

# Theoretische Physik I

Vorlesung von Prof.Dr. Gerhard Stock im Sommersemester  
2018

Markus Österle  
Andréz Gockel

17.04.2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
Einführung . . . . .	4
Bedeutung der Mechanik . . . . .	4
<b>1 Newtonsche Mechanik</b>	<b>6</b>
1.1 allgemeine Begriffe . . . . .	6
1.1.1 Bezugssystem . . . . .	6
1.2 Die Newtonsche Gesetze (1687) . . . . .	6
1.2.1 Bem: . . . . .	8
1.2.2 Beispiele: . . . . .	9
1.3 Erhaltungssätze . . . . .	9
1.3.1 Impulserhaltung . . . . .	10
1.3.2 Drehimpulserhaltung . . . . .	10
1.3.3 Energieerhaltung . . . . .	10
1.4 Beschleunigte Bezugssysteme . . . . .	13
1.4.1 Rotierendes Bezugssystem: . . . . .	14
1.5 Mehr-Körper-Probleme . . . . .	15
1.6 Die Hamilton-Funktion (1833) . . . . .	18
Newtonsche Mechanik: theoretisches Konzept . . . . .	19
1.7 Schwingungen . . . . .	21
1.7.1 Gedämpfte Schwingungen . . . . .	23

1.7.2	Der getriebene Oszillator . . . . .	24
1.7.3	gekoppelte Oszillatoren . . . . .	26
1.7.4	Eigenschwingungen . . . . .	28
1.8	Das Zweikörperproblem . . . . .	30
1.8.1	Diskussion des Zweikörperproblems . . . . .	33
1.8.2	Keplerproblem . . . . .	34
<b>2</b>	<b>Lagrange-Formalismus</b>	<b>38</b>
2.1	Zwangsbedingungen . . . . .	38
2.2	Lagrange-Gl 1.Art . . . . .	40
2.3	Lagrange-Gl. 2. Art . . . . .	43
2.3.1	Lagrange Formalismus . . . . .	50
2.3.2	Energieerhaltung . . . . .	50
2.4	Symmetrie und Erhaltungsgrößen . . . . .	51
2.4.1	Noether-Theorem . . . . .	53
2.5	Hamiltonsches Prinzip . . . . .	58
2.5.1	Funktionale und Variationsrechnung . . . . .	58
2.5.2	Euler-Lagrange-Gl. . . . .	58
2.5.3	Variationsrechnung . . . . .	60
2.6	3. Hamiltonsche Prinzip . . . . .	62
2.6.1	Schwingung einer Seite . . . . .	63
2.6.2	Der Starre Körper . . . . .	66
2.6.3	Rotation des Starren Körpers . . . . .	72
2.7	9 Hamilton-Formalismus . . . . .	75
2.8	Hamiltonsche Mechanik . . . . .	76
2.9	Phasenraum . . . . .	79
2.9.1	Zeitentwicklung im Phasenraum (PR) . . . . .	80

2.9.2	<u>PR-Dichte</u> . . . . .	82
<b>3</b>	<b>Relativistische Mechanik</b>	<b>83</b>
3.1	Relativistische Mechanik . . . . .	84
3.1.1	<u>Einsteinsches Relativitätsprinzip</u> (1905) . . . . .	84
3.2	Lorenz-Trafo . . . . .	86

# Einleitung - Theoretische Physik

## Einführung

- geht von grundlegenden Naturgesetzen aus, die als Postulate (=Axiome)
- benutzt mathematische Methoden um daraus physikalische Aussagen herzuleiten (z.B.  $E_{kin} \sim v^2$ )
- Eine Theorie basiert auf definierten (Def.) Annahmen
  - gilt innerhalb eines Anwendungsbereiches und muss hier experimentell (Exp.) verifizierbare Ergebnisse liefern
  - z.B. klassische Mechanik funktioniert für
    - $v \ll c$
    - $\int(p)dx \gg \hbar$
- Ein theoretisches Modell macht oft idealisierende Annahmen um explizite Lösungen zu erlauben z.B. harmonischer Oszillator
- Computational Physics  
löst theoretische Ansätze numerisch

## Bedeutung der klassischen Mechanik

- zentrale Rolle, da anschauliche Theorie
- Einführung:
  - zentrale Größen (z.B. Energie, Drehimpuls, Wirkung)
  - Methoden (z.B. Variationsrechnung, Störungstheorie)
  - Modelle (z.B. harmonischer Oszillator, wichtig in Quantenmechanik (QM), Feldtheorie, ...)
- praktische Bedeutung:
  - Himmelsmechanik

- Statik
  - Molekül-
  - Chemie- und Biophysik
- nicht lineare Dynamik (z.B. Chaostheorie, Strukturbildung) sind Beispiele aktueller Forschung

# Kapitel 1

## Newtonsche Mechanik

### 1.1 allgemeine Begriffe

- Statik (ruhende Körper)
- Kinematik (Bewegung, ohne Beschreibung der Wechselwirkungen (WW))
- Dynamik (Bewegung mit Beschreibung der WW)

#### 1.1.1 Bezugssystem

Ursprung  $O$

Basisvektoren  $\vec{e}_i = \begin{cases} x, y, z \\ 1, 2, 3 \end{cases}$

Ort:  $\vec{r}$  eines Teilchens (Massenpunkte) (Bahnkurve, Trajektorie)

$$\vec{r}(t) = \sum_i \vec{x}_i(t) \vec{e}_i$$

Geschwindigkeit:  $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$

Impuls:  $\vec{p}(t) = m \cdot \vec{v}(t)$

Beschleunigung:  $\vec{a}(t) = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$

z.B. geradlinige - gleichmäßige Bewegung

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \vec{v}_0$$

$$\vec{a}(t) = 0$$

### 1.2 Die Newtonsche Gesetze (1687)

NG1: Trägheitsgesetz

Kräftefreie Bewegung ist gleichförmig, d.h.  $v = \text{const.}$

NG2: Grundgesetz der Mechanik

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = ma \quad m = \text{const.}$$

def. Kraft und Masse, Bewegungsgleichung

NG3: Action = Reactio

$$F_{12} = -F_{21}$$

Kraft von 1 auf 2 = Kraft von 2 auf 1 Voraussetzung (Annahme):

- „absoluter“ Raum
- „absolute“ Zeit
- „absolute“ Masse

→ nur gültig für  $\frac{v}{c} \ll 1$

( $c$  = Lichtgeschwindigkeit)

Diskussion NG1: Macht nur Sinn bei Angabe von Bezugssystem z.B. Vergleich rotierendes vs. ruhendes Bezugssystem

→ Ein Bezugssystem, in dem das NG1 gilt heißt „Inertialsystem“ (IS)

Bsp: Hörsaal, relativ zum Fixsternhimmel Näherung, z.B. wegen Erdrotation

→ Foucaultsches Pendel

→ physikalische Gesetze nehmen in IS eine besonders einfache Form an.

NG1: In einem IS ist die kräftefreie Bewegung durch  $\vec{r}(t) = \text{const.}$  beschrieben Relativitätsprinzip (Galilei)

Geg. sei IS  $S$  mit Bahnkurve  $\vec{r}(t)$

und IS  $\bar{S}$  mit Bahnkurve  $\vec{r}(t)$

worin  $\bar{S}$  um  $\vec{r}_0$  zu  $S$  verschoben sei und sich mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}_0 = \text{const.}$  dazu bewege:

Dann gilt die Galilei Transformation (Trafo)

$r \rightarrow \bar{r}$  mit

$$\bar{r}(t) = \vec{r}(t) + \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \quad (1)$$

→ Relativitätsprinzip

Alle IS sind gleichwertig.

NG2:  $F = \dot{p} = m \cdot \vec{a}$

- setzt ebenfalls ein IS voraus
- beschreibt Bewegung mittels Wirkung  $m \cdot a$  und Ursache Kraft  $F$
- Definition der Kraft und der (trägen) Masse  $m$



- grundlegendes Postulat der klassischen Mechanik:  
sind alle Kräfte  $F_i$  bekannt, so beschreibt

$$m \cdot a = \sum_i F_i$$

vollständig die Bewegung.

Für gegebene Kraft  $\vec{F}$  ergibt sich vollständig die Bewegung.

NG3:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

d.h die Kraft ergibt sich als WW zwischen Körpern.

$$\rightarrow \frac{d}{dt}p_1 = -\frac{d}{dt}p_2 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}(p_1 + p_2) = 0$$

→ Impulserhaltung

eigentlich auf Grund der „Homogenität des Raumes“.

Zusatz: Kräfte addieren sich wie Vektoren

$$\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}_i$$

### 1.2.1 Bem:

- vorher Aristotelesche Mechanik: unterschied
  - Bewegung auf der Erde
  - Bewegung der Gestirne
- Newton vereinheitlichte beide Bereiche: Theorie gilt sowohl für Bewegung der Planeten als auch für fallenden Apfel

→ immense Abstraktionsleistung!

allg. Ansatz: Vereinheitlichung von z.B. elektrischer und magnetischer WW  
Maxwell

- Wesentliches Axiom ist das 2.NG. (das 1.NG definiert IS, 3.NG entspricht Impulserhaltung)

2.NG:

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

DGL 2.Ord, Lösung ergibt Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  „Bewegungsgleichung“

Integrationskonstanten gegeben durch Anfangsbedingungen: z.B.  $\vec{r}(0), \dot{\vec{r}}(0)$

### 1.2.2 Beispiele:

1.) Konstante Kraft:  $\vec{F} = \vec{F}_0$

z.B.  $\vec{F} = m\vec{g}$

$$\rightarrow \vec{r}(t) = \frac{1}{2m}\vec{F}_0 \cdot t^2 + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_0$$

2.) Lineare Kraft:  $\vec{F} \sim \vec{r}$

z.B. bei Federpendel mit  $r = |\vec{r}|$

$$m\ddot{r} = -kr$$

$$\text{mit } r(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \omega^2 = \frac{k}{m}$$

3.) Zentrale Kraft:  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$

z.B. Gravitation  $\vec{F} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$

4.) Lorenzkraft: (geschwindigkeitsabhängig)

$\vec{F} = \vec{r}(t) = F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = e[\hat{E}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)]$  Ladung  $e$  im elektrischen Feld  $\vec{E}$  und magnetischen Feld  $\vec{B}$

5.) Reibungskräfte:

– Stokesche Reibung  $\vec{F} = -\gamma \vec{v}$

– Luftreibung:  $\vec{F} \sim \vec{v}^2 \frac{\vec{v}}{v}$

## 1.3 Erhaltungssätze

- spielen Zentrale Rolle in der Physik
- sind allg. gültig, z.B. auch in der QM
- reflektieren Symmetrie des Systems

allg Form eines erhaltungssatzes der Größe  $A(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$

$$\frac{d}{dt}A = 0 \leftrightarrow A \text{ ist erhalten}$$

### 1.3.1 Impulserhaltung

$$\vec{F} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{p} = \text{const.}$$

### 1.3.2 Drehimpulserhaltung

Vektorielle Multiplikation von NG2 mit  $\vec{r}(t)$  ergibt:

$$m\vec{r}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{F}$$

Mit Drehimpuls:

$$\vec{T} = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = \vec{r} \times (m\dot{\vec{r}})$$

Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

ist

$$\frac{d}{dt}\vec{l} = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times (m\dot{\vec{r}})}_{=0} + \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} = \vec{M}$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{M}$$

$$\vec{M} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{l}}{dt} = 0, \quad \vec{l} \text{ erhalten}$$

**Bsp: Zentralkraft**

$\vec{F} \parallel \vec{r} \rightarrow \vec{M} = 0 \rightarrow \vec{l} = \text{const.}$  legt man oEdA  $\vec{l}$  in z - Richtung

$$\vec{l} = l\vec{e}_z = m\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}$$

liegen  $\vec{r}$  und  $\dot{\vec{r}}$  in x - y - Ebene.

### 1.3.3 Energieerhaltung

Ein Teilchen, das sich unter  $\vec{F}$  von  $\vec{r}$  nach  $\vec{r} + d\vec{r}$  bewegt, verrichtet die Arbeit:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Längs eines eges C von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$  ist die geleistete Arbeit

$$W = \int_C dW = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{F}$$

die von  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  und i.h. auch von der Wegführung abhängt-

Die pro Zeit verrichtete Arbeit heißt Leistung

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$[\oint_C = \text{geschlossenes Wegintegral}]$$

Multiplikation von NG2 mit  $\dot{\vec{r}}$  gibt:

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} \quad (\hat{=} \text{Leistung } P)$$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{m(\dot{\vec{r}})^2}{2}}_{=T} = \frac{dT}{dt} = P = (\vec{F}_{\text{kons}} + \vec{F}_{\text{diss}}) \cdot \dot{\vec{r}}$$

Kinetische Energie T

konservative Kräfte  $\vec{F}_{\text{kons}}$  und dissipative Kräfte  $\vec{F}_{\text{diss}}$ , wobei  $\vec{F}_{\text{kons}}$  alle Anteile mit:

$$\vec{F}_{\text{kons}} \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{d}{dt}U(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U \cdot \dot{\vec{r}}$$

erhält, wobei k das Potential oder die potentielle Energie ist. Minuszeichen ist Konvention.

Zusammen:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + U(\vec{r}) \right) = \vec{F}_{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}}} \quad (2)$$

Konservative Kraft  $\Leftrightarrow E = T + U = \text{const.}$

Mit

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{kons}} \cdot \dot{\vec{r}} &= -\frac{dU(\vec{r})}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= -\text{grad}(U(\vec{r})) \cdot \dot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}U \cdot \dot{\vec{r}} \\ \vec{\nabla} &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^\top \\ \text{grad}(U(\vec{r})) &= \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)^\top \end{aligned}$$

folgt :

$$\boxed{\vec{F}_{\text{kons}} = -\text{grad}(U(\vec{r}))} \quad (3)$$

### Bsp: Der gedämpfter harmonischer Oszillator

$$F = -kx - \gamma\dot{x} = F_{\text{kons}} + F_{\text{diss}}$$

mit

$$F_{\text{kons}} = -\frac{dk}{dx} \rightarrow k(x) = \frac{k}{2}x^2$$

Da  $F_{\text{diss}} \cdot \dot{x}$  quadratisch in  $\dot{x}$ ,  $\frac{dk(x)}{dx}$  aber linear in  $\dot{x}$  kann  $F_{\text{diss}}\dot{x}$  nicht in der Form  $\frac{dk}{dt}$  geschrieben werden.

Bedingung für konservative Kraft ist

$$\text{rot}(\vec{F}(\vec{r})) = \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$$

Dann ist das Wegintegral:

$$W = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$$

Wegunabhängig, verschwindet also für jeden geschlossenen Pfad :

$$\vec{F}_{\text{kons}} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) \quad \leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{F} = 0$$

allg.:

$$\vec{F}_{\text{kons}} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) + \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t)}_{\text{z.B. Lorentz-Kraft}}$$

da:

$$P_L = \dot{\vec{r}} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{R}) = 0$$

Anwendung: Vereinfachung von Bewegungsgleichungen

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}U(x)$$

DGL 2. Ordnung

Bsp: 1 Dimensionales System mit Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E$$

$$\rightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \quad \text{DGL 1. Ordnung}$$

„erstes Integral“ ( da eine Integration bereits vollzogen)

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}$$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x'))}}$$

Qualitative Diskussion der Bewegung:

$$E = T + U \geq U$$

Numerische Integration der Bewegungsgleichung: Bsp:

$$f(t) = m\ddot{x}(t) = m\dot{v}(t)$$

Idee: Taylor Entwicklung von x zur Zeit

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= x(t) + \underbrace{\frac{dx}{dt}}_v \underbrace{((t + \Delta t) - t)}_{\Delta t} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}}_{F/m=a} \Delta t^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3x}{dt^3} \Delta t^3 + \mathcal{O}(t^4) \\ &= x(t) + v(t)\Delta t + \frac{f(t)}{2m} \Delta t^2 + \frac{\Delta t^3}{3!} + \mathcal{O}(t^4) \end{aligned}$$

z.B. Lösung durch Abbruch in 2.Ordnung (Euler-Algorithmus)

Besser:

$$\begin{aligned} x(t - \Delta t) &= x(t) - v(t)\Delta t + \frac{f(t)}{2m} \Delta t^2 - \frac{\Delta t^3}{3!} \ddot{x} + \mathcal{O}(\Delta t^4) \\ x(t + \Delta t) + x(t - \Delta t) &= 2x(t) + \frac{f(t)}{m} \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^4) \end{aligned}$$

bzw.

$$x(t + \Delta t) \approx 2x(t) - x(t - \Delta t) + \frac{f(t)}{m} \Delta t^2 \quad (1)$$

Geschwindigkeit über:

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t) &= 2v(t)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ \Rightarrow v(t) &\approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)}{2\Delta t} \end{aligned} \quad (2)$$

Gl. (1) und (2) bestimmen den Verlet-Algorithmus

## 1.4 Beschleunigte Bezugssysteme

Newton Gesetze gelten für Inertialsysteme (IS), Bezugssystem, das relativ zu IS beschleunigt ist, ist kein IS  $\rightarrow$  es treten sogenannte Scheinkräfte auf.

z.B. Beschleunigung bei linearer Bewegung

### 1.4.1 Rotierendes Bezugssystem:

Geg: IS  $S$  mit  $\vec{r}(t)$

und nicht-IS  $S'$  mit  $\vec{r}'(t)$ , das gegenüber  $S$  mit einer Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad (1)$$

rotiert,  $\vec{\varphi}, \vec{\omega}$  zeigen in Richtung der Drehachse.

oEdA:  $\vec{\varphi} \sim \vec{e}_z$

Berechne Vektor  $\vec{G}$ , der in  $S'$  ruht. Änderung  $d\vec{G}_{\text{rot}}$  aufgrund Rotation

$$\begin{aligned} |d\vec{G}_{\text{rot}}| &= |d\vec{\varphi}| |\vec{G}| \sin \theta \\ d\vec{G}_{\text{rot}} &\perp \vec{\omega} \quad d\vec{G}_{\text{rot}} \perp \vec{G} \\ \rightarrow d\vec{G}_{\text{rot}} &= d\vec{\varphi} \times \vec{G} = (\vec{\omega} dt) \times \vec{G} \end{aligned} \quad (2)$$

Beliebiger Vektor  $\vec{G}(t)$ , der sich in  $S'$  während  $dt$  um  $d\vec{G}_{S'}$  ändert, ändert sich damit in  $S$  um:

$$d\vec{G}_S = d\vec{G}_{S'} + d\vec{G}_{\text{rot}}$$

Damit:

$$\boxed{\frac{d\vec{G}_S}{dt} = \frac{d\vec{G}_{S'}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{G}} \quad (3)$$

Für  $\vec{G} = \dot{\vec{r}}$  ist:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (4)$$

$$\vec{G} = \dot{\vec{r}}: \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\omega} \times (\dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Für  $\omega = \text{const.}$  erhalten wir:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' + 2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

Für ein in  $S'$  kräftefreies Teilchen mit:

$$m\ddot{\vec{r}} = 0$$

erhalten wir dann:

$$m\ddot{\vec{r}}' = - \underbrace{2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}')}_{\text{Corioliskraft}} - \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{Zentrifugalkraft}}$$

$F_z \sim \omega^2 r$ , zeigt von Drehachse weg

$F_c \sim \omega \dot{r}$ , steht  $\perp$  zur Bewegungsrichtung

Bsp:

- Erddrehung, Foucaultsches Pendel
- Ball auf Drehscheibe

## 1.5 Mehr-Körper-Probleme

Betrachte N Teilchen (Massenpunkte) mit:

Ort:  $\vec{r}_i$ , Masse  $m_i$  und die auf sie wirkende Kraft  $\vec{F}_i$

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i \quad (i = 1, \dots, N)$$

Unterscheidung:

Innere Kräfte: Kräfte der Teilchen aufeinander. z.B. Coulomb-Kräfte  $\vec{F}_{ij}$  von (geladenen) Teilchen i und j

Äußere Kräfte:  $\vec{F}_i^A$  wirken von außen. z.B. Schwerkraft oder externes elektromagnetisches Feld.

