

Experimentalphysik II

Vorlesung von Prof.Dr. Schumacher im Sommersemester 2018

Markus Österle
Andréz Gockel

16.04.2018

Inhaltsverzeichnis

I	Elektrostatik	3
I.1	Elektrische Ladung	3
I.1.1	Reibungselektrizität	3
I.1.2	Die elektrische Ladung	3
I.1.3	Die Elementarladung	4
I.2	Kraft und Feld	6
I.2.1	Coulomb - Gesetz	6
I.2.2	Influez	7
I.2.3	Das Elektrische Feld	7
I.2.4	Das elektrische Potential	10
I.2.5	Der elektrische Fluss	14
I.2.6	Quellstärke des elektrischen Feldes	15
I.2.7	Maxwell-Gleichungen	15
I.3	Multipole	17
I.3.1	Kräfte auf Dipol	19
I.3.2	Quadrupol	20
I.4	Elektrostatische Energie und Kapazität	21
I.4.1	Spannung	21
I.4.2	Kapazität	22
I.4.3	Kondensatorschaltungen	24
I.4.4	Elektrische Energie	24
I.5	Materie in elektrischen Feldern	26
I.5.1	Polarisation des Mediums	26
I.5.2	Felder und Maxwell gl. im Medium	27
I.5.3	Mikroskopische Beschreibung der Polarisation (Pol.)	29
I.5.4	Kondensator im Dielektrikum	30
II	Magnetostatik	32
II.6	Ströme	32
II.6.1	Elektrischer Strom	32
II.6.2	Ohmsches Gesetz	33
II.6.3	Arbeit und Leitung	33
II.6.4	Leitungsvorgänge in Metallen und Halbleitern	34
II.6.5	Kirchhoffsche Gesetze KHG	35
II.6.6	Leitungsvorgänge in Flüssigkeiten	36
II.6.7	Stromleitung in Gasen	37
II.6.8	Stromquellen	37
II.6.9	Thermoelektrizität	38
II.7	Das magnetische Feld	39

II.7.1	Eletromagnetische Kräfte	39
II.7.2	Magnetisches Feld	39
II.7.3	Maxwell-Gleichung der Magnetostatik	39
II.7.4	Das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$	40
II.7.5	Berechnung von Magnetfeldern	41
II.8	Magnetische Kräfte	42
II.8.1	Die Lorenz Kraft	42
II.8.2	Kräfte auf Stöme	43
II.8.3	Der Magnetische Dipol	44
II.9	Magnetische Felder in Materie	45
II.9.1	Magnetisierung der Materie	45
II.9.2	Diamagnetismus	47
II.9.3	Paramagnetismus	48
II.9.4	Ferromagnetismus	48
II.9.5	Elektromagnet	49
III	Elektrodynamik	50
III.10	Elektromagnetische Induktion	50
III.10.1	Indutionsgesetz	50
III.10.2	Selbstinduktion	52
III.10.3	Feldenergie	53
III.10.4	Maxwell-Gleichungen	53
III.11	Wechselstromkreise	54
III.11.1	Wechselstrom	54
III.11.2	Diodenschaltungen	55
III.11.3	Zeigerdiagramme	56
III.11.4	Komplexe Widerstände	56
III.11.5	Frequenzfilter	57
III.11.6	Blindleistung	58
III.11.7	Transformator	59
III.12	Elektromagnetische Schwingungen	62
III.12.1	Einfache Schwingungen	62
III.12.2	Gekoppelte Schwingungen	65
III.12.3	Ungedämpfte Schwingungen	66
III.13	Elektromagnetische Wellen	66
III.13.1	Lecher-Leitung (LL)	67
III.13.2	Vakuumwellen	70
III.13.3	Hohlleiter	75
III.13.4	Energietransport	77
III.14	Wellenabstrahlung	78
III.14.1	Hertzscher Dipol	78
III.14.2	Abstrahlung des Hertzschen Dipols	79
III.14.3	Beschleunigte Ladungen	82
III.15	Wellen in Materie	85

Kapitel I

Elektrostatik

I.1 Elektrische Ladung

Exp: Auf Thales Spuren

(PVC Rohr mit Filz gerieben, Lametta zum schweben gebracht)

I.1.1 Reibungselektrizität

- Reibung von Kunststoff und Filz \Rightarrow Aufladung des Stabes
- Berührung Lametta mit Stab \Rightarrow Abstoßung

Anziehende/Abstoßende Kräfte: Elektrizität

Exp:

- i) 2 Kunststoffstäbe \Rightarrow Abstoßung, gleiche Ladung
 - ii) Kunststoff-, Glasstab \Rightarrow Anziehung, ungleiche (entgegengesetzte) Ladung
- \Rightarrow Es gibt zwei Arten von Ladungen
- \Rightarrow Aufladung ist Materialabhängig. „Reihenfolge“: Triboelektrische Reihe ¹

Zwei Materialien A und B und $W_A < W_B$
Energiefreisetzung wenn Elektron e^- von A nach B wandert
 \Rightarrow A positiv (Elektronenmangel), B negativ (Elektronenüberschuss)
Ladungen „wandern“, werden aber nicht erzeugt oder vernichtet.

I.1.2 Die elektrische Ladung

Elektrische Ladung Q quantifiziert Elektrizität. Q bezeichnet die Menge Elektrizität die ein Körper trägt.

Neues Phänomen \Rightarrow nicht Rückführbar auf „m,kg,s“

$[Q] = C$ Coulomb (C.A. de Coulomb)

¹(Erklärung in Festkörperphysik: Austrittsarbeit W_{Aus} ist die Arbeit um ein Elektron aus einer Oberfläche zu entfernen bzw. die freigesetzte Energie wenn es von einer Oberfläche absorbiert wird)

keine Basiseinheit Def. mittels Stromstärke

$[A] = A$ Ampere

$1C$ = Ladung die von einem Strom mit Stärke $I = 1A$ in der Zeit $\Delta t = 1s$

$1C$ ist eine relativ große Ladung:

Vergleich:

- $Q_{\text{Elektron}} = -1,602 \cdot 10^{-19}C$
- $Q_{\text{Reibungselektrizität}} = \mu Q = 10^{-6}C$

Elektrometer: Messung von Ladung ohne Vorzeichen. Beobachtung: 2 Ladungsvorzeichen, Ladungen sind Additiv

Erhaltungssatz der Ladungen: In einem geschlossenen System ist die Summe der Ladungen konstant.

Erinnerung: geschlossenes System $\hat{=}$ kein Austausch von Materie mit Umgebung (Ladung gekoppelt an Materie)

Noether - Theorem

Erhaltungssatz \Leftrightarrow Symmetrie des Systems/ Gesetzes. hier: Eichsymmetrie $U(1)_Q \Leftrightarrow$ Ladungserhaltung (später fortgeschrittene Quantenmechanik, Teilchenphysik)

I.1.3 Die Elementarladung

Faraday Elektrolyseexperimente

Bei der Umsetzung von einem Mol eines Elements wird eine feste Ladung umgesetzt.

1 wertig: 96486 C/mol (Faraday Konstante)

Also bei der Reaktion eines Moleküls wird $Q = 1,6 \cdot 10^{-19}C$ (Annahme Avogadrozahl bekannt, erste Bestimmung 1865 Loschschmidt)

Frage: Mittelwert über viele Reaktionen oder fester Wert für jede Reaktion.

Exp: \rightarrow 1913 Millikan - Experiment

Kräfte:

Gewichtskraft:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g} = \left(\frac{4}{3}\pi r_{\text{tröpf}}^3\right)\rho_{\text{Öl}}\vec{g} \downarrow$$

Elektrische Kraft:

$$\vec{F}_{el} = Q_{\text{tröpf}}\vec{E} \downarrow \uparrow$$

Auftrieb:

$$\vec{F}_A = -\frac{4}{3}\pi T_{\text{tröpf}}^3\rho_{\text{Luft}}\vec{g} \uparrow$$

Reibungskraft:

$$\vec{F}_R = -G\pi\eta_{\text{Luft}}\vec{v}_{\text{tröpf}} \uparrow \downarrow$$

Laminare Strömung

Da $r_{\text{tröpf}} \sim \lambda_{\text{frei}}$

→ Conningham - Korrektur

$$F_R = 1 + \frac{\lambda_{\text{frei}}}{r_{\text{tröpf}}} \left(A_1 + A_2 e^{-A_3 \frac{r_{\text{tröpf}}}{\lambda_{\text{frei}}}} \right)$$

Luft: $A_1 = 1, 257 A_2 = 0, 4 A_3 = 1, 1$

- Suche Tröpfchen
- Beobachtete Bewegung bei 2. Spannung
- Bestimme Sink- bzw. Steiggeschwindigkeit
- → $r_{\text{tröpf}}$ und $Q_{\text{tröpf}}$

a) Suchmethode

- sinken bei $0V = U$
- Erhöhung von U bis Schwebung der Tropfen $\vec{v}_{\text{tröpf}} = \vec{0}$

b) Steig-/Sink Methode

- zwei Spannungen $U_c (> 0)$ Messe $\vec{r}_{\text{tröpf}}$

Mathode a) (ohne Conningham Korrektur)

$$U = 0V \quad |\vec{F}_G| = |\vec{F}_A| + |\vec{F}_R|$$

(Stationärer Zustand ($\vec{a} = \text{const}$))

$$\frac{4}{3} \pi \rho_{\text{Oel}} r_{\text{tröpf}}^3 g = \frac{4}{3} \pi \rho_{\text{Luft}} r_{\text{tröpf}}^3 g + 6 \pi \eta_{\text{Luft}} + r |\vec{v}|$$

$$\Rightarrow r_{\text{tröpf}} = \sqrt{\frac{9}{2g} \frac{\eta_{\text{Luft}} + |\vec{r}|}{\rho_{\text{Oel}} - \rho_{\text{Luft}}}}$$

Bei Schwebung:

$$U = 0V \quad |\vec{F}_G| = |\vec{F}_A| + |\vec{F}_{el}|$$
$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\text{Oel}} g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\text{Luft}} g + Q_{\text{tröpf}} \frac{U}{d}$$

d = Abstand Kondensatorplatten

$$Q_{\pi} = \frac{4}{3} \pi g \left(\rho_{\text{Oel}} - \rho_{\text{Luft}} \frac{d}{U} \right)$$

viele Tröpfchen → Statische Auswertung

Ergebnis von Millikan

Elektrische Ladung ist gequantelt $\pm e; \pm 2e; \dots$

$$e = 1.6021766208(88) \cdot 10^{-19} C$$

Erstmals gequantelte Größe
 Drittelzahlige Ladungen der Quarks
 Quarks sind Konstituenten von Protonen und Neutronen
Proton p $\hat{=}$ (uud) **Neutron n** $\hat{=}$ (udd)

$$Q_u = +\frac{2}{3}, Q_d = -\frac{1}{3} \Rightarrow Q_p = 1, Q_n = 0$$

$$Q_p + Q_e < 10^{-21} e$$

aus Stabilität der Materie

Historisch:

$Q = 4,774 + -0,009 \cdot 10^{-10} \text{esu}$ (Electrostatic unit)

$1 \text{ esu} = 3,34 \cdot 10^{-10} C$

Millikans wert für Elementarladung:

$$\text{esu} \Rightarrow \text{SI} : e = 1,592 + -0,003 \cdot 10^{-19} C$$

„5σ“ - Effekt \rightarrow Fehler unterschätzt.

I.2 Kraft und Feld

I.2.1 Coulomb - Gesetz

Elektrische Kraft zwischen zwei Körpern (punktförmig) mit Ladungen Q_1 und Q_2 im Abstand r

$$\vec{F}_{el} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad \hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$$

Kraft auf Q_2 von Q_1

Exp: Coulomb - Waage

$$k = 8,99 \cdot 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}$$

für $Q_1 = Q_2 = 1 \text{ C}$, $r = 1 \text{ m} \Rightarrow |\vec{F}_{el}| = 8,99 \cdot 10^9 \text{ N}$ Im SI-System: $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

ϵ_0 Dielektrizitätskonstante: $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$
 (cgs-System $k = 1 \Rightarrow$ Umdefinition der Ladung)

$$\vec{F}_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

Coulomb - Gesetz

Motivation der Abhängigkeit:

- $\sim Q_2$ Additivität der Ladungen
- $\sim Q_1$ „actio = reactio“
- $\sim \frac{1}{r^2}$ dreidimensionaler (für 4 Raumdimensionen wäre es $\sim \frac{1}{r^3}$)

I.2.2 Influez

Beobachtung: Ausschlag des Elektrometers ohne Berührung. Anhängig von der Nähe des Stabes.

Erklärung: Kraft von e^- auf dem Stab verdrängen die e^- aus der Kugel in die Zeiger.

⇒ Kugel positiv geladen, Zeiger negativ geladen

Influenz: Trennung von Ladungen in einem neutralen Körper.

In Metallen und Leitern sind die Elektronen (zu einem bestimmten vom Material abhängigen Grad) frei beweglich.

$Q_1 = Q_2$ da neutral

$$|\vec{F}_1| = k \frac{Q_1 Q}{r_1^2} \quad |\vec{F}_2| = k \frac{Q_2 Q}{r_2^2} \quad \text{da } r_1 < r_2 \quad |\vec{F}_1| > |\vec{F}_2|$$

Leiter angezogen

Nichtleiter:

Ladungen/Elektronen nicht frei beweglich Verschiebung bei Polaren Molekülen. Wasser H_2O $\alpha = 105 e^-$ vom H zum O verschoben → Dipol

I.2.3 Das Elektrische Feld

Bisher: Kraft zwischen zwei Ladungen q und $Q \rightarrow \vec{F}$

Frage: woher kennt q die Existenz von Q ?

→ abstraktes Konzept: elektrisches Feld \vec{E}

- um jede Ladung Q bildet sich ein Feld \vec{E}
- Probeladung q spürt eine Kraft $\vec{F} = q\vec{E}$

Quantenelektrodynamik (QED):

- Anregung des Feldes = Photonen γ
- Kraft/Wechselwirkung = Austausch von γ

Pragmatisch: gegeben: beliebige Ladungsverteilung wie sieht die Kraft auf eine pkt.förmige q ? (q klein → keine Verzerrung von \vec{E})

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{\text{Probe}}} \quad \text{unabhängig von } q_{\text{Probe}}$$

El. Feld einer Pktladung

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{\text{Punkt}}}{q_{\text{Probe}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q q_{\text{Probe}}}{r^2 q_{\text{Probe}}} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Zusammenfassung:

- jede Ladung Q von \vec{E} -Feld umgeben
- es gilt Superpositionsprinzip $\vec{E}_{Q_1+Q_2} = \vec{E}_{Q_1} + \vec{E}_{Q_2}$ folgt aus Addition von Kräften

- Nahwirkung der Kraft: Feld breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit c aus

Superposition:

- N Punktladungen $Q_i, i = 1, \dots, N$ $\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$

$$\Rightarrow \vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

- kontinuierliche **Ladungsverteilung**: $\rho(\vec{r})$
Gesamtladung $Q = \int dV \rho(\vec{r})$ ($dV = d\vec{r}^3$)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Visualisierung:

- Feldvektoren an vorgegebenen Gitterpunkten im Raume oft Vektor $\hat{=}$ Projektion von \vec{E} in Ebene
- Feldlinien:
 - Tangenten $\hat{=}$ Richtung von \vec{E}
 - Dichte der Linie $\hat{=}$ Stärke $|\vec{E}|$

Exp: Feldlinien

- Feldlinien kreuzen sich nicht [Falls Kreuzung: dann 2 Felder \vec{E} , 2 \vec{E} in einem Punkt wid: Superpositionsprinzip]
- Feldlinien \perp orthogonal auf Oberfläche der Leiter
- keine Feldlinien innerhalb geschlossener Leiter

Elektrisches Feld im Leiter

- e^- frei beweglich und sie stoßen sich ab
- „Kräftegleichgewicht“ wenn e^- an der Oberfläche sitzen
- $\vec{E}, \vec{F} \perp$ Oberfläche
- \vec{E} -Feld im Inneren verschwindet

Kugel mit Radius:

$$\vec{E}(\vec{R}) = 0 \quad |\vec{r}| < R$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad |\vec{r}| \geq R$$

verhält sich bei großem Abstand wie Punkt-förmige Ladung im Zentrum

Beliebige Flächen:

Approximation durch Ebenen und Kugelschalen Kugel:

$$|\vec{E}| \sim \frac{1}{r^2}$$

kleiner Krümmungsradius \rightarrow großes $|\vec{E}|$

„Spitze“ \rightarrow kleines $r \rightarrow$ großes $|\vec{E}| \rightarrow$ führt zur Entladungen

Faradaysche Becher:

- begrenzte Ladungsaufnahme von außen

\rightarrow Ladungen von innen aufbringen

Feldberechnung:

1) **homogen geladener Ring** Radius R , Dicke vernachlässigbar

- $\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$ $[\lambda] = \frac{C}{m}$ Linienladungsdichte
- gesucht: $\vec{E}(a)$ auf Symmetrieachse ($y=z=0$)
- Symmetrie: $\vec{E}(a) = E\vec{e}_x$ [andere Komponenten kompensieren sich]
- Element auf Ring trägt Ladung λdx , liefert Feldbeitrag

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos\phi dQ$$

- Es gilt:

$$E_x = \cos\phi |\vec{E}| \quad \cos\phi = \frac{a}{r} \quad r = \sqrt{R^2 + a^2}$$

- Integration über Ring in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{\text{Ring}} dQ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos\phi \\ &= \int_{\text{Ring}} dQ \end{aligned}$$

$$\int_{\text{Ring}} dQ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2 + a^2} \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

große Entfernung: $a \gg R$: $E_x \sim \frac{1}{a^2}$ wie Pkt.ladung

Nähe des Rings: $a \sim R$: langsamer Anstieg von $|\vec{E}|$ als für Pkt.ladung

$a = 0$: $E_x = 0$ aus Symmetrie

2) **unendlich dünne, unendlich ausgedehnte leitende Platte**

Flächenladungsdichte σ $[\sigma] = \frac{C}{m^2}$

- Symmetrie: $\vec{E} = \vec{E}_z \vec{e}_z \perp$ auf Platte

$$Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_{Platte}} d^3\vec{r} \rho(\vec{r})$$

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_{Platte}} d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{r^2} \hat{r} \quad \hat{r} \perp \text{Platte} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{A_{Platte}} d^2\vec{r}' \frac{\sigma}{r^2} \hat{r}\end{aligned}$$

- Es gilt: $E_z = \cos\beta |\vec{E}|$ $\cos\beta = \frac{a}{d}$
Integration in kleinen Ringen bzw. Polarkoordinaten ($dA = r dr d\varphi$)

$$\begin{aligned}E_z(a) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi r \frac{\sigma}{a^2} \cos\beta \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 a^2} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^3\beta\end{aligned}$$

mit

$$r = a \tan\beta \quad dr = \frac{a}{\cos^2\beta} d\beta$$

$$r = 0 \hat{=} \beta = 0$$

$$r = \infty \hat{=} \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}E_z(a) &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 a^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin\beta d\beta \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (-\cos\beta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\end{aligned}$$

- homogenes Feld in z-Richtung (d.h. senkrecht \perp zur Platte)

I.2.4 Das elektrische Potential

- Bewegung von Ladung im elektrischen Feld

$$W = - \int_{Weg} \vec{F} d\vec{s} = -q \int_{Weg} \vec{E} d\vec{s}$$

$W > 0$: von außen gegen \vec{E} -Feld verrichten

$W < 0$: Feld verrichtet Arbeit Charakteristik der Feldes: Arbeit pro Einheitsladung

$$\frac{W}{q} = - \int_{Weg} \vec{E} d\vec{s}$$

- **Arbeit im Feld einer Punktladung** $\vec{E} \perp d\vec{s}$ keinen Beitrag

$$\frac{W_{ACB}}{q} = - \int_A^C |\vec{E}| ds = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_C} \frac{Q}{r^2} dr = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{Q}{r} \right) \Bigg|_{r_A}^{r_C} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_C} \right)$$

analog:

$$\begin{aligned} \frac{W_{ADB}}{q} &= - \int_D^B |\vec{E}| ds = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_D} - \frac{1}{r_B} \right) \\ r_A = r_D \quad r_B = r_C &\Rightarrow \frac{W}{q} \text{ auf beiden Wegen gleich} \\ \Rightarrow \oint_{\text{geschlossenem Weg}} \vec{E} d\vec{s} &= 0 \quad W \text{ unabh. von Weg} \end{aligned}$$

+ Superpositionsprinzip \Rightarrow Arbeit auf einem geschlossenen Weg verschwindet (i.e. = 0)

Erlaubt Definition der potentiellen Energie

$$E_{pot}(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} d\vec{s}$$

\vec{r}_0 ist ein Bezugspunkt (Referenzpunkt) oft im unendlichen da $(\vec{E}(|\vec{r}| \rightarrow \infty) \rightarrow 0)$
In Praxis: nur

$$\Delta E_{pot} = E_{pot}(\vec{r}_2) - E_{pot}(\vec{r}_1)$$

relevant. Normierung von E_{pot} auf im Feld bewegte Ladung: el. Potential

$$\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_0) = \int \vec{E} d\vec{s} \quad \text{oft } \varphi(\vec{r}_0) = 0$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int \vec{E} d\vec{s}$$

Für Punktladung Q $\vec{r}_0 \rightarrow \infty$:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r}|}$$

- **Superpositionsprinzip:**

N Punktladungen Q_i bei \vec{r}_i

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Potential ist Skalarfeld \rightarrow Rechnungen oft einfacher, graphische Darstellung mittels Äquipotentialflächen:
(auf diesen gilt $\varphi(\vec{r}) = \text{const.}$)

- für Pkt. Ladung: Äquipotentialflächen = Kugelschalen
- Feldlinien / \vec{E} -Feld \perp Äquipotentialflächen
- Bewegung in Äquipotentialflächen \rightarrow keine Arbeit wird verrichtet

Zusammenhang elektrisches Feld \vec{E} und Potential φ

Wir hatten:

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} d\vec{s} \quad \varphi(\vec{r}_0) = 0$$

Ist dies umkehrbar?

a) infinitesimaler Weg dx , Probeladung q

$$\begin{aligned} dW &= -q[\varphi(x, y, z) - \varphi(x + dx, y, z)] \\ &= q \frac{\varphi(x + dx, y, z) - \varphi(x, y, z)}{dx} dx \\ &= q \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x} dx \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} dW &= -q \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} \quad d\vec{s} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -q E_x dx \end{aligned}$$

Vgl:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

analog zu Bewegung in y- und in z-Richtung

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x \right) + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y \right) + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z \right) \\ &= -\text{grad } \varphi(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \quad \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Elektrostatik: äquivalente Beschreibung durch entweder \vec{E} -Feld oder φ

Wirbelfreiheit von \vec{E} Rotation von

$$\begin{aligned} \vec{E} : \text{rot}(\vec{E}) &= \vec{\nabla} \times \vec{E} \\ &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

da $\vec{E} = \text{grad} \varphi$ und

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

Partielle Ableitungen vertauschbar

$$\Rightarrow \text{rot} \vec{E} = -\text{rot}(\text{grad} \varphi) = \vec{0}$$

\vec{E} -Felder in Elektrostatik sind Wirbelfrei

Zusammenhang: mit Stokesschem Satz

$$\int_A \vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r}) d\vec{A} = \oint_{S=dA} \vec{V}(\vec{r}) d\vec{s} \quad \vec{V}(\vec{r}) \text{Vektorfeld}$$

hier

$$\int_A \text{rot}(\vec{E}) d\vec{A} = \oint_{\delta A} \vec{E} d\vec{s} \stackrel{\text{E. statik}}{=} 0$$

Bedeutung: wirbelfrei bzw. keine geschlossenen Feldlinien

Beispiele Potential-Berechnung:

- 1) Potential eines homogenen ringförmigen Leiters. Beitrag $d\varphi$ aus dQ auf Ring

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} dQ$$

Aus Abbildung: $r = \sqrt{R^2 + a^2}$

$$\varphi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}}$$

da $r = \text{const.}$ auf x-Achse

für $a \gg R$ $\varphi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}$ Potential einer Pkt. Ladung

$$E_x = -\frac{\partial\varphi(a)}{\partial a} = -\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{1}{2}\right) 2a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qa}{(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- 2) Beispiel 2: leitende Kugel Radius R

$$\varphi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \quad a \geq R$$

$$\varphi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = \text{const.} \quad a < R$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{E} &= -\text{grad}\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \vec{e}_R \quad a \geq R \\ &= 0 \Rightarrow \quad a < R \end{aligned}$$

Bisher: $\varphi(\vec{r})$ aus $\rho(\vec{r})$ via Poisson-Integral teilweise $\rho(\vec{r})$ nicht bekannt, aber Randbedingungen $\varphi(\vec{r}) = 0$ auf Leiteroberfläche. ($\rho(\vec{r})$ kann komplex sein)

\Rightarrow Randwertproblem (Theo II.)

