varphi(v, -) : V \rightarrow K$ nicht trivial ist

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \rightarrow \exists i / \lambda_i \neq 0$$

$$\varphi(v, b_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi(b_j, b_i) = \overset{0}{\cancel{\lambda_j}} \overset{0}{\cancel{\varphi(b_j, b_i)}} = \lambda_i \varphi(b_i, b_i) \neq 0$$

IV.2.18 Kor:

(char $k \neq 2$)

Falls in K jedes Element ein Quadrat ist, dann lässt sich jede symmetrische

Bilinearform durch eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ darstellen.

IV.2.19 Bew:

Es existiert eine Orthogonalbasis $\{b_1, \dots, b_n\}$ für $\varphi : V \times V \rightarrow K$.

$$c_i = \begin{cases} \frac{b_i}{\sqrt{\varphi(b_i, b_i)}} & \varphi(b_i, b_i) \neq 0 \\ b_i & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\{c_1, \dots, c_n\}$ ist immer noch eine Basis.

OBdA können wir annehmen, dass c_1, \dots, c_n ist so umgeordnet, dass

$$\begin{aligned}\varphi(c_i, c_i) &= 1 & i &\leq k \\ \varphi(c_j, c_j) &= 0 & j &> k\end{aligned}$$

Darstellungsmatrix von φ bzgl. $\{c_1, \dots, c_n\}$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} k \text{ mal} \\ \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} n - k \text{ mal} \end{array}$$

IV.2.20 Kor: (Sylvester)

Jede Symm. Bilinearform φ auf einem endlich dimensionalen \mathbb{R} -VR läßt sich bei geeigneter Basisauswahl durch eine Matrix der form

$$\left(\begin{array}{c} \begin{array}{c} | 1 \\ p = \diagdown \quad \ddots \\ \quad \quad 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} | -1 \\ q = \diagdown \quad \ddots \\ \quad \quad -1 \end{array} \\ \begin{array}{c} | 0 \\ r = \diagdown \quad \ddots \\ \quad \quad 0 \end{array} \end{array} \right)$$

darstellen. Ferner hängen die Zahlen p, q und r nur von φ ab.

IV.2.21 Bew:

Sei $\{b_1 \dots b_n\}$ eine Orthogonalbasis für φ

$$c := \begin{cases} \frac{b_1}{\sqrt{\varphi(b_1, b_1)}} & \text{falls } \varphi(b_i, b_i) > 0 \\ \frac{b_i}{\sqrt{-\varphi(b_i, b_i)}} & \text{falls } \varphi(b_i, b_i) < 0 \\ b_i & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach Umordnen der Darstellungsmatrix

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \} p \\ \\ \\ \} q \\ \\ \} r \end{matrix}$$

□

Bem:

$\varphi \upharpoonright \text{Span}(c_1, \dots, c_p) \times \text{Span}(c_1, \dots, c_p)$ ist positiv definit.

IV.2.22 Bew: falsch:

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i c_i \sum_{i=1}^p \lambda_i c_i \right) = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \varphi(c_i, c_j) = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2$$

Sei $U \subset V$ der größte UR von V derart, dass $\varphi \upharpoonright U \times U$ positiv definit ist.

$\text{span}(c_1, \dots, c_p) \subset U$

zu zeigen $\boxed{p = \dim U}$ ✓

Sonst $U \cap \text{span}(c_{p+1}, \dots, c_n) \neq 0$

Sei

$$0 \neq v \in U \cap \text{span}(c_{p+1}, \dots, c_n) \quad v = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i c_i$$

da $v \in U \varphi \upharpoonright_{U \times U}$ positiv definit

$$0 \leq \varphi(v, v) = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i^2 \overbrace{\varphi(c_i, c_i)}^{\leq 0} \leq 0$$

$\Rightarrow v = 0 \rightarrow$ Wid.

g, r bestimmen

$\text{Rg}(\varphi) = \underline{p} + q \rightarrow$ ist eindeutig bestimmt

$r = n - \text{Rg}(\varphi) \rightarrow$ eindeutig bestimmt

IV.2.23 Def: Signatur

Signatur $(\varphi) = \underline{\underline{q - p}}$

IV.2.24 Wiederholung

$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto 2x_1x_2 - y_1y_2$

φ ist positiv definit auf $\text{span}((1, 0)) \quad \varphi((\lambda, 0), (\lambda, 0)) = 2\lambda^2 \geq 0$

φ ist positiv definit auf $\text{span}((1, 1)) \quad \varphi((\lambda, \lambda), (\lambda, \lambda)) = \lambda^2 \geq 0$

φ ist nicht positiv definit auf $\text{span}((1, 0)) + \text{span}((1, 1)) = \mathbb{R}^2$

$\varphi((0, 1), (0, 1)) = -1$

IV.2.25 Bew: Kor Sylvester

Wir wollen p eindeutig bestimmen.

φ ist positiv definit auf $\text{span}(c_1, \dots, c_p)$

Sie

$$h = \max\{\dim(U) \mid U \subset V \varphi \upharpoonright_{U \times U} \text{ pos. definit ist}\}$$

Sei

$U \subset V$ UR der Dimension h sodass $\varphi \upharpoonright_{U \times U}$ pos. definit ist.

Wir zeigen: $U \cap \text{span}(c_{p+1}, \dots, c_n) = \{0\}$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\quad} \underbrace{\dim(U)}_{\parallel 0} + \underbrace{\dim \text{span}(c_{p+1}, \dots, c_n)}_{\parallel n-p} = \underbrace{\dim U + \dim \text{span}(c_{p+1}, \dots, c_n)}_{\substack{\subset V \\ \leq n}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow h \leq p$

Kapitel V

Unitäre Räume

V.0.1 Def:

Ein unitärer Raum V ist ein \mathbb{C} -VR zusammen mit einem komplexen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \mapsto \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften

1. $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$, wobei $\overline{a + bi} = a - bi$
2. $\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$
3. $\langle \lambda \cdot v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$
4. $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$ und ferner $\langle v, v \rangle > 0$ für $v \neq 0$

Beispiel \mathbb{C}^n $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$

Bem:

Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist nicht bilinear sondern **hermitesch sesquilinear**

$$\langle v, \lambda w + \mu w' \rangle = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle + \bar{\mu} \langle v, w' \rangle$$

V.0.2 Bew:

$$\begin{aligned} \langle v, \lambda w + \mu w' \rangle &= \overline{\langle \lambda w + \mu w', v \rangle} \\ &= \bar{\lambda} \overline{\langle w, v \rangle} + \bar{\mu} \overline{\langle w', v \rangle} = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle + \bar{\mu} \langle v, w' \rangle \end{aligned}$$

Bem:

Für einen unitären Raum V ist

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

$$1) \quad \|v\| \geq 0 \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

$$2) \quad \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$3) \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Bem:

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ unitärer Raum $v \perp w \Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$

$\left. \begin{array}{l} \text{Orthogonalität} \\ \text{Orthogonales System} \\ \text{Orthonormales System} \\ \text{Orthogonalbasis} \end{array} \right\} \longrightarrow \text{Wir können die Begriffe hier } \underline{\text{verwenden}}.$

V.0.3 Def: Orthonormalbasis

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Raum. Eine Orthonormalbasis von V ist eine Basis $\mathcal{B} = \{b_i\} \mid b_i \perp b_j \quad i \neq j \quad \|b_i\| = 1$

Bem:

Jedes orthogonales System ist linear unabhängig.

V.0.4 Bew:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i &= 0 \\ \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i, b_j \rangle &= 0 \\ \parallel & \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle b_i, b_j \rangle &= \sum \lambda_i \langle b_i, b_j \rangle \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

□

V.0.5 Lemma: Orthonormalbasen

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Raum und $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine ONB. Dann

1.

$$\forall v \in V \quad v = \sum_{i=1}^n \langle v, b_i \rangle b_i$$

2.

$$\begin{aligned} v &= \sum \lambda_i b_i \\ w &= \sum \mu_i b_i \end{aligned} \Rightarrow \langle v, w \rangle = \sum \lambda_i \bar{\mu}_i$$

3. $F : V \rightarrow V$ Endomorphismus. Dann ist die Darstellungsmatrix A von F bzgl. $\{b_1, \dots, b_n\}$ gegeben durch $a_{ij} = \langle F(b_j), b_i \rangle$

V.0.6 Bew:

$$1) \quad v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \quad \langle v_i, b_j \rangle = \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i \langle b_i, b_j \rangle}_{\substack{\parallel \\ \lambda_j}}$$

$$2) \quad \langle \sum \lambda_i b_i, \sum \mu_j b_j \rangle = \sum_{i,j} \lambda_i \bar{\mu}_j \underbrace{\langle b_i, b_j \rangle}_{\substack{\delta_{ij} \\ \parallel}} = \sum \lambda_i \bar{\mu}_i$$

$$3) \quad A = \left(\underbrace{a_{ij}}_{F(b_1) \dots F(b_n)} \right) \quad a_{ij} \text{ ist die Koordinate von } F(b_j) \text{ bzgl. } b_i$$

$$\Downarrow 1)$$

$$a_{ij} = \langle F(b_j), b_i \rangle$$

V.0.7 Satz: (Geom-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren)

Sei V ein euklidischer oder unitärer Raum. Gegeben $\{v_1, \dots, v_n\}$ lin. unabh. dann gibt es ein orthonormalsystem $\{e_1, \dots, e_n\}$ derart, dass

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n) = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$$

Insb., falls V endlichdim ist, besitzt V eine ONB.