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^A + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

Schwerpunktbewegung und Impuls Ortsvektor des Schwerpunktes

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad M = \sum_i m_i$$

Bewegungsgleichung für  $\vec{R}$ :

$$M \ddot{\vec{R}} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} F_{ij}}_{\text{3.NG: } F_{ij} = -F_{ji}}$$

$$M \ddot{\vec{R}} = \sum_i \vec{F}_i^A + 0 = \vec{F}^A$$

Schwerpunktsystem:

Schwerpunkt bewegt sich nur gemäß äußerer Kräfte

⇒ vergleiche Münchhausen-Trick

→ Rechtfertigung der Idealisierung realer Körper durch Massepunkte



Auf ein abgeschlossenes System wirken keine (oder vernachlässigbare) äußeren Kräfte

$$\rightarrow \frac{d}{dt} M \dot{\vec{R}} = 0 \quad \rightarrow \vec{P} = M \cdot \dot{\vec{R}} = \text{const}$$

abgeschlossenes System  $\leftrightarrow$  Schwerpunktsystem ist erhalten

Drehimpuls: Vektorielle Multiplikation des 2. NG mit  $\vec{r}_i$

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \\ (\dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i &= 0) \\ \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i)}_{\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i} &= \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^k}_{\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}}_{\stackrel{?}{=} 0} \\ \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}) \\ &\stackrel{3. \text{ NG}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \underbrace{(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}}_{\text{Annahme: } \vec{F}_{ij} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j} = 0 \end{aligned}$$

d.h. innere Kräfte ergeben kein resultierendes Drehmoment.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^A = \vec{M}$$

abgeschlossenes System  $\leftrightarrow$  Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}$  ist erhalten

Energie: Mult. von 2. NG mit  $\dot{\vec{r}}_i$

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i &= \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2} \cdot \dot{\vec{r}}_i^2}_T = \frac{dT}{dt} \\ &= \sum_i (\vec{F}_i^{\text{kons}} + \vec{F}_i^{\text{diss}}) \cdot \dot{\vec{r}}_i \end{aligned}$$

wobei

$$\sum_i \vec{F}_i^{\text{kons}} \cdot \dot{\vec{r}}_i = - \frac{dU(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}{dt} = - \sum_i \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

mit

$$\frac{\partial U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}{\partial \vec{r}_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y_i} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z_i} \vec{e}_z$$

Energiesatz:

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \sum_i \vec{F}_i^{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

Kräfte konservativ  $\leftrightarrow E = T + U$  erhalten

Energieerhaltung gilt also auch bei äußeren Kräften, solange sie konservativ sind.

Aufteilung:

$$\begin{aligned} \vec{F}_i^{\text{kons}} &= \vec{F}_i^A(\vec{r}_i) + \sum_{i \neq j} F_{ij}^I(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \\ &= -\frac{\partial U^A(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}{\partial \vec{r}_i} - \frac{\partial U^I(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}{\partial \vec{r}_i} \end{aligned}$$

mit

$$U^A = \sum_i U_i(\vec{r}_i), \quad \vec{F}_i^A = -\frac{\partial U_i(\vec{r}_i)}{\partial \vec{r}_i} \quad \text{äußere Kräfte wirken auf einzelne Teilchen}$$

$$U^I = \sum_{i < j} U_{i,j}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \quad \text{Annahme: 2 Teilchen WW.}$$

mit  $\frac{\partial U_{ij}}{\partial \vec{r}_i} \stackrel{3.NG}{=} -\frac{\partial U_{ij}}{\partial \vec{r}_j}$  hängt U nur von  $\vec{r}_i - \vec{r}_j$  ab

Annahme:  $\vec{F}_{ij}^I \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j = \vec{r}_{ij} \rightarrow$  hängt nur von  $r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|$  ab

$$\vec{F}_{ij}^I = -\frac{\partial U_{ij}^I(r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}{\partial \vec{r}_{ij}}$$

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_i U_i(\vec{r}_i) + \sum_{i < j} U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

z.B.:

$$\begin{aligned} U_i &= q_i \Phi(\vec{r}_i) \\ U_{ij} &= \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \end{aligned}$$

Allgemein: Abgeschlossene N-Teilchen System ( $N \geq 2$ ) mit ausschließlich konservativen Kräften haben also mindestens 10 Erhaltungsgrößen:

- der Gesamtimpuls  $\vec{P} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i$  (\*) 3 Größen
- ein Vektor,  $M\vec{R} - \vec{P} \cdot t$  (Int. von (\*)) 3 Größen  
der die Schwerpunktsbewegung beschreibt
- der Gesamtdrehimpuls  $\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$  3 Größen
- und die Gesamtenergie  $E = T + U$  1 Größe

10 Größen

Selten mehr: z.B. Lenzscher Vektor im Keplerproblem

## 1.6 Die Hamilton-Funktion (1833)

Newton: Kraft ist zentrale Größe

Hamilton: Energie ist zentrale Größe

Gegeben sei N-Teilchen System mit ausschließlich konservativen Kräften

$$F_i = -\frac{\partial U(r)}{\partial r_i} = \dot{p}_i \quad (3 \text{ DGL 2. Ordnung}) \quad (1)$$

$$r \equiv (r_1, r_2, \dots, r_{3N}) \quad p = (p_1, p_2, \dots, p_{3N}) \quad i = (1, \dots, 3N)$$

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} v_i^2 \quad p_i \equiv m_i v_i \quad \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} \quad , \text{ Potential } U$$

Gesamtenergie  $E = T + U$  wird durch die Hamilton-Funktion beschrieben:  
„Hamiltonian“:

$$\begin{aligned} H &= H(r, p) = T(p) + U(r) \\ &= \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m_i} + U(r) \end{aligned} \quad (2)$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial r_i} &= \frac{\partial U}{\partial r_i} \stackrel{(1)}{=} -\dot{P}_i \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \frac{p_i}{m_i} = \dot{r}_i \end{aligned}$$

$m_1 = m_2 = m_3 =$  Masse des ersten Teilchens

$m_4 = m_5 = m_6 =$  Masse des zweiten Teilchens

$\vdots$

äquivalent zu den Newton Gleichungen: Hamilton-Gleichungen: Bewegungsgleichungen im Hamilton-Formalismus

$$\begin{aligned} r_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial r_i} \end{aligned} \tag{3}$$

6N DGL 1. Ordnung (Hamilton)

3N DGL 2. Ordnung (Newton)

$$\frac{d}{dt}H(r(t), p(t)) = \sum_i \left[ \frac{\partial H}{\partial p_i} \underbrace{\dot{p}_i}_{-\partial H / \partial r_i} + \frac{\partial H}{\partial r_i} \underbrace{\dot{r}_i}_{\partial H / \partial p_i} \right] = 0$$

d.h. Energie ist erhalten. Bem:

- Im Gegensatz zu vektoriellen Kräften ist der Hamiltonian (die Hamilton Funktion) ein Skalar, und damit wesentlich leichter aufzustellen.
- Hamilton-Funktion kann für allgemeine Fälle (z.B. geschw. abhängige Potentiale oder zeitabhängige Potentiale (siehe später)) und hat dann nicht notwendigerweise die Bedeutung der Gesamtenergie.
- $(r, p)$  bilden den  $2 \cdot 3N$  dimensionalen Phasenraum der die Bewegung vollständig beschreibt.

Bsp: harmonischer Oszillator

gedämpfter harm. Oszillator

ebenes Pendel mit überschlag

## Newtonsche Mechanik: theoretisches Konzept

1.Def:

- Masse, Kraft, Energie

- Inertialsystem, beschleunigte Bezugssysteme
- konservative/ dissipative, innere/ äußere Kräfte

2. Bew. Gl.: N Teilchen, konservative Kräfte mit Pot  $U(r)$

$$r = (r_1, \dots, r_{3N})$$

$$m_i \ddot{r}_i = - \frac{\partial U(r)}{\partial r_i}$$

gewöhnlich = DGL 2. Ord i. A. nicht linear

3. Erhaltungssätze Schwerpunkt  $\vec{R}, \vec{P}, M = \sum_i m_i$

$$\bullet \quad \frac{d}{dt} \vec{p} = M \cdot \ddot{\vec{R}} = \underbrace{\vec{F}^A}_{\text{äußere Kraft}} \quad \text{abgeschlossenes System} \quad 0 \leftrightarrow \vec{p} = \text{const.}$$

Impulserhaltung

$$\bullet \quad \frac{d}{dt} \vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^A = \vec{M} \rightarrow 0 \leftrightarrow \vec{L} = \text{const.} \quad \text{Drehimpulserhaltung}$$

$$\bullet \quad \frac{d}{dt} (T + U) = \sum_i \vec{F}_i^{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}}_i \xrightarrow{\text{Kräftegleichgewicht}} 0$$

$E = T + U = \text{const.}$  Energieerhaltung

Alternativ: Hamilton Funktion mit Impuls  $p = (p_1, \dots, p_{3N}) \hat{=}$  Gesamtenergie

$$H(r, p) = T(p) + U(r) = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + U(r)$$

$$\rightarrow \dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial r_i} \quad 2 \times 3N \text{ DGL 1. Ord}$$

$(r, p)$  bilden den  $2 \times 3N$  dim Phasenraum

- Wichtig für Übergang zur QM und statistischen Mechanik
- Beschreibt Bewegung vollständig, d.h. geg. Bew. Gl. mit Anfangsbedingungen  $r_i(0), p_i(0)$ , so ist  $r(t)$  und  $p(t)$  für alle Zeiten vollständig bestimmt. Man sagt die klassische Mechanik ist deterministisch.

## Nichtlineare Dynamik und Chaos

- Man kann zeigen: Existieren für ein System mit  $2f$ -dim Phasenraum  $f$  Erhaltungsgrößen, so heißt das System Integrabel.

Bsp.:

- 1) Konservative Bewegung in 1D  $\rightarrow f = 1$   
Energie ist erhalten  $\rightarrow$  System ist Integrabel
- 2) 2-Körperproblem:  $f = 6$   
Erhaltung von Energie, Gesamtimpuls,  $\vec{L}^2, L_z \rightarrow$  System ist integrabel
- 3) 3-Körperproblem:  $f = 9$   
6 Erhaltungsgrößen  $\rightarrow$  i.A. nicht integrabel, kann chaotisch sein (Poincaré um 1900)

- Grund

Nichtlineare Bwe. Gl. können instabile Lösungen haben d.h. bei geringfügiger Änderung der Anfangsbedingungen zeigt System für lange Zeiten eine qualitativ andere Bewegung: „Schmetterlingseffekt“  
sog. deterministisches Chaos

- Bedingung für chaotisches Verhalten

- Anzahl der Freiheitsgrade  $f \geq 2$
- Nichtlinearität der Kraft
- Bsp: Vergleiche  
harm Oszillator  $F \sim r, U(r) \sim r^2$   
mit stabilem Fixpunkt und  $H(r)$   
Pendel:  $F \sim \sin \varphi, U \sim \cos \varphi$  und  $U(\varphi)$   
mit stabilen Fixpunkten in sinus Tälern und instabilen Fixpunkten auf den sinus Bergen

## 1.7 Schwingungen

Harm. Oszillator ist ein zentrales Modell der Physik

- analytisch lösbar, auch mit Reibung und Antrieb und in vielen Dimensionen

- lineares System

1D System mit Harm. Fkt.

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + U(q)$$

das bei  $q = q_0$  eine stabile Gleichgewichtslage besitzt.

Idee („harmonische Näherung“) : Taylor Entwicklung von  $k$  um  $q_0$

$$U(q) = \underbrace{U(q_0)}_{\text{oEdA} = 0} + \underbrace{\frac{dU}{dq}\bigg|_{q_0}}_{= 0, \text{ da GGWlage}} (q - q_0) + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{d^2U}{dq^2}\bigg|_{q_0}}_{=k} (q - q_0)^2 + \dots$$

$$\approx \frac{1}{2} k (q - q_0)^2 \equiv \frac{k}{2} x^2$$

Bew Gl:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad ; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$$

oder:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Lösungen sind  $\sin \omega t, \cos \omega t$  mit  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  Die allg. Lösung mit Anfangsbedingungen  $x_0 = x(0), p_0 = 0(0)$

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{m\omega} \sin \omega t$$

$$p(t) = p_0 \cos \omega t - mx_0\omega \sin \omega t$$

Mit

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (i^2 = -1)$$

$$x(t) = \text{Re}(Ae^{i\omega t} + Be^{i\omega t})$$

Im folgenden werden Schwingungen in 1D mit Reibung:

$$F_R = -\gamma \dot{x}(t)$$

und einer Zeitabhängigen externen Kraft:

$$F_{ext}(t) \quad \text{„Antrieb“}$$

bezeichnet.

### 1.7.1 Gedämpfte Schwingungen

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

Grenzfälle:

- $\gamma = 0 \rightarrow$  harm. Oszillator,  $x \sim e^{\pm i\omega t}$
- $\omega = 0, \quad \ddot{x} + \gamma \dot{x} = 0, \quad v = \dot{x}$   
 $\dot{v} = -\gamma v \quad \rightarrow \quad v \sim e^{-\gamma t}$

Ansatz:

$$x(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda = a + ib \in \mathbb{C}$$

eingesetzt:

$$(\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2)e^{\lambda t} = 0$$

$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0$  charakteristische Gleichung

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2}$$

$\rightarrow$  i.A. 2 Lösungen  $x_0(t) = e^{\lambda_1 t}, x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$

$D < 0$ : d.h.  $\gamma < 2\omega$ , komplexe Lösungen

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}$$

allg. Lösung:

$$x(t) = e^{-\gamma \frac{1}{2} t} (c_1 e^{i\Omega t} + c_2 e^{-i\Omega t})$$

$\gamma$  bewirkt Dämpfung und Änderung der Frequenz

$D > 0$ :  $\gamma > 2\omega$ : „Überdämpfte Schwingung“

$$\rightarrow x(t) = c_1 e^{i\lambda_2 t} + c_2 e^{i\lambda_1 t}$$

$D = 0$ :  $\gamma = 2\omega$

$\rightarrow$  wir erhalten

$$x(t) = C e^{-\frac{\gamma}{2} t}$$

d.h. nur eine Lsg. anstelle von 2 unabhängigen Lsg.