„Einfaches“ Beispiel mit Methode der Spiegelladung

Platte geerdet $\varphi(x, y, z) \stackrel{!}{=} 0$ Punktladung q_1 bei $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}$

Realisierung der Randbedingungen durch Spiegelladung q_2

Brauche: $\varphi(x, y, z = 0) = 0$

Superposition $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

$\Rightarrow q_2 = -q_1 \quad z_2 = -z_1$ erfüllen Randbedingung

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{a_r}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right\}$$

\vec{E} -Feld aus $-\vec{\nabla}^2\varphi$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{a_r}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} \right\}$$

für $z=0$: $E_x = E_y = 0 \quad \vec{E} \perp (x, y)$ -Ebene

Flächenladungsdichte: $\sigma \quad [\sigma] = \frac{C}{m^2}$

Später: $\sigma = 2\epsilon_0 E_z$

$$\sigma = -\frac{q_1}{2\pi} \frac{z_1}{(x^2 + y^2 + z_1^2)}$$

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

I.2.5 Der elektrische Fluss

Elektrischer Fluss Φ ist ein Maß für die dichte der el. Feldlinien. Er ist definiert für eine gegebene Fläche A.

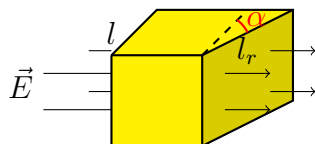
$$\boxed{\Phi_A = \int_A \vec{E} d\vec{A}} \quad \vec{A} = \text{infinitesimaler Normalvektor} \quad \vec{A} \perp \text{Fläche}$$

offene Fläche: Orientierung beliebig

geschlossene Fläche: Orientierung nach außen

Fluss durch geschlossene Fläche:

Bsp: **Würfel im Plattenkondensator** (Abb.auf [Folie: Elektrischer Fluss durch geschlossene Oberfläche]) nur Beiträge von linker und rechter Fläche:



$$\Phi = \Phi_l + \Phi_r = \vec{E} \vec{A}_l + \vec{E} \vec{A}_r = -EA_l + EA_r \cos \alpha = -EA_l + EA_l = 0$$

$$\vec{A}_l = -\vec{A}_r \cos \alpha$$

Superposition bzw. Approximation von Körper durch inf. Würfel \Rightarrow Fluss durch geschlossene Oberfläche im homogenen Feld verschwindet.

Bsp: Kugelschale

$$\vec{A}(r) = 4\pi r^2 \vec{e}_R \begin{cases} + & \text{für äußere} \\ - & \text{für innere} \end{cases}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

$$\left| \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) \right| = \text{const}$$

$$\Phi = \Phi(r_1) + \Phi(r_2) = + \text{const} - \text{const} = 0$$

In elektrischen Feldern (wenn keine Ladungen im Volumen) \Rightarrow Fluss durch geschlossene Oberfläche verschwindet.

I.2.6 Quellstärke des elektrischen Feldes

$\Phi_A \neq 0$ wenn Ladungen innerhalb geschlossener Oberfläche. Bsp: Kugel mit Radius R. Punktladung im Ursprung $d\vec{A}$ und \vec{E} radial nach außen $\sim \vec{e}_r$

$$\Phi = \oint_{R=\text{const}} \vec{E} d\vec{A} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}}_{|\vec{E}|} \underbrace{4\pi R^2}_A = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Ergebnis unabhängig von:

- Form der Oberfläche
- Position der Ladung innerhalb der Oberfläche

Mehrere Ladungen Q_i aus Superposition der \vec{E}_i

$$\Phi = \oint \left(\sum_i \vec{E}_i \right) d\vec{A} = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0}$$

„externe“ Q_i liefern keinen Beitrag

Es gilt:

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{\text{ein}}}{\epsilon_0}$$

Gaußsches Gesetz (Integralform)

Mit Gaußschen Satz : Oberflächen- \rightarrow Volumenintegral

$$\oint_A \vec{E} d\vec{A} = \int_V \text{div} \vec{E} dV \quad \text{mit} \quad Q_{\text{ein}} = \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

$$\int_V \text{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{R}) dV$$

gültig für beliebige Volumen

$\Rightarrow \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ differentielle Form des Gaußschen Gesetzes

Ladungen die Quellen ($\rho > 0$) bzw. Senken ($\rho < 0$) des elektrischen Feldes sind.

I.2.7 Maxwell-Gleichungen

für statische (unbewegte) Ladungen Integral- und Differentialform

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad \text{rot} \vec{E} = \vec{0} \quad \text{Wirbelfrei} \quad (1)$$

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{\text{ein}}}{\epsilon_0} \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Quellen/Senken} \quad (3)$$

1. gilt allgemein in Zentralkraftfeldern d.h. $\rho(\vec{r}) \sim |\vec{r}|$
3. gilt nur für $\varphi \sim \frac{1}{|\vec{r}|} |\vec{E}| \sim \frac{1}{|\vec{r}|^2}$ im 3-dimensionalen Raum

MW-Gleichungen sind Axiome der Elektrostatik d.h. F_{coulomb} ableitbar
 betrachte Ladungen $Q_1 = Q_{\text{ein}}$

1.Gl:

$$\oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

$$|\vec{E}(r)| 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

Kraft auf Ladung Q_2 : $\vec{F}_{Q_2} = \vec{E}_{Q_1} \cdot Q_2$

$$|\vec{F}_{Q_2}| = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

□

Bsp.: **homogene geladene Kugel**, Radius R , $\rho(\vec{r}) = \text{const}$ $|\vec{r}| \leq R$

$$Q_{\text{ges}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

Symmetrie: $\vec{E} = |\vec{E}| \vec{e}_r$ radial $|\vec{E}| = E_r$

$|\vec{r}| \geq R$:

$$\Phi = \oint_A \vec{E} d\vec{A} = \int_A E_r dA = E_r 4\pi r^2 \stackrel{!}{=} \frac{Q_{\text{ein}}}{\epsilon_0}$$

$$E_r = \frac{\rho_0 R^3}{\epsilon_0 3r^2}$$

wie bei Punktladung

$|\vec{r}| \leq R$:

$$Q_{\text{ein}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad \Phi = \frac{Q_{\text{ein}}}{\epsilon_0}$$

$$E_r = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}$$

linearen Anstieg

Potential $\varphi(\vec{r})$:

$\varphi(r_0 = \infty) = 0$

$$\varphi(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} d\vec{r} \stackrel{(r \geq R)}{=} - \int_{\infty}^r \frac{\rho R^3}{\epsilon_0 3r'^2} dr' = \int_r^{\infty} \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{R^3}{3r'^2} dr' = \frac{\rho R^3}{\epsilon_0 3r}$$

$$\left(\frac{\partial(\hat{r})}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \right)$$

Innenraum: $(r \leq R)$

$$\varphi(r) = - \int \frac{\rho r'}{3\epsilon_0} dr' = -\frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{r^2}{3} + \text{const}$$

Wähle c so, dass φ stetig bei $r = R$ ist
 $\rightarrow c = \frac{R^2 \rho}{2\epsilon_0}$

$$\varphi(r) = \frac{R^2 \rho}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right) \quad \text{für } r \leq R$$

Maxwell-Gl. und Potential φ

$$\vec{E} = -\text{grad}(\varphi)$$

1. Gl

$$\text{rot} \vec{E} = -\text{rot}(\text{grad} \varphi) \stackrel{\text{linear}}{=} 0$$

da $\text{rot} \vec{E} = 0$ können wir \vec{E} als $\text{grad} \varphi$ schreiben

3. Gl

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= \text{div}(-\text{grad} \varphi) = -\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right] = -\Delta \phi \\ &\rightarrow -\Delta \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Poisson-Gl. ($\rho = 0$ Laplace-Gl.)

Poisson-Gl. äquivalent zu beiden Maxwell-Gl.

MW-Gl: 2 Gl. erster Ordnung in Ableitungen ($\frac{\partial}{\partial x}, \dots$)

Poisson-Gl: 1. Gl. zweiter Ordnung in Ableitung ($\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \dots$)

I.3 Multipole

- für beliebige Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ist

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

komplex i.a.

- oft interessiert nur Fernfeld $\rho(\vec{r}), \vec{E}(\vec{r}), |\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ mit $\rho(\vec{r}') = 0$
 Abstand \gg Ausdehnung der Ladungsverteilung
- Approximation von $\rho(r)$ in Taylor-Entwicklung
 \rightarrow Multipolentwicklung

$$\rho(\vec{r}) = \underbrace{\frac{a}{T}}_{\text{Monopol}} + \underbrace{\frac{b}{T^2}}_{\text{Dipol}} + \underbrace{\frac{c}{T^3}}_{\text{Quadropol}} + \dots$$

Monopol:

$$\vec{E}_{\text{Mono}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad \varphi_{\text{Mono}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

dominiert für $r \rightarrow \infty$ wenn $Q_{\text{ges}} \neq 0$

$$Q_{\text{Mono}} = \sum_{i=1}^N Q_i \text{ Pkt. Ladungen} \quad Q_{\text{Mono}} = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r})$$

Q_{Mono} bei \vec{r}_s Ladungsschwerpunkt platzieren

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_i |Q_i| \vec{r}_i}{\sum_i |Q_i|}$$

$$\vec{r}_s = \frac{\int |\rho(\vec{r})| \vec{r} d^3\vec{r}}{\int |\rho(\vec{r})| d^3\vec{r}}$$

Dipol:

zwei entgegengesetzte, gleich große Ladungen $Q > 0$ im Abstand $d = |\vec{d}|$. Richtung \vec{d} von $-Q$ nach $+Q$

$$\vec{r}_- = \vec{r}_0 - \frac{\vec{d}}{2} \quad \vec{r}_+ = \vec{r}_0 + \frac{\vec{d}}{2}$$

Potential $\varphi(\vec{r})$ aus Superposition

$$\varphi_{\text{Dipol}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{|\vec{r}_0 - \frac{\vec{d}}{2}|} - \frac{1}{|\vec{r}_0 + \frac{\vec{d}}{2}|} \right\}$$

für $(|\vec{r}_0| \gg |\vec{d}|)$ nutze Näherung

$$\frac{1}{|\vec{r}_0 \pm \frac{\vec{d}}{2}|} = \frac{1}{\sqrt{\vec{r}_0^2 \pm r_0 \vec{d} + \frac{\vec{d}^2}{4}}} = \frac{1}{|\vec{r}_0|} \frac{1}{\sqrt{1 \pm \frac{r_0 \vec{d}}{|\vec{r}_0|^2} + \frac{\vec{d}^2}{4\vec{r}_0^2}}} = \frac{1}{|\vec{r}_0|} \left(1 \mp \frac{\vec{r}_0 \vec{d}}{\vec{r}_0^2} \right)$$

$$\varphi_{\text{Dipol}} \sim \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{\vec{r} \vec{d}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

$\vec{p} = Q\vec{d} = [\vec{p}] = c_m$ **Dipolmoment**

$$\varphi_{\text{Dipol}}(\vec{r}) = \frac{Q\vec{d}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} \quad \theta = \angle(\vec{d}, \vec{r})$$

- Potential richtungsabhängig $\sim \cos \theta$
maximal entlang \vec{d} verschwindend $\perp \vec{d}$
- $\varphi \sim \frac{1}{r^2} \Rightarrow$ Erwartung $|\vec{E}| \sim \frac{1}{r^3}$

Bestimmung des \vec{E} -Feldes:

\vec{d} entlang z-Achse

Geometrie \rightarrow Zylindersymmetrie des Feldes, d.h. keine Abhängigkeit vom Azimutalwinkel ϕ

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}}_{\emptyset} \vec{e}_\phi$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} |\vec{p}| (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

- für N Punktladungen $\vec{p} = \sum_i Q_i \vec{r}_i$
- für Ladungsverteilung $\vec{p} = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \vec{r}$

\vec{p} abhängig von Wahl des Koordinatenursprungs

Bsp.: Punktladung bei $\vec{r}_0 \Rightarrow \begin{cases} \text{i) } \vec{r}_0 = \vec{0} & \text{dann } \vec{p} = \vec{0} \\ \text{ii) } \vec{r}_0 \neq \vec{0} & \text{dann } \vec{p} \neq \vec{0} \end{cases}$

Konvention: Ursprung bei \vec{r}_s Ladungsschwerpunkt

- punktsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \rho(-\vec{r})$ gilt $\vec{p} = \vec{0}$
- wenn $Q_{\text{ges}} = 0$ dann \vec{p} unabhängig von Ursprung

I.3.1 Kräfte auf Dipol

a) **homogenes \vec{E} -Feld** (Bsp. Plattenkondensator)

Beobachtung: Dipol richtet sich im Kondensator wie erwartet aus: Plus zu Minus, Minus zu Plus

Kraft:

$$\vec{F}_{\text{ges}} = Q\vec{E} + (-Q)\vec{E} = \vec{0}$$

\rightarrow keine Translation

Drehmoment:

$$\begin{aligned} \vec{T}_{\text{ges}} &= \sum_{i=1}^2 \vec{r}_i \times \vec{F}_i \\ &= \frac{\vec{d}}{2} \times Q\vec{E} + \frac{-\vec{d}}{2} \times (-Q\vec{E}) = Q\vec{d} \times \vec{E} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{T}_{\text{ges}} = \vec{p} \times \vec{E}}$$

$\vec{p} \perp \vec{E}$ \vec{T} Maximal

$\vec{p} \parallel \vec{E}$ \vec{T} verschwindet

\rightarrow Ausrichtung im \vec{E} -Feld

Potentiellen Energie:

$$\begin{aligned} E_{\text{Dip}} &= Q\varphi(\vec{r}_1) - Q\varphi(\vec{r}_2) \\ \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) &= \vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\vec{d} = -\vec{E}\vec{d} \\ E_{\text{Dip}} &= -Q\vec{E}\vec{d} = -\vec{p}\vec{E} \end{aligned}$$

$p \uparrow \uparrow E$ minimiert E_{Dip} \rightarrow Richtung von \vec{p} im \vec{E}

b) **inhomogenes \vec{E} -Feld**

zusätzliche Kraft:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{ges}} &= Q\vec{E}(\vec{r} + \vec{d}) - Q\vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{E}(\vec{r} + \vec{d}) &\stackrel{\text{Taylor-Entwicklung}}{=} \vec{E}(\vec{r}) + (\vec{d} \cdot \nabla)\vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{F}_{\text{ges}} &= Q(\vec{d} \cdot \nabla)\vec{E}(\vec{r}) = (\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E}(\vec{r}) \end{aligned}$$

i) Ausrichtung von Dipol durch \vec{T}_{ges}

ii) Bewegung ins Gebiet höherer Feldstärke \vec{E}

I.3.2 Quadrupol

- vier Ladungen $2 : +Q, 2 : -Q$, jeweils im Abstand d
- zwei Dipole \vec{p} bei $(x, z) = (\frac{d}{2}, 0)$ $-\vec{p}$ bei $(x, z) = (-\frac{d}{2}, 0)$

$$\varphi_{\text{Dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad \vec{r}_s = \vec{0} \quad \theta = \angle(\vec{r}, \vec{e}_z)$$

$$\varphi_{\text{Quadrupol}} = \varphi_{\text{oben}}(\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2}) - \varphi_{\text{unten}}(\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2})$$

für $|\vec{d}|$ klein :

$$\approx -d \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{\text{Dipol}}(\vec{r})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{\text{Dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-2 \frac{p \cos \theta}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{p \sin \theta}{r^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]$$

Kettenregel:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{r^2} 2x = \frac{x}{r} = \sin \theta \cos \phi$$

$$\frac{\partial \cos \theta}{\partial x} = -\frac{1}{r} \sin \theta \sin \phi \cos \phi$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{Quadrupol}}(\vec{r}) &= -\frac{|\vec{p}||\vec{d}|}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{2 \cos \theta}{r^3} \sin \theta \cos \phi - \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi \right\} \\ &= \frac{3|\vec{p}||\vec{d}|}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cos \theta \sin \theta \cos \phi \end{aligned}$$

$$Q_{\text{Mono}} = 0 \quad \vec{p}_{\text{gesamt}} = \vec{0}$$

Fernferld:

$$\varphi(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^3} \quad \text{bzw.} \quad \vec{E}(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^4} \vec{e}_R$$

Bsp.: linearer Quadrupol

$$\varphi_{\text{Quad}}^{\text{lin}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{d}|^2 Q}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

Kraft und Elektrische Energie des Quadrupols

- homogenes Feld: $\vec{F}_{\text{ges}} = \vec{0}$; $\vec{T}_{\text{ges}} = \vec{0}$
- inhomogenes Feld : komplexe \vec{F}_{ges} , \vec{T}_{ges}

Elektrische Energie

$$E_{el} = \sum_{i=1}^4 Q_i \varphi_{\text{ext}}(\vec{r}_i) \quad (\text{eine kleine Rechnung})$$

$$E_{el} = Q|\vec{d}|^2 \frac{\partial^2 \varphi_{\text{ext}}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{3} \hat{Q}_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_{\text{ext}}}{\partial x \partial y}$$

$$\hat{Q}_{x_1} = 3Q|\vec{d}|^2 \text{ Quadrupol}$$

allgemein gilt : für $x_1 \hat{=} x, x_2 \hat{=} y, x_3 \hat{=} z$

$$E_{el} = \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 \hat{Q}_{ij} \frac{\partial^2 \varphi_{\text{ext}}}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\hat{Q}_{ij} = \int d^3 \vec{r} \{ 3x_i x_j - |\vec{r}|^2 \delta_{ij} \} \rho(\vec{r})$$

Tensor 2. Stufe $i, j = 1 \rightarrow 3$

für N Punktladungen :

$$\hat{Q}_{ij} = \sum_{k=1}^N (3x_i x_j)_k - |\vec{r}|^2 \delta_{ij} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} i=j & 1 \\ i \neq j & \text{sonst} \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

E_{el} in Multipolentwicklung

$$\begin{aligned} E_{el} &= Q_{\text{ges}} \varphi_{\text{ext}}(\vec{r}) + \sum_{i=1}^3 p_i \frac{\partial \varphi_{\text{ext}}}{\partial x_i} + \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 \hat{Q}_{ij} \frac{\partial^2 \varphi_{\text{ext}}}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= Q_{\text{Mono}} \varphi_{\text{ext}}(\vec{r}) + \underbrace{\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \varphi_{\text{ext}}(\vec{r})}_{\text{Dipolanteil}} + \underbrace{\frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 \hat{Q}_{ij} \frac{\partial^2 \varphi_{\text{ext}}}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{Quadrupolanteil}} \end{aligned}$$

Bem.: \vec{p}, \hat{Q} abhängig von Wahl des Koordinatensystems

I.4 Elektrostatische Energie und Kapazität

I.4.1 Spannung

Erinnerung:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{W(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r})}{q} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \varphi(\vec{r}_0)$$

\vec{r}_0 Bezugspunkt

Spannung U als Potentialdifferenz zwischen \vec{r}_A und \vec{r}_B

$$U_{BA} = \varphi(\vec{r}_B) - \varphi(\vec{r}_A) = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E} \, d\vec{s} \quad \text{unabhängig von } \vec{r}_0$$

$$[U] = 1V = 1 \frac{J}{C}$$

I.4.2 Kapazität

- alle Potentiale \sim Ladung: $\varphi(\vec{r}) \sim Q$
N Punktladungen

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

für $Q_i \rightarrow zQ_i$ gilt $\varphi(\vec{r}) \rightarrow z\varphi(\vec{r})$

Es folgt:

$$U = \frac{1}{C}Q$$

C Kapazität

$$[C] = 1F(\text{Farad}) = a \frac{C}{V}$$

typische Werte für C: pF bis mF ($10^{-12}F$ - $10^{-3}F$) Bei gegebener Spannung U ist die **Kapazität C ein Maß dafür wieviel Ladung eine Konfiguration von Leitern aufnehmen kann**

- C abhängig von Geometrie der Leiter
Beispiele:

a) **homogene Kugel** Radius R , Ladung Q

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad r_0 = \infty \quad \varphi(\vec{r}_0) = 0$$

$$U(R) = \varphi(R) - \varphi(\infty) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

$$\boxed{C_{\text{Kugel}} = 4\pi\epsilon_0 R}$$

b) **Plattenkondensator** (homogenes Feld)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z \quad \sigma = \frac{Q}{A} \quad \text{Flächenladungsdichte}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{z=0}^z \vec{E} \, d\vec{z} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} z \quad \varphi(z=0) = 0$$

$$U = \varphi(d\vec{e}_z) - \varphi(0\vec{e}_z) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} d = |\vec{E}|d$$

$$\boxed{C_{\text{Platte}} = \frac{\epsilon_0 A}{d}}$$

c) **Zylinderkondensator**, Länge l

$$Q_1 = -Q_2$$

\vec{E} -Feld aus Gaußschem Gesetz

für $R_1 > r > R_2$ $\vec{E} = 0$ da $Q_{\text{ein}} = 0$

für $R_1 \leq r \leq R_2$:

$$\oint_{\text{Zylinder}(r)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_0^l \int_0^{2\pi} dz d\varphi E_r(|\vec{r}|) = l 2\pi r E_r$$

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \frac{1}{r}$$

$$\varphi = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \ln r$$

$$U = \varphi(R_1) - \varphi(R_2) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

$$C_{\text{Zylinder}} = 2\pi\epsilon_0 \frac{l}{\ln \frac{R_1}{R_2}}$$

d) **Lecherleitung/parallele Drähte**

einzelner Draht mit Radius R , Ladungsdichte $\frac{Q}{l}$

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \ln \left(\frac{r}{R} \right)$$

Drahtpaar mit $\mp \frac{Q}{l}$, Abstand a

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \left[\ln \left(\frac{r_+}{R} \right) - \ln \left(\frac{r_-}{R} \right) \right]$$

Sei $R \ll a$. U aus 2 Punkten auf Drähten

pos. Draht: $r_+ \approx R$ $r_- \approx a$

neg. Draht: $r_+ \approx a$ $r_- \approx R$

$$\begin{aligned} U &= \varphi(\text{pos. D}) - \varphi(\text{neg. D}) \\ &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \left[\ln \frac{R}{R} - \ln \frac{a}{R} - \ln \frac{a}{R} + \ln \frac{R}{R} \right] \\ &= \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \ln \frac{a}{R} \end{aligned}$$

$$C_{\text{Lecher}} = \frac{\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{a}{R}}$$

e) **Kugelkondensator**

$$C_{\text{Kugelkond.}} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1}{1 - \frac{R_1}{R_2}}$$

für $R_2 \rightarrow \infty$ $C_{\text{Kugel}} = 4\pi\epsilon_0 R_1$

I.4.3 Kondensatorschaltungen

a) Parallelschaltung

$$C_1 : Q_1 = C_1 U \quad C_2 : Q_2 = C_2 U$$

Potentiale / Spannungen gleich $U_1 = U_2 = U = \varphi_+ - 0$

$Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2$ Ladungserhaltung

$Q_{\text{ges}} = C_{\text{ges}} U$ Frage: C_{ges}

$$Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2 = U(C_1 + C_2) \quad \text{also} \quad C_{\text{ges}} = C_1 + C_2$$

allgemein für n parallele C_i :

$$C_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n C_i$$

Parallelschaltung erlaubt großes C_{ges}

b) Reihenschaltung

Es gilt: $Q_1^+ = -Q_1^- = Q_2^+ = -Q_2^-$

$Q_1 \equiv Q$

$U = U_1 + U_2$

$$U = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{Q}{C_{\text{ges}}}$$

also

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

allg. für serielle C_i :

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad C_{\text{ges}} < C_i$$

I.4.4 Elektrische Energie

- wie viel Energie notwendig um Ladungen im \vec{E} -Feld zu bewegen
- Punktladung q von $A \rightarrow B$
 $W_{A \rightarrow B} = q\varphi(\vec{r}_B) - q\varphi(\vec{r}_A)$
- zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 von ∞ an \vec{r}_1 und \vec{r}_2
 $Q_1 : \infty \rightarrow \vec{r}_1$: kein \vec{E} -Feld, kein $\varphi \rightarrow$ keine Arbeit
 $Q_2 : \infty \rightarrow \vec{r}_2$: Arbeit im Feld von Q_1

$$W_2 = Q_2 \varphi_1(\vec{r}_2) = Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

andere Reihenfolge:

$$W_1 = Q_1 \varphi_2(\vec{r}_1) = Q_1 \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \sum_{i \neq j} Q_i \varphi_j(\vec{r}_i)$$

dritte Punktladung $Q_3 : \infty \rightarrow \vec{r}_3$

$$W_3 = Q_3 \varphi_1(\vec{r}_3) + Q_3 \varphi_2(\vec{r}_3)$$

Es gilt: $Q_3 \varphi_i(\vec{r}_3) = Q_i \varphi_3(\vec{r}_i) \quad i = 1, 2$

$$\begin{aligned} E_{el} &= \frac{1}{2} Q_1 [\varphi_2(\vec{r}_1) + \varphi_3(\vec{r}_1)] \\ &\quad + \frac{1}{2} Q_2 [\varphi_1(\vec{r}_2) + \varphi_3(\vec{r}_2)] \\ &\quad + \frac{1}{2} Q_3 [\varphi_1(\vec{r}_3) + \varphi_2(\vec{r}_3)] \end{aligned}$$

$$E_{el} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i \varphi(\vec{r}_i) \quad \text{für N Punktladungen}$$

mit

$$\varphi(\vec{r}_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \varphi_j(\vec{r}_i)$$

konst. Ladungsverteilung $\varphi(\vec{r}) : \sum Q_i \rightarrow \int dQ$

$$E_{el} = \frac{1}{3} \int \frac{d^3 \vec{r} \rho(\vec{r})}{dQ} \varphi(\vec{r})$$

Bsp.: **homogengeladene Kugelschale** mit Radius R

$$\varphi(\vec{r}) = \text{const} \quad r < R \quad \varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad r \geq R$$

Sei zunächst $Q = 0$. dQ aus $\infty \rightarrow R$

$$\begin{aligned} dE_{el} &= \varphi(e) dQ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} dQ \\ E_{el} &= \int_0^Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^1}{R} dQ^1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{(Q^1)^2}{R} \Big|_0^{???R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{Q}{R} = \frac{1}{2} Q \varphi(R) \end{aligned}$$

wie oben Bsp.: homogen geladene Kugel Radius R , Ladung Q :

$$E_{el} = \frac{3}{5} k \frac{Q^2}{R}$$

Andere Form von E_{el} mit \vec{E}

$$\begin{aligned} E_{el} &= \frac{1}{2} d^3 \tilde{r} \rho(\tilde{r}) \varphi(\tilde{r}) \quad (3. \text{ MW-Gl.}) \quad \text{div}(\tilde{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3 \vec{r} \vec{\nabla} \vec{E}(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) \end{aligned}$$

partielle Integration $\left(1 \text{ dim: } \int_a^b dx f(x) g'(x) = f g \Big|_a^b - \int dx f'(x) g(x) \right)$ in 3 Dimensionen:

$$E_{el} = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\oint_{\substack{\text{Rand des} \\ \text{Volumens}}} \varphi(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} - \int d^3 \vec{r} \vec{E}(\vec{r}) \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \right]$$

Volumen $\rightarrow \infty$; $E(\vec{r}) \rightarrow 0$ auf Rand $\Rightarrow \oint_{\text{Rand}} \rightarrow 0$ verschwindet

$$E_{el} = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\vec{E}(\vec{r})|^2 d^3\vec{r} \quad \vec{\nabla}\varphi = -\vec{E}$$

$E_{el} \sim |\vec{E}|^2$ Energie im \vec{E} -Feld gespeichert

Energiedichte $W_{el} = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$

Bsp.: **Plattenkondensator mit Spannung $U(q)$**

E_{el} und dq auf Platte hinzufügen?