V.0.8 Bew:

Zwei Schritte:

- Aus $v_1 \dots v_n$ konstruieren wir eine Basis welche aus orthogonalen Vektoren besteht
- Dann normalisieren: $e_1 \dots e_n$ werden rekursiv definiert

$$e'_1 = v_1 \xrightarrow{v_1 \neq 0} e_1 = \frac{e'_1}{\|e'_1\|}$$

Angenommen $e_1 \dots e_n$ wurden konstruiert, so dass

$$e_i \perp e_j \quad i \neq j \quad \|e'_1\| = 1$$

und $\text{span}(e_1 \dots e_n) = \text{span}(v_1 \dots v_n)$ Wir wollen

$$e_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle v_{k+1}, e_i \rangle e_i$$

$e'_{k+1} \neq 0 \rightarrow$ sonst ist $v_{k+1} \in \text{span}(e_1, \dots, e_n) = \text{span}(v_1, \dots, v_n)$ Wid! □

Setze

$$e_{k+1} = \frac{e'_{k+1}}{\|e'_{k+1}\|}$$

zu zeigen:

$$e_{k+1} \perp e_{j \leq k} :$$

$$\begin{aligned} \langle e_{k+1}, e_j \rangle &= \frac{1}{\|e'_{k+1}\|} \langle v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle v_{k+1}, e_i \rangle e_i, e_j \rangle \\ &= \frac{1}{\|e'_{k+1}\|} \left(\langle v_{k+1}, e_j \rangle - \underbrace{\sum_{i=1}^k \langle v_{k+1}, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle}_{\langle v_{k+1}, e_j \rangle} \right) = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\text{span}(e_1 \dots e_{k+1}) = \text{span}(v_1 \dots v_{k+1})$$

$$e_{k+1} \in \text{span}(v_{k+1}, e_1 \dots e_k) = \text{span}(v_{k+1}, v_1 \dots v_k)$$

$$v_{k+1} = \|e_{k+1}\| e_{k+1} + \sum_{j=1}^k \langle v_{k+1}, e_j \rangle e_j \in \text{span}(e_1 \dots e_{k+1})$$

V.0.9 Kor:

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklidisch oder unitär endlichdimensional und $D \subset V$ ein Orthornormalsystem. Dann \exists ONB $B \supset D$

Bem:

Sei $D = \{v_1, \dots, v_k\}$ und ergänze zu einer Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V . \rightarrow Konstruiere eine ONB $\{e_1, \dots, e_n\}$

zu zeigen: $e_i = v_i \quad i \leq k$

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = v_1$$

Annahme $e_j \equiv v_j \quad j \leq i$

$$e_{i+1} = \frac{v_{i+1}}{\|v_{i+1}\|} = v_{i+1} - \sum_{j=1}^i \underbrace{\langle v_{i+1}, e_j \rangle}_{\substack{\parallel \\ 0}} e_j$$

V.0.10 Def:

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklidisch und unitär

Zwei Teilmengen A, B von V sind Orthogonal, $A \perp B$ falls $v \perp w \quad \forall v \in A, \forall w \in B$

Bem:

$A \perp B \Leftrightarrow \text{span}(A) \perp \text{span}(B)$

in Blatt 7 Aufgabe 3 schon gezeigt

V.0.11 Def:

$A \subset B$ Teilmenge

$$\begin{aligned} A^\perp &= \{v \in V \mid \{v\} \perp A\} \\ &= \{v \in V \mid \forall w \in A \quad v \perp w\} \end{aligned}$$

Bem:

A^\perp ist ein Unterraum von V

Bem:

$$A^\perp = \text{span}(A)^\perp$$

V.0.12 Bew:

$\boxed{\subset}$

$$\begin{aligned} A^\perp \perp A & \quad \Downarrow \\ A^\perp \subset \text{span}(A)^\perp & \Leftrightarrow A^\perp \perp \text{span}(A) \end{aligned}$$

$\boxed{\supset}$

$$\begin{aligned} v \in \text{span}(A)^\perp & \Rightarrow \forall w \in \overbrace{\text{span}(A)}^{\supset A} \\ v \perp w & \Rightarrow \forall w \in A \quad v \perp w \\ & \Rightarrow v \in A^\perp \end{aligned}$$

V.0.13 Satz:

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklidisch oder unitär und $U \subset V$ endlichdim. UR

$$\Rightarrow V = U \oplus U^\perp$$

V.0.14 Bew:

$$U \cap U^\perp = \{0\}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht ausgeartet !

Es genügt zu zeigen, dass $V = U + U^\perp$

1. Fall $U = \{0\} \rightarrow \text{ok!}$

2. Fall $U \neq \{0\}$

$\Downarrow U$ endlichdim. Gram-Schmidt

$$\exists \{b_1, \dots, b_n\} \quad \text{ONB von } U$$

Sei $v \in V$ beliebig.

$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^k \langle v, b_i \rangle b_i}_{\in U} + \overbrace{\left(v - \sum_{i=1}^k \langle v, b_i \rangle b_i \right)}^w$$

Wir müssen zeigen, dass $w \in U^\perp$

Es genügt, wenn wir zeigen, dass $w \perp b_i \quad 1 \leq i \leq k$

$$\begin{aligned}
 \langle w, b_i \rangle &= \langle v - \sum_{j=1}^k \langle v, b_j \rangle b_j, b_i \rangle \\
 &= \langle v, b_i \rangle - \sum_{j=1}^k \overbrace{\langle v, b_j \rangle}^{\in K} \underbrace{\langle b_j, b_i \rangle}_{\substack{\parallel \\ 0 \quad 1 \\ i \neq j \quad i = j}} \\
 &= \langle v, b_i \rangle - \langle v, b_i \rangle = 0
 \end{aligned}$$

V.0.15 Lemma:

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklidisch oder unitär

$U \subset V$ endlichdim. UR

$$(U^\perp)^\perp = U$$

V.0.16 Bew:



$$U \perp U^\perp \Rightarrow U \subset (U^\perp)^\perp$$



Sei $v \in (U^\perp)^\perp$

$$\text{mit } V = U \oplus U^\perp \Rightarrow v = u + w \quad u \in U \quad w \in U^\perp$$

Es genügt zu zeigen, dass $w = 0 \Rightarrow v = u \in U$

$$w = \underbrace{v}_{\in (U^\perp)^\perp} - \underbrace{u}_{\in U \subset (U^\perp)^\perp} \in \underbrace{(U^\perp)^\perp \cap U^\perp}_{=0} \Rightarrow \text{ok !}$$

V.0.17 Def:

Sei $U \subset V$ UR

Wir definieren die orthogonale Projektion von v auf U als den Vektor $u \in U$

derart, dass $v = u + \underbrace{w}_{\in U^\perp}$

Bem:

Falls u existiert \Rightarrow ist er eindeutig bestimmt.

$$\underbrace{u_2}_{\in U} + \underbrace{w_2}_{\in U^\perp} = v = \underbrace{u_1}_{\in U} + \underbrace{w_1}_{\in U^\perp} \Rightarrow u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in \underbrace{U \cap U^\perp}_{=\{0\}}$$

Bem:

Falls $U \subset V$ endlichdim. \Rightarrow ist die Projektion auf U wohldefiniert

$\forall v \in V$ existiert $Pr|_U(v)$ derart, dass $v = Pr|_U(v) + \underbrace{w}_{\in U^\perp}$

V.0.18 Satz:

Sei $U \subset V$ Unterraum, $v \in V$ $u \in U$

sind folgende Aussagen äquivalent

a) $Pr|_U(v) = u$

b) $\forall u_1 \in U \setminus \{0\} \quad ||v - u_1|| > ||v - u||$

V.0.19 Bew:

$a) \Rightarrow b)$ Es kommt.

$b) \Rightarrow a)$ $v = u + (v - u)$

Es genügt zu zeigen, dass $v - u \in U^\perp$

Sonst, $\exists u' \in U \mid \lambda = \langle v - u, u' \rangle \neq 0 \Rightarrow u' \neq 0 \Rightarrow$ OBdA $||u'|| = 1$

Sei $u + \lambda \cdot u' \in U \setminus \{u\}$

$$\begin{aligned} ||v - u||^2 &< ||v - \underbrace{(u + \lambda u')}_{\parallel}||^2 \\ &= ||v - u - \lambda u'||^2 \\ &= ||v - u||^2 - \underbrace{\lambda \langle u', v - u \rangle}_{=\bar{\lambda}} - \underbrace{\bar{\lambda} \langle v - u, u' \rangle}_{=\lambda} + \underbrace{\lambda \bar{\lambda} ||u'||^2}_{=1} \\ &= ||v - u||^2 - \underbrace{\lambda \bar{\lambda}}_{||\lambda||^2} - \lambda \bar{\lambda} + \lambda \bar{\lambda} < ||v - u||^2 \quad \text{Wid !} \end{aligned}$$

Kapitel VI

Selbsadjungierte Endomorphismen und Hauptachsentransformationen

Bem:

Sei (V, \langle, \rangle) ein endlichsim. euklidischer Raum

$\rightarrow (V, V, \langle, \rangle)$ ein duales Paar.