Variation der Konstanten:

$$x(t) = C(t) e^{-\frac{\gamma}{2} t}$$

$$\dot{x} = \left( \dot{C} - \frac{\gamma C}{2} \right) e^{-\frac{\gamma}{2} t}$$



$$\ddot{x} = (\ddot{C} - \gamma\dot{C} + \frac{\gamma^2 C}{4})e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

eingesetzt:

$$\begin{aligned} 0 &= (\ddot{C} - \gamma\dot{C} + \frac{\gamma^2 C}{4} + \gamma\dot{C} - \frac{\gamma^2 C}{2} + \omega^2 C)e^{-\frac{\gamma}{2}t} \\ &= (\ddot{C} + \underbrace{C(\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4})}_{=v})e^{-\frac{\gamma}{2}t} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \ddot{C} = 0, C(t) = C_0 + C_1 t$$

$\rightarrow$  allg:

$$x(t) = C_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} + C_1 t e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

„kritische gedämpfte Schwingung“

Bem:

- Allg. lineare DGL (mit konstanten Koeffizienten) n-ter Ordnung können durch einen Exponentialansatz gelöst werden.  
 $\rightarrow$  charakteristische Gl. ist Polynom vom Grad n
- Physikalische Bedeutung der Nullstellen von Polynomen:  
 Komplexe Nullstellen  $\hat{=}$  oszillatorische Lösungen  
 Reelle Nullstellen  $\hat{=}$  zerfallende Lösungen

## Gedämpfte Schwingungen (Wiederholung)

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x &= 0 \\ x(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_{1/2} &= \underbrace{-\gamma/2}_{\text{Dämpfung}} \pm \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}_{\substack{\text{für } \omega > 2\gamma \rightarrow \text{Schwingung} \\ \text{sonst Dämpfung}}} \end{aligned}$$

### 1.7.2 Der getriebene Oszillator

$$\underbrace{\ddot{x} + \gamma\dot{x} - \omega_0^2 x}_{\text{homogene DGL}} = f(t) \quad \begin{array}{l} \text{externer Antrieb } f(t) \\ \text{„Inhomogenität“ der DGL} \end{array}$$

Lösung der DGL:

$$\underbrace{x_{tot}}_{\text{bereits bekannt}} = \underbrace{x_{hom}(t)}_{\text{partikuläre Lösung}} + x(t)$$

Betrachten periodischen Antrieb

$$f(t) = f \cos(\omega t) = \frac{f}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

bzw.

$$f(t) = f e^{\pm i\omega t}$$

mit Exp. ansatz:  $x(t) = A \pm e^{\pm i\omega t}$

Eingesetzt:  $[\omega \pm i\omega\gamma + \omega_0^2] A \pm = f$  [Ermitteln mit  $z^*$ ]

$$\rightarrow A \pm = f \frac{\omega_0^2 - \omega^2 \mp i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

$$\rightarrow x(t) = \frac{1}{2}(A_+ e^{i\omega t} + A_- e^{-i\omega t})$$

$$= f \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + \gamma\omega \sin \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

$$= A \cos(\omega t - \varphi)$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow A(\omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} \quad \text{Amplitude}$$

$$\tan(y) = \frac{a}{b} \rightarrow y(\omega) = \arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad \text{Phase}$$

Resonanz bei  $\omega = \omega_0$ ,  $A$  groß für  $\gamma$  klein  $\gamma \rightarrow 0$  und  $\omega \rightarrow \omega_0$  „Resonanzkatastrophe“

z.B. Brücke, Tacoma Narrows Bridge 1940

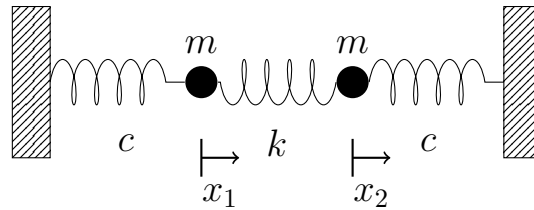
Gesamtlösung

$$x_{tot}^{(t)} = x_{hom}^{(t)} - x(t)$$
$$\xrightarrow{t \rightarrow \infty} x(t) \quad \text{„Stationäre Lösung“}$$

Resonanz wichtig:

- Schwingende Karosserieteile
- Schwingkreis (E-Dynamik)
- Molekülschwingungen etc.

### 1.7.3 gekoppelte Oszillatoren



$m_1$  und  $m_2$  sind aneinander und an zwei wänden mit federn gekoppelt (äußere federn mit  $c$  und innere feder mit  $k$ )

$$m\ddot{x}_1 = -cx_1 + k(x_2 - x_1) \quad (1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -cx_2 - k(x_2 - x_1) \quad (2)$$

System von gekoppelten DGL. Mit

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$$

ist (1) + (2):

$$m\ddot{y}_1 = -cy_1$$

(1) - (2):

$$m\ddot{y}_2 = -(c + 2k)y_2$$

→ entkoppelte DGL  
mit Frequenzen

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c + 2k}{m}}$$

Anfangsbedingungen: z.B.  $x_2(0) = a, \quad x_1(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$

$$y_1(t) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \omega_1 t \quad , \quad y_2 = -\frac{a}{\sqrt{2}} \cos \omega_2 t \quad \text{Eigenschwingungen}$$

eingesetzt:

$$x_1(t) = \frac{a}{2}(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t)$$

$$x_2(t) = \frac{a}{2}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)$$

Zusammenhang mit Eigenwertproblem

$$m\ddot{\vec{x}} = -V\vec{x}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad , \quad V = \begin{pmatrix} c + k & -k \\ -k & c + k \end{pmatrix}$$

Ansatz:

$$x_1(t) = a_1 e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x}_i(t) = -\omega^2 a_i e^{i\omega t}$$

eingesetzt:

$$-m\omega^2 e^{i\omega t} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = -V \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

mit  $\lambda = m\omega^2$

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (V - \lambda 1)\vec{a} = 0$$

Lösung für

$$\det(V - \lambda 1) = 0$$

$$(c + k - \lambda)^2 - k^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2(c + k)\lambda + (c - k)^2 - k^2 = 0$$

„Eigenfrequenzen“ Eigenwerte

$$\rightarrow \lambda_1 = c \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$\lambda_2 = c + 2k \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c + 2k}{m}}$$

Lösung der Eigenwertgleichung (1) für die Eigenwerte ergibt die „Eigenvektoren“ hier Eigenschwingungen

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{V}_{\substack{\text{Operator} \\ \text{Abbildung} \\ \text{Matrix}}} \cdot \underbrace{\vec{a}_i}_{\text{Eigenvektor}} = \underbrace{\lambda_i}_{\text{Eigenwert}} \cdot \underbrace{\vec{a}_i}_{\text{Eigenvektor}}$$

Eigenschwingungen

z.B. betrachte Molekül mit N Atomen (nicht lineare Mol)(für lineare Mol.  $3N - 5$  FG)

$$3N - 3 - 3 = 3N - 6$$

-3 Translation -3 Rotation also  $3N - 6$  Freiheitsgrade für innere Bewegung  
 $f = 3N - 6$  innere FG  $x_1, \dots, x_f$   
 mit Gleichgewichtslage  $x_1^{(0)}, \dots, x_f^{(0)} \rightarrow \frac{\partial V}{\partial x_i} \Big|_{x_i^{(0)}} = 0$   
 und Potential  $V(x_1, \dots, x_f)$   
 Entwickle  $V$  um  $\vec{x}^{(0)}$

$$\underbrace{V(x_1, \dots, x_f)}_{\text{oEdA}=0} = V(x_1^{(0)}, \dots, x_f^{(0)}) + \sum_i \underbrace{\left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)_{x_i^{(0)}}}_{=0} (x_i - x_i^{(0)})$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \underbrace{\left( \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0}_{V_{ij}} \underbrace{(x_i - x_i^{(0)})}_{\equiv x_i} \underbrace{(x_j - x_j^{(0)})}_{\equiv x_j} + \dots$$

Hessematrix:  $V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} x_i x_j$  harmonische Näherung Bew. GL:

$$m_i \ddot{x}_i = - \frac{\partial V}{\partial x_i} = - \sum_j V_{ij} x_j$$

massenbehaftete Koordinaten:  $q_i = \sqrt{m_i} x_i$

$$\rightarrow \boxed{\ddot{q}_i + \sum_j V_{ij} q_j = 0} \quad V_{ij} = \frac{V_{ij}}{\sqrt{m_i m_j}}$$

Exp. Ansatz:  $q_i(t) = q_i r^{i\omega t}$

$$\rightarrow \sum_j V_{ij} a_j - \omega^2 a_i = 0 \text{ charakteristische Gl.}$$

Mit

$$\mathcal{V} = \{V_{ij}\} \quad , \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ist  $(\mathcal{V} - \lambda I) \vec{a} = 0$  Eigenwertproblem

#### 1.7.4 Eigenschwingungen

$$\mathcal{V} = \{v_{ij}\} \quad i, j = 1, \dots, N \quad \vec{a} = (a_1, \dots, a_N)$$

$$\text{Eigenwertproblem: } \boxed{\mathcal{V} \vec{a} = \lambda \vec{a}} \quad \lambda = \omega^2$$

Eigenwerte  $\lambda_k$   $\det(\mathcal{V} - \lambda 1) \stackrel{!}{=} 0$  (1)

charakteristische Gleichung., Polynom N-ter Ordnung

Eigenvektoren  $\vec{a}_k$ : Lösungen (1) mit  $\lambda = \lambda_k$

orthogonal (bzw. Orthonormal)

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

→ Eigenwertproblem  $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_N)$  ist orthogonal

$$A^\top = A^{-1} \rightarrow AA^\top = 1A^\top A$$

A ist diagonalisierbar die Hessematrix  $\mathcal{V}$

$$A^\top V A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \Lambda$$

→ Lösungen:  $q_i(t) = a_{ik} e^{i\omega_k t} \quad (k = 1, \dots, N)$

Allg. Lsg.:

$$q_i(t) = \sum_k C_k q_{ik} e^{i\omega_k t}$$

mit Koeffizienten  $C_k$  aus Anfangsbedingungen

$$q_i(t) = \sum_k a_{ik} Q_k(t) \leftrightarrow \vec{q} = A \vec{Q}$$

$$Q_k(t) = C_k e^{i\omega_k t}$$

„Eigenschwingung“ oder Normalmoden

Pot.Energie:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} v_{ij} q_i q_j = \frac{1}{2} \vec{q}^\top V \vec{q} \\ &= \frac{1}{2} \vec{Q}^\top \underbrace{A^\top V A}_\Lambda \vec{Q} = \frac{1}{2} \vec{Q}^\top \Lambda \vec{Q} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N w_k^2 Q_k^2 \quad \text{pot. Energie in } \vec{Q}_k \text{ ist diagonal} \end{aligned}$$

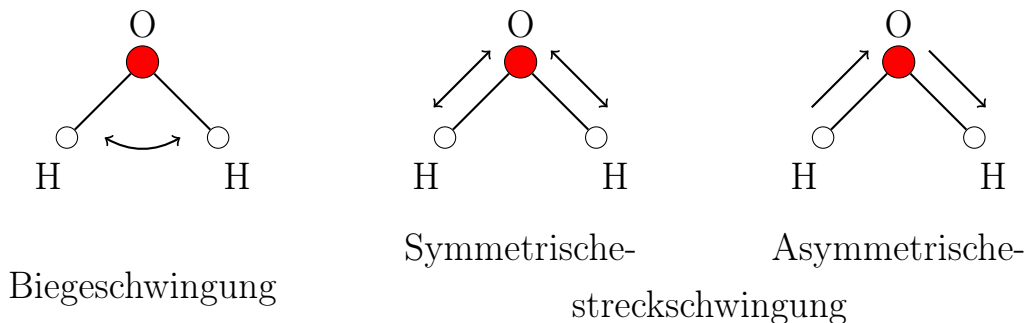
$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \sum_i \dot{q}_i^2 = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^\top \dot{\vec{q}} \\
&= \frac{1}{2} \dot{\vec{Q}}^\top \underbrace{A^\top A}_{=1} \dot{\vec{Q}} = \frac{1}{2} \dot{\vec{Q}}^\top \dot{\vec{Q}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \dot{Q}_k^2 \quad \text{kin. Energie ist auch Diagonal}
\end{aligned}$$

Mit  $P_k = \dot{Q}_k$  ist damit der Hamiltonian

$$H(Q, P) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (p_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2)$$

der in ein System unabhängiger Oszillatoren seperiert.

### Bsp: Normalmoden von Wasser



Bilder: Wasser Molekül mit Biegeschwingung und symmetrischer oder asymmetrischer Streckschwingung.

Anwendung: Wasser absorbiert (infrarot) Licht mit den Eigenfrequenzen:  $\omega_k$  sind exp. observable Größen  
→ Schwingungsspektroskopie

## 1.8 Das Zweikörperproblem

- beschränkt z.B. das Keplerproblem (Erde,Sonne) das H-atom, das 2-atomige Molekül
- analytisch lösbar

- Anwendung von Symmetrieüberlagerungen

2 Körper mit Massen  $m_i$ , Orten  $\vec{r}_i$ , Impulsen  $\vec{p}_i$  ( $i = 1, 2$ ) Wechselwirken durch ein Zentralpotential  $U(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$ . abgeschlossenes, konservatives System mit Energie

$$H = T + U = \sum_{i=1}^2 \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + U(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \quad (1)$$

Vorgehen:

- Separation der Schwerpunktsbewegung (Impulserhaltung)  
→ Reduktion auf Einkörperproblem (3 statt 6 Freiheitsgrade)
- Drehimpulserhaltung → 1D Problem
- Diskussion des Keplerproblems,  $k \sim 1/r$

(1.) Trafo in Schwerpunkts- und Relativbewegung Schwerpunktskoordinaten:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Relativkoordinaten:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ T &= \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} = \frac{m_1}{2} \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{r}}_2^2 \\ &\stackrel{(2)}{\rightarrow} \underbrace{\frac{m_1 + m_2}{2}}_{M/2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}_{\mu/2} \dot{\vec{r}}^2 = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} \end{aligned} \quad (3)$$

Gesamtmasse:  $M = m_1 + m_2$

reduzierte Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \rightarrow \begin{cases} m_1 & \text{für } \frac{m_1}{m_2} \ll 1 \\ \frac{m}{2} & \text{für } m_1 = m_2 = m \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Sonne Erde} \\ \text{2-atom Modell} \end{array}$$

Da Gesamtimpuls erhalten ist

$$\vec{P} = M \vec{R} = \vec{P}_0 = \text{const.}$$



ist schwerpunktsbewegungs, die unabhängig von Relativbewegung ist

$$\vec{R}(t) = \vec{R}(0) + \frac{\vec{P}(0)}{\mu}t$$

→ Separation von SP- und Relativbewegung  
oder Entkopplung → Einkörperproblem mit 3 (statt 6) Freiheitsgraden  
Beobachte Relativbewegung

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\nabla k(|\vec{r}|)$$

(2.) Drehimpulserhaltung Das Zentralproblem, d.h.

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \text{const.} \quad \text{also auch Richtung konstant}$$

oEdA sei  $\vec{L} = l\vec{e}_z$

Mit  $\vec{L} \perp \vec{r}$ , ist  $\vec{r} \perp \vec{e}_z$  und damit  $z(t) = \text{const.} \stackrel{\text{oEdA}}{=} 0$

d.h. Bewegung findet in x-y-Ebene statt. (nur noch 2 FG)

Polarkoordinaten:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad , \quad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$$

mit:

$$l = \mu(x\dot{y} - y\dot{x}) = \mu r \cos \varphi (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi) - \mu r \sin \varphi (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi)$$

$$l = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$$

ergibt sich für die Gesamtenergie

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r) = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \quad (7)$$

effektives Potential  $U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$  hat neben dem „normalen“ Radialterm  $U(r)$  noch den sogenannten Zentrifugalterm  $\frac{l^2}{2\mu r^2}$  oder Zentrifugalbarriere

→ 1D Systeme, Bewegungsgleichung ist lösbar

Lösung durch

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(r))}$$

ist:

$$\int_{t_0}^t dt' = t - t_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r'))}}$$

was  $r = r(t, E, l, r_0)$  ergibt die Bahnkurve  $r(\varphi)$  und wir erhalten

$$\begin{aligned} \dot{r}(\varphi) &= \frac{dr(\varphi)}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} \\ \frac{dr}{d\varphi} &= \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{\pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{eff}}(r))}}{\frac{l}{\mu r^2}} \\ \Rightarrow \varphi - \varphi_0 &= \pm \frac{l}{\sqrt{\mu}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{(E - U_{\text{eff}}(r))}} \end{aligned}$$

$r_0, p_0, E, l$  sind dann Anfangsbedingungen

### 1.8.1 Diskussion des Zweikörperproblems

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - U_{\text{eff}}(r')}}}$$

$r_0, \varphi_0, E, l \hat{=}$  Anfangsbedingungen des 3D Problems

$(z(0) = \dot{z}(0) = 0$  Anfangsbedingungen des 3D Problems)

- wegen  $\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}$  kann  $\dot{\varphi}$  nicht das Vorzeichen wechseln  $\rightarrow$  Drehung immer in selbe Richtung d.h. für  $E = U_{\text{eff}}$  ist  $r' = 0 \rightarrow$  Umkehrpunkte
- Bsp: Sei  $U_{\text{eff}}(r) = \alpha r^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2}$   
 $\alpha > 0, l \neq 0, E = E_0$
- $r$  oszilliert zwischen  $r_{\min}$  und  $r_{\max}$
- Form der Bahnkurve zwischen je 2 Umkehrpunkten gleich  
 $\rightarrow$  Bahn ist durch Teilschleife festgelegt
- Bahn ist nicht notwendigerweise geschlossen  $\Delta\varphi$  zwischen zwei Umkehrpunkten

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{l}{r^2} dr}{\sqrt{2\mu(E - U_{\text{eff}}(r))}}$$

$\rightarrow$  geschlossen, wenn nach  $n$  Umläufen  $n\Delta\varphi = m\pi \quad (n, m \in \mathbb{N})$

- Bsp:  $r^2$  oder  $\frac{1}{r}$  Potential  $\Delta\varphi = \pi$
- Für  $E = E_{\text{kin}}$  ist  $r = r_0 = \text{const.} \rightarrow$  Kreisbahn mit  $\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{l}{\mu r_0^2} t$
- Für  $l = 0$  verschwindet Zentrifugalbarriere
- $\dot{\varphi} = 0, \vec{r} \parallel \dot{\vec{r}} \rightarrow$  Bewegung zentral
- je nach Potential wird auch  $N \rightarrow 0$  möglich (unelastisch, wegen endlicher Größe der Teilchen)
- Standardfall  $l \neq 0$

$$\begin{aligned}
 U_{\text{eff}} &\xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty \quad (\text{endliche grÖÖße}) \\
 U_{\text{eff}} &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad \text{WW nicht „gebundener Zustand“} \\
 U_{\text{eff}} &= \min. \quad \text{„gebundener Zustand“}
 \end{aligned}$$

