

# Lineare Algebra II

Vorlesung von Prof. Dr. Amador Martin - Pizarro im  
Sommersemester 2018

Markus Österle  
Andrés Gockel

17.04.2018

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>I</b> | <b>Wiederholung</b>                           | <b>8</b> |
| I.0.1    | Def: Ringe . . . . .                          | 8        |
| I.0.2    | Def: Integritätsbereich . . . . .             | 8        |
| I.0.3    | Def: Körper . . . . .                         | 8        |
| I.0.4    | Bew: . . . . .                                | 8        |
| I.0.5    | Bew: . . . . .                                | 9        |
| I.0.6    | Def: Polynomring . . . . .                    | 9        |
| I.0.7    | Satz:(Division mit Rest) . . . . .            | 10       |
| I.0.8    | Def: Teiler . . . . .                         | 11       |
| I.0.9    | Def: Nullstelle . . . . .                     | 11       |
| I.0.10   | Bew: . . . . .                                | 12       |
| I.0.11   | Def: Vielfachheit der Nullstellen . . . . .   | 12       |
| I.0.12   | Def: Algebraische Abgeschlossenheit . . . . . | 12       |
| I.0.13   | Frage: . . . . .                              | 12       |
| I.0.14   | Warum?: . . . . .                             | 13       |
| I.0.15   | Bew: . . . . .                                | 13       |
| I.0.16   | Def: Vektorraum . . . . .                     | 13       |
| I.0.17   | Def: Lineare Unabhängigkeit . . . . .         | 14       |
| I.0.18   | Def: Basis = min. Erz. System . . . . .       | 15       |
| I.0.19   | Satz: Basisergänzungssatz . . . . .           | 15       |
| I.0.20   | Basisauswahlsatz . . . . .                    | 15       |
| I.0.21   | Def: Direkte Summe . . . . .                  | 15       |
| I.0.22   | Bsp: . . . . .                                | 16       |
| I.0.23   | Def: Lineare Abbildungen . . . . .            | 16       |
| I.0.24   | Def: Rang . . . . .                           | 17       |
| I.0.25   | Satz: Basismatrix . . . . .                   | 17       |
| I.0.26   | Bew: . . . . .                                | 18       |
| I.0.27   | Def: Invertierbarkeit . . . . .               | 18       |
| I.0.28   | Def: Äquivalenz und Ähnlichkeit . . . . .     | 21       |
| I.0.29   | Def: Determinante . . . . .                   | 21       |

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| I.0.30    | Def: Darstellungsmatrix . . . . .              | 22        |
| I.0.31    | Def: Adjunkte . . . . .                        | 23        |
| <b>II</b> | <b>Lineare Algebra II</b>                      | <b>24</b> |
| II.0.1    | Def: Diagonalisierbarkeit . . . . .            | 24        |
| II.0.2    | Def: Eigenvektor . . . . .                     | 24        |
| II.0.3    | Def: Eigenraum . . . . .                       | 25        |
| II.0.4    | Def: Diagonalisierbarkeit . . . . .            | 25        |
| II.0.5    | Satz: Zu Eigenwerten . . . . .                 | 26        |
| II.0.6    | Def: Charakteristisches Polynom . . . . .      | 26        |
| II.0.7    | Bsp: . . . . .                                 | 26        |
| II.0.8    | Kor: Anzahl der Eigenwerte . . . . .           | 27        |
| II.0.9    | Kor: Diagonalisierbarkeit . . . . .            | 27        |
| II.0.10   | Bew: . . . . .                                 | 27        |
| II.0.11   | Kor: Geometrische Vielfachheit . . . . .       | 28        |
| II.0.12   | Bsp: . . . . .                                 | 28        |
| II.0.13   | Def: Algebraische Vielfachheit . . . . .       | 29        |
| II.0.14   | Bew: . . . . .                                 | 29        |
| II.0.15   | Lemma: Quotientenraum Endomorphismus . . . . . | 30        |
| II.0.16   | Bew: . . . . .                                 | 30        |
| II.0.17   | Satz: Diagonalisierbarkeit . . . . .           | 31        |
| II.0.18   | Bew: . . . . .                                 | 32        |
| II.0.19   | Def: Diag. und Ähnlichkeit . . . . .           | 33        |
| II.0.20   | Def: Trigonalisierbarkeit . . . . .            | 33        |
| II.0.21   | Satz: Trigonalisierbarkeit . . . . .           | 33        |
| II.0.22   | Kor: Trigonalisierbarkeit . . . . .            | 34        |
| II.0.23   | Bew: (Satz) . . . . .                          | 34        |
| II.0.24   | Beh: . . . . .                                 | 35        |
| II.0.25   | Bew: . . . . .                                 | 35        |
| II.0.26   | Frage: . . . . .                               | 35        |
| II.0.27   | Lemma: $F^r$ & Polynome . . . . .              | 35        |
| II.0.28   | Bew: . . . . .                                 | 36        |
| II.0.29   | Satz: (Caley - Hamilton) . . . . .             | 38        |
| II.0.30   | Bew: . . . . .                                 | 38        |
| II.0.31   | Kor: . . . . .                                 | 38        |
| II.0.32   | Satz: Minimalpolynom . . . . .                 | 39        |
| II.0.33   | Satz: Trigonalisierbarkeit . . . . .           | 39        |
| II.0.34   | Satz: (Caley-Hamilton) . . . . .               | 40        |
| II.0.35   | Kor: Charakteristische Polynome . . . . .      | 40        |
| II.0.36   | Satz: normiertes Polynom . . . . .             | 40        |
| II.0.37   | Def: minimal Polynom . . . . .                 | 40        |

|   |           |
|---|-----------|
| II.0.38 Bew:  | 40        |
| II.0.39 Lemma: Nullstellen von $\chi_F$ und $m_F$     | 42        |
| II.0.40 Bew:  | 42        |
| II.0.41 Satz: Diagonalisierbarkeit und Minimalpolynom | 42        |
| II.0.42 Bew:  | 43        |
| <b>III Die Jordansche Normalenform</b>                | <b>47</b> |
| III.0.1 Lemma: Invarianzen                            | 47        |
| III.0.2 Bsp:  | 47        |
| III.0.3 Def: Hauptraum                                | 47        |
| III.0.4 Bew:  | 48        |
| III.0.5 Lemma: Haupträume sind disjunkt               | 48        |
| III.0.6 Bew:  | 49        |
| III.0.7 Bem: Invarianzen                              | 50        |
| III.0.8 Lemma: Ordnung                                | 50        |
| III.0.9 Bew   | 50        |
| III.0.10 Def: Nilpotenz                               | 52        |
| III.0.11 Lemma: Nilpotenz                             | 53        |
| III.0.12 Bew:   | 53        |
| III.0.13 Satz: Jordan-Charelle Zerlegung              | 54        |
| III.0.14 Bew:   | 55        |
| III.0.15 Def: F-adaption                              | 56        |
| III.0.16 Bew:   | 56        |
| III.0.17 Def: Index                                   | 57        |
| III.0.18 Satz: Index                                  | 57        |
| III.0.19 Bew:   | 57        |
| III.0.20 Satz: F-adaptierte Basis                     | 58        |
| III.0.21 Kor:   | 58        |
| III.0.22 Bew:   | 59        |
| III.0.23 Folgerung                                    | 59        |
| III.0.24 Kor: Jordansche Normalform                   | 60        |
| III.0.25 Bew:   | 60        |
| <b>IV Dualität</b>                                    | <b>63</b> |
| IV.0.1 Def: Dualraum                                  | 63        |
| IV.0.2 Def: Duale Basis                               | 63        |
| IV.0.3 Bew:   | 63        |
| IV.0.4 Lemma: kanonischer Monomorphismus              | 64        |
| IV.0.5 Bew:   | 64        |
| IV.0.6 Korollar:                                      | 64        |
| IV.0.7 Bew:   | 64        |

|         |   |    |
|---------|---|----|
| IV.0.8  | Lemma: Duale Transformation . . . . .   | 65 |
| IV.0.9  | Bew: . . . . .                          | 65 |
| IV.0.10 | Def: duale Abbildung . . . . .          | 65 |
| IV.0.11 | Bew: . . . . .                          | 66 |
| IV.0.12 | Bew: . . . . .                          | 67 |
| IV.0.13 | Bew: . . . . .                          | 68 |
| IV.0.14 | Korrolar: zu Duale Basen . . . . .      | 68 |
| IV.0.15 | Bew: . . . . .                          | 69 |
| IV.0.16 | Lemma: $V$ und $V^*$ . . . . .          | 69 |
| IV.0.17 | Lemma: Duale Endomorphismen . . . . .   | 70 |
| IV.0.18 | Bew: . . . . .                          | 70 |
| IV.1    | Duale Paarung . . . . .                 | 72 |
| IV.1.1  | Def: Bilinearität . . . . .             | 72 |
| IV.1.2  | Def: Duales Paar . . . . .              | 73 |
| IV.1.3  | Lemma: . . . . .                        | 73 |
| IV.1.4  | Wiederholung . . . . .                  | 74 |
| IV.1.5  | Bew: . . . . .                          | 74 |
| IV.1.6  | Kor: Ausartung . . . . .                | 75 |
| IV.1.7  | Bew: . . . . .                          | 76 |
| IV.1.8  | Kor: duale Basen . . . . .              | 76 |
| IV.1.9  | Bew: . . . . .                          | 77 |
| IV.1.10 | Def: Orthogonales Komplement . . . . .  | 77 |
| IV.1.11 | Bew: . . . . .                          | 77 |
| IV.1.12 | Lemma: zu Quotientenräumen . . . . .    | 78 |
| IV.1.13 | wiederholung . . . . .                  | 78 |
| IV.1.14 | Def: Adjungierte . . . . .              | 79 |
| IV.1.15 | Bew: Eindeutigkeit . . . . .            | 79 |
| IV.2    | Euklidische Räume . . . . .             | 80 |
| IV.2.1  | Def: Symmetrie . . . . .                | 80 |
| IV.2.2  | Bew: . . . . .                          | 80 |
| IV.2.3  | Def: Quadratische Form . . . . .        | 81 |
| IV.2.4  | Def: Definitheit . . . . .              | 82 |
| IV.2.5  | Def: Skalarprodukt . . . . .            | 82 |
| IV.2.6  | Def: Euklidischer Raum . . . . .        | 83 |
| IV.2.7  | Def: Norm . . . . .                     | 83 |
| IV.2.8  | Def: Norm über Skalarprodukt . . . . .  | 83 |
| IV.2.9  | Lemma: . . . . .                        | 83 |
| IV.2.10 | Bew: . . . . .                          | 84 |
| IV.2.11 | Bew: . . . . .                          | 84 |
| IV.2.12 | Def: Winkel zwischen Vektoren . . . . . | 85 |
| IV.2.13 | Wiederholung . . . . .                  | 85 |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| IV.2.14   | Satz: (des Pythagoras)   | 86         |
| IV.2.15   | Bew:   | 86         |
| IV.2.16   | Def: Orthogonal- und Orthonormalbasis  | 86         |
| IV.2.17   | Satz: $\varphi$ symmetrisch $\Rightarrow$ diagonalisierbar                   | 87         |
| IV.2.18   | Kor:   | 88         |
| IV.2.19   | Bew:   | 88         |
| IV.2.20   | Kor: (Sylvester)   | 89         |
| IV.2.21   | Bew:   | 90         |
| IV.2.22   | Bew: falsch:   | 90         |
| IV.2.23   | Def: Signatur  | 91         |
| IV.2.24   | Wiederholung   | 91         |
| IV.2.25   | Bew: Kor Sylvester   | 91         |
| <b>V</b>  | <b>Unitäre Räume</b>   | <b>92</b>  |
| V.0.1     | Def:   | 92         |
| V.0.2     | Bew:   | 92         |
| V.0.3     | Def: Orthonormalbasis  | 93         |
| V.0.4     | Bew:   | 93         |
| V.0.5     | Lemma: Orthonormalbasen  | 94         |
| V.0.6     | Bew:   | 94         |
| V.0.7     | Satz: (Geom-Schmidtsches<br>Orthonormalisierungsverfahren)                   | 94         |
| V.0.8     | Bew:   | 95         |
| V.0.9     | Kor: Orthonormalsysteme  | 96         |
| V.0.10    | Def: Orthogonale Teilmengen  | 96         |
| V.0.11    | Def:   | 96         |
| V.0.12    | Bew:   | 97         |
| V.0.13    | Satz: Orthogonales Komplement  | 97         |
| V.0.14    | Bew:   | 97         |
| V.0.15    | Lemma:   | 98         |
| V.0.16    | Bew:   | 98         |
| V.0.17    | Def: orthogonale Projektion  | 98         |
| V.0.18    | Satz: Projektion   | 99         |
| V.0.19    | Bew:   | 99         |
| <b>VI</b> | <b>Selbsadjungierte Endomorphismen und Hauptachsentrans-<br/>formationen</b> | <b>100</b> |
| VI.0.1    | Def: adjungierte Matrix  | 101        |
| VI.0.2    | Lemma: adjungierte Abbildung   | 103        |
| VI.0.3    | Bew:   | 103        |
| VI.0.4    | Def: Normale Homomorphismen  | 103        |

|         |  |     |
|---------|--|-----|
| VI.0.5  | Prop:  | 103 |
| VI.0.6  | Bew:   | 104 |
| VI.0.7  | Def: Normale Matrix                          | 105 |
| VI.0.8  | Lemma: adjunkte Eigenwerte                   | 105 |
| VI.0.9  | Bew:   | 105 |
| VI.0.10 | Satz: zu char. Polynomen und adjunkten       | 105 |
| VI.0.11 | Bew: (Satz)                                  | 106 |
| VI.0.12 | Bew:   | 106 |
| VI.0.13 | Def: Selbsadjungierte                        | 108 |
| VI.0.14 | Kor: Spektralsatz                            | 108 |
| VI.0.15 | Bew:   | 108 |
| VI.0.16 | Lemma: Eigenwerte und Eigenvektoren          | 109 |
| VI.0.17 | Bew:   | 109 |
| VI.0.18 | Satz: Hauptachsentransformation              | 109 |
| VI.0.19 | Lemma 1:                                     | 110 |
| VI.0.20 | Bew:   | 110 |
| VI.0.21 | Lemma 2:                                     | 110 |
| VI.0.22 | Bew:   | 110 |
| VI.0.23 | Bew: Hauptachsentransformationssatz          | 110 |
| VI.0.24 | Korollar:                                    | 111 |
| VI.0.25 | Satz: Sylvester                              | 112 |
| VI.0.26 | Bew:   | 112 |
| VI.0.27 | Kor: Spektralsatz                            | 113 |
| VI.0.28 | Bew:   | 113 |
| VI.0.29 | Bew: Satz von Sylvester                      | 114 |
| VI.1    | Orthogonale Abbildungen und Drehungen        | 115 |
| VI.1.1  | Def: Orthogonale Abbildung                   | 115 |
| VI.1.2  | Lemma:                                       | 116 |
| VI.1.3  | Bew:   | 116 |
| VI.1.4  | Wiederholung:                                | 117 |
| VI.1.5  | Satz: Orthogonale Abbildungen                | 118 |
| VI.1.6  | Bew:   | 118 |
| VI.1.7  | Satz: Bijektive Orthogonale Abbildung        | 118 |
| VI.1.8  | Bew:   | 118 |
| VI.1.9  | Kor: $F$ Bijektiv $\Rightarrow F^{-1} = F^T$ | 118 |
| VI.1.10 | Bew:   | 119 |
| VI.1.11 | Satz: Orthogonale Abbildung                  | 119 |
| VI.1.12 | Bew:   | 119 |
| VI.1.13 | Def: Orthogonalität von $A$                  | 119 |
| VI.1.14 | Kor: Zeilen-/Spalten-orthonormalbasis        | 120 |
| VI.1.15 | Bew:   | 120 |

|         |   |     |
|---------|---|-----|
| VI.1.16 | Kor: zu Satz VI.1.11 . . . . .                    | 120 |
| VI.1.17 | Bew: . . . . .                                    | 120 |
| VI.1.18 | Def: Orthogonal diagonalisierbar . . . . .        | 121 |
| VI.1.19 | Prop: Orthogonal diagonalisierbar . . . . .       | 121 |
| VI.1.20 | Bew: . . . . .                                    | 121 |
| VI.1.21 | Kor: Symmetrie und diagonalisierbarkeit . . . . . | 121 |
| VI.1.22 | Bew: . . . . .                                    | 122 |
| VI.1.23 | Def: Drehung . . . . .                            | 122 |
| VI.1.24 | Satz: Drehung . . . . .                           | 122 |
| VI.1.25 | Wid: . . . . .                                    | 122 |
| VI.1.26 | Bew: Satz . . . . .                               | 122 |
| VI.1.27 | Satz: . . . . .                                   | 123 |
| VI.1.28 | Bew: . . . . .                                    | 123 |
| VI.2    | Multilineare Algebra . . . . .                    | 124 |
| VI.2.1  | Def: . . . . .                                    | 125 |
| VI.2.2  | Satz: . . . . .                                   | 125 |
| VI.2.3  | Bew: . . . . .                                    | 125 |
| VI.2.4  | Bew: . . . . .                                    | 126 |
| VI.2.5  | Kor: . . . . .                                    | 126 |
| VI.2.6  | Kor: . . . . .                                    | 126 |
| VI.2.7  | Bew: . . . . .                                    | 127 |
| VI.2.8  | Bew: . . . . .                                    | 127 |
| VI.2.9  | Beh: . . . . .                                    | 127 |
| VI.2.10 | Lemma: . . . . .                                  | 128 |
| VI.2.11 | Bew: . . . . .                                    | 128 |
| VI.2.12 | Lemma: . . . . .                                  | 128 |
| VI.2.13 | Bew: . . . . .                                    | 129 |



# Kapitel I

## Wiederholung

### I.0.1 Def: Ringe

Ein (kommutativer) Ring (mit Einselement) ist eine Menge zusammen mit zwei binären Operationen  $+$  und  $*$ , sodass:

- $(R, +, 0_R)$  ist eine abelsche Gruppe
- $(R, *, 1_R)$  ist eine kommutative Halbgruppe
- $(R, +, 0_R)$  die distributiven Gesetze:  
 $x(y + z) = xy + xz$   
 $(x + y)z = xz + yz$  gelten

### I.0.2 Def: Integritätsbereich

Ein Integritätsbereich ist ein Ring ohne Nullteiler

$$\forall x, y \in R : \quad (x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } y = 0)$$

### I.0.3 Def: Körper

Ein Körper  $K$  ist ein Ring derart, dass:

- $1_K = 0_K$
- $\forall x \in K \setminus \{0\} \exists x^{-1} x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1_K$

### I.0.4 Bew:

Körper sind Integritätsbereiche

### Bem: Ring Homomorphismus

Sei  $R$  ein nichttrivialer Ring ( $0_R \neq 1_R$ ),

$$\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow R, n \mapsto \begin{cases} 1_R + \dots + 1_R & n \geq 0 \\ -(1_R + \dots + 1_R) & n < 0 \end{cases}$$

$\varphi$  ist ein Ring Homomorphismus:

$$\ker(\varphi) = \{n \in \mathbb{Z} \mid \varphi(n) = 0\}$$

2 Möglichkeiten

a)  $\ker(\varphi) = 0$   $R$  hat Charakteristik 0

b)  $\ker(\varphi) \neq 0$

→ es existiert ein kleinstes positives Element  $p > 0$  in  $\ker(\varphi)$

### I.0.5 Bew:

$R$  Integritätsbereich  $\Rightarrow p$  eine Primzahl z.B.

$$\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$$

hat Charakteristik  $n$ .

Insbesondere enthält jeder Körper der Charakteristik  $p$  eine „Kopie“ von  $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$

$K$  Charakteristik  $p \Rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \xrightarrow{\text{injektiv}} K$

$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$  ist ein Körper:  $a \in \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow a$  und  $p$  sind teilerfremd

$$1 = a \cdot b + p \cdot m \Rightarrow 1 = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

### I.0.6 Def: Polynomring

Sei  $K$  ein Körper. Der Polynomring  $K[T]$  in einer Variable  $T$  über  $K$  ist die Menge formeller Summen der Form

$$g, f := \sum_{i=0}^n a_i \cdot T^i, \quad a_i \in K$$

$$\text{grad}(f) := \max\{i \mid a_i \neq 0\}$$

$$\text{grad}(0) := -1$$

**Bem:**

$K[T]$  ist ein Integritätsbereich

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i \cdot T^i\right) + \left(\sum_{j=0}^m b_j \cdot T^j\right) = \sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} (a_k + b_k) \cdot T^k$$

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i \cdot T^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^m b_j \cdot T^j\right) = \sum_{k=0}^{n \cdot m} c_k \cdot T^k$$

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j$$

$f, g$  beide  $\neq 0$

$$\Rightarrow \text{grad}(f \cdot g) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$$

$f \cdot g \neq 0$

$$\text{grad}(f + g) \leq \max\{\text{grad}(f), \text{grad}(g)\}$$

### I.0.7 Satz:(Division mit Rest)

Gegeben  $f, g \in K[T]$

$\text{grad}(g) > 0$

Dann existieren eindeutige  $q, r \in K[T]$

sodass  $f = g \cdot q + r$

wobei  $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$  eindeutig

$$f = g \cdot q + r = g \cdot q' + r'$$

$$g \cdot (q - q') = r' - r$$

$$g \neq g'$$

$$\text{grad}(g \cdot (q - q')) = \text{grad}(r' - r) = \max\{\text{grad}(r'), \text{grad}(r)\} < \text{grad}(g)$$

$$\text{grad}(g \cdot (q - q')) \stackrel{q \neq q'}{=} \text{grad}(g) + \text{grad}(q - q')$$

$\Rightarrow$  Widerspruch (Wid)!

$$\Rightarrow q = q' \Rightarrow r = r'$$

### Existenz Beweis: Induktion auf $\text{grad}(f)$

I.A.:  $\text{grad}(f) = 0 \rightarrow f = g \cdot 0 + f$   
„n+1“  $\text{grad}(f) = n + 1$

$$\text{grad}(f) < \text{grad}(g) = m$$

$$\rightarrow f = g \cdot 0 + f$$

OBdA  $n + 1 = \text{grad}(f) \geq \text{grad}(g) = m > 0$   
 $f = a_{n+1} \cdot T^{n+1} + \tilde{f}$   
 $\text{grad}(\tilde{f}) \leq n$   
 $a_{n+1} \neq 0$   
Sei

$$f' := f - b_m^{-1} \cdot a_{n+1} \cdot T^{n+1-m} \cdot g$$

$$\Rightarrow \text{grad}(f') \leq n$$

$$g = \sum_{i=0}^m b_i \cdot T^i$$

$$\stackrel{\text{I.A.}}{\Rightarrow} f' = g \cdot q' + r'$$

$$f - b_m^{-1} a_{n+1} T^{n+1-m} \cdot g$$

$$\text{grad}(r') < \text{grad}(g)$$

$$\rightarrow f = g(\underbrace{b_m^{-1} a_m T^{n+1-m} + q'}_q) + r' = \text{grad}(r') < \text{grad}(g)$$

$$(r' = r)$$

### I.0.8 Def: Teiler

$f, g \in K[T]$   
 $\text{grad}(g) > 0$

$$g \text{ teilt } f \Leftrightarrow f = g \cdot q$$

$$(g|f) \ (r = 0)$$

### I.0.9 Def: Nullstelle

$f \in K[T]$  besitzt eine Nullstelle  $\lambda \in K$   
gdw (genau dann wenn)  $(T - \lambda)|f \Leftrightarrow f(\lambda) = 0$   
 $f = (T - \lambda)q + r$

**Bem: Anzahl Nullstellen**

$$f \in K[T], \quad f \neq 0, \text{grad}(f) = n$$

Dann besitzt  $f$  höchstens  $n$  viele Nullstellen in  $K$ .

**I.0.10 Bew:**

$$n = 0, f = a_0 \neq 0$$

$n > 0$  Falls  $f$  keine Nullstellen in  $K$  besitzt  $\Rightarrow$  Ok !

Sonst, bei  $\lambda \in K$  eine Nullstelle von  $f$ .

$$f = (T - \lambda) \cdot g$$

$$\text{grad}(g) = n - 1 < n$$

$\xrightarrow{\text{I.A.}}$  besitzt  $g$  höchstens  $n - 1$  viele Nullstellen.

Jede Nullstelle von  $f$  ist  $\lambda$  oder eine Nullstelle von  $g \Rightarrow f$  hat höchstens  $n$  viele Nullstellen.

**I.0.11 Def: Vielfachheit der Nullstellen**

$f \in K[T], f \neq 0, \lambda \in K$  Nullstellen von  $f$

$$\rightarrow f = (T - \lambda)^{K_\lambda} \cdot g, \quad (g(\lambda) \neq 0)$$

( $K_\lambda$  ist die Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda$  in  $f$ )

**I.0.12 Def: Algebraische Abgeschlossenheit**

Ein Körper heißt algebraisch abgeschlossen falls jedes Polynom über  $K$  positiven Grades eine Nullstelle in  $K$  besitzt.

**I.0.13 Frage:**

Ist  $\mathbb{R}$  algebraisch abgeschlossen ?

Nein:  $T^2 + 1$

**Bem:**

$\mathbb{C}$  ist algebraisch abgeschlossen

**Bem: Unendlichkeit**

Jeder alg. abg. Körper muss unendlich sein!