$dE_{el} = U dq = \frac{q}{C} dq$ Energie um Kondensator von 0 nach Q laden

$$E_{el} = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \Big|_0^Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$E_{el} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 V_{\text{Kond}} |\vec{E}|^2$$

$$V_{\text{Kond}} = Ad \quad C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad |\vec{E}| = \frac{U}{d}$$

I.5 Materie in elektrischen Feldern

I.5.1 Polarisation des Mediums

Betrachte Nichtleiter, $Q = 0$ im externen \vec{E} -Feld

- keine freien Elektronen e^-
- Verschiebung der e^- im Atom / Molekül.
 \rightarrow mikroskopische Dipole $\vec{p}_i = q_i \vec{d}_i$
 \rightarrow Ausrichtung im \vec{E} -Feld: $\vec{E} \uparrow \uparrow \vec{p}_i$ parallel

Effekt:

- Polarisation des Mediums \vec{P} oder (\underline{P})
- Flächenladungsdichte σ_{pol} am Rand des Mediums

Polarisation \vec{P} :

$$\vec{P} \equiv \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_i$$

Mittelung der mikroskopischen Dipole über Volumen V

$[\vec{P}] = \frac{C}{m^2}$ Annahme: alle \vec{p}_i gleich \vec{P} , gleich ausgerichtet, Dipoldichte η

Gilt:

$$P = |\vec{P}| = \eta |\vec{p}| = \eta q d$$

Flächenladungsdichte σ_{pol}

Betrachte $V = dA$ am Rand des Mediums

$$P = \frac{\eta q d A}{A} = \frac{\eta q V}{A} = \frac{Q}{A} = \sigma_{\text{pol}}$$

d.h. Polarisation $\hat{=}$ Flächenladungsdichte am Rand

Polarisationsfeld \vec{E}_{pol} im Medium

Anwendung von Maxwell-Gl auf Bereich mit σ_+

$$\oint_{\sigma_+} \vec{E}_{\text{pol}} d\vec{A} = \frac{Q_{\text{ein}}}{\epsilon_0}$$

rechts $\vec{E}_{\text{pol}} = 0$ keine Beitrag zum Fluss

links $\vec{E}_{\text{pol}} \uparrow \uparrow \vec{A}$

$$E_{\text{pol}} A = \frac{Q_{\text{ein}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{\text{pol}} = \frac{Q_{\text{ein}}}{A \epsilon_0} = \frac{\sigma_{\text{pol}}}{\epsilon_0} = \frac{P}{\epsilon_0}$$

Richtung von \vec{E}_{pol} :

\vec{p} von neg. Pol zur pos Pol

\vec{E}_{pol} von pos. Ladung zur neg Ladung

$$\rightarrow \vec{P} = -\epsilon_0 \vec{E}_{\text{pol}}$$

?????

\vec{E}_{Mol} (tsl?) Überlagerung von ???????

a) \vec{E}_{frei} ohne Medium \vec{E}_{pol} aus Dipolen

$$\vec{E}_{\text{Med}} = \vec{E}_{\text{frei}} + \vec{E}_{\text{Pol}} = \vec{E}_{\text{frei}} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

Polarisation abhängig von \vec{E}_{Mol} : $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_{\text{Med}}$

$\chi_e \hat{=}$ dielektrische Suszeptibilität

$$\vec{E}_{\text{Med}} = \frac{\vec{E}_{\text{frei}}}{1 + \chi_e}$$

$\epsilon = 1 + \chi_e$ relative Dielektrizitätskonstante / Permittivität

$$\vec{E}_{\text{Med}} = \frac{\vec{E}_{\text{frei}}}{\epsilon}$$

ϵ Faktor um den Feld geschwächt wird

ϵ, χ_e abhängig von der Art und Struktur des Mediums

I.5.2 Felder und Maxwell gl. im Medium

3. MW-Gl:

$$\text{div} \vec{E}_{\text{Med}} = \frac{P}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{Pol}}) \quad (*)$$

ρ_{frei} freie Ladung, ρ_{Pol} Polarisationsladungen

Polarisationsladung in V mit Rand A

$$\Delta Q_{\text{Pol}} = \int_A \sigma_{\text{Pol}} dA = \int_A \vec{P} dA \quad (1)$$

Außerdem:

$$\Delta Q_{\text{Pol}} = - \int \rho_{\text{Pol}} dV \quad (2)$$

$\vec{P} \uparrow \uparrow, \vec{E}_{\text{frei}} \rightarrow \vec{P} \uparrow \downarrow \vec{A}$ auf rechter Grenze also mit „+“ $\Delta Q_{\text{Pol}} < 0$ in (1)
 $\rho_{\text{Pol}} > 0$ in (2) \rightarrow „-“ Zeichen in (2)

Gaußscher Satz:

$$\oint \vec{P} d\vec{A} = \int \text{div} \vec{P} dV = \int -\rho_{\text{Pol}} dV$$

Es folgt:

$$\rho_{\text{Pol}} = -\text{div} \vec{P} = \epsilon_0 \text{div} \vec{E}_{\text{Pol}}$$

In (*):

$$\text{div} \vec{E}_{\text{Med}} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{frei}} + \epsilon_0 \text{div} \vec{E}_{\text{Pol}})$$

$$\text{div} (\vec{E}_{\text{Med}} - \vec{E}_{\text{Pol}}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{frei}}$$

Definiere \vec{D} als Flussdichte / elektrische Erregung / dielektrische Verschiebung

$$\vec{D} = \epsilon_0 (\vec{E}_{\text{Med}} - \vec{E}_{\text{Pol}}) = \epsilon_0 \vec{E}_{\text{frei}} = \epsilon_0 \vec{E}_{\text{Med}} + \vec{P}$$

3.MW-GL : $\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{frei}}$ 1.MW-GL : $\text{rot} \vec{E}_{\text{Med}} = 0$
--

Feldverhalten an Grenzflächen

Betrachte Grenzfläche: Medium/Dielektrikum ($\epsilon > 1$) \leftrightarrow Volumen ($\epsilon = 1$)

- nur Polarisation $\rho_{\text{frei}} = 0$ $\cdot \vec{E}_{\text{ext}}$
- $\rho_{\text{frei}} = 0 \Rightarrow D_{\text{Med}}^\perp = D_{\text{Vak}}^\perp$ $E_{\text{Med}}^\perp = \frac{1}{\epsilon} E_{\text{Vak}}^\perp$

$$\oint \vec{D} dA = 0 \text{ da } \rho_{\text{frei}} = 0$$

$d \rightarrow 0$: Beiträge von linker und rechter Stirnfläche

$$D_{\text{Med}}^\perp(A) + D_{\text{Vak}}^\perp(-A) = 0 \rightarrow D_{\text{Med}}^\perp = D_{\text{Vak}}^\perp$$

- parallele Komponenten D^\parallel, E^\parallel

$$\oint_{ABCD} \vec{E} d\vec{s} = 0 \text{ da } \text{rot} \vec{E} = 0$$

$\overline{AB}, \overline{CD} \rightarrow 0$ nur \overline{BC} und \overline{AD} tragen bei

$$\int_{\overline{BC}} \vec{E} d\vec{s} + \int_{\overline{AD}} \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad d\vec{s}_{\overline{AD}} = -d\vec{s}_{\overline{BC}}$$

$$\int_B^C E_{\text{Med}}^\parallel d\vec{s} + \int_A^D E_{\text{Vak}}^\parallel d\vec{s} = 0$$

$$\Rightarrow E_{\text{Med}}^\parallel = E_{\text{Vak}}^\parallel \rightarrow D_{\text{Med}}^\parallel = \epsilon D_{\text{Vak}}^\parallel$$

Berechnungsgesetz der Elektrostatik

$$\tan \alpha_{\text{Med}} = \frac{E_{\text{Med}}^{\parallel}}{E_{\text{Med}}^{\perp}} = \epsilon \frac{E_{\text{Vak}}^{\parallel}}{E_{\text{Vak}}^{\perp}} = \epsilon \tan \alpha_{\text{frei}}$$

I.5.3 Mikroskopische Beschreibung der Polarisation (Pol.)

angenommen $\vec{P} \sim \vec{E}_{\text{Med}}$

- Verhalten von Nichtleitern ohne permanentes Dipolmoment $\vec{p} = 0$
z.B. H_2 Ladungsschwerpunkt (\vec{r}_s) mittig
- im \vec{E} -Feld Verschiebung der e^- bzw. \vec{r}_s $\vec{F}_e \sim \vec{E}$
 $\rightarrow \vec{p} = \alpha \vec{E}$, $\alpha \hat{=}$ elektrische Polarisierbarkeit solche Materialien: Verschiebungspolarisation dominiert, sind Dielektrika im engeren Sinne
- Makroskopische Polarisation \vec{P}

$$\vec{P} = n\vec{p} = n\alpha\vec{E}_{\text{Med}} \quad n \hat{=} \text{Moleküle} \quad n = \frac{N_A \rho}{m_{\text{Mol}}}$$

N_A Avogadrokonst. ρ Massendichte m_{Mol} Molmasse

- Hatten $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_{\text{Med}}$
Zusammenhang α und $\chi_e \epsilon$

$$\alpha = \frac{\epsilon_0}{n} \chi_e = \frac{\epsilon_0}{n} (\epsilon - 1)$$

gut für kleine P (z.B. Gase)

wenn P groß, dann Dipol-Dipol-Wechselwirkung

\rightarrow Clausius-Mosotti-Beziehung: $\alpha = \epsilon \frac{\epsilon_0}{n} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$

Bsp.: H_2 -Molekül im **E-Feld** $1 \frac{\text{MV}}{\text{m}}$

$$\alpha_{H_2} = 8,7 \cdot 10^{-41} \frac{\text{Cm}}{\text{V}} (\alpha_{\text{typ}} \approx 100 \alpha_{H_2})$$

$$|\vec{p}|_{H_2} = 8,7 \cdot 10^{-35} \text{Cm}$$

$$d = 2,7 \cdot 10^{-16} \text{m} \quad L = 7,4 \cdot 10^{-11} \text{m} \quad (\text{Abstand H Atome})$$

$$d/L = 3,6 \cdot 10^{-6}$$

Orientierungspolarisation:

- polare Moleküle (z.B. H_2O) mit permanentem Dipolmoment \vec{p}
R \rightarrow **paraelektrisch**
- $\vec{E}_{\text{Med}} = 0$ Richtung der \vec{p} statistisch / gleichverteilt \rightarrow kein \vec{p}
- $\vec{E}_{\text{Med}} \neq 0$ Ausrichtung der \vec{p} im \vec{E} -Feld

Wärmebewegung behindert vollständige Ausrichtung. Ausrichtungsgrad beschrieben durch Boltzmannverteilung (\rightarrow Ex1)

$$f(\Delta E) = f_0 e^{-\Delta E/kT} \quad T \text{ Temperatur, } k \text{ Boltzmannkonstante}$$

$$\Delta E = -|\vec{p}||\vec{E}| \cos \theta \quad \text{pot Energie des Dipols}$$

$$\vec{E} = E\vec{e}_z \text{ Beitrag von 1 Molekül } \vec{p}_z = |\vec{p}| \cos \theta$$

Polarisation aus $f(\theta)$

Ergibt:

$$P = n\vec{p}_z \left\{ \underbrace{\coth \frac{p|\vec{E}|}{kT} - \frac{kT}{p|\vec{E}|}}_{\text{Langevin fkt. } L(\frac{p|\vec{E}|}{kT})} \right\}$$

$L(x) = 1$ d.h. alle Dipole ausgerichtet. oft $p|\vec{E}| \ll kT$ dann $L(x) \approx \frac{1}{3}x$ für $|x| \ll 1$ dann

$$P = np \frac{1}{3} \frac{p|\vec{E}|}{kT} = \frac{1}{3} \frac{p^2|\vec{E}|}{kT}$$

wieder linear in $|\vec{E}|$

- für $|\vec{E}|$ groß, oder T klein nicht lineare Effekte und schließlich Sättigung
- Suszeptibilität abhängig von Temperatur $\chi_e(T)$

Bsp.: H_2O -Molekül in E-Feld $100 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$

$$P_{H_2O} = 6,15 \cdot 10^{-30} \text{Cm} \quad \epsilon_{H_2O} \approx 80$$

$$\Delta E = |\vec{p}||\vec{E}| = 7,7 \cdot 10^{-27} \text{J} = 4,8 \cdot 10^{-8} \text{eV}$$

$$\text{Ausrichtungsgrad: } \frac{1}{3} \frac{p|\vec{E}|}{kT} = 1,9 \cdot 10^{-6}$$

d.h. für 1 Million Moleküle, 2 mit $\vec{p} \uparrow \uparrow \vec{E}$ Paraelektrisch: Überlagerung von Verschieb. pol. und Orientierungs-pol.

$$P = n \left(\alpha + \frac{1}{3} \frac{p^2}{kT} \right) E_{\text{Med}}$$

plus Clausius-Moretti-Korrektur $3 \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \epsilon_0 = n \left(\alpha + \frac{1}{3} \frac{p^2}{kT} \right)$ hieraus $\chi_e, \epsilon \quad P = \epsilon_0 \chi_e E_{\text{Med}}$

Exp. Bestimmung: Messung $C(T) \rightarrow \chi_e(T)$

Ferroelektrika

- große permanente Dipolmomente \vec{p} (Kristalle, kein Eisen)
- Dipol-Dipol-Wechselwirkung \rightarrow Domänenbildung ohne \vec{E} -Feld (durcheinander)
- in \vec{E} -Feld: Ausrichtung der Domänen sehr große ϵ bis 10^5

I.5.4 Kondensator im Dielektrikum

Meist: Dielektrikum zwischen den Platten

Ziel:

- Erhöhung der Spannungsfelder
- Erhöhung der Kapazität

Exp:

a) Ladung $Q = \text{const.}$ $C = \frac{Q}{U}$
 Beobachtung: $U(|\vec{E}|)$ kleiner $\rightarrow C$ größer

b) Spannung $U = \text{const.}$
 Beobachtung: Q größer $\rightarrow C$ größer

Erklärung: (a)

- Dielektrikum polarisiert
- Oberflächenladung σ_{pol} an Grenzflächen
 $\rightarrow \vec{E}_{\text{pol}} \uparrow \downarrow \vec{E}_{\text{ext}} \Rightarrow \vec{E}_{\text{Med}}$ geschwächt $\rightarrow U$ kleiner $U = |\vec{E}|d$

U def. über Arbeit um dq von „+“ nach „-“ zu bewegen. Feld schwächer $\rightarrow U$ kleiner um Faktor ϵ also

$$\boxed{C = \epsilon \epsilon_0 \frac{A}{d}}$$

und

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 |\vec{E}|^2 V$$

Energiedichte

$$W_{\text{el}} = \frac{E_{\text{el}}}{V} = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 |\vec{E}|^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{D} \vec{E}$$

Vgl. von elektrischer Energie ohne und mit Dielektrikum

ohne		mit	
C_0	\rightarrow	ϵC_0	
U_0	\rightarrow	U_0/ϵ	bei $Q = \text{const.}$
	\Downarrow		
E_{el}	\rightarrow	E_{el}/ϵ	

Teilweise mit $\epsilon > 1$ gefüllter Kondensator

- Ladungsdichte größer bei $\epsilon > 1$ da $E_{\parallel}^{\text{Med}} = E_{\parallel}^{\text{Vak}}$
- Parallelschaltung von 2 Kondensatoren
- $C_{\text{Med}} = \epsilon C_{\text{Vak}} \rightarrow Q_{\text{Med}} = \epsilon Q_{\text{Vak}}$ da $U = \text{const.}$

Kapitel II

Magnetostatik

II.6 Ströme

II.6.1 Elektrischer Strom

Bisher: ruhende Ladungen, räumlich getrennt $\rightarrow \vec{E}, \varphi$

Jetzt: leitende Verbindung \rightarrow pos. und/oder neg. Ladungen bewegen sich

Strom: Ladungsfluss pro Zeit durch eine gegebene Fläche

$$\boxed{I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{I = \frac{dQ}{dt}}$$

1. wenn $I = \text{const.}$ ist in Δt und 2. für $I(t)$

$[I] = 1A$ Ampère SI-Basiseinheit

Richtung: von „+“-Pol zu „-“-Pol \rightarrow technische Stromrichtung

in Leitern (metall): $\uparrow\downarrow$ Richtung der Elektronen

Stromdichte:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{dI}{dA} \vec{e}_j \quad \vec{e}_j \text{ in Stromrichtung}$$

$$\text{Zshg.: } I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

Bsp.: **Vakuumdioden**

v_e (Kathode) $\approx 0\text{m/s}$ Beschleunigung in $\vec{E} = E\vec{e}_z$

wieviele e^- treffen in dt auf pos. Platte?

Alle e^- im Abstand $< ds = v dt$ bzw. Volumen $ds A$ befinden $V = ds A = Av dt$ Anzahl

e^- in V : $n_e V$ n_e Elektronendichte. Transponierte Ladung $dQ = en_e Av dt$

$$\text{Strom } \boxed{I = en_e Av} \quad \text{Stromdichte } \boxed{\vec{j} = en_e \vec{v}}$$

\vec{j} konstant entlang Flugrichtung wegen Ladungserhaltung

\Rightarrow Kathode: kleine v , große n_e ; Anode: große v , kleine n_e

Kontinuitätsgleichung

Betrachte Volumen V , mit Oberfläche A

Strom (oder) Ladungsdichte/Zeit durch $A =$ Änderung der Ladung in V

$$I = \oint_{A(V)} \vec{j} \cdot d\vec{A} = -\frac{dQ}{dt}$$

Gaußscher Satz:

$$\Rightarrow \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = -\frac{d}{dt} \int \rho_Q dV$$

$$Q = \int \rho_{el} dV$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_Q(\vec{r}, t)} \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

Ladungen erhalten; werden nicht erzeugt oder vernichtet

II.6.2 Ohmsches Gesetz

G.S. Ohm (1826): ($I \sim U$) in vielen Leitern

$$\Rightarrow \boxed{U = RI}$$

Ohmsche Gesetze (OG.) makroskopische Form R: el./ohmscher Widerstand

$$[R] = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}} = 1 \Omega \quad \text{Ohm}$$

Exp: Strom-Spannungs Charakteristika $I(U)$

$$R(U) = \frac{dU}{dI}$$

<u>Kohlefaden</u>	<u>Glühlampe</u>	<u>Konstantendraht</u>
R kleiner für große U	R größer für große U	R konstant

Ursache: Temperaturabhängigkeit $R(T)$ (\rightarrow später)

Strikt: Ohmscher Widerstand $I \sim U^1$; nicht-ohmsch $I \sim U^k \quad k \neq 1$

Supraleitung

Flüssiger Stickstoff: $T_{W_2} = 77K \hat{=} -196^\circ C$

Messung: $R(\Delta T) \quad \Delta T = T_{\text{Probe}} - T_{W_2} \quad \text{Zeitabstand } \Delta t \approx 5s \quad \text{Beobachtung:}$

Hochtemperatursupraleiter $R = 0\Omega$ bis zu $\Delta T \approx 8K$

\rightarrow Sprungtemperatur $T_c = 77K + 8K = 85K \hat{=} -188^\circ C$

Kupfer:

$R = 0,7m\Omega$ für kleine ΔT , danach ohmscher Widerstand

Supraleitung:

gewisse Materialien die für $T < T_c$ Widerstand Verlieren

II.6.3 Arbeit und Leistung

An Ladung q (von φ_1 nach φ_2 gebracht) wird Arbeit verrichtet/gewonnen

$$W = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU$$

In dt wird dQ transportiert, dann wird Leistung P verrichtet.

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \frac{dQ}{dt} U = UI} \quad \text{el. Leistung}$$

Umkehrung:

$$W = \int_0^t P(t) dt = \int_0^t U(t)I(t) dt$$

$$[P] = 1W = 1VA = 1 \frac{J}{s}$$

Leistung wird im Leiter in Wärme umgewandelt geht aus Stromkreis verloren.

