

# Lineare Algebra II

Vorlesung von Prof. Dr. Amador Martin - Pizarro im  
Sommersemester 2018

Markus Österle  
Andrés Gockel

17.04.2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Wiederholung</b>	<b>9</b>
I.0.1	Def: Ringe . . . . .	9
I.0.2	Def: Integritätsbereich . . . . .	9
I.0.3	Def: Körper . . . . .	9
I.0.4	Bew: . . . . .	9
I.0.5	Bem: Ring Homomorphismus . . . . .	10
I.0.6	Bew: . . . . .	10
I.0.7	Def: Polynomring . . . . .	10
I.0.8	Bem: . . . . .	11
I.0.9	Satz:(Division mit Rest) . . . . .	11
I.0.10	Def: Teiler . . . . .	12
I.0.11	Def: Nullstelle . . . . .	12
I.0.12	Bem: Anzahl Nullstellen . . . . .	13
I.0.13	Bew: . . . . .	13
I.0.14	Def: Vielfachheit der Nullstellen . . . . .	13
I.0.15	Def: Algebraische Abgeschlossenheit . . . . .	13
I.0.16	Frage: . . . . .	13
I.0.17	Bem: . . . . .	14
I.0.18	Bem: Unendlichkeit . . . . .	14
I.0.19	Warum?: . . . . .	14
I.0.20	Bem: Algebraische Abgeschlossenheit . . . . .	14
I.0.21	Bew: . . . . .	14
I.0.22	Def: Vektorraum . . . . .	14
I.0.23	Bem: Untervektorräume . . . . .	15
I.0.24	Def: Lineare Unabhängigkeit . . . . .	15
I.0.25	Def: Basis = min. Erz. System . . . . .	16
I.0.26	Satz: Basisergänzungssatz . . . . .	16
I.0.27	Basisauswahlsatz . . . . .	16
I.0.28	Bem: Dimensions Addition . . . . .	16
I.0.29	Def: Direkte Summe . . . . .	16

I.0.30	Bsp:	17
I.0.31	Def: Lineare Abbildungen	17
I.0.32	Bem: Dimensionssatz	17
I.0.33	Bem: Isomorphie	17
I.0.34	Def: Rang	18
I.0.35	Satz: Basismatrix	18
I.0.36	Bew:	19
I.0.37	Def: Invertierbarkeit	19
I.0.38	Bem: Eindeutige Lösung	20
I.0.39	Bem: Zeilenoperationen	20
I.0.40	Def: Äquivalenz und Ähnlichkeit	22
I.0.41	Bem: Ähnlichkeit	22
I.0.42	Def: Determinante	22
I.0.43	Def: Darstellungsmatrix	23
I.0.44	Def: Adjunkte	24
I.0.45	Bem: Determinante und Adjunkte	24

## II Lineare Algebra II 25

II.0.1	Def: Diagonalisierbarkeit	25
II.0.2	Def: Eigenvektor	25
II.0.3	Def: Eigenraum	26
II.0.4	Bem: Eigenwert	26
II.0.5	Bem: Eigenwerte	26
II.0.6	Def: Diagonalisierbarkeit	26
II.0.7	Satz: Zu Eigenwerten	27
II.0.8	Def: Charakteristisches Polynom	27
II.0.9	Bem: Eigenwerte als Nullstellen	27
II.0.10	Bsp:	27
II.0.11	Bem: Spur	27
II.0.12	Kor: Anzahl der Eigenwerte	28
II.0.13	Kor: Diagonalisierbarkeit	28
II.0.14	Bew:	28
II.0.15	Bem: Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit	29
II.0.16	Kor: Geometrische Vielfachheit	29
II.0.17	Bsp:	29
II.0.18	Def: Algebraische Vielfachheit	30
II.0.19	Bem:	30
II.0.20	Bew:	30
II.0.21	Lemma:	31
II.0.22	Bew:	31
II.0.23	Bem:	31

II.0.24 Bem: Darstellungsmatrizen . . . . .	31
II.0.25 Satz: Diagonalisierbarkeit . . . . .	32
II.0.26 Bew: . . . . .	33
II.0.27 Def: Diag. und Ähnlichkeit . . . . .	34
II.0.28 Def: . . . . .	34
II.0.29 Satz: . . . . .	34
II.0.30 Kor: . . . . .	35
II.0.31 Bew: (Satz) . . . . .	35
II.0.32 Beh: . . . . .	36
II.0.33 Bew: . . . . .	36
II.0.34 Frage: . . . . .	36
II.0.35 Lemma: . . . . .	36
II.0.36 Bew: . . . . .	37
II.0.37 Satz: (Cayley - Hamilton) . . . . .	39
II.0.38 Bew: . . . . .	39
II.0.39 Kor: . . . . .	39
II.0.40 Satz: . . . . .	40
II.0.41 Satz: . . . . .	40
II.0.42 Satz: (Cayley-Hamilton) . . . . .	41
II.0.43 Kor: . . . . .	41
II.0.44 Satz: . . . . .	41
II.0.45 Def: . . . . .	41
II.0.46 Bew: . . . . .	41
II.0.47 Lemma: . . . . .	43
II.0.48 Bew: . . . . .	43
II.0.49 Satz: . . . . .	43
II.0.50 Bew: . . . . .	44
II.0.51 Bem: . . . . .	47
<b>III Die Jordansche Normalenform</b>	<b>48</b>
III.0.1 Lemma: . . . . .	48
III.0.2 Bsp: . . . . .	48
III.0.3 Def: Hauptraum . . . . .	48
III.0.4 Bem: . . . . .	49
III.0.5 Bem: . . . . .	49
III.0.6 Bew: . . . . .	49
III.0.7 Lemma: . . . . .	49
III.0.8 Bew: . . . . .	50
III.0.9 Bem: . . . . .	51
III.0.10 Lemma: . . . . .	51
III.0.11 Bew: . . . . .	51

III.0.12Beh	51
III.0.13Def:	53
III.0.14Lemma:	54
III.0.15Bew:	54
III.0.16Satz: Jorda-Charelley Zerlegung	55
III.0.17Bew:	56
III.0.18Def:	57
III.0.19Bem:	57
III.0.20Bew:	57
III.0.21Def:	58
III.0.22Satz:	58
III.0.23Bew:	58
III.0.24Satz:	59
III.0.25Kor:	59
III.0.26Beh:	59
III.0.27Bew:	60
III.0.28Folgerung	61
III.0.29Kor: Jordansche Normalform	61
III.0.30Bew:	62
III.0.31Beh:	62
<b>IV Dualität</b>	<b>64</b>
IV.0.1 Def:	64
IV.0.2 Def:	64
IV.0.3 Bew:	64
IV.0.4 Lemma:	65
IV.0.5 Bew:	65
IV.0.6 Korollar:	65
IV.0.7 Bew:	65
IV.0.8 Lemma:	66
IV.0.9 Bew:	66
IV.0.10Def:	67
IV.0.11Bew:	67
IV.0.12Bew:	68
IV.0.13Bew:	69
IV.0.14Korollar:	69
IV.0.15Bew:	70
IV.0.16Lemma:	71
IV.0.17Lemma:	71
IV.0.18Bew:	71
IV.1 Duale Paarung	73

IV.1.1	Def:	73
IV.1.2	Bem:	74
IV.1.3	Def:	74
IV.1.4	Lemma:	75
IV.1.5	Wiederholung	75
IV.1.6	Bew:	76
IV.1.7	Kor:	77
IV.1.8	Bew:	77
IV.1.9	Kor:	78
IV.1.10	Bew:	78
IV.1.11	Def:	78
IV.1.12	Bew:	79
IV.1.13	Lemma:	79
IV.1.14	wiederholung	79
IV.1.15	Def:	80
IV.1.16	Bew: Eindeutigkeit	80
IV.2	Euklidische Räume	81
IV.2.1	Def:	81
IV.2.2	Bew:	81
IV.2.3	Def:	82
IV.2.4	Def:	83
IV.2.5	Def:	84
IV.2.6	Def:	84
IV.2.7	Def: Norm	84
IV.2.8	Def:	85
IV.2.9	Lemma	85
IV.2.10	Bew:	85
IV.2.11	Folgerung:	86
IV.2.12	Bew:	86
IV.2.13	Def:	86
IV.2.14	Wiederholung	87
IV.3	Satz (Pythagoras)	87
IV.3.1	Bew:	88
IV.3.2	Def:	88
IV.4	Satz	88
IV.4.1	Kor:	90
IV.4.2	Bew:	90
IV.5	Kor: (Sylvester)	90
IV.5.1	Bew:	91
IV.5.2	Bew: falsch:	92
IV.5.3	Def:	92

IV.5.4	Wiederholung . . . . .	92
IV.5.5	Bew: Kor Sylvester . . . . .	93
<b>V</b>	<b>Unitäre Räume</b>	<b>94</b>
V.1	Def: . . . . .	94
V.1.1	Bem: . . . . .	94
V.1.2	Bew: . . . . .	94
V.1.3	Bem: . . . . .	95
V.2	Def: . . . . .	95
V.2.1	Bew: . . . . .	95
V.3	Lemma . . . . .	96
V.3.1	Bew: . . . . .	96
V.3.2	Satz: (Geom-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren) . . . . .	96
V.3.3	Bew: . . . . .	97
V.3.4	Kor: . . . . .	98
V.3.5	Bem: . . . . .	98
V.3.6	Def: . . . . .	98
V.3.7	Def: . . . . .	98
V.3.8	Bew: . . . . .	99
V.3.9	Satz: . . . . .	99
V.3.10	Bew: . . . . .	99
V.3.11	Lemma: . . . . .	100
V.3.12	Bew: . . . . .	100
V.3.13	Def: . . . . .	100
V.3.14	Satz: . . . . .	101
V.3.15	Bew: . . . . .	101
V.4	Selbsadjungierte Endomorphismen und Hauptachsentransformationen . . . . .	102
V.4.1	Def: . . . . .	103
V.4.2	Def: . . . . .	104
V.4.3	Lemma: . . . . .	104
V.4.4	Bew: . . . . .	105
V.4.5	Def: . . . . .	105
V.4.6	Prop: . . . . .	105
V.4.7	Bew: . . . . .	105
V.4.8	Def: . . . . .	106
V.4.9	Lemma: . . . . .	106
V.4.10	Bew: . . . . .	107
V.4.11	Satz: . . . . .	107
V.4.12	Bew: (satz) . . . . .	107

V.4.13	Beh:	108
V.4.14	Beh:	108
V.4.15	Bew:	108
V.4.16	Satz	109
V.4.17	Def:	110
V.4.18	Kor: Spektralsatz	110
V.4.19	Bew:	110
V.4.20	Bem:	111
V.4.21	Lemma:	111
V.4.22	Bew:	111
V.4.23	Satz: Hauptachsentransformation	111
V.4.24	Lemma 1:	111
V.4.25	Bew:	112
V.4.26	Lemma 2:	112
V.4.27	Bew:	112
V.4.28	Bew: Hauptachsentransformationssatz	112
V.4.29	Korollar:	113
V.4.30	Satz: Sylvester	113
V.4.31	Bew:	114
V.4.32	Kor: Spektralsatz	115
V.4.33	Bew:	115
V.4.34	Bew: Satz von Sylvester	115
V.5	Orthogonale Abbildungen und Drehungen	117
V.5.1	Def:	117
V.5.2	Lemma:	117
V.5.3	Bew:	118
V.5.4	Wiederholung:	119
V.5.5	Satz:	119
V.5.6	Bew:	119
V.5.7	Satz:	120
V.5.8	Bew:	120
V.5.9	Kor:	120
V.5.10	Bew:	120
V.5.11	Satz:	120
V.5.12	Bew:	121
V.5.13	Def:	121
V.5.14	Kor:	121
V.5.15	Bew:	122
V.5.16	Kor: zu irgendeinem Satz	122
V.5.17	Bew:	122
V.5.18	Def:	123



V.5.19	Prop:	123
V.5.20	Bew:	123
V.5.21	Kor:	123
V.5.22	Bew:	123
V.5.23	Def: Drehung	123
V.5.24	Satz:	124
V.5.25	Wid:	124
V.5.26	Bew: Satz	124
V.5.27	Satz:	125
V.5.28	Bew:	125
V.6	Multilineare Algebra	126
V.6.1	Def:	126
V.6.2	Satz:	127
V.6.3	Bew:	127
V.6.4	Bew:	128
V.6.5	Kor:	128
V.6.6	Kor:	128
V.6.7	Bew:	128
V.6.8	Bew:	129
V.6.9	Beh:	129
V.6.10	Lemma:	130
V.6.11	Bew:	130
V.6.12	Lemma:	130
V.6.13	Bew:	131

# Kapitel I

## Wiederholung

### I.0.1 Def: Ringe

Ein (kommutativer) Ring (mit Einselement) ist eine Menge zusammen mit zwei binären Operationen  $+$  und  $*$ , sodass:

- $(R, +, 0_R)$  ist eine abelsche Gruppe
- $(R, *, 1_R)$  ist eine kommutative Halbgruppe
- $(R, +, 0_R)$  die distributiven Gesetze:  
 $x(y + z) = xy + xz$   
 $(x + y)z = xz + yz$  gelten

### I.0.2 Def: Integritätsbereich

Ein Integritätsbereich ist ein Ring ohne Nullteiler

$$\forall x, y \in R \quad (x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } y = 0)$$

### I.0.3 Def: Körper

Ein Körper  $K$  ist ein Ring derart, dass:

- $1_K = 0_K$
- $\forall x \in K \setminus \{0\} \quad \exists x^{-1}x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1_K$

### I.0.4 Bew:

Körper sind Integritätsbereiche

### I.0.5 Bem: Ring Homomorphismus

Sei  $R$  ein nichttrivialer Ring ( $0_R \neq 1_R$ ),

$$\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow R, n \mapsto \begin{cases} 1_R + \dots + 1_R & n \geq 0 \\ -(1_R + \dots + 1_R) & n < 0 \end{cases}$$

$\varphi$  ist ein Ring Homomorphismus:

$$\ker(\varphi) = \{n \in \mathbb{Z} \mid \varphi(n) = 0\}$$

2 Möglichkeiten

a)  $\ker(\varphi) = 0$   $R$  hat Charakteristik 0

b)  $\ker(\varphi) \neq 0$

→ es existiert ein kleinstes positives Element  $p > 0$  in  $\ker(\varphi)$

### I.0.6 Bew:

$R$  Integritätsbereich  $\Rightarrow p$  eine Primzahl z.B.

$$\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$$

hat Charakteristik  $n$ .

Insbesondere enthält jeder Körper der Charakteristik  $p$  eine „Kopie“ von  $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$

$K$  Charakteristik  $p \Rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \xrightarrow{\text{injektiv}} K$

$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$  ist ein Körper:  $a \in \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow a$  und  $p$  sind teilerfremd

$$1 = a \cdot b + p \cdot m \Rightarrow 1 = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

### I.0.7 Def: Polynomring

Sei  $K$  ein Körper. Der Polynomring  $K[T]$  in einer Variable  $T$  über  $K$  ist die Menge formeller Summen der Form

$$g, f := \sum_{i=0}^n a_i \cdot T^i, \quad a_i \in K$$

$$\text{grad}(f) := \max\{i \mid a_i \neq 0\}$$

$$\text{grad}(0) := -1$$

### I.0.8 Bem:

$K[T]$  ist ein Integritätsbereich

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i \cdot T^i\right) + \left(\sum_{j=0}^m b_j \cdot T^j\right) = \sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} (a_k + b_k) \cdot T^k$$

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i \cdot T^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^m b_j \cdot T^j\right) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k \cdot T^k$$

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j$$

$f, g$  beide  $\neq 0$

$$\Rightarrow \text{grad}(f \cdot g) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$$

$f \cdot g \neq 0$

$$\text{grad}(f + g) \leq \max\{\text{grad}(f), \text{grad}(g)\}$$

### I.0.9 Satz:(Division mit Rest)

Gegeben  $f, g \in K[T]$

$\text{grad}(g) > 0$

Dann existieren eindeutige  $q, r \in K[T]$

sodass  $f = g \cdot q + r$

wobei  $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$  eindeutig

$$f = g \cdot q + r = g \cdot q' + r'$$

$$g \cdot (q - q') = r' - r$$

$$g \neq g'$$

$$\text{grad}(g \cdot (q - q')) = \text{grad}(r' - r) = \max\{\text{grad}(r'), \text{grad}(r)\} < \text{grad}(g)$$

$$\text{grad}(g \cdot (q - q')) \stackrel{q \neq q'}{=} \text{grad}(g) + \text{grad}(q - q')$$

$\Rightarrow$  Widerspruch (Wid) !

$$\Rightarrow q = q' \Rightarrow r = r'$$

### Existenz Beweis: Induktion auf $\text{grad}(f)$

I.A.:  $\text{grad}(f) = 0 \rightarrow f = g \cdot 0 + f$   
„n+1“  $\text{grad}(f) = n + 1$

$$\text{grad}(f) < \text{grad}(g) = m$$

$$\rightarrow f = g \cdot 0 + f$$

OBdA  $n + 1 = \text{grad}(f) \geq \text{grad}(g) = m > 0$   
 $f = a_{n+1} \cdot T^{n+1} + \tilde{f}$   
 $\text{grad}(\tilde{f}) \leq n$   
 $a_{n+1} \neq 0$   
Sei

$$f' := f - b_m^{-1} \cdot a_{n+1} \cdot T^{n+1-m} \cdot g$$

$$\Rightarrow \text{grad}(f') \leq n$$

$$g = \sum_{i=0}^m b_i \cdot T^i$$

$$\stackrel{\text{I.A.}}{\Rightarrow} f' = g \cdot q' + r'$$

$$f - b_m^{-1} a_{n+1} T^{n+1-m} \cdot g$$

$$\text{grad}(r') < \text{grad}(g)$$

$$\rightarrow f = g(\underbrace{b_m^{-1} a_m T^{n+1-m} + q'}_q) + r' = \text{grad}(r') < \text{grad}(g)$$

$$(r' = r)$$

### I.0.10 Def: Teiler

$f, g \in K[T]$   
 $\text{grad}(g) > 0$

$$g \text{ teilt } f \Leftrightarrow f = g \cdot q$$

$$(g|f) \ (r = 0)$$

### I.0.11 Def: Nullstelle

$f \in K[T]$  besitzt eine Nullstelle  $\lambda \in K$   
gdw (genau dann wenn)  $(T - \lambda)|f \Leftrightarrow f(\lambda) = 0$   
 $f = (T - \lambda)q + r$

### I.0.12 Bem: Anzahl Nullstellen

$$f \in K[T], \quad f \neq 0, \text{grad}(f) = n$$

Dann besitzt  $f$  höchstens  $n$  viele Nullstellen in  $K$ .

### I.0.13 Bew:

$$n = 0, f = a_0 \neq 0$$

$n > 0$  Falls  $f$  keine Nullstellen in  $K$  besitzt  $\Rightarrow$  Ok !

Sonst, bei  $\lambda \in K$  eine Nullstelle von  $f$ .

$$f = (T - \lambda) \cdot g$$

$$\text{grad}(g) = n - 1 < n$$

$\xrightarrow{\text{I.A.}}$  besitzt  $g$  höchstens  $n - 1$  viele Nullstellen.

Jede Nullstelle von  $f$  ist  $\lambda$  oder eine Nullstelle von  $g \Rightarrow f$  hat höchstens  $n$  viele Nullstellen.

### I.0.14 Def: Vielfachheit der Nullstellen

$f \in K[T], f \neq 0, \lambda \in K$  Nullstellen von  $f$

$$\rightarrow f = (T - \lambda)^{K_\lambda} \cdot g, \quad (g(\lambda) \neq 0)$$

( $K_\lambda$  ist die Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda$  in  $f$ )

### I.0.15 Def: Algebraische Abgeschlossenheit

Ein Körper heißt algebraisch abgeschlossen falls jedes Polynom über  $K$  positiven Grades eine Nullstelle in  $K$  besitzt.

### I.0.16 Frage:

Ist  $\mathbb{R}$  algebraisch abgeschlossen ?

Nein:  $T^2 + 1$

### **I.0.17 Bem:**

$\mathbb{C}$  ist algebraisch abgeschlossen

### **I.0.18 Bem: Unendlichkeit**

Jeder alg. abg. Körper muss unendlich sein!

### **I.0.19 Warum?:**

(Beweis läuft wie unendlichkeit der Primzahlen)

$$K = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

$$f = (T - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (T - \lambda_n) + 1$$

### **I.0.20 Bem: Algebraische Abgeschlossenheit**

$K$  ist genau dann alg. abg. wenn jedes Polynom  $f$  positiven Grades in lineare Faktoren zerfällt:

$$f = (T - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (T - \lambda_n) \in K$$

### **I.0.21 Bew:**

„ $\Leftarrow$ “ Trivial

„ $\Rightarrow$ “  $\text{grad}(f) = n > 0$

$$\rightarrow f = (T - \lambda_n) \cdot g$$

$$(\text{grad}(g) \leq n - 1 < n)$$

$$\stackrel{\text{I.A.}}{\rightarrow} g = c(T - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (T - \lambda_n)$$

$$\Rightarrow f = c(T - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (T - \lambda_n) \checkmark$$

### **I.0.22 Def: Vektorraum**

Vektorraum  $V$  über  $K$  ist eine abelsche Gruppe  $(V, +, 0_V)$  zusammen mit einer Verknüpfung

$$K \times V \mapsto V$$

$$(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$$

sodass:

$$1.) \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$$

$$2.) \lambda(\mu \cdot v) = \lambda\mu \cdot v$$

$$3.) (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$$

$$4.) 1_K \cdot v = v \quad \forall v \in V$$

Ein Untervektorraum  $U \subset V$  ist eine Untergruppe, welche unter Skalarmultiplikation, abg. ist.

### I.0.23 Bem: Untervektorräume

$\{U_i\}_{i \in I}$  Unterräume von  $V$

$\rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i$  ist auch ein Unterraum.

Insbesondere gegeben  $M \subset V$  existiert :

$\text{span}(M) = \langle M \rangle =$  der kleinste Untervektorraum von  $V$ , welcher  $M$  enthält

$$\text{span}(M) = \left\{ \sum_{i \in I}^n \lambda_i m_i, n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in K, m_i \in M \right\}$$

$M$  ist also ein erzeugendes System für  $\text{span}(M)$

$\{U_i\}_{i \in I}$  Unterräume von  $V$

$$\rightarrow \sum_{i \in I} U_i = \text{span}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right)$$

$$M_1 \subset M_2 \Rightarrow \text{span}(M_1) \subset \text{span}(M_2)$$

### I.0.24 Def: Lineare Unabhängigkeit

$V : VR/K$

$v_1, \dots, v_n \in V$  lin. unabh. falls  $\forall \lambda_1, \dots, \forall \lambda_n \in K :$

$$\sum \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

$M \subset V$  ist lin. unabh. falls jede endliche Teilmenge von  $M$  lin. unabh. oder äquivalent dazu sind. Falls kein Element  $m$  aus  $M$  sich schreiben lässt als linear kombination von  $M \setminus \{m\}$ .  $\lambda_i \neq 0$

$$\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \dots + \lambda_n m_n = 0 \Rightarrow m = \sum -\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) m_i$$



### I.0.25 Def: Basis = min. Erz. System

Eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  ist ein lin. unabh. erzeugendensystem von  $V$ , äquivalent dazu, wenn jedes Element von  $V$  sich eindeutig schreiben lässt als lin. kombi. von Elementen aus  $\mathcal{B}$ . Äquivalent dazu:  $\mathcal{B}$  ist min. Erzeugenden System, max. lin. unabh.

### I.0.26 Satz: Basisergänzungssatz

$M \subset V$  lin. unabh.  $\Rightarrow \exists \mathcal{B} \subset V$  Basis welche  $M$  enthält

Insbesondere hat jeder VR eine Basis „Je zwei Basen sind eine Bijektion“  
 $V$  ist endlichdimensional, falls  $V$  eine endliche Basis besitzt. Sonst ist  $V$  unendlichdimensional.

$$\dim(V) = |\mathcal{B}|$$

( $\mathcal{B}$  eine Basis)

### I.0.27 Basisauswahlsatz

$M \subset V$  erzeugendensystem  $\rightarrow \exists \mathcal{B} \subset M$  Basis von  $V$

### I.0.28 Bem: Dimensions Addition

$U \overset{UR}{\subset} V, \dim(V) < \infty \Rightarrow \dim(U) < \infty$  dim ist modular:

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$$

### I.0.29 Def: Direkte Summe

$$V = U_1 \oplus U_2 \quad \Leftrightarrow \quad V = U_1 + U_2 \text{ und } U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

$\oplus = \text{direkte Summe}$

$$V = \oplus_{i \in I} U_i \quad \Leftrightarrow \quad V = \sum_{i \in I} U_i \text{ und } \forall i \in I$$

Die Familie

$$\{U_i\}_{i \in I} \rightarrow U_i \cap \left( \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} U_j \right) = \{0\}$$

ist konversal.

### I.0.30 Bsp:

$K^2$  ist ein  $K - VR$ .

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1, e_2$$

$$U = \text{Span}(e_1) \rightarrow K^2 = U \oplus \text{Span}(e_2) = U \oplus \text{Span}(e_1, e_2)$$

### I.0.31 Def: Lineare Abbildungen

$F : V \rightarrow W$  ist linear, falls

$$D(\lambda v + \mu u) = \lambda F(v) + \mu F(u)$$

(F UR von V)

$$\text{Ker}(F) = \{v \in V | F(v) = 0\}$$

(F UR von W)

$$\text{Im}(F) = \{w \in W | \exists v \in V, F(v) = w\}$$

### I.0.32 Bem: Dimensionssatz

Falls  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$  ist  $\Rightarrow F(\mathcal{B})$  ist ein erzeugendensystem von  $\text{Im}(F)$

$$F \text{ injektiv} \Leftrightarrow \text{Ker}(F) = \{0\}$$

$V$  endlich

$$\rightarrow \dim(V) = \dim(\text{Ker}(F)) + \dim(\text{Im}(F))$$

$$V/\text{Ker}(F) \cong \text{Im}(F)$$

### I.0.33 Bem: Isomorphie

$V, W$  endlich  $\{r_1, \dots, r_n\}$  eine Basis von  $V$

$$V \cong K^n$$

$$v_i \mapsto e_i$$

$$F : V(\dim = n) \rightarrow W(\dim = m)$$

$$\begin{array}{ccc}
\{v_1, \dots, v_n\} & & \{w_1, \dots, w_m\} \\
V & \xrightarrow{F} & W \\
R & & R \\
K^n & & K^m \\
\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} & \rightarrow & A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}
\end{array}$$

Wie bekommt man die Matrix A ?

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

$$F(v_1) \dots F(v_n)$$

$$\begin{pmatrix} 1_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$  Matrix

### I.0.34 Def: Rang

$$\text{Rg}(A) = \dim(\text{Span}(\text{Spaltenvektorraum})) = \dim(\text{Span}(\text{Zeilenvektorraum}))$$

$F : V \rightarrow W$  linear

$$\text{Rg}(F) = \text{Rg}(A) = \dim(\text{Im}(F))$$

### I.0.35 Satz: Basismatrix

$V, W$  endlichdim.