Sei $v \in V$ $\langle v, - \rangle : V \rightarrow \mathbb{R}$ ist nichttrivial, falls $v \neq 0$

$$\langle v, v \rangle = ||v||^2 \neq 0, \text{ falls } v \neq 0$$

Falls V endlichdim. unitärer Raum ist, dann ist

$$\langle v, - \rangle : V \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{nichttrivial !!}$$

$$\langle v, \lambda w + \mu w' \rangle \neq \lambda \langle v, w \rangle + \mu \langle v, w' \rangle$$

$$\text{aber } = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle + \bar{\mu} \langle v, w' \rangle$$

Lösung:

Wir definieren eine neue Struktur auf V als \mathbb{C} -VR

$$\lambda *_{\text{konj}} v = \bar{\lambda} \cdot v$$

Somit ist $(V, V_{\text{konj}}, \langle, \rangle)$ ein Duales Paar weil

$$\langle v, v \rangle = ||v||^2 \neq 0 \text{ für } v \neq 0$$

Folgerung:

Sei V endlichdim. unitärer oder euklidischer Raum. Jeder Endomorphismus

$F : V \rightarrow V$ besitzt einen adjungierten Endomorphismus $F^t : V \rightarrow V$, sodass $\forall v, w \in V$

$$\langle v, F(w) \rangle = \langle F^t(v), w \rangle$$

Alternative Beschreibung:

Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine ONB von V .

Seien $v, w \in V \rightarrow w = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$
 \parallel
 $\langle w, b_i \rangle$

$$\begin{aligned} \langle v, F(w) \rangle &= \langle v, \sum_{i=1}^n \langle w, b_i \rangle b_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{\langle w, b_i \rangle} \langle v, F(b_i) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle v, F(b_i) \rangle \langle b_i, w \rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^n \langle v, F(b_i) \rangle \cdot b_i, w \rangle = \langle F^t(v), w \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F^t(v) = \sum_{i=1}^n \langle v, F(b_i) \rangle b_i$$

VI.0.1 Def:

Sei $K = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}

$$a_{ij} = \mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$$

Die adjungierte Matrix \mathcal{A}^* von \mathcal{A} ist die Matrix

$$\mathcal{A}^* = (\overline{a_{ji}})$$

Bem:

$$\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^t$$

Leicht zu zeigen:

$$(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$$

$$\begin{aligned}
(\lambda \cdot \mathcal{A})^* &= \bar{\lambda} \cdot \mathcal{A}^* \\
(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* &= \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^* \\
(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})^* &= \mathcal{B}^* \cdot \mathcal{A}^*
\end{aligned}$$

Widerholung:

$(V, \langle \cdot \rangle)$ unitärer/euklidischer Raum

$A \subset V$ Teilmenge

$$A^\perp = \{v \in V \mid \forall w \in A \langle v, w \rangle = 0\}$$

Unterraum

$$U \text{ UR von } V \rightarrow U \cap U^\perp = \{0\}$$

Insbesondere falls U endlich dim. $\Rightarrow V = U \oplus U^\perp$

Orthogonale Projektion auf U

$$Pr|_U : V \rightarrow U, v \mapsto u \text{ / } v = u + w \in U^\perp$$

$$\forall u \in U \quad u_1 \neq Pr|_U(v) \Leftrightarrow \|v - u_1\| > \|v - u\|$$

$$F : \underbrace{V}_{\text{endlichdim.}} \rightarrow V \text{ Endomorphismus,}$$

dann ex.

$$F^\top : V \rightarrow V \text{ adjungierter Endomorphismus}$$

$$\langle v, F(w) \rangle = \langle F^\top(v), w \rangle \quad \forall v, w \in V$$

VI.0.2 Def:

$k = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$$

Die adjungierte Matrix A^* ist $A^* = (\overline{a_{ji}})$

$$K = \mathbb{R} \rightarrow A^* = A^\top$$

$$(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$$

$$(\lambda \cdot A)^* = \bar{\lambda} \cdot A^*$$

Bem:

Falls A regulär ist, dann ist $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$ weil $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$ $\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$

VI.0.3 Lemma:

Sei $F : V \rightarrow V$ Endomorphismus eines euklidischen bzw. unitären endlichdim. Raumes V und A die Darstellungsmatrix von F bzgl. der orthonormalen Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ und $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_n\}$

Dann hat $F^\top : V \rightarrow V$ die Darstellungsmatrix A^* bzgl. \mathcal{D} und \mathcal{B} .

VI.0.4 Bew:

$$F^\top(d_i) = \sum_{j=1}^n \langle F^\top(d_i), b_j \rangle \cdot b_j$$

$$F^\top \rightarrow C = (c \cdot j) \quad F^\top(d_j) = \sum c_{ij} b_j \quad \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}$$

$$A = (c_{ij}) \rightarrow F(b_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} d_i \quad \begin{matrix} \parallel \\ \langle F(b_j), d_i \rangle \end{matrix}$$

$$\overline{a_{ij}} = \overline{\langle F(b_j), d_i \rangle} = \langle d_i, F(b_j) \rangle \stackrel{\text{Def. von } F^\top}{=} \underline{\langle F^\top(d_i), b_j \rangle} = c_{ji}$$

□

VI.0.5 Def:

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ endlichdim., euklidisch, unitär

$F : V \rightarrow V$ ist normal, falls

$$F \circ F^\top = F^\top \circ F$$

VI.0.6 Prop:

Folgende Aussagen sind Äquivalent:

a) $F : V \rightarrow V$ ist normal

b) $\forall v, w \in V \quad \langle F(v), F(w) \rangle = \langle F^\top(v), F^\top(w) \rangle$

VI.0.7 Bew:

$$\boxed{a) \Rightarrow b)}$$

$$\begin{aligned} \langle F(v), F(w) \rangle &\stackrel{\text{Def von } F^\top}{=} \langle F^\top(F(v)), w \rangle \stackrel{\text{Normalitat}}{=} \\ &= \langle F(F^\top(v)), w \rangle \\ &= \overline{\langle w, F(F^\top(v)) \rangle} \\ &\stackrel{\text{Def von } F^\top}{=} \overline{\langle F^\top(w), F^\top(v) \rangle} \\ &= \langle F^\top(v), F^\top(w) \rangle \end{aligned}$$

$$\boxed{b) \Rightarrow a)}$$

Zu Zeigen: $F \circ F^\top(v) = F^\top \circ F(v) \quad \forall v \in V$

Oder quivalent dazu, dass

$$F \circ F^\top(v) - F^\top \circ F(v) = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \forall w \in V \quad &\langle F \circ F^\top(v) - F^\top \circ F(v), w \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow &\langle F \circ F^\top(v), w \rangle = \langle F^\top \circ F(v), w \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle F^\top \circ F(v), w \rangle &= \langle F(v), F(w) \rangle \\ \parallel &\parallel \\ \langle F \circ F^\top(v), w \rangle &= \langle F^\top \circ F(v), F^\top(w) \rangle \\ \parallel &\parallel \\ \overline{\langle w, F \circ F^\top(v) \rangle} &= \overline{\langle F^\top(w), F^\top(v) \rangle} \end{aligned}$$

Bem:

$$F : V \rightarrow V$$

mit Darstellungsmatrix A bzg. der ONB $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ von V

$F^\top : V \rightarrow V$ hat Darstellungsmatrix A^*

$$\begin{aligned} F^\top \circ F &\rightarrow A^* \cdot A \\ \parallel &\parallel \\ F \circ F^\top &\rightarrow A \cdot A^* \end{aligned}$$

VI.0.8 Def:

Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$ ist normal, falls $A^* \cdot A = A \cdot A^*$

Folgerung:

F ist normal gdw. F eine normale Darstellungsmatrix bzgl JEDER ONB besitzt.

VI.0.9 Lemma:

$F : V \rightarrow V$ Endomorphismus normal.

$v \in V$ ist ein Eigenvektor von F bzgl λ gdw v ein Eigenvektor von F^\top bzgl. $\bar{\lambda}$

VI.0.10 Bew:

der Abstand von $F(v)$ und $\lambda \cdot v$

$$\begin{aligned}
 \|F(v) - \lambda \cdot v\|^2 &= \langle F(v) - \lambda v, F(v) - \lambda v \rangle \\
 &= \langle F(v), F(v) \rangle - \bar{\lambda} \langle F(v), v \rangle - \lambda \langle v, F(v) \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle \\
 &\quad \parallel \qquad \qquad \parallel \qquad \qquad \parallel \\
 &\quad \langle F^\top(v), F^\top(v) \rangle \quad \langle F^\top(v), v \rangle \quad \langle F^\top(v), v \rangle \\
 &= \langle F^\top(v), F^\top(v) \rangle - \overline{\lambda \langle F^\top(v), v \rangle} - \langle F^\top(v), \bar{\lambda} \cdot v \rangle + \langle \bar{\lambda} v, \bar{\lambda} v \rangle \\
 &= \langle F^\top(v), F^\top(v) \rangle - \bar{\lambda} \langle v, F^\top(v) \rangle - \langle F^\top(v), \bar{\lambda} v \rangle + \langle \bar{\lambda} v, \bar{\lambda} v \rangle \\
 &= \langle F^\top(v) - \bar{\lambda} v, F^\top(v) - \bar{\lambda} v \rangle \\
 &= \|F^\top(v) - \bar{\lambda} \cdot v\|^2
 \end{aligned}$$

VI.0.11 Satz:

Sei $F : V \rightarrow V$ derart, dass $\chi_F(T)$ in Linearfaktoren zerfällt. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- a) F ist normal
- b) Es existiert eine ONB $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ von V , welche aus Eigenvektoren von F besteht.