Exp: Widerstände

Widerstände aus Fe und Cu in Reihe geschaltet $R_{Cu} < R_{Fe}$ Strom I gleich

$$P = UI = RI^2 \rightarrow P_{Cu} < P_{Fe}$$

II.6.4 Leitungsvorgänge in Metallen und Halbleitern

Metalle:

Strom durch die e^- im Leitungsband, U an Drahtenden $\rightarrow \vec{E}$ -Feld

Beschleunigung der e^- $\vec{F}_{e^-} = -e\vec{E}$

Aber: thermische Bewegung $kT(300K) = 0,0025eV \rightarrow v_{\text{therm}} \approx 10^5 \frac{m}{s}$ Stöße mit den Atomen („Reibungseffekt“)

\rightarrow Drift der Elektronen mit v_{drift}

Stromdichte \vec{j} : in dt passieren alle e^- die Fläche A in $dl = v_0 t$ bzw $V = dl A$

$$dQ = N_e e = en_e V dA dt$$

N_e Anzahl e^- , n_e e^- -Dichte

$$\boxed{\vec{j} = -n_e e \vec{v}_0}$$

„-“ weil $\vec{v}_0 \uparrow \downarrow \vec{E}$

Driftgeschwindigkeit v_D

$$v(t) = at = \frac{e|\vec{E}|}{m_e} t \quad m_e \text{ Elektronenmasse}$$

(mit $F_e l = q \cdot \vec{E}$ und $q = e$)

Sei \mathcal{T}_s mittlere Zeit zwischen 2 Stößen

$$v_0 = \frac{e|\vec{E}|\mathcal{T}_s}{m_e} = \boxed{\frac{n_e e^2 \mathcal{T}}{m_e}} |\vec{E}|$$

$$\boxed{\sigma_{el} = \frac{1}{\rho_{el}} = \frac{n_e e^2 \mathcal{T}}{m_e}}$$

σ_{el} Elektrische Leitfähigkeit?!?!? ρ_{el} spezifischer Widerstand $[\rho_{el}] = \Omega m$

$$\boxed{\vec{j} = \sigma_{el} \vec{E}}$$

ohmsches Gesetz in mikroskopischer/originaler Form

„Rückkehr“ zu makroskopischem OG. $\vec{I} = \text{const. über A}$

$$I = |\vec{j}|A = \frac{1}{\rho_{el}} |\vec{E}|A = \frac{1}{\rho_{el}} \frac{U}{l} A$$

d.h. $\boxed{R = \frac{\rho_{el} l}{A}}$ **Widerstand eines Drahtes**

Halbleiter:

Bandlücke ΔE zwischen Valenz- und Leitungsband

$$n_e = n_0 e^{-\frac{\Delta E}{kT}} \quad \text{steigt mit } T$$

- für $T < T_{\text{Sättigung}}$: $\frac{dR}{dT} < 0$
- für $T > T_{\text{Sättigung}}$: $\left. \begin{array}{l} n_e \rightarrow \text{const.} \\ \mathcal{T}_s \text{ sinkt mit } T \end{array} \right\} \sigma \text{ sinkt mit } T$

II.6.5 Kirchhoffsche Gesetze KHG

- 2 KHG + OG Grundlage für U bzw. I in R-Netzwerken
- 1.KHG (auch **Kontenregel**): im Knoten gilt $\sum_i I_i = 0$ aus Ladungserhaltung
- 2.KHG (auch **Maschenregel**): in Maschen gilt $\sum_i U_i = 0$ folgt $\oint \vec{E} d\vec{S} = 0$

Widerstandsschaltungen

- **Reihenschaltung:**

Knotenregel: $I = I_1 = I_2$

Machenregel: $U = U_1 + U_2$

OG: $U = R_1 I_1 + R_2 I_2 = (R_1 + R_2) I$

$\rightarrow R_{\text{ges}} = R_1 + R_2$

bzw. für $n R_i$:

$$R_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n R_i$$

- **Parallelschaltung:**

Knotenregel: $I = I_1 + I_2$

Maschenregel: $U = U_1 = U_2$

$I = I_1 + I_2 = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$

$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

bzw. für $n R_i$:

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

Wheatstonesche Brückenschaltung

Ziel: Messung von unbekannten R_x

Spannungen an den grünen Punkten:

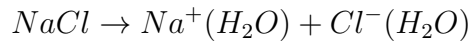
$$U_L = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0 \quad U_R = \frac{R_x}{R_0 + R_x} U_0$$

kein Strom I wenn $U_L = U_R$ dann gilt: $\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_x}{R_0 + R_x}$

II.6.6 Leitungsvorgänge in Flüssigkeiten

Beobachtung: reines H_2O kein Strom, Zugabe von $NaCl$ Strom \sim Konzentration des $NaCl$

- Elektrolyt: Lösung von Salz, Säure, Lauge die Strom leitet
- Dissoziation in Lösung (Ionisation/Hydratisierung)



wenn $E(\text{Anlagerung}) > E(\text{Ionisation})$

- Wanderung der Na^+ , Cl^- -Ionen im \vec{E} -Feld.
Materialabscheidung an Elektroden (fest, gasförmig)
 Na^+ zu Kathode(-): Abscheidung von Na ($Na^+ + e^- = Na$)
 Cl^- zu Anode(+): Abscheidung von Chlorgas ($2Cl^- \rightarrow Cl_2 + 2e^-$)

Exp:

Glas bei $T = 300K$ Isolator, erstarrte Flüssigkeit bei $T = 600^\circ C$ Funken, erster Stromfluss

Strom $\rightarrow T \nearrow \rightarrow I \nearrow \rightarrow T \nearrow \dots$ bis das Glas schmilzt

Ionenleitung:

pos. Ionen mit Ladung Z_+ und Dichte n_+

neg. Ionen mit Ladung Z_- und Dichte n_-

Drift im \vec{E} -Feld: $\vec{v}_{+/-} = \pm \beta_{\pm} \vec{E}$ β_{\pm} ist die Beweglichkeit der Ionen (teilweise: u, μ)
 $[\beta] = \frac{m^2}{Vs}$

Stromdichte:

$$|\vec{j}| = e(n_+ Z_+ V_+ + n_- Z_- V_-)$$

$$\sigma_{el} = e(n_+ \beta_+ Z_+ + n_- \beta_- Z_-)$$

für kleine n : $\beta \neq \beta(n)$ typisches $\beta \sim 10^{-8} \rightarrow 10^{-7} \frac{m^2}{Vs}$

Voltasche Spannungsreihe

Metall in Wasser: wenn $E_{\text{Ionisation}} < E_{\text{Hydratisierung}}$

Atom $\rightarrow A^+(H_2O) + e^-$ (Elektrode)

\vec{E} -Feld zwischen neg. Elektrode und pos. Elektrode bewirkt $E_{\text{Ionisation}}$ wächst \rightarrow Sättigung der Ionisation

$n_{\text{Gleichgewicht}}$ und $U_{\text{Gleichgewicht}}$ (Elektrode und Flüssigkeit) \rightarrow elektrolytische Tension

- zwei Elektroden aus
 - a) gleichem Metall \rightarrow keine Spannung zwischen Elektroden
 - b) unterschiedliche Metalle $\rightarrow \Delta U$ Galvanisches Element
- Messung von ΔU zu Referenzelektrode (H_2 umspültes Platin)
 \rightarrow Voltasche Spannungsreihe („-“ unedel \rightarrow „+“ edler)

II.6.7 Stromleitung in Gasen

- Gase: keine (minimale) freie Ladungsträger
- Entladung: Stromfluss durch Gas
- Ladungsträger: Ionen (A^+ , M^+) und e^- , $n_+ \approx n_-$
- 2 Arten:
 - unselbstständige von außen erzeugte A^+ , e^-
 - selbstständige: initialer Strom wird verstärkt

Unselbstständige Ionisation:

- a) als Röntgenstrahlung $\gamma + A \rightarrow A^+ + e^-$
- b) therm. Bewegung in Stößen
 $T \nearrow$ dann $E_{\text{kin}} \nearrow$ für E_{kin}

Erzeugungsrate für Ionen (e^- , A^+) : $(\frac{dn}{dt})_{\text{erz}} = \alpha$

Vernichtungsrate/Rekombinationsrate: $(\frac{dn}{dt})_{\text{Reh}} = -\beta n_+ n_- = -\beta n^2$

$$n_+ = n_- = n$$

- Summe: $(\frac{dn}{dt})_{\text{Gesamt}} = \alpha - \beta n^2$
- Gleichgewicht: $(\frac{dn}{dt})_{\text{gesamt}} = 0 \rightarrow n_{\text{Gleichgew}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
 $n_{\text{Gleich.}} = \text{const.} \rightarrow \text{ohmscher Bereich}$

$$\vec{j} = e \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} (\beta^+ + \beta^-) \vec{E}$$

- U, \vec{E} sehr groß: $\lambda_{\text{frei}} \gg$ Abstand der Platten
 \rightarrow keine Rekombination $\beta \rightarrow 0$
Sättigungsstrom I_s : alle $e^- A^+$ abgesagt

$$I_s \sim \alpha$$

II.6.8 Stromquellen

Innenwiderstand

- $U_v < U_0$
 - Stromquelle hat maximale Leistung
- \rightarrow Effekt beschrieben durch Ersatzschaltbild (Reale Stromquelle als Spannungsquelle in reihe mit Widerstand)

Spannungs/Stromquelle mit U_0 in Serie mit Innenwiderstand R_I U_0 Elektromotorische Kraft EMK

$$I = \frac{U_0}{R_I + R_V} \quad U_{kl} = R_V I = \frac{R_V}{R_I + R_V} U_0$$

Leistung:

$$P_V = U_{kl} I = \frac{R_V}{(R_V + R_I)^2} U_0^2$$

Grenzfälle:

$$\text{a) } R_V \rightarrow \infty \quad U_{kl} \rightarrow U_0 \quad I \rightarrow 0 \quad P_V \rightarrow 0 \text{ offene Stromstärke}$$

$$\text{b) } R_V \rightarrow 0 \quad U_{kl} \rightarrow 0 \quad I = \frac{U_0}{R_I} = \frac{U_{kl}}{R_V} \quad P_V \rightarrow 0 \text{ kurz schluss}$$

dazwischen P_V maximal (bei $R_I = R_V$ in Übung berechnet)

II.6.9 Thermoelektrizität

Kontaktpotential

- 2 unterschiedliche Metalle in Kontakt

Fermi-Energien / **Austrittsarbeiten** sind unterschiedlich

$E_F(A) < E_F(B)$: wandern e^- von A nach B , A pos. geladen / B neg. geladen

$\rightarrow \vec{E}(A \rightarrow B)$ entgegengesetzt zu Strom

\rightarrow Kontaktspannung $U_{\text{kon}} = E_F(B) - E_F(A)$

Geschlossener Kreis: $\sum_i U_{\text{kon}}^i = 0$ bei konstanter Temperatur

Seebeck-Effekt

- U_{kon} temperaturabhängig
- kontakte 1 und 2 bei T_1 und T_2
 \rightarrow Seebeck koeffizienten $[S_i] = \frac{V}{K}$ typ: $10^{-5} \rightarrow -6$ in Metall 10^{-3} in Halbleiter
- ΔT bewirkt Spannung

Peltier-Effekt

Strom durch Material A, B, A

- Strom durch Kontaktstellen bewirkt ΔT
- $E_F^A > E_F^B$ AB heiß BA kühl

$A \rightarrow B : \frac{dW}{dt} > 0$ T steigt, Energie dem Gitter zugeführt

$B \rightarrow A : \frac{dW}{dt} < 0$ T sinkt, Energie dem Gitter entzogen

$$\frac{dW}{dt} = (\Pi_A - \Pi_B) I \quad \text{Peltierkoeffizienten} [\Pi] = \frac{J}{K} \quad (\text{typ } 10^2 J/K)$$

Es gilt: $\Pi_A = S_A T$

II.7 Das magnetische Feld

II.7.1 Elektromagnetische Kräfte

→ Folie

II.7.2 Magnetisches Feld

- Elektrostatik: Coulombkraft \vec{F}_e
→ \vec{E} -Feld $\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_{\text{Probe}}}$
- Beobachtung → Feld → Kraft
- Beobachtung:
 - **Feldlinien immer geschlossen**
[auch innerhalb von Permanentmagneten]
⇒ **Quellen-frei**
 - in Nähe von Pol und Stromdurchflossener Leiter Feldlinien Dichter
→ Feld größer $\sim \frac{1}{r^k}$ $k > 0$
 - Konvention:
Außenbereich von Nord → Süd
Innenbereich von Süd → Nord
in **Permanentmagneten**

Idee: mathematische Beschreibung durch Vektorfeld $\vec{B}(\vec{r})$ „magnetische Feldstärke“, „Flussdichte“, „Induktion“

$[\vec{B}] = 1\text{T (Tesla)} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$ (Zshg. später)

magnetischer Fluss $\Phi_M \equiv \int_A \vec{B} d\vec{A}$

II.7.3 Maxwell-Gleichung der Magnetostatik

- geschlossene Feldlinien ohne Anfang und Ende

$$\begin{array}{l} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \Phi_M = \oint_A \vec{B} d\vec{A} \end{array}$$

4. MW-Gl. \vec{B} ist Quellen-frei.

Äquivalenz mittels Gaußschen Satzes

$$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = \int_V \text{div} \vec{B} dV = 0 \quad \text{für beliebige Volumina} \Rightarrow \text{div} \vec{B} = 0$$

- kein skalares Potential φ_M definierbar

- Feld von stromdurchflossenen Leiter.

$$\vec{B}(\vec{r}) = B(|\vec{r}|)\vec{e}_\varphi \text{ nur von } r \text{ abhängig}$$

$$\oint_{r=r_0} \vec{B} d\vec{s} = 2\pi r_0 B(r_0) \neq 0 \quad \mu_0 I \text{ experimentell}$$

$$\rightarrow \oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I$$

Ampéresches Gesetz μ_0 magnetische Feldkonstante Permeabilität des Vakuums

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad \mu_0 \text{ ohne Felder} \rightarrow \text{später}$$

- Anwendung des Stokeschen Satzes mit $I = \int \vec{j} d\vec{A}$

$$\oint_{R(A)} \vec{B} d\vec{s} = \int_A \text{rot } \vec{B} d\vec{A} = \mu_0 \int \vec{j} d\vec{A}$$

Weg \vec{s} auf dem Rand $R(A)$ pos. Schraube um \vec{A}

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I$$

2 MW-Gl. Wirbelkerne = Orte mit Stromdichte $\neq 0$

Def: **magnetische Feldenergie** E_{mag} bzw. **Energiedichte** w_{mag}

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2\mu_0} \int |\vec{B}|^2 dV \quad \text{hier fehlt was}$$

Zsfg:

\vec{E} ist wirbelfreies Quellfeld

\vec{B} ist quellfreies Wirbelfeld

II.7.4 Das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$

- da $\text{div } \vec{B} = 0$ gibt es \vec{A} , so dass $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$
- Frage:
 - wie bestimmt man \vec{A}
 - ist \vec{A} „real“ oder nur mathematisches Hilfsmittel
 - * klassische Physik: lediglich Hilfsmittel
 - * Quantenmechanik: Aharonov-Bohm-Effekt
 $\vec{A} \neq 0$ beeinflusst einen e^- -Strahl obwohl
 $\vec{B} = 0$ auf Weg des Strahls
 - * QED: $(\varphi_{\text{el}}, \vec{A})$ ist „Wellenfunktion“ des Photon

- \vec{A} ist nicht eindeutig
 \vec{A} und $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad} f$ f Skalarfeld liefern selbes \vec{B} , da $\text{rot}(\text{grad} f) = 0$
 \rightarrow Eichfreiheit durch Wahl von f oft:
 Coulombgleichung: $\text{div} \vec{A} \stackrel{!}{=} 0$
- f eindeutig? Nein.
 Alle f mit $\Delta f = \text{div grad} f = 0$ erfüllen $\text{div}(\vec{A}) = 0$
 nutze Freiheit in f , so dass $|\vec{A}(\vec{r})| \xrightarrow{|\vec{r}| \rightarrow \infty} 0$
- Betrachte 2. MG.

$$\text{rot} \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \dots = -\Delta \vec{A}$$

also

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \\ t = 1 \end{array}}$$

II.7.5 Berechnung von Magnetfeldern

Aus MW-Gl. bzw. Ampèresches Gesetz

- 1) **gerader Leiter**, Strom I

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I \quad B \text{ nur abhängig von } r, \text{ in Richtung } \vec{e}_r$$

$$B(r) 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

- 2) **Koaxialkabel**

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \begin{cases} \frac{r}{R_s} & \text{für } r < R_s \\ \frac{1}{r} & \text{für } R_s < r < R_n \\ 0 & \text{für } R_n < r \end{cases}$$

- 3) **Solenoid**

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \int_C^D \vec{B} d\vec{s} + \int_A^B \vec{B} d\vec{s} \quad \text{auf anderen Wegen} \quad \vec{B} \perp d\vec{s}$$

B homogen und entlang Symmetrieachse

für „AB“ $\rightarrow \infty$ $B(\infty) \rightarrow 0$

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \int_C^D \vec{B} d\vec{s} = Bl = \mu_0 NI$$

l Länge des Solenoiden N Windungszahl

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 NI}{l}}$$

- 4) **Toroidspule** $\vec{B} = \frac{\mu NI}{2\pi R} \vec{e}_\varphi$

- 5) **Flächenstrom** $B_y = -\frac{1}{2} \mu_0 \vec{j} d$

Biot-Savart-Gesetz BSG

- Ziel: Verfahren zur Berechnung von \vec{B} für beliebige gegebene \vec{j}, I
- Betrachte infinitesimales Leiterstück mit infinitesimaler Stromdichte $d\vec{j} \rightarrow d\vec{V}$
 \vec{B}_{Gesamt} aus Summe/Integral über $d\vec{j}$
- Es gilt: $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$ [Vgl: $\Delta \varphi_{\text{el}} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$]

$$\text{Lsg: } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \dots = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla} \times \vec{j}(\vec{r}') = + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}') \right]$$

$\text{rot} \vec{j} = 0$ kein Kreisstrom ohne externen Antrieb in Magnetostatik

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \text{ oder } \text{sonachschauen}$$

hier fehlt was

Bestimmung von \vec{B} mit BSG

1) Leiterschleife mit Radius R, Strom I

ges: Magnetfeld auf der Achse aus $d\vec{l} \sim \vec{j}$ $d\vec{B} \sim -(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{l}$

Symmetrie bzw Kompensation von $d\vec{l}$ bei φ und $\varphi + \pi \Rightarrow \vec{B} = B_z \vec{e}_z$

$$dB_z = \cos \alpha dB \quad \cos \alpha = \frac{R}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$d\vec{l} \perp \vec{r} - \vec{r}' \Rightarrow$ Beträge ausreichend

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int dl \frac{\cos \alpha}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{auf Kreis} \quad R, z = \text{const.} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

hier fehlt was

II.8 Magnetische Kräfte

II.8.1 Die Lorenz Kraft

Erinnerung: Anziehung $I_1 \uparrow \uparrow I_2$, Abstoßung $I_1 \uparrow \downarrow I_2$ keine Coulomb-Kräfte, da Leiter neutral

Exp: Fadenstrahlrohr

Beobachtung: $R \sim \frac{1}{I} \sim \frac{1}{|\vec{B}|}$

Richtung der Kraft: $-\vec{v}_e \times \vec{B}$ rechte-Hand-Regel „+“ $Q_e = -e$

keine Arbeit verrichtet durch F_{Mag} (Loranzkraft) $W = \int F_{\text{Mag}} d\vec{s} = 0$ $F_{\text{Mag}} \perp \vec{v} \Rightarrow$
Richtung von \vec{v} ändert sich, Betrag von \vec{v} konstant

$$\boxed{\vec{F}_{\text{Mag}} = \vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}} \quad \text{Lorenzkraft}$$

Fadenstrahlrohr:

Beschleunigung in \vec{E} -Feld: $eU_B = \frac{1}{2}mv^2$ $v = \sqrt{\frac{2eU_B}{m}}$

für $U_B = 300\text{V}$ $v = 0,03$ Lichtgeschwindigkeit

$$\vec{F}_L = \vec{F}_{\text{Zent}} \quad -e\vec{v} \times \vec{B} = -\frac{mv^2}{r}\vec{e}_r$$

$$\Rightarrow r = \frac{|\vec{v}|}{eB} \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

$$T_{\text{Umlauf}} = \frac{\text{Umfang}}{v} = \frac{2\pi r}{eB} = \frac{2\pi m}{eB} \quad W_{\text{Umlauf}} = \frac{2\pi}{T_{\text{Umlauf}}} = \frac{e}{m_e} B \quad \text{Zyklotronfrequenz}$$

gilt für $v \ll c$ Lichtgeschw.

für $v \rightarrow c$ wird $T \nearrow, w \searrow$

Wenn $\vec{v} \perp \vec{B}$ dann in Gl. $\vec{v}, \vec{p} \rightarrow \vec{v}_{\perp \vec{B}}, \vec{p}_{\perp \vec{B}}$

$$eB = \frac{mv}{r} \quad \rho \text{ Radius in Ebene } \perp \vec{B}$$

$\vec{v}_{\parallel B}$ unbeeinflusst \rightarrow Helixbahn des Elektronenstrahls

Anwendung: $\frac{e}{m}$ -Bestimmung

Hall-Effekt

- Hall-Effekt (Erwin Hall 1879 in Doktorarbeit)

Exp: Strom durch (Halb)leiter in Magnetfeld

\rightarrow Spannung $U_{\text{Hall}} \perp \vec{B}$ und $\perp \vec{j}$

- e^- durch \vec{F}_L abgelenkt $\rightarrow \vec{E}$ -Feld wegen e^- -Mangel/Überschuss

- Gleichgewicht wenn $\vec{F}_{\text{el}} + \vec{F}_L = \vec{0}$

$$e|\vec{v}_D||\vec{B}| = e|\vec{E}| \quad |\vec{E}| = \frac{U_H}{b}$$

$$I = |\vec{j}|A = jbd \quad j = n_e|\vec{v}_D|e \quad ev_D = \frac{j}{n_e}$$

$$\text{Also: } F_L = \frac{I}{bdn_e}B \quad F_{\text{el}} = e\frac{U_H}{b}$$

$$\rightarrow \boxed{U_H = \frac{IB}{edn_e}} \quad (n_e)_{H_L} \ll (n_e)_{\text{Leiter}} \Rightarrow \text{für } I = \text{const. wird } U_H \text{ größer}$$

- Anwendung: Hall-Sonde zur Messung von B-Feldern.

II.8.2 Kräfte auf Stöme

Leiter mit Querschnitt A : $I = jA$ $\vec{j} = en_e\vec{v}_D$

Kraft auf infinitesimales Leiterstück dl $dq = en_eA dl$

$$d\vec{F} = dq(\vec{v}_D \times \vec{B}) = en_eA dl(\vec{v} \times \vec{B}) = A dl\vec{j} \times \vec{B}$$

$$d\vec{l} \equiv dl \frac{\vec{j}}{|\vec{j}|}$$

$$d\vec{F} = Ajd\vec{l} \times \vec{B} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

Integration über Leiter: $\vec{F} = I\vec{e} \times \vec{B} \rightarrow$ erklärt rollenden Stab/Leiterschaukel

- parallele Ströme (galvanische Kräfte)
 I_2 erzeugt $\vec{B}(I_2)$ am Ort von I_1
 \rightarrow Lorenzkraft auf I_1 gemäß obiger Gleichung
 Abstand der Leiter r , Länge $l \gg r$
 Kraft auf dl_1 im Leiter 1
 $d\vec{F}_1 = I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B}(I_2)$
 Hatten: $\vec{B}(I_2) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_2}{r} \vec{e}_\varphi$
 $\vec{B}(I_2) \perp I_1 \Rightarrow$ Beträge ausreichend
 $dF_1 = I_1 \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_2}{r} dl_1$

$$|\vec{F}_1| = \int_0^L \frac{\mu_0}{2\pi r} I_1 I_2 dl_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{L}{r} I_1 I_2$$

- $d\vec{l}_1 \times \vec{B}$ mit Rechte-Hand-Regel
 \rightarrow Abstoßung für $I_1 \uparrow \downarrow I_2$
 actio = reactio Symmetrie zwischen I_1 und I_2

Exp: „Stromwaage“

Masse von 200 mg zum Beschweren

$$F_L = F_G \quad F_G = m \cdot g \quad F_L = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 \frac{L}{r}$$

$$\rightarrow I = \sqrt{\frac{mg2\pi r}{L\mu_0}} = 15,1 \text{ A} \quad \text{Vgl. Exp: } I = 14,9 \text{ A}$$

Exp: Meissner-Ochsenfeld-Effekt

Hochtemperatursupraleiter (Yttrium Barium Kupferoxid)

- Für $T < T_{\text{sprung}}$ supraleitend
- Magnetfeld aus Körper hinausgedrängt Erklärung in Festkörperphysik (Ginzburg-Landau-Th, BCS-Theorie)
- warum schieben über Magnetbahn? \rightarrow Übung

II.8.3 Der Magnetische Dipol

Def. magnetischer Dipol $C \rightarrow$ Leiterschleife

$\vec{p}_M = I\vec{A}$ Richtung von \vec{A} aus \vec{j} über „Rechte-Hand-Regel“

Hatten B auf Achse:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{l^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z$$

für $R^2 \ll z^2$:

$$= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{z^3} \vec{e}_z \sim \boxed{\frac{1}{z^3}}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{p}_M}{z^3} \quad \boxed{\vec{p}_M \uparrow \uparrow \vec{B}}$$

Allgemein (außerhalb Achse)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r}|^3} \left(\frac{3\vec{r}(\vec{p}_M \cdot \vec{r})}{r^2} - \vec{p}_M \right)$$

Nordpol bei + z - Richtung, Südpol bei - z - Richtung
 $\rightarrow \vec{p}_M$ zeigt von Süd- nach Nordpol

- Dipol des e^- im Wasserstoffatom (klassisch)
 $\vec{F}_{\text{el}} = \vec{F}_{\text{zen}} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m_e \frac{v^2}{r} = \frac{Lv}{r^2} \quad L \equiv m_e v r$
 In QM: L quantisiert $n\hbar \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad h$ Planksches Wirkungsquantum
 e^- -Bewegung $\hat{=}$ Kreisstrom $I = \frac{e}{T} \quad T$ Umlaufzeit
 $\vec{p}_H = U\vec{A} = \frac{-e}{r}\vec{A} = \frac{-ev}{2\pi r}\pi r^2 \vec{e}_n = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}$
 für $L = 1\hbar$: $|\vec{p}_H| = \underbrace{\frac{e\hbar}{2m_e}}_{\mu_B} = 9,26 \cdot 10^{-24} \text{ A m}^2 \quad \mu_B = \text{Bohrsches Magneton}$

Kräfte auf magnetischen Dipol

Leiterschleife $\vec{F} = I \oint d\vec{l} \times \vec{B} \quad \vec{M} = I \oint \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B})$

a) homogenes \vec{B} -Feld

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{ges}} &= 0 \text{ da Kompensation von } d\vec{l} \text{ bei } \varphi \text{ und } d\vec{l} \text{ bei } \varphi + \pi \\ \vec{M} &= IB \sin \alpha \pi R^2 \vec{e}_y = \vec{e}_M \times \vec{B} \\ \vec{B} \downarrow \rightarrow \vec{p}_M \quad \vec{p}_M \uparrow \uparrow \vec{B} &\text{ energetisch günstiger} \\ \Delta E_{\text{mag}} &\equiv - \int_{\frac{\pi}{2}}^d \vec{M} d\alpha = -\vec{p}_M \vec{B} \text{ Nullpunkt für } E_{\text{mag}} \text{ bei } \alpha = \pi/2 \end{aligned}$$

b) inhomogenes \vec{B} -Feld

$$\text{Taylorentwicklung } \vec{B}(\vec{r}) = \underbrace{\vec{B}(\vec{r}_0)}_{\text{const.}} + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{B}(\vec{r}))|_{\vec{r}=\vec{r}_0} \vec{B}(\vec{r}_0) \text{ kein Beitrag zur Kraft}$$

Rechnung zeigt: $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{B}\vec{p}_M)$

d.h. Kraft in Richtung \vec{B} -Gradient. Dipol wird in Bereich großer Feldstärke gezogen

II.9 Magnetische Felder in Materie

II.9.1 Magnetisierung der Materie

- Atom: Elektronen und Kern. e^- mit \vec{p}_M verbunden
 \vec{p}_M im Magnetfeld \vec{B} ausgerichtet
- $\vec{B}(\vec{p}_M) \equiv \vec{B}_{\text{Mag}}$ überlagert sich externes \vec{B} -Feld $\rightarrow \vec{B}_{\text{Med}}$

