3. Erhaltungssätze

- spielen zentrale Rolle in der Physik
- sind allg. gültig, z.B. auch in der QM
- reflektieren Symmetrie des Systems

allg Form eines Erhaltungsgesetzes der Größe $A(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$

$$\frac{d}{dt} A = 0 \longleftrightarrow A \text{ ist erhalten.}$$

Impulserhaltung

$$\vec{F} = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt}\vec{p} = 0 \longrightarrow \vec{p} = \text{const.}$$

Drehimpulserhaltung

Vektorielle Multiplikation von NG2 mit $\vec{r}(t)$ ergibt

$$m\,\vec{r}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{F}$$

Mit $\vec{\ell} = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = \vec{r} \times (m\dot{\vec{r}})$ Drehimpuls

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ Drehmoment

ist

$$\frac{d}{dt}\vec{\ell} = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times (m\dot{\vec{r}})}_{=0} + \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} = \vec{M}$$

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{M}$$

$$\vec{M} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d\vec{\ell}}{dt} = 0 \quad , \quad \vec{\ell} \text{ erhalten.}$$

<u>Bsp:</u> <u>Zentralkraft</u>

$$\vec{F} \parallel \vec{r} \quad \rightarrow \quad \vec{M} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{\ell} = \text{const.}$$

legt man oEdA $\vec{\ell}$ in z-Richtung

$$\vec{\ell} = \ell \, \vec{e}_z = m \, \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}$$

liegen $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ in x-y-Ebene.

<u>Energieerhaltung</u>

Ein Teilchen, das sich unter $\vec{F}$ von $\vec{r}$ nach $\vec{r} + d\vec{r}$ bewegt, verrichtet die Arbeit

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Längs eines Weges C von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ ist die geleistete <u>Arbeit</u>

$$W = \int_C dW = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{F}$$

die von $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ und i. A. auch von der Wegführung abhängt.

Die pro Zeit verrichtete Arbeit heißt <u>Leistung</u>

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$$

[$\oint_C$ = geschlossenes Wegintegral]

Multiplikation von NG2 mit $\dot{\vec{r}}$ gibt

$$m\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = \vec{F}\cdot\dot{\vec{r}}$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}}_{=T} = \frac{dT}{dt} = P$$

kinetische Energie T

konservative Kräfte $\vec{F}_{kons}$ und dissipative Kräft $\vec{F}_{diss}$

wobei $\vec{F}_{kons}$ alle Anteile mit

$$\vec{F}_{kons}\cdot\dot{\vec{r}} = -\frac{d}{dt}U(\vec{r})$$

erhält, wobei U das Potential oder die potentielle Energie ist.

Minuszeichen ist Konvention.

Zusammen:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + U(\vec{r})\right) = \vec{F}_{diss}\cdot\dot{\vec{r}}}$$

konservative Kraft $\leftrightarrow$ $E = T + U = \text{const.}$

Mit $\vec{r} = (x,y,z)^T$

$$\vec{F}_{kons}\cdot\dot{\vec{r}} = -\frac{dU(\vec{r})}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= -\operatorname{grad} U(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} U \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{\nabla} = (\partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z)^T$$

$$\operatorname{grad} U(\vec{r}) = (\partial U/\partial x,\ \partial U/\partial y,\ \partial U/\partial z)^T$$

folgt $\boxed{\vec{F}_{kons} = -\operatorname{grad} U(\vec{r})}$

Bsp: 1D gedämpfter harm. Oszillator

$$F = -kx - \gamma\dot{x} = F_{kons} + F_{diss}$$

mit $F_{kons} = -\frac{dU}{dx} \rightarrow U(x) = \frac{k}{2}x^2$

Da $F_{diss} \cdot \dot{x}$ quadratisch in $\dot{x}$, $\frac{dU(x)}{dt}$ aber linear in $\dot{x}$

kann $F_{diss}\dot{x}$ nicht in der Form dU/dt geschrieben werden.

Bedingung für konservative Kraft ist:

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0 \leftrightarrow \vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$$

Dann ist das Wegintegral

$$W = \int_C d\vec{r}\ \vec{F}(\vec{r})$$

wegunabhängig., verschwindet also für jeden geschlossenen Pfad

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U(\vec{r}) \quad \longleftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{F} = 0$$