### I.0.14 Warum?:

(Beweis läuft wie unendlichkeit der Primzahlen)

$$K = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

$$f = (T - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (T - \lambda_n) + 1$$

**Bem: Algebraische Abgeschlossenheit**

$K$  ist genau dann alg. abg. wenn jedes Polynom  $f$  positiven Grades in lineare Faktoren zerfällt:

$$f = (T - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (T - \lambda_n) \in K$$

### I.0.15 Bew:

„ $\Leftarrow$ “ Trivial

„ $\Rightarrow$ “  $\text{grad}(f) = n > 0$

$$\rightarrow f = (T - \lambda_n) \cdot g$$

$$(\text{grad}(g) \leq n - 1 < n)$$

$$\stackrel{\text{I.A.}}{\rightarrow} g = c(T - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (T - \lambda_n)$$

$$\Rightarrow f = c(T - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (T - \lambda_n) \checkmark$$

### I.0.16 Def: Vektorraum

Vektorraum  $V$  über  $K$  ist eine abelsche Gruppe  $(V, +, 0_V)$  zusammen mit einer Verknüpfung

$$K \times V \mapsto V$$

$$(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$$

sodass:

$$1.) \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$$

$$2.) \lambda(\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$$

$$3.) (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$$

$$4.) 1_K \cdot v = v \quad \forall v \in V$$

Ein Untervektorraum  $U \subset V$  ist eine Untergruppe, welche unter Skalarmultiplikation, abg. ist.

### Bem: Untervektorräume

$\{U_i\}_{i \in I}$  Unterräume von  $V$

$\rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i$  ist auch ein Unterraum.

Insbesondere gegeben  $M \subset V$  existiert :

$\text{span}(M) = \langle M \rangle =$  der kleinste Untervektorraum von  $V$ , welcher  $M$  enthält

$$\text{span}(M) = \left\{ \sum_{i \in I}^n \lambda_i m_i, n \in M, \lambda \in K, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$M$  ist also ein erzeugendes System für  $\text{span}(M)$

$\{U_i\}_{i \in I}$  Unterräume von  $V$

$$\rightarrow \sum_{i \in I} U_i = \text{span}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right)$$

$$M_1 \subset M_2 \Rightarrow \text{span}(M_1) \subset \text{span}(M_2)$$

### I.0.17 Def: Lineare Unabhängigkeit

$V : VR/K$

$v_1, \dots, v_n \in V$  lin. unabh. falls  $\forall \lambda_1, \dots, \forall \lambda_n \in K :$

$$\sum \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

$M \subset V$  ist lin. unabh. falls jede endliche Teilmenge von  $M$  lin. unabh. oder äquivalent dazu sind. Falls kein Element  $m$  aus  $M$  sich schreiben lässt als linear kombination von  $M \setminus \{m\}$ .  $\lambda_i \neq 0$

$$\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \dots + \lambda_n m_n = 0 \Rightarrow m = \sum -\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) m_i$$

### I.0.18 Def: Basis = min. Erz. System

Eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  ist ein lin. unabh. erzeugendensystem von  $V$ , äquivalent dazu, wenn jedes Element von  $V$  sich eindeutig schreiben lässt als lin. kombi. von Elementen aus  $\mathcal{B}$ . Äquivalent dazu:  $\mathcal{B}$  ist min. Erzeugenden System, max. lin. unabh.

### I.0.19 Satz: Basisergänzungssatz

$M \subset V$  lin. unabh.  $\Rightarrow \exists \mathcal{B} \subset V$  Basis welche  $M$  enthält

Insbesondere hat jeder VR eine Basis „Je zwei Basen sind eine Bijektion“  
 $V$  ist endlichdimensional, falls  $V$  eine endliche Basis besitzt. Sonst ist  $V$  unendlichdimensional.

$$\dim(V) = |\mathcal{B}|$$

( $\mathcal{B}$  eine Basis)

### I.0.20 Basisauswahlsatz

$M \subset V$  erzeugendensystem  $\rightarrow \exists \mathcal{B} \subset M$  Basis von  $V$

### Bem: Dimensions Addition

$U \overset{UR}{\subset} V$ ,  $\dim(V) < \infty \Rightarrow \dim(U) < \infty$  dim ist modular:

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$$

### I.0.21 Def: Direkte Summe

$$V = U_1 \oplus U_2 \quad \Leftrightarrow \quad V = U_1 + U_2 \text{ und } U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

$\oplus = \text{direkte Summe}$

$$V = \oplus_{i \in I} U_i \quad \Leftrightarrow \quad V = \sum_{i \in I} U_i \text{ und } \forall i \in I$$

Die Familie

$$\{U_i\}_{i \in I} \rightarrow U_i \cap \left( \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} U_j \right) = \{0\}$$

ist konversal.



### I.0.22 Bsp:

$K^2$  ist ein  $K - VR$ .

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1, e_2$$

$$U = \text{Span}(e_1) \rightarrow K^2 = U \oplus \text{Span}(e_2) = U \oplus \text{Span}(e_1, e_2)$$

### I.0.23 Def: Lineare Abbildungen

$F : V \rightarrow W$  ist linear, falls

$$D(\lambda v + \mu u) = \lambda F(v) + \mu F(u)$$

(F UR von V)

$$\text{Ker}(F) = \{v \in V | F(v) = 0\}$$

(F UR von W)

$$\text{Im}(F) = \{w \in W | \exists v \in V, F(v) = w\}$$

### Bem: Dimensionssatz

Falls  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $v$  ist  $\Rightarrow F(\mathcal{B})$  ist ein erzeugendensystem von  $\text{Im}(F)$

$$F \text{ injektiv} \Leftrightarrow \text{Ker}(F) = \{0\}$$

V endlich

$$\rightarrow \dim(V) = \dim(\text{Ker}(F)) + \dim(\text{Im}(F))$$

$$v/\text{Ker}(F) \cong \text{Im}(F)$$

### Bem: Isomorphie

V, W endlich  $\{r_1, \dots, r_n\}$  eine Basis von V

$$V \cong K^n$$

$$v_i \mapsto e_i$$

$$F : V(\dim = n) \rightarrow W(\dim = m)$$

$$\begin{array}{ccc}
\{v_1, \dots, v_n\} & & \{w_1, \dots, w_m\} \\
V & \xrightarrow{F} & W \\
R & & R \\
K^n & & K^m \\
\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} & \rightarrow & A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}
\end{array}$$

Wie bekommt man die Matrix A ?

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

$$F(v_1) \dots F(v_n)$$

$$\begin{pmatrix} 1_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$  Matrix

### I.0.24 Def: Rang

$$\text{Rg}(A) = \dim(\text{Span}(\text{Spaltenvektorraum})) = \dim(\text{Span}(\text{Zeilenvektorraum}))$$

$F : V \rightarrow W$  linear

$$\text{Rg}(F) = \text{Rg}(A) = \dim(\text{Im}(F))$$

### I.0.25 Satz: Basismatrix

$V, W$  endlichdim.

Es existieren Basen  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$ ,  $\{w_1, \dots, w_m\}$  von  $W$ , sodass die Darstellungsmatrix von  $F$  die Form :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

hat.

### I.0.26 Bew:

Sei  $U = \text{Ker}(F)$  und wähle  $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $U$ .

Sei  $U'$  ein Komplement von  $U$  in  $V \rightarrow V = U \oplus U'$

Sei  $\{v_1, \dots, v_r\}$  eine Basis von  $U'$

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  ist eine Basis von  $V$

$\text{Im}(F)$  hat  $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$  als Basis

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i F(v_i) = 0$$

$$F\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \in U \cap U' = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i = 0 \quad \Rightarrow \underline{\lambda_i = \dots = \lambda_r = 0}$$

Ergänze  $\{F(v_1), \dots, F(v_r)\}$  zu einer Basis  $\mathcal{B}' = w_1, \dots, w_m$  Basis von  $W$

$$F(v_1) \dots F(v_r), F(v_{r+1}) \dots F(v_n)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

□

### I.0.27 Def: Invertierbarkeit

$A \in M_{n \times n}(K)$  ist invertierbar, falls es eine Matrix  $B \in M_{n \times n}(K)$  gibt, sodass:

$$B \cdot A = A \cdot B = E_n$$

$$GL(n, K) = GL_n(K) = \{A \in M_{n \times n}(K) \text{ invertierbar}\}$$

$GL_n(K)$  ist eine Gruppe

$$A \in GL_n(K) \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$$

also invertierbar  $\Leftrightarrow$  regulär

### Bem: Eindeutige Lösung

Wenn A regulär ist, dann besitzt ein Gleichungssystem

$$A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung:

$$A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

### Bem: Zeilenoperationen

A ist regulär gdw. A sich durch elementare zeilenoperationen in  $E_n$  überführen lässt.

$E_{ij} \leftarrow$  Die Matrix die 1 an der Stelle  $(i, j)$  hat und 0 sonst.

Multiplizieren der i-ten Zeile mit  $\lambda$

Addieren  $\lambda$  mal j-te Zeile zur i-ten Zeile  $= E_n + \lambda E_{ij}$

Vertauschen der i-ten Zeile mit der j-ten Zeile:  $E_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ji} + E_{ij}$

$$(A \mid E_n)$$

$$\hookrightarrow \text{Zeilenoperationen} \rightarrow (E_n \mid A^{-1})$$

$$\underbrace{B_n \cdot \dots \cdot B_2 \cdot B_1 \cdot A}_{A^{-1}} = E_n$$

Übergangsmatrizen:  $\dim(V) = n$

$$\{v_1, \dots, v_n\}$$

$$\{v'_1, \dots, v'_n\}$$

$$v'_i = \sum S_{ij} v_{ji}$$

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{1j} \\ S_{i1} & S_{ij} \end{pmatrix}$$

Vektorraum  $V/K \rightarrow \mathcal{B}$  Basis  
 $V$  ist endlich, falls es eine endliche Basis besitzt.

$$\dim(V) = |\mathcal{B}|$$

$$F : V \rightarrow W$$

$F$ : lineare Abbildung

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$$

Basis von  $V$

$$\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$$

Basis von  $W$

$$F(v_1), \dots, F(v_n)$$

$$F(v_j) = \sum_{ij} w_i$$

sind lin. unabh. von der Basis von  $W$   $F$  hat Darstellungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$V \mapsto V$$

$$v_i \mapsto v'_i$$

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \quad \mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$$

$$S = (s_{ij}) \rightarrow v'_j = \sum s_{ij} v_i \in K$$

Transformationsmatrix von  $\mathcal{B}'$  nach  $\mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$S^{-1}$  ist die Transformationsmatrix von  $\mathcal{B}$  nach  $\mathcal{B}'$

$$V \xrightarrow{F} W$$

$$\begin{array}{ccc} \{v_1, \dots, v_n\} & \xrightarrow{A} & \{w_1, \dots, w_n\} \\ \uparrow S & & \uparrow T \\ \{v'_1, \dots, v'_n\} & \xrightarrow{D} & \{w'_1, \dots, w'_n\} \end{array}$$

Wie sieht die Darstellungsmatrix von F bzgl. diesen Matrizen aus?  
Darstellungsmatrix von F bzgl.  $\{v'_1, \dots, v'_n\}, \{w'_1, \dots, w'_n\}$  ist  $T^{-1} \cdot A \cdot S$ .

### I.0.28 Def: Äquivalenz und Ähnlichkeit

Zwei (mxn)-Matrizen A, A' sind äquivalent, falls es reguläre Matrizen  $T \in GL_m(K), S \in GL_n(K)$  gibt, sodass:

$$A' = T^{-1} \cdot A \cdot S$$

A, A'  $\in M_{n \times n}(K)$  sind ähnlich, falls es  $S \in GL_n(K)$  gibt, sodass:

$$A' = S^{-1} \cdot A \cdot S$$

#### Bem: Ähnlichkeit

Ähnlichkeit (Än) auf  $M_{n \times n}(K) \Rightarrow$  Äquivalenz (Äq) auf  $M_{m \times n}(K)$

### I.0.29 Def: Determinante

Die Determinante

$$\det(K^n) \mapsto K$$

multilineare alternierende Abbildung derart, dass  $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$ .

$$A \in M_{n \times n}(K)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det(a_1, \dots, a_n)$$

$$A = (a_{ij})$$

$$\det(A) = \sum_{\substack{\pi \in \underbrace{S_n}_{B_{ij}(\{1, \dots, n\})}}} \text{sign}(\pi) \cdot \prod_{i=1}^n a_{\pi(i)i}$$

$\text{sign}(\pi)$  (-1) Anzahl von Fehlständen  $\{(ij) | i < j, \pi(i) > \pi(j)\}$ ,  
 (-1) Anzahl von Faktoren von  $\pi$  als Produkt von Transpositionen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

derlineEigenschaften

- 1)  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
  - 2)  $A$  invertierbar genau dann wenn  $\det(A) \neq 0$
  - 3)  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
  - 4)  $\det(A^T) = \det(A)$
- $\parallel$   
 $(a_{ji})$   
 $E_n + (-E_n)$  ist nicht invertierbar.

Laplascher Entwicklungssatz

Sei  $j_0$  ein Spaltenindex,  $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j_0} a_{ij_0} \det(A_{j_0})$

$$\leftrightarrow \left( \begin{array}{c|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right)$$

Cramersche Regel

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b$$

Falls  $A$  regulär ist, dann gibt es eine einzige Lösung zum System:

$$x_j = \frac{\det(a_i, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_n)}{\det(A)}$$

### I.0.30 Def: Darstellungsmatrix

$\det(F) = \det(a)$ , Darstellungsmatrix von  $F$  bzgl. der Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$

### I.0.31 Def: Adjunkte

Sei  $A (= a_{ij})$  eine  $n \times n$ -Matrix  
definiere die Adjunkte von  $A$ ,

$$\text{adj}(A) = (\gamma_{ij})$$

wobei

$$\gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

### Bem: Determinante und Adjunkte

Sei  $c_j$  die  $j$ -te Zeile von  $\text{adj}(A)$ .

Sei  $a_i$  die  $i$ -te Spalte von  $A$

$$\begin{aligned} \overbrace{(\gamma_{j1}, \dots, \gamma_{jn})}^{c_j} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}}_{a_i} &= \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} a_{ki} = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{ki} \det(A_{jk}) \\ &= \det(a_1, \dots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

$$(\text{Laplacesche Entwicklung}) = \begin{cases} \det(A) & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

$A$  regulär:

$$\begin{aligned} \text{adj}(A) \cdot A &= \det(A) \cdot E_n \\ \Rightarrow \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} \cdot A &= E_n = A^{-1} \cdot A \\ \Rightarrow \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} &= A^{-1} \quad \Rightarrow \quad A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot E_n \end{aligned}$$



# Kapitel II

## Lineare Algebra II

### II.0.1 Def: Diagonalisierbarkeit

$V$  Vektorraum

$\{U_i\}_{i=1}^k$  Unterräume von  $V$

$$V = \bigoplus_{i=1}^k U_i \Leftrightarrow \begin{cases} V = \sum_{i=1}^k U_i & 1 \leq i \leq k \\ U_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k U_j = \{0\} \end{cases}$$

Äquivalent dazu, wenn jeder Vektor  $v \in V$  sich eindeutig schreiben lässt als Linearkombination von den Vektoren

$$\bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$$

$\mathcal{B}_i$  ist Basis von  $U_i$

### II.0.2 Def: Eigenvektor

Ein Endomorphismus

$$F : V \rightarrow V$$

besitzt einen Eigenvektor, falls es  $v \in V \setminus \{0\}$  derart gibt, dass  $F(v) = \lambda \cdot v$  für ein  $\lambda \in K$

Falls  $F(v) = \lambda \cdot v$

$\lambda$  ist eindeutig bestimmt von  $F$  und  $v \Rightarrow \lambda$  ist Eigenwert von  $F$

$$F(v) = \mu \cdot v = \lambda \cdot v \Rightarrow (\lambda - \mu) \cdot v = 0$$

### II.0.3 Def: Eigenraum

$\lambda \in K \quad F : V \rightarrow V$  Endomorphismus

$$V(\lambda) = \{v \in V \mid F(v) = \lambda \cdot v\}$$

$V(\lambda)$  ist Eigenraum zum Wert  $\lambda$   
und ist ein Unterraum

#### Bem: Eigenwert

$\lambda$  ist ein Eigenwert von  $F$  gdw.  $\dim(V(\lambda)) \geq 1$ .

#### Bem: Eigenwerte

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$  verschiedene Eigenwerte von  $F$

$$\rightarrow V(\lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k V(\lambda_j) = \{0\}$$

### II.0.4 Def: Diagonalisierbarkeit

$V$  endlich VR /  $K \quad F : V \rightarrow V$  Endomorphismus ( bzw. eine Matrix  $A = K^n \rightarrow K^n$ ) ist diagonalisierbar, falls

$$V = \bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$  verschiedene Eigenwerte von  $F$

Äquivalent dazu, wenn  $V$  eine Basis von Eigenvektoren von  $F$  besitzt. Äquivalent dazu, wenn  $F$  bzgl. einer Basis von  $V$  die Darstellungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

hat.

Für Matrizen:

$A$  ist diagonalisierbar genau dann wenn es eine reguläre Matrix  $S$  gibt, sodass

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

### II.0.5 Satz: Zu Eigenwerten

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$$

$$\lambda \in K$$

$\lambda$  ist ein Eigenwert von  $A$  genau dann wenn

$$\lambda E_n - A \text{ nicht regulär ist} \Leftrightarrow \det(\lambda \cdot E_n - A) = 0$$

### II.0.6 Def: Charakteristisches Polynom

Das charakteristische Polynom einer Matrix

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$$

ist

$$\chi_A(T) = \det(T \cdot E_n - A)$$

**Bem: Eigenwerte als Nullstellen**

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } A \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$$

### II.0.7 Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$\chi_A(T) = T^2 + 1 = \det \begin{pmatrix} T & -1 \\ 1 & T \end{pmatrix} (= T \cdot E_2 - A)$$

**Bem: Spur**

$$A \text{ und } A' \text{ ähnlich } A' = S^{-1}AS$$

$$\Rightarrow \chi_A(T) = \chi_{A'}(T)$$

Insbesondere, können wir über das charakteristische Polynom eines Endomorphismus

$$\chi_F(T) \quad F : V \rightarrow V$$

sagen:

$$(a_{ij}) = A \in M_{n \times n}(K)$$

$$\chi_A(T) = T^n + b_{n-1}T^{n-1} + \dots + b_0$$

wobei

$$b_0 = (-1)^n \det(A)$$

$$b_{n-1} = -\text{Tr}(A) = -\sum_{i=1}^n a_{i(i \text{ oder } j)}$$

Tr = Trace = Spur von A

## II.0.8 Kor: Anzahl der Eigenwerte

$\dim(V) = n$

Ein Endomorphismus

$$F : V \rightarrow V$$

kann höchstens n viele Eigenwerte besitzen.

## II.0.9 Kor: Diagonalisierbarkeit

$$F : V \rightarrow V$$

mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$  ist diagonalisierbar gdw.

$$n = \sum_{i=1}^k d_i$$

$$d_i = \dim(V(\lambda_i)) = \{v \in V \mid F(v) = \lambda \cdot v\}$$

$d_i$  = geometrische Vielfachheit von  $\lambda_i$

## II.0.10 Bew:

$\Rightarrow$

F ist diag. gdw. V eine Basis aus Eigenvektoren besitzt, welche aus

$$n = |B| = \bigcup_{i=1}^n |\mathcal{B}_i| \quad \mathcal{B}_i = \text{Basis von } V(\lambda_i)$$

$$|\mathcal{B}_i| = d_i = \dim(V(\lambda_i))$$

$\Leftarrow$

$$n = \sum d_i \Rightarrow \dim(\sum_{i=1}^k V(\lambda_i)) = n \Rightarrow V = \sum_{i=1}^k V(\lambda_i)$$

Da die Eigenräume transversal sind, und ein Vektorraum nur einen UVR der dimension  $\dim(V)$  hat, sich selbst.

□

### Bem: Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $0 \neq v \in V$  ist ein Eigenvektor für  $F$

$$F(v) = \lambda v, \lambda \in K$$

$$V(\lambda) = \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\}$$

$\lambda$  ist Eigenwert  $\Leftrightarrow \dim(V(\lambda)) = 1$

$V(\lambda) = \ker(F - \lambda Id_V)$   $F$  ist diagonalisierbar wenn  $V$  eine Basis von Eigenvektoren besitzt.

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(T) = \det(T \cdot E_n - A)$$

$$A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K) = T^n + b_{n-1}T^{n-1} + \dots + b_0 \text{ normiert}$$

$$\lambda \in K \text{ ist } \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \text{ Eigenwert von } A$$

### II.0.11 Kor: Geometrische Vielfachheit

$F : V \rightarrow V$  ist diagonalisierbar  $\Leftrightarrow$  geometrische Vielfachheit von Eigenwert  $n = \dim(V) = \sum_{i=1}^k \dim(V(\lambda_i)) = \lambda_1 \dots \lambda_k$  sind die Eigenwerte von  $F$

### II.0.12 Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(K)$$

$$\chi_A(T) = \det \begin{pmatrix} T & -1 \\ 0 & T \end{pmatrix} = T^2$$

0 ist der einzige Eigenwert von A,  
A ist diagonalisierbar gdw.

$$2 = \dim(\ker(A))$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \quad 2 \neq 1 \Rightarrow A \text{ ist nicht diagonalisierbar}$$

$$\Rightarrow \dim(\ker(A)) = 1$$

### II.0.13 Def: Algebraische Vielfachheit

$\dim(V) < \infty$   $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  
 $\lambda \in K$  Eigenwert

$$\Rightarrow \chi_F(\lambda) = 0$$

algebraische Vielfachheit von  $\lambda$   $K = \text{ord}_\lambda(F)$

$$\chi_F(T) = (T - \lambda) \cdot G(T) \quad G(T) = 0$$

**Bem:**

$$\text{ord}_\lambda(F) \geq \dim V(\lambda)$$

### II.0.14 Bew:

Sei  $\{v_1, \dots, v_k\}$  Basis von  $V(\lambda)$  und erweitern sie zu einer Basis  
 $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$  von  $V$ .

Die Darstellungsmatrix von  $F$  bzgl.  $\mathcal{B}$

$$F(v_1) \dots F(v_k), F(v_{k+1}) \dots F(v_n)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & & \\ 0 & \lambda & 0 & & \\ 0 & 0 & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & \\ & & & & & C_1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ C_2 \end{matrix}$$

$$C_1(\text{vllt. } C_2) \in \text{Mat}_{n-k \times k}(K)$$

$$\chi_{F(\text{vllt}|U)}(T) = \det(T E_n - M) = (T - \lambda)^k \cdot \underbrace{\det(T E_{n-k} \cdot C_1)}_{H(\lambda)}$$

$$\Rightarrow k = \text{ord}_\lambda(F)$$

(weil es sein könnte, dass  $H(\lambda) = 0$ )

□

## II.0.15 Lemma: Quotientenraum Endomorphismus

Sei  $V$  endlichdim.  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  
 $U \subset V$   $F$ -invarianter Unterraum ( $F(U) \subset U$ )

$$\begin{aligned}\tilde{F} : V/U &\rightarrow V/U \quad \text{lineare Abbildung} \\ \bar{v} &\mapsto \overline{F(v)}\end{aligned}$$

$\tilde{F}$  ist wohldefiniert und ferner

$$\chi_F(T) = \chi_{F|U}(T) \cdot \chi_{\tilde{F}}(T)$$

## II.0.16 Bew:

$\tilde{F}$  ist wohldefiniert:

$$\bar{v}_1 = \bar{v} \stackrel{\text{zu zeigen}}{\Rightarrow} \overline{F(v)} = \tilde{F}(v_1) = \tilde{F}(v) = \overline{F(v)}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow v_1 &= v + \underbrace{(v_1 - v)}_{\in U} \\ F(v_1) &= F(v) + \underbrace{F(v_1 - v)}_{\in U} \\ \Rightarrow \overline{F(v_1)} &= \overline{F(v)}\end{aligned}$$

Restklassen sind linear und  $\tilde{F}$  ist linear  $\Rightarrow \tilde{F}$  ist linear Sei  $\{u_1, \dots, u_k\}$  eine Basis von  $U$  und erweitere sie zu einer Basis  $\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$  von  $V$ .