- e^- mit $\vec{L} \Rightarrow \vec{p}_M = -\underbrace{\frac{e}{2m_e}}_{\gamma_L} \vec{L} \quad |\vec{L}| = n\hbar$
 $\gamma_L =$ gyromagnetisches Verhältnis manchmal auch ohne -
für $|\vec{L}| = 1\hbar \quad |\vec{p}_M| = \mu_B$ Bohrsche Magneton (des e^-)
- komplexe Atome: viele $e^- \rightarrow$ vektorielle Summe der \vec{L}_i
 \rightarrow Quantenmechanik, Atomphysik
- Kern: $\gamma_{L, \text{Photon}} = \frac{e}{2m_p} \approx \frac{1}{1836} \gamma_{L, e^-} \rightarrow$ vernachlässigbar
- Spin des e^- (Eigendrehimpuls) $\vec{S} : |\vec{S}| = \frac{1}{2}\hbar$

$$\vec{p}_M = \gamma_S \vec{S} \quad \gamma_S = -\frac{e}{m_e} = 2\gamma_L$$

- Gesamt Dipolmoment eines $e^- : \vec{p}_M = \vec{p}_{M,L} + \vec{p}_{M,S}$
komplexes Atom: $\vec{p}_{M, \text{gesamt}}$ aus c^- -Konfiguration
aber: \vec{p}_{Atom} fixiert, \vec{B}_{ext} ändert nur Orientierung von \vec{p}_{Atom}

Magnetisierung der Materie

- Ziel: Einfluss der atomaren \vec{p}_M auf \vec{B} -Feld in Materie quantifizieren
- Magnetisierung $\vec{M} \equiv \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_{M,i}$ aus Überlagerung von atomaren Kreisströmen
 - im Inneren Kompensation von entgegengerichteten Strömen
 - auf Rand Oberflächenstrom I_{Mag}

$$\vec{M} = \frac{I_{\text{Mag}} \vec{A}}{V} \quad |\vec{M}| = \frac{I_{\text{Mag}} A}{Ad} = \frac{I_{\text{Mag}}}{d} \quad d = \text{Dichte der schicht}$$

- \vec{B}_{Mag} aus I_{Mag} über Ampèresches Gesetz Annahme: \vec{B}_{Mag} homogen, im Vakuum verschwindet

$$\oint \vec{B}_{\text{Mag}} d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{Mag}} \quad B_{\text{Mag}} d = \mu_0 I_{\text{Mag}}$$

$$|\vec{B}_{\text{Mag}}| = \mu_0 \frac{I_{\text{Mag}}}{d} = \mu_0 |\vec{M}| \quad \text{Rechte-Hand-Regel } \vec{M} \uparrow \uparrow \vec{B}$$

- Vgl: Elektrostatik $\vec{E}_{\text{Pol}} = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}$
 $\vec{E}_{\text{Pol}} \uparrow \downarrow \vec{P} \rightarrow$ Schwächung des E-Feldes
 $\vec{B}_{\text{Mag}} \uparrow \uparrow \vec{M} \rightarrow$ Stärkung des B-Feldes
- Feld im Medium $\vec{B}_{\text{Med}} = \vec{B}_{\text{frei}} + \vec{B}_{\text{Mag}} = \vec{B}_{\text{frei}} + \mu_0 \vec{M}$
 $\vec{B}_{\text{Mag}} / \vec{M}$ proportional zu $\vec{B}_{\text{frei}} \quad \vec{B}_{\text{Mag}} = \chi_m \vec{B}_{\text{frei}}$
 χ_m magnetische Suszeptibilität
Achtung: $\vec{E}_{\text{Pol}} = \chi_e \vec{E}_{\text{Med}}$ (nicht via \vec{E}_{frei})
Zsgh: $\vec{B}_{\text{Med}} = (1 + \chi_m) \vec{B}_{\text{frei}} \equiv \mu \vec{B}_{\text{frei}} \quad \mu$ relative Permeabilität $\mu = 1 + \chi_m$

Maxwell- Gleichungen im Medium

Def: neues Feld

$$\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_{\text{frei}} \quad \text{magnetische Erregung}$$

$$\text{Es gilt: } \vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \vec{B}_{\text{Med}} = \vec{B}_{\text{frei}} + \vec{B}_{\text{Mag}} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Verwendung von \vec{B} und $\vec{H} \rightarrow$ kompaktere MW-Gl.

- Ab jetzt: „Med“ unterdrücken
 \vec{B} und \vec{E} sind Felder (im Medium oder Vakuum) die gemessen werden
- Vorteil der MW-Gl in $\vec{B}, \vec{H}, \vec{E}, \vec{D}$
 - keine Kenntnis über ρ, \vec{j} im Medium
 - nur externen ρ, \vec{j}

\vec{H} Teil des \vec{B} -Feldes ($\cdot \frac{1}{\mu_0}$) das aus der Externen Anregung/Erregung stammt

- keine magnetischen Monopole $\text{div} \vec{B} = 0$
 $\text{div}(\mu, \mu_0, \vec{H}) = \mu \mu_0 \text{div} \vec{H} + \mu_0 \text{grad} \mu \cdot \vec{H} \stackrel{!}{=} 0$
 - homogenes Medium $\mu = \text{const.} \rightarrow \text{div} \vec{H} = 0$
 - inhomogenes Medium $\mu = \mu(\vec{r}) \rightarrow \text{div} \vec{H} = -\frac{\text{grad} \mu \cdot \vec{H}}{\mu} \neq 0 \quad \text{t.x.i.a.}$
- Verhalten an Grenzflächen
d.h. Überlagerung von Vakuum ($\mu = 1$) zu Medium ($\mu \neq 1$)
 $\text{rot} \vec{H} = \vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{H}_{\text{frei}}^{\parallel} = \vec{H}_{\text{Med}}^{\parallel} \quad \vec{B}_{\text{frei}}^{\parallel} = \frac{1}{\mu} \vec{B}_{\text{Med}}^{\parallel}$
 $\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B}_{\text{frei}}^{\perp} = \vec{B}_{\text{Med}}^{\perp} \quad \vec{H}_{\text{frei}}^{\perp} = \mu \vec{H}_{\text{Med}}^{\perp}$

II.9.2 Diamagnetismus

- keine permanente Dipole ($\vec{I}_{\text{Atom}} = \vec{L}_{\text{Atom}} + \vec{S}_{\text{Atom}} = 0$)
wenn abgeschlossene Schalen in Hülle (reist)
- \vec{B}_{ext} induziert magnetische Dipole
 $\vec{P}_M^{\text{ind}} \uparrow \downarrow \rightarrow$ nächstes Kapitel
 \rightarrow Schwächung des B-Feldes, $\chi_m < 0, \mu < 1$
typ: $\chi_m \sim -10^{-5} \rightarrow -10^{-6}$
- Kraft im inhomogenen Feld $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{p}_M)$
 $\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_{M,i}$
 $\vec{p}_M = V \vec{M} = V \chi_m \vec{H} = \frac{V \chi_m}{\mu_0} \vec{B}$
 $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{B} \frac{V \chi_m}{\mu_0} \vec{B}) = \frac{V \chi_m}{\mu_0} \vec{\nabla} |\vec{B}|^2$
- Probe aus Bereich von hohem Feld herausgedrängt
- alle Substanzen zeigen Diamagnetismus aber durch Paramagnetismus und Ferromagnetismus Effekt überdeckt

II.9.3 Paramagnetismus

- $x > 0$ $\vec{M} \uparrow \uparrow \vec{B}_{\text{ext}}$ permanente magnetische Dipole
- $\vec{B}_{\text{ext}} = 0$ keine Ausrichtung des atomaren $\vec{p}_{M,i} \Rightarrow \vec{M} = 0$
- $\vec{B}_{\text{ext}} \neq 0$ teilweise Ausrichtung des $\vec{p}_{M,i}$
Gegenwirkung durch thermische Bewegung
Ausrichtung durch Boltzmannvtlg. $ce^{-\frac{\Delta E}{kT}} \approx c(1 - \frac{\Delta E}{kT})$
 $\Delta E = \mu_B |\vec{B}| = 9,26 \cdot 10^{-24} \text{ J}$ für $B = 1 \text{ T}$
 $kT (T = 300 \text{ K}) = 4,14 \cdot 10^{-21} \text{ J} \Rightarrow \frac{\Delta E}{kT} \ll 1$
- Mittleres Dipolmoment eines Atoms

$$|\overline{\vec{p}_M}| = \frac{1}{3} \frac{|\vec{p}_m|^2}{|\vec{B}| kT n_p} \quad \text{Dipoldichte}$$

$$\vec{M} = n_p \overline{\vec{p}_m} = \frac{1}{3} \frac{n_p |\vec{p}_m|^2}{kT} \vec{B}$$

$$\chi_m = \frac{\mu_0 \vec{M}}{|\vec{B}|} = \frac{1}{3} \frac{n_p \mu_0 |\vec{p}_m|^2}{kT} \sim \frac{1}{T} \quad \text{Curie- Gesetz}$$

$$\chi_m(300 \text{ K}) \stackrel{\text{typ}}{\approx} 10^{-6} \rightarrow 10^{-4}$$

- Probe in den Bereich größeres B-Feldes gezogen

II.9.4 Ferromagnetismus

- grosse χ , \vec{M} aus WW der atomaren Dipole
- hohe Temp.: Dipole statistisch verteilt $E_{\text{therm}} > E_{\text{Austausch}}$
- temperatursink: $E_{\text{therm}} > E_{\text{Austausch}}$
→ ausrichtung der dipole an mehreren stellen
→ bildung der wißschen Bezirke / Domänen
- für $\vec{B} = \vec{O}$ gilt $\vec{M} = \vec{O}$ (zunächst)
- $\vec{B} \neq \vec{O}$: ausrichtung der domänen $\vec{M} \uparrow \uparrow \vec{B}$
 - sprungweise → Barkhausen effekt
 - sättigung → alle Domänen ausgerichtet
- Phasenübergang bei Temperatur erhöhung
bei $T > T_c$: $E_{\text{therm}} > E_{\text{Austausch}}$ ($N_i : T_c = 358 \text{ C}$)
→ auflösen der domänen
→ $\vec{M} \rightarrow 0$ Entmagnetisierung
Phasenübergang: Ferro- → Paramagnetismus

$$\text{obhalb } T_c : \chi = \frac{d}{(T - T_c)^r} \quad c = \text{const.}, \quad r = 1 \rightarrow 1,5$$

II.9.5 Elektromagnet

- Kombination Spule und Eisenkern
→ Formung des Magnetfeldes
→ Luftspalt zur Nutzung des Feldes
Amperesch Gesetz:

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = H_{Fe} + l_{Fe} + H_0 d = NI$$

Grenze: $B_{\perp} = \text{const.}$ $\mu_{Fe} H_{Fe} = H_0$

→ $B = \frac{\mu_0 NI}{\frac{l_{Fe}}{\mu_{Fe}} + d} \approx \frac{\mu_0 NI}{d}$ $\mu_{Fe} \approx 4000$ hier fehlt was

spalt kleiner, dann B größer

vgl: Luftspule $B = \frac{\mu_0 NI}{L_{spule}}$ hier Verstärkung $\frac{dL_{spule}}{d}$

Kapitel III

Elektrodynamik

III.10 Elektromagnetische Induktion

III.10.1 Induktionsgesetz

1831 Faraday: in veränderlichem \vec{B} -Feld wird entlang Leiter Spannung induziert U_{ind}

Beobachtung: $U_{\text{ind}} \sim \frac{d}{dt}A, \frac{d}{dt}\vec{B}, \frac{d}{dt} \text{Winkel}(\vec{A}, \vec{B})$

$$U_{\text{ind}} \sim \frac{d}{dt}\Phi_M \quad \Phi_M = \int_M \vec{B} d\vec{A}$$

- Wer verursacht U_{ind} ?
- F_L auf beweglichen e^- und ortsfesten A^+
- e^- verschoben $\rightarrow E$ -Feld bis Gleichgewicht $F_{el} = F_L$

$$e|\vec{E}| = e|\vec{v}||\vec{B}| \quad U_{\text{ind}} = l|\vec{E}| = l|\vec{v}||\vec{B}|$$

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad l = \text{const.}, \quad |\vec{B}| = \text{const.}$$

$$|U_{\text{ind}}| = |\vec{B}| \frac{d}{dt}(ls) = |\vec{B}| \frac{d}{dt}|\vec{A}| = \frac{d}{dt}\Phi_M \quad \Phi_M = |\vec{B}|A$$

Lorentzkraft bewirkt U_{ind} . Hier: aus Änderung von A

- Leiterschleife ($A = \text{const.}$) im \vec{B} -Feld

$$\boxed{A} \quad \vec{B} \text{ homogen, } \vec{v} \uparrow \uparrow \vec{B} \rightarrow \Phi_M = \text{const.}, \quad U_{\text{ind}} = 0$$

$$\boxed{B} \quad B \text{ inhomogen, } B_z = f(z)B_0 \quad f(z) \text{ stetige, monoton fallend}$$

$$B_z \uparrow \uparrow \vec{v} \text{ keine } F_L, \text{ keine } U_{\text{ind}}$$

$$\text{radiale Komponente } B_r, \quad \vec{B}_r \perp \vec{v} \rightarrow F_L \rightarrow U_{\text{ind}} \neq 0$$

$$\text{aus } \text{div } \vec{B} = 0 \text{ folgt } B_r = \frac{B_0}{r} \int dr \quad r \frac{df(z)}{dz}$$

Ring geschlossen: fließt Induktionstrom I_{ind}

Offen: Induktionsspannung an Enden

$$F_{el} = e|\vec{E}| = e \frac{|U_{\text{ind}}|}{2\pi r} \stackrel{!}{=} e|\vec{v}|B_r = F_L$$

$$|U_{\text{ind}}| = 2\pi r |\vec{v}| B_r \quad (1)$$

Betrachte Fluss durch Leiterschleife

$$\begin{aligned} \Phi_M &= \int_A \vec{B} d\vec{A} = \oint_A B_z dA = \int d\varphi \int dr r B_0 f(z) \\ \frac{d\Phi_M}{dt} &= \underbrace{2\pi}_{\int d\varphi} B_0 \frac{d}{dt} \int dr r f(z) = 2\pi B_0 \int \frac{df(z)}{dz} \underbrace{\frac{dz}{dt}}_v r dr \\ &= 2\pi B_0 |\vec{v}| \int dr r \frac{df(z)}{dz} = f 2\pi B_r r |\vec{v}| \quad (2) \end{aligned}$$

also aus Vgl (1) und (2) $|U_{\text{ind}}| = \frac{d\Phi_M}{dt}$

Lenzsche Regel

- Richtung von U_{ind} und I_{ind} ?
- Betrachte Leiterschleife $\vec{A} \uparrow \uparrow z$ -Achse /symmetrieachse
Ring nach links bewegen $\frac{d\Phi_M}{dt} > 0$
für $U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_M}{dt}$ strom Linkschraube um \vec{A} machen oben I nach hinten, e^- Lorentzkraft nach vorne Richtung von I konstant mit Herleitung aus F_L
- Gedanken experiment: $\vec{B}_{\text{ind}}(I_{\text{ind}}) \uparrow \downarrow \Delta \vec{B}_{\text{sol}}$ sonst Verletzung der Energieerhaltung

Lenzsche regel:

$I_{\text{ind}} \text{ so gerichtet, dass erzeugte } \vec{B}_{\text{ind}} \text{ der Änderung von } \Phi_M \text{ entgegenwirkt.}$

Zusammenfassung: Änderung von Φ_M in A erzeugt/induziert U_{ind} auf Rand des Leiters gemäß Faradasches Induktionsgesetz

$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_M}{dt}$

- I_{ind} ist Kreisstrom (z.B. in Ring) \rightarrow kreis/ring förmiges \vec{E} -Feld
 $\oint \vec{E} d\vec{s} = U_{\text{ind}} \neq 0$ zunächst widerspruch zu 1. MX-Gl.
aber bisher: $\Phi_M = \text{const.} \rightarrow U_{\text{ind}} = 0$
neues term in MW-Gl.

$\oint_{dA} \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} d\vec{A} + \text{satz von Stokes}$

$$\oint_{dA} \vec{E} d\vec{s} = \int_A \text{rot} \vec{E} d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} d\vec{A}$$

$$A \text{ beliebig} \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = -\frac{d}{dt} \vec{B}$$

1. MW- Gl...

„zeitlich veränderliche \vec{B} -Feld erzeugt el. Wirbelfeld“

“Wirbelströme”

- bisher: Leiterschleifen, Spulen
- generell: in geschlossenem Leiter erzeugt el. Wirbelfeld Kreisströme / Wirbelströme
- Wirbelströme erzeugen \vec{B} -Feld gemäß Lenzscher Regel
[Folie: wibelstrom bremese des ICE3]

III.10.2 Selbstinduktion

- Schleife/ Spule mit Induktion und separates veränderliches Magnetfeld
- aber: Induktion im feldererzeugenden Leiter \rightarrow Selbstinduktion

Betrachte Spule: Strom $I \rightarrow \vec{B}$ -Feld erzeugt

$$\Phi_M \sim |\vec{B}| \sim I \quad \Phi_M \equiv LI$$

(selbst-)Induktion $L [L] = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 1\text{H}$ (Henry)

Lenzsche Regel $U_{\text{ind}} = \frac{d\Phi_M}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$

L abhängige von Geometrie des Leiters, zeitlich konstant

Maschenregel $U_0 = U_L + U_R$

Gegenspannung $U_L = -U_{\text{ind}}$

$$\rightarrow U_0 = U_R - U_{\text{ind}} = RI + L \frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I + \frac{U_0}{L} \text{ (DGL)}$$

Lösungsansatz: $I(t) = Ae^{-\chi t} + B$

$$\frac{dI}{dt} = -\chi Ae^{-\chi t}$$

Einsetzen: $-\chi Ae^{-\chi t} = -\frac{R}{L}Ae^{-\chi t} - \frac{R}{L}B + \frac{U_0}{L}$

für belt: $\rightarrow \chi = \frac{R}{L}A_{\text{bel}}B = \frac{U_0}{R}$

$$\rightarrow I(t) = \frac{U_0}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

starker Anstieg, asymptotisch gegen $\frac{U_0}{R} (\hat{=} L = 0)$

Ausschaltvorgang

[Folie: Ausschaltvorgang]

Knotenregel $I_1 = -I_2$

Maschenregel $0 = U_2 - U_1 = R_2I_2 - U_{\text{ind}} - R_1I_1 = R_2I_2 + L \frac{dI_2}{dt} - R_1I_1$

$$\frac{d}{dt}I_2(t) = -\frac{R_1 + R_2}{L}I_2(t)$$

Lösung $I_2(t) = \frac{U_0}{R_2}e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t} \quad I_2(0) = \frac{U_0}{R_2}$

Beispiele für Induktivitäten

1. Solenoid spule

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I \quad \text{Wicklungsdichte } \eta = \frac{N}{l}$$

$$\Phi_M = \int_A \vec{B} d\vec{A} = \mu_0 \eta A I \quad \vec{B} \uparrow \uparrow \vec{A}, \quad \vec{B} \text{ homogen}$$

in jeder Windung Spannung induziert

$$\begin{aligned} U_{\text{ind}} &= -N \frac{d\Phi_M}{dt} = -\mu_0 N \eta A \frac{dI}{dt} \\ &= -\mu_0 \eta^2 l A \frac{dI}{dt} \end{aligned}$$

$$\text{Da } U_{\text{ind}} = -L \frac{dI}{dt}, \quad L = \mu_0 \eta^2 V$$

$$2. \text{ Koaxialkabel } L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{R}{R_s} \right) l$$

$$3. \text{ Lecherleitung } L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \ln \frac{d-r_0}{r_0} \right] \text{ minimal für } d = 2r_0$$

III.10.3 Feldenergie

- Betrachte Schaltvorgänge in Spule

Einschalten \rightarrow Aufbau \vec{B} -Feld Energie im \vec{B} -Feld gespeichert

– Ausschalten $U_{\text{ext}} = 0$, Stromfluss \rightarrow Energiefreisetzung

strom ducht R_1 und R_2 in serie $\rightarrow P = I^2 R \quad R = R_1 + R_2$

$$W_m = \int_0^\infty I^2(t) R dt = \int_0^\infty I_0^2 e^{-\frac{2R}{L}t} R dt = -I_0^2 \frac{LR}{2R} e^{-\frac{2R}{L}t} \Big|_0^\infty$$

$$W_m = \frac{1}{2} I_0^2 L$$

Solenoid: $L = \mu_0 n^2 A l \quad B = \mu_0 n I_0$

dann $w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} I_0^2 \mu_0 = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2$

Ergebnis ist allgemeingültig

$$\text{Zsfg: } W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2$$

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2$$

$$\text{mit } \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$W_{\text{ges}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 (|\vec{E}|^2 + c^2 |\vec{B}|^2)$$

$$\text{Kondensators } W_{\text{el}} = \frac{1}{2} C U^2$$

$$\text{spule } W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L I^2$$

c für Lichtgeschwindigkeit

III.10.4 Maxwell-Gleichungen

- Gl. für statische Situation
 - + Faradays Induktionsgesetz
 - + neuer Term "Verschiebungstrom" aus theo. Argument (Maxwell)

Betrachte

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I$$

Links ringförmigen Weg am Leiter $\oint \vec{B} \, ds = 0$
widerspruch zu Ampereschen Gesetz/ Maxwell-Gl.