$E < 0$  : gebundene Bewegung (auch bei H-Atomen, Elektronenstruktur, H<sub>2</sub>-Molekül, Kernbewegung)

$E > 0$  : Streuung d.h. Teilchen kommt aus dem Unendlichen fliegt bis zum Umkehrpunkt  $r_0$  und verschwindet wieder Abstoßung bei  $r_0$  wegen Zentrifugalbarriere  $\frac{l^2}{2\mu r^2}$

bilder zu anziehendem-/abstoßendem Potential

### 1.8.2 Keplerproblem

d.h.  $U(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (\alpha > 0)$

$\alpha = Gm_1m_2$  Gravitations-Potential

$\alpha = -\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}$  Coulomb-Potential

$$\begin{aligned}
 U_{\text{eff}}(r) &= -\frac{\alpha}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2} \\
 \frac{dU_{\text{eff}}}{dr} &= \frac{\alpha}{r^2} - \frac{2l^2}{2\mu r^3} \stackrel{!}{=} 0 \quad r_0 = \frac{l^2}{\alpha\mu}
 \end{aligned}$$

Mit:

$$q = \int dr \frac{\frac{l}{r^2}}{\sqrt{2\mu E + 2\mu \frac{\alpha}{r} - \frac{l^2}{r^2}}}$$

mit

$$r = \frac{1}{s} \quad s = \frac{1}{r} \quad \frac{ds}{dr} = -\frac{1}{r^2}$$
$$q = - \int ds (2\mu \frac{E}{l^2} + 2\mu\alpha \frac{s}{l^2} - s^2)^{-\frac{1}{2}}$$

und

$$\int dx (c + 2bx - x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\arccos \frac{x-b}{\sqrt{b^2+c}}$$

ist

$$\varphi(r) - \varphi_0 = \arccos \frac{\frac{1}{r} - \frac{\alpha\mu}{l^2}}{\sqrt{\mu^2 \frac{\alpha^2}{l^4} 2p \frac{E}{l^2}}} = \arccos \frac{\frac{l^2}{\alpha\mu}(\frac{1}{r}) - 1}{\sqrt{1 + 2l^2 \frac{E}{\mu\alpha^2}}}$$

Mit  $p = \frac{l^2}{\alpha p}$  Abstand  $r_0$

$$\epsilon = \sqrt{1 + 2l^2 \frac{E}{\mu\alpha^2}} \quad \text{„Exzentrilität“}$$

$$\varphi_0 = 0$$

$$\text{folgt } \varphi = \arccos \frac{\frac{p}{r} - 1}{\epsilon}$$

oder:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}$$

Polar-Gleichung für Kegelschnitte:

$\epsilon > 1$   $E > 0$  Hyperbolen

$\epsilon = 1$   $E = 0$  Parabel

$\epsilon < 1$   $E < 0$  Ellipse

Bsp:

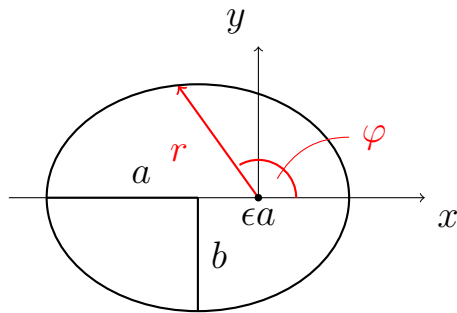
Merkur:  $\epsilon = 0,206$  schwer zu beobachten)

Erde:  $\epsilon = 0,017$

Mars:  $\epsilon = 0,043$  an ihm entdeckt)

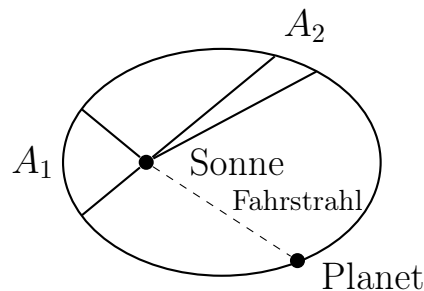
gebundene bewegung  $\rightarrow$  Keplersche Gesetze

1) Planetenbewegung sind Ellipsen mit Sonne in einen Brennpunkt



$$\frac{(x + a\epsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2) Flächensatz



Die vom Fahrstrahl pro Zeit  $dt$  überstrichene Fläche  $dA = r^2 \frac{d\varphi}{2}$  ist konstant

Also  $A_1 = A_2$  wurden vom Fahrstrahl in der gleichen Zeit überfahren.

3) Umlaufzeit  $T$  und die große Halbachse  $a$  verhalten sich wie

$$T^2 = \text{const.} \cdot a^3$$

- Kepler (1571-1701): aufgrund von Beobachtungen der Planeten
- Newton leitete Gravitationsgesetz aus Keplerschen Gesetzen ab
- KG3:  $\frac{r^3}{T^2} = \text{const.}$   
Kreisbahn:  $\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow r^3 \omega^2 = \text{const.} \rightarrow r \omega^2 = \text{const.} \cdot \frac{1}{r^2}$

$$\vec{r}(t) = r \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

$$\vec{F} = m \ddot{\vec{r}}(t) \sim \omega^2 \vec{r}(t) \quad |F| \sim \frac{1}{r^2} \quad \text{Gravitationsgesetz}$$

Streuung:

- $\epsilon = 1, E = 0 \rightarrow$  Parabel als Grenzfall

- $\epsilon > 1, E > 0 \rightarrow$  Hyperbeln

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \leftrightarrow \frac{p}{r} = 1 + \epsilon \cos \varphi$$

attraktives Potential:  $\alpha > 0$

$$\rightarrow p = \frac{l^2}{\mu\alpha} > 0$$

Asymptoten: def Richtung durch  $\cos \varphi_\infty = -\frac{1}{\epsilon}$

repulsives Potential:  $\alpha < 0 \rightarrow p < 0$

# Kapitel 2

## Lagrange-Formalismus

nach J-L Lagrange (1736-1813)

1788, „Mechanique Analytique“

section 0. Motivation

- Newtonsche Mechanik: alle Kräfte müssen bekannt sein

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum_i \vec{F}_i$$

- Aber oft nur Wirkung, nicht Kraft selbst bekannt  
bsp: Pendel (Abstand fest)  
oder Gas im geschlossenen Gefäß (Moleküle „gefangen“)

### 2.1 Zwangsbedingungen

→ schränken Bewegung des Systems auf einen Unterraum ein (z.B. Achterbahn, Bewegung in 2D)

Bsp.: Fadenpendel

- Gravitationskraft  $\vec{F}_a$  wirkt nach unten aber Faden der Länge  $l$  hat Masse  $m$  auf Kreisbahn (allg. Kugelschale)

$$\rightarrow \text{ZB } y = 0 \quad x^2 + z^2 = l^2 \quad (1)$$

- übersetzen der ZB Newtonschen Bew. Gl.  
→ Zwangskraft  $\vec{Z}$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_G \vec{Z} \quad (2)$$

- $\vec{Z}$  nicht von vornherein bekannt, nur Wirkung (1)

### Lösungsansätze

- $\vec{Z}$  bestimmen: Lagrange-Gln 1. Art
- Zwangsbedingungen durch Wahl geeigneter Koordinaten eliminieren (Bsp:  $\varphi(r)$  anstatt  $r(t)$ )  
 → Bew.-Gl. für neue Koordinaten  
 → Lagrange-Gln 2. Art

### Klassifizierung von ZB

- System mit  $f$  Freiheitsgraden ( $N$  Massenpkt  $f = 3N$ )  
 $x_1, \dots, x_f \rightarrow$  Anzahl ZB  $R < f$
- Formulierung der ZB:

$$g_\alpha(x_1, \dots, x_f, t) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, R \quad (3)$$

Bsp:  $f = 3$

$$g_\alpha(x, y, z, t) = y = 0$$

$$g_\alpha(x, y, z, t) = x^2 + z^2 - l^2 = 0$$

- jede ZB reduziert Anzahl der Freiheitsgrade  
 1 Massenpunkt:  
 keine ZB: Bew. 3D  
 erste ZB: Bew. auf Fläche  
 zweite ZB: Bew. auf Schnitt 2-er Flächen
  - ZB der Art (3) heißen holonom
  - ZB die Zeit  $t$  explizit enthalten  $\rightarrow$  rheonom
  - ZB die Zeit  $t$  nicht explizit enthalten  $\rightarrow$  skleronom
- Bsp für nicht-holonom:  
 $g_k(\vec{r}) = r - R < 0$  (Inneres einer Kugel)  
 $g_k(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = 0$  (Geschw. benötigt)



## 2.2 Lagrange-Gl 1.Art

- Eine holonome ZB: Beschränkung der Bewegung eines Teilchens auf eine Fläche

$$g_1(\vec{r}, t) = y = 0 \quad (xz - \text{Ebene})$$

oder

$$g_2(\vec{r}, t) = x^2 + z^2 - l^2 = 0 \quad (\text{Kugelschale mit Radius } l)$$

- keine weitere Einschränkung der Bew. innerhalb dieser Fläche durch die ZB

→  $\vec{Z}$  kann keiner Komponente tangential zur Fläche haben

→  $\vec{Z}$  ist orthogonal zur Fläche, die durch  $g$  gegeben ist

→ wird erfüllt durch Ansatz

$$\vec{Z}(\vec{r}, t) = \lambda(t) \nabla g(\vec{r}, t) \quad (4)$$

mit zeitabhängigem Parameter  $\lambda(t)$

$$\text{Bsp: } \nabla g_1(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla g_2(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix}$$

- Ansatz (4) zwar plausibel, kann aber nicht bewiesen werden  
→ (4) ist eigenständiges Axiom der Mechanik

### Bemerkung

1. Skalare Fkt 2er Variablen  $f(x, y) \rightarrow$  „Gebirge“ in 3D  
→ partielle Abl. zeigen in Richtung des maximalen Anstiegs

Bsp: Kreiskegel

$$z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

„Höhenlinien“

2. Implizit durch holonome ZB  $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$

$$\text{Bsp: } F = z^2 - x^2 - y^2 = 0$$

$$\vec{\nabla} F = - \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} \rightarrow \text{senkrecht auf Kugel}$$

3. Kraft  $\sim \vec{\nabla}g$  legt nahe, dass ZB  $g$  als Art „Potential“ verstanden werden kann

- Aus (4) und (2)  $\rightarrow$  Lagrange-Gln 1. Art  
für 1 Teilchen unter einer ZB:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda(t)\vec{\nabla}g(\vec{r}, t) \quad (5)$$

$$g(\vec{r}, t) = 0$$

(4 Gln für 4 Unbekannte  $x, y, z, \lambda$ )

- Zwei holonome ZB Beschränken die Bewegung auf Raumkurve  
 $\rightarrow \vec{\nabla}g_1$  und  $\vec{\nabla}g_2$  unabhängig voneinander, senkrecht auf Kurve  
 $\rightarrow \vec{Z}(\vec{r}, t) = \lambda_1(t)\vec{\nabla}g_1(\vec{r}, t) + \lambda_2(t)\vec{\nabla}g_2(\vec{r}, t)$   
 $\rightarrow$  Senkrecht (häckchen)
- Verallgemeinerung auf R ZB und N Teilchen ( $f = 3N$ )  $x \equiv (x_1, \dots, x_{3N})$

$$m_n \ddot{x}_n = F_n + \sum_{\alpha=1}^R \lambda_{\alpha}(t) \frac{\partial g_{\alpha}(x, t)}{\partial x_n} \quad n = 1, \dots, 3N$$

$$g_{\alpha}(x, t) = g_{\alpha}(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, R$$

Lagrange-Gln 1. Art für  $3N$  Variablen und  $R$  holonome ZB ( $3N + R$  Gln für  $3N+R$  unbekannte  $x_n, \lambda_{\alpha}$ )

Bsp: 2 Teilchen, 1ZB  $g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$

$$\begin{aligned} - g &= g(\vec{r}_1, t) \rightarrow \vec{Z}_1 = \lambda(t)\vec{\nabla}_1 g(\vec{r}_1, t) \\ - g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) &= g(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - l = 0 \\ &\rightarrow \vec{Z}_1 = -\vec{Z}_2 \end{aligned}$$

### Bemerkungen

1. Zusätzliches Axiom (4)  $\rightarrow$  nichttriviale Verallgemeinerung der Newton-Axiome

2. d'Alembertsche Prinzip ( virtuelle Verrückungen)
3. LG 1 insbesondere in technischer Mechanik. Physik hauptsächlich LG 2. Art
4. Erhaltung von Impuls, Energie, Drehimpuls wenn Zwangsbedingungen entsprechende Symmetrie erhalten

## Lagrange Formalismus

Beispiele Zwangsbedingungen:

- Körper auf Tisch  $\rightarrow z = 0$
- Fadenpendel  $\rightarrow y = 0 \rightarrow g_1 = y = 0 \quad x^2 + z^2 = l^2 \rightarrow g_2 = x^2 + z^2 - l^2 = 0$

allgemein:  $R$  ZB  $g_\alpha(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, R$

holonome ZB

Zwangskräfte:  $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_G + \vec{Z}$

- bechränkt Bewegung auf eine Fläche
- innerhalb Fläche keine Einschränkung

$\rightarrow \vec{Z}$  ist orthogonal zur Fläche (zu Beweisendes axiom)

Ansatz:  $\vec{Z}(\vec{r}, t) = \lambda(t) \text{grad} g(\vec{r}, t)$

hier fehlt was vielleicht was

Bsp: Tisch:  $g = z = 0$

hier fehlt was noch mehr

Lagrange-Gl. 1. Art  $3N + R$  Gl.

Bsp: Atwoodsche Fallmaschiene (1784)

massenlose Rolle (Radius  $R$ ), über die 2 Massen (reibunglos) verbunden sind, d.h. 2 Massen  $\rightarrow$  6 Freiheitsgrade

ZB

$$y_1 = 0 = y_2$$

$$x_1 = -R, x_2 = R$$

$$g(z_1, z_2) = z_1 + z_2 + l = 0 \quad l = L - \pi Rl = \text{Seillänge}$$

→ keine Dynamik in  $x_i$  und  $y_i$

→ es reicht, Bewegungs-Gl. für  $z_i$  zu betrachten

Zwangskräfte:  $z_i = \lambda \frac{\partial g}{\partial z_i} = \lambda$  in Richtung  $z_i$

$$m_1 \ddot{z}_1 = -m_1 g + \lambda$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = -m_2 g + \lambda$$

$$\frac{d^2}{dt^2} g(z_1, z_2) = \ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = 0$$

$$\Rightarrow -g + \frac{\lambda}{m_1} - g + \frac{\lambda}{m_2} = 0 \Rightarrow \lambda 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\ddot{z}_1 = -g + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} = g \frac{2m_2 - (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$$

$$z_1(t) = z_1(0) + \dot{z}_1(0)t + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \frac{g}{2} t^2$$

## 2.3 Lagrange-Gl. 2. Art

Ausgangspunkt: Lag. Gl. 1. Art. (1)

$$m_1 \ddot{x}_1 = F_n + \sum_{\alpha} \frac{\partial g_{\alpha}(x)}{\partial x_n} \quad (1)$$

$$x = (x_1, \dots, x_{3N}) \quad n = 1, \dots, 3N \quad g_{\alpha}(x) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, R$$

Die Anzahl der Freiheitsgrade  $f = 3N - R$

Idee: Führe „generalisierte“ (oder verallgemeinerte) Koordinaten ein  $q = (q_1, \dots, q_t)$

- die die Lage aller Teilchen festlegen, d.h.

$$x_n = x_n(q, t) = x_n(q_1, \dots, q_t, t) \quad n = 1, \dots, 3N \quad (2)$$

- ZB  $q_\alpha$  sollen für beliebige  $q_i$   
hier fehlt was

$$g_\alpha(x_1(q, t), \dots, x_{3N}(q, t), t) = 0 \quad (3)$$

→ ZB schränken Bewegung der  $q_i$  nicht ein

Bsp: Ebenes Pendel mit variabler Länge  $l(t)$

$$x = l(t) \sin \varphi = x(\varphi, t)$$

$$z = -l(t) \cos \varphi = z(\varphi, t)$$

$$y = 0 = y(\varphi, t)$$

d.h.  $\varphi$  ist verallg. Koord., die die ZB

$$\begin{aligned} g(\vec{r}, t) &= x^2(\varphi, t) + y^2(\varphi, t) - l^2(t) \\ &= l^2 \cos^2 \varphi + l^2 \sin^2 - l^2 = 0 \end{aligned}$$

für alle Werte  $\varphi$  erfüllt.