**Bem:**

$\{\overline{v_{k+1}}, \dots, \overline{v_n}\}$  ist eine Basis von  $V/U$

**Bem: Darstellungsmatrizen**

Einfach Darstellungsmatrix von  $F$  bzgl.  $\mathcal{B}$ .

$$F(u_1) \dots F(u_k), F(v_{k+1}) \dots F(v_n)$$

$$\begin{array}{lcl} u & \rightarrow & \\ \vdots & & \\ u_k & \rightarrow & \\ v_{k+1} & \rightarrow & \\ \vdots & & \\ v_n & \rightarrow & \end{array} \left( \begin{array}{ccc} & & \\ & A & C_2 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ C_1 \\ \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \chi_F(T) &= \det(T \cdot E_n - H) \\ &= \det \left( T \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & C_2 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} TE_k - A & -C_2 \\ 0 & TE_{n-k} - C_1 \end{pmatrix} \\ &= \det(TE_k - A) \cdot \det(TE_{n-k} - C_1) \end{aligned}$$

A ist die Darstellungsmatrix von  $F|U$  bzgl.  $\{u_1, \dots, u_k\}$

$$\Rightarrow \det(TE_k - A) = \chi_{F|U}(T)$$

$C_j$  ist die Darstellungsmatrix von  $\tilde{F}$  bzgl.  $\{\overline{v_{k+1}}, \dots, \overline{v_n}\}$

$$\Rightarrow \det(TE_{n-k} - A) = \chi_{\tilde{F}}(T)$$

## II.0.17 Satz: Diagonalisierbarkeit

$\dim(V) < \infty$   $K$  Körper

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus

F ist diagonalisierbar gdw.  $\chi_F(T)$  in linearfaktoren zerfällt

$$\chi_F(T) = (T - \lambda_1)^k \dots (T - \lambda_r)^{k_r}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r =$  Nullstellen (verschwinden) und für jeden Faktor  $T - \lambda_i$  gilt:

$$\text{ord}_{\lambda_i}(F) = \dim(V(\lambda_i))$$



## II.0.18 Bew:

$\Rightarrow$  Sei  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von Eigenvektoren.  
Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  die verschwindenden Eigenwerte.

$$v_1, \dots, v_{\alpha_1} \in V(\lambda_1)$$

$$v_{\alpha_1+1}, \dots, v_{\alpha_1+\alpha_2} \in V(\lambda_2)$$

$$v_{d_1} + \dots + v_{d_{r-1}}, \dots, \underbrace{v_{d_1} + \dots + d_r}_{n} d_i = \dim(V(\lambda_i)) \text{ Die Darstellungsmatrix}$$

von F bzgl.  $\mathcal{B}$

$$F(v_1) \dots F(v_d), F(v_{d+1}) \dots F(v_n)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_2 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_r \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix} \begin{matrix} \} d_1 \\ \\ \\ \} d_2 \\ \\ \\ \} d_r \end{matrix}$$

Wobei  $d_i$  viele  $\lambda_i$  auf der Diagonalen liegen

$$\chi_F(T) = \det(T E_n - A) = (T - \lambda_1)^{d_1} \dots \underbrace{(T - \lambda_r)^{d_r}}_{a(T)}$$

$$a_q(\lambda_1) \neq 0 \quad (\lambda \neq \lambda_i, i \neq 1)$$

$\Leftarrow$

$$\chi_F(T) = (T - \lambda_1)^{d_1} \dots (T - \lambda_r)^{d_r}$$

$$(\text{Grad}(\chi_F) = n)$$

$$d_i = \dim(V(\lambda_i))$$

$$F \text{ ist diagonalisierbar} \Leftrightarrow n = \dim(V) = \sum d_i$$

## II.0.19 Def: Diag. und Ähnlichkeit

Eine Matrix  $A \in M_{n \times n}(K)$  ist trigonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

endlichdim VR / K  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  
 $A$  Darstellungsmatrix bzw.  $B$

$$\chi_F(T) = \det(T \cdot E_n - A)$$

normiert

$$\chi_F(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \text{ Eigenwerte von } F \Leftrightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} F(v) = \lambda \cdot v$$

$U \subset V$  Untervektorraum  $F$ -invariant ( $F(U) \subset U$ )

$$\chi_F = \chi_{F|U} \cdot \chi_{\tilde{F}}$$

$$\tilde{F} : V/U \rightarrow V/U$$

$$\bar{v} \mapsto \overline{F(v)}$$

$F$  ist dia/tri ? gonalisierbar  $\Leftrightarrow \chi_A$  in Linearfaktoren zerfällt und  $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_k$  Eigenwerte

$$\dim(V(\chi)) = \text{ord}_{\lambda_i}(\chi_F)$$

## II.0.20 Def: Trigonalisierbarkeit

$$F : V \rightarrow V$$

$F$  trigonalisierbar ist, falls es eine Darstellungsmatrix von  $F$  gibt, welche in oberer Dreiecksform ist.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

## II.0.21 Satz: Trigonalisierbarkeit

$F : V \rightarrow V$  ist trigonalisierbar, gdw  $\chi_F$  in Linearfaktoren zerfällt

$$\chi_F(T) = (T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$$

(eventuell mit Wiederholungen)

## II.0.22 Kor: Trigonalisierbarkeit

Jeder Endomorphismus eines endlichdim VR über einem alg. abg. Körper (z.B.  $\mathbb{C}$ ) ist trigonalisierbar.

## II.0.23 Bew: (Satz)

$\Rightarrow$

F ist Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\chi_F(T) = \det(T \cdot E_n - A) = \prod_{i=1}^n (T - a_{ii})$$

$\Leftarrow$

Induktion über  $n = \dim(V)$

$n = 1 \rightarrow$  Jede  $1 \times 1$  Matrix ist in oberer Dreiecksform  $\rightarrow a_n !$

$n \geq 2$

$$\chi_F(T) = (T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$$

$\lambda_1$  ist ein Eigenwert

$$\rightarrow \exists v_1 \in V \setminus \{0\} \quad F(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1$$

$$U = \text{span}(v_1) \subset V$$

ist F-invariant

$$\begin{array}{ccc} \chi_F(T) & = & \chi_{F|U} \cdot \chi_{\tilde{F}} \\ \parallel & & \parallel \\ (T - \lambda_1) \prod_{i=2}^n (T - \lambda_i) & & (T - \lambda_1) \end{array}$$

$K[T]$  ist ein Integritätsbereich

$$\Rightarrow \chi_{\tilde{F}}(T) = \prod_{i=2}^n (T - \lambda_i)$$

$$\dim(V/U) < \dim(V)$$

$\Downarrow$  I.A. Es gibt eine Basis  $\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$  von  $V/U$  derart, dass  $\tilde{F}$  bzgl. dieser Basis Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix} = (\mu_{ij})$$

### II.0.24 Beh:

Seien  $v_i \in V \quad \bar{v}_i = \overline{v_i} \quad 2 \leq i \leq n$   
 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ist eine Basis von  $V$

### II.0.25 Bew:

(Übungsaufgabe)

### II.0.26 Frage:

Wie sieht die Darstellungsmatrix von  $F$  bezüglich  $\{v_1, \dots, v_n\}$  aus?

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\bar{v}_j) &= \overline{F(v_j)} \\ \Rightarrow \sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} \bar{v}_i &= \overline{\sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} v_i} \\ \Rightarrow \mu_{ij} \in K \mid_{F(v_j)} &= \mu_{2j} v_1 + \sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} v_j = \sum_{1 \leq i \leq j} \mu_{ij} v_j \\ F(v), F(v_2) \dots F(v_n) \\ &\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_{12} & \cdots & * \\ & \lambda_2 & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### II.0.27 Lemma: $F^r$ & Polynome

$V$  endlichdim /  $K$   
 $v \in V \setminus \{0\} \quad \exists r \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} F^r(v) &= \sum_{i=0}^{r-1} \underbrace{a_i}_{\substack{\text{eindeutig} \\ \text{bestimmt}}} F^i(v) \\ \parallel \\ \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_{r\text{-Mal}} \end{aligned}$$

Insb. ist

$$U = \text{Span}(v, F(v), \dots, F^{n-1}(v))$$

ist  $F$ -invariant, hat Basis  $\{v_1, \dots, F^{n-1}(v)\}$   
 $F \mid U$  hat Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_1 \\ & 1 & 0 & \dots & a_2 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & a_{r-1} \end{pmatrix}$$

$$\chi_{F|U}(T) = T^r - a_{r-1}T^{r-1} \dots - a_0$$

## II.0.28 Bew:

$n = \dim(V)$   $v, F(v), \dots, F^r(v)$  lin. unabh.

Sei  $r > 0$  kleinste rat. Zahl, sodass:  $v, F(v), \dots, F^r(v)$  lin. abh.

$$v, F(v), \dots, F^{r-1}(v)$$

lin. unabh. (aus der Minimalität von r)

⇓ Austauschprinzip:

$$F^r(v) = \sum_{i=0}^{r-1} \underbrace{a_i}_{\substack{\text{eindeutig} \\ \text{bestimmt}}} F^i(v)$$

$$U = \text{Span}(v, F(v), \dots, F^{r-1}(v)) \quad \text{ist } F\text{-invariant}$$

$$v \in U \quad v = \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i F^i(v)$$

$$F(v) = \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i F^{i+1}(v)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i F^{i+1}(v) \\ &= \underbrace{\sum_{i=0}^{r-2} \mu_i F^{i+1}(v)}_{\in U} + \underbrace{\mu_{r-1} \overbrace{F^r(v)}^{\sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v)}}_{\in U} \end{aligned}$$

$\{v, F(v), \dots, F^{r-1}(v)\}$  ist eine Basis von U.

$$F(v), \dots, \overbrace{F(F^{r-1}(v))}^{F^r(v)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & & a_1 \\ & 1 & 0 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & a_{r-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_{F|U}(T) &= \det(T \cdot E_n - A) \\ &= \det \begin{pmatrix} T & 0 & \dots & a_0 \\ -1 & T & & 0 \\ & -1 & T & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T - a_{r-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Laplacescher Entwicklungssatz nach der r-ten Spalte)

$$\begin{aligned} &= (-1)^{r+1}(-a_0) \det \begin{pmatrix} -1 & T & & \\ & -1 & T & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^T \end{pmatrix} + \\ &+ (-1)^{r+2}(-a_1) \det \begin{pmatrix} -1 & T & & \\ & -1 & T & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^T \end{pmatrix} + \dots + \\ &+ (-1)^{2r}(T - a_{r-1}) \det \begin{pmatrix} -1 & T & & \\ & -1 & T & \\ & & \ddots & \\ & & & T \end{pmatrix} \\ &= (-1)^r a_0 (-1)^{r-1} a_1 + (-1)^{r+1} a_1 T (-1)^{r-1} + \dots + (-1)^{2r} (T - a_{r-1}) T^{r-1} \\ &= -a_0 - a_1 T - \dots - a_{r-1} T^{r-1} + T^r \end{aligned}$$

### Notation

$$\begin{aligned} P(T) &\in K[T] \\ &\parallel \\ &\sum_{i=0}^m a_i T^i \end{aligned}$$

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus

$P(F) : V \rightarrow V$

$v \mapsto \sum_{i=0}^m a_i F^i(v)$

Mit dieser Notation haben wir, das im vorherigen Lemma

$$\chi_{F|U}(v) = F^r(v) - \sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v) = 0$$

### II.0.29 Satz: (Calay - Hamilton)

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus endlichdim.  $\chi_F(F)$  ist der 0 Endomorphismus auf  $V$

### II.0.30 Bew:

Zu Zeigen:  $\forall v \in V : \chi_F(F)(v) = 0$

$v = 0$   $\rightarrow$  ok

sonst  $v \neq 0 \rightarrow \exists r \in \mathbb{N}$

$$U = \text{Span}(v, F(v), \dots, F^{r-1}(v))$$

ist  $F$  in  $V$   $U$   $F$ -invariant

$$\Rightarrow \chi_F = \chi_{F|U} \cdot \chi_{\tilde{F}} = \chi_{\tilde{F}} \cdot \chi_{F|U}$$

$\tilde{F} : V/U \rightarrow V/U$

$\bar{w} \mapsto F(\bar{w})$

### Aufgabe

$R(T) = P \cdot C$  allg. Polynom  $\Rightarrow R(F) = P \cdot (G(F))$  als Endomorphismen

$$\chi_F(F)(v) = \overbrace{\chi_{\tilde{F}} \cdot (\chi_{F|U}(v))}^{\begin{smallmatrix} 0 \\ \parallel \end{smallmatrix}} \underbrace{\hspace{1cm}}_{\begin{smallmatrix} \parallel \\ 0 \end{smallmatrix}}$$

### II.0.31 Kor:

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$

$$\chi_A(T) = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot T^i$$

$$\Rightarrow A^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot A^i = 0$$

da  $n \times n$  Matrix

### II.0.32 Satz: Minimalpolynom

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $V$  endlichdim. /K

Dann existiert genau ein normierter Polynom kleinsten Grades  $m_F$  derart, dass  $\forall P \in K[T]$

$$m_F|_P \Leftrightarrow P(T) = 0 \quad \text{als Endomorphismus von } F$$

Insb. gilt  $m_F(F) = 0$

Das Polynom  $m_F (= \mu_F)$  heißt das Minimalpolynom von  $F$ .

### II.0.33 Satz: Trigonalisierbarkeit

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $V$  endlich dim. und trigonalisierbar falls es eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  gibt, sodass  $F$  Darstellungsmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

Falls  $\chi_F(T)$  in Linearfaktoren zerfällt dann ist  $F$  trigonalisierbar (Insb. falls  $K$  alg. abg. ist z.B.  $\mathbb{C}$ )

$$F^0 = Id_v$$

$$F^i = \underbrace{F \circ \dots \circ F}_{i \text{ mal}}$$

$$P \in K[T] \quad P = \sum_{i=0}^m T^i$$

$$P(F) : \sum a_i F^i : V \rightarrow V, v \mapsto \sum a_i F^i(v)$$

#### Aufgabe:

Komposition des Endomorphismus ... Produkt im Polynom

$$P(F) \circ f(F) = (P \cdot G)(F)$$



### II.0.34 Satz: (Caley-Hamilton)

$$\chi_F(F) = 0_{iv}$$

als Endomorphismus

### II.0.35 Kor: Charakteristische Polynome

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$$

$$\chi_A(T) = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i T^i$$

$$\Rightarrow A^n + b_{n-1}A^{n-1} + \dots + b_0 E_n = 0$$

### II.0.36 Satz: normiertes Polynom

Vendlichdim/ $KF : V \rightarrow V$  Endomorphismus Dann existiert genau ein normiertes und minimales Polynom  $m_F(T)$  kleinsten Grades derart, dass  $\forall P \in K[T]$ :

$$m_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0$$

### II.0.37 Def: minimal Polynom

Das Polynom  $m_F(T)$  heißt das Minimalpolynom von F. Insb.  $m_F(F) = 0$

### II.0.38 Bew:

Sei

$$\mathcal{F} = \{P \in K[T] \text{ normiert} \mid P(F) = 0 \text{ als Endomorphismus}\}$$

Caley.Hamilton

$$\chi_F(T) \in \mathcal{F} \neq \emptyset$$

Sei  $m_F(T) \in \mathcal{F}$  Polynom kleinsten Grades.

Zu Zeigen:  $\forall P \in K[T]$

$$m_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0$$

$\Rightarrow$

$$m_F|_P \Leftrightarrow \exists G \in K[T] \quad P = G \cdot m_F$$

$$P(F) = G(F) \circ \underbrace{m_F(F)}_{=0(m_F(F) \in \mathcal{F})} = 0$$

$\Leftarrow$

Sei  $P \in K[T] \mid P(F) = 0$

Division mit Rest  $\rightarrow \exists G \overset{r}{\in} K[T] \ P = G \cdot m_F + r \quad \text{grad}(r) < \text{grad}(m_F)$

$$0 = P(F) = G(F) \circ \underbrace{m_F(F)}_{\substack{\parallel \\ 0}} + r(F)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\parallel \\ 0}}$$

$\Rightarrow r(F) = 0$  als Endomorphismus

$\Rightarrow r = 0$  ( Sonst  $\frac{1}{a_{(\text{grad}(r))}} \cdot r(T) \in \mathcal{F}$ ) Eindeutigkeit

Angenommen  $m'_F$  ist normiert. wäre auch so:

$$m'_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0 \forall P \in K[T]$$

$$\Rightarrow m_F|_{m'_F} \quad \& \quad m'_F|_{m_F}$$

$$\left. \begin{array}{l} m_F = Q \cdot m'_F \\ m'_F = H \cdot m_F \end{array} \right\} \rightarrow Q, H \text{ sind beide } \underline{\text{normiert}}$$

Zu zeigen:  $Q = H = 1$

$$m_F = Q \cdot m'_F = Q \cdot H \cdot m_F$$

$K[T]$  Integritätsbereich

$$\Rightarrow 1 = Q \cdot H$$

$$\text{grad}(G \cdot H) = \text{grad}(1) = 0$$

$$\text{grad}(G) + \text{grad}(H) \Rightarrow G, H \in K \text{ und normiert}$$

$$(\text{als Polynom}) \Rightarrow Q = H = 1$$

□

**Bsp: Minimalpolynom mit Hauptraum**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$m_A$  ?

$$\chi_A(T) = T^2 = \det \begin{pmatrix} T & -1 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

$$m_A|_{T^2} \Rightarrow m_A = \begin{cases} T \\ T^2 \end{cases}$$

$$m_A = 0 \rightarrow m_A(T) \neq T (A \neq 0)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow m_A(T) = T^2$$

### II.0.39 Lemma: Nullstellen von $\chi_F$ und $m_F$

Gegeben  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $V$  endlichdim /  $K$ , dann haben  $\chi_F$  und  $m_F$  dieselben Nullstellen in  $K$ .

### II.0.40 Bew:

$$m_F|_{\chi_F} \Rightarrow \chi_F = G \cdot m_F$$

$$\forall \lambda \in K, \text{ falls } m_F(\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \chi_F(\lambda) = 0$$

$$\text{Sei } \lambda \in K | \chi_F(\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } F$$

$$\Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} | F(v) = \lambda \cdot v$$

$$\text{Sei } m_F(T) = T^d + \sum_{i=0}^{d-1} c_i T^i$$

$$\begin{aligned} 0 &= m_F(F)(v) \\ &= (F^d + \sum c_i F^i)(v) \\ &= F^d(v) + \sum c_i F^i(v) \\ &= \lambda^d v + \sum c_i \lambda^i \cdot v \\ &= \underbrace{(\lambda^d + \sum c_i \lambda^i)}_{\substack{\parallel \\ m_F(\lambda)}} \cdot v \end{aligned}$$

$$v \neq 0 \quad m_F(\lambda) = 0$$

□

### II.0.41 Satz: Diagonalisierbarkeit und Minimalpolynom

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $V$  endlichdim. /  $K$  ist diagonalisierbar gdw  $m_F$  in lauter verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

$$m_F(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i) : \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j$$

Die  $\lambda_i$  sind die Eigenwerte von  $F$

## II.0.42 Bew:

$\Rightarrow$

Sei  $F$  diagonalisierbar. Dann gilt

$$\chi_F(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{d_i}$$

wo die  $\lambda_i$  Eigenwerte von  $F$  sind

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_i & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_k \end{pmatrix} \quad \chi_F(T) = \det(T \cdot E_n - \tilde{F})$$

Außerdem ist  $V = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$

Sei  $v \in V$  beliebig. Dann gilt  $V = \sum_{i=1}^k V_i$ , wobei  $v_i \in V(\lambda_i)$

Setze

$$p(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i) \quad (\stackrel{?}{=} m_F(T))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p(F)v &= \prod_{i=1}^k (F - \lambda_i)v \\ &= \prod_{i=1}^k (F - \lambda_i) \left( \sum_{j=1}^k v_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^k \left( \prod_{i=1}^k (F - \lambda_i)v_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^k (F - \lambda_1 \cdot Id) \circ \dots \circ (F - \lambda_i \cdot Id) \circ \dots \\ &\quad \dots \circ (F - \lambda_{i+1} \cdot Id) \circ \dots \circ (F - \lambda_j \cdot Id)(v_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

da  $v_j \in V(\lambda_i)$ .

$v$  war beliebig  $\Rightarrow P(F) = 0 \in \text{end}(V)$

also  $m_F|_p \Rightarrow P(T) = Q(T) \cdot m_F(T)$

Aber  $m_F(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{s_i} \quad s_i \geq 1$

$$P(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i) = Q(T) \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{s_i}$$

$\Rightarrow s_i = 1$  für  $i = 1, \dots, k$

sonst wäre Grad (rechte Seite) > Grad (linke Seite)

$$\Rightarrow m_F(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i)$$

Dies war zu zeigen ( $\Rightarrow$ ).

$\Leftarrow$

Sei  $m_F(T) = (T - \lambda_1) \circ \dots \circ (T - \lambda_k) \quad (\lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j)$

zu zeigen ist  $F$  ist diagonalisierbar ( $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  sind die Eigenwerte von  $F$ )

Es genügt zu zeigen, dass  $V = \bigoplus_i V(\lambda_i)$

Beweis erfolgt durch Induktion über  $\dim(V)$

Sonderfälle:

(1) Sei  $\dim(V) = 1 \Rightarrow m_F(T) = (T - \lambda_1) \Rightarrow \lambda_1$  ist Eigenwert von  $F$

$$\exists v \in V : Fv = \lambda_1 v \Rightarrow V = \text{span}\{v\} = V(\lambda_1)$$

( $v \neq 0$ )

(2) Sei nun  $\dim(V) = \underbrace{n}_{\in \mathbb{N}} \geq 2$  und  $k = 1 \Rightarrow m_F(T) = (T - \lambda_1)$

Nach definition von  $m_F$  gilt:  $m_F(F) \Rightarrow F - \lambda_1 = 0 \in \text{end}(V)$

für jeden Vektor  $v \in V$  gilt:  $(F - \lambda_1)v = 0 \Rightarrow Fv = \lambda_1 v$

$\Rightarrow V = V(\lambda_1)$

Induktionsannahme (für den allgemeinen Fall):

Unser Satz gilt für  $\dim(V) < n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) fest

Also sei  $\dim(V) = n \geq 2$  &  $k \geq 2$

(\*) Beh:

$$V = \underbrace{\ker(F - \lambda_i \cdot I_d)}_{\substack{V(\lambda_i) \\ (\dim(V(\lambda_i)) \geq 1)}} \oplus \underbrace{\text{im}(F - \lambda_i \cdot I_d)}_{\substack{\text{zu zeigen:} \\ (=V(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V(\lambda_k))}}$$

Bew: Sei  $R(T) := \prod_{i=2}^k (T - \lambda_i) \quad \left[ \Rightarrow m_f(T) = R(T)(T - \lambda_1) \right]$

Division mit Rest:  $\exists Q(T) \& r \in K$ , sodass:  $R(T) = Q(T)(T - \lambda_1) + r$

$$0 \neq R(\lambda_1) = 0 + r \Rightarrow r \neq 0 \in K$$

$$\text{Sei } v \in V \text{ beliebig } R(F)v = Q(F)(F - \lambda_1)v + r \cdot v$$

$$\Rightarrow v = \underbrace{\frac{1}{r}R(F)r}_{\in \ker(F-\lambda_1)} \neq (F - \lambda_1) \circ \underbrace{\left(-\frac{1}{r}Q(F)r\right)}_{\in \text{im}(F-\lambda_1)}$$

$$(F - \lambda_1)R(F)v = \underbrace{m_F(F)}_0 v = 0 \Rightarrow V = \ker(F - \lambda_1) + \text{im}(F - \lambda_1)$$

Wir wollen zeigen, dass die Summe direkt ist  $\Leftrightarrow \ker(F - \lambda_1) \cap \text{im}(F - \lambda_1) = \{0\}$

$$\text{Sei } v \in \ker(F - \lambda_1) \cap \text{im}(F - \lambda_1) \Rightarrow v = (F - \lambda_1)w \quad w \in V$$

$$R(F)v = Q(F)(F - \lambda \cdot I_d)v + r \cdot v$$

$$\underbrace{R(F) \circ (F - \lambda_1)}_{m_F(F)=0} w = \underbrace{Q(F)(F - \lambda_1 \cdot I_d)}_{=0} v + r \cdot v \Rightarrow r \cdot v = 0 \Rightarrow \underbrace{v}_{\parallel 0} \in V$$

$$\Rightarrow V = \underbrace{\ker(F - \lambda_1 I_d)}_{V(\lambda_1)} \oplus \text{im}(F - \lambda_1 I_d)$$

□(\*)

Beweis durch Induktion · Fortsetzung ·  $\dim(V) = n \geq 2, k \geq 2$

Setzte  $W = \text{im}(F - \lambda_1)$  (W ist UVR von V mit  $\dim(W) \subset \dim(V)$ )

(\*\*) Beh: W ist F-invariant

Bew: Sei  $v \in W$  beliebig  $\Rightarrow v = (F - \lambda_1)w \quad w \in W$

$$\Rightarrow F(v) = F \circ (F - \lambda_1)w = (F - \lambda_1) \circ \underbrace{F(w)}_{\in V} \in W$$

□(\*\*)

(\*\*\*) Beh: (setzte  $F' = F|_W \in \text{end}(W)$ )

$$m_F(T) = \prod_{i=2}^k (T - \lambda_i) \quad (:= R(T))$$

Bew: Sei  $v \in W$  beliebig  $\Rightarrow v = (F - \lambda_1)w \quad w \in V$

$$R(F')(v) = R(F) \circ \underbrace{(F - \lambda_1)}_{m_F(F)=0} w = 0$$

$$\Rightarrow R(F') = 0 \in \text{end}(W)$$

$$m_{F'}(T)|_{R(T)} \Rightarrow R(T) = H(T) \cdot m_{F'}(T)$$

Es gilt auch

$$0 = \underbrace{m_{F'}(F') \circ (F - \lambda_1)}_{=0} \underbrace{(V)}_{v \in V \text{ beliebig}}$$

$$\begin{aligned}
& m_{F'}(F') \circ (F - \lambda_1) = 0 \in \text{end}(V) \\
& m_F(T)|_{m_{F'}(T) \cdot (T - \lambda_1)} \\
& \Rightarrow m_{F'}(T) \cdot (T - \lambda_1) = Q(T) \cdot m_F(T) = Q(T) \cdot R(T) \cdot (T - \lambda_1) \\
& \Rightarrow m_{F'}(T) = Q(T) \cdot R(T) = Q(T) \cdot H(T) \cdot m_{F'}(T) \Rightarrow Q(T) = H(T) = 1 \\
& \Rightarrow R(T) = m_{F'}(T) \Rightarrow \text{Induktionsannahme: } W = \bigoplus_{i=1}^k W(\lambda_i) \text{ Eigenraum von } \\
& F' \text{ zu } \lambda_i \\
& \Rightarrow V = V(\lambda_1) \bigoplus_{i=2}^k W(\lambda_i) \text{ zu zeigen: } W(\lambda_i) = V(\lambda : i) \\
& \text{dann gilt: } V = \bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i) \\
& \text{Es gilt: } W(\lambda_i) = \{w \in W : F'(w) = \lambda_i w\} \subseteq \{v \in V : F(v) = \lambda_i \cdot v\} := V(\lambda_i) \\
& \text{Sei } v \in \underbrace{V(\lambda_i)}_{(i>1)} \Rightarrow F(v) = \lambda_i v \text{ Setze: } w = \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_1)} \cdot v \in V(\lambda_i) \\
& \Rightarrow F(w) - \lambda_i w = v \Rightarrow v \in \text{im}(F - \lambda_i) = W \\
& \Rightarrow v \in \bigoplus_{j=2}^k W(\lambda_j) \Rightarrow v \in W(\lambda_{i \text{oder } 1}) \text{ Warum?} \\
& v = \sum_{j=2}^k \alpha_j w_j \text{ f\"ur } w_j \in W(\lambda_j) \quad \alpha_j \in K \quad (\subseteq V(\lambda_j)) \text{ Also nur } \alpha_i \neq 0 \\
& \text{Aber } +V(\lambda_j) = \oplus V(\lambda_j) \text{ oder } v \in V(\lambda_i) \Rightarrow v = \alpha_i w_i \in W(\lambda_i)
\end{aligned}$$

□

**Bem:**

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \quad A^2 = E_n$$

$\Rightarrow A$  ist diagonalisierbar

$$\text{da } A^2 = E_n \Rightarrow (T^2 - 1)(A) = 0$$

$$m_F|_{T^2-1}$$

$$m_F = \begin{cases} T^2 - 1 & = (T - 1)(T + 1) \\ T - 1 \\ T + 1 \end{cases}$$

# Kapitel III

## Die Jordansche Normalenform

### III.0.1 Lemma: Invarianzen

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $U \subset V$  Untervektorraum:

Dann ist  $U$   $F$ -invariant gdw  $U$   $(F - \lambda Id)$ -invariant ist für  $\forall \lambda \in K$

### III.0.2 Bsp:

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $V$  endlichdim. derart, dass  $F^m = 0$  als Endomorphismus) und  $m > 0$  minimal („ $F$  ist nilpotent“)

$F^{m-1} \neq 0 \rightarrow \exists v \in V | F^{m-1}(v) \neq 0$   $\{v, F(v), \dots, F^{m-1}(v)\}$  ist linear unabh.