Rechts keinen Strom I im Kondensator aller el. Fluss Φ_{el} durch Zylinderfläche \rightarrow zusätzlicher Beitrag $\frac{d\Phi_{\text{el}}}{dt}$ nur wenn $\frac{d\Phi_{\text{el}}}{dt} \neq 0$ fließt I und erzeugt \vec{B} -Feld

Rechnung $I_V = \frac{dQ}{dt}$ $\frac{dQ}{dt}$ Änderung auf Kondensatorplatten

$$|\vec{E}| = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \quad Q = |\vec{E}| A \epsilon_0$$

$$\begin{aligned} I_V &= \frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} (|\vec{E}| A) \\ &= \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E} \, d\vec{A} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_{\text{el}}}{dt} \end{aligned}$$

Addition von I_V zu normalen Strom in MW-Gl.

$$\oint \vec{B} \, d\vec{s} = \mu_0 (I + I_V) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_{\text{el}}$$

Diff. Form: $I = \int_A \vec{j} \, d\vec{A}$ und Stokescher Satz

$$\int_A \text{rot } \vec{B} \, d\vec{A} = \mu_0 \int \vec{j} \, d\vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \, d\vec{A}$$

A beliebig: $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E}$

Finale Form der MW-Gl. im Vakuum Kopplung von \vec{E} und \vec{B} durch „ $\frac{d}{dt}$ “-Terme

III.11 Wechselstromkreise

III.11.1 Wechselstrom

- periodische Änderung der Polarität der Spannungsquelle meist sinusförmig:

$$U(t) = U_0 \sin \frac{2\pi}{T} t \quad \frac{1}{T} = f \text{ Frequenz}$$

$$I(t) = I_0 \sin \omega t \quad \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \omega$$

I_0 bzw. U_0 Maximal o. Spitzenwerte

Leistung am ohmschen Widerstand $P(t) = U(t)I(t)$

Spitzenwert $U_0 I_0 = \frac{U_0^2}{R} = R I_0^2$

$$P(t) = \frac{U_0^2}{R} \sin^2 \omega t = R I_0^2 \sin^2 \omega t$$

$$\begin{aligned} \overline{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_0^2}{R} \sin^2 \omega t \, dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R} = \frac{1}{2} I_0^2 R = \frac{1}{2} U_0 I_0 \end{aligned}$$

→ Effektivwerte: Werte die Gleichstrom hat mit gleichem Leistungsverbrauch

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

[Folie: Netzspannung in Deutschland]

[Folie: Drei-Phasen-Wechselspannung]

[Folie: Generator zur Erzeugung der Netzwechselspannung]

III.11.2 Diodenschaltungen

Diode Bauelement, dass Strom nur in eine Richtung fließt Schaltsymbol durchlässig

[Folie: Kennlinie und Schaltsymbol]

$U_{Ak} > 0,5V$ Diode wird leitend

$U_{Ak} \gg 0,7V$ I_{in} $I - U$ -Charakteristik $I = k(U - 0,7V)$

$U_{Ak} < 0,5V$ fließt Sperrstrom $I_{\text{sperr}} \approx pA \rightarrow \mu A$

$U_{Ak} \ll 0$ Durchbruch

Gleichrichter

[Folie: Brückengleichrichtung]

- Ziel: Erzeugung von Gleichspannung aus Wechselspannung

i) Einweggleichrichtung

– nur in pos. Halbperiode Diode leitend

– $U_{\text{aus}}^{\text{max}} = U_{\text{ein}} - 0,7V$

– Glättung durch Kondensator $U_{\text{aus}}(t) = U_{\text{max}} e^{-t/RC} \approx U_{\text{max}}(1 - \frac{t}{RC})$

ii) Grätzschaltung

– in jeder Halbperiode 2 Dioden leitend

– $U_{\text{max}}^{\text{aus}} = U_{\text{ein}} - 1,4V$

– Glättung wie oben

iii) Villardschaltung

Einschalten: U_C bis $U_0 - 0,7V$ geladen

Maschenregel: $U_{\text{aus}} = U_{\text{ein}} + U_C = U_{\text{ein}} + U_0 \approx U_0 + U_0 \cos \omega t$

→ Spannungshub um U_0

+ Gleichrichter → Greinacher Schaltung

$U_{D_1} = U_0 + U_0 \cos \omega t$

$U_{\text{max}}^{\text{aus}} 2U_0(-1,4V)$

iv) Kaskadenschaltung nach Greinacher

1. Stufe $U_{A_0} = 2U_0 - 1,4V$ gleichgerichtet
 $U_{D_2} = 2U_0 \sim \omega t \rightarrow$ Eingang für 2. Stufe
2. Stufe $U_{AB} = 2U_0 - 1,4V$ gleichgerichtet
 $\rightarrow U_{B_0}^{\max} = 4U_0 - 2,8V$ viele Kaskaden \rightarrow Hochspannung
 Begrenzung: Feldstärke in letzter Stufe
 Anwendung: Cockroft-Walton-Kaskade in Beschleunigern

III.11.3 Zeigerdiagramme

- komplexe Schaltungen \rightarrow Rechnen mit \cos, \sin und Additionsth. schwierig
 \rightarrow komplexe Schreibweise \sin und \cos als Realteile der komplexen Exponentialfunktion
 z.B. $U_0 \cos \omega t = \operatorname{Re}(U_0 e^{i\omega t}) \quad U_0 \sin \omega t = \operatorname{Re}(U_0 r^{i\omega t - \pi/2})$
 $\exp(ia) = \cos ai \sin a \quad \cos(a - \frac{\pi}{2}) \sin a$
 $a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\Phi} \quad \Phi = \arctan \frac{b}{a}$
 oft Re weggelassen: $U = U_0 e^{i\omega t}$
 - nur Hilfsmittel, an Ende Realteil bilden
 - Veranschaulichung im Zeigerdiagramm

III.11.4 Komplexe Widerstände

Gilt: $U = \frac{Q}{C} \quad \frac{d}{dt} : \frac{dU}{dt} = \frac{I}{C}$
 $U(t) = U_0 \cos \omega t$ gegeben
 $I(t) = C \frac{dU}{dt} = -\omega U_0 C \sin \omega t = I_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$
 Spitzenwert $I_0 = \omega C U_0$ I teilt U um $\frac{\pi}{2}$ (90°) voraus

Spule: Maschenregel: $U - U_L = 0 \quad U_L = -U_{\text{ind}}$
 $-U_{\text{ind}} = L \frac{dI}{dt} = U(t)$
 Geg: $U(t) = U_0 \cos \omega t$
 $\frac{dI}{dt} = \frac{1}{L} U(t) = \frac{U_0}{L} \cos \omega t$
 $I(t) = \int \frac{U_0}{L} \cos \omega t dt = \frac{U_0}{L\omega} = \frac{U_0}{L\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$
 Spitzenwert $I_0 = \frac{U_0}{\omega L}$ Spannung eilt Strom um $\frac{\pi}{2}$ voraus

Impedanz Z : Widerstand für Bauteil um $\frac{U}{I}$ zu beschreiben. naiv: $\frac{U(t)}{I(t)}$ „Widerstand“
 zeitabhängig, negativ

alternativ: $Z = \frac{U(t)}{I(t)}$ wobei U, I komplexwertige Funktionen sind.

i) Kondensator mit Kapazität

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} \quad I(t) = \omega C U_0 r^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} \frac{1}{e^{i\pi/2}} = \frac{1}{i\omega C}$$

$$\omega \rightarrow 0 : Z_C \nearrow \infty \quad \omega \rightarrow \infty : Z_C \searrow 0$$

ii) Spule mit Induktivität L

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} \quad I(t) = \frac{U_0}{\omega L} e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

$$\boxed{Z_L = \omega \frac{1}{e^{-i\pi/2}} = i\omega L} \quad \omega \rightarrow 0 : Z_L \searrow 0 \quad \omega \rightarrow \infty : Z_L \nearrow \infty$$

iii) Ohmscher Widerstand

$$Z_R = R \text{ (trivial)}$$

Kirchhoffsche Gesetze auch hier gültig (da auf Q- und E-Erhaltung basierend) Berechnung von Netzwerken mit KHG und den Impedanzen.

III.11.5 Frequenzfilter

Bem: periodisches Signal mit beliebigem Amplitudenverlauf aus Überlagerung von cos- und sin-förmigen Signalen

→ Fourierzerlegung

Komplexe Widerstände

- Ändern das Frequenzspektrum
- Beeinflussen Form des Signals/Größe in Abhängigkeit von ω

Hochpass: Spannungsteiler mit $Z_1 = \frac{1}{i\omega C}$ $Z_2 = R$

Übertragungsfaktor $k = \frac{U_{\text{aus}}}{U_{\text{ein}}} = \frac{Z_{\text{aus}}}{Z_{\text{ges}}}$

$$K = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} \frac{R + \frac{i}{\omega C}}{R + \frac{i}{\omega C}} = \frac{R^2 + i\frac{R}{\omega C}}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{\omega^2 C^2 R^2}{\omega^2 C^2 R^2 + 1} + i \frac{\omega C R}{\omega^2 C^2 R^2 + 1}$$

$$|k| = \frac{|U_{\text{aus}}|}{|U_{\text{ein}}|} \quad |k|^2 = \frac{\omega^2 C^2 R^2}{\omega^2 C^2 R^2 + 1} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \quad \omega_0 \equiv \frac{1}{RC}$$

Phase Φ $\tan \Phi = \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \frac{1}{\omega C R} = \frac{\omega_0}{\omega}$

für $\omega \rightarrow \infty$ $|k| \rightarrow 1$ „Hochpass“

für $\omega \rightarrow 0$ $Z_C \rightarrow \infty$ Kondensator sperrt

für ω klein eilt Spannung um $\frac{\pi}{2}$ hinterher

Def: Grenzfrequenz ω_{Gr} Frequenz bei der $|k(\omega_{\text{Gr}})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Hochpass: $\omega_{\text{Gr}} = \omega_0 = \frac{1}{RC}$

Tiefpass:

- RC-Serienschaltung mit Abgriff über C
- LR-Serienschaltung mit Abgriff über R

$$Z_1 = i\omega L \quad Z_2 = R \quad k = \frac{R}{R+i\omega L}$$

$$|k|^2 = \frac{R^2}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \omega_0 \equiv \frac{R}{L}$$

$$\tan \Phi = \frac{-\omega L}{R} = \frac{-\omega}{\omega_0}$$

für $\omega \rightarrow 0 \quad |k| \rightarrow 1 \quad \Phi \rightarrow 0$ Tiefpass

für $\omega \rightarrow \infty \quad |k| \rightarrow 0 \quad \Phi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

Bandpass:

1. R-L-C-Serienschaltung
2. nur Durchlass in einem gewissen Frequenzbereich
3. zwei frequenzabhängige Impedanzen $\sim \omega, \sim \frac{1}{\omega}$

$$|k| = \frac{R}{\sqrt{R^2[\omega L - \frac{1}{\omega C}]}} \quad \tan \Phi = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}$$

4. $|k| = 1$ maximal bei $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ dort Sprung in Φ von $+\pi/2 \rightarrow -\pi/2$
5. Breite des Bereichs in ω mit $|k| > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Delta\omega = \sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}$$

III.11.6 Blindleistung

- Bestimmung von Leistung P an Impedanz Z
- Gleichspannung: $P = UI$ zeitlich konstant
- An Impedanz Z: $U(t) = U_0 \cos \omega t \quad I(t) = I_0 \cos(\omega t - \Phi)$

Mittlere Leistung $\bar{P} \equiv \frac{1}{T} \int_0^T U(t)I(t)dt$

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t - \Phi) \dots = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \Phi$$

ohmscher Widerstand $Z = R \quad \Phi = 0 \quad \bar{P} = \frac{U_0 I_0}{2} \equiv U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$

- für reine C, reine L $\Phi = \pm \frac{\pi}{2} \rightarrow \bar{P} = 0$
- Blindleistung: Leistung von C und / oder L aufgenommen wird
-

$$Z = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{I_0 e^{i(\omega t - \Phi)}} = \frac{U_0}{I_0} e^{+i\Phi}$$

Wirkwiderstand $\text{Re}(z) = \frac{U_0}{I_0} \cos \Phi$

Blindwiderstand $\text{Im}(z) = \frac{U_0}{I_0} \sin \Phi$

- Wirkleistung $\overline{P} = \frac{1}{2} I_0^2 \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{\operatorname{Re}(z)}$
 Blindleistung $\overline{Q} = \frac{1}{2} I_0^2 \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{\operatorname{Im}(z)}$

[Folie: Wirk- und Blindleistung]

Leistungsanpassung Betrachte Spule mit $R \ll \omega L \rightarrow$ geringe Wirkleistung aber eventuell sehr großer Strom

- optimale Leistungsübertragung \rightarrow weitere Anpassungsimpedanz Z_A in Reihe an Last
 $\overline{P} = \frac{1}{2} I_0^2 \operatorname{Re}(Z_L)$

$$I(t) = \frac{U(t)}{Z_A + Z_L} \rightarrow I_0 = \frac{U_0}{|Z_A + Z_L|}$$

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{|Z_A + Z_L|^2} \operatorname{Re} Z_L = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{(\operatorname{Re} Z_A + \operatorname{Re} Z_L)^2 + (\operatorname{Im} Z_A + \operatorname{Im} Z_L)^2} \operatorname{Re} Z_L$$

\overline{P} maximal wenn $\operatorname{Im}(Z_A) = \operatorname{Im}(Z_L)$

Impedanz verhalten, die $\Delta\Phi$ kompensiert.

hier: Kondensator mit $\frac{1}{\omega C} = \omega L$.

weiterhin: $\operatorname{Re}(Z_A) = 0$ damit $\overline{P}(Z_n) = 0$

wenn R_z gegeben, dann $R_L = R_Z$ maximal \overline{P}

III.11.7 Transformator

Ziel Strom oder Spannung erhöhen/erniedrigen

Prinzip Induktion zwischen gekoppelten Spulen

[Folie: Transformator - Schaltzeichnung und tech. Umsetzung]

Ideale, unbelasteter Trafo

- ideal: reine L , keine R
- unbelastet: $I_2 = 0$, keinen Verbraucher

Primärspule: $U_1(t) = U_0 \cos \omega t$

$$I_1 \rightarrow \Phi_{m,1} \rightarrow U_{\text{ind},1} = -N_1 \frac{d\Phi_{m,1}}{dt} = -U_1$$

Also

$$\frac{d\Phi_{\omega,1}}{dt} = -\frac{U_{\text{ind},1}}{N_1} = \frac{U_1}{N_1}$$

Flussänderung in Spule 1 = Flussänderung in Spule 2

$$\frac{d\Phi_{m,1}}{dt} = \frac{d\Phi_{m,2}}{dt}$$

Induziert

$$U_2(t) = -N_2 \frac{d\Phi_{m,1}}{dt} = -\frac{N_2}{N_1} U_1(t) \text{ also } \frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1} \quad \Delta\phi = \pi \text{ gegenphasig}$$

ideal: kein Leistungsverbrauch

$$U_1(t) I_1(t) = U_2(t) I_2(t) \rightarrow \frac{I_2(t)}{I_1(t)} = -\frac{N_1}{N_2}$$

großes $N_2/N_1 \rightarrow$ Erzeugung von Hochspannung

kleines $N_2/N_1 \rightarrow$ Erzeugung von hohen Strömen

aber: wenn $I_2 \neq 0$ dann Gegeninduktion

Realer, belastender Trafo

a) $R \neq 0 \rightarrow$ Maschenregel

$$U_1(t) - R_1 I_1(t) = N_1 \frac{d\Phi_{m,1}}{dt} \quad (*) \text{ Primärspule}$$

$$U_2(t) - R_2 I_2(t) = N_2 \frac{d\Phi_{m,1}}{dt} \quad (*) \text{ Sekundärspule}$$

b) Gegeninduktion

$$\text{Gilt: } U_L = -U_{\text{ind}} = L \frac{dI}{dt} = N \frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$LI = N\Phi_m$$

$I_2 \neq 0$: Überlagerung der magnetischen Flüsse

\rightarrow Beiträge zu U_{ind} in beiden Spulen

Sei Φ_{ij} der Fluss erzeugt durch I_j in Spule i

L_{11}, L_{22} Selbstinduktivitäten

L_{12}, L_{21} Gegeninduktivitäten

perfekte Kopplung, keine Verluste von Φ_m dann $L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_{11}L_{22}}$

$$N_1 \Phi_{m,1} = N_1 [\Phi_{m,11} + \Phi_{m,12}] = L_{11} I_1 + L_{12} I_2$$

$$N_2 \Phi_{m,2} = N_2 [\Phi_{m,21} + \Phi_{m,22}] = L_{21} I_1 + L_{22} I_2$$

Einsetzen in (*) \rightarrow Transformatorgleichungen

$$U_1 - R_1 I_1 = L_{11} \frac{dI_1}{dt} + L_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

$$U_2 - R_2 I_2 = L_{21} \frac{dI_1}{dt} + L_{22} \frac{dI_2}{dt}$$

Für Spitzenwerte U_0, I_0 mit $U_1 = U_0 e^{i\omega t}$

$$U_1 - R_1 I_1 = i\omega L_{11} I_1 + \omega L_{12} I_2$$

$$U_2 + R_2 I_2 = -i\omega L_{21} I_1 - \omega L_{22} I_2$$

Phasenverschiebung U_2 zu U_1 von $\pi \rightarrow$ „-“ Zeichen

Für weitere Diskussion $R_1^{\text{spule}} = R_2^{\text{spule}} = 0$ aber Last Z sekundärkreis

Nutze $U_2 = Z I_2$ und nach Strömen auflösen

$$I_1 = \frac{i\omega L_{22} + Z}{i\omega L_{11} Z + \omega^2 (L_{12}^2 - L_{11} L_{22})} U_1$$

$$I_2 = \frac{i\omega L_{12}}{i\omega L_{11} Z + \omega^2 (L_{12}^2 - L_{11} L_{22})} U_1 \quad (\text{evtl. auch } U_1)$$

Darum Übersetzungsverhältnisse für U_i, I_i

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{i\omega L_{12}}{i\omega L_{22} + Z} \quad \frac{U_2}{U_1} = -\frac{i\omega L_{12} Z}{i\omega L_{11} Z + \omega^2 (L_{12}^2 - L_{11} L_{22})}$$

Def: Koppelungsgrad $k \Rightarrow \frac{L_{12}}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}$ $0 < k < 1$ $k = 1$ vollständige koppelung $k = 0$ entkoppelt

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{iL_{12}}{iL_{11} + \omega^2(k^2 - 1)\frac{L_{11}L_{22}}{Z}}$$

Beträge:

$$\frac{|I_2|}{|I_1|} = \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{Z^2 + \omega^2 L_{12}^2}} \quad \frac{|U_2|}{|U_1|} = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_{11}^2 + \omega^2 \frac{L_{11}^2 L_{22}^2}{|Z|^2} (1 - k^2)}}$$

a) $k = 1 \quad L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_{11}L_{22}}$

$$\left| \frac{U_2}{U_1} \right| = \frac{L_{12}}{L_{11}} = \sqrt{\frac{L_{22}}{L_{11}}} = \frac{N_2}{N_1} \text{ wie beim idealen unbelasteten Trafo}$$

unabhängig von Last Z

$$\frac{|I_2|}{|I_1|} \xrightarrow{|Z| \rightarrow 0} \frac{N_1}{N_2} \text{ sonst } I_2 \text{ kleiner wegen Last } Z$$

b) $k < 1$

i) $Z = R \quad \frac{|U_2|}{|U_1|}$ sinkt mit sinkendem R

$$\tan \phi_{U_1, U_2} = -\frac{\omega L_{22}(L - k)}{R}$$

$k = 1 \quad \phi = \pi$ unabhängig von R

$k < 1 \quad \phi < \pi$

ii) $Z = i\omega L$

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{L_{12}/L_{11}}{1 + L_{22}/L_{11}(1 - k^2)}$$

$\Delta\phi = \pi$ unabhängig von Last

iii) $Z = \frac{1}{i\omega C}$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{L_{12}}{L_{11} - \omega^2 C L_{11} L_{22} (1 - k^2)}$$

U_2/U_1 größer als bei Leerlauf $|Z| = \infty$

Resonanzverhalten $\omega_R = \frac{1}{\sqrt{C L_{22}(1 - k^2)}}$

Anwendungen/Experimenten:

1. „Hörnerblitz“ $N_1 = 500 \quad N_2 = 2300 \quad U_1 = 230 \text{ V} \rightarrow U_2 \approx 10 \text{ kV}$

2. „Punktschweißen“ $N_1 = 500 \quad N_2 = 5 \quad U_1 = 230 \text{ V} \rightarrow U_2 \approx 10 \text{ kV}$

3. Leistungsübertragung über Kabel

Ziel: $P_{\text{el}} = U_I$ übertragen

Leitung mit $R_L \rightarrow$ Leistungsverlust $I^2 R_L = \Delta P_{\text{el}}$

Relativer Leistungsverlust:

$$\frac{\Delta P_{\text{el}}}{P_{\text{el}}} = \frac{I^2 R_L}{UI} = \frac{IR_L}{U} = \frac{R_L}{U^2} P_{\text{el}}$$

d.h. bei gegebener Leistung P_{el} sinkt ΔP_{el} mit $\frac{1}{U^2}$

[Folie: Leistungsübertragung]

III.12 Elektromagnetische Schwingungen

III.12.1 Einfache Schwingungen

RLC-Serienschaltung \rightarrow Bandpass (ohne R)

- Exp: Resonanz bei $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} (\approx 2,2 \text{ kHz}) \quad \Delta\phi = 0$
- Suche $I(t)$

Knotenregel I gleich in allen Bauteilen

$$\text{Maschenregel} \quad U_{\text{ext}} = \underbrace{U_L}_{-U_{\text{ind}}} + U_C + U_R = L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} Q + RI$$

[Folie: Serienschwingkreis]

$$\frac{d}{dt} : \quad \frac{dU_{\text{ext}}}{dt} = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I$$

$$U_{\text{ext}} = U_0 \sin \omega t \cdot \frac{1}{C}$$

$$\frac{s^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = \frac{U_0 \omega}{L} \cos \omega t$$

inhomogene DGL 2. Ordnung für den Strom $I(t)$

Lösung: mit komplexwertigem Ansatz

zunächst $U_{\text{ext}} = U_0 e^{i\omega t}$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = \frac{iU_0 \omega}{L} e^{i\omega t}$$

Ansatz : $I(t) = I_0 e^{i(\omega t - \Phi)}$

Bilden zeitliche Ableitung und Einsetzen

$$\left(\underbrace{i\omega L}_{Z_L} + \underbrace{\frac{1}{i\omega L}}_{Z_C} + \underbrace{R}_{Z_R} \right) I_0 = U_0 e^{i\Phi}$$

wie erwartet für Impedanzen in Serie

$I(t) = \frac{U(t)}{Z_{\text{ges}}}$ Resonanz wenn Z_{ges} minimal

$$\left. \frac{dZ_{\text{ges}}}{d\omega} \right|_{\omega_R} \stackrel{!}{=} 0 \quad iL\omega - \frac{1}{i\omega_R C} = 0 \Leftrightarrow \omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Freie, ungedämpfte Schwingung

- LC-Kreis $R = 0$ keine externe Anregung
-
- Kondensator laden, bei $t = 0$ mit Spule verbinden
 \rightarrow Schwingungen

- periodisches Umladen des Kondensators, periodische Ströme in Spule
[Folie: El.-mag. Schwingkreis und mech. Modell eines Oszillators im Vergleich]

- Maschenregel $U_C + U_L = 0 \quad U_L = -U_{\text{ind}}$
 $\frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0$

- Lösungsansatz: $Q = Q_0 \cos \omega t$
Einsetzen: $-Q_0 \omega^2 \cos \omega t + \frac{1}{LC} Q_0 \cos \omega t = 0$
also:

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad f = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{Thomson-Formel}$$

harmonische Schwingung mit Randbedingung $Q(t=0) = Q_0$ andere Startbedingung: $Q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \phi)$
 $I(t) = \frac{dQ}{dt} = -Q_0 \omega \sin(\omega t + \phi) = Q_0 \omega \cos(\omega t - \frac{\pi}{2} + \phi)$
d.h. I eilt U_C bzw. Q_C um $\frac{\pi}{2}$ hinterher

Gedämpfte Schwingung $R \neq 0$

- RLC-Kreis $Q(t=0) = Q_{\text{max}}$
- $t=0$ Kreis schließen \rightarrow Schwingung mit abnehmender Amplitude
- Maschenregel: $U_L + U_C + U_R = 0$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\gamma} \frac{dQ}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} Q = 0$$

γ ist die Dämpfungskonstante, 2γ Dämpfungsterm

$$\frac{d}{dt} : \frac{d^2 I}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = 0$$

homogene DGL 2. Ordnung für Strom I

Lösungsansatz: $I(t) = ae^{\lambda t}$

Fallunterscheidung: $I(0) = I_0$

i) starke Dämpfung/Kriechfall $\gamma > \omega_0 \quad \frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$I(t) = I_0 e^{-\gamma t} \cosh \alpha t \quad \alpha^2 = \gamma^2 - \omega_0^2$$

ii) kritische Dämpfung/aperiodischer Grenzfall

$$\gamma = \omega_0 \quad \frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$I(t) = I_0 (1 + \gamma t) e^{-\lambda t}$$

iii) Schwache Dämpfung/Schwingfall

$$\gamma < \omega_0 \quad R/2L < \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$I(t) = I_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$$

Frequenz $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ kleiner als bei freien schwingungen.
Zeitkonstante der Dämpfung $\gamma = \frac{R}{2L}$

Erzwungene Schwingung

- Serien- und Parallelschwingkreis
- Nach dem Einschwingverhalten stationäre Lösung
d.h. Amplitude unabhängig von Zeit

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} \quad I(t) = \frac{U(t)}{Z_{\text{ges}}}$$

Kreis schwingt mit externer Frequenz $I_0 = \frac{U_0}{|Z_{\text{ges}}|}$

- Serienkreis $Z_{\text{ges}} = i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R$
Parallelkreis $Z_{\text{ges}} = (i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R)^{-1}$
Resonanzverhalten in beiden Fällen

Serienkreis

$$\frac{dI_0}{d\omega} \stackrel{!}{=} 0$$

Maximum bei $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $I_0 = \frac{U_0}{R}$

$$U_C(t) = \frac{I_0(\omega_0)}{\omega_0 C} = \frac{U_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$U_L(t) = \omega_0 L I_0(\omega_0) = \frac{U_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Bem: $U_C, U_L \gg U_0$ werden \rightarrow Spannungsresonanz

umgesetzte Leistung (nur R)

$$\begin{aligned} P_{\text{wirk}} &= \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \Phi & \cos \Phi &= \frac{R}{|Z_{\text{ges}}|} \\ &= \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{|Z_{\text{ges}}|^2} R \end{aligned}$$

maximal bei ω_0 , dann Z_{ges} minimal

Parallelkreis

- Resonanzfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Strom über R und P_{wirk} minimal bei ω_0 großer Strom im Kreis von Kondensator und Spule
 $I_C(\omega_0) = I_L(\omega_0) = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}$
 $I_C \gg I_R$ Stromresonanz

Bem: In Mechanik: Resonanzfrequenz verschoben

Hier: beide Fälle $\omega_{\text{Resonanz}} = \omega_0^{\text{Thomson}}$

Mechanik: Resonanz def. über max. Auslenkung von Pendel/Feder

E-Dynamik: Analogon wäre el. Ladung Q. Aber: Resonanz def. über $I = \frac{dQ}{dt}$ Resonanz für Q auch bei $\omega_R < \omega_0^{\text{Thomson}}$

[Folie: Gekoppelte Schwingkreise]

III.12.2 Gekoppelte Schwingungen

Zwei induktiv gekoppelte Schwingkreise magnetischer Fluss durch beide Spulen
 → Schwingung in Kreis 1 durch gemeinsamen magnetischen Fluss bzw. Gegeninduktivitäten L_{12}, L_{21} auf Kreis 2 übertragen

[Folie: Induktive gekoppelte Schwingkreise]

Differentialgl. aus Maschenregel in Kreis 1 und 2

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 + \frac{Q_1}{C_1} + L_{12} \frac{dI_2}{dt} = 0$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 + \frac{Q_2}{C_2} + L_{21} \frac{dI_1}{dt} = 0$$

Terme 1 bis 3 wie bei Serienschwingkreis und letzter Term aus Gegeninduktion

$$\frac{d}{dt} : L_1 \frac{d^2 I_1}{dt^2} + R_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{I_1}{C_1} = -L_{12} \frac{d^2 I_2}{dt^2}$$

$$\frac{d}{dt} : L_2 \frac{d^2 I_2}{dt^2} + R_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{I_2}{C_2} = -L_{21} \frac{d^2 I_1}{dt^2}$$

Lösungsansatz: $I_1(t) = \hat{I}_1 e^{i\omega t}$ $I_2(t) = \hat{I}_2 e^{i\omega t}$

Einsetzen in DGL und sortieren

$$\underbrace{\begin{pmatrix} R_1 + i(L_1\omega - \frac{1}{\omega C_1}) & iL_{12}\omega \\ iL_{21}\omega & R_2 + i(L_2\omega - \frac{1}{\omega C_2}) \end{pmatrix}}_{\text{Impedanzmatrix } \mathcal{M}} \begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Triviale Lösung: $\hat{I}_1 = \hat{I}_2 = 0$

Nicht triviale Lösung: Bedingung $\det \mathcal{M} = 0$

$$\det \mathcal{M} = (R_1 + i(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}))(R_2 + i(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2})) + \omega^2 L_{12} L_{21} \stackrel{!}{=} 0$$

allgemeiner Lösungsansatz

Thomsonfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Kopplungsparameter $k = \frac{L_{12}}{L}$

Wir haben 2 Eigenfrequenzen ($h \ll 1$ $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \omega_0 k$)

$k = 0$: Entkopplung Schwingung bei ω_0

$k \rightarrow 1$: $\omega_2 \rightarrow \infty$ $\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ verständlich 1 Kreis mit doppelter Kapazität

$0 < k < 1$: Beobachtung beider Frequenzen bzw. Überlagerung → Schebung

$$\cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$$

Nun Anregung in Kreis 1: $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$

obige Matrix-Gl mit rechter Seite $\begin{pmatrix} U(t) \\ 0 \end{pmatrix}$

Gekoppelte DGL mit Inhomogenität $U(t)$

Allgemeine Lsg: = Allg. Lsg der homogenen DGL (A) + Spezielle Lsg der inhomogenen DGL (B)

(A) freie, gedämpfte Schwingung (s.o.)