2. Bsp: Teilchen im Kreiskegel → general. Koord.  $r, \varphi$

Zylinderkoordinaten

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = r \cot \alpha \quad \alpha \text{ Azimutalwinkel } \varphi \text{ Himmelsrichtungs Winkel}$$

Eliminierung der Zwangskräfte

Ausgangspunkt: Gl. (1)

Nach (3) hängen ZB  $g_\alpha$  nicht von  $q_i$  ab

$$\frac{dg_\alpha}{dq_k} = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1, \dots, f \quad (4)$$

Gl. (1) multipliziert mit  $\partial x_n / \partial q_n$  ergibt:

$$\sum_n m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \sum_n \left[ F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \right]$$

$$\boxed{\sum_n \left[ m_n \ddot{x}_n - F_n \right] \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = 0} \quad (5)$$

$$n = 1, \dots, 3N \quad k = 1, \dots, f$$

Bem:

- (5) enthält keine Zwangskräfte, nur f Gl. aber die Transformation  $\frac{\partial x_n}{\partial q_k}$
- Durch Einführung der Lagrange-Funktion  $L = T - U$  kann (5) wesentlich vereinfacht werden

Dazu betrachten wir:

$$\dot{x}_n = \frac{d}{dt}x_n(q, t) = \sum_k \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_n}{\partial t} = \dot{x}_n(q, \dot{q}, t) \quad (6)$$

mit general. Geschw.  $\dot{q}_i$  Es gilt:

$$\frac{\partial \dot{x}_n(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_n(q, t)}{\partial q_k} \quad (7)$$

Mit

$$T = T(\dot{x}) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \dot{x}_n^2 \quad (8)$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} T = T(q, \dot{q}, t) &= \frac{1}{2} \sum_n m_n \left[ \sum_k \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_n}{\partial t} \right] \left[ \sum_i \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_n}{\partial t} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \sum_n m_n \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k + \underbrace{\sum_k \sum_n m_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \frac{\partial x_n}{\partial t}}_{=m_{ik}} \dot{q}_k \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_n m_n \left( \frac{\partial x_n}{\partial t} \right)^2 \\ T(q, \dot{q}, t) &\equiv \sum_{i,k} m_{ik}(q, t) \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_k b_k(q, t) \dot{q}_k + c(q, t) \end{aligned} \quad (9)$$

Bem:

- Die Größe T in (8) und (9) bezeichnet verschiedene Funktionen der Argumente, stellt aber die gleiche physikalische Größe dar.
- Da  $x_n$  linear in  $\dot{q}_k$  ist (7), ist die kin. Energie maximal quadratisch in den  $\dot{q}_k$
- Hängen die  $x_n$  nicht explizit von der Zeit ab,  $x_n = x_n(q)$  so wird Gl. (9)

$$T(q, \dot{q}) = \sum_{i,k} m_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k$$

Wir bilden die Ableitung

$$\frac{\partial T(q, \dot{q}, t)}{\partial q_k} \stackrel{(8)}{=} \sum_n m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k} \quad (10)$$

$$\frac{\partial T(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_k} = \sum_n m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} \stackrel{(7)}{=} \sum_n m_n \dot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \quad (11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_n n m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} + \sum_n m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k} \quad (12)$$

$$\left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} - \sum_l \frac{\partial^2 x_n}{\partial q_l \partial q_k} q_l + \frac{\partial^2 x_n}{\partial t \partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \sum_l \frac{\partial x_n}{\partial q_l} q_l + \frac{\partial x_n}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{dx_n}{dt} \right]$$

Beachte: Der erste und der zweite Term von (12) kommt auch in (5)

Def: verallgemeinerung der Kräfte:

hier fehlt was

Beachte konservative Kräfte

$$F_n = - \frac{\partial U(x)}{\partial x_n}$$

Mit Trafo  $x_n = x_n(q, t)$  ist  $U(q, t) = U(x_q(q, t), \dots, x_{3N}(q, t))$

Damit ergibt sich die verallgemeinerte Kraft:

$$Q_k = \sum_n F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = - \sum_n \frac{\partial U(x)}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = - \frac{\partial U(q, t)}{\partial q_k} \quad (15)$$

Damit wird (14) (da  $\partial U / \partial \dot{q}_k = 0$ )

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial (T - U)}{\partial q_k} \quad (16)$$

Def der sogenannten Lagrange Funktion:

Lagrange-Gleichungen

N Teilchen,  $x = (x_1, \dots, x_{3N}) = \{x_n\} \quad k = 1, \dots, 3N$

R Zwangsbedingungen  $g_\alpha(x, t) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, R$

Lagrange-Gl- 1. Art:

$$m_n \ddot{x}_n = F_n + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}$$

Verallg. Koord.:  $1 = (q_1, \dots, q_f) = \{q_k\} \quad k = 1, \dots, f \quad f = 3N - R$   
mit  $x_n = x_n(q, t) \quad , \quad g_\alpha = g_\alpha(q, t) = 0$

$$\rightarrow \frac{\partial g_\alpha}{\partial q_k} = 0$$

Eliminierung der Zwangskräfte

$$\sum_n m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \underbrace{\sum_n F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k}}_{Q_k} \quad k = 1, \dots, f \text{ Gl. ohne Zwangskräfte}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k = - \frac{\partial U(q, t)}{\partial q_k}$$

Lagrange-Fkt.:  $L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t)$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}} \quad \text{Lagrange-Gl (2. Art)}$$

Diskussion:

- 1.) Gl: (18) stellt ein System von  $f = 3N - R$  DGLn 2. rd. dar d.h. eine Vereinfachung der Lagrange-Gl. 1. Art, aber ohne explizit gegebene Zwangskräfte
- 2.) Da es i.a. unterschiedliche verallg. Koord.  $q_k$  für gegebene Probleme gibt, ist  $L$  nicht eindeutig. Weiterhin sind Zusatztherme zu  $L$  möglich, die die Bew. Gl. nicht ändern (siehe Übungen).  
Daher ist  $L$  eine theoretische Größe, im Vergleich zu direkt messbaren Größen wie  $T$  und  $U$ .  
Die allg. Form der Lagrange-Gl. bleibt aber gleich „Forminvarianz“  
(Nicht so bei den Nowton-Gl. z.B. in Polar Koord. gilt  $m\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r}$  und  $mr^2\ddot{\varphi} \neq -\frac{\partial U}{\partial r}$ )
- 3.)  $L$  ist eine Skalare Größe  $\rightarrow$  Leichter aufzustellen als vektorielle Kräfte im  $\mathbb{R}^{3N}$ . Zudem ist  $L$  eine einfache Funktion der Variablen.
- 4.) Liegen keine Zwangskräfte vor, so sind die  $q_k$  einfach die kartesischen Koordinaten  $x_n$  und mit

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_n^{3N} m_n \dot{x}_n^2 - U(x)$$



$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} &= m_n \ddot{x}_n \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} &= - \frac{\partial U}{\partial x_n} \\ \rightarrow m_n \ddot{x}_n &= - \frac{\partial U}{\partial x_n} \quad \text{Newton Bwe- Gl.}\end{aligned}$$

- 5.) Bei geschwindigkeitsabhängigem Potential muss die Def. der allg. Kraft erweitert werden,  $U = U(q, \dot{q}, t)$

$$Q_k = - \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}$$

→ führt wieder auf Lagrange-Gl.

wichtigstes Bsp. ist Lorenz Kraft mit Potential

$$U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \underbrace{e\Phi(\vec{r}, t)}_{\text{el. Pol}} - \underbrace{\frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}}}_{\text{Vektorpotential}}$$

- 6.) Wesentlich ist die Wahl der verallg. Koord.  $q_k$ , die das betrachtete „System“ definieren.

Restliche Freiheitsgrade werden vernachlässigt oder über Reibungsterme oder externe zeitabhängige Funktionen berücksichtigt.

Bsp 1: Schiefe Ebene mit Steigung  $\alpha$ . Achse  $s$  liegt in der schiefen Eben ist also die verallg. Koord

$$x(t) = s(t) \cos \alpha \quad z(t) = s(t) \sin \alpha$$

Mit  $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)$  und  $U = mgz$

ist

$$L(s, \dot{s}) = T - U = \frac{m}{2} \dot{s}^2 - mg \sin \alpha s$$

mit Lagrange-Gl.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m \ddot{s} = \frac{\partial L}{\partial s} = -mg \sin \alpha$$

mit Lösung:

$$s(t) = -\frac{g}{2} \sin \alpha t^2 + v_0 t + s_0$$

Bsp 2: Kreiskegel [bild]

kart. Koord:  $L = T + U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$

Zylinder Koord:

$$x = r \cos \varphi \quad \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi}$$

$$y = r \sin \varphi \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi}$$

$$z = r \cot \alpha \quad \dot{z} = \dot{r} \cot \alpha$$

→ verallg. Koord. z.B.  $r, \varphi$

$$L = \frac{m}{2} \left[ r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 (1 + \cot^2 \alpha) \right] - mgr \cot \alpha = L(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi})$$

Lagrange-Gl.:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{m}{2} (1 + \cot^2 \alpha) 2\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + mg \cot \alpha = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} [2r^2 \dot{\varphi}] = m [2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2 \ddot{\varphi}] = 0$$

Reibungskräfte

z.B. Stokessche Reibungskraft

$$F_n^R = -\gamma_n \dot{x}_n$$

Reibungskräften kann kein Potential zugeordnet werden

Daher zurück zu Gl.(15)

$$\sum_n m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \sum_n F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = Q_k$$

mit verallg. Kräften

$$Q_k^R = \sum_n F_n^R \frac{\partial x_n}{\partial q_k}$$

Rayleisghsche Dissipationsfunktion

$$D(\dot{x}) = \sum_n \frac{\gamma_n}{2} \dot{x}_n^2$$

$$\rightarrow D(q, \dot{q}, t) = \sum_n \frac{\gamma_n}{2} x_n(q, \dot{q}, t)$$

$$Q_k^R = - \sum_n \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \stackrel{(7)}{=} - \sum_n \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_n} \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial D(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_k}$$

$$(7) : \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_n}{\partial q_k}$$

→ Lagrange-Gl. mit Reibung

### 2.3.1 Lagrange Formalismus

verallgemeinerte Koordinaten  $q = (q_1, \dots, q_f)$   $f = 3N - R$   
 n beschw.  $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$

$$L(q, \dot{q}, t) = T - U$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad K = 1, \dots, F$$

### 2.3.2 Energieerhaltung

Wir betrachten

$$\frac{d}{dt} \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \sum_k \dot{q}_k \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{\partial L / \partial q_k} + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k$$

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t} \\ \frac{d}{dt} \left( \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) &= - \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

→ Erhaltungssatz

wenn  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  ist  $\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L$  erhalten.

→  $k = U(q) \neq U(q, t)$

Hängen zB nicht explizit von der Zeit ab,  $x_n = x - n(q) \neq x_n(q, t)$  sowie das Potential  $U$  nicht explizit von den geschwind.  $U = U(q)$

ist

$$T = \sum_{k,l} m_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l = T(q, \dot{q})$$

und

$$\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2T(q, \dot{q})$$

Damit folgt mit:  $\partial L / \partial t = 0$

$$\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = -L = T + U = E = \text{const.} \quad \text{Energieerhaltung}$$

## 2.4 Symmetrie und Erhaltungsgrößen

Lagrange-Formelismus erleichtert das Finden von Erhaltungsgrößen

**Def:** 1) Zyklische Koordinate  $q_k$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

2) Verallgemeinerte (oder "kanonisch konjugierter") Impuls

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

Mit  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$

Wenn  $q_k$  zyklisch, ist  $p_k$  erhalten

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \rightarrow p_k = \text{const.}$$

Bsp: freies Teilchen

$$L = T = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 \text{ hängt von } \vec{r} \text{ ab} \rightarrow \vec{r} \text{ ist zyklisch Koord.}$$

$\rightarrow$  damit  $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$  erhalten

Bem: Bezeichnung verallg. Impuls  $p$

$$L = \frac{m}{2} \dot{r}^2 - U(r) \rightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \text{ kinematischer Impuls}$$

Die Äquivalenz zwischen verallg. Impuls (2) und kinematischen Impuls  $m\dot{r}$  gilt für Geschw.-unabhängige Potentiale.

(gegen)- Bsp: elektromagnetisches Potential mit Vektorpotential  $\vec{A}$

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A} \quad \text{kan. Impuls}$$

$$m\dot{\vec{r}} = \vec{p} - q\vec{A} \quad \text{kinem. Impuls}$$

Gl. (3) beschreibt Zusammenhang zwischen

- Symmetrie oder Invarianz

zB System verändert sich nicht bei Translation in  $q_k$  d.g.  $L$  kann nicht von  $q_k$  abhängen  $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$  und

- Erhaltung

zugehöriger verallg. Impuls  $p_k$  ist erhalten:  $\frac{dp_k}{dt} = 0$

allg. Idee:

geg. Erhaltungsgröße  $f$ , mit  $\frac{d}{dt}f(q, \dot{q}, t) = 0$  bildet eine "Konstante der Bewegung oder erstes Integral"

→ erleichtert Lösung der Lagrange-Gl.

→ Wähle verallg. Koord. so, da möglichst viele Erhaltungsgrößen aufgestellt werden, da

- jede Erhaltungsgröße (zB  $E, \vec{p}, \vec{L}$ ) verringert die Anzahl der Integrationen der Bew.Gl unter 1.
- Erhaltungsgrößen sind nützlich bei Interpretation zB Drehimpulserhaltung → 2. Keplersche Gesetz
- geg. genügende Anzahl von Erhalt. größen  
→ system kann nicht chaotisch sein

Bsp: Kreiskegel: verallg. Koord.  $r, \varphi$

$$L = \frac{m}{2}[r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2(1 + \cot^2 \alpha)] - mg \cot \alpha r$$

Bew.Gl:

$$2\dot{r}\dot{\varphi} - r\ddot{\varphi} = 0 \quad (1)$$

$$(1 + \cot^2 \alpha)\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - g \cot \alpha = 0 \quad (2)$$

$L$  hängt nicht von  $\varphi$  ab →  $\varphi$  ist zykl. Koord.

$$\rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = \text{const.} \quad (3)$$

- Erhaltung der  $z$ -Komp. der Drehimpulses
- Energieerhaltung

$$E = T + U = \text{const.} \quad (4)$$

(3) und (4) sind DGL 1. Ord. während Gl. (1), (2) DGL 2. Ord. sind.

→ leite (3), (4) aus (1), (2) her:

1. Multiplikation: (1),  $r$ :  $2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = 0$   
 $\rightarrow \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \rightarrow r^2\dot{\varphi} = \text{const.}$
2. Multiplikation von (2) mit  $\dot{r}$ :  $(1 + \cot^2 \alpha)\dot{r}\ddot{r} - \dot{r}\frac{p_\varphi^2}{m^2 r^3} + g \cot \alpha \dot{r} = 0$  und Gl. (3)

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{d}{dt}[(1 + \cot^2 \alpha)\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{1}{m^2 r^2}p_\varphi^2 + g \cot \alpha r] &= 0 \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{E}{m}\right) = 0 \end{aligned}$$

Integration von (4) mit

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 &= [E - \frac{m}{2}\frac{p_\varphi^2}{m^2 r^2} - mg \cot \alpha r] \frac{2}{m} \frac{1}{(1 + \cot^2 \alpha)} \\ 1 + \cot^2 \alpha &= \frac{a \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 1/\sin^2 \alpha \end{aligned}$$

Separation der Variablen:

$$t = \pm \int \frac{dr}{\frac{2}{m}[E - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - mg \cot \alpha r] \sin \alpha} \quad (5)$$

und damit  $r(t)$

Damit kann Gl. (3) integriert werden

$$\varphi(t) = \frac{p_\varphi}{m} \int \frac{dt}{r^2(t)} \quad (6)$$

Vgl mit Zentralproblem: effektives Potential

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{mg \cot \alpha r}{\gamma} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}$$

minimum bei:  $\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial r} = \gamma \frac{p_\varphi^2}{2mr^3} = 0$

### 2.4.1 Noether-Theorem

Emmi Noether (1882 - 1935), deutsche Mathematikerin

Verallg. des Zusammenhangs zwischen Invarianz und Erhaltung

Geg:  $L = L(q, \dot{q}, t)$  mit Lösung  $q(t) = (q_1(t), \dots, q_f(t))$

## „Noether Theorem“

Ist  $L$  invariant unter der Trafo

$$q_i(t) \rightarrow q_i(t, \alpha) \quad (1)$$

also

$$L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (2)$$

so ist die gröÙe

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \quad (3)$$

erhalten.

Bsp. für Trafos sind:

- Transformation  $q_i = q_i + \alpha$
- Rotation um geg. Achse mit Winkel  $\alpha$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) \Big|_{\alpha=0} &\stackrel{(2)}{=} \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t), \dot{q}(t), t) \Big|_{\alpha=0} = 0 \\ 0 &= \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_i \underbrace{\left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}}_{=0, \text{ wenn } q_i \text{ Lösung}} \Big|_{\alpha=0} + \underbrace{\frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}}_{=0} \Big|_{\alpha=0} = 0 \end{aligned}$$

**Bem:** Beweis gilt für alle  $\alpha$ , also auch für  $\alpha = 0$ . Mit  $\alpha = 0$  werden oft Ausdrücke einfacher.

**Invarianz**

Zyklische Variable  $q_a$  mit  $\frac{\partial L}{\partial q_a} = 0 \leftrightarrow$  verallg. Impuls  $p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \text{const.}$

zB:  $L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 \rightarrow p = m\dot{x} = \text{const.}$

Allg: Ist  $L(q(t), \dot{q}(t), t)$  invariant bzgl.  $q_i(t) \rightarrow q_i(t, \alpha)$  ist die Größe

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \quad \text{erhalten}$$

**Verallg.:** Falls  $L$  nicht invariant bzgl. Trafo, aber gilt

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) \Big|_{\alpha=0} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t), \dot{q}(t), t)}_{=0} + \frac{d}{dt} F(q(t), \dot{q}(t), t)$$

mit beliebiger Funktion  $F$ , so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial \alpha} + \frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} + \frac{dF}{dt} \\ &= \sum_i \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + F \right]}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

und damit

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + F(q, \dot{q}, t) \quad (*)$$

ist erhalten.

**Translation:** Lagrange Funktion  $L(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$  sei invariant unter Trafo

$$\vec{r}_i(t) \rightarrow \vec{r}_i(t, \alpha) = \vec{r}_i(t) + \alpha \vec{e}$$

wobei  $\vec{e}$  ein beliebiger (aber konst.) Einheitsvektor ist.

Gilt zB wenn Pot.  $U$  nur von Differenzvektoren abhängt

$$\vec{r}_i(t, \alpha) - \vec{r}_j(t, \alpha) = \vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)$$

Damit ist

$$\frac{\partial \vec{r}_i(t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \vec{e}$$

und

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \vec{e} = \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \vec{e} = \vec{p} \cdot \vec{e} \quad \text{ist die erhaltene Größe}$$



Da  $\vec{e}$  beliebig ist, ist Gesamt Impuls erhalten. Bei speziellen Vektor  $\vec{e}_0$  ist nur  $\vec{p} \cdot \vec{e}_0$  Komponente erhalten d.h.