Ergänze das System zu einer Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$ :  $\{v, \dots, F^{m-1}(v), \dots, v_n\}$

$$F^{m-1}(v) F^{m-2}(v) \dots, v, v_{m+1}, \dots, v_n$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & * \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & * \end{pmatrix}$$

### III.0.3 Def: Hauptraum

Sei  $\lambda \in K$  ein Eigenwert von  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $V$  endlichdim.

$$V(\lambda) = \ker(F - \lambda)$$

*Eigenraum* von  $F$  bzgl.  $\lambda$

$$\ker(F - \lambda) \subset \ker(F - \lambda)^2 \subset \ker(F - \lambda)^3 \subset \dots$$



$$V_\lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker(F - \lambda)^n$$

ist ein *Hauptraum* von  $F$  bzgl.  $\lambda$

**Bem:**

$V_\lambda$  ist ein Unterraum und  $V_\lambda$  ist  $F$ -invariant.

Warum ? Weil  $V_\lambda$   $(F - \lambda)$ -invariant ist.

**Bem:**

Falls  $(\ker(F - \lambda)) = V(\lambda) = 0$

$$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker(F - \lambda)^n = 0$$

**III.0.4 Bew:**

Sei  $v \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (F - \lambda)^n$

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid (F - \lambda)^n(v) = 0$$

$n = 0$

$\rightarrow \underbrace{Id(v)}_{=V} = 0$  sonst:

$$(F - \lambda)((F - \lambda)^{n-1}(v)) = 0$$

$$\Rightarrow (F - \lambda)^{n-1}(v) \in \ker(F - \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow (F - \lambda)^{n-1}(v) = 0$$

**III.0.5 Lemma: Haupträume sind disjunkt**

Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  verschiedene Elemente aus  $K$  (Eigenwerte)

$$\Rightarrow V_{\lambda_i} \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k V_{\lambda_j} = \{0\}$$

### III.0.6 Bew:

$V_{\lambda_j}$  ist  $(F - \lambda_j)$ -invariant

$\Rightarrow V_{\lambda_j}$  ist  $F$ -invariant

$\Rightarrow V_{\lambda_j}$  ist  $(F - \lambda_i)$ -invariant

Wir wollen zuerst zeigen, dass  $F - \lambda_i|_{V_{\lambda_j}}$  ein Automorphismus ist ( $i \neq j$ )

$\Rightarrow$  Es genügt zu zeigen, dass  $F - \lambda_i$  injektiv auf  $V_{\lambda_j}$  ist.

Sei  $w \in V_{\lambda_i} \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \text{ kleinstes } (F - \lambda_i)^m(w) = 0$$

$$\stackrel{(m > 0 (w \neq 0))}{\Rightarrow} (F - \lambda_j)^{m-j}(w) \neq 0$$

$$\Rightarrow (F - \lambda_j)^{m-1}(\underbrace{(\lambda_i - \lambda_j)(w)}_{\neq 0}) \neq 0$$

$$\begin{aligned} \text{So } 0 &\neq (F - \lambda_j)^{n-1}([F(w) - \lambda_j w] - (F(w) - \lambda_i w)) \\ &= \underbrace{(F - \lambda_j)^m(w)}_{=0} + (F - \lambda_j)^{m-1}(F - \lambda_i)(w) \\ &\Rightarrow (F - \lambda_i)(w) \neq 0 \text{ OK!} \end{aligned}$$

Insb. ist jede Potenz  $(F - \lambda_i)^k$  ein Automorphismus von  $V_{\lambda_i}$

$$V_{\lambda_i} \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k V_{\lambda_j} = \{0\}$$

$$v \in V_{\lambda_i} \cap \sum_{j \neq i}^k V_{\lambda_j}$$

$$v = \sum_{j \neq i} \underbrace{v_j}_{\in V_{\lambda_j}}$$

$\Rightarrow \exists m_j$  kleinstes

$$(F - \lambda_j)^{m_j}(v_i) = 0$$

$$M = (F - \lambda_i)^{m_1} \circ \dots \circ (F - \lambda_{i-1})^{m_{i-1}} \circ (F - \lambda_{i+1})^{m_{i+1}} \circ \dots \circ (F - \lambda_K)^{m_K}$$

ist ein Automorphismus von  $V_{\lambda_i}$

Wiederholung:

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $\dim_k V = n$   $\lambda \in K$

$$V_\lambda = \bigcup_{\substack{\parallel \\ (F-\lambda) \circ \dots \circ (F-\lambda)}} \ker(F - \lambda)^n$$

$$V(\lambda) = \ker(F - \lambda) = \{0\} \Leftrightarrow \chi_F(\lambda) \neq 0 \Rightarrow V_\lambda = \{0\}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$  verschiedene Eigenwerte

$$\Rightarrow V_{\lambda_i} \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k V_{\lambda_i} = \{0\}$$

### III.0.7 Bem: Invarianzen

$V_\lambda$  ist  $(F - \lambda)$ -invariant

$\Rightarrow V_\lambda$  ist  $F$ -invariant

### III.0.8 Lemma: Ordnung

Sei  $\lambda \in K$

$$\dim V_\lambda = \text{ord}_\lambda(\chi_F)$$

Ferner hat  $F \upharpoonright V_\lambda$  Matrixdarstellung der Form  $\begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$

### III.0.9 Bew

Sei  $K = \text{ord}_\lambda(\chi_F(T)) \Rightarrow \chi_F(T) = (T - \lambda)^K \cdot Q(T)$  wobei:  $Q(T) \neq 0$

**Behauptung:**

Es gibt einen  $F$ -inv. Unterraum  $U \subset V$  der dimension  $K$ , so dass  $F \upharpoonright U$  matrix darstellung

$$\begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

Falls  $n = 0 \rightarrow \text{Ok!}$

OBdA ist  $k \geq 1$  Wir beweisen die Behauptung mit Induktion auf  $n = \dim V$

$n=1 \Rightarrow$

$$\exists v \in V \setminus \{0\} \quad F(v) = \lambda \cdot v$$

$$\Rightarrow V = \underbrace{\text{span}(v)}_{\substack{\parallel \\ U_0}}$$

$$n \geq 2$$

$\lambda$  ist ein Eigenwert

$$\Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} \quad F(v) = \lambda \cdot v$$

$$U = \text{span}(v) \rightarrow \dim 1 \quad F\text{-invariant} \Rightarrow \tilde{F} : V/U_0 \rightarrow V/U_0; \bar{\omega} \mapsto \overline{F(\omega)}$$

$$\begin{array}{ccc} \chi_F(T) & = & \chi_{F|U}(T) \cdot \chi_{\tilde{F}}(T) \\ \parallel & & \parallel \\ (T-\lambda)(T-\lambda^{k-1}) \cdot Q(T) & & (T-\lambda) \end{array}$$

da  $K[T]$  Integritätsbereich:

$$\Rightarrow \chi_{\tilde{F}}(T) = (T - \lambda)^{k-1} \cdot Q(T)$$

$$Q(\lambda) \neq 0$$

Nach I.A. existiert einen  $\tilde{F}$ -Invarianten Unterraum  $\tilde{U} \subset V/U$  der Dimension  $n - 1$ , so dass die Matrixdarstellung von  $\tilde{F}$  der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

besitzt. Sei  $\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_K$  eine Basis von  $\tilde{U}$  so dass die Darstellungsmatrix von  $\tilde{F}$  bzgl.  $\{\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_K\}$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Die Vektoren  $\underbrace{\{v, v_2, \dots, v_K\}}_{\text{Vektoren aus } \underline{V}}$  sind linear unabhängig.

$U = \text{span}(v, v_2, \dots, v_K)$  hat Dimension  $K$ .

$U$  ist  $F$ -Invariant

$$\begin{aligned} F\left(\sum_{i=1}^K \mu_i v_i\right) &= \sum \mu_i F(v_i) \\ &= \underbrace{\mu_1 \lambda v_1 + \sum_{i=2}^k \mu_i F(v_i)}_{\in U} \end{aligned}$$

da:  $F(v_i) \stackrel{\text{nach } U_0}{=} \sum_{j \leq i} a_j = v_j \quad F \upharpoonright U$

$$F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_k)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \lambda & \\ & & \lambda \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Zu Zeigen:  $U = V_\lambda$   
 $U \subset V_\lambda$  :

$$\chi_{F|U} = (T - \lambda)^k$$

$\Downarrow$  Caley Hamilton

$$(F - \lambda)^k = 0 \quad \text{auf } U$$

$$\Rightarrow U \subseteq \underbrace{\ker(F - \lambda)^k}_{\subset V_\lambda}$$

Falls  $U \subsetneq V_\lambda$

$$\Rightarrow \dim V_\lambda / U \geq 1$$

$$\begin{array}{ccc} \chi_F(T) & = & \chi_{F|U}(T) \cdot \chi_{\tilde{F}}(T) \\ \parallel & & \parallel \\ (T - \lambda) \cdot Q(T) & & (T - \lambda)^k \end{array}$$

$$\tilde{F} : V/U \rightarrow V/U$$

$$\Rightarrow \chi_{\tilde{F}(T)} = Q(T)$$

aber  $Q(\lambda) \neq 0 \Rightarrow \lambda$  ist kein Eigenwert von  $\tilde{F}$ !!

$\Rightarrow$  Der Hauptraum für  $\lambda$  von  $\tilde{F} : V/U \rightarrow V/U$  ist trivial

Sei  $\omega \in V_\lambda$

$$\Rightarrow \exists s \in \mathbb{N}$$

$$(F - \lambda)^s(\omega) = 0 \Rightarrow (F - \lambda)^s(\bar{\omega}) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{\omega} = 0 \Rightarrow \omega \in U$$

### III.0.10 Def: Nilpotenz

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus heißt nilpotent falls es eine feste Zahl  $m$  existiert, so dass  $\underbrace{F \circ \dots \circ F}_m = F^m = 0$  auf  $V$  ist.

### III.0.11 Lemma: Nilpotenz

Sei  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $\dim V = n$  Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1)  $F$  ist nilpotent
- 2)  $\forall v \in V \exists m_v \in \mathbb{N} : F^{m_v}(v) = 0$
- 3) Es existiert eine Basis von  $V$ , so dass  $F$  Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

hat

- 4)  $\chi_F(T) = T^n$

### III.0.12 Bew:

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$  Trivial

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$  Induktion auf  $n = \dim V$   $n = 1 : \exists v \in V \setminus \{0\}$

$\exists m_v \in \mathbb{N}$  kleinstes

$$F^{m_v}(v) = 0$$

$$\Rightarrow m_v \neq 0$$

$$\Rightarrow F^{m_v-1}(v) \neq 0$$

$$\Rightarrow V = \text{span}(F^{m_v-1}(v)) \text{ Ferner } F(F^{m_v-1}(v)) = 0$$

$\rightarrow$  Darstellungsmatrix bzgl.  $\{F^{m_v-1}(v)\}$  ist  $(0)$

$$n \geq 2$$

Sei  $v_i \in V \setminus \{0\}$ , so dass  $F(v_i) = 0$

$\Rightarrow U = \text{span}(v_i)$  ist  $F$ -invariant

$$\Rightarrow \tilde{F} : V/U \rightarrow V/U$$

$$\underbrace{\dim < n}_{\parallel} \\ n-1$$

$\Rightarrow$  I.A. es existiert eine Basis  $\{\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$  von  $V/U$ , so dass  $\tilde{F}$  Darstellungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

hat. Die Familie  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ist eine Basis von  $V$  und hat Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & 0 & \\ & & 0 \\ & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{3 \Rightarrow 4}$$

$$\chi_F(T) = \det \left( T \cdot E_n - \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} T & & * \\ & \ddots & \\ & & T \end{pmatrix} = T^n$$

$$\boxed{4 \Rightarrow 1} \text{ Caley-Hamilton}$$

$$F^n = \chi_F(F) = 0$$

□

### III.0.13 Satz: Jordan-Charelley Zerlegung

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $V$  endlichdim.

Falls  $\chi_F(T)$  in linearfaktoren zerfällt dann ist  $V = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$   $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die verschiedenen Eigenwerte und  $F$  lässt sich als Blockmatrix darstellen

$$F = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \\ & & & \ddots \\ & & & & A_k \end{pmatrix} \quad A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$$\text{insb. ist } F = \underbrace{G}_{\text{diagonalisierbar}} + \underbrace{H}_{\text{nilpotent}}$$

$$G \circ H = H \circ G$$

Sei  $G : V \rightarrow V$   $G_{V_{\lambda_i}}$  = Multiplikation mit  $\lambda_i$ .  $E$  hat diagonale Matrix bzgl. der Basis  $\mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

setzt  $H = F - G$  die Darstellungsmatrix von  $H$  bzgl.  $\mathcal{B}$  ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & & * & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & * \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 & & * \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} V_{\lambda_1} \\ \\ \\ \} V_{\lambda_2} \\ \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow H \text{ ist nilpotent}$$

### III.0.14 Bew:

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$  verschiedene Eigenwerte

$$\chi_F(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{d_i}$$

$$\dim V = \text{grad} \chi_F(T) = n \sum_{i=1}^k \frac{d_i}{\dim V_{\lambda_i}}$$

$$\dim \left( \sum_{i=1}^k V_{\lambda_i} \right) \stackrel{V_{\lambda_i} \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k V_{\lambda_j} = \{0\}}{=} \sum d_i = n = \dim V$$

$$\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$$

$V$  besitzt eine Basis  $\mathcal{B}$ , welche aus der Vereinigung der Basen jedes  $V_{\lambda_i}$  besteht.

$F$  wird durch  $F \upharpoonright V_{\lambda_1}, \dots, F \upharpoonright V_{\lambda_k}$  bestimmt

$$\begin{matrix} \parallel & & \parallel \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \lambda_k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix} \\ \parallel & & \parallel \\ A_1 & & A_k \end{matrix}$$



$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_K \end{pmatrix}$$

zu Zeigen:  $G \circ H = H \circ G$  Beachte, dass jedes  $V_{\lambda_i}$   $G$ -Invariant.  
 $\Rightarrow V_{\lambda_i}$  ist  $H$ -Invariant.

Es genügt zu zeigen, dass  $G \circ H = H \circ G$  auf  $\underline{\underline{V_{\lambda_i}}}$

$w \in V_{\lambda_i}$

$$H \circ G(w) = H(\lambda \cdot w)$$

$$G \circ H(w) \stackrel{W(w) \in V_{\lambda_i}}{=} \lambda_1 H(w)$$

### III.0.15 Def: F-adaption

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $V$  endlichdim.

Eine Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  ist  $F$ -adaptiert, falls:

$$F(v_1) = 0$$

$$2 \leq j \leq n \quad F(v_j) = \begin{cases} 0 \\ v_{j-1} \end{cases}$$

**Bem:**

Falls  $V$  eine  $F$ -adaptierte Basis besitzt, dann ist  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus nilpotent.

### III.0.16 Bew:

Sei  $\{v_1, \dots, v_n\}$   $F$ -adaptiert

Es genügt zu zeigen, dass  $F^n = 0$  (als Endomorphismus)

$$F^n \left( \begin{array}{c} v \\ \parallel \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j \end{array} \right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \underbrace{F^n(v_j)}_{=0} = 0$$

**Notation:**

$$\mathcal{N}_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{K})$$

$$\mathcal{N}_j = (0)$$

$$\mathcal{N}_m^m = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

### III.0.17 Def: Index

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus nilpotent. Es gibt  $m \leq n$  kleinste Zahl, sodass

$$\ker(F^m) \subsetneq \dots \subsetneq \ker(F^m) \subsetneq \ker(F^{m+1}) \subsetneq \dots \subsetneq V$$

$m$  heißt der Index von  $F$

$$V = \ker(F^m) \bigoplus F^m(V)$$

### III.0.18 Satz: Index

Sei  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus  $\dim(V) = n$  und  $\mathcal{B}$  eine  $F$ -adaptierte Basis von  $F$ . Dann hat  $F$  Matrixdarstellung der Form

$$\begin{pmatrix} \mathcal{N}_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{N}_{k_r} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^r k_j = n \quad \text{Index}(F) = \max\{k_j\}_{1 \leq j \leq r} \text{ oder } n$$

### III.0.19 Bew:

Sei  $\{v_1, \dots, v_n\}$   $F$ -adaptiert

Sei  $k \leq i_1 < \dots < i_r < n$  eine Aufzählung der Menge  $\{j | F(v_{j+1}) = 0\}$

$$v_1, v_2, \dots, v_{i_j}, v_{i_{j+1}}, \dots$$

$$\begin{array}{cccccc}
 v_1 & v_2 & \dots & v_{i_1} & v_{i_j+1} & \\
 \left( \begin{array}{cccccc}
 0 & 1 & & & & \\
 & 0 & & & & \\
 & & \ddots & & & \\
 & & & 0 & 1 & \\
 & & & & 0 & \\
 & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & 0
 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} i_1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ i_2 - i_1 \end{array}
 \end{array}$$

### III.0.20 Satz: F-adaptierte Basis

Sei  $F : V \rightarrow V$  nilpotent mit Index  $k$ . Gegeben einen Unterraum  $U \subset V$  derart, dass  $U \cap \ker(F^{k-1}) = \{0\}$ . Dann lässt sich jede Basis von  $U$  zu einer  $F$ -adaptierten Basis von  $V$  ergänzen.

### III.0.21 Kor:

Jeder nilpotente Endomorphismus besitzt eine  $F$ -adaptierte Basis

$$\ker F \subsetneq \ker F^2 \subset \dots \subset \ker F^{k-1} \subsetneq \ker F^k = \dots = V$$

$$B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_{k-1} \subset B_k$$

$$\left( F(U_1) \dots F(U_r) \rightarrow B_{k-1} \quad U_1, \dots, U_r \in B_k \setminus \ker(F^{k-1}) \right)$$

$\ker F^{K-1}$  hat ein Komplement  $U$  in  $\ker F^k$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ U_1 \\ \vdots \\ U_j \end{array}$$

### Behauptung:

$\{F(U_1), \dots, F(U_r)\}$  sind lin. unabh.

→ sie bilden die Basis von  $F(w)$

### III.0.22 Bew:

$$\sum_{i=1}^r \lambda F(U_i) = 0 = F\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i U_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i U_i \in \ker(F)$$

$$\Downarrow W \cap V = \{0\}$$

$$\sum \lambda_i U_i = 0$$

$$\Downarrow \{U_1, \dots, U_i\} \text{ sind lin. unabh.}$$

$$\underline{\lambda_1 = \dots = \lambda_i = 0}$$

Aus unserer Induktionsannahme

$$F(w) \text{ und } F \upharpoonright V' : V' \rightarrow V'$$

$\Rightarrow$  Es gibt eine adaptive Basis  $\{v'_1, \dots, v'_m\}$  von  $V'$ ,

welche  $\{F(U_1), \dots, F(U_r)\}$  ergänzt.

$F(U_j) = v'_{i_j}$  wobei  $i_1 < \dots < i_r$  (sonst ordne  $v'_j$  's um !)

$$v_1 = v'_1$$

$$v_2 = v'_2$$

$$\vdots$$

$$v_{i_1} = v'_{i_1}$$

$$v_{i_1+1} = U_1$$

$\rightarrow$  Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V(W \cap V' = \alpha_i)$

$$v_{i_1+2} = v'_{i_1+1}$$

$$\vdots$$

$$v_{i_2} = v'_{i_2-1}$$

$$v_{i_2+1} = v'_{i_2}$$

$$v_{i_2+2} = U_2$$

### III.0.23 Folgerung

Jeder nilpotente Endomorphismus lässt sich bezüglich einer geeigneten Basis durch eine Blockmatrix darstellen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

### III.0.24 Kor: Jordansche Normalform

Jeder Endomorphismus eines endl. dimensionalen VR, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, lässt sich bezüglich einer geeigneten Basis durch eine Blockmatrix folgender Form darstellen:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & \\ & \lambda_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_1 & 1 & \\ & & & & \lambda_1 & 0 \\ & & & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & & & \lambda_2 \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & & & & & & \lambda_2 \\ & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & \lambda_3 & 1 \\ & & & & & & & & & & & & \lambda_3 \\ & & & & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & & & & \lambda_3 & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

### III.0.25 Bew:

Induktion auf n

$$\boxed{k = 1}$$

$F = 0$  als Endomorphismus  $\rightarrow$  Jede Basis ist F-adaptiert

$$\boxed{k \geq 2}$$

Sei  $V' = \ker(F^{k-1}) \subsetneq V$

Sei  $\{u_1, \dots, u_j\}$  eine Basis von U.  $U \cap V' = \{0\}$   $U + V' = U \oplus V'$  hat eine

Basis:  $\{u_1, \dots, u_j, \overbrace{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n}^{\text{Basis von } V'}\}$   
 Ergänze diese Basis zu einer Basis von  $V$   $\{u_1, \dots, u_j, u_{j+1}, \dots, u_r, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$   
 $U \subset \mathcal{W} = \text{span}(u_1, \dots, u_j)$   
 $W \cap V' = \{0\}$   
 $F(W) \subset \ker(F^{k-1}) = V'$  (Weil  $F^k = 0$ ),  $V'$  ist  $F$ -invariant und  
 $F \upharpoonright V' = V' \rightarrow V'$  hat Index  $k-1$ .

**Beh:**

$\{0\} = F(\mathcal{W}) \cap \ker(F^{k-2})$   
 Sei  $u \in F(\mathcal{W}) \cap \ker(F^{k-2})$   
 $\Rightarrow F^{k-2}(u) = 0$   
 es existiert ein  $w \in \mathcal{W} \mid u = F(w)$   
 $0 = F^{k-2}(u) = F^{k-1}(w) \rightarrow w \in \ker(F^{k-1} = V')$   
 $\Rightarrow w = 0 \Rightarrow U = F(w) = 0$   
 $W \cap V' = \{0\}$

Es genügt zu zeigen, dass die Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  F-adaptiert ist.  
 z.B.

$$F(v_{j+1}) = V'_{i_1} = F(u_1)$$

$$\Rightarrow u_1 - \underbrace{v_i + 1}_{\in V'} \in \ker(F) \subset V'$$

$$\Rightarrow u_1 \in V' \cap W = \{0\} \text{ Widerspruch !}$$

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus nilpotent Index  $K$ .