Es existieren Basen  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$ ,  $\{w_1, \dots, w_m\}$  von  $W$ , sodass die Darstellungsmatrix von  $F$  die Form :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

hat.

### I.0.36 Bew:

Sei  $U = \text{Ker}(F)$  und wähle  $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $U$ .

Sei  $U'$  ein Komplement von  $U$  in  $V \rightarrow V = U \oplus U'$

Sei  $\{v_1, \dots, v_r\}$  eine Basis von  $U'$

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  ist eine Basis von  $V$

$\text{Im}(F)$  hat  $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$  als Basis

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i F(v_i) = 0$$

$$F\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \in U \cap U' = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i = 0 \quad \Rightarrow \underline{\lambda_i = \dots = \lambda_r = 0}$$

Ergänze  $\{F(v_1), \dots, F(v_r)\}$  zu einer Basis  $\mathcal{B}' = w_1, \dots, w_m$  Basis von  $W$

$$F(v_1) \dots F(v_r), F(v_{r+1}) \dots F(v_n)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

□

### I.0.37 Def: Invertierbarkeit

$A \in M_{n \times n}(K)$  ist invertierbar, falls es eine Matrix  $B \in M_{n \times n}(K)$  gibt, sodass:

$$B \cdot A = A \cdot B = E_n$$

$$GL(n, K) = GL_n(K) = \{A \in M_{n \times n}(K) \text{ invertierbar}\}$$

$GL_n(K)$  ist eine Gruppe

$$A \in GL_n(K) \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$$

also invertierbar  $\Leftrightarrow$  regulär

### I.0.38 Bem: Eindeutige Lösung

Wenn A regulär ist, dann besitzt ein Gleichungssystem

$$A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung:

$$A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

### I.0.39 Bem: Zeilenoperationen

A ist regulär gdw. A sich durch elementare zeilenoperationen in  $E_n$  überführen lässt.

$E_{ij} \leftarrow$  Die Matrix die 1 an der Stelle  $(i, j)$  hat und 0 sonst.

Multiplizieren der i-ten Zeile mit  $\lambda$

Addieren  $\lambda$  mal j-te Zeile zur i-ten Zeile  $= E_n + \lambda E_{ij}$

Vertauschen der i-ten Zeile mit der j-ten Zeile:  $E_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ji} + E_{ij}$

$$(A \mid E_n)$$

$$\hookrightarrow \text{Zeilenoperationen} \rightarrow (E_n \mid A^{-1})$$

$$\underbrace{B_n \cdot \dots \cdot B_2 \cdot B_1 \cdot A}_{A^{-1}} = E_n$$

Übergangsmatrizen:  $\dim(V) = n$

$$\{v_1, \dots, v_n\}$$

$$\{v'_j, \dots, v_n\}$$

$$v'_i = \sum S_{ij} v_{ji}$$

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{1j} \\ S_{i1} & S_{ij} \end{pmatrix}$$

Vektorraum  $V/K \rightarrow \mathcal{B}$  Basis  
 $V$  ist endlich, falls es eine endliche Basis besitzt.

$$\dim(V) = |\mathcal{B}|$$

$$F : V \rightarrow W$$

$F$ : lineare Abbildung

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$$

Basis von  $V$

$$\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$$

Basis von  $W$

$$F(v_1), \dots, F(v_n)$$

$$F(v_j) = \sum_{ij} w_i$$

sind lin. unabh. von der Basis von  $W$   $F$  hat Darstellungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$V \mapsto V$$

$$v_i \mapsto v'_i$$

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \quad \mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$$

$$S = (s_{ij}) \rightarrow v'_j = \sum s_{ij} v_i \in K$$

Transformationsmatrix von  $\mathcal{B}'$  nach  $\mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$S^{-1}$  ist die Transformationsmatrix von  $\mathcal{B}$  nach  $\mathcal{B}'$

$$V \xrightarrow{F} W$$

$$\begin{array}{ccc} \{v_1, \dots, v_n\} & \xrightarrow{A} & \{w_1, \dots, w_n\} \\ \uparrow S & & \uparrow T \\ \{v'_1, \dots, v'_n\} & \xrightarrow{D} & \{w'_1, \dots, w'_n\} \end{array}$$

Wie sieht die Darstellungsmatrix von F bzgl. diesen Matrizen aus?  
Darstellungsmatrix von F bzgl.  $\{v'_1, \dots, v'_n\}, \{w'_1, \dots, w'_n\}$  ist  $T^{-1} \cdot A \cdot S$ .

### I.0.40 Def: Äquivalenz und Ähnlichkeit

Zwei  $(m \times n)$ -Matrizen  $A, A'$  sind äquivalent, falls es reguläre Matrizen  $T \in GL_m(K), S \in GL_n(K)$  gibt, sodass:

$$A' = T^{-1} \cdot A \cdot S$$

$A, A' \in M_{n \times n}(K)$  sind ähnlich, falls es  $S \in GL_n(K)$  gibt, sodass:

$$A' = S^{-1} \cdot A \cdot S$$

### I.0.41 Bem: Ähnlichkeit

Ähnlichkeit (Än) auf  $M_{n \times n}(K) \Rightarrow$  Äquivalenz (Äq) auf  $M_{m \times n}(K)$

### I.0.42 Def: Determinante

Die Determinante

$$\det(K^n) \mapsto K$$

multilineare alternierende Abbildung derart, dass  $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$ .

$$A \in M_{n \times n}(K)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & | & a_2 & | & \dots & | & a_n \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det(a_1, \dots, a_n)$$

$$A = (a_{ij})$$

$$\det(A) = \sum_{\substack{\pi \in \\ \underbrace{S_n}_{B_{ij}(\{1, \dots, n\})}}} \text{sign}(\pi) \cdot \prod_{i=1}^n a_{\pi(i)i}$$

$sign(\pi)$  (-1) Anzahl von Fehlständen  $\{(ij)|i < j, \pi(i) > \pi(j)\}$ ,  
 (-1) Anzahl von Faktoren von  $\pi$  als Produkt von Transpositionen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

derlineEigenschaften

- 1)  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
  - 2)  $A$  invertierbar genau dann wenn  $\det(A) \neq 0$
  - 3)  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
  - 4)  $\det(A^T) = \det(A)$
- $\parallel$   
 $(a_{ji})$   
 $E_n + (-E_n)$  ist nicht invertierbar.

Laplascher Entwicklungssatz

Sei  $j_0$  ein Spaltenindex,  $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j_0} a_{ij_0} \det(A_{j_0})$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Cramersche Regel

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b$$

Falls A regulär ist, dann gibt es eine einzige Lösung zum System:

$$x_j = \frac{\det(a_i, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_n)}{\det(A)}$$

### I.0.43 Def: Darstellungsmatrix

$\det(F) = \det(a)$ , Darstellungsmatrix von F bzgl. der Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$



### I.0.44 Def: Adjunkte

Sei  $A (= a_{ij})$  eine  $n \times n$ -Matrix  
definiere die Adjunkte von  $A$ ,

$$\text{adj}(A) = (\gamma_{ij})$$

wobei

$$\gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

### I.0.45 Bem: Determinante und Adjunkte

Sei  $c_j$  die  $j$ -te Zeile von  $\text{adj}(A)$ .

Sei  $a_i$  die  $i$ -te Spalte von  $A$

$$\begin{aligned} \overbrace{(\gamma_{j1}, \dots, \gamma_{jn})}^{c_j} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}}_{a_i} &= \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} a_{ki} = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{ki} \det(A_{jk}) \\ &= \det(a_1, \dots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

$$(\text{Laplacesche Entwicklung}) = \begin{cases} \det(A) & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

$A$  regulär:

$$\begin{aligned} \text{adj}(A) \cdot A &= \det(A) \cdot E_n \\ \Rightarrow \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} \cdot A &= E_n = A^{-1} \cdot A \\ \Rightarrow \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} &= A^{-1} \quad \Rightarrow \quad A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot E_n \end{aligned}$$

# Kapitel II

## Lineare Algebra II

### II.0.1 Def: Diagonalisierbarkeit

$V$  Vektorraum

$\{U_i\}_{i=1}^k$  Unterräume von  $V$

$$V = \bigoplus_{i=1}^k U_i \Leftrightarrow \begin{cases} V = \sum_{i=1}^n U_i & 1 \leq i \leq k \\ U_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k U_j = \{0\} \end{cases}$$

Äquivalent dazu, wenn jeder Vektor  $v \in V$  sich eindeutig schreiben lässt als linear kombination von den Vektoren

$$\bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_j$$

$\mathcal{B}$  ist Basis von  $v_j$

### II.0.2 Def: Eigenvektor

Ein Endomorphismus

$$F : V \rightarrow V$$

besitzt einen Eigenvektor, falls es  $v \in V \setminus \{0\}$  derart gibt, dass  $F(v) = \lambda \cdot v$  für ein  $\lambda \in K$

Falls  $F(v) = \lambda \cdot v$

$\lambda$  ist eindeutig bestimmt von  $F$  und  $v \Rightarrow \lambda$  ist Eigenwert von  $F$

$$F(v) = \mu \cdot v = \lambda \cdot v \Rightarrow (\lambda - \mu) \cdot v = 0$$

### II.0.3 Def: Eigenraum

$\lambda \in K$   $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus

$$V(\lambda) = \{v \in V | F(v) = \lambda \cdot v\}$$

$V(\lambda)$  ist Eigenraum zum Wert  $\lambda$   
und ist ein Unterraum

### II.0.4 Bem: Eigenwert

$\lambda$  ist ein Eigenwert von  $F$  gdw.  $\dim(V(\lambda)) \geq 1$ .

### II.0.5 Bem: Eigenwerte

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$  verschiedene Eigenwerte von  $F$

$$\rightarrow V(\lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k V(\lambda_j) = \{0\}$$

### II.0.6 Def: Diagonalisierbarkeit

$V$  endlich VR /  $K$   $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus ( bzw. eine Matrix  $A = K^n \rightarrow K^n$ ) ist diagonalisierbar, falls

$$V = \bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$  verschiedene Eigenwerte von  $F$

Äquivalent dazu, wenn  $V$  eine Basis von Eigenvektoren von  $F$  besitzt. Äquivalent dazu, wenn  $F$  bzgl. einer Basis von  $V$  die Darstellungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

hat.

Für Matrizen:

$A$  ist diagonalisierbar genau dann wenn es eine reguläre Matrix  $S$  gibt, sodass

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

### II.0.7 Satz: Zu Eigenwerten

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$$

$$\lambda \in K$$

$\lambda$  ist ein Eigenwert von  $A$  genau dann wenn

$$\lambda E_n - A \text{ nicht regulär ist} \Leftrightarrow \det(\lambda \cdot E_n - A) = 0$$

### II.0.8 Def: Charakteristisches Polynom

Das charakteristische Polynom einer Matrix

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$$

ist

$$\chi_A(T) = \det(T \cdot E_n - A)$$

### II.0.9 Bem: Eigenwerte als Nullstellen

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } A \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$$

### II.0.10 Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$\chi_A(T) = T^2 + 1 = \det \begin{pmatrix} T & -1 \\ 1 & T \end{pmatrix} (= T \cdot E_2 - A)$$

### II.0.11 Bem: Spur

$$A \text{ und } A' \text{ ähnlich } A' = S^{-1}AS$$

$$\Rightarrow \chi_A(T) = \chi_{A'}(T)$$

Insbesondere, können wir über das charakteristische Polynom eines Endomorphismus

$$\chi_F(T) \quad F : V \rightarrow V$$

sagen:

$$(a_{ij}) = A \in M_{n \times n}(K)$$

$$\chi_A(T) = T^n + b_{n-1}T^{n-1} + \dots + b_0$$

wobei

$$b_0 = (-1)^n \det(A)$$

$$b_{n-1} = -\text{Tr}(A) = -\sum_{i=1}^n a_{i(i \text{ oder } j)}$$

Tr = Trace = Spur von A

## II.0.12 Kor: Anzahl der Eigenwerte

$\dim(V) = n$

Ein Endomorphismus

$$F : V \rightarrow V$$

kann höchstens n viele Eigenwerte besitzen.

## II.0.13 Kor: Diagonalisierbarkeit

$$F : V \rightarrow V$$

mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$  ist diagonalisierbar gdw.

$$n = \sum_{i=1}^k d_i$$

$$d_i = \dim(V(\lambda_i)) = \{v \in V \mid F(v) = \lambda \cdot v\}$$

$d_i$  = geometrische Vielfachheit von  $\lambda_i$

## II.0.14 Bew:

$\Rightarrow$

F ist diag. gdw. V eine Basis aus Eigenvektoren besitzt, welche aus

$$n = |B| = \bigcup_{i=1}^n |\mathcal{B}_i| \quad \mathcal{B}_i = \text{Basis von } V(\lambda_i)$$

$$|\mathcal{B}_i| = d_i = \dim(V(\lambda_i))$$

$\Leftarrow$

$$n = \sum d_i \Rightarrow \dim(\sum_{i=1}^k V(\lambda_i)) = n \Rightarrow V = \sum_{i=1}^k V(\lambda_i)$$

Da die Eigenräume transversal sind, und ein Vektorraum nur einen UVR der dimension  $\dim(V)$  hat, sich selbst.

□

## II.0.15 Bem: Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $0 \neq v \in V$  ist ein Eigenvektor für  $F$

$$F(v) = \lambda v, \lambda \in K$$

$$V(\lambda) = \{v \in V | F(v) = \lambda v\}$$

$\lambda$  ist Eigenwert  $\Leftrightarrow \dim(V(\lambda)) = 1$

$V(\lambda) = \ker(F - \lambda Id_V)$   $F$  ist diagonalisierbar wenn  $V$  eine Basis von Eigenvektoren besitzt.

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(T) = \det(T \cdot E_n - A)$$

$$A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K) = T^n + b_{n-1}T^{n-1} + \dots + b_0 \text{ normiert}$$

$$\lambda \in K \text{ ist } \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \text{ Eigenwert von } A$$

## II.0.16 Kor: Geometrische Vielfachheit

$F : V \rightarrow V$  ist diagonalisierbar  $\Leftrightarrow$  geometrische Vielfachheit von Eigenwert  $n = \dim(V) = \sum_{i=1}^k \dim(V(\lambda_i)) = \lambda_1 \dots \lambda_k$  sind die Eigenwerte von  $F$

## II.0.17 Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(K)$$

$$\chi_A(T) = \det \begin{pmatrix} T & -1 \\ 0 & T \end{pmatrix} = T^2$$

0 ist der einzige Eigenwert von A,  
A ist diagonalisierbar gdw.

$$2 = \dim(\ker(A))$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \quad 2 \neq 1 \Rightarrow A \text{ ist nicht diagonalisierbar}$$

$$\Rightarrow \dim(\ker(A)) = 1$$

### II.0.18 Def: Algebraische Vielfachheit

$\dim(V) < \infty$   $F: V \rightarrow V$  Endomorphismus  
 $\lambda \in K$  Eigenwert

$$\Rightarrow \chi_F(\lambda) = 0$$

algebraische Vielfachheit von  $\lambda$   $K = \text{ord}_\lambda(F)$

$$\chi_F(T) = (T - \lambda) \cdot G(T) \quad G(T) = 0$$

### II.0.19 Bem:

$$\text{ord}_\lambda(F) \geq \dim V(\lambda)$$

### II.0.20 Bew:

Sei  $\{v_1, \dots, v_k\}$  Basis von  $V(\lambda)$  und erweitern sie zu einer Basis  
 $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$  von  $V$ .

Die Darstellungsmatrix von  $F$  bzgl.  $\mathcal{B}$

$$F(v_1) \dots F(v_k), F(v_{k+1}) \dots F(v_n)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & & \\ 0 & \lambda & 0 & & C_2 \\ 0 & 0 & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & C_1 \end{pmatrix}$$

$$C_1(\text{vllt. } C_2) \in \text{Mat}_{n-k \times k}(K)$$

$$\chi_{F(\text{vllt}|U)}(T) = \det(T E_n - M) = (T - \lambda)^k \cdot \underbrace{\det(T E_{n-k} \cdot C_1)}_{H(\lambda)}$$

$$\Rightarrow k = \text{ord}_\lambda(F)$$

(weil es sein könnte, dass  $H(\lambda) = 0$ )

□

### II.0.21 Lemma:

Sei  $V$  endlichdim.  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  
 $U \subset V$   $F$ -invarianter Unterraum ( $F(U) \subset U$ )

$$\begin{aligned}\tilde{F} : V/U &\rightarrow V/U \quad \text{lineare Abbildung} \\ \bar{v} &\mapsto \overline{F(v)}\end{aligned}$$

$\tilde{F}$  ist wohldefiniert und ferner

$$\chi_F(T) = \chi_{F|U}(T) \cdot \chi_{\tilde{F}}(T)$$

### II.0.22 Bew:

$\tilde{F}$  ist wohldefiniert:

$$\bar{v}_1 = \bar{v} \stackrel{\text{zu zeigen}}{\Rightarrow} \overline{F(v)} = \tilde{F}(v_1) = \tilde{F}(v) = \overline{F(v)}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow v_1 &= v + \underbrace{(v_1 - v)}_{\in U} \\ F(v_1) &= F(v) + \underbrace{F(v_1 - v)}_{\in U} \\ \Rightarrow \overline{F(v_1)} &= \overline{F(v)}\end{aligned}$$

Restklassen sind linear und  $\tilde{F}$  ist linear  $\Rightarrow \tilde{F}$  ist linear Sei  $\{u_1, \dots, u_k\}$  eine Basis von  $U$  und erweitere sie zu einer Basis  $\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$  von  $V$ .

### II.0.23 Bem:

$\{\overline{v_{k+1}}, \dots, \overline{v_n}\}$  ist eine Basis von  $V/U$

### II.0.24 Bem: Darstellungsmatrizen

Einfach Darstellungsmatrix von  $F$  bzgl.  $\mathcal{B}$ .



$$F(u_1) \dots F(u_k), F(v_{k+1}) \dots F(v_n)$$

$$\begin{array}{lcl} u & \rightarrow & \\ \vdots & & \\ u_k & \rightarrow & \\ v_{k+1} & \rightarrow & \\ \vdots & & \\ v_n & \rightarrow & \end{array} \left( \begin{array}{ccc} & A & C_2 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ C_1 \\ \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \chi_F(T) &= \det(T \cdot E_n - H) \\ &= \det \left( T \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & C_2 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} TE_k - A & -C_2 \\ 0 & TE_{n-k} - C_1 \end{pmatrix} \\ &= \det(TE_k - A) \cdot \det(TE_{n-k} - C_1) \end{aligned}$$

A ist die Darstellungsmatrix von  $F|_U$  bzgl.  $\{u_1, \dots, u_k\}$

$$\Rightarrow \det(TE_k - A) = \chi_{F|_U}(T)$$

$C_j$  ist die Darstellungsmatrix von  $\tilde{F}$  bzgl.  $\{\overline{v_{k+1}}, \dots, \overline{v_n}\}$

$$\Rightarrow \det(TE_{n-k} - A) = \chi_{\tilde{F}}(T)$$

## II.0.25 Satz: Diagonalisierbarkeit

$\dim(V) < \infty$   $K$  Körper

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus

F ist diagonalisierbar gdw.  $\chi_F(T)$  in linearfaktoren zerfällt

$$\chi_F(T) = (T - \lambda_1)^k \dots (T - \lambda_r)^{k_r}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r =$  Nullstellen (verschwinden) und für jeden Faktor  $T - \lambda_i$  gilt:

$$\text{ord}_{\lambda_i}(F) = \dim(V(\lambda_i))$$

## II.0.26 Bew:

$\Rightarrow$  Sei  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von Eigenvektoren.  
Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  die verschwindenden Eigenwerte.

$$v_1, \dots, v_{\alpha_1} \in V(\lambda_1)$$

$$v_{\alpha_1+1}, \dots, v_{\alpha_1+\alpha_2} \in V(\lambda_2)$$

$$v_{d_1} + \dots + v_{d_{r-1}}, \dots, \underbrace{v_{d_1} + \dots + d_r}_{n} d_i = \dim(V(\lambda_i)) \text{ Die Darstellungsmatrix}$$

von F bzgl.  $\mathcal{B}$

$$F(v_1) \dots F(v_d), F(v_{d+1}) \dots F(v_n)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_2 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_r \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix} \begin{matrix} \} d_1 \\ \\ \\ \} d_2 \\ \\ \\ \} d_r \end{matrix}$$

Wobei  $d_i$  viele  $\lambda_i$  auf der Diagonalen liegen

$$\chi_F(T) = \det(T E_n - A) = (T - \lambda_1)^{d_1} \dots \underbrace{(T - \lambda_r)^{d_r}}_{a(T)}$$

$$a_q(\lambda_1) \neq 0 \quad (\lambda \neq \lambda_i, i \neq 1)$$

$\Leftarrow$

$$\chi_F(T) = (T - \lambda_1)^{d_1} \dots (T - \lambda_r)^{d_r}$$

$$(\text{Grad}(\chi_F) = n)$$

$$d_i = \dim(V(\lambda_i))$$

$$F \text{ ist diagonalisierbar} \Leftrightarrow n = \dim(V) = \sum d_i$$

## II.0.27 Def: Diag. und Ähnlichkeit

Eine Matrix  $A \in M_{n \times n}(K)$  ist trigonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

endlichdim VR / K  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  
 $A$  Darstellungsmatrix bzw.  $B$

$$\chi_F(T) = \det(T \cdot E_n - A)$$

normiert

$$\chi_F(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \text{ Eigenwerte von } F \Leftrightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} F(v) = \lambda \cdot v$$

$U \subset V$  Untervektorraum  $F$ -invariant ( $F(U) \subset U$ )

$$\chi_F = \chi_{F|U} \cdot \chi_{\tilde{F}}$$

$$\tilde{F} : V/U \rightarrow V/U$$

$$\bar{v} \mapsto \overline{F(v)}$$

$F$  ist dia/tri ? gonalisierbar  $\Leftrightarrow \chi_A$  in Linearfaktoren zerfällt und  $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_k$  Eigenwerte

$$\dim(V(\chi)) = \text{ord}_{\lambda_i}(\chi_F)$$

## II.0.28 Def:

$$F : V \rightarrow V$$

$F$  trigonalisierbar ist, falls es eine Darstellungsmatrix von  $F$  gibt, welche in oberer Dreiecksform ist.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

## II.0.29 Satz:

$F : V \rightarrow V$  ist trigonalisierbar, gdw  $\chi_F$  in Linearfaktoren zerfällt

$$\chi_F(T) = (T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$$

(eventuell mit Wiederholungen)

### II.0.30 Kor:

Jeder Endomorphismus eines endlichdim VR über einem alg. abg. Körper (z.B.  $\mathbb{C}$ ) ist trigonalisierbar.

### II.0.31 Bew: (Satz)

$\Rightarrow$

F ist Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$\chi_F(T) = \det(T \cdot E_n - A) = \prod_{i=1}^n (T - a_{ii})$$

$\Leftarrow$

Induktion über  $n = \dim(V)$

$n = 1 \rightarrow$  Jede  $1 \times 1$  Matrix ist in oberer Dreiecksform  $\rightarrow a_n !$

$n \geq 2$

$$\chi_F(T) = (T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$$

$\lambda_1$  ist ein Eigenwert

$$\rightarrow \exists v_1 \in V \setminus \{0\} \quad F(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1$$

$$U = \text{span}(v_1) \subset V$$

ist F-invariant

$$\begin{array}{ccc} \chi_F(T) & = & \chi_{F|U} \cdot \chi_{\tilde{F}} \\ \parallel & & \parallel \\ (T - \lambda_1) \prod_{i=2}^n (T - \lambda_i) & & (T - \lambda_1) \end{array}$$

$K[T]$  ist ein Integritätsbereich

$$\Rightarrow \chi_{\tilde{F}}(T) = \prod_{i=2}^n (T - \lambda_i)$$

$$\dim(V/U) < \dim(V)$$

$\Downarrow$  I.A. Es gibt eine Basis  $\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$  von  $V/U$  derart, dass  $\tilde{F}$  bzgl. dieser Basis Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix} = (\mu_{ij})$$

### II.0.32 Beh:

Seien  $v_i \in V$   $\bar{v}_i = \overline{v_i}$ ,  $2 \leq i \leq n$   
 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ist eine Basis von  $V$

### II.0.33 Bew:

(Übungsaufgabe)

### II.0.34 Frage:

Wie sieht die Darstellungsmatrix von  $F$  bezüglich  $\{v_1, \dots, v_n\}$  aus?

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\bar{v}_j) &= \overline{F(v_j)} \\ \Rightarrow \sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} \bar{v}_i &= \overline{\sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} v_i} \\ \Rightarrow \mu_{ij} \in K |_{F(v_j)} &= \mu_{2j} v_1 + \sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} v_j = \sum_{1 \leq i \leq j} \mu_{ij} v_j \\ F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_n) \\ &\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_{12} & \cdots & * \\ & \lambda_2 & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

### II.0.35 Lemma:

$V$  endlichdim /  $K$   
 $v \in V \setminus \{0\} \quad \exists r \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{c} F^r(v) \\ \parallel \\ \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_{r \text{ Mal}} \end{array} = \sum_{i=0}^{r-1} \underbrace{a_i}_{\substack{\text{eindeutig} \\ \text{bestimmt}}} F^i(v)$$

Insb. ist

$$U = \text{Span}(v, F(v), \dots, F^{n-1}(v))$$

ist  $F$ -invariant, hat Basis  $\{v_1, \dots, F^{n-1}(v)\}$   
 $F|_U$  hat Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_1 \\ & 1 & 0 & \dots & a_2 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & a_{r-1} \end{pmatrix}$$

$$\chi_{F|U}(T) = T^r - a_{r-1}T^{r-1} \dots - a_0$$

### II.0.36 Bew:

$n = \dim(V)$   $v, F(v), \dots, F^r(v)$  lin. unabh.