Folg

Jeder dnormaler Endomorphismus eines unitärem/euklidischen Raumes ist diagonalisierbar

VI.0.12 Bew: (satz)

$a) \Rightarrow b)$ Induktion auf $\dim(V)$

$\dim V = 1$ $\rightarrow F$ besitzt einen Eigenvektor $v \neq 0$ zum Eigenwert λ

$\|v\| \neq 0 \rightarrow \frac{v}{\|v\|}$ ist auch ein Eigenvektor zu λ

$\left\{ \frac{v}{\|v\|} \right\}$ ist eine ONB von V !

$\dim V \geq 2$

$\chi_F(T)$ zerfällt in Linearfaktoren $(T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$

Sei $b_i \in V$ Eigenvektoren zum Eigenwert λ_1 .

$\neq 0$

OBdA $\|b_i\| = 1$

$$V = \text{span}(b_i) \oplus \underset{\text{span}(b_i)^\perp}{U} \quad \dim U = \underline{n-1}$$

□

VI.0.13 Beh:

U ist F -invariant

Beweis: Nächste Woche

$F|_U: U \rightarrow U$ ist ein Endomorphismus

VI.0.14 Beh:

U ist F^\top -invariant und:

$$(F|_U)^\top = F^\top|_U$$

VI.0.15 Bew:

Wenn U F^\top -invariant ist wie oben:

$$\forall v_1, v_2 \in U \quad \langle u_1, F(u_2) \rangle = \langle F^\top(u_1), u_2 \rangle$$

$$\parallel \qquad \parallel$$

$$F|_U(u_2) \qquad F^\top|_U(u_1)$$

\Downarrow

Aus der Eindeutigkeit von adjungierten Endomorphismus folgt

$$F^\top \upharpoonright_U = (F \upharpoonright_U)^\top$$

Insb ist $F \upharpoonright_U$ normal

\Downarrow Induktion

$\exists \{b_2, \dots, b_n\}$ eine ONB von U welche aus Eigenvektoren von $F \upharpoonright_U$ besteht.

$\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ ist eine ONB von Eigenvektoren.

$b) \Rightarrow a)$ Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine ONB von Eigenvektoren von F

$$F(b_i) = \lambda_i \cdot b_i$$

Setze $G : V \rightarrow V$, $b_i \mapsto \overline{\lambda_i} \cdot b_i \rightarrow G$ ist eindeutig bestimmt

$$\begin{aligned} G \circ F(b_i) &= G(\lambda_i b_i) = \lambda_i G(b_i) \\ &= \lambda_i \overline{\lambda_i} b_i = \overline{\lambda_i} (\lambda_i b_i) \\ &= \overline{\lambda_i} (F(b_i)) = F(\overline{\lambda_i} b_i) = F(G(b_i)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G \circ F = F \circ G \text{ auf } V$$

Aber $G = F^\top$!! weil b_i Eigenvektor von F^\top zum Eigenwert $\overline{\lambda_i}$ ist.

\Downarrow

$$F^\top(b_i) = \overline{\lambda_i} b_i = G(b_i) \Rightarrow G = F^\top$$

Widerholung:

$F : V \rightarrow V$ Endomorphismus endlichdim. euklidisch, unitär

$\langle F^\top(v), w \rangle = \langle v, F^\top(w) \rangle \exists F^\top : V \rightarrow V$ adjungierter Endomorphismus zu F ,
derart:

$\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ ONB von $V \rightarrow F^\top$ hat Darstellungsmatrix

$A = a_{ij}$ Darstellungsmatrix von F bzgl. \mathcal{B} $A^* = (\overline{a_{ji}})$ bzgl. \mathcal{B}

F ist normal, falls

$$F \circ F^\top = F^\top \circ F$$

$$\Leftrightarrow A \cdot A^* = A^* \cdot A$$

$$\Leftrightarrow \langle F(v), F(w) \rangle = \langle F^\top(v), F^\top(w) \rangle$$

$\longrightarrow v \in V \setminus \{0\}$ ist Eigenvektor von F bzgl. λ

$$\Leftrightarrow v \text{ Eigenvektor von } F^\top \text{ bzgl. } \overline{\lambda}$$

VI.0.16 Satz

$F : V \rightarrow V$ Endomorphismus | $\chi_F(T)$ zerfällt in Linearfaktoren

F ist normal \Leftrightarrow Es existiert eine ONB von V , welche aus Eigenvektoren von F besteht.

ende Wiederholung.

VI.0.17 Def:

$F_V \rightarrow V$ ist selbstadjungiert, falls $F = F^\top$ oder äquivalent dazu,

$$\langle v, F(w) \rangle = \langle F(v), w \rangle \quad \forall v, w \in V$$

Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$ ist hermitesch, falls $A^* = A$

Wid:

V euklidischer untärer endlichdim. Raum $F : V \rightarrow V$ selbst adjungiert falls $F = F^*$

F selbstadj. \Leftrightarrow Die Darstellungsmatrix bzg. $\begin{pmatrix} \text{einer} \\ \text{jeder} \end{pmatrix}$ ONB hermitesch bzw. symmetrisch ist.

A symmetrisch reelle $(n \times n)$ -Matrix $\rightarrow \chi_A$ zerfällt in Linearfaktoren über $\underline{\mathbb{R}}$
 A ist dann diagonalisierbar \rightarrow Hauptachsentransformationssatz.

V euklidischer endlichdim. Raum, $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ symmetrische bilinearform
 \rightarrow Hauptachsen von φ sind die Elemente einer ONB von V sodass φ Darstellungsmatrix in Diagonalform besitzt.

VI.0.18 Kor: Spektralsatz

$F : V \rightarrow V$ selbstadjungiert $\rightarrow \exists$ ONB von V welches aus Eigenvektoren von F besteht.

VI.0.19 Bew:

V unitär \rightarrow ok, weil χ_F in Linearfaktoren über \mathbb{C} zerfällt

V euklidisch \rightarrow Die Darstellungsmatrix von F ist symmetrisch \rightarrow diagonalisierbar $\rightarrow \chi_F$ zerfällt in Linearfaktoren über \mathbb{R} \square

Bem

Falls $K = \mathbb{R}$ ist, dann ist hermitesch = symmetrisch

Bem

Sei \mathcal{B} eine ONB von V

$F : V \rightarrow V$ ist selbstadjungiert

\Leftrightarrow Die Darstellungsmatrix von F bzgl. \mathcal{B} hermitesch ist.

Bem:

Selbstadjungierte Endomorphismen sind normal.

VI.0.20 Lemma:

Falls V euklidisch, unitär, endlichdim. ist $F : V \rightarrow V$ selbstadjungiert, dann gilt:

- a) Alle Eigenwerte von F reell sind
- b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind

VI.0.21 Bew:

- a) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von F und besteht $v \in V \setminus \{0\}$ / $F(v) = \lambda \cdot v$

$$\begin{array}{ccc} \langle \lambda \cdot v, v \rangle = \langle F(v), v \rangle & \stackrel{F=F^\top}{=} & \langle v, F(v) \rangle = \langle v, \lambda \cdot v \rangle \\ \parallel & & \parallel \\ \lambda \cdot \|v\|^2 \neq 0 & & \bar{\lambda} \cdot \|v\|^2 \end{array} \Rightarrow \langle v, w \rangle = 0$$

- b) Seien $\underbrace{\lambda \neq \mu}_{\rightarrow \in \mathbb{R}}$ derart, dass $F(v) = \lambda \cdot v$ $F(w) = \mu \cdot w$ $v, w \in V \setminus \{0\}$

$$\begin{array}{ccc} \langle v, \mu \cdot w \rangle = \langle v, F(w) \rangle & \stackrel{F=F^\top}{=} & \langle F(v), w \rangle = \langle \lambda \cdot v, w \rangle \\ \parallel & & \parallel \\ \mu \langle v, w \rangle \Rightarrow \langle v, w \rangle = 0 & & \lambda \langle v, w \rangle \end{array}$$

□

VI.0.22 Satz: Hauptachsentransformation

Sei V ein euklidischer endlichdim. Raum und $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Es existiert eine ONB $\{b_1, \dots, b_n\}$ von V derart, dass φ durch eine Diagonalmatrix bzgl. $\{b_1, \dots, b_n\}$ dargestellt wird.