Amplitude abklingend ($R \neq 0$) \rightarrow Einschwingvorgang für t groß $A(t) \rightarrow 0$: d.h. kein Beitrag

(B) t groß dominant. Stationäre Lösung Amplitude zeitlich konstant, abhängig von ω

Hier: Bestimmung von (B)

„homogene“ Zeile der DGL:

$$I_1 = -\frac{R_2 + i(L_2\omega - \frac{1}{\omega C_2})}{iL_{21}\omega} \hat{I}_2$$

Einsetzen in „inhomogene“ Zeile

$$-\{R_1 + i(L_1\omega - \frac{1}{\omega C_1})\} \frac{R_2 + i(L_2\omega - \frac{1}{\omega C_2})}{iL_{21}\omega} \hat{I}_2 + iL_{12}\omega \hat{I}_2 = U(t)$$

Daraus \hat{I}_2 messen als U_2 an R_2

$$-\{R_1 + i(L_1\omega - \frac{1}{\omega C_1})\} \{R_2 + i(L_2\omega - \frac{1}{\omega C_2})\} - L_{12}L_{21}\omega^2 = iR_2L_{21}\omega \frac{U(t)}{U_2} \quad (*)$$

Spezialfall $R \equiv R_1 = R_2$ $C \equiv C_1 = C_2$ $L \equiv L_1 = L_2$ $L_{12} = L_{21}$

Definiere Blindwiderstand $x \equiv \omega L - \frac{1}{\omega C}$

(*) vereinfacht zu

$$-(R + ix)^2 - L_{12}^2\omega^2 = iRL_{12}\omega \frac{U(t)}{U_2}$$

Multipliziere mit $(-\frac{i}{RL_{12}\omega})$ und Kehrwert bilden

$$\frac{U_2}{U(t)} = \frac{RL_{12}\omega}{i(R^2 - X^2 + \omega^2 L_{12}^2 - 2RX)}$$
$$\frac{|U_2|}{|U(t)|} = \frac{RL_{12}\omega}{\sqrt{(R^2 - X^2 + \omega^2 L_{12}^2)^2 + 4R^2 X^2}}$$

Bei $\omega = \omega_{1/2}$ Signifikante Übertragung von Leistungen aus Kreis 1 und Kreis 2

III.12.3 Ungedämpfte Schwingungen

\rightarrow [Folie: Erzeugung einer ungedämpften Schwingung durch manuelle Pulsierung]

[Folie: Erzeugung einer ungedämpften Schwingung mittels Rückkopplung]

III.13 Elektromagnetische Wellen

1864 Vorhersage von el-magnetischen Wellen J.C.Maxwell

1886 Nachweis von Heinrich Hertz (heute Mikrowellen $\lambda \sim \mathcal{O}(10 \text{ cm})$)

1888 Untersuchung der Ausbreitung durch E.lecher

Ausbreitungsgeschwindigkeit \approx Lichtgeschw. c

\rightarrow Licht ist eine el.-mag. Welle

$v_{\text{Welle}} = f\lambda$ λ Wellenlänge, f Frequenz

III.13.1 Lecher-Leitung (LL)

Induktive Kopplung von offener/geschlossener LL an Schwingkreis mit Frequenz f

Exp:

$f \approx 250\text{MHz}$ Annahme: $v_{\text{Welle}} = c \rightarrow \lambda \approx 120\text{cm}$

Beobachtung:

Spannungsmaxim (Bäuche) und -minima (Knoten)

Strom minima (Knoten) und -maxima (Bäuche)

Abstand der Knoten $\approx 60\text{ cm} \approx \frac{\lambda}{2}$ erwartet

Nur für „gute“ Länge der LL Knoten und Bäuche

Erklärung:

- Bildung eines periodischen Strom bzw. Ladungsverschiebung
- offenes Ende $I = 0 \rightarrow$ Spannungsband
- geschlossenes Ende $U = 0 \rightarrow$ Strombauch
- Entstehung einer stehenden Welle wenn l_{LL} auf λ abgestimmt ist
2 abgeschlossene Enden: $l_{LL} = n \frac{\lambda}{2}$
[Folie: Lecher-Leitung und davor]

Mathematische Beschreibung

Ersatzschaltbild \rightarrow [Folie: Lecher-Leitung: Ersatzschaltbild]

$l \equiv \frac{L}{z} = \frac{\mu_0 \mu}{\pi} \ln\left(\frac{2a}{d}\right)$ $c = \frac{C}{z} = \frac{\pi \epsilon_0 \epsilon}{\ln\left(\frac{2a}{d}\right)}$ d Durchmesser der Leiter, a Abstand der Leiter

$r = \frac{R}{z}$ $g = \frac{G}{z}$ $G = \frac{1}{R_{\text{Luft}}}$

ideal: $r \rightarrow 0$ $g \rightarrow 0$

Telegraphengleichung (TGl):

Leiterstück dz Taylorentwicklung (an Stelle z) für $U(z+dz)$, $I(z+dz)$ bis lin. Term

$$U(z+dz) = U(z) + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

∂U durch

i) Abfall über r

ii) Induktion in l

$$R = \frac{\partial U}{\partial I} \quad G = \frac{\partial I}{\partial U}$$

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial z} = -rI - l \frac{dI}{dt}} \quad (1)$$

$$I(z+dz) = I(z) + \frac{\partial I}{\partial z} dz$$

Stromfluss über c und g

$$\boxed{\frac{\partial I}{\partial z} = -\frac{U}{g} - c \frac{dU}{dt}} \quad (2)$$

$$I_C = C \frac{\partial U}{\partial t} \quad \frac{1}{g} \rightarrow g \quad \frac{\partial I}{\partial z} = \delta U_{\pm}$$

Ableiten von (1) und (2) nach $\frac{d}{dt}$ bzw $\frac{d}{dz}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= -r \frac{\partial I}{\partial z} - l \frac{\partial^2 I}{\partial z \partial t} & \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} &= -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial z} - c \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial t} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial z} &= -r \frac{\partial I}{\partial t} - l \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 I}{\partial t \partial z} &= -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - c \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \end{aligned}$$

„Gemischte“ Ableitung aus Zeile 2 in Zeile 1 einsetzen und Ersetzen von 1. Abl durch (1) und (2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= -r \left(-\frac{U}{g} - c \frac{\partial U}{\partial t} \right) - l \left(-\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - c \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} &= -g \left(-r I - l \frac{\partial I}{\partial t} \right) - c \left(-r \frac{\partial I}{\partial t} - l \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \right) \end{aligned}$$

Entkopplung von U und I in DGL

TGL:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= grU + (rc + gl) \frac{\partial U}{\partial t} + lc \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} &= grI + (rc + gl) \frac{\partial I}{\partial t} + lc \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Beschreibung der Ausbreitung von Signalen auf LL

Wellengleichung

approximative Lsg. der TGL für $r = 0, g = 0$

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = lc \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = lc \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}}$$

homogene Wellengleichung

hier: $\partial U, \partial I$ in z-Richtung

Für bel. Richtung der LL: $\Delta U(\vec{r}, t) = lc \frac{\partial^2 U(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad \Delta I(\vec{r}, t) = lc \frac{\partial^2 I(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$

Lösungsansatz: $U(z, t) = U_0 e^{i(\omega t \mp kz - \phi)} \quad I(z, t) = I_0 e^{i(\omega t \mp kz - \phi)}$

Einsetzen von $U(z, t)$ in Wellen-Gl

$$k^2 = lc\omega^2 \quad v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

v_{ph} Phasengeschwindigkeit der Welle

Werte für lecher-Leitung einsetzen

$$\begin{aligned} v_{ph} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\pi} \ln\left(\frac{2a}{d}\right) \frac{\pi \epsilon_0 \epsilon}{\ln\left(\frac{2a}{d}\right)}}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} c \end{aligned}$$

in Medium $v_{\text{ph}} < c$

v_{ph} unabhängig von Geometrie der LL

„ $\mp kz$ “-Lösungen: „-“ Ausbreitung in pos. z-Richtung, „+“ Ausbreitung in neg. z-Richtung

$$\text{Wellengleichung: } \left(\Delta - \frac{1}{v_{\text{ph}}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U(\vec{r}, t) = 0$$

Bisher: ideale, unendlich lang

Nun: Verbraucher aus Ende mit Impedanz Z_V

Betrachte LL: Stromquelle mit Innenwiderstand Z_L

$$Z_L = \frac{U}{I} = \frac{\partial U / \partial z}{\partial I / \partial z} = \frac{-rI - l \frac{\partial I}{\partial t}}{\text{den}}$$

hier fehlt was

$$Z_L = \sqrt{\frac{r + il\omega}{g + ic\omega}} \stackrel{\text{ideal}}{=} \sqrt{\frac{l}{c}}$$

$$\text{Für LL: } = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} \frac{\ln \frac{2a}{d}}{\pi} = 377 \Omega \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\ln \frac{2a}{d}}{\pi}$$

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega \text{ Wellenwiderstand des Volumens}$$

Vollständige Leistungsanpassung: $Z_L = Z_V$

$Z_V \neq Z_L$: nur Teil der Leistung in Z_V umgesetzt der Rest der Leistung reflektiert

Extremfälle: $Z_V = 0$ (Kurzschluss) und $Z_V = \infty$ (offene LL)

$Z_V = 0$: $U(Z_V) = 0$ Spannungsknoten

$Z_V = \infty$: $I(Z_V) = 0$ Stromknoten

komplette oder teilweise Reflexion der Welle

→ Überlagerung von einlaufender und auslaufender Welle → stehende Welle (wie in Mechanik bei Seilen)

Rechnung: zur Entstehung der stehenden Welle

einlaufend: $U_{\text{ein}}(z, t) = U_0 e^{i(\omega t - kz)}$

Annahme vollständige Reflexion: $\Delta\phi = 0$ an losen Ende

rücklaufend: $U_{\text{rück}}(z, t) = U_0 e^{i(\omega t + kz)}$

Gesamt: $U_{\text{ges}} = U_{\text{ein}} + U_{\text{rück}} = U_0 e^{i(\omega t)} (e^{ikz} + e^{-ikz}) = 2U_0 \cos kz \cos \omega t$ (übergang zu Realteil)

Dies ist stehende Welle mit $\omega = 2\pi f$ $k = 2\pi/\lambda$

Weise Beobachtung wenn LL ∞ -lang, offene Leitung

Hier/Exp: geschlossenes Ende $\Delta\phi = \pi$ bei Reflexion

Endliche Länge → viele Reflexionen und Überlagerungen

Bedingung für stehende Welle/konstruktive Interferenz

1 lose / 1 fest (offen/geschlossen) : $l = \frac{2n-1}{4} \lambda$

2 lose oder 2 feste (offen/geschlossen) : $l = n \frac{\lambda}{2}$

Wellenausbreitung mit Absorption

jetzt: $r, g \neq 0 \quad r, g < \omega L < \frac{1}{\omega L}$

d.h. Term: „ $r \cdot g U(z, t)$ “ vernachlässigbar

Ansatz: $U = U_0 e^{i(\omega t - \bar{k}z)}$

Einsetzen in Telegraphen Gl. teile durch $U_0 e^{i(\omega t - \bar{k}z)}$

$$-k^2 = i(rc + lg)\omega - lc\omega^2$$

$$\bar{k} = \sqrt{lc}\omega \sqrt{1 - i\frac{rc+lg}{lc}}\omega \approx \sqrt{lc}\omega - i\frac{1}{2}\frac{rc+lg}{\sqrt{lc}}\omega^2$$

$$(\sqrt{1-x} \approx 1 + \frac{x}{2})$$

Def: $k = \text{Re } \bar{k} = \sqrt{lc}\omega$

$$\frac{1}{s} = -\text{Im } \bar{k} = \frac{1}{2}\frac{rc+lg}{\sqrt{lc}}\omega^2$$

Dann: $U(z, t) = U_0 e^{-z/s} e^{i(\omega t - kz)}$

Welle mit Frequenz ω , Wellenzahl k mit Abnehmender Amplitude ($e^{-z/s}$)

Exp:

Koaxialkabel $v^{-1} = 5 \frac{\text{ns}}{\text{m}}$ Länge = 20 m

Rechteckimpuls von 75 ns

[Folie: Signalausbreitung auf Koaxialkabel]

III.13.2 Vakuumwellen

Einleitung: el.-mag. Welle auf Leiter eingeschränkt auch Ausbreitung im Raum (Vakuum/Medien)

[Folie: Vom Schwingkreis zum Hertzschen Dipol]

Vom Schwingkreis zum Hertzschen Dipol

C vom Kondensator \rightarrow C Endplatten \rightarrow C Stab

- L von Spule \rightarrow L Windung \rightarrow L Stab
offener Schwingkreis: C und L pro Länge
- geschlossener Schwingkreis: \vec{E} - und \vec{B} -Feld lokalisiert Streufelder vernachlässigbar
- gerader Draht: Ladungen schwingen zwischen Enden \vec{E} und \vec{B} im ganzen Raum ausgedehnt. Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit c
- Antenne für stehende Welle $l = n\frac{\lambda}{2}$
Sender induktiv an Schwingkreis gekoppelt
Empfänger: Nachweis von U/I durch Glimmlage / Glühlampe

[Folie: Stabsendesantenne und -empfängerantenne]

[Folie: Wellenlänge in Wasser]

Wellengleichung

Betrachte Maxwell Gl. im Vakuum ($\rho = 0, \vec{j} = 0$)

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Auswertung:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

3 Maxwell Gl. im Vakuum: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$

$$\boxed{\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}} \quad \text{Wellen gleichung f\"ur } E_x, E_y, E_z$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit durch Faktor von $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$$\boxed{\frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0}$$

Kompakte Schreibweise:

$$\underbrace{\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)}_{\partial' \text{ Alambert/Quabla-Operator}} \vec{E} = 0 \quad \square \vec{E} = 0$$

Analog f\"ur \vec{B} -Feld : $\boxed{\square \vec{B} = 0}$ wellen gl. f\"ur \vec{B} -Feld

Lsg: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t \mp \vec{k} \cdot \vec{r})}$ Ausbreitung in + bzw. - \vec{k} - richtung

Ebene Welle

Sei $\vec{k} = k \vec{e}_z$

Ebene Welle: Amplitude konstant in Wellenfront f\"ur feste Zeit; Wellenfront: Ebene $\perp \vec{k}$
[Folie: Ebene Welle in z-Richtung]

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0 \quad \text{f\"ur festes } z \text{ und } t$$

3MW-Gl: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \stackrel{\text{Vakuum}}{=} 0 \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow E_z = \text{const. in } z$

Aus Wellengl.: $\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \quad E_z = \text{const. in } t = 0$ durch Randbedingungen

$$\rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{E} \perp \vec{k}$ d.h. transversale Welle

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}, t) \stackrel{\text{Ansatz}}{=} \vec{E}_0 i(\mp \vec{k}) e^{i(\omega t \mp \vec{k} \cdot \vec{r})} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{k} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \vec{E}_0 \perp \vec{k}$$

für g. Ausbreitungsrichtung 2 lin. unabhängige Lsg.

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = A_x \vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = A_y \vec{e}_y e^{i(\omega t - kz)}$$

A_i konstante Amplituden

Einsetze in Wellengleichung (z.B. $\vec{E}_1(\vec{r}, t)$)

$$-A_x \vec{e}_x k^2 - \frac{1}{c^2} (-A_x \vec{e}_x \omega^2) = 0$$

$$\text{d.h. } c = \frac{\omega}{k} \quad \text{bzw.} \quad V_{\text{ph}} \equiv \frac{\omega}{k} = c$$

keine Dispersion im Vakuum $V_{\text{ph}} \neq V_{\text{ph}}(\omega)$

Räumliche Periodizität

$$\omega t - k(\lambda + z) - (\omega t - kz) = 2\pi \quad k\lambda = 2\pi$$

Zeitliche Periodizität

$$\omega(t + T) - kz - (\omega t - kz) = 2\pi \quad \omega T = 2\pi$$

[Folie: Eben Welle in z-Richtung]

Polarisation

- lineare Polarisation: \vec{E} zeigt immer in die selbe Richtung $\perp \vec{k}$
 \vec{E}_1 und \vec{E}_2 sind linear polarisierte Lösungen

Phasengleiche Überlagerung von \vec{E}_1 und \vec{E}_2

$$\vec{E}_{\text{ges}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = A_x \vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)} + A_y \vec{e}_y e^{i(\omega t - kz)}$$

\vec{E} -Feld schwingt in Richtung

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear Polarisiert

[Folie: Linear polarisierte Wellen]

- zirkulare Polarisation
 \vec{E} -Vektor dreht sich um \vec{k} mit konstanter Kreisgeschwindigkeit ω
2 unabhängige Lsg: links/rechts zirkular links/rechts polarisiert
Aus Überlagerung von 2 lin. polarisierten Wellen mit Phasenverschiebung $\pm \frac{\pi}{2}$

$$\vec{E}'_1(\vec{r}, t) = E_0 \vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\vec{E}'_2(\vec{r}, t) = E_0 \vec{e}_y e^{i(\omega t - kz - \frac{\pi}{2})}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}'_1 + \vec{E}'_2 = (E_0 \vec{e}_x + iE_0 \vec{e}_y) e^{i(\omega t - kz)} = \vec{E}_1 - i\vec{E}_2$$

Richtung von \vec{E}_L aus Realteil

$$\vec{E}_L = \vec{e}_x E_0 \cos(\omega t - kz) + E_0 \vec{e}_y \sin(\omega t - kz)$$

festes z: Rotation um k-Achse

[Folie: Zirkular Polarisierte Wellen]

$\sigma_{+/-}$ Drehimpuls der Welle $\sigma_+ : \vec{L} \uparrow \uparrow k$ links zirkular $\sigma_- : \vec{L} \uparrow \downarrow k$ rechts zirkular
elliptische Polarisation: wenn $E_{0,x} = E_{0,y}$ oder $\Delta\phi = \pm \frac{\pi}{2}$

\vec{E} -Vektor beschreibt Ellipse um k-Achse

$$\vec{E}_{R,el} = A_x \vec{E}_1 + iA_y \vec{E}_2 \quad A_x \neq A_y$$

unpolarisiert: wenn \vec{E} -Vektor keine zeitlich konstante Richtung und keine Ellipsen periodisch durchläuft, bzw. Richtung in Raum und Zeit statistisch verteilt i.A. Lichtquelle unpolarisiert weil Überlagerung von vielen Emissionen von Atomen/Dipolen.

[Folie: Das Spektrum der el.mag. Strahlung]

[Folie: Messung der Lichtgeschwindigkeit nach B.L. Foucault]

Stehende Welle

- Reflexion von ebener Vakuumwelle an Metalloberfläche
- Überlagerung von ein- und rücklaufender Welle
 \rightarrow stehende Welle

z.B. Welle in z-Richtung, lin. polarisiert in x-Richtung

$$\vec{E}_{\text{ein}} = E_0 \vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\vec{E}_{\text{rück}} = -E_0 \vec{e}_x e^{i(\omega t + kz)}$$

Metalloberfläche bildet festes Ende. d.h. Phasensprung $\Delta\phi = \pi$ da $\vec{E}_{\text{tangential}} = 0 \Rightarrow „-E_0“$

$$\vec{E}_{\text{ges}} = \vec{E}_{\text{ein}} + \vec{E}_{\text{rück}} = -E_0 \vec{e}_x e^{i\omega t} \underbrace{\left\{ \overbrace{e^{ikz}}^{\text{Rück}} - \overbrace{e^{-ikz}}^{\text{Ein}} \right\}}_{2 \sin kz}$$

$$|\Re(\vec{E}_{\text{ges}})| = 2E_0 \vec{e}_x \sin kz \sin \omega t$$

zwei Metallflächen: Abstand $a = n \frac{\lambda}{2}$ stehende Welle

Magnetfeld der Wellen

Betrachte: $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)}$ lin. pol. in x-Richtung, Ausbreitung in +z-Richtung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = E_0 (\vec{e}_y) e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\text{Maxwell-Gl: } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$$

B_x, B_z zeitlich konstant und können $= 0$ gewählt werden

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = +ikE_x = ikE_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

Integration t: $B_y = ikE_0 \int dt e^{i(\omega t - kz)} = \frac{k}{\omega} E_0 e^{i(\omega t - kz)}$

Also: $\vec{B} = \frac{1}{c} |\vec{E}| \vec{e}_y$ mit $\frac{\omega}{k} = c$

$\vec{B} \perp \vec{E}; \vec{B}, \vec{E} \perp \vec{k}$

Kompakt:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E})} \quad \text{im Vakuum}$$

\vec{B} und \vec{E} in Phase schwingen

[Folie: Momentanaufnahme der lin. pol. Welle von E- und B-Feld]

Hohlraumresonator

- 3-dim „Einsperrung der Welle“ → leitender Hohlraum (Metallquader)
- Betrachte Quader: l_x, l_y, l_z (a, b, c)
[Folie: Hohlraumresonator]
- Tangentialkomponente des \vec{E} -Feldes verschwindet auf Wänden
- El.-mag. Welle wird vielfach reflektiert und überlagert
→ stehende Welle wenn folgende Bedingungen erfüllt sind

$$k_x = \frac{l\pi}{l_x} \quad k_y = \frac{n\pi}{l_y} \quad k_z = \frac{m\pi}{l_z} \quad l, n, m \text{ ganze Zahlen } \geq 0$$

Zsgh:

$$|\vec{k}| = k = \pi \sqrt{\frac{l^2}{l_x^2} + \frac{n^2}{l_y^2} + \frac{m^2}{l_z^2}}$$

Mögliche Frequenzen $\omega = V_{\text{ph}} k = ck = c\pi$ [siehe oben]
stehende Welle der Form:

$$E_{lmn} = E_0(l, n, m) \cos \omega t$$

[Folie: Resonanzbedingung im Hohlraumresonator]

$E_0(l, m, n)$ ergibt sich aus den Bedingungen

i) $\vec{E} \perp \vec{k}$

ii) $\vec{E}_{\text{tangential auf Wänden}} = 0$

- Frage: wie viele Moden unterhalb Grenzfrequenz ω_0 gibt es ?
wichtig bei der Quantenmechanik Entwicklung

Vereinfachung: Würfel $l_x = l_y = l_z = a$

Bestimme alle $\vec{k} \leq k_G$ $k_G = \frac{\omega_G}{c}$

Punkte (n, m, l) im \vec{k} -Raum mit Gitterkonstanten $\frac{\pi}{a}$

Für ω_G bzw. k_G groß d.h. $n^2 + m^2 + l^2 \gg 1$

N_G Anzahl der Gitterpunkte durch $\frac{V_{\text{Kugel}}(|\vec{k}|)}{V_0}$

V_0 Volumen der Einheitszelle im \vec{k} -Raum: $V_0 = (\frac{\pi}{a})^3$

$V_{\text{Kugel}}(|\vec{k}|) = \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} k_G^3$ $\frac{1}{8}$ nur pos. Oktanten ($n, m, l \geq 0$)

Anzahl der Resonanzmoden ergibt sich dazu:

$$N_G = 2 \frac{V_{\text{Kugel}}(k_G)}{V_0} \quad 2 \text{ für Polarisationsfreiheitsgrade}$$

$$= 2 \frac{\pi}{6} \left(\frac{a\omega_G}{\pi c} \right)^3 = \frac{8\pi f_G^3 a^3}{3c^3} \quad f_G = \frac{\omega_G}{2\pi}$$

$$\text{Modendichte: } \frac{N_G}{V} = \frac{8\pi f_G^3}{3c^3}$$

$$\text{Spektrale Modendichte: } \frac{dN_G/V}{df} = \frac{8\pi f_G^2}{c^3}$$

III.13.3 Hohlleiter

Hohlraumresonator mit zwei offenen Enden

Ziel: Transport von Mikrowellen

a) planparallele Platten in y/z-Ebene im Abstand d Drehung des Koordinatensystems

$\rightarrow \vec{k} = (k_x, 0, k_z)$ $k_z > 0$

Reflexion an Platten mit Phasensprung π

$$k_x \rightarrow -k_x \quad k_z \rightarrow k_z$$

Polarisation in y-Richtung ($\vec{E} \perp \vec{k}$)

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0 \vec{e}_y e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)} + E_0 \vec{e}_y e^{i(\omega t + k_x x - k_z z)} \\ &= 2i E_0 \vec{e}_y \sin k_x x e^{i(\omega t - k_z z)} \end{aligned}$$

aus Bedingungen, $\vec{E}_{\text{tang.}} \stackrel{!}{=} 0$ folgt $k_x = \frac{n\pi}{d}$ keine Einschränkung auf k_z

Resultat: Welle in z-Richtung mit modulierter Amplitude $\sin \frac{\pi k_x}{d} x$

Allgemeine Lösung:

a) $\vec{E} \perp$ Ausbreitung $E_0 = (E_{x0}, E_{y0}, 0)$

TE-Wellen transversal elektrisch

b) $E_z \neq 0$ dann $B_0 = (B_{x0}, B_{y0}, 0)$

d.h. $\vec{B} \perp$ Ausbreitung

TM-Wellen transversal magnetisch

„ $e^{i(\omega t - k_z z)}$ “ beschreibt Ausbreitung. Phasengeschwindigkeit $v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k_z}$

Weiterhin gilt $c = \frac{\omega}{|k|} = \frac{\omega}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}$

$$\rightarrow v_{\text{ph}} = \frac{c}{k_z} \sqrt{k_z^2 + k_x^2} = c \sqrt{1 + \frac{k_x^2}{k_z^2}} \geq c$$

Aber Gruppengeschwindigkeit

$$v_{\text{Gr}} = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial k_z} = \frac{c^2}{\omega} k_z = \frac{c^2}{v_{\text{ph}}} \leq c$$

kleiner als für Wellen im Vakuum

Mit Bedingung $k \stackrel{!}{=} \frac{n\pi}{d}$ ergibt sich:

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{d^2}}$$

[Folie: Phasen- und Gruppengeschwindigkeit zwischen parallelen Grenzflächen]

b) Wellenleiter

- Rechteckiger Querschnitt
- Mechanismus wie bei parallelen Platten Reflexion + Überlagerung → Welle entlang Achse eines Hohlleiters
zusätzliche Bedingung in y-Richtung

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x, y) e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (*)$$

Tangentialkomp von $\vec{E} = 0$ auf 4 Wänden

(*) in Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial y^2} + \vec{E}_0 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) = 0 \quad (**)$$

wieder TE und TM - Lsg.