□

**Beispiel:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

$$\chi_A(T) = \det \begin{pmatrix} T-1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & T-2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & T-2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & T-3 \end{pmatrix}$$

$$= (T-2) \det \begin{pmatrix} T-1 & 0 & -1 \\ 1 & T-2 & -1 \\ 1 & 0 & T-3 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(T) = (T-2)^4 \rightarrow 2 \text{ ist der einzige Eigenwert.}$$

$$A - 2E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist } \underline{\underline{\text{Nilpotent}}}$$

$$\ker(A - 2E_4) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid -x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$$

# Kapitel IV

## Dualität

### IV.0.1 Def: Dualraum

Sei  $V$  ein  $K$ -VR. Der Dualraum  $V^*$  ist die Kollektion aller linearen Abbildungen  $V \rightarrow K$ .

**Bem:**

$V^*$  ist ein  $K$ -Vektorraum.

$F + G : V \rightarrow K, v \mapsto F(v) + G(v)$  ist linear.

$\lambda \in K, \lambda \cdot F : V \rightarrow K, v \mapsto \lambda \cdot F(v)$  ist linear.

### IV.0.2 Def: Duale Basis

Sei  $V$  endlichdim und wähle eine Basis  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  von  $V$ .

Die duale Basis  $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, \dots, b_n^*\}$  ist eine Kollektion linearer Abbildungen

derart, dass  $b_i^*(b_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Insbesondere:

$$b_i^*(v) = b_i^*\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot b_j\right) = \lambda_i$$

**Bem:**

Falls  $V$  endlichdim. ist, dann ist  $\mathcal{B}^*$  eine Basis von  $V^*$  und sonst  $V \simeq V^*$

### IV.0.3 Bew:

$b_1^* \dots b_n^*$  sind linear unabhängig.



warum?

$$\sum \lambda_i b_i^* = 0 \quad (\text{als lin. Abbildung})$$

$$\sum \lambda_i \underbrace{b_i^*}_{\substack{\parallel \\ \lambda_j \text{ für } 1 \leq j \leq n}}(b_j) = 0$$

$$\lambda_1 \cdots = \lambda_n = 0 \rightarrow \text{OK!}$$

$$\text{span}(b_1^* \dots b_n^*) = V^*$$

Sei  $F : V \rightarrow K$  beliebig

$$F(b_i) = \lambda_i \in K \quad 1 \leq i \leq n$$

$$(F - \sum \lambda_i b_i^*)(b_j) = 0 = F(b_j) - \underbrace{\sum \lambda_i b_i^*(b_j)}_{\substack{\parallel \\ \lambda_j}} \quad 1 \leq j \leq n$$

Insb.  $V \rightarrow V^*$  ist ein Isomorphismus  $b_i \mapsto b_i^*$

Achtung: Der Isomorphismus  $V \simeq V^*$  hängt von der Basis  $\{b_1, \dots, b_n\}$  ab!  
NICHT KANONISCH  $\square$

#### IV.0.4 Lemma: kanonischer Monomorphismus

kanonischer Monomorphismus  $V \xrightarrow{\varphi} (V^*)^*, v \mapsto \varphi_v : \quad V^* \rightarrow K, F \mapsto F(v)$

#### IV.0.5 Bew:

$\varphi$  ist wohldefiniert

$$\varphi_v(F + G) = (F + G)(v) = F(v) + G(v) \quad \text{Ok!}$$

Zu zeigen:  $\varphi$  ist injektiv (Übungsaufgabe !)

#### IV.0.6 Korollar:

Wenn  $V$  endlichdim. ist,  $V \simeq V^*$  *kanonisch*

#### IV.0.7 Bew:

$$\dim V = \dim V^* = \dim (V^*)^* \Rightarrow \varphi : V \rightarrow (V^*)^* \text{ ist surjektiv}$$

$\Rightarrow$  ein Isomorphismus  $\square$

#### IV.0.8 Lemma: Duale Transformation

Sei  $V$  endlich und wähle Basen  $\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_i\}$  und  $\mathcal{B}' = \{b'_1 \dots b'_i\}$  von  $V$ .

Seien  $\mathcal{B}^*$  und  $(\mathcal{B}')^*$  die entsprechenden dualen Basen in  $V^*$ . Wenn  $A$  die Transformationsmatrix von  $\mathcal{B}$  nach  $\mathcal{B}'$  ist, dann ist die Transformationsmatrix  $\mathcal{B}^*$  nach  $(\mathcal{B}')^*$ :  $(A^\top)^{-1}$

#### IV.0.9 Bew:

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b'^*_1 \\ \vdots \\ b'^*_n \end{pmatrix} = X \cdot \begin{pmatrix} b^*_1 \\ \vdots \\ b^*_n \end{pmatrix}$$

Sei  $X$  die Transformationsmatrix von  $\mathcal{B}'$  nach  $(\mathcal{B}')^*$

$$\begin{pmatrix} b^*_1 \\ \vdots \\ b^*_n \end{pmatrix} \cdot (b_1 \dots b_n) = E_n \quad \begin{pmatrix} b'^*_1 \\ \vdots \\ b'^*_n \end{pmatrix} \cdot (b'_1 \dots b'_n) = E_n$$

$$\begin{aligned} E_n &= \begin{pmatrix} b'^*_1 \\ \vdots \\ b'^*_n \end{pmatrix} \cdot (b'_1 \dots b'_n) \\ &= X \cdot \begin{pmatrix} b^*_1 \\ \vdots \\ b^*_n \end{pmatrix} \left( A \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right)^\top \\ &= X \cdot \begin{pmatrix} b^*_1 \\ \vdots \\ b^*_n \end{pmatrix} \cdot (b_1 \dots b_n) \cdot A^\top \end{aligned}$$

$$E_n = X \cdot E_n \cdot A^\top = X \cdot A^\top \Rightarrow X = (A^\top)^{-1}$$

□

#### IV.0.10 Def: duale Abbildung

Sei  $F : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Definiere die duale Abbildung  $F^* : W^* \rightarrow V^*$ ,  $\psi \mapsto \psi \circ F$

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{F} & W \\
 & \searrow & \downarrow \Psi \\
 \Psi \circ F & & K \\
 \parallel & & \\
 F^*(\Psi) & & 
 \end{array}$$

**Bem:**

$F^*$  ist linear.

$$F^*(\psi_1 + \psi_2) = (\psi_1 + \psi_2) \circ F = \psi_1 \circ F + \psi_2 \circ F = F^*(\psi_1) + F^*(\psi_2)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xrightarrow{G} & V & \xrightarrow{F} & W \\
 W^* & \xrightarrow{F^*} & V^* & \xrightarrow{G^*} & U^*
 \end{array}$$

von  $W^*$  nach  $U^*$ :

$$(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$$

**IV.0.11 Bew:**

$$\Psi \in W^* \quad \Psi \circ W \rightarrow K$$

$$(F \circ G)^*(\Psi) = \underbrace{\Psi \circ F}_{F^*(\Psi)} \circ G = G^* \circ F^*(\Psi)$$

**Eigenschaften:**

$$\text{a) } (Id_V)^* = Id_{V^*}$$

$$\text{b) } (F + G)^* = F^* + G^*$$

$$\text{c) } (F \circ G)^* = G^* \circ F^*$$

$$\text{d) } (\mu F)^* = \mu F^*$$

$$(Id_{iv})^*(\psi) = \psi \circ Id_{iv} = \psi$$

**Bem:**

Falls  $F^* = 0$  dann ist  $\underline{F=0}$ . Feiner, falls  $V$  und  $W$  endlich dimensional sind.

$$G : W^* \rightarrow V^* \text{ lin. Abbildung}$$

dann gilt es

$$F : V \rightarrow W \text{ so dass } F^* = G$$

#### IV.0.12 Bew:

$$F^* = 0$$

Sei  $v \in V$  fest.

**Zu Zeigen:**  $F(v) = 0$

Definiere

$$\begin{array}{c} W^* \rightarrow \psi \mapsto \psi(F(v)) \\ \parallel \\ F^*(\psi)(v) \end{array}$$

Erinnerung:  $W \xrightarrow{\varphi} (W^*)^*, w \mapsto \varphi_{wi} \quad W^* \rightarrow K, \psi \mapsto \psi(w)$   
 $\parallel$   
 $\varphi(wi)$

$$\varphi_{F(v)}(\psi) = \psi(F(v) = \underbrace{F^*(\psi)(v)}_{=0} \equiv \underline{\underline{0}}$$

Aber:  $\varphi$  ist ein Monomorphismus

$\Rightarrow F(v) = 0 \Rightarrow F = 0$  als Homomorphismus  $V \rightarrow W$

Die Operation:

$$* : \text{Hom}(V, W) \mapsto \text{Hom}(W^*, V^*)$$

Falls  $V, W$  endlichdim. sind:

$(V \approx K^n \approx V^* \text{ und } W \approx K^m \approx W^*)$

$$\dim \text{Hom}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$$

$$\parallel \qquad \parallel$$

$$\dim \text{Hom}(W^*, V^*) = \dim V^* \cdot \dim W^*$$

Aber  $* : \text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(W^*, V^*)$  ist injektiv  $\Rightarrow$  Surjektiv

$$\dim V = n, \quad \dim W = m$$

□

**Bem:**

$F : V \rightarrow W$  hat Darstellungsmatrix  $A$  bezüglich  $\mathcal{B} = \{b_i \dots b_n\}$  von  $V$  und  $\mathcal{B}' = \{b'_i \dots b'_m\}$  von  $W$ . Seien  $\mathcal{B}^*$  und  $(\mathcal{B}')^*$  die entsprechenden dualen Basen aus  $V^*$ , und  $W^*$ .

Dann hat  $F^*$  Darstellungsmatrix  $A^\top$  bzgl  $(\mathcal{B}')^*$  und  $\mathcal{B}^*$ .

#### IV.0.13 Bew:

$$F \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \vec{x}$$

$$F^* \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\Psi_1 \quad \dots \quad \Psi_m) \circ \underbrace{F \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{A \cdot \vec{x}}$$

Die Darstellungsmatrix von  $F^*$  ist:

$$F^* \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_m \end{pmatrix} = (\Psi_1 \quad \dots \quad \Psi_m) \cdot A$$

$$F^* \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_m \end{pmatrix} = \left( A^\top \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_m \end{pmatrix} \right)^\top$$

→ Die Darstellungsmatrix von  $F^*$  ist  $A^\top$

#### IV.0.14 Korollar: zu Duale Basen

$$\det(F^*) = \det(F)$$

**Wid:**  $VK - VR, V^* = \text{Hom}(V, K)$  ist ein  $K - VR$ ,  $V$  endlich dimensional  
 $\rightarrow V \simeq V^*, \mathcal{B} = \{b_1 \dots b_n\} \rightarrow \mathcal{B}^*$  duale Basis.  
 $\parallel$   
 $\{b_1^* \dots b_n^*\}$

$$b_i^*(b_j) = \delta_{ij} \text{ (kronecker delta)}$$

$$\varphi : V \hookrightarrow (V^*)^* \text{ Monomorphismus, } v \mapsto \varphi_v : V^* \rightarrow K, F \mapsto F(v)$$

#### Folgerung

$$\forall v \in V \setminus \{0\} \exists F : V \rightarrow K \text{ linear } F(v) \neq 0$$

$$* : \text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(W^*, V^*)$$

$$F : V \rightarrow W \rightarrow F^* \rightarrow V^*$$

$$\underbrace{\Psi}_{W \rightarrow K} \mapsto \underbrace{\Psi \circ F}_{V \rightarrow K}$$

$(F \circ G)^* G^* \circ F^*$   
 $(Id_V)^* = Id_{V^*}$   
 $V, W$  endlichdim  $\rightarrow$  \* Isomorphismus

### Bem

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus lineare Abb. mit Darstellungsmatrix  $A = (a_{ij})$   
 bzgl. der Basen  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}, \mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$

$$F^* : W^* \rightarrow V^*$$

$$\mathcal{C}^* = \{c_1^*, \dots, c_m^*\} (\rightarrow) \mathcal{B}^* = \{b_1^*, \dots, b_n^*\}$$

Darstellungsmatrix von  $F^*$  bzgl.  $\mathcal{C}^* \mathcal{B}^*$  ist  $A^\top$

### IV.0.15 Bew:

$$F^*(c_k^*) = \sum_{1 \leq \varphi \leq n} \lambda_{\varphi k} b_\varphi^* \quad (1 \leq k \leq m)$$

$$F(b_i) = \sum_{1 \leq j \leq m} a_{ij} c_j$$

$$\begin{aligned} F^*(c_k^*)(b_i) &= (\sum \lambda_{\varphi k} b_\varphi^*)(b_i) \\ &\parallel \\ C_k^*(F(b_i)) &= \lambda_{ik} \rightarrow A^\top \text{ ist die Darstellungsmatrix} \\ &\parallel \\ C_k^*(\sum a_{ji} c_j) &= a_{ki} \end{aligned}$$

□

### IV.0.16 Lemma: $V$ und $V^*$

$$V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$$

$$\Rightarrow V^* \simeq \bigoplus_{i=1}^n V_i^*$$

$F : V \rightarrow K$  ist eindeutig bestimmt durch  $F \upharpoonright V_1, \dots, F \upharpoonright V_n$

## IV.0.17 Lemma: Duale Endomorphismen

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus linear

- a)  $F$  injektiv  $\Leftrightarrow F^*$  surjektiv
- b)  $F$  surjektiv  $\Leftrightarrow F^*$  injektiv
- c)  $F$  Isomorphismus  $\Leftrightarrow F^*$  isomorphismus

## IV.0.18 Bew:

a)  $\boxed{\Rightarrow} F : V \hookrightarrow W$  injektiv.

**Zu Zeigen:**

$F^*W^* \rightarrow V^* \ni \psi : V \rightarrow K$  surjektiv ist

$$\exists \Theta : W \rightarrow K, \quad F^*(\Theta) = \psi$$

$$\parallel$$

$$\Theta \circ F$$

$$\forall v \in V, \quad \Theta(F(v)) = \psi(v)$$

$$\underbrace{\text{Im}(F)}_{\simeq V} \subset W \quad (\forall v \in \text{Im}(F) \exists! v \in V, w = F(v))$$

Sei  $Z$  ein Komplement von  $\text{Im}(F)$  in  $W \Rightarrow W = \text{Im}(F) \oplus Z$

$$\forall w \in W : \quad w = \underbrace{w'}_{\in \text{Im}(F)} + \underbrace{\tilde{w}}_{\in Z} \text{ eindeutig}$$

Definiere  $\Theta : W \rightarrow K$

$$W = F(v) + \tilde{w} \mapsto \Psi(v) \quad \tilde{w} \in Z$$

Zu Zeigen:  $\Theta$  ist linear

$$\Theta \left( \underbrace{w_1}_{F(v_1)+\tilde{w}_1} + \underbrace{w_2}_{F(v_2)+\tilde{w}_2} \right) = \Theta \left( \underbrace{F(v_1) + F(v_2)}_{F(v_1+v_2)} + \underbrace{\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2}_{\in Z} \right)$$

$$\Theta(w_1) + \Theta(w_2) = \Psi(w_1) + \Psi(w_2) = \Psi(v_1 + v_2) (= F(v_1 + v_2))$$

$\boxed{\Leftarrow} F^* : W^* \rightarrow V^*$  surjektiv

Zu Zeigen:  $F : V \rightarrow W$  injektiv

$$v \in V / F(v) = 0$$

$$\begin{aligned}
v \neq 0 &\Rightarrow \exists \Psi : V \rightarrow K \quad \Psi(v) \neq 0 \\
&\xRightarrow{F^* \text{ surj.}} \exists \Theta : W \rightarrow K \\
&\quad \Theta \circ F = F^*(\Theta) = \Psi \\
&\Rightarrow \underbrace{\Theta(F(v))}_{=0} = \Psi(v) \text{ Wid !} \\
&\quad \text{b) } \boxed{\Rightarrow} F : V \twoheadrightarrow W \text{ surjektiv.}
\end{aligned}$$

**Zu Zeigen:**

$$F^* : W^* \hookrightarrow V^* \text{ injektiv}$$

Sei  $\Theta \in W^*/F^*(\Theta) = 0$  als lineare Abbildung  $V \rightarrow K$

$$F^*(\Theta) = \Theta \circ F$$

**Zu Zeigen:**

$$\forall w \in W, \Theta(w) = 0$$

$$w \in W \rightarrow \exists v \in V / F(v) = w$$

$$F \text{ surjektiv} \quad \Theta(w) = \Theta(F(v)) = F^*(\Theta)(v) = 0$$

$$\boxed{\Leftarrow} F^* : W^* \hookrightarrow V^* \text{ injektiv}$$

**Zu Zeigen:**

$$F : V \twoheadrightarrow W \text{ surjektiv}$$

Sei  $Z$  ein Komplement von  $\text{Im}(F)$  in  $W = \text{Im}(F) \oplus Z$

**Zu Zeigen:**

$$Z = \{0\}$$

Sonst sei  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $Z$ .

$$G : W \mapsto K \text{ linear der art}$$

$$G|_{\text{Im}(F)} = 0 \text{ und } G(b) = 1, \forall b \in \mathcal{B}$$

$$\Rightarrow G \in W^*$$

$$F^*(G) = G \circ F : V \rightarrow K$$

Sei  $v \in V$

$$G \circ F(v) = G(F(v)) = 0$$

$$\Rightarrow F^*(G) \text{ ist die triviale Abbildung}$$

$$\xRightarrow{F^* \text{ inj.}} G = 0 \text{ als lineare Abbildung}$$

$$\Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow Z = 0 \Rightarrow F \text{ surjektiv}$$



## IV.1 Duale Paarung

### IV.1.1 Def: Bilinearität

Seien  $V, W$  K-VR

Eine Abbildung  $\varphi : V \times W \mapsto K$  ist bilinear, wenn  $\varphi$  linear in jeder Koordinate ist.

$$\text{a) } \varphi(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 \varphi(v, w_1) + \lambda_2 \varphi(v, w_2)$$

$$\text{b) } \varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 \varphi(v_1, w) + \lambda_2 \varphi(v_2, w)$$

**Bem: !!!**

Falls  $V, W$  endlich dimensional mit Basen  $\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_n\}$  von  $V$  und  $\mathcal{C} = \{c_1 \dots c_m\}$  von  $W$ . Dann ist  $\varphi$  eindeutig bestimmt durch die  $(n \times m)$ -Matrix  $A = (\varphi(b_i, c_j))$

$$\begin{aligned} \varphi(v, w) &= \varphi\left(\sum_{i \leq n} \lambda_i b_i, \sum_{j \leq m} \mu_j c_j\right) \\ &= \sum_{i \leq n} \lambda_i \varphi\left(b_i, \sum_{j \leq m} \mu_j c_j\right) \\ &= \sum_{i \leq n} \lambda_i \sum_{j \leq m} \mu_j \varphi(b_i, c_j) \\ &= (\lambda_1, \dots, \lambda_n) A \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Bem:**

Falls wir Basen  $\mathcal{B}'$  von  $V$  und  $\mathcal{C}'$  von  $W$  gewählt hätten, dann ist die Darstellungsmatrix von  $\varphi$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^\top \cdot A \cdot \mathcal{M}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} &= \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} &= \mathcal{M}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \begin{pmatrix} \mu'_1 \\ \vdots \\ \mu'_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_n) = (\lambda'_1 \quad \dots \quad \lambda'_n) \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^\top$$

**Folgerung** Der Rang hängt nicht von der Auswahl der Basen ab  $\Rightarrow \text{Rg}(\varphi)$  ist wohldefiniert.

### IV.1.2 Def: Duales Paar

Ein Tripel  $(V, W, \varphi)$  ist ein duales Paar, falls  $\dim V = \dim W < \infty$

$\varphi : V \times W \rightarrow K$  ist bilinear und  $\text{Rg}(\varphi) = \dim(V) = \dim(W)$

**Bem:**

Falls  $\varphi : V \times W \rightarrow K$  bilinear ist, dann ist  $\varphi' : W \times V \rightarrow K \quad (w, v) \mapsto \varphi(v, w)$  auch bilinear.

**Aufgabe:**

$(V, W, \varphi)$  duales Paar  $\Rightarrow (W, V, \varphi')$  auch!

### IV.1.3 Lemma:

$V, W$  fest

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\{\varphi : V \times W \rightarrow K\}}_{\text{bilinear}} & \xleftrightarrow{\text{Bijektion } \Phi} & \underbrace{\{F : V \rightarrow W^*\}}_{\text{linear}} \\ \\ \varphi : V \times W \rightarrow K & \xrightarrow{\Phi} & \begin{array}{l} F_\varphi : V \rightarrow W^* \\ v \mapsto F_\varphi(v) : \quad W \rightarrow K \\ w \mapsto \varphi(v, w) \end{array} \\ \\ \varphi_F : V \times W \rightarrow K & \xleftarrow{\Phi^{-1}} & F : V \rightarrow W^* \\ (v, w) \mapsto F(v)(w) & & \end{array}$$

Ferner, falls  $\dim V, \dim W < \infty$ :

$(V; W; \varphi)$  duales Paar  $\Leftrightarrow F_\varphi : V \rightarrow W^*$  Isomorphismus

$$\Phi^{-1} \circ \Phi(\varphi)(v, w)$$

$$\Phi^{-1} \left( F_\varphi(v) : w \mapsto \varphi(v, w) \right) = \varphi(v, w)$$

#### IV.1.4 Wiederholung

$\varphi : V \times W \rightarrow K$  Bilinearform

$\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_n\}$  von  $V$

$\mathcal{C} = \{c_1 \dots c_m\}$  von  $W$

$\varphi$  hat eine Darstellungsmatrix

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \varphi(b_1, c_1) & \dots & \varphi(b_1, c_m) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(b_n, c_1) & \dots & \varphi(b_n, c_m) \end{pmatrix}$$

$$\varphi\left(\sum \lambda_i b_i, \sum \mu_j c_j\right) = (\lambda_1 \dots \lambda_n) A_\varphi \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}$$

$\text{Rg}(\varphi)$  ist eindeutig bestimmt.