Zuerst zwei Hilfslemmata:

VI.0.23 Lemma 1:

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ hermitesch

$\rightarrow A$ ist Diagonalisierbar und alle Eigenwerte sind reell

VI.0.24 Bew:

A hermitesch, $\chi_A(T)$ zerfällt in Linearfaktoren über $\mathbb{C} \rightarrow F_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$,
 $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ F_A ist selbstadjungiert und normal \Rightarrow Alle Eigenwerte sind reell

VI.0.25 Lemma 2:

Jede symmetrische $n \times n$ Matrix über \mathbb{R} ist diagonalisierbar.

VI.0.26 Bew:

Wir betrachten A als Matrix über \mathbb{C} . A ist hermitesch $\rightarrow A$ über \mathbb{C} diagonalisierbar. Alle Eigenwerte von A sind reell $\Rightarrow A$ ist über \mathbb{R} diagonalisierbar

VI.0.27 Bew: Hauptachsentransformationssatz

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ ONB von V .

Definiere:

$$F : V \rightarrow V, \quad e_i \mapsto \sum_{j=1}^n \varphi(e_i, e_j) \cdot e_j$$

$$\langle e_i, F(e_i) \rangle = \langle e_i, \sum_{n=1}^n \varphi(e_j, e_n) \cdot e_n \rangle = \sum_{k=1}^n \varphi(e_j, e_n) \langle e_i, e_k \rangle = \varphi(e_j, e_i)$$

$v = \sum \lambda_i e_i \quad w = \sum \mu_j e_j$ beliebig.

Zu Zeigen: $\langle F(v), w \rangle = \langle v, F(w) \rangle \Rightarrow F$ ist selbstadj.

$$\begin{aligned}
\langle v, F(w) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j F(e_j) \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j \underbrace{\langle e_i, F(e_j) \rangle}_{\varphi(e_i, e_j)} \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(e_i, \underbrace{\sum_{j=1}^n \mu_j e_j}_w) = \varphi(\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i}_v, w) = \varphi(v, w) \\
\langle v, F(w) \rangle &= \varphi(v, w) \\
\parallel &\parallel \\
\langle F^\top(v), w \rangle &= \varphi(w, v) \text{ da } \varphi \text{ symm.} \\
\Downarrow & \\
F = F^\top & \\
\Downarrow & \\
F \text{ ist selbsadjungiert} & \\
\langle F(v), w \rangle &= \langle w, F(v) \rangle
\end{aligned}$$

Die Darstellungsmatrix von F bzgl. $\{e_1, \dots, e_n\}$ ist symmetrisch. Aus dem lemma 2 folgt, dass F diagonalisierbar ist $\rightarrow \chi_F$ zerfällt in Linearfaktoren $\Downarrow F$ selbstadj.

$\exists \{b_1, \dots, b_n\}$ ONB von Eigenvektoren von F

Es genügt zu zeigen, dass die Darstellungsmatrix von φ bzgl. $\{b_1, \dots, b_n\}$ in Diagonalform ist.

$$\begin{aligned}
\varphi(b_i, b_j) &= \langle b_i, F(b_j) \rangle = \lambda_j \langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} \lambda_i & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
\parallel & \\
\lambda_j b_j &
\end{aligned}$$

□

VI.0.28 Korollar:

Jede symmetrische $(n \times n)$ Matrix über \mathbb{R} ist diagonalisierbar.

Jede hermitesche Matrix über \mathbb{C} ist diagonalisierbar.

Zurück zu positiv definite Matrizen

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ symmetrisch} \quad v^\top \cdot A \cdot v \geq 0 \quad = 0 \text{ gdw } v = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a > 0 \quad ac - b^2 > 0$$

VI.0.29 Satz: Sylvester

Eine symmetrische $(n \times n)$ -Matrix A über \mathbb{R} ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A echt positiv sind.

VI.0.30 Bew:

\Rightarrow Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^n und betrachte die von A definierte Bilinearform $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (v, w) \mapsto v^\top A w$. Aus dem Hauptsatz zur orthogonaler Transformation folgt, dass es eine ONB $\{b_1, \dots, b_n\}$ diagonalisierbar ist.

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \overset{\varphi(b_1, b_1)}{\parallel} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \underset{\parallel}{\varphi(b_n, b_n)} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind die Eigenwerte von A

Insb. ist $0 < \varphi(b_i, b_i) = \lambda_i$ weil $b_i \neq 0$

\Leftarrow Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine ONB, so dass A bzgl. $\{b_1, \dots, b_n\}$ in Diagonalform ist:

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$v \rightarrow \sum_{i=1}^n \mu_i b_i$$

$$(\mu_1 \ \dots \ \mu_n) (S^{-1} A S) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i^2 \geq 0 \quad = 0 \Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_n = 0 \Rightarrow v = 0$$

□

Korollar (Sylvester)

Für eine symm. $(n \times n)$ -Matrix A über \mathbb{R} sind folgende Aussagen äquivalent:

- A ist positiv definit
- Alle Eigenwerte von A sind echt positiv
- Alle Hauptminoren

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n$$

Wiederholung:

V euklidischer unitärer endlichdim. Raum $F : V \rightarrow V$ selbst adjungiert falls $F = F^*$

F selbstadj. \Leftrightarrow Die Darstellungsmatrix bzgl. $\begin{pmatrix} \text{einer} \\ \text{jeder} \end{pmatrix}$ ONB hermitesch bzw. symmetrisch ist.

A symmetrisch reelle $(n \times n)$ -Matrix $\rightarrow \chi_A$ zerfällt in Linearfaktoren über \mathbb{R}
 A ist dann diagonalisierbar \rightarrow Hauptachsentransformationssatz.

V euklidischer endlichdim. Raum, $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ symmetrische bilinearform
 \rightarrow Hauptachsen von φ sind die Elemente einer ONB von V sodass φ Darstellungsmatrix in Diagonalform besitzt.

VI.0.31 Kor: Spektralsatz

$F : V \rightarrow V$ selbstadjungiert $\rightarrow \exists$ ONB von V welches aus Eigenvektoren von F besteht.

VI.0.32 Bew:

V unitär \rightarrow ok, weil χ_F in Linearfaktoren über \mathbb{C} zerfällt

V euklidisch \rightarrow Die Darstellungsmatrix von F ist symmetrisch \rightarrow diagonalisierbar $\rightarrow \chi_F$ zerfällt in Linearfaktoren über \mathbb{R}

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch

$$A \text{ positiv definit} \Leftrightarrow v^\top \cdot A \cdot v \geq 0 \quad = 0 \text{ gdw } v = 0$$

$$A \text{ positiv definit} \Leftrightarrow \text{Alle Eigenwerte von } A \text{ sind echt positiv}$$

□

VI.0.33 Bew: Satz von Sylvester

$\boxed{1 \Leftrightarrow 2}$ ok!

$\boxed{1 \Rightarrow 3}$ Die Bilinearform $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto v^\top A w$ ist positiv definit

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i}_{\text{Eigenwerte}} > 0$$

$\forall U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi|_U : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ auch positiv definit.

Sei $U = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$

$$\varphi|_U : U \times U \rightarrow \mathbb{R}, (v, w) \mapsto v^\top \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \cdot w$$

$$\Rightarrow \det \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Induktion auf n

$\underline{n=1}$, $A = (\lambda) \rightarrow \lambda > 0$

$$\left. \begin{aligned} x^\top \lambda x &= \lambda x^2 \geq 0 \\ &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{matrix} A \text{ ist} \\ \text{positiv} \\ \text{definit} \end{matrix}$$

Für $A = \text{span}(e_1 \dots e_{n+1})$ Die Darstellungsmatrix von $\varphi|_U$ hat auch alle Hauptminoren exht positiv $\Rightarrow \varphi|_U$ positiv definit

$\xrightarrow{\text{Hauptachsen.}}$ Es gibt eine Orthonormalbasis $\{b_1, \dots, b_n\}$ von V sodass φ Diagonalform bzg. $\{b_1, \dots, b_n\}$ hat

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} \varphi(b_1, b_1) \\ \parallel \\ \lambda_1 \end{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{matrix} \lambda_n \\ \parallel \\ \varphi(b_n, b_n) \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Falls φ nicht positiv definit wäre, gäbe es: $\begin{matrix} \lambda_i < 0 \\ \parallel \\ \varphi(b_i, b_i) \end{matrix}$

$$\Downarrow \det(A) = \prod \lambda_i > 0$$

$$\exists j \neq i \quad \lambda_i < 0$$

$$\parallel$$

$$\varphi(b_i, b_i)$$

$$\left. \begin{array}{l} b_i = \sum_{k=1}^n \mu_k^i e_k \\ b_j = \sum_{k=1}^n \mu_k^j e_k \end{array} \right\} \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ nicht beide Null,}$$

$$\text{sodass } v = \alpha b_i + \beta b_j \in \text{span}(e_1 \dots e_{n+1})$$

$$\parallel$$

$$U$$

$$\mu'_n = 0 \rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{array}$$

$$0 = \mu_n^j \text{ genau so sonst } \begin{array}{l} \alpha = \mu_n^j \\ \beta = \mu_n^i \end{array}$$

$$b_i \rightarrow (\mu_1^i, \dots, \mu_n^i)$$

$$b_j \rightarrow (\mu_1^j, \dots, \mu_n^j)$$

$$\alpha b_i + \beta b_j \rightarrow (\dots, \alpha \mu_n^i + \beta \mu_n^j)$$

$$\varphi(v, v) = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 0) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\geq 0} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Weil $\varphi|_U$ positiv aus der Induktion

$$\varphi(v, v) = \varphi(\alpha b_i + \beta b_j, \alpha b_i + \beta b_j) = \underbrace{\alpha^2 \lambda_i + \lambda \beta^2}_{< 0} + 0$$

\Rightarrow Widerspruch !