Sei  $r > 0$  kleinste rat. Zahl, sodass:  $v, F(v), \dots, F^r(v)$  lin. abh.

$$v, F(v), \dots, F^{r-1}(v)$$

lin. unabh. (aus der Minimalität von r)

⇓ Austauschprinzip:

$$F^r(v) = \sum_{i=0}^{r-1} \underbrace{a_i}_{\substack{\text{eindeutig} \\ \text{bestimmt}}} F^i(v)$$

$$U = \text{Span}(v, F(v), \dots, F^{r-1}(v)) \quad \text{ist } F\text{-invariant}$$

$$v \in U \quad v = \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i F^i(v)$$

$$F(v) = \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i F^{i+1}(v)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i F^{i+1}(v) \\ &= \underbrace{\sum_{i=0}^{r-2} \mu_i F^{i+1}(v)}_{\in U} + \underbrace{\mu_{r-1} \overbrace{F^r(v)}^{\sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v)}}_{\in U} \end{aligned}$$

$\{v, F(v), \dots, F^{r-1}(v)\}$  ist eine Basis von U.

$$F(v), \dots, \overbrace{F(F^{r-1}(v))}^{F^r(v)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & & a_1 \\ & 1 & 0 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & a_{r-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_{F|U}(T) &= \det(T \cdot E_n - A) \\ &= \det \begin{pmatrix} T & 0 & \dots & a_0 \\ -1 & T & & 0 \\ & -1 & T & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T - a_{r-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Laplacescher Entwicklungssatz nach der r-ten Spalte)

$$\begin{aligned} &= (-1)^{r+1}(-a_0) \det \begin{pmatrix} -1 & T & & \\ & -1 & T & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^T \end{pmatrix} + \\ &+ (-1)^{r+2}(-a_1) \det \begin{pmatrix} -1 & T & & \\ & -1 & T & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^T \end{pmatrix} + \dots + \\ &+ (-1)^{2r}(T - a_{r-1}) \det \begin{pmatrix} -1 & T & & \\ & -1 & T & \\ & & \ddots & \\ & & & T \end{pmatrix} \\ &= (-1)^r a_0 (-1)^{r-1} a_1 + (-1)^{r+1} a_1 T (-1)^{r-1} + \dots + (-1)^{2r} (T - a_{r-1}) T^{r-1} \\ &= -a_0 - a_1 T - \dots - a_{r-1} T^{r-1} + T^r \end{aligned}$$

## Notation

$$\begin{aligned} P(T) &\in K[T] \\ &\parallel \\ &\sum_{i=0}^m a_i T^i \end{aligned}$$

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus

$P(F) : V \rightarrow V$

$v \mapsto \sum_{i=0}^m a_i F^i(v)$

Mit dieser Notation haben wir, das im vorherigen Lemma

$$\chi_{F|U}(v) = F^r(v) - \sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v) = 0$$

### II.0.37 Satz: (Cayley - Hamilton)

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus endlichdim.  $\chi_F(F)$  ist der 0 Endomorphismus auf  $V$

### II.0.38 Bew:

Zu Zeigen:  $\forall v \in V : \chi_F(F)(v) = 0$

$v = 0 \rightarrow \text{ok}$

sonst  $v \neq 0 \rightarrow \exists r \in \mathbb{N}$

$$U = \text{Span}(v, F(v), \dots, F^{r-1}(v))$$

ist  $F$  in  $V$   $U$   $F$ -invariant

$$\Rightarrow \chi_F = \chi_{F|U} \cdot \chi_{\tilde{F}} = \chi_{\tilde{F}} \cdot \chi_{F|U}$$

$\tilde{F} : V/U \rightarrow V/U$

$\bar{w} \mapsto \tilde{F}(\bar{w})$

Aufgabe

$R(T) = P \cdot C$  allg. Polynom  $\Rightarrow R(F) = P \cdot (G(F))$  als Endomorphismen

$$\chi_F(F)(v) = \underbrace{\chi_{\tilde{F}} \cdot \underbrace{(\chi_{F|U}(v))}_{\substack{\parallel \\ 0}}}_{\substack{\parallel \\ 0}}$$

### II.0.39 Kor:

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$

$$\chi_A(T) = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i T^i$$



$$\Rightarrow A^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot A^i = 0$$

da  $n \times n$  Matrix

#### II.0.40 Satz:

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $V$  endlichdim. /K

Dann existiert genau ein normierter Polynom kleinsten Grades  $m_F$  derart, dass  $\forall P \in K[T]$

$$m_F|_P \Leftrightarrow P(T) = 0 \quad \text{als Endomorphismus von } F$$

Insb. gilt  $m_F(F) = 0$

Das Polynom  $m_F (= \mu_F)$  heißt das minimalpolynom von F.

#### II.0.41 Satz:

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $V$  endlich dim. und trigonalisierbar falls es eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  gibt, sodass  $F$  Darstellungsmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

Falls  $\chi_F(T)$  in Linearfaktoren zerfällt dann ist  $F$  trigonalisierbar (Insb. falls  $K$  alg. abg. ist z.B.  $\mathbb{C}$ )

$$F^0 = Id_v$$

$$F^i = \underbrace{F \circ \dots \circ F}_{i \text{ mal}}$$

$$P \in k[T] \quad P = \sum_{i=0}^m T^i$$

$$P(F) : \sum a_i F^i : V \rightarrow V, v \mapsto \sum a_i F^i(v)$$

Aufgabe:

komposition des Endomorphismus ... Produkt im Polynom

$$P(F) \circ f(F) = (P \cdot G)(F)$$

### II.0.42 Satz: (Caley-Hamilton)

$$\chi_F(F) = 0_{iv}$$

als Endomorphismus

### II.0.43 Kor:

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$$

$$\chi_A(T) = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i T^i$$

$$\Rightarrow A^n + b_{n-1}A^{n-1} + \dots + b_0 E_n = 0$$

### II.0.44 Satz:

Vendlichdim/ $KF : V \rightarrow V$  Endomorphismus Dann existiert genau ein normiertes Polynom  $m_F(T)$  derart, dass  $\forall P \in K[T]$ :

$$m_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0$$

### II.0.45 Def:

Das Polynom  $m_F(T)$  heißt das Minimalpolynom von F. Insb.  $m_F(F) = 0$

### II.0.46 Bew:

Sei

$$\mathcal{F} = \{P \in K[T] \text{ normiert} \mid P(F) = 0 \text{ als Endomorphismus}\}$$

Caley.Hamilton

$$\chi_F(T) \in \mathcal{F} \neq \emptyset$$

Sei  $m_F(T) \in \mathcal{F}$  Polynom kleinsten Grades.

Zu Zeigen:  $\forall P \in K[T]$

$$m_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0$$

$\Rightarrow$

$$m_F|_P \Leftrightarrow \exists G \in K[T] \quad P = G \cdot m_F$$

$$P(F) = G(F) \circ \underbrace{m_F(F)}_{=0(m_F(F) \in \mathcal{F})} = 0$$

$\Leftarrow$

Sei  $P \in K[T] \mid P(F) = 0$

Division mit Rest  $\rightarrow \exists G \in K[T] \stackrel{r}{P} = G \cdot m_F + r \quad \text{grad}(r) < \text{grad}(m_F)$

$$0 = P(F) = G(F) \circ \underbrace{m_F(F)}_{\substack{\parallel \\ 0}} + r(F)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\parallel \\ 0}}$$

$\Rightarrow r(F) = 0$  als Endomorphismus

$\Rightarrow r = 0$  ( Sonst  $\frac{1}{a_{(\text{grad}(r))}} \cdot r(T) \in \mathcal{F}$ ) Eindeutigkeit

Angenommen  $m'_F$  ist normiert. wäre auch so:

$$m'_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0 \forall P \in K[T]$$

$$\Rightarrow m_F|_{m'_F} \quad \& \quad m'_F|_{m_F}$$

$$\left. \begin{array}{l} m_F = Q \cdot m'_F \\ m'_F = H \cdot m_F \end{array} \right\} \rightarrow Q, H \text{ sind beide } \underline{\text{normiert}}$$

Zu zeigen:  $Q = H = 1$

$$m_F = Q \cdot m'_F = Q \cdot H \cdot m_F$$

$K[T]$  Integritätsbereich

$$\Rightarrow 1 = Q \cdot H$$

$$\text{grad}(G \cdot H) = \text{grad}(1) = 0$$

$$\text{grad}(G) + \text{grad}(H) \Rightarrow G, H \in K \text{ und normiert}$$

$$(\text{als Polynom}) \Rightarrow Q = H = 1$$

**Bsp:**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$m_A?$

$$\chi_A(T) = T^2 = \det \begin{pmatrix} T & -1 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

$$m_A|_{T^2} \Rightarrow m_A = \begin{cases} T \\ T^2 \end{cases}$$

$$m_A = 0 \rightarrow m_A(T) \neq T(A \neq 0)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow m_A(T) = T^2$$

#### II.0.47 Lemma:

Gegeben  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $V$  endlichdim /  $K$ , dann haben  $\chi_F$  und  $m_F$  dieselben Nullstellenn in  $K$ .

#### II.0.48 Bew:

$$m_F|_{\chi_F} \Rightarrow \chi_F = G \cdot m_F$$

$$\forall \lambda \in K, \text{ falls } m_F(\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \chi_F(\lambda) = 0$$

$$\text{Sei } \lambda \in K | \chi_F(\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } F$$

$$\Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} | F(v) = \lambda \cdot v$$

$$\text{Sei } m_F(T) = T^d + \sum_{i=0}^{d-1} c_i T^i$$

$$\begin{aligned} 0 &= m_F(F)(v) \\ &= (F^d + \sum c_i F^i)(v) \\ &= F^d(v) + \sum c_i F^i(v) \\ &= \lambda^d v + \sum c_i \lambda^i \cdot v \\ &= \underbrace{(\lambda^d + \sum c_i \lambda^i)}_{\substack{\parallel \\ m_F(\lambda)}} \cdot v \end{aligned}$$

$$v \neq 0 \quad m_F(\lambda) = 0$$

#### II.0.49 Satz:

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $V$  endlichdim. /  $K$  ist diagonalisierbar gdw  $m_F$  in lauter verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

$$m_F(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i) : \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j$$

Die  $\lambda_i$  sind die Eigenwerte von  $F$

## II.0.50 Bew:

$\Rightarrow$

Sei  $F$  diagonalisierbar. Dann gilt

$$\chi_F(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{d_i}$$

wo die  $\lambda_i$  Eigenwerte von  $F$  sind

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_k \end{pmatrix} \quad \chi_F(T) = \det(T \cdot E_n - \tilde{F})$$

Außerdem ist  $V = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$

Sei  $v \in V$  beliebig. Dann gilt  $V = \sum_{i=1}^k V_i$ , wobei  $v_i \in V(\lambda_i)$

Setze

$$p(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i) \quad (\stackrel{?}{=} m_F(T))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p(F)v &= \prod_{i=1}^k (F - \lambda_i)v \\ &= \prod_{i=1}^k (F - \lambda_i) \left( \sum_{j=1}^k v_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^k \left( \prod_{i=1}^k (F - \lambda_i)v_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^k (F - \lambda_1 \cdot Id) \circ \dots \circ (F - \lambda_i \cdot Id) \circ \dots \\ &\quad \dots \circ (F - \lambda_{i+1} \cdot Id) \circ \dots \circ (F - \lambda_j \cdot Id)(v_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

da  $v_j \in V(\lambda_i)$ .

$v$  war beliebig  $\Rightarrow P(F) = 0 \in \text{end}(V)$

also  $m_F|_p \Rightarrow P(T) = Q(T) \cdot m_F(T)$

Aber  $m_F(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{s_i} \quad s_i \geq 1$

$$P(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i) = Q(T) \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{s_i}$$

$\Rightarrow s_i = 1$  für  $i = 1, \dots, k$

sonst wäre Grad (rechte Seite) > Grad (linke Seite)

$$\Rightarrow m_F(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i)$$

Dies war zu zeigen ( $\Rightarrow$ ).



Sei  $m_F(T) = (T - \lambda_1) \circ \dots \circ (T - \lambda_k) \quad (\lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j)$

zu zeigen ist  $F$  ist diagonalisierbar ( $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  sind die Eigenwerte von  $F$ )

Es genügt zu zeigen, dass  $V = \bigoplus_i V(\lambda_i)$

Beweis erfolgt durch Induktion über  $\dim(V)$

Sonderfälle:

(1) Sei  $\dim(V) = 1 \Rightarrow m_F(T) = (T - \lambda_1) \Rightarrow \lambda_1$  ist Eigenwert von  $F$

$$\exists v \in V : Fv = \lambda_1 v \Rightarrow V = \text{span}\{v\} = V(\lambda_1)$$

( $v \neq 0$ )

(2) Sei nun  $\dim(V) = \underbrace{n}_{\in \mathbb{N}} \geq 2$  und  $k = 1 \Rightarrow m_F(T) = (T - \lambda_1)$

Nach definition von  $m_F$  gilt:  $m_F(F) \Rightarrow F - \lambda_1 = 0 \in \text{end}(V)$

für jeden Vektor  $v \in V$  gilt:  $(F - \lambda_1)v = 0 \Rightarrow Fv = \lambda_1 v$

$\Rightarrow V = V(\lambda_1)$

Induktionsannahme (für den allgemeinen Fall):

Unser Satz gilt für  $\dim(V) < n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) fest

Also sei  $\dim(V) = n \geq 2$  &  $k \geq 2$

(\*) Beh:

$$V = \underbrace{\ker(F - \lambda_i \cdot I_d)}_{\substack{V(\lambda_i) \\ (\dim(V(\lambda_i)) \geq 1)}} \oplus \underbrace{\text{im}(F - \lambda_i \cdot I_d)}_{\substack{\text{zu zeigen:} \\ (=V(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V(\lambda_k))}}$$

Bew: Sei  $R(T) := \prod_{i=2}^k (T - \lambda_i) \quad \left[ \Rightarrow m_f(T) = R(T)(T - \lambda_1) \right]$

Division mit Rest:  $\exists Q(T) \& r \in K$ , sodass:  $R(T) = Q(T)(T - \lambda_1) + r$   
 $0 \neq R(\lambda_1) = 0 + r \Rightarrow r \neq 0 \in K$

Sei  $v \in V$  beliebig  $R(F)v = Q(F)(F - \lambda_1)v + r \cdot v$

$$\Rightarrow v = \underbrace{\frac{1}{r}R(F)r}_{\in \ker(F-\lambda_1)} + \underbrace{\left(-\frac{1}{r}Q(F)r\right)}_{\in \text{im}(F-\lambda_1)}$$

$$(F - \lambda_1)R(F)v = \underbrace{m_F(F)v}_0 = 0 \quad \Rightarrow V = \ker(F - \lambda_1) + \text{im}(F - \lambda_1)$$

Wir wollen zeigen, dass die Summe direkt ist  $\Leftrightarrow \ker(F - \lambda_1) \cap \text{im}(F - \lambda_1) = \{0\}$

Sei  $v \in \ker(F - \lambda_1) \cap \text{im}(F - \lambda_1) \Rightarrow v = (F - \lambda_1)w \quad w \in V$

$R(F)v = Q(F)(F - \lambda \cdot I_d)v + r \cdot v$

$$\underbrace{R(F) \circ (F - \lambda_1)w}_{m_F(F)=0} = \underbrace{Q(F)(F - \lambda_1 \cdot I_d)v + r \cdot v}_{=0} \quad \Rightarrow r \cdot v = 0 \Rightarrow \begin{matrix} v \in V \\ \parallel \\ 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow V = \underbrace{\ker(F - \lambda_1 I_d)}_{V(\lambda_1)} \oplus \text{im}(F - \lambda_1 I_d)$$

□(\*)

Beweis durch Induktion · Fortsetzung ·  $\dim(V) = n \geq 2, k \geq 2$

Setzte  $W = \text{im}(F - \lambda_1)$  (W ist UVR von V mit  $\dim(W) \subset \dim(V)$ )

(\*\*) Beh: W ist  $F$ -invariant

Bew: Sei  $v \in W$  beliebig  $\Rightarrow v = (F - \lambda_1)w \quad w \in W$

$$\Rightarrow F(v) = F \circ (F - \lambda_1)w = (F - \lambda_1) \circ \underbrace{F(w)}_{\in V} \in W$$

□(\*\*)

(\*\*\*) Beh: (setzte  $F' = F|_W \in \text{end}(W)$ )

$$m_{F'}(T) = \prod_{i=2}^k (T - \lambda_i) \quad (:= R(T))$$

Bew: Sei  $v \in W$  beliebig  $\Rightarrow v = (F - \lambda_1)w \quad w \in V$

$$R(F')(v) = R(F) \circ \underbrace{(F - \lambda_1)w}_{m_F(F)=0} = 0$$

$$\Rightarrow R(F') = 0 \in \text{end}(W)$$

$$m_{F'}(T)|_{R(T)} \Rightarrow R(T) = H(T) \cdot m_{F'}(T)$$

Es gilt auch

$$0 = \underbrace{m_{F'}(F') \circ (F - \lambda_1)}_{=0} \underbrace{(V)}_{v \in V \text{ beliebig}}$$

$$m_{F'}(F') \circ (F - \lambda_1) = 0 \in \text{end}(V)$$

$$m_F(T)|_{m_{F'}(T) \cdot (T - \lambda_1)}$$

$$\Rightarrow m_{F'}(T) \cdot (T - \lambda_1) = Q(T) \cdot m_F(T) = Q(T) \cdot R(T) \cdot (T - \lambda_1)$$

$$\Rightarrow m_{F'}(T) = Q(T) \cdot R(T) = Q(T) \cdot H(T) \cdot m_{F'}(T) \Rightarrow Q(T) = H(T) = 1$$

$\Rightarrow R(T) = m_{F'}(T) \Rightarrow$  Induktionsannahme:  $W = \bigoplus_{i=1}^k W(\lambda_i)$  Eigenraum von  $F'$  zu  $\lambda_i$

$$\Rightarrow V = V(\lambda_1) \bigoplus_{i=2}^k W(\lambda_i) \text{ zu zeigen: } W(\lambda_i) = V(\lambda : i)$$

$$\text{dann gilt: } V = \bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i)$$

$$\text{Es gilt: } W(\lambda_i) = \{w \in W : F'(w) = \lambda_i w\} \subseteq \{v \in V : F(v) = \lambda_i \cdot v\} := V(\lambda_i)$$

$$\text{Sei } v \in \underbrace{V(\lambda_i)}_{(i>1)} \Rightarrow F(v) = \lambda_i v \text{ Setze: } w = \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_1)} \cdot v \in V(\lambda_i)$$

$$\Rightarrow F(w) - \lambda_1 w = v \Rightarrow v \in \text{im}(F - \lambda_1) = W$$

$$\Rightarrow v \in \bigoplus_{j=2}^k W(\lambda_j) \Rightarrow v \in W(\lambda_{i \text{ oder } 1}) \text{ Warum?}$$

$$v = \sum \alpha_j w_j \text{ f\"ur } w_j \in W(\lambda_j) \quad \alpha_j \in K \quad (\subseteq V(\lambda_j)) \text{ Also nur } \alpha_i \neq 0$$

$$\text{Aber } +V(\lambda_j) = \bigoplus V(\lambda_j) \text{ oder } v \in V(\lambda_i) \Rightarrow v = \alpha_i w_i \in W(\lambda_i)$$

□

## II.0.51 Bem:

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \quad A^2 = E_n$$

$\Rightarrow A$  ist diagonalisierbar

$$\text{da } A^2 = E_n \Rightarrow (T^2 - 1)(A) = 0$$

$$m_F|_{T^2-1}$$

$$m_F = \begin{cases} T^2 - 1 & = (T - 1)(T + 1) \\ T - 1 \\ T + 1 \end{cases}$$



# Kapitel III

## Die Jordansche Normalenform

### III.0.1 Lemma:

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $U \subset V$  Untervektorraum:

Dann ist  $U$   $F$ -invariant gdw  $U(F - \lambda Id)$ - invariant ist für  $\forall \lambda \in K$

### III.0.2 Bsp:

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $V$  endlichdim. derart, dass  $F^m = 0$  als Endomorphismus) und  $m > 0$  minimal („ $F$  ist nilpotent“)

$F^{m-1} \neq 0 \rightarrow \exists v \in V | F^{m-1}(v) \neq 0 \{v, F(v), \dots, F^{m-1}(v)\}$  ist linear unabh.

Ergänze das System zu einer Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$ :  $\{v, \dots, F^{m-1}(v), \dots, v_n\}$

$$F^{m-1}(v) F^{m-2}(v) \dots, v, v_{m+1}, \dots, v_n$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & * \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & * \end{pmatrix}$$

### III.0.3 Def: Hauptraum

Sei  $\lambda \in K$  ein Eigenwert von  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $V$  endlichdim.

$$V(\lambda) = \ker(F - \lambda)$$

Eigenraum von  $F$  bzgl.  $\lambda$

$$\ker(F - \lambda) \subset \ker(F - \lambda)^2 \subset \ker(F - \lambda)^3 \subset \dots$$

$$V_\lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker(F - \lambda)^n$$

ist ein Hauptraum von  $F$  bzgl.  $\lambda$

### III.0.4 Bem:

$V_\lambda$  ist ein Unterraum und  $V_\lambda$  ist  $F$ -invariant.

Warum? Weil  $V_\lambda$   $(F - \lambda)$ -invariant ist.

### III.0.5 Bem:

Falls  $(\ker(F - \lambda)) = V(\lambda) = 0$

$$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker(F - \lambda)^n = 0$$

### III.0.6 Bew:

Sei  $v \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (F - \lambda)^n$

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} | (F - \lambda)^n(v) = 0$$

$$\begin{aligned} n &= 0 \\ \rightarrow Id(v) &= 0 \\ &\underbrace{=V} \\ \text{sonst:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (F - \lambda)((F - \lambda)^{n-1}(v)) &= 0 \\ \Rightarrow (F - \lambda)^{n-1}(v) &\in \ker(F - \lambda) = 0 \\ \Rightarrow (F - \lambda)^{n-1}(v) &= 0 \end{aligned}$$

### III.0.7 Lemma:

Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  verschiedene Elemente aus  $K$

$$\Rightarrow V_{\lambda_i} \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k V_{\lambda_j} = \{0\}$$

### III.0.8 Bew:

$V_{\lambda_j}$  ist  $(F - \lambda_j)$ -invariant

$\Rightarrow V_{\lambda_j}$  ist  $F$ -invariant

$\Rightarrow V_{\lambda_j}$  ist  $(F - \lambda_i)$ -invariant

Wir wollen zuerst zeigen, dass  $F - \lambda_i|_{V_{\lambda_j}}$  ein Automorphismus ist ( $i \neq j$ )

$\Rightarrow$  Es genügt zu zeigen, dass  $F - \lambda_i$  injektiv auf  $V_{\lambda_j}$  ist.

Sei  $w \in V_{\lambda_i} \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \text{ kleinstes } (F - \lambda_i)^m(w) = 0$$

$$\stackrel{(m > 0(w \neq 0))}{\Rightarrow} (F - \lambda_j)^{m-j}(w) \neq 0$$

$$\Rightarrow (F - \lambda_j)^{m-1}(\underbrace{(\lambda_i - \lambda_j)(w)}_{\neq 0}) \neq 0$$

$$\begin{aligned} \text{So } 0 &\neq (F - \lambda_j)^{n-1}([F(w) - \lambda_j w] - (F(w) - \lambda_i w)) \\ &= \underbrace{(F - \lambda_j)^m(w)}_{=0} + (F - \lambda_j)^{m-1}(F - \lambda_i)(w) \\ &\Rightarrow (F - \lambda_i)(w) \neq 0 \text{ OK!} \end{aligned}$$

Insb. ist jede Potenz  $(F - \lambda_i)^k$  ein Automorphismus von  $V_{\lambda_i}$

$$V_{\lambda_i} \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k V_{\lambda_j} = \{0\}$$

$$v \in V_{\lambda_i} \cap \sum_{j \neq i}^k V_{\lambda_j}$$

$$v = \sum_{j \neq i} \underbrace{v_j}_{\in V_{\lambda_j}}$$

$\Rightarrow \exists m_j$  kleinstes

$$(F - \lambda_j)^{m_j}(v_i) = 0$$

$$M = (F - \lambda_i)^{m_1} \circ \dots \circ (F - \lambda_{i-1})^{m_{i-1}} \circ (F - \lambda_{i+1})^{m_{i+1}} \circ \dots \circ (F - \lambda_K)^{m_K}$$

ist ein Automorphismus von  $V_{\lambda_i}$

Wiederholung:

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $\dim_k V = n$   $\lambda \in K$

$$V_\lambda = \bigcup_{\substack{\parallel \\ (F-\lambda) \circ \dots \circ (F-\lambda)}} \ker(F - \lambda)^n$$

$$V(\lambda) = \ker(F - \lambda) = \{0\} \Leftrightarrow \chi_F(\lambda) \neq 0 \Rightarrow V_\lambda = \{0\}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$  verschiedene Eigenwerte

$$\Rightarrow V_{\lambda_i} \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k V_{\lambda_i} = \{0\}$$

### III.0.9 Bem:

$V_\lambda$  ist  $(F - \lambda)$ -invariant

$\Rightarrow V_\lambda$  ist  $F$ -invariant

### III.0.10 Lemma:

Sei  $\lambda \in K$

$$\dim V_\Pi = \text{ord}_\lambda(\chi_F)$$

Ferner hat  $F \upharpoonright V_\lambda$  Matrixdarstellung der Form  $\begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$

### III.0.11 Bew

Sei  $K = \text{ord}_\lambda(\chi_F(T)) \Rightarrow \chi_F(T) = (T - \lambda)^K \cdot Q(T)$  wobei:  $Q(\lambda) \neq 0$

### III.0.12 Beh

Es gibt einen  $F$ -inv. Unterraum  $U \subset V$  der dimension  $K$ , so dass  $F \upharpoonright U$  matrix darstellung

$$\begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

Falls  $n = 0 \rightarrow \text{Ok!}$

OBdA ist  $k \geq 1$  Wir beweisen die Behauptung mit Induktion auf  $n = \dim V$

$n=1 \Rightarrow$

$$\exists v \in V \setminus \{0\} \quad F(v) = \lambda \cdot v$$

$$\Rightarrow V = \underbrace{\text{span}(v)}_{\substack{\parallel \\ U_0}}$$

$$n \geq 2$$

$\lambda$  ist ein Eigenwert

$$\Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} \quad F(v) = \lambda \cdot v$$

$$U = \text{span}(v) \rightarrow \dim 1 \quad F\text{-invariant} \Rightarrow \tilde{F} : V/U_0 \rightarrow V/U_0; \bar{\omega} \mapsto \overline{F(\omega)}$$

$$\begin{array}{ccc} \chi_F(T) & = & \chi_{F|U}(T) \cdot \chi_{\tilde{F}}(T) \\ \parallel & & \parallel \\ (T-\lambda)(T-\lambda^{k-1}) \cdot Q(T) & & (T-\lambda) \end{array}$$

da  $K[T]$  Integritätsbereich:

$$\Rightarrow \chi_{\tilde{F}}(T) = (T - \lambda)^{k-1} \cdot Q(T)$$

$$Q(\lambda) \neq 0$$

Nach I.A. existiert einen  $\tilde{F}$ -Invarianten Unterraum  $\tilde{U} \subset V/U$  der Dimension  $n - 1$ , so dass die Matrixdarstellung von  $\tilde{F}$  der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

besitzt. Sei  $\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_K$  eine Basis von  $\tilde{U}$  so dass die Darstellungsmatrix von  $\tilde{F}$  bzgl.  $\{\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_K\}$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Die Vektoren  $\underbrace{\{v, v_2, \dots, v_K\}}_{\text{Vektoren aus } \underline{V}}$  sind linear unabhängig.

$U = \text{span}(v, v_2, \dots, v_K)$  hat Dimension  $K$ .