$(V, W, \varphi)$  ist ein duales Paar, falls  $\text{Rg}(\varphi) = \dim V = \dim W < \infty$

$\varphi : V \times W \rightarrow K$  duales Paar

$\rightarrow \varphi' = W \times V \rightarrow K, (w, v) \mapsto \varphi(v, w)$  dual

$$\varphi'(w, v) \mapsto \varphi(v, w)$$

#### IV.1.5 Bew:

$\Phi$  ist Wohldefiniert

$F_\varphi(v) \in W^*$ , weil  $\varphi(v, ???)$  linear in der Koordinate ist  $F_\varphi$  ist linear weil  $\varphi$  linear in der ersten Koordinate ist (da es Wohldefiniert ist)

$$\Phi^{-1} \circ \Phi = Id_\chi$$

$$\Phi \circ \Phi^{-1} = Id_y$$

Falls  $V, W$  endlich dimensional sind, mit Basen  $\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_n\}$ ,  $\mathcal{C} = \{c_1 \dots c_m\}$ ,  $A_\varphi$  die Darstellungsmatrix von  $\varphi$  bzg. dieser Basen

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{ij} \\ \parallel \\ \varphi(b_i, c_j) \end{pmatrix}$$

Sei  $\mathcal{C}^* = \{c_1^* \dots c_m^*\}$  die duale Basis zu  $\mathcal{C}$  in  $W^*$

$$c_i^*(c_j) = \delta_{ij}$$

Die Darstellungsmatrix von

$$\begin{aligned}
 & F_\varphi \text{ bzgl. } \mathcal{B}, \mathcal{C}^* \\
 & (\lambda_{kl}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(K) \\
 & F_\varphi(b_k) = \sum \lambda_{lk} c_l^* \\
 & F_\varphi(b_k)(c_r) = \varphi(b_k, c_r) \\
 & \quad \parallel \\
 & (\sum \lambda_{lk} c_l^*)(c_r) \\
 & = \sum \lambda_{lk} c_l^*(c_r) = \lambda_{rk} \\
 & \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots \\ \lambda_{21} & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix} = A_\varphi^\top
 \end{aligned}$$

Wobei  $\lambda_{12} = \varphi(b_2, c_1) = a_{21}$ , und  $\lambda_{21} = a_{12}$

$$\text{Rg}(A_\varphi^\top) = \text{Rg}(A_\varphi)$$

$$\begin{aligned}
 (V, W, \varphi) \text{ ist ein duales Paar} & \Leftrightarrow \dim V = \dim W = \text{Rg}(A_\varphi) \\
 & \quad \parallel \quad \parallel \\
 & \quad \dim W^* \quad \text{Rg}(A_\varphi^\top)
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow F_\varphi \text{ Isomorphismus.}$$

#### IV.1.6 Kor: Ausartung

Seien  $V, W$  endlich dimensional,  $\varphi : V \times W \rightarrow K$  Bilinearform. Dann ist  $(V, W, \varphi)$  duales Paar, genau dann wenn  $\varphi$  nicht-ausgeartet ist d.h.

$$\begin{aligned}
 a) & \forall v \in V : \varphi(v, w) = 0 \quad \forall w \in W \Rightarrow v = 0 \\
 b) & \forall w \in W : \varphi(v, w) = 0 \quad \forall v \in V \Rightarrow w = 0
 \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
 a) & \forall v \in V \setminus \{0\} : \exists w \in W : \varphi(v, w) \neq 0 \\
 b) & \forall w \in W \setminus \{0\} : \exists v \in V : \varphi(v, w) \neq 0
 \end{aligned}$$

#### IV.1.7 Bew:

$\Rightarrow$

- a) Sei  $v \in V$  fest  $\varphi(v, w) = 0 \quad \forall w \in W$   
 $\varphi(v, w) = F_\varphi(v)(w) \Rightarrow F_\varphi(v) = 0$  als Abbildung  $\Rightarrow v = 0$   
( $V, W, \varphi$ ) duales Paar  $\Rightarrow F_\varphi$  Isomorphismus
- b) ( $V, W, \varphi$ ) duales Paar  $\Rightarrow (W, V, \varphi')$  auch dual  $\Rightarrow F_{\varphi'} : W \rightarrow V^*$  Isomorphismus  
 $v \in V, \varphi(v, w) = 0 \quad \forall w \in W$   
 $\varphi(v, w) = 0 = \varphi'(w, v) = F_{\varphi'}(w)(v) \Rightarrow F_{\varphi'}(w) = 0 \Rightarrow w = 0$

$\Leftarrow$  Es genügt zu zeigen, dass  $F_\varphi : V \rightarrow W^*$  Isomorph ist:  
Eigenschaft:

- a)  $\Rightarrow F_\varphi$  Isomorph (bijektiv)  
 $\Rightarrow \dim V \leq \dim W = \dim W$   
es genügt zu zeigen, dass  $\dim V = \dim W^*$  (da  $F_\varphi$  injektiv) und, dass  
daraus folgt: ( $W, V, \varphi'$ ) ( $\varphi' =$  bilinearform )
- b)  $\Rightarrow F_{\varphi'} : W \rightarrow V^*$  injektiv  $\Rightarrow \dim W = \dim V^* = \dim V$   
 $\Rightarrow \dim V = \dim W$

□

**Beispiel:**

$$(\mathbb{R}^2, <, >)$$

$$< x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n > = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}.$$

$$< (x_1 \dots x_n), (1, 0 \dots 0) > = x_1 = 0$$

#### IV.1.8 Kor: duale Basen

Sei  $(V, W, \varphi)$  ein duales Paar. Für jede Basis  $\{c_1 \dots c_n\}$  aus  $W$  gibt es eine Basis  $\{b_1 \dots b_n\}$  aus  $V$ , welche „dual“ zu  $\{c_1 \dots c_n\}$  ist:

$$\varphi(b_i, c_j) = \delta_{ij}$$

#### IV.1.9 Bew:

Für  $\{c_1 \dots c_n\}$  aus  $W$  eine Basis. Sei  $\{c_1^* \dots c_n^*\}$  die duale Basis aus  $W^*$

$$F_\varphi : V \rightarrow W^* \text{ Iso}$$

Sei  $b_i = F_\varphi^{-1}(c_i^*)$ ,  $\{b_1 \dots b_n\}$  ist eine duale Basis von  $V$

$$\varphi(b_i, c_j) = \underbrace{F_\varphi(b_i)}_{\parallel c_i^*}(c_j) = \delta_{ij}$$

□

#### IV.1.10 Def: Orthogonales Komplement

Sei  $(V, W, \varphi)$  ein duales Paar.  $U \subset V$  Unterraum von  $V$ .  
Definiere

$$U^\perp = \{w \in W \mid \varphi(u, w) = 0 \ \forall u \in U\}$$

$U^\perp$  ist ein UVR von  $W$

**Bem:**

$U^\perp$  ist ein Unterraum von  $W$ .

$$(0)^\perp = V$$

$$V^\perp = \{0\}, \text{ weil } \varphi \text{ nicht-ausgeartet ist!}$$

$$U \subset V$$

$$\begin{aligned} (U^\perp)^\perp &= \{v \in V \mid \forall w \in U^\perp \ \varphi(v, w) = 0\} = U \\ &\parallel \\ &U \end{aligned}$$

#### IV.1.11 Bew:

$$U \subset (U^\perp)^\perp$$

$$u \in U \Rightarrow u \in (U^\perp)^\perp \Rightarrow \forall w \in U^\perp, \varphi(u, w) = 0$$

Sei  $v \notin U$ .

z.zeigen:  $v \notin (U^\perp)^\perp$

Es gibt  $G : V \rightarrow K$  derart,  $G \upharpoonright U = 0$ ,  $G(v) = 1$

$$G \in V^* \simeq W \text{ } F_{\varphi'} \text{ (Isomorphismus)}$$

$$\Rightarrow \exists w \in W \quad F_{\varphi'}(w) = G$$

D.h.  $\forall z \in V \quad G(z) = \varphi'(w, z) = \varphi(z, w)$

$u \in U$

$$0 = G(u) = \varphi(u, w) \rightarrow w \in U^\perp$$

$$1 = G(u) = \varphi(u, w) \rightarrow u \notin (U^\perp)^\perp$$

□

#### IV.1.12 Lemma: zu Quotientenräumen

Sei  $(V, W, \varphi)$  ein duales Paar  $U \subset V$  ein UVR

Dann ist  $(V/U, U^\perp, \tilde{\varphi})$  duales Paar, wobei  $\tilde{\varphi}(v + u, w) = \varphi(u, w)$

Insbesondere gilt

$$\dim V = \dim U + \dim U^\perp$$

**Bew:**

Übungsaufgabe

$$(V/U, U^\perp, \varphi^\perp) \quad \text{ein duales Paar}$$

$\Downarrow$

$$\underbrace{\dim V/U}_{\dim V - \dim U} = \dim U^\perp$$

#### IV.1.13 wiederholung

$V, W$  endlich,  $(V, W, \varphi)$  duales Paar

$$\Leftrightarrow \dim V = \dim W = \text{Rg}(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow F_\varphi : V \rightarrow W^* \text{ Isom.}$$

$$v \mapsto F_\varphi(v), \quad W \rightarrow K, \quad w \mapsto \varphi(v, w)$$

$\Leftrightarrow \varphi$  nicht-ausgeartet ist:  $\varphi(v, -) : W \rightarrow K$  die Null Abbildung  $\Rightarrow v = 0$

$\varphi(-, w) : V \rightarrow K$  die Null Abbildung  $\Rightarrow w = 0$

$$U \subset V \text{ UR, } U^\perp = \{w \in W \mid \varphi(u, w) = 0\} \text{ UR}$$

$$\rightarrow (U^\perp)^\perp = U \rightarrow \dim V = \dim U + \dim U^\perp$$

$$\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_n\} \text{ Basis von } V$$

ist dual zu der Basis von  $W \quad \{c_1 \dots c_n\}$  falls  $\varphi(b_i, c_j) = \delta_{ij}$

#### IV.1.14 Def: Adjungierte

Sei  $(V, W, \varphi)$  duales Paar und  $G : W \rightarrow W$  Endomorphismus.  
Der *adjungierte Endomorphismus*  $G^\top : V \rightarrow V$  wird definiert als

$$G^\top : F^{-1} \circ G^* \circ F_\varphi$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{F_\varphi^{-1}} & W^* \\ G^\top \uparrow & & \uparrow G^* \\ V & \xrightarrow{F_\varphi} & W^* \end{array} \quad \begin{array}{c} W \\ \downarrow G \\ W \end{array}$$

$$G^*(\Phi) = \Phi \circ G \quad \Phi : W \rightarrow K$$

**Bem:**

$G^*$  ist eindeutig bestimmt durch die Gleichung

$$\varphi(G^\top(v), w) \stackrel{(*)}{=} \varphi(v, G(w)) \quad \forall v \in V, \forall w \in W$$

#### IV.1.15 Bew: Eindeutigkeit

Falls  $G : V \rightarrow V$  die selbe Eigenschaft erfüllt

$$\begin{aligned} \varphi(G_1(v) - G^*(v), w) &= \varphi(G(v), w) - \varphi(G^\top(v), w) \\ &\quad \parallel \quad \parallel \\ &= \varphi(v, G(w)) - \varphi(v, G(w)) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G_1(v) = G_1^\top \Rightarrow G_1 = G^\top \quad \forall v \in V, \forall w \in W \quad \varphi \text{ nicht-ausgeartet}$$

**zu Zeigen:**  $G^\top$  die Eigenschaft (x) besitzt.

Seien  $v \in V, w \in W$

$$\varphi(v, G(w)) = F_\varphi(v)(G(w))$$

$$\varphi(v, G(w)) = \underbrace{\overbrace{F_\varphi(v)}^{\in W^*} \circ G(w)}_{G^*(F_\varphi(v))}$$

$$\begin{aligned} G^\top(v) &= v_1 \\ \parallel & \\ F_\varphi^{-1} \circ G^* \circ F_\varphi(v) &\Leftrightarrow G^* \circ F_\varphi(v) = F_\varphi(w) \end{aligned}$$



$\rightarrow \forall w \in W :$

$$\begin{array}{ccc} & \varphi(G^*(v), w) & \\ & \parallel & \\ F_\varphi(v_1)(w) & = & \varphi(v_1, w) \\ \parallel & & \\ \underbrace{G^* \circ F_\varphi(v)(w)}_{\in W^*} & = & \underline{\varphi(v, G(w))} \end{array}$$

□

## IV.2 Euklidische Räume

### IV.2.1 Def: Symmetrie

Eine Bilinearform  $\varphi : V \times V \rightarrow K$  ist symmetrisch, falls  $\varphi = \varphi'$

$$\Leftrightarrow \forall u, v \in V : \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$$

**Bem:**

Seien  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  Basen von  $V$  und  $A$  die Darstellungsmatrix von  $\varphi$  bzgl.  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ .

$$\varphi \text{ symmetrisch} \Leftrightarrow A = A^\top = (\varphi(b_i, c_j))$$

### IV.2.2 Bew:

$\Rightarrow$  Siehe Übungsblatt

$\Leftarrow$

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= u^\top \cdot A \cdot v \\ &= (A^\top \cdot u)^\top \cdot v \\ &= v^\top \cdot \left( (A^\top \cdot u)^\top \right)^\top \\ &= v^\top \cdot \underbrace{A^\top}_{A} \cdot u = \varphi(v, u) \end{aligned}$$

**Bem:**

$\varphi$  symmetrisch

$\Rightarrow$  Der Begriff der Orthogonalität ist wohldefiniert und vor allem symmetrisch

$$\begin{aligned}
u \perp v &\Leftrightarrow \varphi(u, v) = 0 \\
&\Updownarrow \\
v \perp u &\Leftrightarrow \varphi(v, u) = 0
\end{aligned}$$

### Beispiel

$\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{x}, \vec{y}) &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ symmetrisch} \\
\varphi(\vec{x}, \vec{x}) &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0
\end{aligned}$$

### IV.2.3 Def: Quadratische Form

Sei  $\varphi : V \times V \rightarrow K$  symmetrische Bilinearform.

Die zugehörige quadratische Form:

$$\begin{aligned}
g : V &\rightarrow K \\
v &\mapsto \varphi(v, v)
\end{aligned}$$

#### Anmerkung:

$\dim V = n$

Sei  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  eine Basis  $\rightarrow \varphi$  hat Darstellungsmatrix  $\underline{\underline{A}}$  bzgl.  $\mathcal{B}$ .

$$\begin{aligned}
g(v) \text{ auch } q(v) &= \varphi(v, v) = \varphi\left(\sum \lambda_i b_i, \sum \lambda_j b_j\right) \\
&= (\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \\
&= \sum a_{ij} \lambda_i \lambda_j
\end{aligned}$$

#### Folgerung:

( $\text{char } K \neq 2$ )

Jede symmetrische Bilinearform ist durch ihre quadratische Form eindeutig

bestimmt.

$$\begin{aligned} q(u+v) &= \varphi(u+v, u+v) \\ &= \varphi(u, u) + \varphi(v, u) + \varphi(u, v) + \varphi(v, v) \\ &= \underbrace{\varphi(u, u)}_{q(u)} + \underbrace{\varphi(v, v)}_{q(v)} + 2\varphi(u, v) \\ q(u-v) &= \dots = q(u) + q(v) - 2\varphi(u, v) \end{aligned}$$

Insb:

$$\varphi(u, v) = \frac{q(u+v) - q(u-v)}{4}$$

#### IV.2.4 Def: Definitheit

Sei  $V$  ein endlich dimensionaler  $\mathbb{R}$ -VR. und  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  Symmetrische Bilinearform. Wir sagen,  $\varphi$  ist:

1. positiv semidefinit, falls  $\varphi(u, u) \geq 0 \ \forall u \in V$
2. negativ semidefinit, falls  $\varphi(u, u) \leq 0 \ \forall u \in V$
3. positiv definit, falls  $\varphi$  pos. semidefinit ist und  $\varphi(v, v) > 0 \ \forall v \in V \setminus \{0\}$
4. negativ definit, falls  $\varphi$  neg. semidefinit ist und  $\varphi(v, v) < 0 \ \forall v \neq 0$
5. indefinit sonst.

**Beispiele:**

- (a) Standard Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  ist positiv def.
- (b)  $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1 y_1$  ist positiv semidefinit aber nicht pos.def.  $\varphi((0, 1), (0, 1)) = 0$
- (c)  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1 y_1 - x_2 y_2$  indefinit

**Bem:**

$\varphi$  ist posit (semi)-def.,  $-\varphi$  ist neg (semi)-def.

#### IV.2.5 Def: Skalarprodukt

Ein Skalarprodukt auf einem endlichdimensionalen  $\mathbb{R}$ -VR  $V$  ist eine *positiv definite symmetrische Bilinearform*:  $\varphi(u, v) \xrightarrow{\text{bijektion ???}} \langle u, v \rangle$

## IV.2.6 Def: Euklidischer Raum

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist ein euklidischer Raum, wenn  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -VR endlichdimensional und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt ist.

## IV.2.7 Def: Norm

Eine Norm auf einem  $\mathbb{R}$ -VR  $V$  ist eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  derart, dass:

1.  $\|v\| \geq 0, \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2.  $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \|v\|$
3. Dreiecksungleichung  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$(V, \|\cdot\|)$  ein normierter  $\mathbb{R}$ -VR ist

**Beispiele:**  $\mathbb{R}^n$

(a) Euklidische Norm  $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

(b)  $\|\vec{x}\|_{\infty} = \sum |x_i|$

(c)  $\|\vec{x}\|_{\infty} = \underbrace{\max}_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

## IV.2.8 Def: Norm über Skalarprodukt

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Raum und definiere  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$  wohldefiniert. Wir wollen Zeigen, dass es eine Norm auf  $V$   
induziert.

## IV.2.9 Lemma:

(Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung)

$$\forall v, w \in V$$

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

#### IV.2.10 Bew:

Falls  $w = 0 \rightarrow \text{ok!}$

OBdA ist  $w \neq 0 \rightarrow \|w\| > 0$

Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$  beliebig

$$0 \leq \langle v - \lambda w, v - \lambda w \rangle = \|v\|^2 + \lambda^2 \|w\|^2 - 2\lambda \langle v, w \rangle$$

Insb:

$$2\lambda \langle v, w \rangle \leq \|v\|^2 + \lambda^2 \|w\|^2$$

Falls

$$\lambda = \frac{\langle v, w \rangle}{\underbrace{\|w\|^2}_{\neq 0}} \in \mathbb{R}$$

$$2 \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2} \leq \|v\|^2 + \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2} \Rightarrow \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2} \leq \|v\|^2$$

$$\rightarrow \langle v, w \rangle^2 \leq \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$$

$$\rightarrow |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

□

#### Folgerung:

$(V, \langle, \rangle)$  euklidischer Raum

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle} \end{aligned}$$

ist eine Norm.

#### IV.2.11 Bew:

1) klar

$$2) \|\lambda \cdot v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle v, v \rangle} = |\lambda| \cdot \|v\|$$

3) Es genügt zu zeigen, dass  $\|u + v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + 2\langle u, v \rangle \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \\ &\leq (\|u\| + \|v\|)^2\end{aligned}$$

#### IV.2.12 Def: Winkel zwischen Vektoren

$(V, \langle, \rangle)$  euklidischer Raum

$$-1 \leq \underbrace{\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}}_{\cos \theta} \leq 1$$

$\theta \in [0, \pi]$  eindeutig bestimmt.

$\theta$  ist der Winkel zwischen  $u$  und  $v$

**Bem:**

$u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow$  der Winkel  $\frac{\pi}{2}$  ist  $u \uparrow \rightarrow v$

#### IV.2.13 Wiederholung

$\varphi : V \times V \rightarrow K$  symmetrisch gdw  $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$

$\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  eine Basis von  $V$

$A = (\varphi(b_i, b_j))$  Darstellungsmatrix von  $\varphi$

$\varphi$  symmetrisch  $\Leftrightarrow A = A^\top$

$g(v) = g(\sum (\lambda_i b_i)) = \sum a_{ij} \lambda_i \lambda_j$

$\text{char } k \neq 2 \rightarrow q$  bestimmt  $\varphi$

$\varphi(u, v) = \frac{q(u+v) - q(u-v)}{4}$

$\varphi$  symmetrisch ist positiv definit, falls  $\varphi(u, u) = q(u) \geq 0 \leftarrow$  Körper ist  $\mathbb{R}$

$q(u) = \varphi(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0$

Ein Skalarprodukt auf einem  $\mathbb{R}$ -VR  $V$  ist eine symmetrische positiv definite

Bilinearform  $\varphi(u, v) \rightarrow \langle u, v \rangle$

$\|v\| = \sqrt{q(v)} = \sqrt{\langle v, v \rangle}$  Norm.

1)  $\|v\| \geq 0 (= 0 \Leftrightarrow v = 0)$

2)  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

$$3) \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung  $|\langle v, v \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

$$-1 < \frac{\langle v, w \rangle}{\underbrace{\|v\| \|w\|}_{\substack{\| \\\cos \theta, \theta \in [0, \pi]}}} < 1$$

$\theta$  ist Winkel zwischen  $v$  und  $w$ .

$v \perp w$  (orthogonal)

$$\Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$$

$\Leftrightarrow$  Der Winkel ist  $\frac{\pi}{2}$

#### IV.2.14 Satz: (des Pythagoras)

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  endlichdimensionaler Raum

$$v \perp w \Leftrightarrow \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

#### IV.2.15 Bew:

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + 2 \langle v, w \rangle \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \langle v, w \rangle \\ \text{mit: } v \perp w &\Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0 \Leftrightarrow \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 \end{aligned}$$

#### IV.2.16 Def: Orthogonal- und Orthonormalbasis

$\varphi : V \times V \rightarrow K$  symmetrische Bilinearform

Ein orthogonales System bzgl.  $\varphi$  ist eine Kollektion  $M$  von Vektoren  $0 \notin M$   $u, v \in M$  verschieden  $\varphi(u, v) = 0$

Ein orthonormales System  $M$  ist eine Kollektion von Vektoren

$$\varphi(u, v) = \begin{cases} 0 & v \neq u \\ 1 & u = v \end{cases}$$

Dementsprechend definieren wir Orthogonalbasis und Orthonormalbasis (ONB)

**Beispiel:** Standardbasis  $\{o_1, \dots, o_k\}$   $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

standard skalarprodukt

## IV.2.17 Satz: $\varphi$ symmetrisch $\Rightarrow$ diagonalisierbar

(Char( $K$ )  $\neq 2$ )

Jede Symmetrische Bilinearform  $\varphi$  auf einem endlich dimensionalen  $K$ -VR  $V$  lässt sich bei einer geeigneten Basisauswahl durch eine Diagonalmatrix darstellen. Ferner ist  $\varphi$  nicht-ausg.  $\Leftrightarrow$  kein Eigenwert der Matrix null ist.

**Bem:**

Es genügt zu zeigen, dass  $(V, \varphi)$  eine Basis  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  besitzt welche aus paarweise orthogonalen Vektoren besteht.

Dann ist die Darstellungsmatrix von  $\varphi$  bzgl.  $\{b_1, \dots, b_n\}$

$$\begin{pmatrix} \varphi(b_1, b_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi(b_2, b_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi(b_n, b_n) \end{pmatrix}$$

Sei  $q : V \rightarrow K \ v \mapsto \varphi(u, v)$  die zugehörige quadratische Form

Falls  $q(v) = 0 \ \forall v \in V$

$\rightarrow \varphi(u, v) = 0 \ \forall u, v \in V$

$\rightarrow$  Jede Basis von  $V$  besteht aus paarweise orthogonalen Vektoren.

Sonst, existiert  $b_1 \in V \setminus g(b_1) \neq 0, \quad F : V \rightarrow K, \ v \mapsto \varphi(v, b_1)$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \varphi(b_1, b_1) \end{array}$$

$$\text{Im}(F) = K \text{ als } \underline{K\text{-VR}}$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ \dim \ker(F) = n-1 \end{array}$$

$$\ker(F) = \{v \in V \setminus \varphi(v, b_1) = 0\} = \{v \in V \setminus v \perp b_1\} = \text{Span}(b_1)^\perp$$

Induktion auf die Dimension von  $V \Rightarrow$  Es existiert eine Basis  $b_1 \dots b_n$  von  $\ker(F)$  welches aus paarweise orthogonal Vektoren besteht.

Die Basis  $\{b_1, \dots, b_n\}$  ist eine orthogonale Basis von V.

**Bem:**

Die Eigenwerte der Matrix hängen nicht von der Basis ab

$\rightarrow$  Eigenwerte sind  $\varphi(b_1, b_1), \dots, \varphi(b_n, b_n)$

$$\begin{array}{cc} \parallel & \parallel \\ \mu_1 & \mu_n \end{array}$$



$\Rightarrow$  Angenommen, dass

$$\mu_j = \varphi(b_j, b_j) = 0$$

wäre

$$\varphi(b_j, b_i) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

$i$  beliebig

$\varphi(b_j, -) : V \rightarrow K$  ist die triviale Abbildung  $\Rightarrow$  Wid!  $b_j \neq 0$

$\Leftarrow$  Sei  $v \in V \setminus \{0\}$  beliebig.

**Zu Zeigen:**  $\varphi(v, -) : V \rightarrow K$  nicht trivial ist

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \rightarrow \exists i / \lambda_i \neq 0$$

$$\varphi(v, b_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi(b_j, b_i) = \overset{0}{\cancel{\lambda_j}} \overset{0}{\cancel{\varphi(b_j, b_i)}} = \lambda_i \varphi(b_i, b_i) \neq 0$$

#### IV.2.18 Kor:

(char  $k \neq 2$ )

Falls in  $K$  jedes Element ein Quadrat ist, dann lässt sich jede symmetrische

Bilinearform durch eine Matrix der Form  $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$  darstellen.

#### IV.2.19 Bew:

Es existiert eine Orthogonalbasis  $\{b_1, \dots, b_n\}$  für  $\varphi : V \times V \rightarrow K$ .

$$c_i = \begin{cases} \frac{b_i}{\sqrt{\varphi(b_i, b_i)}} & \varphi(b_i, b_i) \neq 0 \\ b_i & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\{c_1, \dots, c_n\}$  ist immer noch eine Basis.

OBdA können wir annehmen, dass  $c_1, \dots, c_n$  ist so umgeordnet, dass

$$\begin{aligned}\varphi(c_i, c_i) &= 1 & i \leq k \\ \varphi(c_j, c_j) &= 0 & j > k\end{aligned}$$

Darstellungsmatrix von  $\varphi$  bzgl.  $\{c_1, \dots, c_n\}$

$$\left( \begin{array}{cccccc} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} k \text{ mal} \\ \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} n - k \text{ mal} \end{array}$$

#### IV.2.20 Kor: (Sylvester)

Jede Symm. Bilinearform  $\varphi$  auf einem endlich dimensionalen  $\mathbb{R}$ -VR läßt sich bei geeigneter Basisauswahl durch eine Matrix der form

$$\left( \begin{array}{c} \begin{array}{c} | 1 \\ p = \diagdown \quad \ddots \\ \quad \quad 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} | -1 \\ q = \diagdown \quad \ddots \\ \quad \quad -1 \end{array} \\ \begin{array}{c} | 0 \\ r = \diagdown \quad \ddots \\ \quad \quad 0 \end{array} \end{array} \right)$$

darstellen. Ferner hängen die Zahlen  $p, q$  und  $r$  nur von  $\varphi$  ab.

#### IV.2.21 Bew:

Sei  $\{b_1 \dots b_n\}$  eine Orthogonalbasis für  $\varphi$

$$c := \begin{cases} \frac{b_1}{\sqrt{\varphi(b_1, b_1)}} & \text{falls } \varphi(b_i, b_i) > 0 \\ \frac{b_i}{\sqrt{-\varphi(b_i, b_i)}} & \text{falls } \varphi(b_i, b_i) < 0 \\ b_i & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach Umordnen der Darstellungsmatrix

$$\left( \begin{array}{cccccccc} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \} p \\ \\ \\ \} q \\ \\ \} r \end{matrix}$$

□

**Bem:**

$\varphi \upharpoonright \text{Span}(c_1, \dots, c_p) \times \text{Span}(c_1, \dots, c_p)$  ist positiv definit.

#### IV.2.22 Bew: falsch:

$$\varphi \left( \sum_{i=1}^p \lambda_i c_i \sum_{i=1}^p \lambda_i c_i \right) = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \varphi(c_i, c_j) = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2$$

Sei  $U \subset V$  der größte UR von  $V$  derart, dass  $\varphi \upharpoonright U \times U$  positiv definit ist.