Invarianz bzgl. Translation um  $\vec{e} \leftrightarrow$  Impuls  $p_e$  ist erhalten.  
Symmetrie: „Homogenität der Raumes“

anschaulich: keine Hindernisse im Raum

**Rotationsinvarianz** Sei

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x^2 + y^2 + z^2)$$

in Zylinderkoord:

$$L(r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(r^2, z)$$

ist bzgl. der Trafo  $\varphi \rightarrow \varphi + \alpha$  invariant

Folglich ist

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{\alpha=0} = mr^2 \dot{\varphi} \frac{\partial(\varphi + d)}{\partial \alpha} = mr^2 \dot{\varphi} = L_z$$

erhalten

Invarianz bzgl. Drehung um  $\vec{e} \leftrightarrow$  Drehimpuls  $L_e$  ist erhalten.  
Symmetrie: Isotropie des Raumes

d.h. keine Richtung ausgezeichnet.

**Translation in der Zeit**

$$t \rightarrow t + \alpha. \text{ d.h. } q_i(t, \alpha) = q_i(t + \alpha)$$

Damit

$$\left. \frac{\partial q_i(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial q_i}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{\alpha=0} = \dot{q}_i$$

$$\left. \frac{\partial \dot{q}_i(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \ddot{q}_i$$

Betrachte

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t+\alpha), \dot{q}(t+\alpha), t) \right|_{\alpha=0} &= \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i(t+\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i(t+\alpha)}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} \\ &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{dL(q(t), \dot{q}(t), t)}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) \\ \rightarrow \left. \frac{\partial L}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} &= \frac{dL}{dt} \text{ falls } L \text{ nicht explizit von } t \text{ abhängt d.h. } \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

mit (\*) und  $F(q, \dot{q}, t) = -L(q, \dot{q}, t)$ , somit ist erhalten

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(q, \dot{q}) &\text{ Formel hergeleitet bei Energieerhaltung} \\ &= T + U = E = \text{const. d.h. Energieerhaltung} \end{aligned}$$

Invarianz unter Zeittranslation  $\leftrightarrow$  Energieerhaltung  
Symmetrie: Homogenität der Zeit

anschaulich: Experiment verläuft heute genauso wie morgen

**Bem:**

- Die durch das Noether Theorem beschriebene Beziehung

Invarianz/Symmetrie  $\leftrightarrow$  Erhaltung

ist fundamental und allg. gültig. Gilt also auch in QM und relativistischer Mechanik.

- zB: liefert die Erhaltung von Ladung, Isospin, ...  
Konstruktionsbedingungen für entsprechende Theorien.

## 2.5 Hamiltonsches Prinzip

### 2.5.1 Funktionale und Variationsrechnung

- Funktion  $x \rightarrow y = f(x)$  ordnet jeder Zahl  $x$  eine Zahl  $y$  zu.  
Extrema durch Nullstellen der Ableitung  $\frac{df}{dx}$
- Funktional  $y = f(x) \rightarrow J[y]$  ordnet einer Funktion  $f(x)$  eine Zahl  $J$  zu.

**Bsp1: Kürzeste Wegstrecke** Wegstrecke:

$$\begin{aligned} J &= J[y] = \int_1^2 ds \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} dx \sqrt{1 + y'(x)^2} \end{aligned}$$

kürzeste Wegstrecke:  $J[y] = \min$ .  
(Ergebnis aus Kurvenintegral)

**Bsp2: Brachistochrone** Bernulli (1696)

Masse  $m$  gleitet reibungslos wegen Schwerkraft auf Kurve  $y(x)$ . Für welcher  $y(x)$  ist die Zeit  $T$  minimal?

$$\left. \begin{aligned} \text{Mit } v &= \frac{ds}{dt} \quad dt = \frac{ds}{v} \\ ds &= \sqrt{1 + y'^2} dx \\ \frac{1}{2}mv^2 &= mgy \rightarrow v = \sqrt{2gy} \end{aligned} \right\} \rightarrow T = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy(x)}}$$

### 2.5.2 Euler-Lagrange-Gl.

Problem: Welche Funktion  $y(x)$  macht Funktional

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y', x) \quad (1)$$

minimal, wobei differentierter Funktion  $F$  und  $y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2)$  bekannt sind.

Sei  $y(x)$  die gesuchte Funktion mit  $J[y] = \min$ .

Die Variation

$$y(x) \rightarrow y(x) + \epsilon \eta(x) \quad (2)$$

mit infinit.  $\epsilon$  und beliebigen diff. baren Funktion  $\eta(x)$  die die Randbeding.  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$

$$J[y + \epsilon \eta] \text{ ist minimal bei } \epsilon = 0 \quad \forall \eta \quad (3)$$

Die Bestimmung von  $y$  über (3) wird als Variationsrechnung bezeichnet.

$$\begin{aligned} J[y + \epsilon \eta] &= \int_{x_1}^{x_2} dx \, F(y + \epsilon \eta, y' + \epsilon \eta', x) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ F(y, y', x) + \frac{\partial F}{\partial y}(y, y', x) \epsilon \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}(y, y', x) \epsilon \eta'(x) \right] \end{aligned}$$

Damit

$$0 = \left. \frac{dJ(y + \epsilon \eta)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right]$$

[Par. Int:  $\int uv' = \int uv - \int vu'$  für 2. Term]

$$\underbrace{\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \right|_{x_1}^{x_2}}_{=0, \text{ da } \eta(x_1)=\eta(x_2)=0} + \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \eta(x)$$

Da  $\eta$  beliebig sein kann, muss Klammer verschwinden

$$\rightarrow \boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} = \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y}} \quad (4)$$

**Euler-Lagrange-Gl.**

- Hängt nicht von  $\eta(x)$  ab
- notwendige Bedingung für Extremum

Mit variation  $\delta y = \epsilon \eta(x)$  können wir (3) schreiben

$$\begin{aligned}
 \delta J &= J[y + \delta y] - J[y] = 0 \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{\delta F}{\delta y} \right) \delta y = \int_{x_1}^{x_2} dx \delta F(y, y', t)
 \end{aligned} \tag{5}$$

wobei

$$\frac{\delta F}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \text{ als } \underline{\text{Funktionalableitung}} \text{ bezeichnet wird}$$

Gl. (4) und (5) sind äquivalent

### „Variationsprinzip“

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} \leftrightarrow \delta J = 0$$

## 2.5.3 Variationsrechnung

Funktional:  $y = f(x) \rightarrow J[y]$

z.B. Weglänge  $s$  der Kurve  $y(x)$

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

allg:

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y', x)$$

Extrema über Variation  $\delta y = \epsilon \eta(x)$

$$\left. \frac{\partial J}{\partial t} \right|_{\epsilon=0} = 0$$

$$\delta J = J[y + \delta y] - J[y] = 0 \leftrightarrow \text{Extrema von } J$$

äquivalent zu den Euler-Lagrange-Gl

## Extremalbedingungen

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial F}{\partial y} \quad \leftrightarrow \quad \delta J = 0$$

Bsp: Kürzeste Verbindung

$$J = \int ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\sqrt{1 + y'^2}}_F = \min$$

Euler-Lagrange-Gl.

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \frac{d}{dx} \frac{2y'(x)}{2\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Integration:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \int_{x_1}^{x_2} &= \frac{y'(x_2)}{\sqrt{1 + y'(x_2)^2}} - \frac{y'(x_1)}{\sqrt{1 + y'(x_1)^2}} = 0 \\ \rightarrow y' &= \text{const.} \quad , \quad y(x) = ax + b \end{aligned}$$

$a, b$  aus  $x_1, x_2$

**Verallgemeinerung:**

- (1) Hängt  $F$  von mehreren Funktionen  $y_i$  ( $i = 1, \dots, f$ ) ab, so erhalten wir  $\left. \frac{\partial J}{\partial \epsilon_i} \right|_{\epsilon_i=0} = 0$  und damit  $f$  Euler-Lag-Gl.

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} = \frac{\partial F}{\partial y_i}$$

- (2) Hängt  $y$  von mehreren Argumenten ab,  $y = y(x_1, \dots, x_n)$  so erhalten wir

$$J[y] = \int dx_1 \cdots \int dx_n F\left(y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}, x\right)$$

Mit  $\left. \frac{\partial J}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$

Euler-Lagrange-Gl:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial y / \partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

## 2.6 3. Hamiltonsche Prinzip

Die Korrespondenz

$$\begin{aligned} y_i(x) &\leftrightarrow q_i(t) \\ F(y, y', x) &\leftrightarrow L(q, \dot{q}, t) \\ \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} = \frac{\partial F}{\partial y} &\leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \end{aligned}$$

$$y = (y_1, \dots, y_f) \quad q = (q_1, \dots, q_f)$$

→

- Lösungsverfahren der Lagrange-Gl. (z.B. über Erhaltungssätze) können in Variationsrechnung verwendet werden
- physikalische Bedeutung der Variationsrechnung

Wir ordnen jeder Bahnkurve  $q(t)$  ein Wirkungsfunktional

$$S = S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t)$$

$S$  wird oft Wirkung genannt

Gemäß dem Variationsprinzip sind damit die Lagrange-Gleichungen äquivalent zu der Formulierung, dass die Variation der Wirkung gleich Null ist:

**„Hamiltonsche Prinzip“**

$$\delta S[q] = 0$$

Bewegung verläuft so, dass Bahnkurve  $q(t)$  die Wirkung  $S$  minimiert: „Prinzip der kleinsten Wirkung“

Bem:

- Anstelle von DGL (wie Newton, Lagrange) kann das Grundgesetz der Mechanik also auch als Variationsprinzip formuliert werden
- andere Bsp:

- Optik: Fermatsche Prinzip  
Licht nimmt seinen Weg so, dass die Laufzeit  
 $t[x] = \frac{1}{c} \int_{x_1}^{x_2} dx \, n(x) \stackrel{!}{=} \min \quad n(x): \text{Brechungsindex}$
- Thermodynamik: 2. Hauptsatz  
Entropie  $S$  nimmt immer zu
- auch die QM kann durch ein Variationsprinzip beschrieben werden

### 2.6.1 Schwingung einer Saite

Saite zwischen zwei Wänden mit Abstand  $l$  auf der  $x$ -Achse Auslenkung  
 $n(x, t) \hat{=} \text{Feld}$

- Bsp für Kontinuumsmechanik, d.h. Dynamik elastischer Körper inklusive Balkenbiegung und Hydrodynamik
- Bsp für einfache klassische Feldtheorie
- führt auf Wellengleichung
- Analogie zu QM

Bsp für Felder: el. Feld  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , Temperaturfeld  $T(\vec{r}, t)$ , Wellenfunktion  $\Psi(\vec{r}, t)$  zentrale Größe in Feldtheorie

Bewegungsgleichung für Felder, sogenannte Feldgleichung, sind partielle DGL

### Herleitung der Wellengleichung

Ansatz:

- Saite  $\hat{=} N$  Massenelemente  $\Delta m$  durch Federn verbunden
- zuletzt:  $N \rightarrow \infty$  „Kontinuumslimit“
- $l = N\Delta x \quad N \gg 1$
- Massen  $\Delta m_i$  bei  $x_i = (i - \frac{1}{2})\Delta x \quad (i = 1, \dots, N)$  Auslenkung  $u_i(t) = u(x_i, t)$



$$T = \sum_i \frac{\Delta m_i}{2} \left( \frac{du_i}{dt} \right)^2 = \sum_i \frac{\rho \Delta x}{2} \dot{u}_i^2 \quad (1)$$

mit Massendichte  $\rho = \text{Masse/Länge}$

Abstand zwischen  $i$ -ten und  $(i+1)$ -ten Massenpunkt

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + (u_{i+1} - u_i)^2}$$

für kleine Auslenkungen

$$\approx \Delta x \left[ 1 + \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{2\Delta x^2} \right]$$

(keine wurzel mehr wegen 1. Ordnung Entwicklung ...)

In Ruhelage  $\Delta s = \Delta x$  existiert eine Vorspannkraft  $P$  der Seite

Beitrag zur pot. Energie  $\sim P \cdot (\Delta s - \Delta x)$

$$U = \sum_i P \Delta x \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{2\Delta x^2} \quad (2)$$

$N \rightarrow \infty : \quad u_i(t) \rightarrow u(x, t)$

$$\begin{aligned} T &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\rho}{2} \sum_i \Delta x \left( \frac{\partial u(x_i, t)}{\partial t} \right)^2 \\ &= \frac{\rho}{2} \int_0^l dx \underbrace{\left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2}_{=:\dot{u}^2} \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{\Delta x} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = u'$$

$$\begin{aligned} U &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\rho}{2} \sum_i \Delta x \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{\Delta^2 x} \\ &= \frac{\rho}{2} \int_0^l dx \underbrace{\left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2}_{=:u'^2} \end{aligned}$$

Damit ist

$$L(\dot{u}, u') = \int_0^l dx \underbrace{\left[ \frac{\rho}{2} \dot{u}^2 - \frac{P}{2} u'^2 \right]}_{\substack{\text{Lagrange-Dichte} \\ \mathcal{L}(\dot{u}, u')}} \quad (3)$$

## Hamilton Prinzip

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \mathcal{L}(\dot{u}, u') = 0$$

Euler-Lagrange-Gl.

für 2 Argumente  $x_1 = x, x_2 = t$

und  $F = \mathcal{L}, y = u$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0$$
$$\rho \ddot{u} + P u'' - 0 = 0$$

mit  $c = \sqrt{\frac{P}{S}}$  „Wellengeschwindigkeit“

## Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

Randbedingungen:  $U(0, t) = u(l, t) = 0$

Anfangsbedingungen:  $U(x, t_0) = u_0, \dot{u}(x, t_0) = \dot{u}_0$

**Lösung der Wellengleichung:** Ansatz:

$$u(x, t) = u_0 e^{\pm i(kx - \omega t)}$$

Amplitude  $u_0$ , Wellenvektor  $k$ , Frequenz  $\omega$

eingesetzt:  $u'' = \frac{1}{c^2} \ddot{u} \rightarrow -uk^2 = -\frac{1}{c^2} \omega^2 u$

Lösung, falls  $\omega = ck$  Dispersionsrelation

allg. Lösung durch Linearkombination im Kontinuumslimit erhalten

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk u(k) e^{\pm i(kx - \omega t)} \quad \text{Fourier-Trafo}$$

Bsp: Stehende Welle

Superposition zwischen rechtslaufenden und linkslaufenden Wellen

$$u = \cos(kx - \omega t) - \cos(-kx + \omega t)$$
$$= \text{Re } e^{ikx} \underbrace{\left( e^{-i\omega t} - e^{i\omega t} \right)}_{2i \sin \omega t}$$
$$= 2 \text{ Im } e^{ikx} \sin \omega t = 2 \sin kx \sin \omega t$$

d.h. unabhängig von  $t$  erhält man „Knoten“ (Nullstellen) für  $\sin kx = 0$

Randbedingung:  $u(x=0, t) = u(x=l, t) = 0$

$\sin kl = 0 \rightarrow k = \pi \frac{n}{l}$

s.h. es können nur Wellen mit bestimmten Wellenlängen  $\lambda_n$  auftreten

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k} = \frac{2l}{n}$$

$$\omega_n = ck = \frac{n\pi c}{l}$$

$n = 1, 2, 3 \dots$

ein Wellenbauch  $\rightarrow$  „Grundschiwinung“

zwei Bäuche (doppelte Frequenz) „1. angeregte Schwingung“ 1. Oberton

drei Bäuche (1,5 fache Frequenz) „2. angeregte Schwinung“ 2. Oberton

Analogie zum QM Teilchen im Kasten

$\rightarrow$  Quantisierung

## 2.6.2 Der Starre Körper

- System von Massenpunkten mit  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{const.}$   
z.B.
  - starres Molekül
  - Näherung für kontinuierliche Massenverteilung
- Bewegung besteht aus
  - Translation, d.h. alle Teilchen haben gleiche Geschwindigkeit
  - Drehung um einen körperfesten Koordinaten Ursprung 0 $\rightarrow 2 + 3 = 6$  Freiheitsgrade

Raumfestes Inertialsystem (IS) mit  $x, y, z$  und

Körperfestes Koord.system (KS)  $x_1, x_2, x_3$

KS: Ursprung bei  $0 \hat{=}$  im IS  $\vec{r}_0(t)$

(z.B. der Schwerpunkt)  $\rightarrow \vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt}$

KS dreht sich relativ zum IS mit

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

$\vec{r}_n$  seien die Orte des n-ten Teilchens im KS

$\vec{r}_{n,\text{IS}}$  seien die Orte des n-ten Teilchens im IS

$$\vec{r}_n = \vec{r}_{n,\text{IS}} - \vec{r}_0$$

Geschwindigkeit im IS:

$$\frac{d\vec{r}_{r,\text{IS}}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}_0}{dt}}_{=v_0} + \frac{d\vec{r}_n}{dt}$$

Mit I.4 Beschleunigte Bezugssysteme:

für beliebigen Vektor  $\vec{G}$  ist

$$\frac{d\vec{G}_{\text{IS}}}{dt} = \frac{d\vec{G}_{\text{KS}}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{G}_{\text{KS}} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{z.B.} \quad \frac{d\vec{r}_{\text{IS}}}{dt} &= \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \vec{v}_{n,\text{IS}} &= \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_n \end{aligned} \quad (1)$$