$U$  ist  $F$ -Invariant

$$\begin{aligned} F\left(\sum_{i=1}^K \mu_i v_i\right) &= \sum \mu_i F(v_i) \\ &= \underbrace{\mu_1 \lambda v_1 + \sum_{i=2}^k \mu_i F(v_i)}_{\in U} \end{aligned}$$

da:  $F(v_i) \stackrel{\text{nach } U_0}{=} \sum_{j \leq i} a_j = v_j \quad F \upharpoonright U$

$$F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_k)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \lambda & \\ & & \lambda \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Zu Zeigen:  $U = V_\lambda$   
 $U \subset V_\lambda$  :

$$\chi_{F|U} = (T - \lambda)^k$$

$\Downarrow$  Caley Hamilton

$$(F - \lambda)^k = 0 \quad \text{auf } U$$

$$\Rightarrow U \subseteq \underbrace{\ker(F - \lambda)^k}_{\subset V_\lambda}$$

Falls  $U \subsetneq V_\lambda$

$$\Rightarrow \dim V_\lambda / U \geq 1$$

$$\begin{array}{ccc} \chi_F(T) & = & \chi_{F|U}(T) \cdot \chi_{\tilde{F}}(T) \\ \parallel & & \parallel \\ (T - \lambda) \cdot Q(T) & & (T - \lambda)^k \end{array}$$

$$\tilde{F} : V/U \rightarrow V/U$$

$$\Rightarrow \chi_{\tilde{F}(T)} = Q(T)$$

aber  $Q(\lambda) \neq 0 \Rightarrow \lambda$  ist kein Eigenwert von  $\tilde{F}$ !!

$\Rightarrow$  Der Hauptraum für  $\lambda$  von  $\tilde{F} : V/U \rightarrow V/U$  ist trivial

Sei  $\omega \in V_\lambda$

$$\Rightarrow \exists s \in \mathbb{N}$$

$$(F - \lambda)^s(\omega) = 0 \Rightarrow (F - \lambda)^s(\bar{\omega}) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{\omega} = 0 \Rightarrow \omega \in U$$

### III.0.13 Def:

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus heißt nilpotent falls es eine feste Zahl  $m$  existiert, so dass  $\underbrace{F \circ \dots \circ F}_m = F^m = 0$  auf  $V$  ist.

### III.0.14 Lemma:

Sei  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $\dim V = n$  Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1)  $F$  ist nilpotent
- 2)  $\forall v \in V \exists m_v \in \mathbb{N} : F^{m_v}(v) = 0$
- 3) Es existiert eine Basis von  $V$ , so dass  $F$  Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

hat

- 4)  $\chi_F(T) = T^n$

### III.0.15 Bew:

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$  Trivial  
 $\boxed{2 \Rightarrow 3}$  Induktion auf  $n = \dim V$   $n = 1 : \exists v \in V \setminus \{0\}$   
 $\exists m_v \in \mathbb{N}$  kleinstes  
 $F^{m_v}(v) = 0$   
 $\Rightarrow m_v \neq 0$   
 $\Rightarrow F^{m_v-1}(v) \neq 0$   
 $\Rightarrow V = \text{span}(F^{m_v-1}(v))$  Ferner  $F(F^{m_v-1}(v)) = 0$   
 $\rightarrow$  Darstellungsmatrix bzgl.  $\{F^{m_v-1}(v)\}$  ist  $(0)$   
 $n \geq 2$   
 Sei  $v_i \in V \setminus \{0\}$ , so dass  $F(v_i) = 0$   
 $\Rightarrow U = \text{span}(v_i)$  ist  $F$ -invariant  
 $\Rightarrow \tilde{F} : V/U \rightarrow V/U$   
 $\underbrace{\dim < n}_{\parallel}$   
 $n-1$   
 $\Rightarrow$  I.A. es existiert eine Basis  $\{\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$  von  $V/U$ , so dass  $\tilde{F}$  Darstellungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

hat. Die Familie  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ist eine Basis von  $V$  und hat Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & 0 & \\ & & 0 \\ & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{3 \Rightarrow 4}$$

$$\chi_F(T) = \det \left( T \cdot E_n - \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} T & & * \\ & \ddots & \\ & & T \end{pmatrix} = T^n$$

$$\boxed{4 \Rightarrow 1} \text{ Caley-Hamilton}$$

$$F^n = \chi_F(F) = 0$$

□

### III.0.16 Satz: Jorda-Charelley Zerlegung

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $V$  endlichdim.

Falls  $\chi_F(T)$  in linearfaktoren zerfällt dann ist  $V = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$   $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die verschiedenen Eigenwerte und  $F$  lässt sich als Blockmatrix darstellen

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ & & & \ddots \\ & & & & A_k \end{pmatrix} \quad A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$$\text{insb. ist } F = \underbrace{G}_{\text{diagonalisierbar}} + \underbrace{H}_{\text{nilpotent}}$$

$$G \circ H = H \circ G$$

Sei  $G : V \rightarrow V$   $G_{V_{\lambda_i}}$  = Multiplikation mit  $\lambda_i$ .  $H$  hat diagonale Matrix bzgl. der Basis  $\mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$



setzt  $H = F - G$  die Darstellungsmatrix von  $H$  bzgl.  $\mathcal{B}$  ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & & * & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & * \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 & & * \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 & & * & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & * \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 & & * \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}} \right\} V_{\lambda_1} \\ \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 & & * & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & * \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 & & * \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}} \right\} V_{\lambda_2} \end{matrix} \Rightarrow H \text{ ist nilpotent}$$

### III.0.17 Bew:

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$  verschiedene Eigenwerte

$$\chi_F(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda)^{d_i}$$

$$\dim V = \text{grad} \chi_F(T) = n \sum_{i=1}^k \underbrace{d_i}_{\dim V_{\lambda_i}}$$

$$\dim \left( \sum_{i=1}^k V_{\lambda_i} \right) \stackrel{V_{\lambda_i} \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k V_{\lambda_j} = \{0\}}{=} \sum d_i = n = \dim V$$

$$\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$$

$V$  besitzt eine Basis  $\mathcal{B}$ , welche aus der Vereinigung der Basen jedes  $V_{\lambda_i}$  besteht.

$F$  wird durch  $F \upharpoonright V_{\lambda_1}, \dots, F \upharpoonright V_{\lambda_k}$  bestimmt

$$\begin{matrix} \parallel & & \parallel \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \lambda_K & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_K \end{pmatrix} \\ \parallel & & \parallel \\ A_1 & & A_K \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_K \end{pmatrix}$$

zu Zeigen:  $G \circ H = H \circ G$  Beachte, dass jedes  $V_{\lambda_i}$   $G$ -Invariant.  
 $\Rightarrow V_{\lambda_i}$  ist  $H$ -Invariant.

Es genügt zu zeigen, dass  $G \circ H = H \circ G$  auf  $\underline{\underline{V_{\lambda_i}}}$

$w \in V_{\lambda_i}$

$$H \circ G(w) = H(\lambda \cdot w)$$

$$G \circ H(w) \stackrel{W(w) \in V_{\lambda_i}}{=} \lambda_1 H(w)$$

### III.0.18 Def:

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $V$  endlichdim.

Eine Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  ist  $F$ -adaptiert, falls:

$$F(v_1) = 0$$

$$2 \leq j \leq n \quad F(v_j) = \begin{cases} 0 \\ v_{j-1} \end{cases}$$

### III.0.19 Bem:

Falls  $V$  eine  $F$ -adaptierte Basis besitzt, dann ist  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus nilpotent.

### III.0.20 Bew:

Sei  $\{v_1, \dots, v_n\}$   $F$ -adaptiert

Es genügt zu zeigen, dass  $F^n = 0$  (als Endomorphismus)

$$F^n \left( \begin{array}{c} v \\ \parallel \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j \end{array} \right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \underbrace{F^n(v_j)}_{=0} = 0$$

Notation

$$\mathcal{N}_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{K})$$

$$\mathcal{N}_j = (0)$$

$$\mathcal{N}_m^m = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

### III.0.21 Def:

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus nilpotent. Es gibt  $m \leq n$  kleinste Zahl, sodass

$$\ker(F^m) \subsetneq \dots \subsetneq \ker(F^m) \subsetneq \ker(F^{m+1}) \subsetneq \dots \subsetneq V$$

m heißt der Index von F

$$V = \ker(F^m) \bigoplus F^m(V)$$

### III.0.22 Satz:

Sei  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $\dim(V) = n$  und  $\mathcal{B}$  eine F-adaptierte Basis von F. Dann hat F Matrixdarstellung der Form

$$\begin{pmatrix} \mathcal{N}_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{N}_{k_r} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^r k_j = n \quad \text{Index}(F) = \max\{k_j\}_{1 \leq j \leq r}$$

### III.0.23 Bew:

Sei  $\{v_1, \dots, v_n\}$  F-adaptiert

Sei  $k \leq i_1 < \dots < i_r < n$  eine Aufzählung der Menge  $\{j | F(v_{j+1}) = 0\}$

$$v_1, v_2, \dots, v_{i_j}, v_{i_{j-1}}, \dots$$

$$\begin{array}{cccccc}
 v_1 & v_2 & \dots & v_{i_1} & v_{i_j-1} & \\
 \left( \begin{array}{cccccc}
 0 & 1 & & & & \\
 & 0 & & & & \\
 & & \ddots & & & \\
 & & & 0 & 1 & \\
 & & & & 0 & \\
 & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & 0
 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} i_1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ i_2 - i_1 \end{array}
 \end{array}$$

### III.0.24 Satz:

Sei  $F : V \rightarrow V$  nilpotent mit Index  $k$ . Gegeben einen Unterraum  $U \subset V$  derart, dass  $U \cap \ker(F^{k-1}) = \{0\}$ . Dann lässt sich jede Basis von  $U$  zu einer  $F$ -adaptierten Basis von  $V$  ergänzen.

### III.0.25 Kor:

Jeder nilpotente Endomorphismus besitzt eine  $F$ -adaptierte Basis

$$\ker F \subsetneq \ker F^2 \subset \dots \subset \ker F^{k-1} \subsetneq \ker F^k = \dots = V$$

$$B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_{k-1} \subset B_k$$

$$\left( F(U_1) \dots F(U_r) \rightarrow B_{k-1} \quad U_1, \dots, U_r \in B_k \setminus \ker(F^{k-1}) \right)$$

$\ker F^{K-1}$  hat ein Komplement  $U$  in  $\ker F^k$

$$\begin{array}{c}
 \parallel \\
 U_1 \\
 \vdots \\
 U_j
 \end{array}$$

### III.0.26 Beh:

$\{F(U_1), \dots, F(U_r)\}$  sind lin. unabh.  
 $\rightarrow$  sie bilden die Basis von  $F(w)$

III.0.27 Bew:

$$\sum_{i=1}^r \lambda F(U_i) = 0 = F\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i U_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i U_i \in \ker(F)$$

$$\Downarrow W \cap V = \{0\}$$

$$\sum \lambda_i U_i = 0$$

$$\Downarrow \{U_1, \dots, U_i\} \text{ sind lin. unabh.}$$

$$\underline{\lambda_1 = \dots = \lambda_i = 0}$$

Aus unserer Induktionsannahme

$$F(w) \text{ und } F \upharpoonright V' : V' \rightarrow V'$$

$\Rightarrow$  Es gibt eine adaptive Basis  $\{v'_1, \dots, v'_m\}$  von  $V'$ ,

welche  $\{F(U_1), \dots, F(U_r)\}$  ergänzt.

$F(U_j) = v'_{i_j}$  wobei  $i_1 < \dots < i_r$  (sonst ordne  $v'_j$  's um !)

$$v_1 = v'_1$$

$$v_2 = v'_2$$

$$\vdots$$

$$v_{i_1} = v'_{i_1}$$

$$v_{i_1+1} = U_1$$

$$v_{i_1+2} = v'_{i_1+1}$$

$$\vdots$$

$$v_{i_2} = v'_{i_2-1}$$

$$v_{i_2+1} = v'_{i_2}$$

$$v_{i_2+2} = U_2$$

$\rightarrow$  Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V(W \cap V' = \alpha_i)$

### III.0.28 Folgerung

Jeder nilpotente Endomorphismus lässt sich bezüglich einer geeigneten Basis durch eine Blockmatrix darstellen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

### III.0.29 Kor: Jordansche Normalform

Jeder Endomorphismus eines endl. dimensionalen VR, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, lässt sich bezüglich einer geeigneten

Basis durch eine Blockmatrix folgender Form darstellen:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \lambda_1 & 1 & & & & \\ & & & & \lambda_1 & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & 1 & & \\ & & & & & & \lambda_2 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda_2 & 1 & \\ & & & & & & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & \lambda_3 & 1 & \\ & & & & & & & & & & & & \lambda_3 & \\ & & & & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & & & & \lambda_3 & 1 & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

### III.0.30 Bew:

Induktion auf n

$$\boxed{k=1}$$

$F=0$  als Endomorphismus  $\rightarrow$  Jede Basis ist F-adaptiert

$$\boxed{k \geq 2}$$

Sei  $V' = \ker(F^{k-1}) \subsetneq V$

Sei  $\{u_1, \dots, u_j\}$  eine Basis von U.  $U \cap V' = \{0\}$   $U + V' = U \oplus V'$  hat eine

Basis:  $\{u_1, \dots, u_j, \overbrace{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n}^{\text{Basis von } V'}\}$

Ergänze diese Basis zu einer Basis von V  $\{u_1, \dots, u_j, u_{j+1}, \dots, u_r, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$

$U \subset \mathcal{W} = \text{span}(u_1, \dots, u_j)$

$W \cap V' = \{0\}$

$F(W) \subset \ker(F^{k-1}) = V'$  (Weil  $F^k = 0$ ),  $V'$  ist F-invariant und

$F \upharpoonright V' = V' \rightarrow V'$  hat Index  $k-1$ .

### III.0.31 Beh:

$\{0\} = F(\mathcal{W}) \cap \ker(F^{k-2})$

Sei  $u \in F(\mathcal{W}) \cap \ker(F^{k-2})$

$\Rightarrow F^{k-2}(u) = 0$

es existiert ein  $w \in \mathcal{W} | u = F(w)$   
 $0 = F^{k-2}(u) = F^{k-1}(w) \rightarrow w \in \ker(F^{k-1} = V')$   
 $\Rightarrow w = 0 \Rightarrow U = F(w) = 0$   
 $W \cap V' = \{0\}$

Es genügt zu zeigen, dass die Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  F-adaptiert ist.  
 z.B.

$$F(v_{j+1}) = V'_{i_1} = F(u_1)$$

$$\Rightarrow u_1 - \underbrace{v_i + 1}_{\in V'} \in \ker(F) \subset V'$$

$$\Rightarrow u_1 \in V' \cap W = \{0\} \text{ Widerspruch !}$$

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus nilpotent index K.

**Beispiel:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

$$\chi_A(T) = \det \begin{pmatrix} T-1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & T-2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & T-2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & T-3 \end{pmatrix}$$

$$= (T-2) \det \begin{pmatrix} T-1 & 0 & -1 \\ 1 & T-2 & -1 \\ 1 & 0 & T-3 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(T) = (T-2)^4 \rightarrow 2 \text{ ist der einzige Eigenwert.}$$

$$A - 2E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist } \underline{\underline{\text{Nilpotent}}}$$

$$\ker(A - 2E_4) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | -x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$$



# Kapitel IV

## Dualität

### IV.0.1 Def:

Sei  $V$  ein  $K$ -VR. Der Dualraum  $V^*$  ist die Kollektion aller linearen Abbildungen  $V \rightarrow K$ .

### Bem:

$V^*$  ist ein  $K$ -vektorraum.  $F + G : V \rightarrow K, v \mapsto F(v) + G(v)$  ist linear.  
 $\lambda \in K, \lambda \cdot F : V \rightarrow K, v \mapsto \lambda \cdot F(v)$  ist linear.

### IV.0.2 Def:

Sei  $V$  endlichdim und wähle eine Basis  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  von  $V$ .

Die duale Basis  $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, \dots, b_n^*\}$  ist eine Kollektion linearer Abbildungen

derart, dass  $b_i^*(b_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Insbesondere:

$$b_i^*(v) = b_i^*\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot b_j\right) = \lambda_i$$

### Bem:

Falls  $V$  endlichdim. ist, dann ist  $\mathcal{B}^*$  eine Basis von  $V^*$  und sonst  $V \simeq V^*$

### IV.0.3 Bew:

$b_1^* \dots b_n^*$  sind linear unabhängig.

warum?

$$\sum \lambda_i b_i^* = 0 \quad (\text{als lin. Abbildung})$$

$$\sum \lambda_i \underbrace{b_i^*}_{\substack{\parallel \\ \lambda_j \text{ für } 1 \leq j \leq n}}(b_j) = 0$$

$$\lambda_i \cdots = \lambda_n = 0 \rightarrow \text{OK!}$$

$$\text{span}(b_i^* \dots b_n^*) = V^*$$

Sei  $F : V \rightarrow K$  beliebig

$$F(b_i) = \lambda_i \in K \quad 1 \leq i \leq n$$

$$(F - \sum \lambda_i b_i^*)(b_j) = 0 = F(b_j) - \underbrace{\sum \lambda_i b_i^*(b_j)}_{\substack{\parallel \\ \lambda_j}} \quad 1 \leq j \leq n$$

Insb.  $V \rightarrow V^*$  ist ein Isomorphismus  $b_i \mapsto b_i^*$

Achtung: Der Isomorphismus  $V \simeq V^*$  hängt von der Basis  $\{b_1, \dots, b_n\}$  ab!  
NICHT KANONISCH  $\square$

#### IV.0.4 Lemma:

kanonischer Monomorphismus  $V \xrightarrow{\varphi} (V^*)^*, v \mapsto \varphi_v : V^* \rightarrow K, F \mapsto F(v)$

#### IV.0.5 Bew:

$\varphi$  ist wohldefiniert

$$\varphi_v(F + G) = (F + G)(v) = F(v) + G(v) \quad \text{Ok!}$$

Zu zeigen:  $\varphi$  ist injektiv (Übungsaufgabe !)

#### IV.0.6 Korollar:

Wenn  $V$  endlichdim. ist,  $V \simeq V^*$  kanonisch

#### IV.0.7 Bew:

$$\dim V = \dim V^* = \dim (V^*)^* \Rightarrow \varphi : V \rightarrow (V^*)^* \text{ ist surjektiv}$$

$\Rightarrow$  ein Isomorphismus  $\square$

#### IV.0.8 Lemma:

Sei  $V$  endlich und wähle Basen  $\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_i\}$  und  $\mathcal{B}' = \{b'_1 \dots b'_i\}$  von  $V$ .

Seien  $\mathcal{B}^*$  und  $(\mathcal{B}')^*$  die entsprechenden dualen Basen in  $V^*$ . Wenn  $A$  die Transformationsmatrix von  $\mathcal{B}$  nach  $\mathcal{B}'$  ist, dann ist die Transformationsmatrix  $\mathcal{B}^*$  nach  $(\mathcal{B}')^*$   $(A^*)^{-1}$

#### IV.0.9 Bew:

$$\begin{pmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_n^* \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Sei  $X$  die Transformationsmatrix von  $\mathcal{B}'$  nach  $(\mathcal{B}')^*$

$$\begin{pmatrix} b_1'^* \\ \vdots \\ b_n'^* \end{pmatrix} = X \cdot \begin{pmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_n^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_n^* \end{pmatrix} \cdot (b_1 \dots b_n) = E_n$$

$$\begin{pmatrix} b_1'^* \\ \vdots \\ b_n'^* \end{pmatrix} \cdot (b'_1 \dots b'_n) = E_n$$

$$\begin{aligned} E_n &= \begin{pmatrix} b_1'^* \\ \vdots \\ b_n'^* \end{pmatrix} \cdot (b'_1 \dots b'_n) \\ &= X \cdot \begin{pmatrix} b_1'^* \\ \vdots \\ b_n'^* \end{pmatrix} \left( A \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right)^\top \\ &= X \cdot \begin{pmatrix} b_1'^* \\ \vdots \\ b_n'^* \end{pmatrix} \cdot (b_1 \dots b_n) \cdot A^\top \end{aligned}$$

$$E_n = X \cdot E_n \cdot A^\top = X \cdot A^\top \Rightarrow X = (A^\top)^{-1}$$

#### IV.0.10 Def:

Sei  $F : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Definiere die duale Abbildung  $F^* : W^* \rightarrow V^*$ ,  $\psi \mapsto \psi \circ F$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & W \\ & \searrow & \downarrow \Psi \\ \Psi \circ F & & K \\ \parallel & & \\ F^*(\Psi) & & \end{array}$$

#### Bem:

$F^*$  ist linear.

$$F^*(\psi_1 + \psi_2) = (\psi_1 + \psi_2) \circ F = \psi_1 \circ F + \psi_2 \circ F = F^*(\psi_1) + F^*(\psi_2)$$

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{G} & V & \xrightarrow{F} & W \\ W^* & \xrightarrow{F^*} & V^* & \xrightarrow{G^*} & U^* \end{array}$$

von  $W^*$  nach  $U^*$ :

$$(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$$

#### IV.0.11 Bew:

$$\Psi \in W^* \quad \Psi \circ W \rightarrow K$$

$$(F \circ G)^*(\Psi) = \underbrace{\Psi \circ F}_{F^*(\Psi)} \circ G = G^* \circ F^*(\Psi)$$

Eigenschaften:

a)  $(Id_V)^* = Id_{V^*}$

b)  $(F + G)^* = F^* + G^*$

c)  $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$

d)  $(\mu F)^* = \mu F^*$

$$(Id_W)^*(\psi) = \psi \circ Id_W = \psi$$

**Bem:**

Falls  $F^* = 0$  dann ist  $\underline{F = 0}$ . Feiner, falls  $v$  und  $W$  endlich dimensional sind.

$$G : W^* \rightarrow V^* \text{ lin. Abbildung}$$

dann gilt es

$$F : V \rightarrow W \text{ so dass } F^* = G$$

**IV.0.12 Bew:**

$$F^* = 0$$

Sei  $v \in V$  fest.

**Zu Zeigen:**  $F(v) = 0$

Definiere

$$W^* \rightarrow \psi \mapsto \psi(F(v))$$

$$\parallel \\ F^*(\psi)(v)$$

Erinnerung:  $W \xrightarrow{\varphi} (W^*)^*, w \mapsto \varphi_{wi} \quad W^* \rightarrow K, \psi \mapsto \psi(w)$

$$\parallel \\ \varphi(wi)$$

$$\varphi_{F(v)}(\psi) = \psi(F(v)) = \underbrace{F^*(\psi)(v)}_{=0} \equiv \underline{\underline{0}}$$

Aber:  $\varphi$  ist ein Monomorphismus

$\Rightarrow F(v) = 0 \Rightarrow F = 0$  als Homomorphismus  $V \rightarrow W$

Die Operation:

$$* : \text{Hom}(V, W) \mapsto \text{Hom}(W^*, V^*)$$

Falls  $V, W$  endlichdim. sind:

$(V \approx K^n \approx V^* \text{ und } W \approx K^m \approx W^*)$

$$\dim \text{Hom}(V, W) = \dim V \cdot \dim W \\ \parallel \qquad \parallel$$

$$\dim \text{Hom}(W^*, V^*) = \dim V^* \cdot \dim W^*$$

Aber  $* : \text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(W^*, V^*)$  ist injektiv  $\Rightarrow$  Surjektiv

$$\dim V = n, \quad \dim W = m$$

□

**Bem:**

$F : V \rightarrow W$  hat Darstellungsmatrix  $A$  bezüglich  $\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_n\}$  von  $V$  und  $\mathcal{B}' = \{b'_1 \dots b'_m\}$  von  $W$ . Seien  $\mathcal{B}^*$  und  $(\mathcal{B}')^*$  die entsprechenden dualen Basen aus  $V^*$ , und  $W^*$ .

Dann hat  $F^*$  Darstellungsmatrix  $A^\top$  bzgl  $(\mathcal{B}')^*$  und  $\mathcal{B}^*$ .

**IV.0.13 Bew:**

$$F \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \vec{x}$$

$$F^* \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\Psi_1 \quad \dots \quad \Psi_m) \circ \underbrace{F \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{A \cdot \vec{x}}$$

Die Darstellungsmatrix von  $F^*$  ist:

$$F^* \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_m \end{pmatrix} = (\Psi_1 \quad \dots \quad \Psi_m) \cdot A$$

$$F^* \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_m \end{pmatrix} = \left( A^\top \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_m \end{pmatrix} \right)^\top$$

→ Die Darstellungsmatrix von  $F^*$  ist  $A^\top$

**IV.0.14 Korollar:**

$$\det(F^*) = \det(F)$$

**Wid:**  $VK - VR, V^* = \text{Hom}(V, K)$  ist ein  $K - VR$ ,  $V$  endlich dimensional  
 $\rightarrow V \simeq V^*, \mathcal{B} = \{b_1 \dots b_n\} \rightarrow \mathcal{B}^*$  duale Basis.

$$\parallel \\ \{b_1^* \dots b_n^*\}$$

$$b_i^*(b_j) = \delta_{ij} \text{ (kronecker delta)}$$

$$\varphi : V \hookrightarrow (V^*)^* \text{ Monomorphismus, } v \mapsto \varphi_v : V^* \rightarrow K, F \mapsto F(v)$$

### Folgerung

$$\forall v \in V \setminus \{0\} \exists F : V \rightarrow K \text{ linear } F(v) \neq 0$$

$$* : \text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(W^*, V^*)$$

$$F : V \rightarrow W \rightarrow F^* \rightarrow V^*$$

$$\underbrace{\Psi}_{W \rightarrow K} \mapsto \underbrace{\Psi \circ F}_{V \rightarrow K}$$

$$(F \circ G)^* G^* \circ F^*$$

$$(Id_V)^* = Id_{V^*}$$

$$V, W \text{ endlichdim} \rightarrow * \text{ Isonorphismus}$$

### Bem

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus lineare Abb. mit Darstellungsmatrix  $A = (a_{ij})$   
bzgl. der Basen  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}, \mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$

$$F^* : W^* \rightarrow V^*$$

$$\mathcal{C}^* = \{c_1^*, \dots, c_m^*\} (\rightarrow) \mathcal{B}^* = \{b_1^*, \dots, b_n^*\}$$

Darstellungsmatrix von  $F^*$  bzgl.  $\mathcal{C}^* \mathcal{B}^*$  ist  $A^\top$

### IV.0.15 Bew:

$$F^*(c_k^*) = \sum_{1 \leq \varphi \leq n} \lambda_{\varphi k} b_\varphi^* \quad (1 \leq k \leq m)$$

$$F(b_i) = \sum_{1 \leq j \leq m} a_{ij} c_j$$

$$F^*(c_k^*)(b_i) = (\sum \lambda_{\varphi k} b_\varphi^*)(b_i)$$

$$\parallel$$

$$C_k^*(F(b_i)) = \lambda_{ik} \rightarrow A^\top \text{ ist die Darstellungsmatrix}$$

$$\parallel$$

$$C_k^*(\sum a_{ji} c_j) = a_{ki}$$

□

**IV.0.16 Lemma:**

$$V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$$

$$\Rightarrow V^* \simeq \bigoplus_{i=1}^n V_i^*$$

$F : V \rightarrow K$  ist eindeutig bestimmt durch  $F \upharpoonright V_1, \dots, F \upharpoonright V_n$

**IV.0.17 Lemma:**

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus linear

- a)  $F$  injektiv  $\Leftrightarrow F^*$  surjektiv
- b)  $F$  surjektiv  $\Leftrightarrow F^*$  injektiv
- c)  $F$  Isomorphismus  $\Leftrightarrow F^*$  isomorphismus

**IV.0.18 Bew:**

- a)  $\boxed{\Rightarrow} F : V \hookrightarrow W$  injektiv.