$\text{span}(c_1, \dots, c_p) \subset U$

zu zeigen  $\boxed{p = \dim U}$  ✓

Sonst  $U \cap \text{span}(c_{p+1}, \dots, c_n) \neq 0$

Sei

$$0 \neq v \in U \cap \text{span}(c_{p+1}, \dots, c_n) \quad v = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i c_i$$

da  $v \in U \varphi \upharpoonright_{U \times U}$  positiv definit

$$0 \leq \varphi(v, v) = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i^2 \overbrace{\varphi(c_i, c_i)}^{\leq 0} \leq 0$$

$\Rightarrow v = 0 \rightarrow$  Wid.

$g, r$  bestimmen

$\text{Rg}(\varphi) = \underline{p} + q \rightarrow$  ist eindeutig bestimmt

$r = n - \text{Rg}(\varphi) \rightarrow$  eindeutig bestimmt

## IV.2.23 Def: Signatur

Signatur  $(\varphi) = \underline{\underline{q - p}}$

## IV.2.24 Wiederholung

$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto 2x_1x_2 - y_1y_2$

$\varphi$  ist positiv definit auf  $\text{span}((1, 0)) \quad \varphi((\lambda, 0), (\lambda, 0)) = 2\lambda^2 \geq 0$

$\varphi$  ist positiv definit auf  $\text{span}((1, 1)) \quad \varphi((\lambda, \lambda), (\lambda, \lambda)) = \lambda^2 \geq 0$

$\varphi$  ist nicht positiv definit auf  $\text{span}((1, 0)) + \text{span}((1, 1)) = \mathbb{R}^2$

$\varphi((0, 1), (0, 1)) = -1$

## IV.2.25 Bew: Kor Sylvester

Wir wollen  $p$  eindeutig bestimmen.

$\varphi$  ist positiv definit auf  $\text{span}(c_1, \dots, c_p)$

Sie

$$h = \max\{\dim(U) \mid U \subset V \varphi \upharpoonright_{U \times U} \text{ pos. definit ist}\}$$

Sei

$U \subset V$  UR der Dimension  $h$  sodass  $\varphi \upharpoonright_{U \times U}$  pos. definit ist.

Wir zeigen:  $U \cap \text{span}(c_{p+1}, \dots, c_n) = \{0\}$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \dim(U) + \quad \overset{\dim \text{span}(c_{p+1}, \dots, c_n)}{\parallel} \quad n - p &= \dim \underbrace{U + \text{span}(c_{p+1}, \dots, c_n)}_{\substack{\subset V \\ \leq n}} \\ \parallel \\ 0 & \end{aligned}$$

$\Rightarrow h \leq p$

# Kapitel V

## Unitäre Räume

### V.0.1 Def:

Ein unitärer Raum  $V$  ist ein  $\mathbb{C}$ -VR zusammen mit einem komplexen Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \mapsto \mathbb{C}$  mit folgenden Eigenschaften

1.  $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ , wobei  $\overline{a + bi} = a - bi$
2.  $\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$
3.  $\langle \lambda \cdot v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$
4.  $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$  und ferner  $\langle v, v \rangle > 0$  für  $v \neq 0$

**Beispiel**  $\mathbb{C}^n$   $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$

### Bem:

Die Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist nicht bilinear sondern **hermitesch sesquilinear**

$$\langle v, \lambda w + \mu w' \rangle = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle + \bar{\mu} \langle v, w' \rangle$$

### V.0.2 Bew:

$$\begin{aligned} \langle v, \lambda w + \mu w' \rangle &= \overline{\langle \lambda w + \mu w', v \rangle} \\ &= \bar{\lambda} \overline{\langle w, v \rangle} + \bar{\mu} \overline{\langle w', v \rangle} = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle + \bar{\mu} \langle v, w' \rangle \end{aligned}$$

**Bem:**

Für einen unitären Raum  $V$  ist

$$\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

$$1) \|v\| \geq 0 \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

$$2) \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$3) \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

**Bem:**

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  unitärer Raum  $v \perp w \Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$

$\left. \begin{array}{l} \text{Orthogonalität} \\ \text{Orthogonales System} \\ \text{Orthonormales System} \\ \text{Orthogonalbasis} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Wir können die Begriffe hier } \underline{\text{verwenden}}.$

### V.0.3 Def: Orthonormalbasis

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer oder unitärer Raum. Eine Orthonormalbasis von  $V$  ist eine Basis  $\mathcal{B} = \{b_i\} \mid b_i \perp b_j \quad i \neq j \quad \|b_i\| = 1$

**Bem:**

Jedes orthogonales System ist linear unabhängig.

### V.0.4 Bew:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = 0$$

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i, b_j \right\rangle = 0$$

$$\parallel$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \langle b_i, b_j \rangle = \sum \lambda_i \langle b_i, b_j \rangle$$

$$\not\equiv 0$$

□

### V.0.5 Lemma: Orthonormalbasen

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer oder unitärer Raum und  $\{b_1, \dots, b_n\}$  eine ONB. Dann

1.

$$\forall v \in V \quad v = \sum_{i=1}^n \langle v, b_i \rangle b_i$$

2.

$$\begin{aligned} v &= \sum \lambda_i b_i \\ w &= \sum \mu_i b_i \end{aligned} \Rightarrow \langle v, w \rangle = \sum \lambda_i \bar{\mu}_i$$

3.  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus. Dann ist die Darstellungsmatrix  $A$  von  $F$  bzgl.  $\{b_1, \dots, b_n\}$  gegeben durch  $a_{ij} = \langle F(b_j), b_i \rangle$

### V.0.6 Bew:

$$1) \quad v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \quad \langle v_i, b_j \rangle = \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i \langle b_i, b_j \rangle}_{\substack{\parallel \\ \lambda_j}}$$

$$2) \quad \langle \sum \lambda_i b_i, \sum \mu_j b_j \rangle = \sum_{i,j} \lambda_i \bar{\mu}_j \underbrace{\langle b_i, b_j \rangle}_{\substack{\parallel \\ \delta_{ij}}} = \sum \lambda_i \bar{\mu}_i$$

$$3) \quad A = \left( \underbrace{a_{ij}}_{F(b_1) \dots F(b_n)} \right) \quad a_{ij} \text{ ist die Koordinate von } F(b_j) \text{ bzgl. } b_i$$

$$\Downarrow 1)$$

$$a_{ij} = \langle F(b_j), b_i \rangle$$

### V.0.7 Satz: (Geom-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren)

Sei  $V$  ein euklidischer oder unitärer Raum. Gegeben  $\{v_1, \dots, v_n\}$  lin. unabh. dann gibt es ein orthonormalsystem  $\{e_1, \dots, e_n\}$  derart, dass

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n) = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$$

Insb., falls  $V$  endlichdim ist, besitzt  $V$  eine ONB.

## V.0.8 Bew:

Zwei Schritte:

- Aus  $v_1 \dots v_n$  konstruieren wir eine Basis welche aus orthogonalen Vektoren besteht
- Dann normalisieren:  $e_1 \dots e_n$  werden rekursiv definiert

$$e'_1 = v_1 \xrightarrow{v_1 \neq 0} e_1 = \frac{e'_1}{\|e'_1\|}$$

Angenommen  $e_1 \dots e_n$  wurden konstruiert, so dass

$$e_i \perp e_j \quad i \neq j \quad \|e'_1\| = 1$$

und  $\text{span}(e_1 \dots e_n) = \text{span}(v_1 \dots v_n)$  Wir wollen

$$e_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle v_{k+1}, e_i \rangle e_i$$

$e'_{k+1} \neq 0 \rightarrow$  sonst ist  $v_{k+1} \in \text{span}(e_1, \dots, e_n) = \text{span}(v_1, \dots, v_n)$  Wid!

□

Setze

$$e_{k+1} = \frac{e'_{k+1}}{\|e'_{k+1}\|}$$

zu zeigen:

$$e_{k+1} \perp e_{j \leq k} :$$

$$\begin{aligned} \langle e_{k+1}, e_j \rangle &= \frac{1}{\|e'_{k+1}\|} \langle v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle v_{k+1}, e_i \rangle e_i, e_j \rangle \\ &= \frac{1}{\|e'_{k+1}\|} \left( \langle v_{k+1}, e_j \rangle - \underbrace{\sum_{i=1}^k \langle v_{k+1}, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle}_{\langle v_{k+1}, e_j \rangle} \right) = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\text{span}(e_1 \dots e_{k+1}) = \text{span}(v_1 \dots v_{k+1})$$

$$e_{k+1} \in \text{span}(v_{k+1}, e_1 \dots e_k) = \text{span}(v_{k+1}, v_1 \dots v_k)$$

$$v_{k+1} = \|e_{k+1}\| e_{k+1} + \sum_{j=1}^k \langle v_{k+1}, e_j \rangle e_j \in \text{span}(e_1 \dots e_{k+1})$$



### V.0.9 Kor: Orthonormalsysteme

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  euklidisch oder unitär endlichdimensional und  $D \subset V$  ein Orthonormalsystem. Dann  $\exists$  ONB  $B \supset D$

**Bem:**

Sei  $D = \{v_1, \dots, v_k\}$  und ergänze zu einer Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$ .  $\rightarrow$  Konstruiere eine ONB  $\{e_1, \dots, e_n\}$

zu zeigen:  $e_i = v_i \quad i \leq k$

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = v_1$$

Annahme  $e_j \equiv v_j \quad j \leq i$

$$e_{i+1} = \frac{v_{i+1}}{\|v_{i+1}\|} = v_{i+1} - \sum_{j=1}^i \underbrace{\langle v_{i+1}, e_j \rangle}_{=0} e_j$$

### V.0.10 Def: Orthogonale Teilmengen

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  euklidisch und unitär

Zwei Teilmengen  $A, B$  von  $V$  sind orthogonal,  $A \perp B$  falls  $v \perp w \quad \forall v \in A, \forall w \in B$

**Bem:**

$A \perp B \Leftrightarrow \text{span}(A) \perp \text{span}(B)$

in Blatt 7 Aufgabe 3 schon gezeigt

### V.0.11 Def:

$A \subset B$  Teilmenge

$$\begin{aligned} A^\perp &= \{v \in V \mid \{v\} \perp A\} \\ &= \{v \in V \mid \forall w \in A : v \perp w\} \end{aligned}$$

**Bem:**

$A^\perp$  ist ein Unterraum von  $V$

**Bem:**

$$A^\perp = \text{span}(A)^\perp$$

**V.0.12 Bew:**

$\boxed{\subset}$

$$\begin{aligned} A^\perp \perp A & \quad \Downarrow \\ A^\perp \subset \text{span}(A)^\perp & \Leftrightarrow A^\perp \perp \text{span}(A) \end{aligned}$$

$\boxed{\supset}$

$$\begin{aligned} v \in \text{span}(A)^\perp & \Rightarrow \forall w \in \overbrace{\text{span}(A)}^{\supset A} \\ v \perp w & \Rightarrow \forall w \in A \quad v \perp w \\ & \Rightarrow v \in A^\perp \end{aligned}$$

**V.0.13 Satz: Orthogonales Komplement**

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  euklidisch oder unitär und  $U \subset V$  endlichdim. UR

$$\Rightarrow V = U \oplus U^\perp$$

**V.0.14 Bew:**

$$U \cap U^\perp = \{0\}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  nicht ausgeartet !

Es genügt zu zeigen, dass  $V = U + U^\perp$

1. Fall  $U = \{0\} \rightarrow \text{ok!}$

2. Fall  $U \neq \{0\}$

$\Downarrow U$  endlichdim. Gram-Schmidt

$$\exists \{b_1, \dots, b_n\} \quad \text{ONB von } U$$

Sei  $v \in V$  beliebig.

$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^k \langle v, b_i \rangle b_i}_{\in U} + \overbrace{\left( v - \sum_{i=1}^k \langle v, b_i \rangle b_i \right)}^w$$

Wir müssen zeigen, dass  $w \in U^\perp$

Es genügt, wenn wir zeigen, dass  $w \perp b_i \quad 1 \leq i \leq k$

$$\begin{aligned}
 \langle w, b_i \rangle &= \langle v - \sum_{j=1}^k \langle v, b_j \rangle b_j, b_i \rangle \\
 &= \langle v, b_i \rangle - \sum_{j=1}^k \overbrace{\langle v, b_j \rangle}^{\in K} \underbrace{\langle b_j, b_i \rangle}_{\substack{\parallel \\ 0 \quad 1 \\ i \neq j \quad i = j}} \\
 &= \langle v, b_i \rangle - \langle v, b_i \rangle = 0
 \end{aligned}$$

### V.0.15 Lemma:

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  euklidisch oder unitär

$U \subset V$  endlichdim. UR

$$(U^\perp)^\perp = U$$

### V.0.16 Bew:



$$U \perp U^\perp \Rightarrow U \subset (U^\perp)^\perp$$



Sei  $v \in (U^\perp)^\perp$

$$\text{mit } V = U \oplus U^\perp \Rightarrow v = u + w \quad u \in U \quad w \in U^\perp$$

Es genügt zu zeigen, dass  $w = 0 \Rightarrow v = u \in U$

$$w = \underbrace{v}_{\in (U^\perp)^\perp} - \underbrace{u}_{\in U \subset (U^\perp)^\perp} \in \underbrace{(U^\perp)^\perp \cap U^\perp}_{=0} \Rightarrow \text{ok !}$$

### V.0.17 Def: orthogonale Projektion

Sei  $U \subset V$  UR

Wir definieren die orthogonale Projektion von  $v$  auf  $U$  als den Vektor  $u \in U$

derart, dass  $v = u + \underbrace{w}_{\in U^\perp}$

**Bem:**

Falls  $u$  existiert  $\Rightarrow$  ist er eindeutig bestimmt.

$$\underbrace{u_2}_{\in U} + \underbrace{w_2}_{\in U^\perp} = v = \underbrace{u_1}_{\in U} + \underbrace{w_1}_{\in U^\perp} \Rightarrow u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in \underbrace{U \cap U^\perp}_{=\{0\}}$$

**Bem:**

Falls  $U \subset V$  endlichdim.  $\Rightarrow$  ist die Projektion auf  $U$  wohldefiniert

$\forall v \in V$  existiert  $Pr|_U(v)$  derart, dass  $v = Pr|_U(v) + \underbrace{w}_{\in U^\perp}$

### V.0.18 Satz: Projektion

Sei  $U \subset V$  Unterraum,  $v \in V$   $u \in U$

sind folgende Aussagen äquivalent

a)  $Pr|_U(v) = u$

b)  $\forall u_1 \in U \setminus \{0\} \quad ||v - u_1|| > ||v - u||$

### V.0.19 Bew:

$a) \Rightarrow b)$  Es kommt.

$b) \Rightarrow a)$   $v = u + (v - u)$

Es genügt zu zeigen, dass  $v - u \in U^\perp$

Sonst,  $\exists u' \in U \mid \lambda = \langle v - u, u' \rangle \neq 0 \Rightarrow u' \neq 0 \Rightarrow$  OBdA  $||u'|| = 1$

Sei  $u + \lambda \cdot u' \in U \setminus \{u\}$

$$\begin{aligned} ||v - u||^2 &< ||\underbrace{v - (u + \lambda u')}_{\parallel}||^2 \\ &= \langle v - u - \lambda u', v - u - \lambda u' \rangle \\ &= ||v - u||^2 - \underbrace{\lambda \langle u', v - u \rangle}_{=\bar{\lambda}} - \underbrace{\bar{\lambda} \langle v - u, u' \rangle}_{=\lambda} + \underbrace{\lambda \bar{\lambda} ||u'||^2}_{=1} \\ &= ||v - u||^2 - \underbrace{\lambda \bar{\lambda}}_{||\lambda||^2} - \lambda \bar{\lambda} + \lambda \bar{\lambda} < ||v - u||^2 \quad \text{Wid !} \end{aligned}$$

# Kapitel VI

## Selbsadjungierte Endomorphismen und Hauptachsentransformationen

**Bem:**

Sei  $(V, \langle, \rangle)$  ein endlichsim. euklidischer Raum  
 $\rightarrow (V, V, \langle, \rangle)$  ein duales Paar.

Sei  $v \in V$   $\langle v, - \rangle : V \rightarrow \mathbb{R}$  ist nichttrivial, falls  $v \neq 0$

$$\langle v, v \rangle = ||v||^2 \neq 0, \text{ falls } v \neq 0$$

Falls  $V$  endlichdim. unitärer Raum ist, dann ist

$$\langle v, - \rangle : V \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{nichttrivial !!}$$

$$\langle v, \lambda w + \mu w' \rangle \neq \lambda \langle v, w \rangle + \mu \langle v, w' \rangle$$

$$\text{aber } = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle + \bar{\mu} \langle v, w' \rangle$$

**Lösung:**

Wir definieren eine neue Struktur auf  $V$  als  $\mathbb{C}$ -VR

$$\lambda *_{\text{konj}} v = \bar{\lambda} \cdot v$$

Somit ist  $(V, V_{\text{konj}}, \langle, \rangle)$  ein Duales Paar weil

$$\langle v, v \rangle = ||v||^2 \neq 0 \text{ für } v \neq 0$$

**Folgerung:**

Sei  $V$  endlichdim. unitärer oder euklidischer Raum. Jeder Endomorphismus

$F : V \rightarrow V$  besitzt einen *adjungierten Endomorphismus*  $F^t : V \rightarrow V$ , sodass  $\forall v, w \in V$

$$\langle v, F(w) \rangle = \langle F^t(v), w \rangle$$

**Alternative Beschreibung:**

Sei  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  eine ONB von  $V$ .

Seien  $v, w \in V \rightarrow w = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$   
 $\parallel$   
 $\langle w, b_i \rangle$

$$\begin{aligned} \langle v, F(w) \rangle &= \langle v, \sum_{i=1}^n \langle w, b_i \rangle b_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{\langle w, b_i \rangle} \langle v, F(b_i) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle v, F(b_i) \rangle \langle b_i, w \rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^n \langle v, F(b_i) \rangle \cdot b_i, w \rangle = \langle F^t(v), w \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F^t(v) = \sum_{i=1}^n \langle v, F(b_i) \rangle b_i$$

## VI.0.1 Def: adjungierte Matrix

Sei  $K = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$

$$a_{ij} = \mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$$

Die adjungierte Matrix  $\mathcal{A}^*$  von  $\mathcal{A}$  ist die Matrix

$$\mathcal{A}^* = (\overline{a_{ji}})$$

**Bem:**

$$\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^t$$

Leicht zu zeigen:

$$(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$$

$$\begin{aligned}
(\lambda \cdot \mathcal{A})^* &= \bar{\lambda} \cdot \mathcal{A}^* \\
(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* &= \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^* \\
(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})^* &= \mathcal{B}^* \cdot \mathcal{A}^*
\end{aligned}$$

## Widerholung:

$(V, \langle \cdot \rangle)$  unitärer/euklidischer Raum

$A \subset V$  Teilmenge

$$A^\perp = \{v \in V \mid \forall w \in A \langle v, w \rangle = 0\}$$

Unterraum

$$U \text{ UR von } V \rightarrow U \cap U^\perp = \{0\}$$

Insbesondere falls  $U$  endlich dim.  $\Rightarrow V = U \oplus U^\perp$

Orthogonale Projektion auf  $U$

$$Pr|_U : V \rightarrow U, v \mapsto u \mid v = u + w \in U^\perp$$

$$\forall u \in U \mid u_1 \neq Pr|_U(v) \Leftrightarrow \|v - u_1\| > \|v - u\|$$

$$F : \underbrace{V}_{\text{endlichdim.}} \rightarrow V \text{ Endomorphismus,}$$

dann existiert.  $F^t : V \rightarrow V$  adjungierter Endomorphismus

$$\langle v, F(w) \rangle = \langle F^t(v), w \rangle \quad \forall v, w \in V$$

## Def: adjungierte Matrix

$K = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$

Die adjungierte Matrix  $A^*$  ist  $A^* = (\overline{a_{ji}})$

$K = \mathbb{R} \rightarrow A^* = A^\top$

$$(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$$

$$(\lambda \cdot A)^* = \bar{\lambda} \cdot A^*$$

## Bem:

Falls  $A$  regulär ist, dann ist  $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$  weil  $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$   $\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$

## VI.0.2 Lemma: adjungierte Abbildung

Sei  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus eines euklidischen bzw. unitären endlichdim. Raumes  $V$  und  $A$  die Darstellungsmatrix von  $F$  bzgl. der orthonormalen Basis  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  und  $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_n\}$

Dann hat  $F^t : V \rightarrow V$  die Darstellungsmatrix  $A^*$  bzgl.  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{B}$ .

## VI.0.3 Bew:

$$F^t(d_i) = \sum_{j=1}^n \langle F^t(d_i), b_j \rangle \cdot b_j$$

$$F^t \rightarrow C = (c \cdot j) \quad F^t(d_j) = \sum c_{ij} b_j \quad \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}$$

$$A = (c_{ij}) \rightarrow F(b_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} d_i \quad \begin{matrix} \parallel \\ \langle F(b_j), d_i \rangle \end{matrix}$$

$$\overline{a_{ij}} = \overline{\langle F(b_j), d_i \rangle} = \langle d_i, F(b_j) \rangle \stackrel{\text{Def. von } F^t}{=} \underline{\langle F^t(d_i), b_j \rangle} = c_{ji}$$

□

## VI.0.4 Def: Normale Homomorphismen

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  endlichdim., euklidisch, unitär

$F : V \rightarrow V$  ist normal, falls

$$F \circ F^t = F^t \circ F$$

## VI.0.5 Prop:

Folgende Aussagen sind Äquivalent:

a)  $F : V^t$  ist normal

b)  $\forall v, w \in V \quad \langle F(v), F(w) \rangle = \langle F^t(v), F^t(w) \rangle$

( $F^\top = F^t$  ab hier ist meist  $F^t$  gemeint nicht  $F^\top$  was ja transformation war)



## VI.0.6 Bew:

$$\boxed{a) \Rightarrow b)}$$

$$\begin{aligned} \langle F(v), F(w) \rangle &\stackrel{\text{Def von } F^\top}{=} \langle F^\top(F(v)), w \rangle \stackrel{\text{Normalitat}}{=} \\ &= \langle F(F^\top(v)), w \rangle \\ &= \overline{\langle w, F(F^\top(v)) \rangle} \\ &\stackrel{\text{Def von } F^\top}{=} \overline{\langle F^\top(w), F^\top(v) \rangle} \\ &= \langle F^\top(v), F^\top(w) \rangle \end{aligned}$$

$$\boxed{b) \Rightarrow a)}$$

Zu Zeigen:  $F \circ F^\top(v) = F^\top \circ F(v) \quad \forall v \in V$

Oder quivalent dazu, dass

$$F \circ F^\top(v) - F^\top \circ F(v) = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \forall w \in V \quad &\langle F \circ F^\top(v) - F^\top \circ F(v), w \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow &\langle F \circ F^\top(v), w \rangle = \langle F^\top \circ F(v), w \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle F^\top \circ F(v), w \rangle &= \langle F(v), F(w) \rangle \\ \parallel &\parallel \\ \langle F \circ F^\top(v), w \rangle &= \langle F^\top(v), F^\top(w) \rangle \\ \parallel &\parallel \\ \overline{\langle w, F \circ F^\top(v) \rangle} &= \overline{\langle F^\top(w), F^\top(v) \rangle} \end{aligned}$$

**Bem:**

$$F : V \rightarrow V$$

mit Darstellungsmatrix  $A$  bzgl. der ONB  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  von  $\underline{V}$

$F^\top : V \rightarrow V$  hat Darstellungsmatrix  $A^*$

$$\begin{aligned} F^\top \circ F &\rightarrow A^* \cdot A \\ \parallel &\parallel \\ F \circ F^\top &\rightarrow A \cdot A^* \end{aligned}$$

### VI.0.7 Def: Normale Matrix

Eine Matrix  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$  ist normal, falls  $A^* \cdot A = A \cdot A^*$

#### Folgerung:

$F$  ist normal gdw.  $F$  eine normale Darstellungsmatrix bzgl JEDER ONB besitzt.

### VI.0.8 Lemma: adjunkte Eigenwerte

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus normal.

$v \in V$  ist ein Eigenvektor von  $F$  bzgl  $\lambda$  gdw  $v$  ein Eigenvektor von  $F^t$  bzgl.  $\bar{\lambda}$

#### VI.0.9 Bew:

der Abstand von  $F(v)$  und  $\lambda \cdot v$

$$\begin{aligned} \|F(v) - \lambda \cdot v\|^2 &= \langle F(v) - \lambda v, F(v) - \lambda v \rangle \\ &= \langle F(v), F(v) \rangle - \bar{\lambda} \langle F(v), v \rangle - \lambda \langle v, F(v) \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle \\ &\quad \parallel \qquad \parallel \qquad \parallel \\ &\quad \langle F^\top(v), F^\top(v) \rangle \quad \langle F^\top(v), v \rangle \quad \langle F^\top(v), v \rangle \\ &= \langle F^\top(v), F^\top(v) \rangle - \bar{\lambda} \overline{\langle F^\top(v), v \rangle} - \langle F^\top(v), \bar{\lambda} \cdot v \rangle + \langle \bar{\lambda} v, \bar{\lambda} v \rangle \\ &= \langle F^\top(v), F^\top(v) \rangle - \bar{\lambda} \langle v, F^\top(v) \rangle - \langle F^\top(v), \bar{\lambda} v \rangle + \langle \bar{\lambda} v, \bar{\lambda} v \rangle \\ &= \langle F^\top(v) - \bar{\lambda} v, F^\top(v) - \bar{\lambda} v \rangle \\ &= \|F^\top(v) - \bar{\lambda} \cdot v\|^2 \end{aligned}$$

### VI.0.10 Satz: zu char. Polynomen und adjunkten

Sei  $F : V \rightarrow V$  derart, dass  $\chi_F(T)$  in Linearfaktoren zerfällt. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- a)  $F$  ist normal
- b) Es existiert eine ONB  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  von  $V$ , welche aus Eigenvektoren von  $F$  besteht.