VI.1 Orthogonale Abbildungen und Drehungen

VI.1.1 Def:

V euklidischer bzw. unitär. $F : V \rightarrow V$ ist orthogonal, falls $\forall v, w \in V :$
 $\langle v, w \rangle = \langle F(v), F(w) \rangle$

VI.1.2 Lemma:

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1.) $F : V \rightarrow V$ orthogonal
- 2.) $\forall v \in V \quad \|v\| = \|F(v)\|$
- 3.) Für jedes Orthonormalesystem $\{e_1, \dots, e_k\}$ ist $\{F(e_1) \dots F(e_k)\}$ auch ein Orthonormalesystem

VI.1.3 Bew:

$1 \Rightarrow 2$

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle F(v), F(v) \rangle = \|F(v)\|^2$$

$2 \Rightarrow 3$ Es genügt zu zeigen, dass $F(e_i) \perp F(e_j) \quad \forall i \neq j$

1^{er} Fall: V ist euklidisch

$$\langle F(e_i + e_j), F(e_i + e_j) \rangle = \|F(e_i + e_j)\|^2 = \|e_i + e_j\|^2 = \langle e_i + e_j, e_i + e_j \rangle = 2$$

$$\begin{aligned} & \langle F(e_i + e_j), F(e_i + e_j) \rangle \\ &= \langle F(e_i), F(e_i) \rangle + \langle F(e_j), F(e_j) \rangle + \langle F(e_i), F(e_j) \rangle + \langle F(e_j), F(e_i) \rangle \\ & \quad \begin{array}{ccc} \parallel & \parallel & \parallel \\ \|F(e_i)\|^2 & \|F(e_i)\|^2 & \langle F(e_i), F(e_j) \rangle \\ \parallel & \parallel & \\ 1 & 1 & \end{array} \end{aligned}$$

$$\text{Insb: } 2 \langle F(e_i), F(e_j) \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad F(e_i) \perp F(e_j)$$

\nparallel
0

2^{er} Fall:

V unitär

$$\begin{aligned} & \begin{array}{ccc} & F_1 & \\ & \parallel & \\ \|e_i + i e_j\|^2 & = & \|F(e_i + i e_j)\|^2 \\ & \parallel & \\ 2 = \underbrace{\|e_i\|^2}_1 + \underbrace{\|i e_j\|^2}_1 & & \begin{array}{c} \parallel \\ \langle F(e_i) + i F(e_j), F(e_i) + F(e_j) \rangle \\ \parallel \end{array} \\ & \underbrace{\|F(e_i)\|^2}_1 + \underbrace{\|F(e_j)\|^2}_1 + i (\langle F(e_j), F(e_i) \rangle - \langle F(e_i), F(e_j) \rangle) \\ & \langle F(e_i), F(e_j) \rangle = \langle F(e_j), F(e_i) \rangle \\ & \quad \parallel \end{array} \end{aligned}$$

Wir machen wie im ersten Teil $\Leftarrow \overline{\langle F(e_i), F(e_j) \rangle} \in \mathbb{R}$

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ $v, w \in V$

Zu Zeigen: $\langle v, w \rangle = \langle F(v), F(w) \rangle$

$V = 0 \rightarrow \text{ok!}$

Sonst, $v \neq 0 \rightarrow 1^{\text{er}}$ Fall $\{v, w\}$ lin. abh. $\xrightarrow{v \neq 0} \lambda v \quad \lambda \in \mathbb{K}$

$v \neq 0 \rightarrow \frac{v}{\|v\|}$ orthonormal $\Rightarrow F(\frac{v}{\|v\|})$ auch

$\|F(\frac{v}{\|v\|})\| = 1 \Rightarrow \|v\| = \|F(v)\|$

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle \\ &= \bar{\lambda} \|v\|^2 = \bar{\lambda} \|F(v)\|^2 \\ &= \bar{\lambda} \langle F(v), F(v) \rangle = \langle F(v), \lambda F(v) \rangle \\ &= \langle F(v), F(w) \rangle \end{aligned}$$

$\boxed{2^{\text{er}} \text{ Fall:}}$ v, w lin. unabh.

$G = S \rightarrow \exists b_1, b_2$ orthonormalsystem $\text{span}(v, w) = \text{span}(b_1, b_2)$

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

$$w = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2$$

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \lambda_1 \bar{\mu}_1 \|b_1\|^2 + \lambda_2 \bar{\mu}_2 \|b_2\|^2 \\ &\quad \underbrace{\|F(b_1)\|^2 \quad \|F(b_2)\|^2}_{\|F(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2), F(\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2)\rangle} \end{aligned}$$

(letzter schritt weil $F(b_1) \perp F(b_2)$)

VI.1.4 Wiederholung:

Orthogonale Endlómorphismes $F : V \rightarrow V \quad \forall v, w \in V$ V euklidisch oder unitär

$$\langle v, w \rangle = \langle F(v), F(w) \rangle$$

F orthogonal gdw $\|v\| = \|F(v)\| \quad \forall v \in V$ dann bildet F Orthonormalsysteme zu Orthonormalsysteme ab

Frage:

$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto 2 \cdot x \rightarrow$ Orthogonale Abbildungen (für euklidische Räume) erhalten den Winkel zwischen Vektoren

VI.1.5 Satz:

Jede orthogonale Abbildung ist injektiv.

VI.1.6 Bew:

$$F : V \rightarrow V \quad v \in \ker(F)$$

$$0 = F(v) \rightarrow 0 = \|F(v)\| = \|v\| \rightarrow v = 0$$

VI.1.7 Satz:

Sei V endlichdim. euklidischer oder unitärer Raum und $F : V \rightarrow V$ eine Bijektive lineare Abbildung.

Folgende Aussagen sind dann äquivalent:

- 1) F ist orthogonal
- 2) Der adjunkte Endomorphismus F^\top von F ist F^{-1}

VI.1.8 Bew:

$$\boxed{1 \Rightarrow 2}$$

$\forall v, w \in V :$

$\leftarrow F$ orthogonal

$$\langle F^{-1}(w), v \rangle \stackrel{\text{Eindeutigkeit}}{\underset{\text{von } F^\top}{\Rightarrow}} F^{-1} = F^\top$$

$$\boxed{2 \Rightarrow 1}$$

F orthogonal

$$\langle F(v), F(w) \rangle \stackrel{\text{Definition } F^\top}{=} \langle F^\top(F(v)), w \rangle \stackrel{F^\top = F^{-1}}{=} \langle F^{-1}(F(v)), w \rangle = \langle v, w \rangle$$

VI.1.9 Kor:

$F : V \rightarrow V$ endlichdim. euklidisch oder unitäre orthogonale Abbildung
 $\Rightarrow F$ ist bijektiv und normal, mit $F^{-1} = F^\top$

VI.1.10 Bew:

F orthogonal $\Rightarrow F$ injektiv $\stackrel{\dim(V) < \infty}{\Rightarrow} F$ bijektiv ist $\Rightarrow F^\top = F^{-1}$

$$F \circ F^\top = F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = F^\top \circ F \Rightarrow \text{normal}$$

VI.1.11 Satz:

Sei V endlichdim, euklidisch oder unitär $F : V \rightarrow V$ orthogonale Abbildung.
 Dann haben alle Eigenwerte von F Absolutbetrag 1. Form ist $\det(F) = 1$

VI.1.12 Bew:

Beachte, dass 0 kein Eigenwert von D ist. (weil F injektiv ist !)

Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von F und $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenwert zu λ

$$\begin{aligned} \|F(v)\| &= \|v\| \neq 0 \\ &\parallel \rightarrow |\lambda| = 1 \\ \|\lambda v\| &= |\lambda| \|v\| \end{aligned}$$

Sei A die Darstellungsmatrix von F bzgl. der ONB

$$\begin{aligned} |\det(F)| &= |\det(A)| = |\overline{\det(A)}| = |\det(\overline{A})| = |\det(\overline{A}^\top)| \\ &= |\det(\underbrace{\overline{A}^\top}_{A^*})| \stackrel{F \text{ orthogonal}}{=} |\det(F^\top)| = |\det(F^{-1})| = |\det(F)|^{-1} \end{aligned}$$

$$F \circ F^{-1} = Id_V$$

$$|\det(F)|^2 = 1 \Rightarrow |\det(F)| = 1$$

Bem:

Sei B eine ONB von V

A die Darstellungsmatrix von F bzgl. B

A^* die Darstellungsmatrix von F^\top bzgl. B

A^{-1} die Darstellungsmatrix von F^{-1} bzgl. B

$$F^{-1} = F^\top \Leftrightarrow A^{-1} = A^*$$

VI.1.13 Def:

Sei $A \in \mathcal{M}_{(n \times n)}(K)$ $K = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} regulär

A ist Orthogonal, falls $A^{-1} = A^*$

Bem:

F ist orthogonal \Leftrightarrow Die Darstellungsmatrix von F bzgl. $\binom{\text{einer}}{\text{jeder}}$ ONB orthogonal

VI.1.14 Kor:

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$ regulär ist orthogonal \Leftrightarrow die Zeilenvektoren (bzw die Spaltenvektoren) ein Orthonormalsystem in K^n bilden (und somit eine ONB)

VI.1.15 Bew:

$$A \text{ orthogonal} \Leftrightarrow A^{-1} = A^* \Leftrightarrow A \cdot A^* = E_n = A \cdot A^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot \overline{a_{jk}}}_{\substack{\parallel \\ \langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle \in K^n}} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\langle \underbrace{\vec{a}_i}_{\substack{\text{i-te Zeile} \\ \text{---}}} , \underbrace{\vec{a}_j}_{\substack{\text{j-te Zeile} \\ \text{---}}} \rangle \in K^n \text{ mit dem Standardskalarpodukt}$$

VI.1.16 Kor: zu irgendeinem Satz

Sei $F : V \rightarrow V$ normale Abbildung eines endlichdimensionalen unitären Raumes V derart, dass alle Eigenwerte von F Absolutbetrag 1 haben. Dann ist F orthogonal.

VI.1.17 Bew:

$$\chi_F(T) \in \mathbb{C}[T] \text{ zerfällt in Linearfaktoren}$$

$$\Downarrow F \text{ normal}$$

Es existiert eine ONB $\{b_1, \dots, b_n\}$ von Eigenvektoren von F $F(b_i) = \lambda_i \cdot b_i$

$$F \text{ hat Darstellungsmatrix: } \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ bzgl } B = \{b_1, \dots, b_n\}$$

$$\Rightarrow 0 \neq |\det(F)| = |\prod \lambda_i| = \prod |\lambda_i| = 1$$

$$F \text{ hat Darstellungsmatrix: } \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} \text{ bzgl } B = \{b_1, \dots, b_n\}$$

$$\lambda_i \cdot \overline{\lambda_i} = |\lambda_i|^2 = 1 \Rightarrow \overline{\lambda_i} = \lambda_i^{-1}$$

$F^\top (= F^{-1})$ hat Darstellungsmatrix: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$ bzgl $B = \{b_1, \dots, b_n\}$

$\Rightarrow F^{-1} = F^\top \rightarrow F$ ist orthogonal

VI.1.18 Def:

Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$ ist orthogonal diagonalisierbar, falls es eine orthogonale (reguläre) Matrix S gibt, sodass $S^{-1}AS (= S^*AS)$ in Diagonalform ist.

VI.1.19 Prop:

Jede normale Matrix $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$ deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, ist orthogonal diagonalisierbar.

VI.1.20 Bew:

Sei $F_A : K^n \rightarrow K^n$ die zugehörige lineare Abbildung $\Rightarrow F_A$ ist normal $\Rightarrow \chi_A(T)$ zerfällt in Linearfaktoren.

Es gibt eine ONB $\{b_1, \dots, b_n\}$ von Eigenvektoren von F (d.h. von A)

Sei $S = (b_1 | \dots | b_n)$ b_i als Spaltenvektoren

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ in Diagonalform}$$

Es genügt zu zeigen, dass S eine orthogonale Matrix ist.

Aber die Spaltenvektoren von S bilden ein orthonormales System.

$\Rightarrow S$ ist orthogonal

VI.1.21 Kor:

Jede symmetrische $n \times n$ Matrix über \mathbb{R} bzw. jede hermitesche Matrix über \mathbb{C} ist orthogonal diagonalisierbar.

VI.1.22 Bew:

A ist normal, $\chi_A(T)$ zerfällt in Linearfaktoren.

VI.1.23 Def: Drehung

Sei V ein endlichdim euklidischer Raum.

$F : V \rightarrow V$ orthogonale Abbildung ist eine Drehung, falls $\det(F) = 1$.

Bem:

Die Kollektion aller Drehungen bilden eine Gruppe.

VI.1.24 Satz:

Sei \mathbb{R}^2 mit dem Standardskalarprodukt als euklidischer Raum.

$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine Drehung, gdw F Darstellungsmatrix bzgl $\{e_1, e_2\}$ der Form:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

hat, für ein $\alpha \in [0, 2\pi]$. Wobei α der Winkel der Drehung ist. Bsp:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} : \quad \curvearrowleft = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\rightarrow)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\uparrow)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\uparrow)} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\leftarrow)} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

VI.1.25 Wid:

V euklidischer Raum

$$\text{Dreh}(V) = \{F : V \rightarrow V \text{ Drehung}\}$$

Drehung \leftrightarrow orthogonale Abbildung mit $\det(F) = 1$

eins Gruppe

VI.1.26 Bew: Satz

\Leftarrow

$$\det \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = 1$$

\Rightarrow Sei $\{e_1, e_2\}$ die kanonische Basis $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ und die Darstellungsmatrix von F :

$$F(e_1) \quad F(e_2)$$

$$A = \begin{pmatrix} \langle F(e_1), e_1 \rangle & \langle F(e_2), e_1 \rangle \\ \langle F(e_1), e_2 \rangle & \langle F(e_2), e_2 \rangle \end{pmatrix}$$

Die Spaltenvektoren bilden ein orthonormales System.

$$\begin{aligned}
& \|F(e_1)\|^2 = 1 \\
& \parallel \\
& \langle F(e_1), e_1 \rangle^2 + \langle F(e_1), e_2 \rangle^2 \\
\Rightarrow \exists \alpha \in [0, 2\pi] \quad \cos \alpha = \langle F(e_1), e_1 \rangle \quad \sin \alpha = \langle F(e_1), e_2 \rangle \\
& \left. \begin{array}{l} \det(A) = 1 \\ 0 = \langle F(e_1), e_2 \rangle \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} 1 = \cos \alpha \langle F(e_2), e_2 \rangle - \sin \alpha \langle F(e_2), e_1 \rangle \\ 0 = \cos \alpha \langle F(e_2), e_1 \rangle + \sin \alpha \langle F(e_2), e_2 \rangle \end{array} \\
& \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle F(e_2), e_1 \rangle \\ \langle F(e_2), e_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} \langle F(e_2), e_1 \rangle \\ \langle F(e_2), e_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

VI.1.27 Satz:

$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist genau dann eine Drehung, wenn F Darstellungsmatrix bzgl. einer geeigneten ONB $\{b_1, b_2, b_3\}$ der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{hat.} \quad \alpha \in [0, 2\pi]$$

VI.1.28 Bew:

⊆ ✓

⇒ Sei A die Darstellungsmatrix von F bzgl. der kanonischen Basis $\{a_1, a_2, a_3\}$

⇒ A ist orthogonal

⇒ Als Matrix über \mathbb{C} haben alle Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von A Absolutbetrag 1.

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$$

$\chi_F(T) = \chi_A(T)$ ist ein normiertes Polynom Grades 3 über $\underline{\mathbb{R}}$

→ Es muss eine Nullstelle in \mathbb{R} haben → OBdA $\lambda_1 \in \mathbb{R}$

$$|\lambda_1| = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \pm 1$$

$$1 = \det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

1er Fall: $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \rightarrow$ Für ein i muss $\lambda_i = 1 \Rightarrow$ OBdA $\lambda_1 = 1$

2er Fall: Sonst. $\lambda_2 \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$

$$\chi_F(T) = (T - \lambda_1)(T - \lambda_2)(T - \lambda_3)$$

hat Koeffizienten in \mathbb{R}

Insb. $\overline{\lambda_2} = \begin{cases} \cancel{\lambda_1} \\ \lambda_3 \end{cases}$ nicht λ_1 da es Reell ist.

$$|\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$$

$$\lambda_2 = e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad \lambda_3 = \overline{\lambda_2} = \cos \alpha - i \sin \alpha = e^{-i\alpha} = \frac{1}{\lambda_2}$$

$$\det(F) = 1 = \lambda_1 \cdot \underbrace{\lambda_2 \cdot (\lambda_2)^{-1}}_{=1}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1$$

Sei $b_1 \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor zum Wert $\lambda_1 = 1$

Sei $U = \text{span}(b_1)^\perp \rightarrow \dim(U) = 2$

Frage: $F(U) \perp \text{span}(b_1)$?

$$\Leftrightarrow F(U) \subset U?$$

$$u \in U \quad \langle F(u), b_1 \rangle \Rightarrow F(u) \in U$$

$$\parallel$$

$$F(b_1)$$

$$\parallel$$

gleich da F orthogonal

$$\langle u, b_1 \rangle = 0$$

Aus dem Gram-Schmidt'schen Verfahren wähle eine ONB $\{b_2, b_3\}$ von U.
(aus dem Eulersatz) $\Rightarrow \{b_1, b_2, b_3\}$ ist eine ONB von \mathbb{R}^3 .