**Zu Zeigen:**

$F^*W^* \rightarrow V^* \ni \psi : V \rightarrow K$  surjektiv ist

$$\exists \Theta : W \rightarrow K, F^*(\Theta) = \psi$$

$$\parallel$$

$$\Theta \circ F$$

$$\forall v \in V, \Theta(F(v)) = \psi(v)$$

$$\underbrace{\text{Im}(F)}_{\simeq V} \subset W \quad (\forall v \in \text{Im}(F) \exists! v \in V, w = F(v))$$

Sei  $Z$  ein Komplement von  $\text{Im}(F)$  in  $W \Rightarrow W = \text{Im}(F) \oplus Z$

$$\forall w \in W : w = \underbrace{w'}_{\in \text{Im}(F)} + \underbrace{\tilde{w}}_{\in Z} \text{ eindeutig}$$

Definiere  $\Theta : W \rightarrow K$

$$W = F(v) + \tilde{w} \mapsto \Psi(v) \quad \tilde{w} \in Z$$



Zu Zeigen:  $\Theta$  ist linear

$$\Theta\left(\begin{array}{cc} w_1 & + & w_2 \\ \parallel & & \parallel \\ F(v_1)+\tilde{w}_1 & & F(v_2)+\tilde{w}_2 \end{array}\right) = \Theta\left(\begin{array}{c} F(v_1) + F(v_2) + \underbrace{\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2}_{\in Z} \\ \parallel \\ F(v_1+v_2) \end{array}\right)$$

$$\Theta(w_1) + \Theta(w_2) = \Psi(w_1) + \Psi(w_2) = \Psi(v_1 + v_2) (= F(v_1 + v_2))$$

$\boxed{\Leftarrow} F^* : W^* \rightarrow V^*$  surjektiv

Zu Zeigen:  $F : V \rightarrow W$  injektiv

$$v \in V \mid F(v) = 0$$

$$v \neq 0 \Rightarrow \exists \Psi : V \rightarrow K \quad \Psi(v) \neq 0$$

$$\xRightarrow{F^* \text{ surj.}} \exists \Theta : W \rightarrow K$$

$$\Theta \circ F = F^*(\Theta) = \Psi$$

$$\Rightarrow \underbrace{\Theta(F(v))}_{=0} = \Psi(v) \text{ Wid !}$$

$$\text{b) } \boxed{\Rightarrow} F : V \rightarrow W \text{ surjektiv.}$$

**Zu Zeigen:**

$$F^* : W^* \hookrightarrow V^* \text{ injektiv}$$

Sei  $\Theta \in W^*/F^*(\Theta) = 0$  als lineare Abbildung  $V \rightarrow K$

$$F^*(\Theta) = \Theta \circ F$$

**Zu Zeigen:**

$$\forall w \in W, \Theta(w) = 0$$

$$w \in W \rightarrow \exists v \in V \mid F(v) = w$$

$$F \text{ surjektiv} \quad \Theta(w) = \Theta(F(v)) = F^*(\Theta)(v) = 0$$

$$\boxed{\Leftarrow} F^* : W^* \hookrightarrow V^* \text{ injektiv}$$

**Zu Zeigen:**

$$F : V \rightarrow W \text{ surjektiv}$$

Sei  $Z$  ein Komplement von  $\text{Im}(F)$  in  $W = \text{Im}(F) \oplus Z$

**Zu Zeigen:**

$$Z = \{0\}$$

Sonst sei  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $Z$ .

$G : W \mapsto K$  linear der art

$$G \upharpoonright \text{Im}(F) = 0 \text{ und } G(b) = 1, \forall b \in \mathcal{B}$$

$$\Rightarrow G \in W^*$$

$$F^*(G) = G \circ F : V \rightarrow K$$

Sei  $v \in V$

$$G \circ F(v) = G(F(v)) = 0$$

$\Rightarrow F^*(G)$  ist die triviale Abbildung

$$\stackrel{F^* \text{ inj.}}{\Rightarrow} G = 0 \text{ als lineare Abbildung}$$

$$\Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow Z = 0 \Rightarrow F \text{ surjektiv}$$

## IV.1 Duale Paarung

### IV.1.1 Def:

Seien  $V, W$  K-VR

Eine Abbildung  $\varphi : V \cdot W \mapsto K$  ist bilinear, wenn  $\varphi$  linear in jeder Koordinate ist.

$$\text{a) } \varphi(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 \varphi(v, w_1) + \lambda_2 \varphi(v, w_2)$$

$$\text{b) } \varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 \varphi(v_1, w) + \lambda_2 \varphi(v_2, w)$$

**Bem:**

Falls  $V, W$  endlich dimensional mit Basen  $\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_n\}$  von  $V$  und  $\mathcal{C} = \{c_1 \dots c_m\}$  von  $W$ . Dann ist  $\varphi$  eindeutig bestimmt durch die  $(n \times m)$ -

Matrix  $A = (\varphi(b_i, c_j))$

$$\begin{aligned}
 \varphi(v, w) &= \varphi\left(\sum_{i \leq n} \lambda_i b_i, \sum_{j \leq m} \mu_j c_j\right) \\
 &= \sum_{i \leq n} \lambda_i \varphi\left(b_i, \sum_{j \leq m} \mu_j c_j\right) \\
 &= \sum_{i \leq n} \lambda_i \sum_{j \leq m} \mu_j \varphi(b_i, c_j) \\
 &= (\lambda_1, \dots, \lambda_n) A \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

#### IV.1.2 Bem:

Falls wir Basen  $\mathcal{B}'$  von  $V$  und  $\mathcal{C}'$  von  $W$  gewählt hätten, dann ist die Darstellungsmatrix von  $\varphi$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^\top \cdot A \cdot \mathcal{M}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \\
 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} &= \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} &= \mathcal{M}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \begin{pmatrix} \mu'_1 \\ \vdots \\ \mu'_m \end{pmatrix} \\
 (\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_n) &= (\lambda'_1 \quad \dots \quad \lambda'_n) \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^\top
 \end{aligned}$$

**Folgerung** Der Rang hängt nicht von der Auswahl der Basen ab  $\Rightarrow \text{Rg}(\varphi)$  ist wohldefiniert.

#### IV.1.3 Def:

Ein Tripel  $(V, W, \varphi)$  ist ein duales Paar, falls  $\dim V = \dim W < \infty$

$\varphi : V \times W \rightarrow K$  ist bilinear und  $\text{Rg}(\varphi) = \dim(V) = \dim(W)$

#### Bem:

Falls  $\varphi : V \times W \rightarrow K$  bilinear ist, dann ist  $\varphi' : W \times V \rightarrow K \quad (w, v) \mapsto \varphi(v, w)$  auch bilinear.

### Aufgabe:

$(V, W, \varphi)$  duales Paar  $\Rightarrow (W, V, \varphi')$  auch!

### IV.1.4 Lemma:

$V, W$  fest

$$\begin{array}{ccc}
\underbrace{\{\varphi : V \times W \rightarrow K\}}_{\text{bilinear}} & \xleftrightarrow{\text{Bijektion } \Phi} & \underbrace{\{F : V \rightarrow W^*\}}_{\text{linear}} \\
\\
\varphi : V \times W \rightarrow K & \xrightarrow{\Phi} & \begin{array}{l} F_\varphi : V \rightarrow W^* \\ v \mapsto F_\varphi(v) : \end{array} \quad \begin{array}{l} W \rightarrow K \\ w \mapsto \varphi(v, w) \end{array} \\
\\
\begin{array}{l} \varphi_F : V \times W \rightarrow K \\ (v, w) \mapsto F(v)(w) \end{array} & \xleftarrow{\Phi^{-1}} & F : V \rightarrow W^*
\end{array}$$

Ferner, falls  $\dim V, \dim W < \infty$ :

$$\begin{aligned}
(V; W; \varphi) \text{ duales Paar} & \Leftrightarrow F_\varphi : V \rightarrow W^* \text{ Isomorphismus} \\
& \Phi^{-1} \circ \Phi(\varphi)(v, w) \\
& \Phi^{-1} \left( F_\varphi(v) : w \mapsto \varphi(v, w) \right) = \varphi(v, w)
\end{aligned}$$

### IV.1.5 Wiederholung

$\varphi : V \times W \rightarrow K$  Bilinearform

$\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_n\}$  von  $V$

$\mathcal{C} = \{c_1 \dots c_m\}$  von  $W$

$\varphi$  hat eine Darstellungsmatrix

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \varphi(b_1, c_1) & \dots & \varphi(b_1, c_m) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(b_n, c_1) & \dots & \varphi(b_n, c_m) \end{pmatrix}$$

$$\varphi \left( \sum \lambda_i b_i, \sum \mu_j c_j \right) = (\lambda_1 \dots \lambda_n) A_\varphi \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}$$

$\text{Rg}(\varphi)$  ist eindeutig bestimmt.

$(V, W, \varphi)$  ist ein duales Paar, falls  $\dim V = \dim W < \infty$

$$\parallel \\ \text{Rg}(\varphi)$$

$\varphi : V \times W \rightarrow K$  duales Paar

$\rightarrow \varphi' = W \times V \rightarrow K, (w, v) \mapsto \varphi(v, w)$  duale

#### IV.1.6 Bew:

$\Phi$  ist Wohldefiniert

$F_\varphi(v) \in W^*$ , weil  $\varphi(v, ???-)$  linear in der Koordinate ist  $F_\varphi$  ist linear weil  $\varphi$  linear in der ersten Koordinate ist (da es Wohldefiniert ist)

$$\Phi^{-1} \circ \Phi = Id_\chi$$

$$\Phi \circ \Phi^{-1} = Id_y$$

Falls  $V, W$  endlich dimensional sind, mit Basen  $\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_n\}$ ,  $\mathcal{C} = \{c_1 \dots c_m\}$ ,  $A_\varphi$  die Darstellungsmatrix von  $\varphi$  bzg. dieser Basen

$$A_\varphi = (a_{ij}) \\ \parallel \\ \varphi(b_i, c_j)$$

Sei  $\mathcal{C}^* = \{c_1^* \dots c_m^*\}$  die duale Basis zu  $\mathcal{C}$  in  $W^*$

$$c_i^*(c_j) = \delta_{ij}$$

Die Darstellungsmatrix von

$F_\varphi$  bzg.  $\mathcal{B}, \mathcal{C}^*$

$$(\lambda_{kl}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$$

$$F_\varphi(b_k) = \sum \lambda_{lk} c_l^*$$

$$F_\varphi(b_k)(c_r) = \varphi(b_k, c_r)$$

$$\parallel \\ (\sum \lambda_{lk} c_l^*)(c_r)$$

$$= \sum \lambda_{lk} c_l^*(c_r) = \lambda_{rk}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots \\ \lambda_{21} & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix} = A_\varphi^\top$$

Wobei  $\lambda_{12} = \varphi(b_2, c_1) = a_{21}$ , und  $\lambda_{21} = a_{12}$

$$\operatorname{Rg}(A_\varphi^\top) = \operatorname{Rg}(A_\varphi)$$

$$(V, W, \varphi) \text{ ist ein duales Paar} \Leftrightarrow \dim V = \dim W = \operatorname{Rg}(A_\varphi)$$

$$\begin{array}{ccc} & \parallel & \parallel \\ & \dim W^* & \operatorname{Rg}(A_\varphi^\top) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow F_\varphi \text{ Isomorphismus.}$$

#### IV.1.7 Kor:

Seien  $V, W$  endlich dimensional,  $\varphi : V \times W \rightarrow K$  Bilinearform. Dann ist  $(V, W, \varphi)$  duales Paar, genau dann wenn  $\varphi$  nicht-ausgeartet ist d.h.

$$a) \forall v \in V : \varphi(v, w) = 0 \quad \forall w \in W \Rightarrow v = 0$$

$$b) \forall w \in W : \varphi(v, w) = 0 \quad \forall v \in V \Rightarrow w = 0$$

#### IV.1.8 Bew:

$\Rightarrow$

- a) Sei  $v \in V$  fest  $\varphi(v, w) = 0 \quad \forall w \in W$   
 $\varphi(v, w) = F_\varphi(v)(w) \Rightarrow F_\varphi(v) = 0$  als Abbildung  $\Rightarrow v = 0$   
 $(V, W, \varphi)$  duales Paar  $\Rightarrow F_\varphi$  Isomorphismus
- b)  $(V, W, \varphi)$  duales Paar  $\Rightarrow (W, V, \varphi')$  auch dual  $\Rightarrow F_{\varphi'} : W \rightarrow V^*$  Isomorphismus  
 $v \in V, \varphi(v, w) = 0 \quad \forall w \in W$   
 $\varphi(v, w) = 0 = \varphi'(w, v) = F_{\varphi'}(w)(v) \Rightarrow F_{\varphi'}(w) = 0 \Rightarrow w = 0$

$\Leftarrow$  Es genügt zu zeigen, dass  $F_\varphi : V \rightarrow W^*$  Isomorph ist:  
Eigenschaft:

- a)  $\Rightarrow F_\varphi$  Isomorph (bijektiv)  
 $\Rightarrow \dim V \leq \dim W^* = \dim W$   
es genügt zu zeigen, dass  $\dim V = \dim W^*$  (da  $F_\varphi$  injektiv) und, dass  
daraus folgt:  $(W, V, \varphi') \quad (\varphi' = \text{bilinearform})$
- b)  $\Rightarrow F_{\varphi'} : W \rightarrow V^*$  injektiv  $\Rightarrow \dim W = \dim V^* = \dim V$   
 $\Rightarrow \dim V = \dim W$

□

**Beispiel:**

$$(\mathbb{R}^2, <, >)$$

$$< x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n > = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}.$$

$$< (x_1 \dots x_n), (1, 0 \dots 0) > = x_1 = 0$$

#### IV.1.9 Kor:

Sei  $(V, W, \varphi)$  ein duales Paar. Für jede Basis  $\{c_1 \dots c_n\}$  aus  $W$  gibt es eine Basis  $\{b_1 \dots b_n\}$  aus  $V$ , welche „dual“ zu  $\{c_1 \dots c_n\}$  ist:

$$\varphi(b_i, c_j) = \delta_{ij}$$

#### IV.1.10 Bew:

Für  $\{c_1 \dots c_n\}$  aus  $W$  eine Basis. Sei  $\{c_1^* \dots c_n^*\}$  die duale Basis aus  $W^*$

$$F_\varphi : V \rightarrow W^* \text{ Iso}$$

Sei  $b_i = F_\varphi^{-1}(c_i^*)$ ,  $\{b_1 \dots b_n\}$  ist eine duale Basis von  $V$

$$\varphi(b_i, c_j) = \underbrace{F_\varphi(b_i)}_{\parallel c_i^*}(c_j) = \delta_{ij}$$

□

#### IV.1.11 Def:

Sei  $(V, W, \varphi)$  ein duales Paar.  $U \subset V$  Unterraum von  $V$ .  
Definiere

$$U^\perp = \{w \in W \mid \varphi(u, w) = 0 \forall u \in U\}$$

#### Bem:

$U^\perp$  ist ein Unterraum von  $W$ .

$$(0)^\perp = W$$

$$V^\perp = \{0\}, \text{ weil } \varphi \text{ nicht-ausgeartet ist!}$$

$$U \subset V$$

$$(U^\perp)^\perp = \{v \in V \mid \forall w \in U^\perp \varphi(v, w) = 0\}$$

$$\parallel$$

$$U$$

#### IV.1.12 Bew:

$$U \subset (U^\perp)^\perp$$

$$u \in U \Rightarrow u \in (U^\perp)^\perp \Rightarrow \forall w \in U^\perp, \varphi(u, w) = 0$$

Sei  $v \notin U$ .

z.zeigen:  $v \notin (U^\perp)^\perp$

Es gibt  $G : V \rightarrow K$  derart,  $G \upharpoonright U = 0$ ,  $G(v) = 1$

$$G \in V^* \simeq W \quad F_{\varphi'} \text{ (Isomorphismus)}$$

$$\Rightarrow \exists w \in W \quad F_{\varphi'}(w) = G$$

$$\text{D.h. } \forall z \in V \quad G(z) = \varphi'(w, z) = \varphi(z, w)$$

$$u \in U$$

$$0 = G(u) = \varphi(u, w) \rightarrow w \in U^\perp$$

$$1 = G(v) = \varphi(v, w) \rightarrow v \notin (U^\perp)^\perp$$

□

#### IV.1.13 Lemma:

Sei  $(v, w, \varphi)$  ein duales Paar  $U \subset V$  ein UVR

Dann ist  $(V/U, U^\perp, \tilde{\varphi})$  duales Paar, wobei  $\tilde{\varphi}(v + u, w) = \varphi(v, w)$

Insbesondere gilt

$$\dim V = \dim U + \dim U^\perp$$

#### Bew:

Übungsaufgabe

$$(V/U, U^\perp, \varphi^\perp) \quad \text{ein duales Paar}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\dim V/U}_{\dim V - \dim U} = \dim U^\perp$$

#### IV.1.14 wiederholung

$V, W$  endlich,  $(V, W, \varphi)$  duales Paar

$$\Leftrightarrow \dim V = \dim W = \text{Rg}(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow F_\varphi : V \rightarrow W^* \text{ Isom.}$$

$$v \mapsto F_\varphi(v), \quad W \rightarrow K, \quad w \mapsto \varphi(v, w)$$

$$\Leftrightarrow \varphi \text{ nicht-ausgeartet ist: } \varphi(v, -) : W \rightarrow K \text{ die Null Abbildung} \Rightarrow v = 0$$



$\varphi(-, w) : V \rightarrow K$  die Null Abbildung  $\Rightarrow w = 0$

$U \subset V$  UR,  $U^\perp = \{w \in W \mid \varphi(u, w) = 0\}$  UR

$\rightarrow (U^\perp)^\perp = U \rightarrow \dim V = \dim U + \dim U^\perp$

$\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_n\}$  Basis von  $V$

ist dual zu der Basis von  $W$   $\{c_1 \dots c_n\}$  falls  $\varphi(b_i, c_j) = \delta_{ij}$

#### IV.1.15 Def:

Sei  $(V, W, \varphi)$  duales Paar und  $G : W \rightarrow W$  Endomorphismus.

Der adjungierte Endomorphismus  $G^\top : V \rightarrow V$  wird definiert als

$$G^\top : F^{-1} \circ G^* \circ F_\varphi$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{F_\varphi^{-1}} & W^* \\ G^\top \uparrow & & \uparrow G^* \\ V & \xrightarrow{F_\varphi} & W^* \end{array} \quad \begin{array}{c} W \\ \downarrow G \\ W \end{array}$$

$$G^*(\Phi) = \Phi \circ G \quad \Phi \circ ??? G(oder w) \rightarrow K$$

#### Bem:

$G^*$  ist eindeutig bestimmt durch die Gleichung

$$\varphi(G^\top(v), w) \stackrel{(*)}{=} \varphi(v, G(w)) \quad \forall v \in V, \forall w \in W$$

#### IV.1.16 Bew: Eindeutigkeit

Falls  $G : V \rightarrow V$  die selbe Eigenschaft erfüllt

$$\begin{aligned} \varphi(G_1(v) - G^*(v), w) &= \varphi(G(v), w) - \varphi(G^\top(v), w) \\ &\quad \parallel \quad \parallel \\ &= \varphi(v, G(w)) - \varphi(v, G(w)) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G_1(v) = G_1^\top \Rightarrow G_1 = G^\top \quad \forall v \in V, \forall w \in W \quad \varphi \text{ nicht-ausgeartet}$$

**zu Zeigen:**  $G^\top$  die Eigenschaft (x) besitzt.

Seien  $v \in V, w \in W$

$$\varphi(v, G(w)) = F_\varphi(v)(G(w))$$

$$\varphi(v, G(w)) = \underbrace{F_\varphi(v)}_{\in W^*} \circ G(w)$$

$$\begin{aligned} G^\top(v) &= v_1 \\ \parallel & \\ F_\varphi^{-1} \circ G^* \circ F_\varphi(v) &\Leftrightarrow G^* \circ F_\varphi(v) = F_\varphi(w) \end{aligned}$$

$\rightarrow \forall w \in W :$

$$\begin{aligned} & \varphi(G^*(v), w) \\ & \parallel \\ F_\varphi(v_1)(w) &= \varphi(v_1, w) \\ & \parallel \\ \underbrace{G^* \circ F_\varphi(v)(w)}_{\in W^*} &= \varphi(v, G(w)) \end{aligned}$$

□

## IV.2 Euklidische Räume

### IV.2.1 Def:

Eine Bilinearform  $\varphi : V \times V \rightarrow K$  ist symmetrisch, falls  $\varphi = \varphi'$

$$\Leftrightarrow \forall u, v \in V : \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$$

**Bem:**

Seien  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  Basen von  $V$  und  $A$  die Darstellungsmatrix von  $\varphi$  bzgl.  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ .

$$\varphi \text{ symmetrisch} \Leftrightarrow A = A^\top = (\varphi(b_i, c_j))$$

### IV.2.2 Bew:

$\Rightarrow$  Siehe Übungsblatt

$\Leftarrow$

$$\begin{aligned}
\varphi(u, v) &= u^\top \cdot A \cdot v \\
&= (A^\top \cdot u)^\top \cdot v \\
&= v^\top \cdot \left( (A^\top \cdot u)^\top \right)^\top \\
&= v^\top \cdot \underset{\substack{\parallel \\ A}}{A^\top} \cdot u = \varphi(v, u)
\end{aligned}$$

**Bem:**

$\varphi$  symmetrisch

$\Rightarrow$  Der Begriff der Orthogonalität ist wohldefiniert und vor allem symmetrisch

$$\begin{aligned}
u \perp v &\Leftrightarrow \varphi(u, v) = 0 \\
&\Updownarrow \\
v \perp u &\Leftrightarrow \varphi(v, u) = 0
\end{aligned}$$

**Beispiel**

$\mathbb{R}^n$

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ symmetrisch}$$

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$$

**IV.2.3 Def:**

Sei  $\varphi : V \times V \rightarrow K$  symmetrische Bilinearform.

Die zugehörige quadratische Form:

$$\begin{aligned}
g : V &\rightarrow K \\
v &\mapsto \varphi(v, v)
\end{aligned}$$

### Anmerkung:

$\dim V = n$

Sei  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  eine Basis  $\rightarrow \varphi$  hat Darstellungsmatrix  $\underline{\underline{A}}$  bzgl.  $\mathcal{B}$ .

$$\begin{aligned} q(v) &= \varphi(v, v) = \varphi\left(\sum \lambda_i b_i, \sum \lambda_j b_j\right) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \sum a_{ij} \lambda_i \lambda_j \end{aligned}$$

### Folgerung:

(char  $K \neq 2$ )

Jede symmetrische Bilinearform ist durch ihre quadratische Form eindeutig bestimmt.

$$\begin{aligned} q(u+v) &= \varphi(u+v, u+v) \\ &= \varphi(u, u) + \varphi(v, u) + \varphi(u, v) + \varphi(v, v) \\ &= \underbrace{\varphi(u, u)}_{q(u)} + \underbrace{\varphi(v, v)}_{q(v)} + 2\varphi(u, v) \\ q(u-v) &= \dots = q(u) + q(v) - 2\varphi(u, v) \end{aligned}$$

Insb:

$$\varphi(u, v) = \frac{q(u+v) - q(u-v)}{4}$$

### IV.2.4 Def:

Sei  $V$  ein endlich dimensionaler  $\mathbb{R}$ -VR. und  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  Symmetrische Bilinearform. Wir sagen,  $\varphi$  ist:

1. positiv semidefinit, falls  $\varphi(u, u) \geq 0 \ \forall u \in V$
2. negativ semidefinit, falls  $\varphi(u, u) \leq 0 \ \forall u \in V$
3. positiv definit, falls  $\varphi$  pos. semidefinit ist und  $\varphi(v, v) > 0 \ \forall v \in V \setminus \{0\}$
4. negativ definit, falls  $\varphi$  neg. semidefinit ist und  $\varphi(v, v) < 0 \ \forall v \neq 0$
5. indefinit sonst.

**Beispiele:**

- (a) Standard Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  ist positiv def.
- (b)  $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1 y_1$  ist positiv semidefinit aber nicht pos.def.  $\varphi((0, 1), (0, 1)) = 0$
- (c)  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1 y_1 - x_2 y_2$  indefinit

**Bem:**

$\varphi$  ist posit (semi)-def.,  $-\varphi$  ist neg (semi)-def.

**IV.2.5 Def:**

Ein Skalarprodukt auf einem endlichdimensionalen  $\mathbb{R}$ -VR  $V$  ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform:  $\varphi(u, v) \xrightarrow{\text{bijektion ???}} \langle u, v \rangle$

**IV.2.6 Def:**

$(V, \langle, \rangle)$  ist ein euklidischer Raum, wenn  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -VR endlichdimensional und  $\langle, \rangle$  ein Skalarprodukt ist.

**IV.2.7 Def: Norm**

Eine Norm auf einem  $\mathbb{R}$ -VR  $V$  ist eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  derart, dass:

1.  $\|v\| \geq 0, \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2.  $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \|v\|$
3. Dreiecksungleichung  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$(V, \|\cdot\|)$  ein normierter  $\mathbb{R}$ -VR ist

**Beispiele:**  $\mathbb{R}^n$ 

- (a) Euklidische Norm  $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
- (b)  $\|\vec{x}\|_{\infty} = \sum |x_i|$
- (c)  $\|\vec{x}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

#### IV.2.8 Def:

Sei  $(V, \langle, \rangle)$  ein euklidischer Raum und definiere  $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$  wohldefiniert. Wir wollen Zeigen, dass es eine Norm auf  $V$   
induziert.

#### IV.2.9 Lemma

(Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung)

$$\forall v, w \in V$$

$$| \langle v, w \rangle | \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

#### IV.2.10 Bew:

Falls  $w = 0 \rightarrow$  ok!

OBdA ist  $w \neq 0 \rightarrow \|w\| > 0$

Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$  beliebig

$$0 \leq \langle v - \lambda w, v - \lambda w \rangle = \|v\|^2 + \lambda^2 \|w\|^2 - 2\lambda \langle v, w \rangle$$

Insb:

$$2\lambda \langle v, w \rangle \leq \|v\|^2 + \lambda^2 \|w\|^2$$

Falls

$$\lambda = \frac{\langle v, w \rangle}{\underbrace{\|w\|^2}_{\neq 0}} \in \mathbb{R}$$

$$2 \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2} \leq \|v\|^2 + \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2} \Rightarrow \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2} \leq \|v\|^2$$

$$\rightarrow \langle v, w \rangle^2 \leq \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$$

$$\rightarrow | \langle v, w \rangle | \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

□

#### IV.2.11 Folgerung:

$(V, \langle, \rangle)$  euklidischer Raum

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle} \end{aligned}$$

ist eine Norm.