## Kinetische Energie

$$\begin{aligned} T &= \sum_n \frac{m_n}{2} \vec{v}_{n,\text{IS}}^2 = \sum_n \frac{m_n}{2} [\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_n]^2 \quad n = 1, \dots, N \\ &= \sum_n \frac{m_n}{2} \vec{v}_0^2 + \underbrace{\sum_n m_n \vec{v}_0 (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)}_{\downarrow \text{Spatprodukt}} + \sum_n \frac{m_n}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2 \\ &= \frac{M}{2} \vec{v}_0^2 + (\vec{v}_0 \times \vec{\omega}) \sum_n m_n \vec{r}_n + \sum_n \frac{m_n}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2 \\ &= T_{\text{trans}} + T_{\text{rot-trans}} + T_{\text{rot}} \end{aligned} \quad (2)$$

## 2 Fälle:

- Körper wird in keinem Punkt festgehalten

Mit  $\vec{0} = \vec{R}$  (Schwerpunkt) ist  $\sum_i m_i \vec{r}_i = 0$

$$\rightarrow T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}}$$

- Körper wird in mindestens einem Punkt festgehalten

Mit  $\vec{0} = \vec{P}$  ist  $\vec{v}_0 = 0$  (z.B. bei Kreisel)

$$\rightarrow T = T_{\text{rot}}$$

Mit  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$   $\vec{r}_n = (x_{1n}, x_{2n}, x_{3n})$

Und der Identität

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 &= \omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2 \\ &= \sum_{k=1}^3 \omega_k^2 r^2 - \sum_{i,k} \omega_i x_i - \omega_k x_k \quad i, j, k = 1, 2, 3 \\ &= \sum_{i,k} \omega_i \omega_k (r^2 \delta_{ik} - x_i x_k) \end{aligned}$$

wird

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2 \\ &\equiv \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 I_{ik} \omega_i \omega_k \end{aligned}$$

mit dem Trägheitstensor

$$I_{ik} = \sum_{n=1}^N m_n (r_n^2 \delta_{ik} - x_{in} x_{kn}) \quad (3)$$

Im Matrixschreibweise  $I = \{I_{ik}\}$  ist

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} I \vec{\omega} \quad (4)$$

**Bem:**

- Begriff Tensor: ursprünglich von Spannungstensor (Physik)

Mathe: Tensor

1. Stufe  $\hat{=}$  Vektor

2. Stufe  $\hat{=}$  Matrix

- (4) ist eine Bilinearform

- Dreht sich Körper um eine körperfeste Achse (z.B.  $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$ )

so geht (4) über in

$$T_{\text{rot}} = \frac{I_z}{2} \omega_z^2$$

$I_z$ : Trägheitsmoment des Körpers bzgl.  $\vec{e}_z$

- Bei kontinuierlicher Massenverteilung mit Dichte  $\rho(\vec{r})$  ist

$$I_{ij} = \int d\vec{r} \rho(\vec{r}) (\vec{r}^2 \delta_{ij} - r_i r_j)$$

Trägheitstensor ist symm.,  $T_{ij} = T_{ji}$  und kann daher mit einer orthogonalen Trafo  $U$

$$(U^+ = U^{-1}, U^+ U = 1 = U U^+)$$

auf Diagonalform gebracht werden

$$U^+ I U = \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & I_2 & \\ 0 & & I_3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Eigenwert Problem „Hauptachsen-Trafo“}$$

wobei die Eigenvektoren die Hauptträgheitsachsen und die Eigenwerte  $I_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die Hauptträgheitsmomente sind.

Symmetrie des Körpers legt die Achse fest z.B. bei Kreisel

- „Kugelkreisel“; wenn alle  $I_i$  gleich sind  
(Kugel, Würfel, Zylinder mit  $h = \sqrt{3}r$ )
- Symmetrischer Kreisel;  $I_1 = I_2, I_3 \neq I_1$
- asymmetrischer Kreisel; alle  $I$  verschieden

**Drehimpuls:**

in KS ist

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{n=1}^N m_n (\vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n) \\ &\stackrel{(1)}{=} \sum_n m_n (\vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)) \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \vec{\omega} r^2 - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \\ &= \sum_{i,k=1}^3 (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \omega_k \vec{e}_i \end{aligned}$$

ist

$$\vec{L} = \sum_{i,k=1}^3 I_{ik} \omega_k \vec{e}_i = \sum_i L_i \vec{e}_i$$

oder

$$\boxed{\vec{L} = I \vec{\omega}} \quad (5)$$

### Eulersche Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L} &= \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N m_n (\vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n) = \frac{d}{dt} (I \cdot \vec{\omega}) \\ &= \vec{M} = \sum_{n=1}^N \vec{r}_n \times \vec{F}_n^A \end{aligned}$$

Mit Gl. (\*) ist dann

$$\frac{d}{dt} (I \vec{\omega})_{\text{IS}} = \frac{d}{dt} (I \vec{\omega})_{\text{KS}} + \vec{\omega} \times (I \vec{\omega}) = \vec{M} \quad (6)$$

Ist KS das Haupsachsensystem mit

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & I_2 & \\ 0 & & I_3 \end{pmatrix}$$

so ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (I \vec{\omega})_{\text{KS}} &= \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_2) \\ \omega_1 \omega_3 (I_1 - I_3) \\ \omega_1 \omega_2 (I_2 - I_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit

## Eulersche Gleichungen

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= M_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= M_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 &= M_3 \end{aligned} \quad (7)$$

I.A. Schwer zu Lösen, da nicht linear und M zeitabhängig

### Bsp: Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Körper steht auf Schwerpunkt (wie falschrumer Blumentopf) ( $x_3$  in der Kreissymmetrieachse: „Figurenachse“)

$I_1 = I_2 \quad I_3 \neq I_1 \rightarrow$  relationssymm. bzgl.  $x_3$  Achse

$\vec{M} = 0$  Damit:

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = 0 \rightarrow \dot{\omega}_1 - \Omega \omega_2 = 0 \quad (a)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \rightarrow \dot{\omega}_2 - \Omega \omega_1 = 0 \quad (b)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \rightarrow \omega_3 = \text{const.} \equiv \omega_0$$

$$\Omega = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_0$$

$$\frac{d}{dt}(a) \text{ mit } (b) : \ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0$$

$$\rightarrow \omega_1(t) = a \sin(\Omega t + \varphi_0) \quad (8)$$

$$\omega_2 = \frac{\dot{\omega}_1}{\Omega} \rightarrow \omega_2(t) = a \cos(\Omega t + \varphi_0) \quad (8)$$

$$\omega_3 = \omega_0$$

Mit

$$\vec{\omega}^2 = \omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) + \omega_3^2 = \text{const.}$$

hat die Projektion von  $\vec{\omega}$  auf  $x_1$ -  $x_2$ -Ebene die konst. Länge  $a$  und rotiert mit  $\Omega$ .

D.h. im KS rotiert Kreisel auf einem Polkegel (mit  $\omega_0$  um die eigene symm. Achse)

$$\gamma = \arctan \frac{a}{\omega_0} = \text{const.}$$



Zur Betrachtung im IS brauchen wir verallg. Koord. um die Beziehung zwischen KS und IS zu beschreiben

→ Eulersche Winkel  $\Phi, \Psi, \Theta$  → siehe Übung

$$\rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \dot{\Phi} \sin \Theta \sin \Psi + \dot{\Theta} \cos \Psi \\ \omega_2 = \dot{\Phi} \sin \Theta \cos \Psi + \dot{\Theta} \sin \Psi \\ \omega_3 = \dot{\Phi} \cos \Theta + \dot{\Psi} \end{cases} \quad (9)$$

Einsetzen von (9) in (8), ergibt nach Lösung von (9)

$$\Psi(t) = \Omega t + \Psi_0 \quad \Phi(t) = \frac{q}{\sin \Theta_0} + \Phi_0$$

$$\tan \Theta_0 = \frac{q}{\omega_0} \frac{I_1}{I_2}$$

### 2.6.3 Rotation des Starren Körpers

IS  $\vec{r}_{IS}$  und KS  $\vec{r}$

$$\frac{d\vec{r}_{IS}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 I_{ik} \omega_i \omega_k \\ &= \frac{1}{2} \vec{\omega} I \vec{\omega} \end{aligned}$$

$$I_{ik} = \sum_n m_n \left( r_n^2 \delta_{ik} - x_{in} x_{kn} \right) \quad \underline{\text{Trägheitstensor}}$$

$$\text{orthogonale Trafo : } U^+ I U = \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & I_2 & \\ 0 & & I_3 \end{pmatrix}$$

$I_i \hat{=}$  Hauptträgheitsmomente, Hauptträgheitsachse

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_n m_n (\vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n) \\ &= I \vec{\omega} \end{aligned}$$

Mit  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$  folgen Euler-Gl. (in KS)  
 Kräftefreier Kreisel:  $\vec{M} = 0 \rightarrow$  Präzession

### Schwerer Kreisel

Betrachte symm. Kreisel mit den Hauptträgheitsmomenten  $I_1 = I_2, I_3 \neq I_1$   
 (fixer Auflagepunkt Rotation um  $x_3$  Präzession um  $z$  mit Winkel  $\theta$  zwischen  
 $z$  und  $x_3$  und der Schwerpunkt S auf  $x_3$  höhe  $s$  des Kegelkreisels wird mit  
 $mg$  in Richtung  $-z$  gezogen)

### Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = T - U = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{\vec{R}}^2}_{=0} + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 - mgs \cos \theta$$

Mit Eulerwinkel

$$\omega_1 = \dot{\Phi} \sin \Theta \sin \Psi + \dot{\Theta} \cos \Psi$$

$$\omega_2 = \dot{\Phi} \sin \Theta \cos \Psi - \dot{\Theta} \sin \Psi$$

$$\omega_3 = \dot{\Phi} \cos \Theta + \dot{\Psi}$$

$\Phi$  : Drehwinkel um  $\vec{e}_z$ ,  $\Psi$  : Drehwinkel um  $\vec{e}_{x_3}$

$$\mathcal{L} = \frac{I_1}{2} \left( \dot{\Phi}^2 \sin^2 \Theta + \dot{\Theta}^2 \right) + \frac{I_3}{2} \left( \dot{\Phi} \cos \Theta + \dot{\Psi} \right)^2 - mgs \cos \Theta \quad (1)$$

### Symmetrien:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} = 0$$

## Erhaltungsgrößen „erste Integrale“

Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} E &= T + U \\ &= \frac{I_1}{2} \left( \dot{\Phi}^2 \sin^2 \Theta + \dot{\Theta}^2 \right) + \frac{I_3}{2} \left( \dot{\Phi} \cos \Theta + \dot{\Psi} \right)^2 + mgs \cos \Theta = \text{const.} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} \quad \text{Drehimpulskomponente } l_z \\ &= I_1 \sin^2 \Theta \dot{\Phi} + I_3 \underbrace{\left( \cos \Theta \dot{\Psi} + \cos^2 \Theta \dot{\Phi} \right)}_{(\dot{\Psi} + \dot{\Phi} \cos \Theta) \cos \Theta} = \text{const.} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_3 &= \frac{\partial l}{\partial \dot{\Psi}} \quad \text{Drehimpulskomponente } l_3 \\ &= I_3 \left( \dot{\Psi} + \dot{\Phi} \cos \Theta \right) = \text{const.} \quad (4) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von (3) und (4) in (2) werden  $\dot{\Phi}$  und  $\dot{\Psi}$  eliminiert. Mit:

$$l_z - l_3 \cos \Theta = I_1 \sin^2 \Theta \dot{\Phi} \quad (5)$$

ist

$$\begin{aligned} \frac{(l_z - l_3 \cos \Theta)}{2I_1 \sin^2 \Theta} &= \frac{I_1}{2} \sin^2 \Theta \dot{\Phi}^2 \quad \text{in (2)} \\ E &= \frac{I_1}{2} \dot{\Theta}^2 + \frac{(l_z - l_3 \cos \Theta)}{2I_1 \sin^2 \Theta} + \frac{l_3^2}{2I_3} + mgs \cos \Theta = \text{const.} \quad (6) \end{aligned}$$

Wir schreiben

$$\begin{aligned} E &= \frac{I_1}{2} \dot{\Theta}^2 + U_{\text{eff}}(\Theta) \\ U_{\text{eff}} &= \frac{(l_z - l_3 \cos \Theta)}{2I_1 \sin^2 \Theta} + \frac{l_3^2}{2I_3} + mgs \cos \Theta \quad (7) \end{aligned}$$

Ähnlichkeit zum Keplerproblem ergibt sich hier eine 1D Bewegungsgleichung mit effektive, Potential.

Aufgelöst nach  $\frac{d\Theta}{dt}$  und integriert ist:

$$t = t_0 + \int_{\Theta_0}^{\Theta} d\Theta' \sqrt{\frac{I_1/2}{E - U_{\text{eff}}(\Theta')}}}$$

nicht elementar Lösbar aber Graphisch diskutierbar

## Graphische Diskussion der Lösung

- $U_{\text{eff}}(\Theta) \xrightarrow{\Theta \rightarrow 0} \infty$  und  $\xrightarrow{\Theta \rightarrow \pi}$
- dazwischen ein Minimum

(Parabel mit 2 Schnittpunkten mit E Energie des Systems an den Winkeln  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$  und dazwischen Minimum) aus  $E = U_{\text{eff}}$  ergeben sich Umkehrpunkte  $\Theta_1, \Theta_2$  Während die Figurenachse zwischen  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$  oszilliert „Notation“, präzediert sie mit (5)

$$\dot{\Phi} = \frac{l_z - l_3 \cos \Theta}{I_1 \sin^2 \Theta} \quad \text{um die raumfeste z-Achse}$$

Bewegung ist definiert durch Kreiselparameter  $m, s, I_1, I_2$  und Anfangsbedingungen  $E, l_z, l_3$

Für  $\Theta_1 = \Theta_2$  verschwindet Notation „reguläre Präzession“

Im kräftefreien Limes (Grenzfall) ( $g \rightarrow 0$ ) ergibt sich  $\Theta = \Theta_0, \dot{\Phi} = \text{const.}$

## 2.7 9 Hamilton-Formalismus

Bereits für konservative Systeme wurde

Hamilton Funktion  $\mathcal{H}(q, p, t)$  „Hamiltonian“

und Hamilton Gleichungen hergeleitet.

Ausgehend vom kanonischen Impuls  $p = (p_1, \dots, p_f)$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (1)$$

leiten wie nun  $\mathcal{H}(q, p, t)$  von  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$  her.

### Legendre-Trafo

$$d(x, y) \rightarrow g(u, y) \quad \text{mit} \quad u = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2)$$

Ausgehend von

$$df = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{:=u} dx + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{:=v} dy = u dx + v dy$$

definierten wir die Funktion  $g = f - ux$  mit:

$$dg = df - u dx - v du = v dy - x du \quad (3)$$

Folglich ist  $g$  die gewünschte Funktion

$$dg = \frac{\partial g}{\partial u} du \rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} dy \quad (4)$$

$$v = \frac{\partial g}{\partial y} \quad , \quad x = -\frac{\partial g}{\partial u}$$

## 2.8 Hamiltonsche Mechanik

Ausgehend von  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$   $q = (q_1, \dots, q_f)$  und

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (1)$$

def. wir den Hamiltonian  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p, t)$  über Legendre Trafo: Ansatz:  
Löse Gl. (1) nach  $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t)$  und def. Hamiltonian  $\mathcal{H}$  als Legendre-Transformation von  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_i \dot{q}_i(q, p, t) p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}(q, p, t), t)$$

Mit

$$\begin{aligned} d\mathcal{H} &= \sum_i \left[ d\dot{q}_i p_i + \dot{q}_i dp_i - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i} dq_i - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} d\dot{q}_i \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \\ &= \sum_i \left[ \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Verifizieren wir, dass  $\mathcal{H}$  von  $q, p, t$  abhängt. Das Totale Differential von  $\mathcal{H}$ :

$$d\mathcal{H} = \sum_i \left[ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i \right] - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt$$

liefert durch Koeffizientenvergleich

### Hamilton-Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad (1)$$

$i = 1, \dots, f$  und:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (2)$$

**Bemerkung:**

- Gl. (1) wegen Einfachheit und Symmetrie auch kanonische Gl. genannt
- Die  $2f$  Variablen  $q_i$  und  $p_i$  sind völlig gleichberechtigt,
  - $p_i$  heißt auch zu „ $q_i$  konjugierter Impuls“
  - $q_i, p_i$  heißt „Paar konjugierter Variablen“
- Wichtig:  $\mathcal{H}$  darf keine Geschwindigkeit enthalten
- In Kapitel I.6 wurde bereits gezeigt, dass Energie erhalten ist für  $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$  da  $\mathcal{H}$  nicht explizit von der Zeit abhängt.
- Zyklische Koordinaten:  
Hängt  $\mathcal{H}(p, q)$  nicht von  $q_i$  ab,  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = 0$   
 $\rightarrow p_i = \text{const.}$  Erhaltungsgröße

Für ein konservatives System mit

$$\mathcal{L} = T - U = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{q}_i^2 - U(t)$$

mit den kanonischen Impulsen  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i$  entspricht

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + U(t)$$

$$\mathcal{H}(p, q) = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + U(t) = T + U \quad (3)$$

also der Gesamtenergie.