$F|_U$ hat auch eine Drehung ! $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$

$\rightarrow F$ hat Darstellungsmatrix bzgl. $\{b_1, b_2, b_3\}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \square$

VI.2 Multilineare Algebra

Sei K ein beliebiger Körper

VI.2.1 Def:

Das Tensorprodukt von zwei K-VR U und V ist ein K-VR T zusammen mit einer (universellen) bilinearen Abbildung: $\otimes : U \times V \rightarrow T$ derart, dass jede bilineare Abbildung $g : U \times V \rightarrow W$ sich schreiben lässt als eine Komposition.

$$\begin{array}{ccc}
 U \times V & \xrightarrow{\otimes} & T \\
 f \circ \otimes = g \downarrow & \blacksquare & \swarrow \exists! f \\
 & & W
 \end{array}$$

für eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f : T \rightarrow W$. Formel ist $(T; \otimes)$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

VI.2.2 Satz:

Je zwei K-VR U und V besitzen ein Tensor-Produkt $(T; \otimes)$, dass bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Schreibe $U \otimes V$.

VI.2.3 Bew:

Seien $\{a_i\}_{i \in I}$ Basis von U . $\{b_j\}_{j \in J}$ Basis von V .
Wähle Elemente $(c_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ K-linear unabh.

Setze

$$\begin{aligned}
 T &= \text{span}(\{c_{i,j}\}_{(i,j) \in I \times J}) \\
 &= \left\{ \sum_{\text{endliche}} \lambda_{i',j'} c_{i,j} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \otimes : U \times V &\rightarrow T \\
 (a_i, b_j) &\mapsto c_{i,j}
 \end{aligned}$$

Erweitern wegen Bilinearität:

$$\otimes \left(\sum \lambda_i a_i, \sum \mu_j b_j \right) = \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j c_{i,j}$$

Sei nun $g : U \times V \rightarrow W$, $(a_i, b_j) \mapsto g(a_i, b_j)$ bilinear

$$\begin{aligned}
 f : T &\rightarrow W \\
 c_{i,j} &\mapsto g(a_i, b_j)
 \end{aligned}$$

erweitere f aus Linearität $\rightarrow f$ ist eindeutig bestimmt

$$f \circ \otimes(a_i, b_j) = g(a_i, b_j)$$

$$\rightarrow f \circ \otimes = g$$

$$a_i \otimes b_j := c_{i,j}$$

$$\otimes(a_i, b_j)$$

□

VI.2.4 Bew:

Sei $\{a_i\}_{i \in I}$ Basis von U , $\{b_j\}_{j \in J}$ Basis von V

$$\forall i \in I, j \in J \rightarrow T_{ij}$$

$$T = \left\{ \sum_{\substack{\text{endliche} \\ \in K}} \lambda_j T_{ij} \right\}$$

$$\begin{aligned} \otimes : U \times V &\rightarrow T \quad \rightarrow \text{Erweitere sie um Bilinearität} \\ (a_i, b_j) &\rightarrow T_{ij} \end{aligned}$$

$$F(T_{ij}) = g(a_i, b_j) \text{ ist eindeutig bestimmt!}$$

Eindeutigkeit:

Sei T' auch ein Tensorprodukt von U, V $\otimes' : U \times V \rightarrow T'$

VI.2.5 Kor:

Für jede Basis $\{a_i\}_{i \in I}$ von U und jede Basis $\{b_j\}_{j \in J}$ von V ist: $\{a_i \otimes b_j\}_{(i,j) \in I \otimes J}$ eine Basis von $U \otimes V$.

Isbesondere falls $\dim U, \dim V = \infty$ ist $\dim(U \otimes V) = \dim U \cdot \dim V$

VI.2.6 Kor:

Jedes Element w von $U \otimes V$ lässt sich schreiben als $\sum_{k=1}^n a_{i_k} \otimes v_k$ für $v_k \in V$ eindeutig bestimmt.

VI.2.7 Bew:

$$w \in U \otimes V$$

$$\{a_i \otimes b_j\} \quad \text{Basis}$$

$$\parallel \\ \otimes(a_i, b_j)$$

$$\begin{aligned}
w &= \sum \lambda_{ij} a_i \otimes b_j \\
&= \sum a_i \otimes \lambda_{ij} b_j \\
&= \sum_i \sum_j a_i \otimes \lambda_{ij} b_j \\
&= \sum_i a_i \otimes \underbrace{\sum_j \lambda_{ij} b_j}_{v_i \in V}
\end{aligned}$$

Frage: Warum sind die v'_i s eindeutig bestimmt?

$$\begin{aligned}
w &= \sum a_i \otimes v'_i \longrightarrow v'_i = \sum \mu_{ij} b_j \\
w &= \sum a_i \otimes \left(\sum \mu_{ij} b_j \right) = \sum_i \sum_j \mu_{ij} a_i \otimes b_j \\
&\Rightarrow \lambda_{ij} = \mu_{ij} \Rightarrow v_i = v'_i
\end{aligned}$$

$\{a_i \otimes b_j\}$ eine Basis von $U \otimes V$

□

Achtung!

Nicht jedes Element von $U \otimes V$ lässt sich als ein rein Tensor $u \otimes v$ schreiben!

VI.2.8 Bew:

$U = V = \mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis $\{e_1, e_2\}$

□

VI.2.9 Beh:

$$w = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$$

angenommen:

$$w = u \otimes v \quad u, v \in \mathbb{R}^2$$

$$u = (\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2) \quad v = (\mu_1 e_1, \mu_2 e_2)$$

$$u \otimes v = \lambda_1 \mu_1 e_1 \otimes e_1 + \lambda_1 \mu_2 e_1 \otimes e_2 + \lambda_2 \mu_1 e_2 \otimes e_1 + \lambda_2 \mu_2 e_2 \otimes e_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 \mu_1 = 0 \\ \lambda_2 \mu_2 = 0 \\ \lambda_1 \mu_2 = 1 \\ \lambda_2 \mu_1 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \mu_1 = 0 \\ \uparrow \\ \rightarrow \lambda_1 \neq 0 \\ \uparrow \\ \rightarrow \lambda_2 \neq 0 \end{array} \rightarrow \mu_2 = 0$$

$$\rightarrow v = 0 \Rightarrow u \otimes v = 0 \neq e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$$

VI.2.10 Lemma:

V K -VR

$$K \otimes V \simeq V$$

VI.2.11 Bew:

Wir wollen zuerst eine Abbildung von $K \otimes V \rightarrow V$ konstruieren

$$\begin{aligned} G : V &\rightarrow K \otimes V \quad \text{ist linear} \\ v &\mapsto 1 \otimes v \end{aligned}$$

G ist surjektiv

$$\begin{array}{c} \lambda \cdot (1 \otimes v) \\ \parallel \\ 1 \otimes \lambda \cdot v \\ \parallel \\ G(\lambda v) \end{array}$$

Weil 1 eine Basis von K über K ist!

Zu zeigen: $F : K \otimes V \rightarrow V$ Isomorphismus

$$\begin{aligned} G \circ F(\lambda \otimes v) &= G(\lambda v) \\ &= 1 \otimes \lambda \cdot v \\ &= \lambda(1 \otimes v) \\ &= \lambda \otimes v \end{aligned}$$

$$F \circ G(v) = F(1 \otimes v) = 1 \cdot v = v$$

F und G sind Inverse voneinander

□

VI.2.12 Lemma:

- a) $F : U \rightarrow U' \quad G : V \rightarrow V'$ lineare Abbildungen
 $\Rightarrow \exists F \otimes G : U \otimes V \rightarrow U' \otimes V' \quad u \otimes v \mapsto F(u) \otimes G(v)$ lineare Abbildung
- b) $Id_{U'} \otimes Id_{V'} = Id_{U' \otimes V'}$
- c) $(F_1 + F_2) \otimes G = F_1 \otimes G + F_2 \otimes G$
- d) $(\lambda F) \otimes G = \lambda(F \otimes G)$
- e) $(F_2 \circ F_1) \otimes (G_2 \circ G_1) = (F_2 \otimes G_2) \circ (F_1 \otimes G_1)$

VI.2.13 Bew:

a) Sei

$$U \times V \rightarrow U' \otimes V' \quad (u, v) \mapsto F(u) \otimes G(v) \quad \text{bilinear}$$

b) trivial

c) einfach:

d) einfach:

$$\begin{aligned} (F_1 + F_2) \otimes G(u \otimes v) &= (F_1 + F_2)(u) \otimes G(v) \\ &= (F_1(u) + F_2(v)) \otimes G(v) \\ &= F_1(u) \otimes G(v) + F_2(u) \otimes G(v) \\ &\quad \parallel \qquad \qquad \parallel \\ &\quad (F_1 \otimes G)(u \otimes v) \qquad (F_2 \otimes G)(u \otimes v) \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} &(F_2 \circ F_1) \otimes G_2 \circ G_1(v) \\ &= F_2 \circ F_1(u) \otimes G_2 \circ G_1(v) \\ &= F_2(F_1(u)) \otimes G_2(G_1(v)) \\ &= F_2 \otimes G_2(F_1(u) \otimes G_1(v)) \quad \text{ok !} \\ &\quad \parallel \\ &\quad (F_1 \otimes G_1)(u \otimes v) \end{aligned}$$

□