#### IV.2.12 Bew:

1) klar

$$2) \|\lambda \cdot v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle v, v \rangle} = |\lambda| \cdot \|v\|$$

3) Es genügt zu zeigen, dass  $\|u + v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + 2 \langle u, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

#### IV.2.13 Def:

$(V, \langle, \rangle)$  euklidischer Raum

$$-1 \leq \underbrace{\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}}_{\substack{\| \\ \cos \theta}} \leq 1$$

$\theta \in [0, \pi]$  eindeutig bestimmt.

$\theta$  ist der Winkel zwischen  $u$  und  $v$

#### Bem:

$u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow$  der Winkel  $\frac{\pi}{2}$  ist

$$u \uparrow \rightarrow v$$

## IV.2.14 Wiederholung

$\varphi : V \times V \rightarrow K$  symmetrisch gdw  $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$

$\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  eine Basis von  $V$

$A = (\varphi(b_i, b_j))$  Darstellungsmatrix von  $\varphi$

$\varphi$  symmetrisch  $\Leftrightarrow A = A^\top$

$g(v) = g(\sum(\lambda_i b_i)) = \sum a_{ij} \lambda_i \lambda_j$

$\text{char } k \neq 2 \rightarrow q$  bestimmt  $\varphi$

$\varphi(u, v) = \frac{q(u+v) - q(u-v)}{4}$

$\varphi$  symmetrisch ist positiv definit, falls  $\varphi(u, u) = q(u) \geq 0 \leftarrow$  Körper ist  $\mathbb{R}$

$q(u) = 0 \Rightarrow u = 0$

Ein Skalarprodukt auf einem  $\mathbb{R}$ -VR  $V$  ist eine symmetrische positiv definite

Bilinearform  $\varphi(u, v) \rightarrow \langle u, v \rangle$

$\|v\| = \sqrt{q(v)} = \sqrt{\langle v, v \rangle}$  Norm.

1)  $\|v\| \geq 0 (= 0 \Leftrightarrow v = 0)$

2)  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

3)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung  $|\langle v, v \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

$$-1 < \underbrace{\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}}_{\substack{\| \\ \cos \theta, \theta \in [0, \pi]}} < 1$$

$\theta$  ist Winkel zwischen  $v$  und  $w$ .

$v \perp w$  (orthogonal)

$\Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$

$\Leftrightarrow$  Der Winkel ist  $\frac{\pi}{2}$

## IV.3 Satz (Pythagoras)

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  endlichdimensionaler Raum

$v \perp w \Leftrightarrow \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$



### IV.3.1 Bew:

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + 2\langle v, w \rangle \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle \\ \text{mit: } v \perp w &\Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0 \Leftrightarrow \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2\end{aligned}$$

### IV.3.2 Def:

$\varphi : V \times V \rightarrow K$  symmetrische Bilinearform

Ein orthogonales System bzgl.  $\varphi$  ist eine Kollektion  $M$  von Vektoren  $0 \notin M$   $u, v \in M$  verschieden  $\varphi(u, v) = 0$

Ein orthonormales System  $M$  ist eine Kollektion von Vektoren

$$\varphi(u, v) = \begin{cases} 0 & v \neq u \\ 1 & u = v \end{cases}$$

Dementsprechend definieren wir Orthogonalbasis und Orthonormalbasis (ONB)

**Beispiel:** Standardbasis  $\{o_1, \dots, o_k\}$   $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$   
standard skalarprodukt

## IV.4 Satz

$(\text{Char}(K) \neq 2)$

Jede Symmetrische Bilinearform  $\varphi$  auf einem endlich dimensionalen  $K$ -VR  $V$  lässt sich bei einer geeigneten Basisauswahl durch eine Diagonalmatrix darstellen. Ferner ist  $\varphi$  nicht-ausg.  $\Leftrightarrow$  kein Eigenwert der Matrix null ist.

### Bem:

Es genügt zu zeigen, dass  $(V, \varphi)$  eine Basis  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  besitzt welche aus paarweise orthogonalen Vektoren besteht.

Dann ist die Darstellungsmatrix von  $\varphi$  bzgl.  $\{b_1, \dots, b_n\}$

$$\begin{pmatrix} \varphi(b_1, b_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi(b_2, b_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi(b_n, b_n) \end{pmatrix}$$

Sei  $q : V \rightarrow K \ v \mapsto \varphi(u, v)$  die zugehörige quadratische Form

Falls  $q(v) = 0 \ \forall v \in V$

$\rightarrow \varphi(u, v) = 0 \ \forall u, v \in V$

$\rightarrow$  Jede Basis von  $V$  besteht aus paarweise orthogonalen Vektoren.

Sonst, existiert  $b_1 \in V \setminus g(b_1) \neq 0, \quad F : V \rightarrow K, \ v \mapsto \varphi(v, b_1)$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \varphi(b_1, b_1) \end{array}$$

$$\text{Im}(F) = K \text{ als } \underline{K\text{-VR}}$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ \dim \ker(F) = n-1 \end{array}$$

$$\ker(F) = \{v \in V \setminus \varphi(v, b_1) = 0\} = \{v \in V \setminus v \perp b_1\} = \text{Span}(b_1)^\perp$$

Induktion auf die Dimension von  $V \Rightarrow$  Es existiert eine Basis  $b_1 \dots b_n$  von  $\ker(F)$  welches aus paarweise orthogonal Vektoren besteht.

Die Basis  $\{b_1, \dots, b_n\}$  ist eine orthogonale Basis von  $\underline{V}$ .

### Bem:

Die Eigenwerte der Matrix hängen nicht von der Basis ab

$\rightarrow$  Eigenwerte sind  $\varphi(b_1, b_1), \dots, \varphi(b_n, b_n)$

$$\begin{array}{cc} \parallel & \parallel \\ \mu_1 & \mu_n \end{array}$$

$\Rightarrow$  Angenommen, dass

$$\mu_j = \varphi(b_j, b_j) = 0$$

wäre

$$\varphi(b_j, b_i) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

$i$  beliebig

$\varphi(b_j, -) : V \rightarrow K$  ist die triviale Abbildung  $\Rightarrow$  Wid!  $b_j \neq 0$

$\Leftarrow$  Sei  $v \in V \setminus \{0\}$  beliebig.

**Zu Zeigen:**  $\varphi(v, -) : V \rightarrow K$  nicht trivial ist

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \rightarrow \exists i / \lambda_i \neq 0$$

$$\varphi(v, b_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi(b_j, b_i) = \overset{0}{\cancel{\lambda_j}} \overset{0}{\cancel{\varphi(b_j, b_i)}} = \lambda_i \varphi(b_i, b_i) \neq 0$$

#### IV.4.1 Kor:

(char  $k \neq 2$ )

Falls in  $K$  jedes Element ein Quadrat ist, dann lässt sich jede symmetrische

Bilinearform durch eine Matrix der Form  $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$  darstellen.

#### IV.4.2 Bew:

Es existiert eine Orthogonalbasis  $\{b_1, \dots, b_n\}$  für  $\varphi : V \times V \rightarrow K$ .

$$c_i = \begin{cases} \frac{b_i}{\sqrt{\varphi(b_i, b_i)}} & \varphi(b_i, b_i) \neq 0 \\ b_i & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\{c_1, \dots, c_n\}$  ist immer noch eine Basis.

OBdA können wir annehmen, dass  $c_1, \dots, c_n$  ist so umgeordnet, dass

$$\begin{aligned} \varphi(c_i, c_i) &= 1 & i \leq k \\ \varphi(c_j, c_j) &= 0 & j > k \end{aligned}$$

Darstellungsmatrix von  $\varphi$  bzgl.  $\{c_1, \dots, c_n\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ \ddots \\ 1 \\ 0 \\ \ddots \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} k \text{ mal} \\ \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ \ddots \\ 1 \\ 0 \\ \ddots \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} n - k \text{ mal} \end{matrix}$$

#### IV.5 Kor: (Sylvester)

Jede Symm. Bilinearform  $\varphi$  auf einem endlich dimensionalen  $\mathbb{R}$ -VR lässt sich bei geeigneter Basisauswahl durch eine Matrix der form

darstellen. Ferner hängen die Zahlen  $p, g$  und  $r$  nur von  $\varphi$  ab.

Sei  $\{b_1 \dots b_n\}$  eine Orthogonalbasis für  $\varphi$

Nach Umordnen der Darstellungsmatrix

9

**Bem:**

$\varphi \upharpoonright \text{Span}(c_1, \dots, c_p) \times \text{Span}(c_1, \dots, c_p)$  ist positiv definit.

**IV.5.2 Bew: falsch:**

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i c_i, \sum_{i=1}^p \lambda_i c_i\right) = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \varphi(c_i, c_j) = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2$$

Sei  $U \subset V$  der größte UR von  $V$  derart, dass  $\varphi \upharpoonright U \times U$  positiv definit ist.

$\text{span}(c_1, \dots, c_p) \subset U$

zu zeigen  $\boxed{p = \dim U}$  ✓

Sonst  $U \cap \text{span}(c_{p+1}, \dots, c_n) \neq 0$

Sei

$$0 \neq v \in U \cap \text{span}(c_{p+1}, \dots, c_n) \quad v = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i c_i$$

da  $v \in U$   $\varphi \upharpoonright_{U \times U}$  positiv definit

$$0 \leq \varphi(v, v) = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i^2 \overbrace{\varphi(c_i, c_i)}^{\leq 0} \leq 0$$

$\Rightarrow v = 0 \rightarrow \underline{\text{Wid.}}$

$g, r$  bestimmen

$\text{Rg}(\varphi) = \underline{p} + q \rightarrow$  ist eindeutig bestimmt

$r = n - \text{Rg}(\varphi) \rightarrow$  eindeutig bestimmt

**IV.5.3 Def:**

Signatur  $(\varphi) = \underline{\underline{q - p}}$

**IV.5.4 Wiederholung**

$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto 2x_1x_2 - y_1y_2$

$\varphi$  ist positiv definit auf  $\text{span}((1, 0)) \quad \varphi((\lambda, 0), (\lambda, 0)) = 2\lambda^2 \geq 0$

$\varphi$  ist positiv definit auf  $\text{span}((1, 1)) \quad \varphi((\lambda, \lambda), (\lambda, \lambda)) = \lambda^2 \geq 0$

$\varphi$  ist nicht positiv definit auf  $\text{span}((1, 0)) + \text{span}((1, 1)) = \mathbb{R}^2$

$\varphi((0, 1), (0, 1)) = -1$

### IV.5.5 Bew: Kor Sylvester

Wir wollen  $p$  eindeutig bestimmen.

$\varphi$  ist positiv definit auf  $\text{span}(c_1, \dots, c_p)$

Sie

$$h = \max\{\dim(U) \mid U \subset V, \varphi \upharpoonright U \times U \text{ pos. definit ist}\}$$

Sei

$U \subset V$  UR der Dimension  $h$  sodass  $\varphi \upharpoonright U \times U$  pos. definit ist.

Wir zeigen:  $U \cap \text{span}(c_{p+1}, \dots, c_n) = \{0\}$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \dim(U) + \quad \overset{\dim \text{span}(c_{p+1}, \dots, c_n)}{\parallel} \quad n - p &= \dim \underbrace{U + \text{span}(c_{p+1}, \dots, c_n)}_{\substack{\subset V \\ \leq n}} \\ \parallel & \\ 0 & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h \leq p$$

# Kapitel V

## Unitäre Räume

### V.1 Def:

Ein unitärer Raum  $V$  ist ein  $\mathbb{C}$ -VR zusammen mit einem komplexen Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \mapsto \mathbb{C}$  mit folgenden Eigenschaften

1.  $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ , wobei  $\overline{a + bi} = a - bi$
2.  $\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$
3.  $\langle \lambda \cdot v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$
4.  $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$  und ferner  $\langle v, v \rangle > 0$  für  $v \neq 0$

**Beispiel**  $\mathbb{C}^n$   $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$

#### V.1.1 Bem:

Die Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist nicht bilinear sondern hermitisch sesquilinear

$$\langle v, \lambda w + \mu w' \rangle = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle + \bar{\mu} \langle v, w' \rangle$$

#### V.1.2 Bew:

$$\begin{aligned} \langle v, \lambda w + \mu w' \rangle &= \overline{\langle \lambda w + \mu w', v \rangle} \\ &= \bar{\lambda} \overline{\langle w, v \rangle} + \bar{\mu} \overline{\langle w', v \rangle} = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle + \bar{\mu} \langle v, w' \rangle \end{aligned}$$

### V.1.3 Bem:

Für einen unitären Raum  $V$  ist

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle} \end{aligned}$$

- 1)  $\|v\| \geq 0 \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- 2)  $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \lambda \in \mathbb{C}$
- 3)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

### Bem:

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  unitärer Raum  $v \perp w \Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$

$\left. \begin{array}{l} \text{Orthogonalität} \\ \text{Orthogonales System} \\ \text{Orthonormales System} \\ \text{Orthogonalbasis} \end{array} \right\} \longrightarrow \text{Wir können die Begriffe hier verwenden.$

## V.2 Def:

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer oder unitärer Raum. Eine Orthonormalbasis von  $V$  ist eine Basis  $\mathcal{B} = \{b_i\} \quad / \quad b_i \perp b_j \quad i \neq j \quad \|b_i\| = 1$

### Bem:

Jedes orthogonales System ist linear unabhängig.

### V.2.1 Bew:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i &= 0 \\ \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i, b_j \rangle &= 0 \\ \parallel & \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle b_i, b_j \rangle &= \lambda_j \langle b_j, b_j \rangle \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

□



## V.3 Lemma

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer oder unitärer Raum und  $\{b_1, \dots, b_n\}$  eine ONB. Dann

1.

$$\forall v \in V \quad v = \sum_{i=1}^n \langle v, b_i \rangle b_i$$

2.

$$\begin{aligned} v &= \sum \lambda_i b_i \\ w &= \sum \mu_i b_i \end{aligned} \Rightarrow \langle v, w \rangle = \sum \lambda_i \overline{\mu_i}$$

3.  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus. Dann ist die Darstellungsmatrix  $A$  von  $F$  bzgl.  $\{b_1, \dots, b_n\}$  gegeben durch  $a_{ij} = \langle F(b_j), b_i \rangle$

### V.3.1 Bew:

$$1) \quad v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \quad \langle v, b_j \rangle = \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i \langle b_i, b_j \rangle}_{\substack{\parallel \\ \lambda_j}}$$

$$2) \quad \langle \sum \lambda_i b_i, \sum \mu_j b_j \rangle = \sum_{i,j} \lambda_i \overbrace{\mu_j \langle b_i, b_j \rangle}^{\substack{\delta_{ij} \\ \parallel}} = \sum \lambda_i \overline{\mu_i}$$

$$3) \quad A = \left( \underbrace{a_{ij}}_{F(b_1) \dots F(b_n)} \right) \quad a_{ij} \text{ ist die Koordinate von } F(b_j) \text{ bzgl. } b_i$$

$$\Downarrow 1) \\ a_{ij} = \langle F(b_j), b_i \rangle$$

### V.3.2 Satz: (Geom-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren)

Sei  $V$  ein euklidischer oder unitärer Raum. Gegeben  $\{v_1, \dots, v_n\}$  lin. unabh. dann gibt es ein orthonormalsystem  $\{e_1, \dots, e_n\}$  derart, dass

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n) = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$$

Insb., falls  $V$  endlichdim ist, besitzt  $V$  eine ONB.

### V.3.3 Bew:

Zwei Schritte:

- Aus  $v_1 \dots v_n$  konstruieren wir eine Basis welche aus orthogonalen Vektoren besteht
- Dann normalisieren:  $e_1 \dots e_n$  werden rekursiv definiert

$$e'_1 = v_1 \xrightarrow{v_1 \neq 0} e_1 = \frac{e'_1}{\|e'_1\|}$$

Angenommen  $e_1 \dots e_n$  wurden konstruiert, so dass

$$e_i \perp e_j \quad i \neq j \quad \|e'_1\| = 1$$

und  $\text{span}(e_1 \dots e_n) = \text{span}(v_1 \dots v_n)$  Wir wollen

$$e_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle v_{k+1}, e_i \rangle e_i$$

$e'_{k+1} \neq 0 \rightarrow$  sonst ist  $v_{k+1} \in \text{span}(e_1, \dots, e_n) = \text{span}(v_1, \dots, v_n)$  Wid! □

Setze

$$e_{k+1} = \frac{e'_{k+1}}{\|e'_{k+1}\|}$$

zu zeigen:

$$e_{k+1} \perp e_{j \leq k} :$$

$$\begin{aligned} \langle e_{k+1}, e_j \rangle &= \frac{1}{\|e'_{k+1}\|} \langle v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle v_{k+1}, e_i \rangle e_i, e_j \rangle \\ &= \frac{1}{\|e'_{k+1}\|} \left( \langle v_{k+1}, e_j \rangle - \underbrace{\sum_{i=1}^k \langle v_{k+1}, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle}_{\langle v_{k+1}, e_j \rangle} \right) = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\text{span}(e_1 \dots e_{k+1}) = \text{span}(v_1 \dots v_{k+1})$$

$$e_{k+1} \in \text{span}(v_{k+1}, e_1 \dots e_k) = \text{span}(v_{k+1}, v_1 \dots v_k)$$

$$v_{k+1} = \|e_{k+1}\| e_{k+1} + \sum_{j=1}^k \langle v_{k+1}, e_j \rangle e_j \in \text{span}(e_1 \dots e_{k+1})$$

### V.3.4 Kor:

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  euklidisch oder unitär endlichdimensional und  $D \subset V$  ein Orthogonalsystem. Dann  $\exists$  ONB  $B \supset D$

### V.3.5 Bem:

Sei  $D = \{v_1, \dots, v_k\}$  und ergänze zu einer Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$ .  $\rightarrow$  Konstruiere eine ONB  $\{e_1, \dots, e_n\}$   
zu zeigen:  $e_i = v_i \quad i \leq k$

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = v_1$$

Annahme  $e_j \equiv v_j \quad j \leq i$

$$e_{i+1} = \frac{v_{i+1}}{\|v_{i+1}\|} = v_{i+1} - \sum_{j=1}^i \underbrace{\langle v_{i+1}, e_j \rangle}_{=0} e_j$$

### V.3.6 Def:

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  euklidisch und unitär

Zwei Teilmengen  $A, B$  von  $V$  sind orthogonal,  $A \perp B$  falls  $v \perp w \quad \forall v \in A, \forall w \in B$

### Bem:

$A \perp B \Leftrightarrow \text{span}(A) \perp \text{span}(B)$

in Blatt 7 Aufgabe 3 schon gezeigt

### V.3.7 Def:

$A \subset B$  Teilmenge

$$\begin{aligned} A^\perp &= \{v \in V \mid \{v\} \perp A\} \\ &= \{v \in V \mid \forall w \in A \quad v \perp w\} \end{aligned}$$

### Bem:

$A^\perp$  ist ein Unterraum von  $V$

**Bem:**

$$A^\perp = \text{span}(A)^\perp$$

**V.3.8 Bew:**

$\boxed{\subset}$

$$\begin{aligned} A^\perp \perp A & \quad \Downarrow \\ A^\perp \subset \text{span}(A)^\perp & \Leftrightarrow A^\perp \perp \text{span}(A) \end{aligned}$$

$\boxed{\supset}$

$$\begin{aligned} v \in \text{span}(A)^\perp & \Rightarrow \forall w \in \overbrace{\text{span}(A)}^{\supset A} \\ v \perp w & \Rightarrow \forall w \in A \quad v \perp w \\ & \Rightarrow v \in A^\perp \end{aligned}$$

**V.3.9 Satz:**

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  euklidisch oder unitär und  $U \subset V$  endlichdim. UR

$$\Rightarrow V = U \oplus U^\perp$$

**V.3.10 Bew:**

$$U \cap U^\perp = \{0\}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  nicht ausgeartet !

Es genügt zu zeigen, dass  $V = U + U^\perp$

1. Fall  $U = \{0\} \rightarrow \text{ok!}$

2. Fall  $U \neq \{0\}$

$\Downarrow U$  endlichdim. Gram-Schmidt

$$\exists \{b_1, \dots, b_n\} \quad \text{ONB von } U$$

Sei  $v \in V$  beliebig.

$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^k \langle v, b_i \rangle b_i}_{\in U} + \overbrace{\left( v - \sum_{i=1}^k \langle v, b_i \rangle b_i \right)}^w$$

Wir müssen zeigen, dass  $w \in U^\perp$

Es genügt, wenn wir zeigen, dass  $w \perp b_i \quad 1 \leq i \leq k$

$$\begin{aligned}
 \langle w, b_i \rangle &= \langle v - \sum_{j=1}^k \langle v, b_j \rangle b_j, b_i \rangle \\
 &= \langle v, b_i \rangle - \sum_{j=1}^k \overbrace{\langle v, b_j \rangle}^{\in K} \underbrace{\langle b_j, b_i \rangle}_{\substack{\parallel \\ 0 \quad 1 \\ i \neq j \quad i = j}} \\
 &= \langle v, b_i \rangle - \langle v, b_i \rangle = 0
 \end{aligned}$$

### V.3.11 Lemma:

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  euklidisch oder unitär

$U \subset V$  endlichdim. UR

$$(U^\perp)^\perp = U$$

### V.3.12 Bew:



$$U \perp U^\perp \Rightarrow U \subset (U^\perp)^\perp$$



Sei  $v \in (U^\perp)^\perp$

$$\text{mit } V = U \oplus U^\perp \Rightarrow v = u + w \quad u \in U \quad w \in U^\perp$$

Es genügt zu zeigen, dass  $w = 0 \Rightarrow v = u \in U$

$$w = \underbrace{v}_{\in (U^\perp)^\perp} - \underbrace{u}_{\in U \subset (U^\perp)^\perp} \in \underbrace{(U^\perp)^\perp \cap U^\perp}_{=0} \Rightarrow \text{ok !}$$

### V.3.13 Def:

Sei  $U \subset V$  UR

Wir definieren die orthogonale Projektion von  $v$  auf  $U$  als den Vektor  $u \in U$

derart, dass  $v = u + \underbrace{w}_{\in U^\perp}$

**Bem:**

Falls  $u$  existiert  $\Rightarrow$  ist er eindeutig bestimmt.

$$\underbrace{u_2}_{\in U} + \underbrace{w_2}_{\in U^\perp} = v = \underbrace{u_1}_{\in U} + \underbrace{w_1}_{\in U^\perp} \Rightarrow u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in \underbrace{U \cap U^\perp}_{=\{0\}}$$

**Bem:**

Falls  $U \subset V$  endlichdim.  $\Rightarrow$  ist die Projektion auf  $U$  wohldefiniert

$\forall v \in V$  existiert  $Pr|_U(v)$  derart, dass  $v = Pr|_U(v) + \underbrace{w}_{\in U^\perp}$

### V.3.14 Satz:

Sei  $U \subset V$  Unterraum,  $v \in V$   $u \in U$

sind folgende Aussagen äquivalent

a)  $Pr|_U(v) = u$

b)  $\forall u_1 \in U \setminus \{0\} \quad ||v - u_1|| > ||v - u||$

### V.3.15 Bew:

$a) \Rightarrow b)$  Es kommt.

$b) \Rightarrow a)$   $v = u + (v - u)$

Es genügt zu zeigen, dass  $v - u \in U^\perp$

Sonst,  $\exists u' \in U \mid \lambda = \langle v - u, u' \rangle \neq 0 \Rightarrow u' \neq 0 \Rightarrow$  OBdA  $||u'|| = 1$

Sei  $u + \lambda \cdot u' \in U \setminus \{u\}$

$$\begin{aligned} ||v - u||^2 &< ||v - \underbrace{(u + \lambda u')}_{\parallel}||^2 \\ &= ||v - u - \lambda u'||^2 \\ &= ||v - u||^2 - \underbrace{\lambda \langle u', v - u \rangle}_{=\bar{\lambda}} - \underbrace{\bar{\lambda} \langle v - u, u' \rangle}_{=\lambda} + \underbrace{\lambda \bar{\lambda} ||u'||^2}_{=1} \\ &= ||v - u||^2 - \underbrace{\lambda \bar{\lambda}}_{||\lambda||^2} - \lambda \bar{\lambda} + \lambda \bar{\lambda} < ||v - u||^2 \quad \text{Wid !} \end{aligned}$$

## V.4 Selbsadjungierte Endomorphismen und Hauptachsentransformationen

**Bem:**

Sei  $(V, \langle, \rangle)$  ein endlichsim. euklidischer Raum

$\rightarrow (V, V, \langle, \rangle)$  ein duales Paar.

Sei  $v \in V$   $\langle v, - \rangle : V \rightarrow \mathbb{R}$  ist nichttrivial, falls  $v \neq 0$

$$\langle v, v \rangle = ||v||^2 \neq 0, \quad \text{falls } v \neq 0$$

Falls  $V$  endlichdim. unitärer Raum ist, dann ist

$$\langle v, - \rangle : V \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{nichttrivial !!}$$

$$\langle v, \lambda w + \mu w' \rangle \neq \lambda \langle v, w \rangle + \mu \langle v, w' \rangle$$

$$\text{aber } = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle + \bar{\mu} \langle v, w' \rangle$$

Lösung:

Wir definieren eine neue Struktur auf  $V$  als  $\mathbb{C}$ -VR

$$\lambda *_{\text{konj}} v = \bar{\lambda} \cdot v$$

Somit ist  $(V, V_{\text{konj}}, \langle, \rangle)$  ein Duales Paar weil

$$\langle v, v \rangle = ||v||^2 \neq 0 \text{ für } v \neq 0$$

Folgerung:

Sei  $V$  endlichdim. unitärer oder euklidischer Raum. Jeder Endomorphismus  $F : V \rightarrow V$  besitzt einen adjungierten Endomorphismus  $F^t : V \rightarrow V$ , sodass  $\forall v, w \in V$

$$\langle v, F(w) \rangle = \langle F^t(v), w \rangle$$

Alternative Beschreibung:

Sei  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  eine ONB von  $V$ .