Hier ist der kanonische Impuls  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$  gleich dem kinetischen Impuls  $m_i \dot{q}_i$ . Gilt für zeitunabhängige, holonome Zwangsbedingungen ruhenden Koordinaten und konservativen Kräften

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Bsp: harm. Oszillator: } \mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 q^2 \\ \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q} = -m\omega^2 q = F \\ F = \dot{p} = m\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q} \end{array} \right]$$

- Geht aber nicht, z.B. bei:
  - geschw. abhängigen Kräften (Lorenz-Kraft)
  - zeitabhängigen Zwangsbedingungen

#### Standartfall von f Freiheitsgraden $q_i$

- erhalten durch die Elimination von zeitunabhängigen holonomen Zwangsbedingungen (oder ohne diese)
- die nicht explizit zeitabhängigen sind (z.B. externer Antrieb)
- die konservativen Kräften genügen ist:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T - U = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{q}_i^2 - U(q)$$

$$\mathcal{H}(q, p) = T + U = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + U(q)$$

mit: Bewegungsgleichungen sind äquivalent

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = m_i \ddot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \rightarrow m_i \ddot{q}_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

$$F_i = m_i \ddot{q}_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

## Mechanik nach:

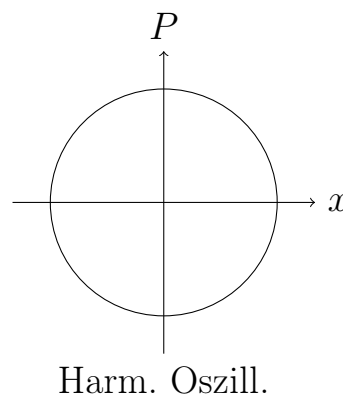
Newton: – über Def. der Kraft  
– einfach und anschaulich

Lagrange: – über Def. von  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$   
– Berücksichtigung von Zwangsbedingungen  
– Zwangskräfte (Lag. Gl. 1. Art)  
– Konzept von verallg. Koord.  $q_i$   
– Konzept von zyklischen Variablen,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$   
→ Erhaltung von  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$   
– Hamilton-Prinzip  
– Ableitung von Feldtheorien

Hamilton: – über Def. von  $\mathcal{H}(q, p, t)$   
– Zwangsbedingungen nur implizit  
– Konzept des Phasenraums  
→ Ausgangspunkt für statistische Mechanik und QM

## 2.9 Phasenraum

- $(q, p)$  bilden einen  $2f$ -dim. Phasenraum (PR)
- Zustand ist im Phasenraum eindeutig beschrieben, d.h.  $(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0)$  schneiden sich Bahnen im Phasenraum nicht.
- $\mathcal{H}(p, q) = E = \text{const.}$  entspricht einer  $2f - 1$ -dim. Fläche im PR, welche das  $2f$ -dim. *Phasenraumvolumen*



$$V_{PR}(E) = \int dq_1 \dots dq_f \int dp_1 \dots dp_f$$
$$\mathcal{H}(p, q) < E$$

- Klassisch entspricht ein endliches Phasenraumvolumen  $\infty$  System zustände



- QM entspricht ein endliches Phasenraumvolumen endlich viele System zustände

**Bsp:**

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 = \mathcal{H}(q, p)$$

$\cong$  Ellipse mit Halbachsen

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \quad , \quad b = \sqrt{2mE}$$

d.h. PR-Volumen ist Fläche der Ellipse

$$V_{PR}(E) = \pi ab = \frac{2\pi E}{\omega}$$

Der WM Oszillator hat die diskrete Energiezustände [siehe Theo Phys III]

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2) \quad n = 0, 1, 2, 3$$

Damit ist Anzahl der Zustände mit Energie  $< E$

$$N_E = \sum_{E_n < E} 1 \simeq \frac{E}{\hbar\omega} = \frac{V_{PR}(E)}{2\pi\hbar} \quad (N_E \gg 1)$$

d.h. wir messen das PR Volumen in Einheiten des Planckschen Wirkungsquantum  $2\pi\hbar = h$  und erhalten somit die Anzahl der energetisch erreichbaren Zustände

Für  $f$  Freiheitsgrade ist

$$N_E \simeq \frac{V_{PE}(E)}{(2\pi\hbar)^f}$$

Durch Einführung von abzählbaren Zuständen liefert die PR-Beschreibung die Grundlage für die Statische Mechanik

### 2.9.1 Zeitentwicklung im Phasenraum (PR)

#### Poissonklammer

Zeitentwicklung von  $A(q(t), p(t), t)$  ist gegeben

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A(q(t), p(t), t) &= \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) - \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} \end{aligned}$$

Def: Poissonklammer zweier PR-Funktion  $f(p, q, t)$  und  $g(p, q, t)$  ist

$$\{f, g\} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (1)$$

Ist  $A$  explizit zeitabhängig  $\frac{\partial A}{\partial t} \neq 0$ , gilt

$$\frac{d}{dt} A(q(t), p(t)) = \{A, \mathcal{H}\} \quad (2)$$

D.h. wenn  $\{A, \mathcal{H}\} = 0 \leftrightarrow A$  ist erhaltene Größe

Bsp:

- für radialsymmetrisches Potential ist Drehimpuls  $l_i$  erhalten  
 $\{l_i, \mathcal{H}\} = 0$
- Bewegungs-Gleichung:

$$\begin{aligned} \{q_j, \mathcal{H}\} &= \sum_i \left( \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_i}}_{\delta_{ij}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_i}}_{=0} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = \dot{q}_j \\ \{p_j, \mathcal{H}\} &= \sum_i \left( \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_i}}_{=0} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_i}}_{\delta_{ij}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = \dot{p}_j \\ \{q_i, p_i\} &= \sum_k \left( \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{\delta_{jk}} - \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_{=0} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \delta_{ij} \end{aligned}$$

Korrespondenz zur QM

$$\underbrace{[g, f]}_{\text{klass. Poissonklammer}} \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{i\hbar}[g, f]}_{\text{QM kommutator}} = \frac{1}{i\hbar}(gf - fg) \quad (4)$$

Aus Gl (3) folgt, dann die QM Unschärferelation.  
 Zeitentwicklung einer QM Größe  $A$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A, \mathcal{H}] + \frac{\partial A}{\partial t}$$

### 2.9.2 PR-Dichte

Bsp: gedämpfter harmonischer Oszillator.

(Ortsraum  $p, t$  Graph abklingende Cosinus Schwingung, im Phasenraum  $p, q$  kleiner werdende Spirale)

Wir betrachten viele Teilchen ( $N \gg 1$ ) mit kontinuierlich verteilten Anfangsbedingungen  $q_i(t_0)$ ,  $p_i(t_0)$  wie z.B. in exp. Messung eines Ensembles von Teilchen

Def: PR Dichte  $\rho(q, p, t)$  entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass sich zur Zeit  $t$  am Phasenraumpunkt  $(p, q)$  ein Teilchen befindet. Ist die Teilchenzahl erhalten, gilt:

$$\int dq dp \rho(q, p, t) = N \quad \text{„Normierungsbedingung“}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

d.h. die Phasenraum-dichte ist Zeitlich konstant. „Liouville Theorem“

Wir erhalten die Liouville-Gl.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \{\mathcal{H}, \rho\}$$

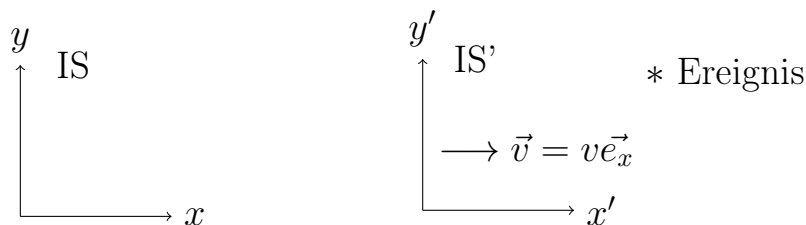
 (6)

Mit Ersetzung (4) wird daraus in der Quantenmechanik die Liouville von Neumann Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [\mathcal{H}, \rho] \quad (7)$$

# Kapitel 3

## Relativistische Mechanik



IS stillstehend und IS' in Bewegung  $\vec{v} = v\vec{e}_x$

Galilei Trafo:

$$x' = x + vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \quad (1)$$

Def: Ein Ereignis ist definiert durch Raum-Zeit-Koord.  $(x, y, z, t)$  und hat in IS und IS' verschiedene Koordinatenwerte.

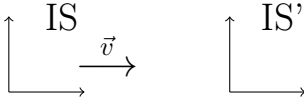
Bsp: Schallwellen

Luft ist Träger für Schallwellen. Bewegt sich die Luft mit  $\vec{v} = v\vec{e}_x$ , dann breitet sich der Schall

- bei ruhender Luft ( $v = 0$ ) mit  $\frac{dx}{dt} = c$  aus
- in Richtung von  $\vec{v}$  mit  $\frac{dx}{dt} = v + c$  aus
- in Richtung entgegen  $\vec{v}$  mit  $\frac{dx}{dt} = c - v$  aus

Bsp: Elektromagnetische Wellen

Photon wird bei  $t = t' = 0$ ,  $x = x' = 0$  in x-Richtung ausgesendet und bewegt sich in IS mit der Geschwindigkeit  $c$ . (hier IS mit  $v$  in  $x$  und IS' stillstehend)

Galilei Trafo.: 

$$\frac{dx}{dt} = c \longrightarrow \frac{dx'}{dt'} = c + v$$

### Michelson Experiment (1885)

Interferenz Exp zum Nachweis des „Äthers“ als Träger der Lichtwellen, gemessen mit und gegen die Erdbewegung  
 → Lichtgeschwindigkeit ist konstant !

## 3.1 Relativistische Mechanik

Michelson: (Vakuum-) Lichtgeschwindigkeit  $c = \text{const.}$

- die von Galilei-Trafo vorhergesagte Addition von Geschwindigkeiten gilt nicht allg, obwohl gut bestätigt für  $v \ll c$
- Naturgesetze hängen nicht von der Wahl des Inertialsystems ab  
 → es können nur relative Bewegungen gemessen werden also keine absoluten Geschwindigkeiten
- Maxwell-Gl. enthalten Lichtgeschw. als Konstante  $c$ , e.m. Wellen breiten sich (im Vakuum) immer mit  $c$  aus
  - Mit Galilei-Trafo wären damit Maxwell-Gl. in unterschiedlichen IS verschieden
  - Gemäß Michelson-Exp wären Maxwell-Gl. in allen IS gültig „relativistische Gl.“

### 3.1.1 Einsteinsches Relativitätsprinzip (1905)

- Konzept von Äther falsch
- Mechanik und Edynamik sollen unter gleiche Trafos form-invariant sein

→ 1.) Alle IS sind gleichwertig

2.) Licht breitet sich in allen IS mit Geschw.  $c$  aus

→ Dann muss Galilei Trafo (1) in eine allgemeine Form bringen: „Lorentz Trafo“ (1904)

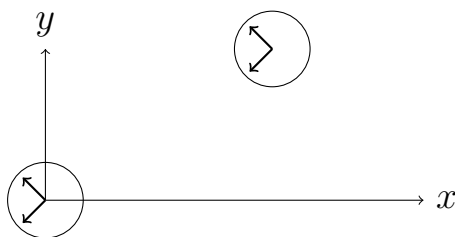
Für  $v \ll c$  muss Gl.(1) als Grenzfall enthalten sein

**Bem:**

- Einsteinsche Rel. prinzip und die daraus folgende Lorentz-Trafo sind unschwer nachzuvollziehen
- Die Konsequenzen daraus, insbesondere die Relativität von Raum und Zeit sind auch heute nicht leicht zu verstehen, da sie alltäglich Erfahrungen widersprechen und zu Paradoxien führen.

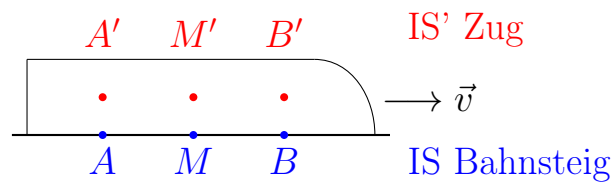
**Def: Längenmessung** Länge eines in IS ruhenden Objekts kann durch ruhende geeichte Maßstäbe bestimmt werden. Die sogenannte Eichlänge hängt nicht vom IS ab, ist also Lorentz-invariant.

**Def: Zeitmessung: Synchronisierte Uhren**



- Standartuhr ist im Ursprung
- synchronisierte Uhr an andrem Ort soll gleiche Zeit anzeigen  
Synchronisation erfolgt durch Austausch von Signalen  
d.h. zur Zeit  $t$  sendet Standartuhr ein Signal zur anderen Uhr, das sofort wieder zurückgeschickt wird und zur Zeit  $t + \Delta t$  ankommt → Bei Empfangen des Signals von der anderen Uhr war Zeitpunkt  $t + \frac{\Delta t}{2}$

## Gleichzeitigkeit



Betrachte Bahnsteig „IS“ und Zug mit konstanter Geschw.  $\vec{v}$  „IS“

A und B sind zwei Punkte im IS, in der Mitte M steht der Beobachter. Dazu gehören die gleichen Punkte im IS' A', B' und M'

- 1.) Zur Zeit  $t_1$  werden bei A und B gleichzeitig 2 Lichtquellen eingeschaltet.
- 2.) Im Zug haben Lichtquellen zu  $t_1$  die Position A' und B'. Ein Zugreisender bei M' sieht zuerst das von B' kommende Licht (der fahrende Zug verkürzt die Strecke  $\overline{M'B}$ )  
Er weiß, dass A' und B' gleich weit entfernt sind und dass Licht isotrop ausbreitet.  
→ Für ihn wurde das Licht in B' früher eingeschaltet als in A' und damit nicht gleichzeitig.
- 3.) Etwas später erreichen Beobachter M gleichzeitig die beiden Lichtsignale.
- 4.) Zuletzt sieht M' das von A ausgesandte Lichtsignal.

Gleichzeitigkeit hängt vom Bezugssystem ab, es ist also ein relativer Begriff.

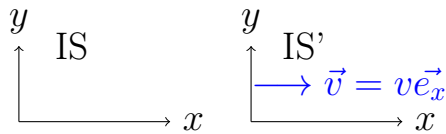
Dieser Effekt verschwindet, wenn Lichtgeschw.  $c \rightarrow \infty$ , also bei instantaner Signalübertragung.

## 3.2 Lorenz-Trafo

Zur Konstruktion verwenden wir die Symmetrien

- Homogenität von Raum und Zeit  
d.h. alle Raumzeitpunkte sind äquivalent, man kann also seinen Ursprung beliebig wählen

- Isotropie des Raumes  
d.h. alle Raumrichtungen sind äquivalent



O.B.d.A. betrachten wir Bewegung entlang x-Achse (IS' in x-Richtung mit  $\vec{v} = v\vec{e}_x$ ) d.h. am Anfang  $y = y' \quad z = z'$   
Zur Zeit  $t = 0$  fallen IS und IS' zusammen.

Wegen Homogenität von Raum und Zeit muss Trafo linear sein

- sonst könnte Koord. Ursprung nicht beliebig gewählt werden
- sonst wäre ein gleichförmig bewegter Körper in IS beschleunigt in IS'

Ansatz:

$$x' = a_{11}x + a_{12}t + b_1$$

$$y' = y \quad , \quad z' = z$$

$$z' = a_{21}x + a_{22}t + b_2$$

Aufgrund der Anfangsbed. für  $t = 0$  ist:

$$x_0 = x'_0 = 0 \quad , \quad t_0 = t'_0 = 0$$

ist:  $b_1 = b_2 = 0$  , d.h. :

$$x' = a_{11}x + a_{12}t \tag{1}$$

$$t' = a_{21}x + a_{22}t \tag{2}$$

wobei  $a_{ij} = a_{ij}(v)$

Betrachte Bewegung des Ursprungs in IS' im IS d.h.  $x' = 0$ . Gl. (1) ergibt:

$$0 = a_{11}x + a_{12}t \rightarrow -\frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{x}{t} = v \tag{3}$$

Eingesetzt in (1):

$$x' = a_{11}(v)(x - vt) \tag{4}$$

Analog: Bewegung von Ursprung von IS in IS':  $x = 0$

$$x = a_{11}(-v)[x' - (-v)t'] \tag{5}$$



Wegen Isotropie des Raumes ist

$$a_{11}(v) = a_{11}(-v) \quad \text{oder} \quad a_{ij} = a_{ij}(v^2)$$

Betrachten wir nun eine Lichtquelle, die in IS bei  $x = 0$  ruht und sich daher in IS' mit  $-\vec{v}$  bewegt, und zur Zeit  $t_0 = t'_0$  einen kurzen Lichtblitz aussendet. Wegen  $c = c'$  gilt für den Ort des Photons:

$$x = ct \quad x' = ct' \tag{6}$$

Setze  $t = \frac{x}{c}$  und  $t' = \frac{x'}{c}$  in (4) und (5) ein:

$$x' = a_{11}(v^2)x(1 - \frac{v}{c}) \tag{7}$$

$$x = a_{11}(v^2)x'(1 + \frac{v}{c}) \tag{7}$$

Ineinander eingesetzt und geteilt durch  $x'$ :

$$1 = a_{11}^2(a - \frac{v}{c})(1 + \frac{v}{c}) \tag{3.1}$$

$$a_{11}^2 = \frac{1}{1 - (\frac{v}{c})^2} \tag{3.2}$$

Da Galilei-Trafo als Grenzfall sein soll, nur positive Wurzel

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{8}$$

Mit (3) ist

$$a_{12} = \frac{-v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$(2) : t' = a_{21}x + a_{12}t$$

$$(5) : x = a_{11}x' + a_{11}vt'$$

$$\begin{aligned}
t' &= \frac{x}{a_{11}v} - \frac{a_{12}}{a_{11}v} \frac{(x - vt)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
&= \frac{x}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{(x - vt)}{v \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
&= \frac{x(1 - \frac{v^2}{c^2}) - x + vt}{v \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
&= \frac{t - \frac{v^2}{c^2}x}{1 - \frac{v^2}{c^2}}
\end{aligned}$$

### Lorentz trafo

Mit dem Lorentz faktor  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{x - ct}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x - ct) \\
t' &= \frac{t - \frac{v^2}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)
\end{aligned} \tag{9}$$

$$a_{11} = a_{22} = \gamma = \cosh \psi$$

$$a_{12} = a_{21} = \gamma \frac{v}{c} = -\sinh \psi$$

mit dem sog. Rapidity  $\psi = \operatorname{arctanh} \frac{v}{c}$