Hier: TE- Moden, d.h. $\vec{E} \perp$ Ausbreitungsrichtung

$$\text{Ansatz: } \vec{E}_0 = \begin{pmatrix} E_0 x \cos k_x x \sin k_y y \\ E_0 y \sin k_x x \cos k_y y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus Randbed.: $k_x = \frac{n\pi}{e_x}$ $k_y = \frac{n\pi}{e_y}$

l_x, l_y Abmessungen des Hohlleiters

Aus (**) erhalten wir Bedingungen für k_z

$$-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$k_z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2} (k_x^2 + k_y^2)}}$$

Phasengeschwindigkeit:

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2} (k_x^2 + k_y^2)}}$$

Räumliche Periode:

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} (k_x^2 + k_y^2)}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \lambda_0^2 \left(\frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2} \right)}}$$

λ_0 Wellenlänge im Vakuum bei ω

$$\lambda_x \equiv \frac{2\pi}{k_x} \quad \lambda_y \equiv \frac{2\pi}{k_y}$$

$$\lambda_z \geq \lambda_0 \text{ da } v_{\text{ph}} \geq c$$

k_z muss reelle Zahl sein

$$\rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} \geq k_x^2 + k_y^2$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} \geq \left(\frac{n\pi}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{l_y}\right)^2 \quad \text{oder}$$

$$f \geq f_{\text{Grenz}} = c \sqrt{\left(\frac{n}{2l_x}\right)^2 + \left(\frac{m}{2l_y}\right)^2}$$

Hohlleiter wirkt als Hochpass

$f < f_{\text{Grenz}}(n, m)$ können sich nicht ausbreiten

[Folie: Radiowellen in Erdatmosphäre]

III.13.4 Energietransport

Intensität der Welle

Energiedichte des el-mag. Feldes

$$w = \frac{1}{2} E_0 (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2)$$

Mit $\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{1}{c} \left(\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{E} \right)$ im Vakuum $|\vec{B}| = |\vec{E}|/c$

$$w = \epsilon_0 |\vec{E}|^2$$

Ebene Welle unendlich ausgedehnt $\rightarrow E$ unendlich groß.

Intensität \equiv Energie der Welle die Pro Zeit dt durch die Fläche $A \perp$ zur Ausbreitungsrichtung transportiert wird.

$$I = \frac{E_{\text{em}}}{dt A} = \frac{w_{\text{em}} V}{dt A} = \frac{w_{\text{em}} c dt A}{dt A}$$

Mittellung über Wellenlänge $\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2}$

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t - kz_0) \quad \text{an Stelle } z_0$$

$$I(t) = I_0 \cos^2(\omega t - kz_0) \quad I_0 = \epsilon c E_0^2$$

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{1}{T} \int_0^T I_0 \cos^2(\omega t - kz_0) dt \\ &= \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} \epsilon c E_0^2 \end{aligned}$$

Für zirkular polarisierte Welle:

$$\bar{I} = \epsilon c E_0^2 \quad \text{da } |\vec{E}| = \text{const.}$$

Intensität \sim (Amplitude der Welle)²

Poynting-Vektor \vec{S}

Def:

$$\vec{S} \equiv \vec{E} \times \vec{H} \stackrel{\text{Vakuum}}{=} \epsilon_0 c^2 (\vec{E} \times \vec{B})$$

Vakuum:

$$\begin{aligned} \vec{E}, \vec{B} \perp \vec{k} &\Rightarrow \vec{S} \uparrow \uparrow \vec{k} \\ S = |\vec{S}| &= \epsilon_0 c^2 |\vec{E}| |\vec{B}| = \epsilon_0 c |\vec{E}|^2 = I \end{aligned}$$

\vec{S} beschreibt Richtung und Betrag des Energieflusses

Betrachte Volumen V

$$E_{\text{em}} = \epsilon_0 \int_V |\vec{E}|^2 dV$$

keine Verbrauch von E_{em} in V lediglich Zu- oder Abfluss

$$-\frac{\partial E_{\text{em}}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \epsilon_0 |\vec{E}|^2 dV = \oint_A \vec{S} d\vec{A} = \int \text{div } \vec{S} dV \quad \text{Gausscher Satz}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 |\vec{E}|^2) = \text{div } \vec{S}$$

[Folie: Impulstransport/Strahlungsdruck und davor]

Impulstransport

el.-mag. Welle transportiert auch Impuls

$$\text{Impulstransport} \quad \vec{\pi} \equiv \frac{1}{c^2} \vec{S} = \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$\text{Strahlungsdruck} \quad P_{\text{St}} = \frac{F}{A} = \frac{dp}{dt} \frac{1}{A}$$

$$\text{Impulsänderung} \quad dp = |\vec{\pi}| V = |\vec{\pi}| A c dt$$

$$\Rightarrow P_{\text{St}} = \epsilon_0 |\vec{E}|^2 = w_{\text{em}} \quad \text{für Absorption}$$

Spiegel mit Reflexion der Welle $\Delta p \rightarrow 2\Delta p$

III.14 Wellenabstrahlung

III.14.1 Hertzscher Dipol

- offener, gerader Schwingkreis
- e^- im Leitungsband schwingen periodisch
- Trennung der Ladungen: e^- -überschuss oder e^- -Mangel
→ Bildung eines oszillierenden Dipols $\vec{p} = q\vec{d} \quad \pm q$ Ladungen, $\vec{d}: -q \xrightarrow{\vec{d}} +q$
Beachte $|\vec{d}| \ll l_{\text{stab}}$ typ: $|\vec{d}| \sim \mu\text{m}$

III.14.2 Abstrahlung des Hertzschen Dipols

- q spürt Kraftwirkung aus dem \vec{E} -Feld des Dipols erst nach $\Delta t = \frac{\text{Abstand}}{c}$

→ Retardierung, \vec{E} , \vec{B} breiten sich mit Verzögerung im Raum aus

Magnetfeld

Bio-Savart für Vektorpotential \vec{A}

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

[Folie: Zur Berechnung des B-Feldes]

Stromdichte der e^- im Stab:

$$\vec{j}(\vec{r}', t) = \underbrace{\vec{v}(\vec{r}', t)}_{\text{Geschw.}} \underbrace{\rho(\vec{r}', t)}_{\text{Ladungsdichte}}$$

Betrachte:

- $|\vec{r} - \vec{r}'| \gg l$ Stab dann
 - a) $r = |\vec{r}| \gg l$
 - b) $|\vec{r} - \vec{r}'| \approx |\vec{r}|$ unabhängig von \vec{r}'
- Laufzeit der Wellen im Stab $\mathcal{T} = \frac{l}{c} \ll T = \frac{2\pi}{\omega}$
d.h. alle Wellenfronten von unterschiedlicher \vec{r}' gleichzeitig bei \vec{r} ankommen

Berücksichtigung der Retardierung

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{v}(\vec{r}', t') \rho(\vec{r}', t') d^3\vec{r}'$$

$$t' = t - \frac{r}{c} \quad \text{Retardierung}$$

Integrand durch oszillierenden Dipol beschreibbar. Dipol in z-Richtung: $\vec{p}(t) = qd \sin \omega t \vec{e}_z$

Aus $\frac{d}{dt} \vec{d} = \vec{v}$ folgt: $\frac{d}{dt} \vec{p} = q \frac{d}{dt} \vec{d} = q \vec{v}$

Raum- → Ladungsintegral $\rho d^3\vec{r}' = dq$

$$\rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{1}{q} \frac{dp(t - \frac{r}{c})}{dt} \int_{\text{Stab}} dq$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} q d \omega \left\{ \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right\} \vec{e}_z \quad p_0 = qd$$

- $\frac{d}{dt} \vec{p}$ erzeugt \vec{A} und damit \vec{E} und \vec{B} -Felder

- Magnetfeld $\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial A_z}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix}$

Bei Ableitung beachten: $\tau(x, y)$ und Retardierung

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}p(t - \frac{r}{c}) \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \frac{d}{dt}p(t - \frac{r}{c}) \\ -\frac{d}{dt}p(t - \frac{r}{c}) \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \frac{d}{dt}p(t - \frac{r}{c}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t' = t - \frac{r}{c} \quad \frac{d}{dt}p(t - \frac{r}{c}) = \frac{d}{dt'}p(t') \underbrace{\frac{dt'}{dt}}_1 \equiv \dot{p}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial r} = -\frac{1}{c} \quad \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial y} = \frac{1}{2r} 2y = \frac{y}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \dot{p} = -\ddot{p} \frac{1}{c} \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{r}) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{-2r^3} 2y = -\frac{y}{r^3}$$

Ergibt:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{pmatrix} -\dot{p} \frac{y}{r^3} - \ddot{p} \frac{y}{cr^2} \\ +\dot{p} \frac{x}{r^3} + \ddot{p} \frac{x}{cr^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\dot{p}}{r^2} x \vec{e}_r + \frac{\ddot{p}}{cr} x \vec{e}_r \right\}$$

$\vec{B} \perp \vec{p}$ ($\vec{p} \parallel \dot{\vec{p}} \parallel \ddot{\vec{p}}$) $\vec{B} \perp \vec{r}$ Beiträge:

a) „ $\dot{\vec{p}}$ “, $\sim \frac{1}{r^2}$

Vgl. Bio-Savart $d\vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^2} dV$

$\dot{\vec{p}} \int \vec{j} dV \Rightarrow \dot{\vec{p}}$ stammt aus Oszillation von \vec{j}

b) „ $\ddot{\vec{p}}$ “, $\sim \frac{1}{r}$ aus $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ bzw. des Verschiebungsstromes

Vgl: Maxwell-Gl:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Elektrisches Feld

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\mu_0}{4\pi} (\dot{p} \frac{z}{r^3} + \ddot{p} \frac{z}{cr^2})$$

In Lorentzbeziehung:

$$\text{div } \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{el}} \quad \text{mit} \quad \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$\rho_{\text{el}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ p \frac{z}{r^3} + \dot{p} \frac{z}{cr^2} \right\}$$

Final

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \rho_{\text{el}} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \begin{array}{l} 3p \frac{xz}{r^5} + 3\dot{p} \frac{xz}{cr^4} + \ddot{p} \frac{xz}{c^2 r^3} \\ 3p \frac{yz}{r^5} + 3\dot{p} \frac{yz}{cr^4} + \ddot{p} \frac{yz}{c^2 r^3} \\ p(3\frac{z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}) + \dot{p}(3\frac{z^2}{cr^4} - \frac{1}{cr^2}) + \ddot{p}(\frac{z^2}{c^2 r^3} - \frac{1}{c^2 r}) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 3\left(\frac{\vec{p}}{r^3}\vec{e}_r\right)\vec{e}_r - \frac{\vec{p}}{r^3} + 3\left(\frac{\vec{p}}{cr^2}\vec{e}_r\right)\vec{e}_r - \frac{\dot{\vec{p}}}{cr^2} + \left(\frac{\ddot{\vec{p}}}{cr^2} \times \vec{e}_r\right)\vec{e}_r \right\}$$

Nahfeld: Terme $\sim \frac{1}{r^2}$ und $\sim \frac{1}{r^3}$

$$\vec{E}_N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [-\vec{p}^* + 3(\vec{p}^* \vec{e}_r)\vec{e}_r]$$

$$\vec{p}^* \vec{p} + \frac{r}{c} \dot{\vec{p}}$$

\vec{E} und \vec{B} um $\frac{\pi}{2}$ verschoben

Fernfeld: Term $\sim \frac{1}{r}$

$$\vec{E}_F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} [\ddot{\vec{p}} - (\vec{e}_r \cdot \ddot{\vec{p}})\vec{e}_r]$$

$\perp \vec{r}$, $\perp \vec{B}$, \vec{E} und \vec{B} in Phase wie von Vakuumwelle erwartet

Amplitude $\sim \frac{1}{r} \Rightarrow$ Intensität $\sim \frac{1}{r^2}$

\rightarrow Energie und Impuls durch eine Kugelfläche konstant

$$|\vec{E}| = \frac{|\ddot{\vec{p}}| \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}$$

θ : \angle Dipolachse und Richtung der Welle

nicht isotrop, maximal \perp Dipolachse. Verschwindet entlang Dipolachse

[Folie: Nahfeld des Hertzchen Dipol und davor]

Strahlungsdämpfung

Energiestromdichte: $|\vec{S}| = \epsilon_0 c |\vec{E}|^2$

Im Fernfeld: $S = \epsilon_0 c \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ddot{p}}{c^2 r} \sin \theta \right)^2$

mit $\ddot{p}^2 = -p_0^2 \omega^4 \sin^2(\omega(t + \frac{r}{c}))$

Mittlung über Schwingungsperiode $\overline{\ddot{p}^2} = \frac{1}{2} p_0^2 \omega^4$

Beachte Skalierung mit ω^4

\rightarrow signifikante Abstrahlung bei hohen Frequenzen

$$p = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

- Energie wird der Schwingung des Dipols entzogen
 \rightarrow Dämpfung der Schwingung
aber Kompensation durch gekoppelte Schwingkreis
- Berechnung für freie Schwingung
Bei $t = 0$ Schwingung mit Amplitude p_0 dann schwache Dämpfung $p(t) = p_0 e^{-\gamma t}$
Da $E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \sim |\text{Amplitude}|^2$
gilt $E_{\text{tot}} = E_{\text{tot}}(t=0) e^{-2\gamma t}$
Abgestrahlte Leistung $P > 0$
 $-P = \frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = -2\gamma E_{\text{tot}} \quad \gamma = \frac{1}{2} \frac{P}{E_{\text{tot}}}$

In Mechanik: $E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 d^2$

Daraus $\gamma = \frac{q^2\omega^2}{12\pi\epsilon_0 m_e c^3}$

m_e Masse el., q Ladung des Dipols

- Wie sieht das Frequenzspektrum aus ?

– naiv: nur $\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

– Dämpfung bewirkt Verbreitung. Antenne sendet eine Welle aus mit exp. abklingender Amplitude.

Mechanik:

$$d = \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + (2\gamma\omega)^2}}$$

d Amplitude, ω_0 Resonanzfrequenz

K Stärke der Anregung $= \frac{E_0 q}{m}$

Einsetzen in $P = +2\gamma E_{\text{tot}}$

$$P = \frac{q^2\omega^2 K^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + (2\gamma\omega)^2}$$

bei $\omega_{1/2} = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} \pm \gamma$ fällt P auf die Hälfte $\Delta\omega = 2\gamma$ volle Breite auf halber Höhe

[Folie: Lebensdauer eines atomaren Zustands]

III.14.3 Beschleunigte Ladungen

Elektrostatik $\varphi(\mathbf{r})$ aus $\rho(\mathbf{r}')$ via Poisson-Integrals

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

Bewegte Ladungen \rightarrow Modifikationen

i) Retardierung: $\vec{r}'(t - \frac{r}{c})$ $\rho(\vec{r}'(t - \frac{r}{c}))$

ii) „Deformation“ des Integrationsvolumens dV'_R

[Folie: Verlängerung der Strecke in Bewegungsrichtung]

Verlängerung von $d^3\vec{r}'$ in Richtung von \vec{v} der Ladungsbewegung

$$dV'_R = \frac{d^3\vec{r}'}{1 - \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{v}}{|\vec{r} - \vec{r}'| c}}$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}'(t - \frac{r}{c}))}{|\vec{r} - \vec{r}'(t - \frac{r}{c})|} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\vec{v}}{c} d^3\vec{r}'$$

Für eine Punktladung q

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qC}{|\vec{r} - \vec{r}'|c - (\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{v}} \Big|_{\text{ret}}$$

analog ergibt sich

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qC}{|\vec{r} - \vec{r}'|c - (\vec{r} - \vec{r}')\vec{v}} \Big|_{\text{ret}} \\ &= \frac{\vec{v}}{c^2} \varphi(\vec{r}, t)\end{aligned}$$

Liénard-Wiedert-Potentiale für Pkt. ladungen

Felder der bewegten Ladung

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Einsetzen und lange rechnen ...

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qw}{(\vec{\omega} \cdot \vec{u})^3} \left\{ (c^2 - v^2)\vec{u} + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right\}_{\text{ret}}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{e}_w \times \vec{E} \quad \vec{v}, \vec{a} \text{ Geschwindigkeit, Beschleunigung der Ladung } q$$

$$\vec{w} \equiv \vec{r} - \vec{r}'_{\text{ret}} \quad \vec{u} \equiv c\vec{e}_w - \vec{v}$$

2 Beiträge:

- i) Term $\sim \vec{u}$ Nahfeld $|\vec{E}|, |\vec{B}| \sim \frac{1}{w^2}$
Energiefluss $\sim \frac{1}{w^4} \rightarrow 0$ für Kugelschale mit $R \rightarrow \infty$
- ii) Term $\sim \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{a})$ Fernfeld $|\vec{E}|, |\vec{B}| \sim \frac{1}{w}$
Energiefluss $\sim \frac{1}{w^2} \rightarrow$ konstant durch Kugelschalen
 \rightarrow Dieser Term bestimmt Abstrahlung $\sim |\vec{a}|$ bewirkt Energieverlust von q

2 Spezialfälle:

- i) ruhende Ladung $n = c\vec{e}_w \parallel \vec{r} - \vec{r}'$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qw}{c^3(\vec{w}\vec{e}_w)} c^2(c\vec{e}_w) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{w^2} \vec{e}_w$$

$$\vec{B} = 0 \quad \text{wie in Elektrostatik}$$

- ii) konstante Geschwindigkeit $\vec{r}'(t) = \vec{v}t$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qw}{(\vec{w}\vec{u})^3} (c^2 - v^2)\vec{u} \Big|_{\text{ret}}$$

$$\text{Es gilt: } w\vec{u} = c\Delta\vec{r} \quad \Delta\vec{r} \equiv \vec{r} - \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$$

$$\text{weiterhin: } \vec{w}\vec{u} = c\Delta\vec{r} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta}$$

$$\theta = \angle \vec{v} \text{ und } \vec{E}$$

$$\text{Ergebnis: } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \frac{q}{\Delta r^2} \Delta\vec{r}$$

[Folie: Elektrische Feldlinien bewegter Punktladungen] Für $|\vec{v}| \rightarrow c$ E_{trans} wächst, E_{long} nimmt ab

Abstrahlung

- im Fernfeld, $\sim |\vec{a}|$ der Pkt.ladung Energiefluss aus Pointingvektor

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \epsilon_0 c^2 (\vec{E} \times \vec{B}) = \epsilon_0 c (\vec{E} \times (\vec{e}_w \times \vec{E})) \\ &= \epsilon_0 c (\vec{E}^2 \vec{e}_w - (\vec{e}_w \vec{E}) \vec{E})\end{aligned}$$

im Fernfeld gilt $\vec{E} \perp \vec{w} \rightarrow 2. \text{ Term} = 0$

$$\boxed{\vec{S} = \epsilon_0 c |\vec{E}|^2 \vec{e}_w}$$

\vec{E} abhängig von \vec{v} und \vec{a} der Ladung

- wenn $\vec{v} = \vec{0}$ dann $\vec{u} = c\vec{e}_w$ aber Abstrahlung $\neq 0$
- wenn $\vec{a} = \vec{0}$ dann Abstrahlung $= 0$
 $\vec{a} \neq \vec{0}$ dann Abstrahlung in gewisse Richtung

$$\boxed{\text{Beschleunigteel.Ladungenstrahlenel.mag.Wellenaus}}$$

Abgestrahlte Leistung in $d\Omega = d\varphi \sin \theta d\theta$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \epsilon_0 c |\vec{E}|^2 w^2$$

\vec{S} gibt Leistung von Bewegung Q in Richtung $d\varphi, d\theta$ aus Sicht der Ladung.
 Suche: Leistung an Ort \vec{r} (ruhender Beobachter).

Leistung unterschiedlich da Art Dopplereffekt:

→ Abstände Wellentäler ändert sich

→ zusätzlicher Faktor

$$\frac{dP}{d\Omega} = \epsilon_0 c |\vec{E}|^2 w^2 \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}}{wc} \quad (\text{ohne Ableitung})$$

Betrachte 2 Spezialfälle:

i) \vec{a} parallel \vec{v}

$$\vec{u} \times \vec{a} = c(\vec{w} \times \vec{a}) \text{ und } \vec{w} \cdot \vec{u} = w(c - \vec{e}_w \vec{v})$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 c^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{\{\vec{e}_w \times (\vec{e}_w \times \vec{a})\}}{(c - \vec{e}_w \vec{v})^5} = \frac{q^2 |\vec{a}|^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)^5}$$

$\theta = \angle \vec{v}$, Beobachtungsrichtung

$v \rightarrow 0 : \sim \sin^2 \theta$ Senkrecht zu \vec{a}

$v \rightarrow \infty$: Nenner $\rightarrow 0$ für $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow$ Vorwärtsabstrahlung

$$\boxed{P = \int \frac{dP}{d\Omega} \Omega = \frac{q^2 c^2 \gamma^6}{6\pi \epsilon_0 c^3}}$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E_{\text{ges}}}{mc^2} \geq 1 \quad \beta = \frac{v}{c} \leq 1$$

Beachte: $\gamma^6 = (\frac{E}{m})^6$ Abhängigkeit

„Bremstrahlung“ wenn $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{v}$

Gleich für Beschleunigung und Abbremsung ($|\vec{a}|^2$)

[Folie: Bremsstrahlung in Materie] [Folie: Röntgenröhren]

- ii) $\vec{a} \perp \vec{v}$ $|\vec{v}| = \text{const.}$ Kreisbewegung
 $\vec{v} \sim \vec{e}_w$ und $\vec{a} \sim \vec{e}_x$ \vec{w} in Polarkoordinaten

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}$$

$$P = \frac{q^2 a^2 \gamma^4}{6\pi \epsilon_0 c^3}$$

„Synchrotronstrahlung“: 1964 erstmals an Kreisbeschleuniger beobachtet

- $\gamma^4 = (\frac{E}{m})^4$ Abhängigkeit
limitiert maximale Energie von Kreisförmigen $\frac{e^+}{e^-}$ -Beschleunigern
- Abstrahlungscharakteristik
 $\beta \approx 0 : \sim 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi$
 $\varphi = 0 : 1 - \sin^2 \theta$ (wieder $\perp \vec{a}$)
 $\varphi = 90^\circ : 1$
 $\varphi = 45^\circ : (\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}) 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta$
 $\beta \rightarrow 1 : \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3}$
Strahlung in Vorwärtsrichtung gebündelt
[Folie: Abstrahlung bei v senkrecht a]
[Folie: Kosmische Synchrotronstrahlung]
[Folie: Strahlentod der Atomen]

III.15 Wellen in Materie