Seien  $v, w \in V \rightarrow w = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot b_i$   
 $\parallel$   
 $\langle w, b_i \rangle$

$$\begin{aligned}\langle v, F(w) \rangle &= \langle v, \sum_{i=1}^n \langle w, b_i \rangle b_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{\langle w, b_i \rangle} \langle v, F(b_i) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle v, F(b_i) \rangle \langle b_i, w \rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^n \langle v, F(b_i) \rangle \cdot b_i, w \rangle = \langle F^t, w \rangle\end{aligned}$$

$$\Rightarrow F^t(v) = \sum_{i=1}^n \langle v, F(b_i) \rangle b_i$$

#### V.4.1 Def:

Sei  $K = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$

$$a_{ij} = \mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$$

Die adjungierte Matrix  $\mathcal{A}^*$  von  $\mathcal{A}$  ist die Matrix

$$\mathcal{A}^* = (\overline{a_{ji}})$$

**Bem:**

$$\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^t$$

Leicht zu zeigen:

$$(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$$

$$(\lambda \cdot \mathcal{A})^* = \overline{\lambda} \cdot \mathcal{A}^*$$

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$$

$$(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})^* = \mathcal{B}^* \cdot \mathcal{A}^*$$

#### Widerholung:

$(V, \langle \cdot \rangle)$  unitärer/euklidischer Raum



$A \subset V$  Teilmenge

$$A^\perp = \{v \in V \mid \forall w \in A \langle v, w \rangle = 0\}$$

Unterraum

$$U \text{ UR von } V \rightarrow U \cap U^\perp = \{0\}$$

Insbesondere falls  $U$  endlich dim.  $\Rightarrow V = U \oplus U^\perp$

Orthogonale Projektion auf  $U$

$$Pr|_U : V \rightarrow U, v \mapsto u \text{ / } v = u + w \in U^\perp$$

$$\forall u \in U \quad u_1 \neq Pr|_U(v) \Leftrightarrow \|v - u_1\| > \|v - u\|$$

$$F : \underbrace{V}_{\text{endlichdim.}} \rightarrow V \text{ Endomorphismus,}$$

dann ex.

$$F^\top : V \rightarrow V \text{ adjungierter Endomorphismus}$$

$$\langle v, F(w) \rangle = \langle F^\top(v), w \rangle \quad \forall v, w \in V$$

#### V.4.2 Def:

$k = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$$

Die adjungierte Matrix  $A^*$  ist  $A^* = (\overline{a_{ji}})$

$$K = \mathbb{R} \rightarrow A^* = A^\top$$

$$(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$$

$$(\lambda \cdot A)^* = \overline{\lambda} \cdot A^*$$

**Bem:**

Falls  $A$  regulär ist, dann ist  $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$  weil  $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$   $\overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$

#### V.4.3 Lemma:

Sei  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus eines euklidischen bzw. unitären endlich-dim. Raumes  $V$  und  $A$  die Darstellungsmatrix von  $F$  bzgl. der orthonormalen

Basis  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  und  $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_n\}$

Dann hat  $F^\top : V \rightarrow V$  die Darstellungsmatrix  $A^*$  bzgl.  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{B}$ .

#### V.4.4 Bew:

$$F^\top(d_i) = \sum_{j=1}^n \langle F^\top(d_i), b_j \rangle \cdot b_j$$

$$F^\top \rightarrow C = (c \cdot j) \quad F^\top(d_j) = \sum c_{ij} b_j \quad \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}$$

$$A = (c_{ij}) \rightarrow F(b_j) = \sum_{i=1}^n \begin{matrix} a_{ij} & d_i \\ \parallel & \\ \langle F(b_j), d_i \rangle & \end{matrix}$$

$$\overline{a_{ij}} = \overline{\langle F(b_j), d_i \rangle} = \langle d_i, F(b_j) \rangle \stackrel{\text{Def. von } F^\top}{=} \overline{\langle F^\top(d_i), b_j \rangle} = c_{ji}$$

□

#### V.4.5 Def:

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  endlichdim., euklidisch, unitär

$F : V^\top$  ist normal, falls

$$F \circ F^\top F^\top \circ F$$

#### V.4.6 Prop:

Folgende Aussagen sind Äquivalent:

a)  $F : V^\top$  ist normal

b)  $\forall v, w \in V \quad \langle F(v), F(w) \rangle = \langle F^\top(v), F^\top(w) \rangle$

#### V.4.7 Bew:

$$\boxed{a) \Rightarrow b)}$$

$$\begin{aligned} \langle F(v), F(w) \rangle &\stackrel{\text{Def von } F^\top}{=} \langle F^\top(F(v)), w \rangle \stackrel{\text{Normalität}}{=} \\ &= \langle F(F^\top(v)), w \rangle \\ &= \overline{\langle w, F(F^\top(v)) \rangle} \\ &\stackrel{\text{Def von } F^\top}{=} \overline{\langle F^\top(w), F^\top(v) \rangle} \\ &= \langle F^\top(v), F^\top(w) \rangle \end{aligned}$$

$b) \Rightarrow a)$

Zu Zeigen:  $F \circ F^\top(v) = F^\top \circ F(v) \quad \forall v \in V$

Oder Äquivalent dazu, dass

$$F \circ F^\top(v) - F^\top \circ F(v) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall w \in V \quad \langle F \circ F^\top(v) - F^\top \circ F(v), w \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle F \circ F^\top(v), w \rangle = \langle F^\top \circ F(v), w \rangle$$

$$\langle F^\top \circ F(v), w \rangle = \langle F(v), F(w) \rangle$$

$$\parallel \qquad \parallel$$

$$\langle F \circ F^\top(v), w \rangle = \langle F^\top \circ F(v), w \rangle$$

$$\parallel \qquad \parallel$$

$$\langle \overline{w}, \overline{F \circ F^\top(v)} \rangle = \langle \overline{F^\top(w)}, \overline{F^\top(v)} \rangle$$

**Bem:**

$F : V \rightarrow V$

mit Darstellungsmatrix  $A$  bzgl. der ONB  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  von  $V$

$F^\top : V \rightarrow V$  hat Darstellungsmatrix  $A^*$

$$F^\top \circ F \rightarrow A^* \cdot A$$

$$\parallel \qquad \parallel$$

$$F \circ F^\top \rightarrow A \cdot A^*$$

**V.4.8 Def:**

Eine Matrix  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$  ist normal, falls  $A^* \cdot A = A \cdot A^*$

**Folgerung:**

$F$  ist normal gdw.  $F$  eine normale Darstellungsmatrix bzgl. JEDER ONB besitzt.

**V.4.9 Lemma:**

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus normal.

$v \in V$  ist ein Eigenvektor von  $F$  bzgl.  $\lambda$  gdw  $v$  ein Eigenvektor von  $F^\top$  bzgl.  $\overline{\lambda}$

#### V.4.10 Bew:

der Abstand von  $F(v)$  und  $\lambda \cdot v$

$$\begin{aligned}
 \|F(v) - \lambda \cdot v\|^2 &= \langle F(v) - \lambda v, F(v) - \lambda v \rangle \\
 &= \langle F(v), F(v) \rangle - \bar{\lambda} \langle F(v), v \rangle - \lambda \langle v, F(v) \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle \\
 &\quad \parallel \qquad \qquad \parallel \qquad \qquad \parallel \\
 &\quad \langle F^\top(v), F^\top(v) \rangle \quad \langle F^\top(v), v \rangle \quad \langle F^\top(v), v \rangle \\
 &= \langle F^\top(v), F^\top(v) \rangle - \bar{\lambda} \overline{\langle F^\top(v), v \rangle} - \langle F^\top(v), \bar{\lambda} \cdot v \rangle + \langle \bar{\lambda} v, \bar{\lambda} v \rangle \\
 &= \langle F^\top(v), F^\top(v) \rangle - \bar{\lambda} \langle v, F^\top(v) \rangle - \langle F^\top(v), \bar{\lambda} v \rangle + \langle \bar{\lambda} v, \bar{\lambda} v \rangle \\
 &= \langle F^\top(v) - \bar{\lambda} v, F^\top(v) - \bar{\lambda} v \rangle \\
 &= \|F^\top(v) - \bar{\lambda} \cdot v\|^2
 \end{aligned}$$

#### V.4.11 Satz:

Sei  $F : V \rightarrow V$  derart, dass  $\chi_F(T)$  in Linearfaktoren zerfällt. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- a)  $F$  ist normal
- b) Es existiert eine ONB  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  von  $V$ , welche aus Eigenvektoren von  $F$  besteht.

#### Folg

Jeder dnormaler Endomorphismus eines unitärem/euklidischen Raumes ist diagonalisierbar

#### V.4.12 Bew: (satz)

$a) \Rightarrow b)$  Induktion auf  $\dim(V)$

$\dim V = 1$   $\rightarrow F$  besitzt einen Eigenvektor  $v \neq 0$  zum Eigenwert  $\lambda$

$\|v\| \neq 0 \rightarrow \frac{v}{\|v\|}$  ist auch ein Eigenvektor zu  $\lambda$

$\left\{ \frac{v}{\|v\|} \right\}$  ist eine ONB von  $V$ !

$\dim V \geq 2$

$\chi_F(T)$  zerfällt in Linearfaktoren  $(T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$

Sei  $b_i \in V$  Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda_1$ .

$$\begin{array}{c} \nparallel \\ 0 \end{array}$$

OBdA  $\|b_i\| = 187$

$$V = \text{span}(b_i) \oplus \begin{array}{c} U \\ \parallel \\ \text{span}(b_i)^\perp \end{array} \quad \dim U = \underline{n-1}$$

□

### V.4.13 Beh:

U ist  $F$ -invariant

Beweis: Nächste Woche

$F|_U: U \rightarrow U$  ist ein Endomorphismus

### V.4.14 Beh:

U ist  $F^\top$ -invariant und:

$$(F|_U)^\top = F^\top|_U$$

### V.4.15 Bew:

Wenn U  $F^\top$ -invariant ist wie oben:

$$\begin{array}{ccc} \forall v_1, v_2 \in U & \langle u_1, F(u_2) \rangle & = \langle F^\top(u_1), u_2 \rangle \\ & \parallel & \parallel \\ & F|_U(u_2) & F^\top|_U(u_1) \\ & \Downarrow & \end{array}$$

Aus der Eindeutigkeit von adjungierten Endomorphismus folgt

$$F^\top|_U = (F|_U)^\top$$

Insb ist  $F|_U$  normal

↓ Induktion

$\exists \{b_2, \dots, b_n\}$  eine ONB von U welche aus Eigenvektoren von  $F|_U$  besteht.

$\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  ist eine ONB von Eigenvektoren.

$b) \Rightarrow a)$  Sei  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  eine ONB von Eigenvektoren von  $F$

$$F(b_i) = \lambda_i \cdot b_i$$

Setze  $G : V \rightarrow V$ ,  $b_i \mapsto \overline{\lambda_i} \cdot b_i \rightarrow G$  ist eindeutig bestimmt

$$\begin{aligned} G \circ F(b_i) &= G(\lambda_i b_i) = \lambda_i G(b_i) \\ &= \lambda_i \overline{\lambda_i} b_i = \overline{\lambda_i} (\lambda_i b_i) \\ &= \overline{\lambda_i} (F(b_i)) = F(\overline{\lambda_i} b_i) = F(G(b_i)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G \circ F = F \circ G \text{ auf } V$$

Aber  $G = F^\top$  !! weil  $b_i$  Eigenvektor von  $F^\top$  zum Eigenwert  $\overline{\lambda_i}$  ist.

$\Downarrow$

$$F^\top(b_i) = \overline{\lambda_i} b_i = G(b_i) \Rightarrow G = F^\top$$

### Widerholung:

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus endlichdim. euklidisch, unitär

$\langle F^\top(v), w \rangle = \langle v, F^\top(w) \rangle \exists F^\top : V \rightarrow V$  adjungierter Endomorphismus zu  $F$ ,  
derart:

$\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  ONB von  $V \rightarrow F^\top$  hat Darstellungsmatrix

$A = a_{ij}$  Darstellungsmatrix von  $F$  bzgl.  $\mathcal{B}$        $A^* = (\overline{a_{ji}})$  bzgl.  $\mathcal{B}$

$F$  ist normal, falls

$$F \circ F^\top = F^\top \circ F$$

$$\Leftrightarrow A \cdot A^* = A^* \cdot A$$

$$\Leftrightarrow \langle F(v), F(w) \rangle = \langle F^\top(v), F^\top(w) \rangle$$

$$\longrightarrow v \in V \setminus \{0\} \text{ ist Eigenvektor von } F \text{ bzgl. } \lambda$$

$$\Leftrightarrow v \text{ Eigenvektor von } F^\top \text{ bzgl. } \overline{\lambda}$$

### V.4.16 Satz

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus |  $\chi_F(T)$  zerfällt in Linearfaktoren

$F$  ist normal  $\Leftrightarrow$  Es existiert eine ONB von  $V$ , welche aus Eigenvektoren von  $F$  besteht.

ende Wiederholung.

#### V.4.17 Def:

$F_V \rightarrow V$  ist selbstadjungiert, falls  $F = F^\top$  oder äquivalent dazu,

$$\langle v, F(w) \rangle = \langle F(v), w \rangle \quad \forall v, w \in V$$

Eine Matrix  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$  ist hermitesch, falls  $A^* = A$

#### Wid:

$V$  euklidischer untärer endlichdim. Raum  $F : V \rightarrow V$  selbst adjungiert falls  $F = F^*$

$F$  selbstadj.  $\Leftrightarrow$  Die Darstellungsmatrix bzg.  $\begin{pmatrix} \text{einer} \\ \text{jeder} \end{pmatrix}$  ONB hermitesch bzw. symmetrisch ist.

$A$  symmetrisch reelle  $(n \times n)$ -Matrix  $\rightarrow \chi_A$  zerfällt in Linearfaktoren über  $\underline{\mathbb{R}}$   
 $A$  ist dann diagonalisierbar  $\rightarrow$  Hauptachsentransformationssatz.

$V$  euklidischer endlichdim. Raum,  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  symmetrische bilinearform  
 $\rightarrow$  Hauptachsen von  $\varphi$  sind die Elemente einer ONB von  $V$  sodass  $\varphi$  Darstellungsmatrix in Diagonalform besitzt.

#### V.4.18 Kor: Spektralsatz

$F : V \rightarrow V$  selbstadjungiert  $\rightarrow \exists$  ONB von  $V$  welches aus Eigenvektoren von  $F$  besteht.

#### V.4.19 Bew:

$V$  unitär  $\rightarrow$  ok, weil  $\chi_F$  in Linearfaktoren über  $\mathbb{C}$  zerfällt

$V$  euklidisch  $\rightarrow$  Die Darstellungsmatrix von  $F$  ist symmetrisch  $\rightarrow$  diagonalisierbar  $\rightarrow \chi_F$  zerfällt in Linearfaktoren über  $\mathbb{R}$   $\square$

#### Bem

Falls  $K = \mathbb{R}$  ist, dann ist hermitesch = symmetrisch

#### Bem

Sei  $\mathcal{B}$  eine ONB von  $V$

$F : V \rightarrow V$  ist selbstadjungiert

$\Leftrightarrow$  Die Darstellungsmatrix von  $F$  bzg.  $\mathcal{B}$  hermitesch ist.

#### V.4.20 Bem:

Selbstadjungierte Endomorphismen sind normal.

#### V.4.21 Lemma:

Falls  $V$  euklidisch, unitär, endlichdim. ist  $F : V \rightarrow V$  selbstadjungiert, dann gilt:

- a) Alle Eigenwerte von  $F$  reell sind
- b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind

#### V.4.22 Bew:

- a) Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  Eigenwert von  $F$  und besteht  $v \in V \setminus \{0\} / F(v) = \lambda \cdot v$

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda \cdot v, v \rangle &= \langle F(v), v \rangle \stackrel{F=F^\top}{=} \langle v, F(v) \rangle = \langle v, \lambda \cdot v \rangle \\
 \parallel & \qquad \qquad \qquad \parallel \\
 \lambda \cdot \|v\|^2 & \neq 0 \qquad \qquad \qquad \bar{\lambda} \cdot \|v\|^2
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle v, w \rangle = 0$$

- b) Seien  $\underbrace{\lambda \neq \mu}_{\rightarrow \in \mathbb{R}}$  derart, dass  $F(v) = \lambda \cdot v \quad F(w) = \mu \cdot w \quad v, w \in V \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
 \langle v, \mu \cdot w \rangle &= \langle v, F(w) \rangle \stackrel{F=F^\top}{=} \langle F(v), w \rangle = \langle \lambda \cdot v, w \rangle \\
 \parallel & \qquad \qquad \qquad \parallel \\
 \mu \langle v, w \rangle & \Rightarrow \langle v, w \rangle = 0 \qquad \qquad \qquad \lambda \langle v, w \rangle
 \end{aligned}$$

□

#### V.4.23 Satz: Hauptachsentransformation

Sei  $V$  ein euklidischer endlichdim. Raum und  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform. Es existiert eine ONB  $\{b_1, \dots, b_n\}$  von  $V$  derart, dass  $\varphi$  durch eine Diagonalmatrix bzgl  $\{b_1, \dots, b_n\}$  dargestellt wird.

#### Zuerst zwei Hilfslemmata:

#### V.4.24 Lemma 1:

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$  hermitesch

$\rightarrow A$  ist Diagonalisierbar und alle Eigenwerte sind reell



**V.4.25 Bew:**

$A$  hermitesch,  $\chi_A(T)$  zerfällt in Linearfaktoren über  $\mathbb{C} \rightarrow F_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  
 $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$   $F_A$  ist selbstadjungiert und normal  $\Rightarrow$  Alle Eigenwerte sind reell

**V.4.26 Lemma 2:**

Jede symmetrische  $n \times n$  Matrix über  $\mathbb{R}$  ist diagonalisierbar.

**V.4.27 Bew:**

Wir betrachten  $A$  als Matrix über  $\mathbb{C}$ .  $A$  ist hermitesch  $\rightarrow A$  über  $\mathbb{C}$  diagonalisierbar. Alle Eigenwerte von  $A$  sind reell  $\Rightarrow A$  ist über  $\mathbb{R}$  diagonalisierbar

**V.4.28 Bew: Hauptachsentransformationssatz**

Sei  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ONB von  $V$ .

Definiere:

$$F : V \rightarrow V, \quad e_i \mapsto \sum_{j=1}^n \varphi(e_i, e_j) \cdot e_j$$

$$\langle e_i, F(e_i) \rangle = \langle e_i, \sum_{n=1}^n \varphi(e_j, e_n) \cdot e_n \rangle = \sum_{k=1}^n \varphi(e_j, e_n) \langle e_i, e_k \rangle = \varphi(e_j, e_i)$$

$v = \sum \lambda_i e_i \quad w = \sum \mu_j e_j$  beliebig.

Zu Zeigen:  $\langle F(v), w \rangle = \langle v, F(w) \rangle \Rightarrow F$  ist selbstadj.

$$\begin{aligned} \langle v, F(w) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j F(e_j) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j \underbrace{\langle e_i, F(e_j) \rangle}_{\varphi(e_i, e_j)} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(e_i, \underbrace{\sum_{j=1}^n \mu_j e_j}_w) = \varphi(\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i}_v, w) = \varphi(v, w) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
\langle v, F(w) \rangle & = & \varphi(v, w) \\
\parallel & & \parallel \\
\langle F^\top(v), w \rangle & & \varphi(w, v) \text{ da } \varphi \text{ symm.} \\
\Downarrow & & \\
F = F^\top & & \\
\Downarrow & & \\
F \text{ ist } \underline{\text{selbsadjungiert}} & & \\
\langle F(v), w \rangle = \langle w, F(v) \rangle & & 
\end{array}$$

Die Darstellungsmatrix von  $F$  bzgl.  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ist symmetrisch. Aus dem lemma 2 folgt, dass  $F$  diagonalisierbar ist  $\rightarrow \chi_F$  zerfällt in Linearfaktoren  
 $\Downarrow F$  selbstadj.

$\exists \{b_1, \dots, b_n\}$  ONB von Eigenvektoren von  $F$

Es genügt zu zeigen, dass die Darstellungsmatrix von  $\varphi$  bzgl.  $\{b_1, \dots, b_n\}$  in Diagonalform ist.

$$\begin{array}{c}
\varphi(b_i, b_j) = \langle b_i, F(b_j) \rangle = \lambda_j \langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} \lambda_i & i = j \\ 0 & \underline{\text{sonst}} \end{cases} \\
\parallel \\
\lambda_j b_j
\end{array}$$

□

#### V.4.29 Korollar:

Jede symmetrische  $(n \times n)$  Matrix über  $\mathbb{R}$  ist diagonalisierbar.

Jede hermitesche Matrix über  $\mathbb{C}$  ist diagonalisierbar.

#### Zurück zu positiv definite Matrizen

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ symmetrisch} \quad v^\top \cdot A \cdot v \geq 0 \quad = 0 \text{ gdw } v = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a > 0 \quad ac - b^2 > 0$$

#### V.4.30 Satz: Sylvester

Eine symmetrische  $(n \times n)$ -Matrix  $A$  über  $\mathbb{R}$  ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von  $A$  echt positiv sind.

### V.4.31 Bew:

$\Rightarrow$  Sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  und betrachte die von  $A$  definierte Bilinearform  $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (v, w) \mapsto v^\top A w$ . Aus dem Hauptsatz zur Diagonalisierung folgt, dass es eine ONB  $\{b_1, \dots, b_n\}$  gibt, so dass  $A$  diagonalisierbar ist.

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \varphi(b_1, b_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi(b_n, b_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n$  sind die Eigenwerte von  $A$

Insb. ist  $0 < \varphi(b_i, b_i) = \lambda_i$  weil  $b_i \neq 0$

$\Leftarrow$  Sei  $\{b_1, \dots, b_n\}$  eine ONB, so dass  $A$  bzgl.  $\{b_1, \dots, b_n\}$  in Diagonalform ist:

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$v \rightarrow \sum_{i=1}^n \mu_i b_i$$

$$(\mu_1 \ \dots \ \mu_n) (S^{-1} A S) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i^2 \geq 0 \quad = 0 \Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_n = 0 \Rightarrow v = 0$$

□

### Korollar (Sylvester)

$$(a_{ij})$$

Für eine symm.  $(n \times n)$ -Matrix  $A$  über  $\mathbb{R}$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- $A$  ist positiv definit

- Alle Eigenwerte von  $A$  sind echt positiv
- Alle Hauptminoren

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n$$

### Wiederholung:

$V$  euklidischer unitärer endlichdim. Raum  $F : V \rightarrow V$  selbst adjungiert falls  $F = F^*$

$F$  selbstadj.  $\Leftrightarrow$  Die Darstellungsmatrix bzgl.  $\begin{pmatrix} \text{einer} \\ \text{jeder} \end{pmatrix}$  ONB hermitesch bzw. symmetrisch ist.

$A$  symmetrisch reelle  $(n \times n)$ -Matrix  $\rightarrow \chi_A$  zerfällt in Linearfaktoren über  $\underline{\mathbb{R}}$   
 $A$  ist dann diagonalisierbar  $\rightarrow$  Hauptachsentransformationssatz.

$V$  euklidischer endlichdim. Raum,  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  symmetrische bilinearform  
 $\rightarrow$  Hauptachsen von  $\varphi$  sind die Elemente einer ONB von  $V$  sodass  $\varphi$  Darstellungsmatrix in Diagonalform besitzt.

### V.4.32 Kor: Spektralsatz

$F : V \rightarrow V$  selbstadjungiert  $\rightarrow \exists$  ONB von  $V$  welches aus Eigenvektoren von  $F$  besteht.

### V.4.33 Bew:

$V$  unitär  $\rightarrow$  ok, weil  $\chi_F$  in Linearfaktoren über  $\mathbb{C}$  zerfällt

$V$  euklidisch  $\rightarrow$  Die Darstellungsmatrix von  $F$  ist symmetrisch  $\rightarrow$  diagonalisierbar  $\rightarrow \chi_F$  zerfällt in Linearfaktoren über  $\mathbb{R}$

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  symmetrisch

$$A \text{ positiv definit} \Leftrightarrow v^\top \cdot A \cdot v \geq 0 \quad = 0 \text{ gdw } v = 0$$

$$A \text{ positiv definit} \Leftrightarrow \text{Alle Eigenwerte von } A \text{ sind echt positiv}$$

□

### V.4.34 Bew: Satz von Sylvester

$1 \Leftrightarrow 2$  ok!

$1 \Rightarrow 3$  Die Bilinearform  $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(v, w) \mapsto v^\top A w$  ist positiv

definit

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i}_{\text{Eigenwerte}} > 0$$

$\forall U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi|_U: U \times U \rightarrow \mathbb{R}$  auch positiv definit.

Sei  $U = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$

$$\varphi|_U: U \times U \rightarrow \mathbb{R}, (v, w) \mapsto v^\top \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \cdot w$$

$$\Rightarrow \det \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

$3 \Rightarrow 1$  Induktion auf  $n$

$n = 1$ ,  $A = (\lambda) \rightarrow \lambda > 0$

$$\left. \begin{aligned} x^\top \lambda x &= \lambda x^2 \geq 0 \\ &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{matrix} A \text{ ist} \\ \text{positiv} \\ \text{definit} \end{matrix}$$

Für  $A = \text{span}(e_1 \dots e_{n+1})$  Die Darstellungsmatrix von  $\varphi|_U$  hat auch alle Hauptminoren exht positiv  $\Rightarrow \varphi|_U$  positiv definit

Hauptachsen.  $\xrightarrow{\quad}$  Es gibt eine Orthonormalbasis  $\{b_1, \dots, b_n\}$  von  $V$  sodass  $\varphi$  Diagonalform bzg.  $\{b_1, \dots, b_n\}$  hat

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} \varphi(b_1, b_1) \\ \parallel \\ \lambda_1 \end{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{matrix} \lambda_n \\ \parallel \\ \varphi(b_n, b_n) \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Falls  $\varphi$  nicht positiv definit wäre, gäbe es:  $\begin{matrix} \lambda_i < 0 \\ \parallel \\ \varphi(b_i, b_i) \end{matrix}$

$$\Downarrow \det(A) = \prod \lambda_i > 0$$

$$\exists j \neq i \quad \begin{matrix} \lambda_i < 0 \\ \parallel \\ \varphi(b_i, b_i) \end{matrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} b_i = \sum_{k=1}^n \mu_k^i e_k \\ b_j = \sum_{k=1}^n \mu_k^j e_k \end{array} \right\} \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ nicht beide Null,}$$

sodass  $v = \alpha b_i + \beta b_j \in \text{span}(e_1 \dots e_{n+1})$

$\parallel$   
 $U$

$$\mu'_n = 0 \rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{array}$$

$$0 = \mu_n^j \text{ genau so sonst } \begin{array}{l} \alpha = \mu_n^j \\ \beta = \mu_n^i \end{array}$$

$$b_i \rightarrow (\mu_1^i, \dots, \mu_n^i)$$

$$b_j \rightarrow (\mu_1^j, \dots, \mu_n^j)$$

$$\alpha b_i + \beta b_j \rightarrow (\dots, \alpha \mu_n^i + \beta \mu_n^j)$$

$$\varphi(v, v) = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 0) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\geq 0} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Weil  $\varphi \upharpoonright_U$  positiv aus der Induktion

$$\varphi(v, v) = \varphi(\alpha b_i + \beta b_j, \alpha b_i + \beta b_j) = \underbrace{\alpha^2 \lambda_i + \lambda \beta^2}_{< 0} + 0$$

$\Rightarrow$  Widerspruch !

## V.5 Orthogonale Abbildungen und Drehungen

### V.5.1 Def:

$V$  euklidischer bzw. unitär.  $F : V \rightarrow V$  ist orthogonal, falls  $\forall v, w \in V :$   
 $\langle v, w \rangle = \langle F(v), F(w) \rangle$

### V.5.2 Lemma:

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1.)  $F : V \rightarrow V$  orthogonal
- 2.)  $\forall v \in V \quad ||v|| = ||F(v)||$
- 3.) Für jedes Orthonormalsystem  $\{e_1, \dots, e_k\}$  ist  $\{F(e_1) \dots F(e_k)\}$  auch ein Orthonormalsystem

### V.5.3 Bew:

$1 \Rightarrow 2$

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle F(v), F(v) \rangle = \|F(v)\|^2$$

$2 \Rightarrow 3$  Es genügt zu zeigen, dass  $F(e_i) \perp (F(e_j) \quad \forall i \neq j$

$1^{\text{er}}$  Fall:  $V$  ist euklidisch

$$\langle F(e_i + e_j), F(e_i + e_j) \rangle = \|F(e_i + e_j)\|^2 = \|e_i + e_j\|^2 = \langle e_i + e_j, e_i + e_j \rangle = 2$$

$$\begin{aligned} & \langle F(e_i + e_j), F(e_i + e_j) \rangle \\ &= \langle F(e_i), F(e_i) \rangle + \langle F(e_j), F(e_j) \rangle + \langle F(e_i), F(e_j) \rangle + \langle F(e_j), F(e_i) \rangle \\ & \quad \begin{array}{ccc} \parallel & \parallel & \parallel \\ \|F(e_i)\|^2 & \|F(e_i)\|^2 & \langle F(e_i), F(e_j) \rangle \\ \parallel & \parallel & \\ 1 & 1 & \end{array} \end{aligned}$$

$$\text{Insb: } 2 \langle F(e_i), F(e_j) \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad F(e_i) \perp F(e_j)$$

$\nparallel$   
0

$2^{\text{er}}$  Fall:

$V$  unitär

$$\begin{aligned} & \begin{array}{ccc} F_1 & & \\ \parallel & & \\ \|e_i + i e_j\|^2 & = & \|F(e_i + i e_j)\|^2 \\ \parallel & & \parallel \\ 2 = \underbrace{\|e_i\|^2}_1 + \underbrace{\|i e_j\|^2}_1 & & \underbrace{\langle F(e_i) + i F(e_j), F(e_i) + F(e_j) \rangle}_1 \\ & & \parallel \\ \underbrace{\|F(e_i)\|^2}_1 + \underbrace{\|F(e_j)\|^2}_1 + i(\langle F(e_j), F(e_i) \rangle - \langle F(e_i), F(e_j) \rangle) & & \\ & & \parallel \\ \langle F(e_i), F(e_j) \rangle = \langle F(e_j), F(e_i) \rangle & & \parallel \end{array} \end{aligned}$$

Wir machen wie im ersten Teil  $\Leftarrow \overline{\langle F(e_i), F(e_j) \rangle} \in \mathbb{R}$

$3 \Rightarrow 1$   $v, w \in V$

Zu Zeigen:  $\langle v, w \rangle = \langle F(v), F(w) \rangle$

$V = 0 \rightarrow \text{ok!}$

Sonst,  $v \neq 0 \rightarrow 1^{\text{er}}$  Fall  $\{v, w\}$  lin. abh.  $\xrightarrow{v \neq 0} \lambda v \quad \lambda \in \mathbb{K}$

$v \neq 0 \rightarrow \frac{v}{\|v\|}$  orthonormal  $\Rightarrow F(\frac{v}{\|v\|})$  auch

$$\|F(\frac{v}{\|v\|})\| = 1 \Rightarrow \|v\| = \|F(v)\|$$

$$\begin{aligned}\langle v, w \rangle &= \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle \\ &= \bar{\lambda} \|v\|^2 = \bar{\lambda} \|F(v)\|^2 \\ &= \bar{\lambda} \langle F(v), F(v) \rangle = \langle F(v), \lambda F(v) \rangle \\ &= \langle F(v), F(w) \rangle\end{aligned}$$

2<sup>er</sup> Fall:

 $v, w$  lin. unabh.
$$G - S \rightarrow \exists b_1, b_2 \text{ orthonormalsystem } \text{span}(v, w) = \text{span}(b_1, b_2)$$

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \\ w &= \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \langle v, w \rangle = \lambda_1 \overline{\mu_1} \underbrace{||b_1||^2}_{||F(b_1)||^2} + \lambda_2 \overline{\mu_2} \underbrace{||b_2||^2}_{||F(b_2)||^2} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{||F(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2), F(\mu_1 b_1) + F(\mu_2 b_2)||^2} \end{array}$$

(letzter schritt weil  $F(b_1) \perp F(b_2)$ )

### V.5.4 Wiederholung:

Orthogonale Endlómorphismes  $F : V \rightarrow V \quad \forall v, w \in V \quad V$  euklidisch oder unitär

$$\langle v, w \rangle = \langle F(v), F(w) \rangle$$

F orthogonal gdw  $\|v\| = \|F(v)\| \forall v \in V$  dann bildet F Orthonormalsysteme zu Orthonormalsysteme ab

Frage:

$\overline{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto 2 \cdot x \rightarrow$  Orthogonale Abbildungen (für euklidische Räume) erhalten den Winkel zwischen Vektoren

### V.5.5 Satz:

Jede orthogonale Abbildung ist injektiv.

### V.5.6 Bew:

$$F : V \rightarrow V \quad v \in \ker(F)$$

$$0 = F(v) \rightarrow 0 = \|F(v)\| = \|v\| \rightarrow v = 0$$



### V.5.7 Satz:

Sei  $V$  endlichdim. euklidischer oder unitärer Raum und  $F : V \rightarrow V$  eine Bijektive lineare Abbildung.

Folgende Aussagen sind dann äquivalent:

- 1)  $F$  ist orthogonal
- 2) Der adjunkte Endomorphismus  $F^\top$  von  $F$  ist  $F^{-1}$

### V.5.8 Bew:

$$\boxed{1 \Rightarrow 2}$$

$\forall v, w \in V :$

$\leftarrow F$  orthogonal

$$\langle F^{-1}(w), v \rangle \stackrel{\text{Eindeutigkeit}}{\underset{\text{von } F^\top}{\Rightarrow}} F^{-1} = F^\top$$

$$\boxed{2 \Rightarrow 1}$$

$F$  orthogonal

$$\langle F(v), F(w) \rangle \stackrel{\text{Definition } F^\top}{=} \langle F^\top(F(v)), w \rangle \stackrel{F^\top = F^{-1}}{=} \langle F^{-1}(F(v)), w \rangle = \langle v, w \rangle$$

### V.5.9 Kor:

$F : V \rightarrow V$  endlichdim. euklidisch oder unitäre orthogonale Abbildung

$\Rightarrow F$  ist bijektiv und normal, mit  $F^{-1} = F^\top$

### V.5.10 Bew:

$F$  orthogonal  $\Rightarrow F$  injektiv  $\stackrel{\dim(V) < \infty}{\Rightarrow} F$  bijektiv ist  $\Rightarrow F^\top = F^{-1}$

$$F \circ F^\top = F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = F^\top \circ F \Rightarrow \text{normal}$$

### V.5.11 Satz:

Sei  $V$  endlichdim, euklidisch oder unitär  $F : V \rightarrow V$  orthogonale Abbildung.

Dann haben alle Eigenwerte von  $F$  Absolutbetrag 1. Form ist  $\det(F) = 1$

### V.5.12 Bew:

Beachte, dass 0 kein Eigenwert von D ist. (weil F injektiv ist !)

Sei  $\lambda \in K$  ein Eigenwert von F und  $v \in V \setminus \{0\}$  ein Eigenwert zu  $\lambda$

$$\begin{aligned} \|F(v)\| &= \|v\| \neq 0 \\ &\parallel \rightarrow |\lambda| = 1 \\ \|\lambda v\| &= |\lambda| \|v\| \end{aligned}$$

Sei A die Darstellungsmatrix von F bzgl. der ONB

$$\begin{aligned} |\det(F)| &= |\det(A)| = |\overline{\det(A)}| = |\det(\overline{A})| = |\det(\overline{A}^\top)| \\ &= |\det(\underbrace{\overline{A}^\top}_{A^*})| \stackrel{F \text{ orthogonal}}{=} |\det(F^\top)| = |\det(F^{-1})| = |\det(F)|^{-1} \end{aligned}$$

$$F \circ F^{-1} = Id_V$$

$$|\det(F)|^2 = 1 \Rightarrow |\det(F)| = 1$$

**Bem:**

Sei B eine ONB von V

A die Darstellungsmatrix von F bzgl. B

$A^*$  die Darstellungsmatrix von  $F^\top$  bzgl. B

$A^{-1}$  die Darstellungsmatrix von  $F^{-1}$  bzgl. B

$$F^{-1} = F^\top \Leftrightarrow A^{-1} = A^*$$

### V.5.13 Def:

Sei  $A \in \mathcal{M}_{(n \times n)}(K)$   $K = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  regulär

A ist Orthogonal, falls  $A^{-1} = A^*$

**Bem:**

$F$  ist orthogonal  $\Leftrightarrow$  Die Darstellungsmatrix von  $F$  bzgl.  $\left(\begin{smallmatrix} \text{einer} \\ \text{jeder} \end{smallmatrix}\right)$  ONB orthogonal

### V.5.14 Kor:

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$  regulär ist orthogonal  $\Leftrightarrow$  die Zeilenvektoren (bzw die Spaltenvektoren) ein Orthonormalsystem in  $K^n$  bilden (und somit eine ONB)

**V.5.15 Bew:**

$$A \text{ orthogonal} \Leftrightarrow A^{-1} = A^* \Leftrightarrow A \cdot A^* = E_n = A \cdot A^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot \overline{a_{jk}}}_{\substack{\parallel \\ \langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle \in K^n}} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\langle \underbrace{\vec{a}_i}_{\text{i-te Zeile}}, \underbrace{\vec{a}_j}_{\text{j-te Zeile}} \rangle \in K^n \text{ mit dem Standardskalarprodukt}$$

**V.5.16 Kor: zu irgendeinem Satz**

Sei  $F : V \rightarrow V$  normale Abbildung eines endlichdimensionalen unitären Raumes  $V$  derart, dass alle Eigenwerte von  $F$  Absolutbetrag 1 haben. Dann ist  $F$  orthogonal.

**V.5.17 Bew:**

$$\chi_F(T) \in \mathbb{C}[T] \text{ zerfällt in Linearfaktoren}$$

$$\Downarrow F \text{ normal}$$

Es existiert eine ONB  $\{b_1, \dots, b_n\}$  von Eigenvektoren von  $F$   $F(b_i) = \lambda \cdot b_i$

$$F \text{ hat Darstellungsmatrix: } \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ bzgl } B = \{b_1, \dots, b_n\}$$

$$\Rightarrow 0 \neq |\det(F)| = |\prod \lambda_i| = \prod |\lambda_i| = 1$$

$$F \text{ hat Darstellungsmatrix: } \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} \text{ bzgl } B = \{b_1, \dots, b_n\}$$

$$\lambda_i \cdot \overline{\lambda_i} = |\lambda_i|^2 = 1 \Rightarrow \overline{\lambda_i} = \lambda_i^{-1}$$

$$F^\top (= F^{-1}) \text{ hat Darstellungsmatrix: } \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} \text{ bzgl } B = \{b_1, \dots, b_n\}$$

$$\Rightarrow F^{-1} = F^\top \rightarrow F \text{ ist orthogonal}$$

**V.5.18 Def:**

Eine Matrix  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$  ist orthogonal diagonalisierbar, falls es eine orthogonale (reguläre) Matrix  $S$  gibt, sodass  $S^{-1}AS (= S^*AS)$  in Diagonalform ist.

**V.5.19 Prop:**

Jede normale Matrix  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$  deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, ist orthogonal diagonalisierbar.

**V.5.20 Bew:**

Sei  $F_A : K^n \rightarrow K^n$  die zugehörige lineare Abbildung  $\Rightarrow F_A$  ist normal  $\Rightarrow \chi_A(T)$  zerfällt in Linearfaktoren.

Es gibt eine ONB  $\{b_1, \dots, b_n\}$  von Eigenvektoren von  $F$  (d.h. von  $A$ )

Sei  $S = (b_1 | \dots | b_n)$   $b_i$  als Spaltenvektoren

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ in Diagonalform}$$

Es genügt zu zeigen, dass  $S$  eine orthogonale Matrix ist.

Aber die Spaltenvektoren von  $S$  bilden ein orthonormales System.

$\Rightarrow S$  ist orthogonal

**V.5.21 Kor:**

Jede symmetrische  $n \times n$  Matrix über  $\mathbb{R}$  bzw. jede hermitesche Matrix über  $\mathbb{C}$  ist orthogonal diagonalisierbar.

**V.5.22 Bew:**

$A$  ist normal,  $\chi_A(T)$  zerfällt in Linearfaktoren.

**V.5.23 Def: Drehung**

Sei  $V$  ein endlichdim euklidischer Raum.

$F : V \rightarrow V$  orthogonale Abbildung ist eine Drehung, falls  $\det(F) = 1$ .

**Bem:**

Die Kollektion aller Drehungen bilden eine Gruppe.

### V.5.24 Satz:

Sei  $\mathbb{R}^2$  mit dem Standard-Skalarprodukt als euklidischer Raum.

$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist eine Drehung, gdw  $F$  Darstellungsmatrix bzgl.  $\{e_1, e_2\}$  der Form:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

hat, für ein  $\alpha \in [0, 2\pi]$ . Wobei  $\alpha$  der Winkel der Drehung ist. Bsp:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} : \quad \curvearrowleft = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\rightarrow)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\uparrow) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\uparrow)} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\leftarrow)$$

### V.5.25 Wid:

$V$  euklidischer Raum

$$\text{Dreh}(V) = \{F : V \rightarrow V \text{ Drehung}\}$$

Drehung  $\leftrightarrow$  orthogonale Abbildung mit  $\det(F) = 1$   
eins Gruppe

### V.5.26 Bew: Satz



$$\det \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = 1$$

$\Rightarrow$  Sei  $\{e_1, e_2\}$  die kanonische Basis  $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$  und die Darstellungsmatrix von  $F$ :

$$A = \begin{pmatrix} \langle F(e_1), e_1 \rangle & \langle F(e_2), e_1 \rangle \\ \langle F(e_1), e_2 \rangle & \langle F(e_2), e_2 \rangle \end{pmatrix}$$

Die Spaltenvektoren bilden ein orthonormales System.

$$\begin{aligned}
& \|F(e_1)\|^2 = 1 \\
& \parallel \\
& \langle F(e_1), e_1 \rangle^2 + \langle F(e_1), e_2 \rangle^2 \\
\Rightarrow \exists \alpha \in [0, 2\pi] \quad \cos \alpha = \langle F(e_1), e_1 \rangle \quad \sin \alpha = \langle F(e_1), e_2 \rangle \\
& \left. \begin{array}{l} \det(A) = 1 \\ 0 = \langle F(e_1), e_2 \rangle \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} 1 = \cos \alpha \langle F(e_2), e_2 \rangle - \sin \alpha \langle F(e_2), e_1 \rangle \\ 0 = \cos \alpha \langle F(e_2), e_1 \rangle + \sin \alpha \langle F(e_2), e_2 \rangle \end{array} \\
& \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle F(e_2), e_1 \rangle \\ \langle F(e_2), e_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} \langle F(e_2), e_1 \rangle \\ \langle F(e_2), e_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

### V.5.27 Satz:

$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist genau dann eine Drehung, wenn F Darstellungsmatrix bzgl. einer geeigneten ONB  $\{b_1, b_2, b_3\}$  der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{hat.} \quad \alpha \in [0, 2\pi]$$

### V.5.28 Bew:

⊆ ✓

⇒ Sei A die Darstellungsmatrix von F bzgl. der kanonischen Basis  $\{a_1, a_2, a_3\}$

⇒ A ist orthogonal

⇒ Als Matrix über  $\mathbb{C}$  haben alle Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  von A Absolutbetrag 1.

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$$

$\chi_F(T) = \chi_A(T)$  ist ein normiertes Polynom Grades 3 über  $\underline{\mathbb{R}}$

→ Es muss eine Nullstelle in  $\mathbb{R}$  haben → OBdA  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$

$$|\lambda_1| = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \pm 1$$

$$1 = \det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

**1er Fall:**  $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \rightarrow$  Für ein i muss  $\lambda_i = 1 \Rightarrow$  OBdA  $\lambda_1 = 1$

**2er Fall:** Sonst.  $\lambda_2 \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$

$$\chi_F(T) = (T - \lambda_1)(T - \lambda_2)(T - \lambda_3)$$

hat Koeffizienten in  $\mathbb{R}$

Insb.  $\overline{\lambda_2} = \begin{cases} \cancel{\lambda_1} \\ \lambda_3 \end{cases}$  nicht  $\lambda_1$  da es Reell ist.

$$|\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$$

$$\lambda_2 = e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad \lambda_3 = \overline{\lambda_2} = \cos \alpha - i \sin \alpha = e^{-i\alpha} = \frac{1}{\lambda_2}$$

$$\det(F) = 1 = \lambda_1 \cdot \underbrace{\lambda_2 \cdot (\lambda_2)^{-1}}_{=1}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1$$

Sei  $b_1 \in \mathbb{R}^3$  ein Eigenvektor zum Wert  $\lambda_1 = 1$

Sei  $U = \text{span}(b_1)^\perp \rightarrow \dim(U) = 2$

**Frage:**  $F(U) \perp \text{span}(b_1)$  ?

$$\Leftrightarrow F(U) \subset U?$$

$$u \in U \quad \langle F(u), b_1 \rangle \Rightarrow F(u) \in U$$

$$\parallel$$

$$F(b_1)$$

$$\parallel$$

gleich da F orthogonal

$$\langle u, b_1 \rangle = 0$$

Aus dem Gram-Schmidt'schen Verfahren wähle eine ONB  $\{b_2, b_3\}$  von U.  
(aus dem Eulersatz)  $\Rightarrow \{b_1, b_2, b_3\}$  ist eine ONB von  $\mathbb{R}^3$ .

$F|_U$  hat auch eine Drehung !  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$

$\rightarrow F$  hat Darstellungsmatrix bzgl.  $\{b_1, b_2, b_3\}$  ist  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \square$

## V.6 Multilineare Algebra

Sei K ein beliebiger Körper

### V.6.1 Def:

Das Tensorprodukt von zwei K-VR U und V ist ein K-VR T zusammen mit einer (universellen) bilinearen Abbildung:  $\otimes : U \times V \rightarrow T$  derart, dass jede bilineare Abbildung  $g : U \times V \rightarrow W$  sich schreiben lässt als eine Komposition.

$$\begin{array}{ccc}
 U \times V & \xrightarrow{\otimes} & T \\
 f \circ \otimes = g \downarrow & \blacksquare & \swarrow \exists! f \\
 & & W
 \end{array}$$

für eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung  $f : T \rightarrow W$ . Formel ist  $(T; \otimes)$  bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

### V.6.2 Satz:

Je zwei K-VR  $U$  und  $V$  besitzen ein Tensor-Produkt  $(T; \otimes)$ , dass bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Schreibe  $U \otimes V$ .

### V.6.3 Bew:

Seien  $\{a_i\}_{i \in I}$  Basis von  $U$ .  $\{b_j\}_{j \in J}$  Basis von  $V$ .  
Wähle Elemente  $(c_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  K-linear unabh.

Setze

$$\begin{aligned}
 T &= \text{span}(\{c_{i,j}\}_{(i,j) \in I \times J}) \\
 &= \left\{ \sum_{\text{endliche}} \lambda_{i',j'} c_{i',j'} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \otimes : U \times V &\rightarrow T \\
 (a_i, b_j) &\mapsto c_{i,j}
 \end{aligned}$$

Erweitern wegen Bilinearität:

$$\otimes \left( \sum \lambda_i a_i, \sum \mu_j b_j \right) = \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j c_{i,j}$$

Sei nun  $g : U \times V \rightarrow W$ ,  $(a_i, b_j) \mapsto g(a_i, b_j)$  bilinear

$$\begin{aligned}
 f : T &\rightarrow W \\
 c_{i,j} &\mapsto g(a_i, b_j)
 \end{aligned}$$

erweitere  $f$  aus linearität  $\rightarrow f$  ist eindeutig bestimmt

$$f \circ \otimes(a_i, b_j) = g(a_i, b_j)$$



$$\rightarrow f \circ \otimes = g$$

$$a_i \otimes b_j := c_{i,j}$$

$$\otimes(a_i, b_j)$$

□

#### V.6.4 Bew:

Sei  $\{a_i\}_{i \in I}$  Basis von  $U$ ,  $\{b_j\}_{j \in J}$  Basis von  $V$

$$\forall i \in I, j \in J \rightarrow T_{ij}$$

$$T = \left\{ \sum_{\substack{\text{endliche} \\ \parallel \\ \in K}} \lambda_j T_{ij} \right\}$$

$$\begin{aligned} \otimes : U \times V &\rightarrow T \quad \rightarrow \text{Erweitere sie um Bilinearität} \\ (a_i, b_j) &\rightarrow T_{ij} \end{aligned}$$

$$F(T_{ij}) = g(a_i, b_j) \text{ ist eindeutig bestimmt!}$$

#### Eindeutigkeit:

Sei  $T'$  auch ein Tensorprodukt von  $U, V$   $\otimes' : U \times V \rightarrow T'$

#### V.6.5 Kor:

Für jede Basis  $\{a_i\}_{i \in I}$  von  $U$  und jede Basis  $\{b_j\}_{j \in J}$  von  $V$  ist:  $\{a_i \otimes b_j\}_{(i,j) \in I \otimes J}$  eine Basis von  $U \otimes V$ .

Isbesondere falls  $\dim U, \dim V = \infty$  ist  $\dim(U \otimes V) = \dim U \cdot \dim V$

#### V.6.6 Kor:

Jedes Element  $w$  von  $U \otimes V$  lässt sich schreiben als  $\sum_{k=1}^n a_{i_k} \otimes v_k$  für  $v_k \in V$  eindeutig bestimmt.

#### V.6.7 Bew:

$$w \in U \otimes V$$

$$\{a_i \otimes b_j\} \quad \text{Basis}$$

$$\parallel \\ \otimes(a_i, b_j)$$

$$\begin{aligned}
w &= \sum \lambda_{ij} a_i \otimes b_j \\
&= \sum a_i \otimes \lambda_{ij} b_j \\
&= \sum_i \sum_j a_i \otimes \lambda_{ij} b_j \\
&= \sum_i a_i \otimes \underbrace{\sum_j \lambda_{ij} b_j}_{v_i \in V}
\end{aligned}$$

**Frage:** Warum sind die  $v'_i$  s eindeutig bestimmt?

$$w = \sum a_i \otimes v'_i \longrightarrow v'_i = \sum \mu_{ij} b_j$$

$$\begin{aligned}
w &= \sum a_i \otimes \left( \sum \mu_{ij} b_j \right) = \sum_i \sum_j \mu_{ij} a_i \otimes b_j \\
&\Rightarrow \lambda_{ij} = \mu_{ij} \Rightarrow v_i = v'_i
\end{aligned}$$

$\{a_i \otimes b_j\}$  eine Basis von  $U \otimes V$

□

**Achtung!**

Nicht jedes Element von  $U \otimes V$  lässt sich als ein rein Tensor  $u \otimes v$  schreiben!

**V.6.8 Bew:**

$U = V = \mathbb{R}^2$  mit der Standardbasis  $\{e_1, e_2\}$

□

**V.6.9 Beh:**

$$w = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$$

angenommen:

$$w = u \otimes v \quad u, v \in \mathbb{R}^2$$

$$u = (\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2) \quad v = (\mu_1 e_1, \mu_2 e_2)$$

$$u \otimes v = \lambda_1 \mu_1 e_1 \otimes e_1 + \lambda_1 \mu_2 e_1 \otimes e_2 + \lambda_2 \mu_1 e_2 \otimes e_1 + \lambda_2 \mu_2 e_2 \otimes e_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 \mu_1 = 0 \\ \lambda_2 \mu_2 = 0 \\ \lambda_1 \mu_2 = 1 \\ \lambda_2 \mu_1 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \mu_1 = 0 \\ \uparrow \\ \rightarrow \lambda_1 \neq 0 \\ \uparrow \\ \rightarrow \lambda_2 \neq 0 \end{array} \rightarrow \mu_2 = 0$$

$$\rightarrow v = 0 \Rightarrow u \otimes v = 0 \neq e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$$

**V.6.10 Lemma:**

$V$   $K$ -VR

$$K \otimes V \simeq V$$

**V.6.11 Bew:**

Wir wollen zuerst eine Abbildung von  $K \otimes V \rightarrow V$  konstruieren

$$\begin{aligned} G : V &\rightarrow K \otimes V && \text{ist linear} \\ v &\mapsto 1 \otimes v \end{aligned}$$

$G$  ist surjektiv

$$\begin{array}{c} \lambda \cdot (1 \otimes v) \\ \parallel \\ 1 \otimes \lambda \cdot v \\ \parallel \\ G(\lambda v) \end{array}$$

Weil 1 eine Basis von  $K$  über  $K$  ist!

Zu zeigen:  $F : K \otimes V \rightarrow V$  Isomorphismus

$$\begin{aligned} G \circ F(\lambda \otimes v) &= G(\lambda v) \\ &= 1 \otimes \lambda \cdot v \\ &= \lambda(1 \otimes v) \\ &= \lambda \otimes v \end{aligned}$$

$$F \circ G(v) = F(1 \otimes v) = 1 \cdot v = v$$

$F$  und  $G$  sind Inverse voneinander

□

**V.6.12 Lemma:**

- a)  $F : U \rightarrow U' \quad G : V \rightarrow V'$  lineare Abbildungen  
 $\Rightarrow \exists F \otimes G : U \otimes V \rightarrow U' \otimes V' \quad u \otimes v \mapsto F(u) \otimes G(v)$  lineare Abbildung
- b)  $Id_{U'} \otimes Id_{V'} = Id_{U' \otimes V'}$
- c)  $(F_1 + F_2) \otimes G = F_1 \otimes G + F_2 \otimes G$
- d)  $(\lambda F) \otimes G = \lambda(F \otimes G)$
- e)  $(F_2 \circ F_1) \otimes (G_2 \circ G_1) = (F_2 \otimes G_2) \circ (F_1 \otimes G_1)$

### V.6.13 Bew:

a) Sei

$$U \times V \rightarrow U' \otimes V' \quad (u, v) \mapsto F(u) \otimes G(v) \quad \text{bilinear}$$

b) trivial

c) einfach:

d) einfach:

$$\begin{aligned} (F_1 + F_2) \otimes G(u \otimes v) &= (F_1 + F_2)(u) \otimes G(v) \\ &= (F_1(u) + F_2(u)) \otimes G(v) \\ &= F_1(u) \otimes G(v) + F_2(u) \otimes G(v) \\ &\quad \parallel \qquad \qquad \parallel \\ &\quad (F_1 \otimes G)(u \otimes v) \qquad (F_2 \otimes G)(u \otimes v) \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} &(F_2 \circ F_1) \otimes G_2 \circ G_1(v) \\ &= F_2 \circ F_1(u) \otimes G_2 \circ G_1(v) \\ &= F_2(F_1(u)) \otimes G_2(G_1(v)) \\ &= F_2 \otimes G_2(F_1(u) \otimes G_1(v)) \quad \text{ok !} \\ &\quad \parallel \\ &\quad (F_1 \otimes G_1)(u \otimes v) \end{aligned}$$

□