#### Folgerung:

Jeder normaler Endomorphismus eines unitärem/euklidischen Raumes ist diagonalisierbar

### VI.0.11 Bew: (Satz)

$a) \Rightarrow b)$  Induktion auf  $\dim(V)$

$\dim V = 1$   $\rightarrow F$  besitzt einen Eigenvektor  $v \neq 0$  zum Eigenwert  $\lambda$

$\|v\| \neq 0 \rightarrow \frac{v}{\|v\|}$  ist auch ein Eigenvektor zu  $\lambda$

$\left\{ \frac{v}{\|v\|} \right\}$  ist eine ONB von  $V$ !

$\dim V \geq 2$

$\chi_F(T)$  zerfällt in Linearfaktoren  $(T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$

Sei  $b_i \in V$  Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda_1$ .

$\nVdash$   
0

OBdA  $\|b_i\| = 1$

$$V = \text{span}(b_i) \oplus \begin{matrix} U \\ \parallel \\ \text{span}(b_i)^\perp \end{matrix} \quad \dim U = \underline{n-1}$$

□

**Beh:**

$U$  ist  $F$ -invariant

Beweis: Nächste Woche

$F|_U: U \rightarrow U$  ist ein Endomorphismus

**Beh:**

$U$  ist  $F^\top$ -invariant und:

$$(F|_U)^\top = F^\top|_U$$

### VI.0.12 Bew:

Wenn  $U$   $F^\top$ -invariant ist wie oben:

$$\forall v_1, v_2 \in U \quad \langle u_1, F(u_2) \rangle = \langle F^\top(u_1), u_2 \rangle$$

$$\parallel \qquad \parallel$$

$$F|_U(u_2) \qquad F^\top|_U(u_1)$$

$\Downarrow$

Aus der Eindeutigkeit von adjungierten Endomorphismus folgt

$$F^\top \upharpoonright_U = (F \upharpoonright_U)^\top$$

Insb ist  $F \upharpoonright_U$  normal

$\Downarrow$  Induktion

$\exists \{b_2, \dots, b_n\}$  eine ONB von  $U$  welche aus Eigenvektoren von  $F \upharpoonright_U$  besteht.

$\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  ist eine ONB von Eigenvektoren.

$b) \Rightarrow a)$  Sei  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  eine ONB von Eigenvektoren von  $F$

$$F(b_i) = \lambda_i \cdot b_i$$

Setze  $G : V \rightarrow V$ ,  $b_i \mapsto \overline{\lambda_i} \cdot b_i \rightarrow G$  ist eindeutig bestimmt

$$\begin{aligned} G \circ F(b_i) &= G(\lambda_i b_i) = \lambda_i G(b_i) \\ &= \lambda_i \overline{\lambda_i} b_i = \overline{\lambda_i} (\lambda_i b_i) \\ &= \overline{\lambda_i} (F(b_i)) = F(\overline{\lambda_i} b_i) = F(G(b_i)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G \circ F = F \circ G \text{ auf } V$$

Aber  $G = F^\top$  !! weil  $b_i$  Eigenvektor von  $F^\top$  zum Eigenwert  $\overline{\lambda_i}$  ist.

$\Downarrow$

$$F^\top(b_i) = \overline{\lambda_i} b_i = G(b_i) \Rightarrow G = F^\top$$

### Widerholung:

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus endlichdim. euklidisch, unitär

$\langle F(v), w \rangle = \langle v, F^\top(w) \rangle \exists F^\top : V \rightarrow V$  adjungierter Endomorphismus zu  $F$ , derart:

$\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  ONB von  $V \rightarrow F^\top$  hat Darstellungsmatrix

$A = a_{ij}$  Darstellungsmatrix von  $F$  bzgl.  $\mathcal{B}$        $A^* = (\overline{a_{ji}})$  bzgl.  $\mathcal{B}$

$F$  ist normal, falls

$$F \circ F^\top = F^\top \circ F$$

$$\Leftrightarrow A \cdot A^* = A^* \cdot A$$

$$\Leftrightarrow \langle F(v), F(w) \rangle = \langle F^\top(v), F^\top(w) \rangle$$

$\longrightarrow v \in V \setminus \{0\}$  ist Eigenvektor von  $F$  bzgl.  $\lambda$

$$\Leftrightarrow v \text{ Eigenvektor von } F^\top \text{ bzgl. } \overline{\lambda}$$

## Satz

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus |  $\chi_F(T)$  zerfällt in Linearfaktoren

$F$  ist normal  $\Leftrightarrow$  Es existiert eine ONB von  $V$ , welche aus Eigenvektoren von  $F$  besteht.

ende Wiederholung.

## VI.0.13 Def: Selbsadjungierte

$F : V \rightarrow V$  ist selbsadjungiert, falls  $F = F^\top$  oder äquivalent dazu,

$$\langle v, F(w) \rangle = \langle F(v), w \rangle \quad \forall v, w \in V$$

Eine Matrix  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$  ist **hermitesch**, falls  $A^* = A$

### Wid:

$V$  euklidischer untärer endlichdim. Raum  $F : V \rightarrow V$  selbst adjungiert falls  $F = F^*$

$F$  selbsadj.  $\Leftrightarrow$  Die darstellungsmatrix bzg.  $\begin{pmatrix} \text{einer} \\ \text{jeder} \end{pmatrix}$  ONB hermitesch bzw. symmetrisch ist.

$A$  symmetrisch reelle  $(n \times n)$ -Matrix  $\rightarrow \chi_A$  zerfällt in Linearfaktoren über  $\underline{\mathbb{R}}$   
 $A$  ist dann diagonalisierbar  $\rightarrow$  Hauptachsentransformationssatz.

$V$  euklidischer endlichdim. Raum,  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  symmetrische bilinearform  
 $\rightarrow$  Hauptachsen von  $\varphi$  sind die Elemente einer ONB von  $V$  sodass  $\varphi$  Darstellungsmatrix in Diagonalform besitzt.

## VI.0.14 Kor: Spektralsatz

$F : V \rightarrow V$  selbsadjungiert  $\rightarrow \exists$  ONB von  $V$  welches aus Eigenvektoren von  $F$  besteht.

### VI.0.15 Bew:

$V$  unitär  $\rightarrow$  ok, weil  $\chi_F$  in Linearfaktoren über  $\mathbb{C}$  zerfällt

$V$  euklidisch  $\rightarrow$  Die Darstellungsmatrix von  $F$  ist symmetrisch  $\rightarrow$  diagonalisierbar  $\rightarrow \chi_F$  zerfällt in Linearfaktoren über  $\mathbb{R}$   $\square$

### Bem

Falls  $K = \mathbb{R}$  ist, dann ist hermitesch = symmetrisch

**Bem**

Sei  $\mathcal{B}$  eine ONB von  $V$

$F : V \rightarrow V$  ist selbstadjungiert

$\Leftrightarrow$  Die Darstellungsmatrix von  $F$  bzgl.  $\mathcal{B}$  hermitesch ist.

**Bem:**

Selbstadjungierte Endomorphismen sind normal.

**VI.0.16 Lemma: Eigenwerte und Eigenvektoren**

Falls  $V$  euklidisch, unitär, endlichdim. ist  $F : V \rightarrow V$  selbstadjungiert, dann gilt:

- a) Alle Eigenwerte von  $F$  reell sind
- b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind

**VI.0.17 Bew:**

- a) Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  Eigenwert von  $F$  und besteht  $v \in V \setminus \{0\}$  /  $F(v) = \lambda \cdot v$

$$\begin{array}{ccc} \langle \lambda \cdot v, v \rangle = \langle F(v), v \rangle & \stackrel{F=F^\top}{=} & \langle v, F(v) \rangle = \langle v, \lambda \cdot v \rangle \\ \parallel & & \parallel \\ \lambda \cdot \|v\|^2 \neq 0 & & \bar{\lambda} \cdot \|v\|^2 \end{array} \Rightarrow \langle v, w \rangle = 0$$

- b) Seien  $\underbrace{\lambda \neq \mu}_{\rightarrow \in \mathbb{R}}$  derart, dass  $F(v) = \lambda \cdot v \quad F(w) = \mu \cdot w \quad v, w \in V \setminus \{0\}$

$$\begin{array}{ccc} \langle v, \mu \cdot w \rangle = \langle v, F(w) \rangle & \stackrel{F=F^\top}{=} & \langle F(v), w \rangle = \langle \lambda \cdot v, w \rangle \\ \parallel & & \parallel \\ \mu \langle v, w \rangle \Rightarrow \langle v, w \rangle = 0 & & \lambda \langle v, w \rangle \end{array}$$

□

**VI.0.18 Satz: Hauptachsentransformation**

Sei  $V$  ein euklidischer endlichdim. Raum und  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform. Es existiert eine ONB  $\{b_1, \dots, b_n\}$  von  $V$  derart, dass  $\varphi$  durch eine Diagonalmatrix bzgl.  $\{b_1, \dots, b_n\}$  dargestellt wird.

**Zuerst zwei Hilfslemmata:**

**VI.0.19 Lemma 1:**

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$  hermitesch

$\rightarrow A$  ist Diagonalisierbar und alle Eigenwerte sind reell

**VI.0.20 Bew:**

$A$  hermitesch,  $\chi_A(T)$  zerfällt in Linearfaktoren über  $\mathbb{C} \rightarrow F_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  
 $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$   $F_A$  ist selbstadjungiert und normal  $\Rightarrow$  Alle Eigenwerte sind reell

**VI.0.21 Lemma 2:**

Jede symmetrische  $n \times n$  Matrix über  $\mathbb{R}$  ist diagonalisierbar.

**VI.0.22 Bew:**

Wir betrachten  $A$  als Matrix über  $\mathbb{C}$ .  $A$  ist hermitesch  $\rightarrow A$  über  $\mathbb{C}$  diagonalisierbar. Alle Eigenwerte von  $A$  sind reell  $\Rightarrow A$  ist über  $\mathbb{R}$  diagonalisierbar

**VI.0.23 Bew: Hauptachsentransformationssatz**

Sei  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ONB von  $V$ .

Definiere:

$$F : V \rightarrow V, \quad e_i \mapsto \sum_{j=1}^n \varphi(e_i, e_j) \cdot e_j$$

$$\langle e_i, F(e_i) \rangle = \langle e_i, \sum_{n=1}^n \varphi(e_j, e_n) \cdot e_n \rangle = \sum_{k=1}^n \varphi(e_j, e_n) \langle e_i, e_k \rangle = \varphi(e_j, e_i)$$

$v = \sum \lambda_i e_i \quad w = \sum \mu_j e_j$  beliebig.

Zu Zeigen:  $\langle F(v), w \rangle = \langle v, F(w) \rangle \Rightarrow F$  ist selbstadj.

$$\begin{aligned}
\langle v, F(w) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j F(e_j) \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j \underbrace{\langle e_i, F(e_j) \rangle}_{\varphi(e_i, e_j)} \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(e_i, \underbrace{\sum_{j=1}^n \mu_j e_j}_w) = \varphi(\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i}_v, w) = \varphi(v, w) \\
\langle v, F(w) \rangle &= \varphi(v, w) \\
\parallel &\parallel \\
\langle F^\top(v), w \rangle &= \varphi(w, v) \text{ da } \varphi \text{ symm.} \\
\Downarrow & \\
F = F^\top & \\
\Downarrow & \\
F \text{ ist selbsadjungiert} & \\
\langle F(v), w \rangle &= \langle w, F(v) \rangle
\end{aligned}$$

Die Darstellungsmatrix von  $F$  bzgl.  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ist symmetrisch. Aus dem lemma 2 folgt, dass  $F$  diagonalisierbar ist  $\rightarrow \chi_F$  zerfällt in Linearfaktoren  $\Downarrow F$  selbstadj.

$\exists \{b_1, \dots, b_n\}$  ONB von Eigenvektoren von  $F$

Es genügt zu zeigen, dass die Darstellungsmatrix von  $\varphi$  bzgl.  $\{b_1, \dots, b_n\}$  in Diagonalform ist.

$$\begin{aligned}
\varphi(b_i, b_j) &= \langle b_i, F(b_j) \rangle = \lambda_j \langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} \lambda_i & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
\parallel & \\
\lambda_j b_j &
\end{aligned}$$

□

## VI.0.24 Korollar:

Jede symmetrische  $(n \times n)$  Matrix über  $\mathbb{R}$  ist diagonalisierbar.

Jede hermitesche Matrix über  $\mathbb{C}$  ist diagonalisierbar.

### Zurück zu positiv definite Matrizen

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ symmetrisch} \quad v^\top \cdot A \cdot v \geq 0 \quad = 0 \text{ gdw } v = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a > 0 \quad ac - b^2 > 0$$



### VI.0.25 Satz: Sylvester

Eine symmetrische  $(n \times n)$ -Matrix  $A$  über  $\mathbb{R}$  ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von  $A$  echt positiv sind.

### VI.0.26 Bew:

$\Rightarrow$  Sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standard-Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  und betrachte die von  $A$  definierte Bilinearform  $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (v, w) \mapsto v^\top A w$ . Aus dem Hauptsatz zur orthogonalen Transformation folgt, dass es eine ONB  $\{b_1, \dots, b_n\}$  diagonalisierbar ist.

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \overset{\varphi(b_1, b_1)}{\parallel} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \underset{\parallel}{\varphi(b_n, b_n)} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n$  sind die Eigenwerte von  $A$

Insb. ist  $0 < \varphi(b_i, b_i) = \lambda_i$  weil  $b_i \neq 0$

$\Leftarrow$  Sei  $\{b_1, \dots, b_n\}$  eine ONB, so dass  $A$  bzgl.  $\{b_1, \dots, b_n\}$  in Diagonalform ist:

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$v \rightarrow \sum_{i=1}^n \mu_i b_i$$

$$(\mu_1 \ \dots \ \mu_n) (S^{-1} A S) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i^2 \geq 0 \quad = 0 \Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_n = 0 \Rightarrow v = 0$$

□

### Korollar (Sylvester)

Für eine symm.  $(n \times n)$ -Matrix  $A$  über  $\mathbb{R}$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- $A$  ist positiv definit
- Alle Eigenwerte von  $A$  sind echt positiv
- Alle Hauptminoren

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n$$

### Wiederholung:

$V$  euklidischer unitärer endlichdim. Raum  $F : V \rightarrow V$  selbst adjungiert falls  $F = F^*$

$F$  selbstadj.  $\Leftrightarrow$  Die Darstellungsmatrix bzgl.  $\begin{pmatrix} \text{einer} \\ \text{jeder} \end{pmatrix}$  ONB hermitesch bzw. symmetrisch ist.

$A$  symmetrisch reelle  $(n \times n)$ -Matrix  $\rightarrow \chi_A$  zerfällt in Linearfaktoren über  $\mathbb{R}$   
 $A$  ist dann diagonalisierbar  $\rightarrow$  Hauptachsentransformationssatz.

$V$  euklidischer endlichdim. Raum,  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  symmetrische bilinearform  
 $\rightarrow$  Hauptachsen von  $\varphi$  sind die Elemente einer ONB von  $V$  sodass  $\varphi$  Darstellungsmatrix in Diagonalform besitzt.

### VI.0.27 Kor: Spektralsatz

$F : V \rightarrow V$  selbstadjungiert  $\rightarrow \exists$  ONB von  $V$  welche aus Eigenvektoren von  $F$  besteht.

### VI.0.28 Bew:

$V$  unitär  $\rightarrow$  ok, weil  $\chi_F$  in Linearfaktoren über  $\mathbb{C}$  zerfällt

$V$  euklidisch  $\rightarrow$  Die Darstellungsmatrix von  $F$  ist symmetrisch  $\rightarrow$  diagonalisierbar  $\rightarrow \chi_F$  zerfällt in Linearfaktoren über  $\mathbb{R}$

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  symmetrisch

$$A \text{ positiv definit} \Leftrightarrow v^\top \cdot A \cdot v \geq 0 \quad = 0 \text{ gdw } v = 0$$

$$A \text{ positiv definit} \Leftrightarrow \text{Alle Eigenwerte von } A \text{ sind echt positiv}$$

□

## VI.0.29 Bew: Satz von Sylvester

$\boxed{1 \Leftrightarrow 2}$  ok!

$\boxed{1 \Rightarrow 3}$  Die Bilinearform  $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(v, w) \mapsto v^\top A w$  ist positiv definit

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i}_{\text{Eigenwerte}} > 0$$

$\forall U \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \varphi|_U : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$  auch positiv definit.

Sei  $U = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$

$$\varphi|_U : U \times U \rightarrow \mathbb{R}, (v, w) \mapsto v^\top \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \cdot w$$

$$\Rightarrow \det \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$  Induktion auf n

$\underline{n=1}$ ,  $A = (\lambda) \rightarrow \lambda > 0$

$$\left. \begin{aligned} x^\top \lambda x &= \lambda x^2 \geq 0 \\ &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{matrix} A \text{ ist} \\ \text{positiv} \\ \text{definit} \end{matrix}$$

Für  $A = \text{span}(e_1 \dots e_{n+1})$  Die Darstellungsmatrix von  $\varphi|_U$  hat auch alle Hauptminoren echt positiv  $\Rightarrow \varphi|_U$  positiv definit

Hauptachsen.  $\xrightarrow{\quad}$  Es gibt eine Orthonormalbasis  $\{b_1, \dots, b_n\}$  von  $V$  sodass  $\varphi$  Diagonalform bzgl.  $\{b_1, \dots, b_n\}$  hat

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} \varphi(b_1, b_1) \\ \parallel \\ \lambda_1 \end{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{matrix} \lambda_n \\ \parallel \\ \varphi(b_n, b_n) \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Falls  $\varphi$  nicht positiv definit wäre, gäbe es:  $\begin{matrix} \lambda_i < 0 \\ \parallel \\ \varphi(b_i, b_i) \end{matrix}$

$$\Downarrow \det(A) = \prod \lambda_i > 0$$

$$\begin{array}{ccc} \exists j \neq i & \lambda_i & < 0 \\ & \parallel & \\ & \varphi(b_i, b_i) & \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} b_i = \sum_{k=1}^n \mu_k^i e_k \\ b_j = \sum_{k=1}^n \mu_k^j e_k \end{array} \right\} \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ nicht beide Null,}$$

$$\text{sodass } v = \alpha b_i + \beta b_j \in \text{span}(e_1 \dots e_{n+1})$$

$$\parallel$$

$$U$$

$$\mu'_n = 0 \rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{array}$$

$$0 = \mu_n^j \text{ genau so sonst } \begin{array}{l} \alpha = \mu_n^j \\ \beta = \mu_n^i \end{array}$$

$$b_i \rightarrow (\mu_1^i, \dots, \mu_n^i)$$

$$b_j \rightarrow (\mu_1^j, \dots, \mu_n^j)$$

$$\alpha b_i + \beta b_j \rightarrow (\dots, \alpha \mu_n^i + \beta \mu_n^j)$$

$$\varphi(v, v) = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 0) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\geq 0} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Weil  $\varphi|_U$  positiv aus der Induktion

$$\varphi(v, v) = \varphi(\alpha b_i + \beta b_j, \alpha b_i + \beta b_j) = \underbrace{\alpha^2 \lambda_i + \lambda \beta^2}_{< 0} + 0$$

$\Rightarrow$  Widerspruch !

## VI.1 Orthogonale Abbildungen und Drehungen

### VI.1.1 Def: Orthogonale Abbildung

$V$  euklidischer bzw. unitär.  $F : V \rightarrow V$  ist orthogonal, falls  $\forall v, w \in V :$   
 $\langle v, w \rangle = \langle F(v), F(w) \rangle$

### VI.1.2 Lemma:

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1.)  $F : V \rightarrow V$  orthogonal
- 2.)  $\forall v \in V \quad \|v\| = \|F(v)\|$
- 3.) Für jedes Orthonormalesystem  $\{e_1, \dots, e_k\}$  ist  $\{F(e_1) \dots F(e_k)\}$  auch ein Orthonormalesystem

### VI.1.3 Bew:

$1 \Rightarrow 2$

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle F(v), F(v) \rangle = \|F(v)\|^2$$

$2 \Rightarrow 3$  Es genügt zu zeigen, dass  $F(e_i) \perp F(e_j) \quad \forall i \neq j$

$1^{\text{er}}$  Fall:  $V$  ist euklidisch

$$\langle F(e_i + e_j), F(e_i + e_j) \rangle = \|F(e_i + e_j)\|^2 = \|e_i + e_j\|^2 = \langle e_i + e_j, e_i + e_j \rangle = 2$$

$$\begin{aligned} & \langle F(e_i + e_j), F(e_i + e_j) \rangle \\ &= \langle F(e_i), F(e_i) \rangle + \langle F(e_j), F(e_j) \rangle + \langle F(e_i), F(e_j) \rangle + \langle F(e_j), F(e_i) \rangle \\ & \quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel \\ & \quad \|F(e_i)\|^2 \quad \|F(e_j)\|^2 \quad \langle F(e_i), F(e_j) \rangle \\ & \quad \parallel \quad \parallel \\ & \quad 1 \quad 1 \end{aligned}$$

$$\text{Insb: } 2 \langle F(e_i), F(e_j) \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad F(e_i) \perp F(e_j)$$

$\nparallel$   
0

$2^{\text{er}}$  Fall:

$V$  unitär

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & \parallel \\ & \|e_i + i e_j\|^2 = \|F(e_i + i e_j)\|^2 \\ & \parallel \\ & 2 = \underbrace{\|e_i\|^2}_1 + \underbrace{\|i e_j\|^2}_1 \quad \parallel \quad \langle F(e_i) + i F(e_j), F(e_i) + F(e_j) \rangle \\ & \parallel \\ & \underbrace{\|F(e_i)\|^2}_1 + \underbrace{\|F(e_j)\|^2}_1 + i (\langle F(e_j), F(e_i) \rangle - \langle F(e_i), F(e_j) \rangle) \\ & \parallel \\ & \langle F(e_i), F(e_j) \rangle = \langle F(e_j), F(e_i) \rangle \end{aligned}$$

Wir machen wie im ersten Teil  $\Leftarrow \overline{\langle F(e_i), F(e_j) \rangle} \in \mathbb{R}$

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$   $v, w \in V$

Zu Zeigen:  $\langle v, w \rangle = \langle F(v), F(w) \rangle$

$V = 0 \rightarrow \text{ok!}$

Sonst,  $v \neq 0 \rightarrow 1^{\text{er}}$  Fall  $\{v, w\}$  lin. abh.  $\xrightarrow{v \neq 0} \lambda v \quad \lambda \in \mathbb{K}$

$v \neq 0 \rightarrow \frac{v}{\|v\|}$  orthonormal  $\Rightarrow F(\frac{v}{\|v\|})$  auch

$\|F(\frac{v}{\|v\|})\| = 1 \Rightarrow \|v\| = \|F(v)\|$

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle \\ &= \bar{\lambda} \|v\|^2 = \bar{\lambda} \|F(v)\|^2 \\ &= \bar{\lambda} \langle F(v), F(v) \rangle = \langle F(v), \lambda F(v) \rangle \\ &= \langle F(v), F(w) \rangle \end{aligned}$$

$\boxed{2^{\text{er}} \text{ Fall:}}$   $v, w$  lin. unabh.

$G = S \rightarrow \exists b_1, b_2$  orthonormalsystem  $\text{span}(v, w) = \text{span}(b_1, b_2)$

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

$$w = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2$$

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \lambda_1 \bar{\mu}_1 \|b_1\|^2 + \lambda_2 \bar{\mu}_2 \|b_2\|^2 \\ &\quad \underbrace{\|F(b_1)\|^2 \quad \|F(b_2)\|^2}_{\|F(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2), F(\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2)\rangle} \end{aligned}$$

(letzter schritt weil  $F(b_1) \perp F(b_2)$ )

## VI.1.4 Wiederholung:

Orthogonale Endomorphismen  $F : V \rightarrow V \quad \forall v, w \in V \quad V$  euklidisch oder unitär

$$\langle v, w \rangle = \langle F(v), F(w) \rangle$$

$F$  orthogonal gdw  $\|v\| = \|F(v)\| \quad \forall v \in V$  dann bildet  $F$  Orthonormalsysteme zu Orthonormalsysteme ab

**Frage:**

$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto 2 \cdot x \rightarrow$  Orthogonale Abbildungen (für euklidische Räume) erhalten den Winkel zwischen Vektoren

### VI.1.5 Satz: Orthogonale Abbildungen

Jede orthogonale Abbildung ist injektiv.

### VI.1.6 Bew:

$$F : V \rightarrow V \quad v \in \ker(F)$$

$$0 = F(v) \rightarrow 0 = \|F(v)\| = \|v\| \rightarrow v = 0$$

### VI.1.7 Satz: Bijektive Orthogonale Abbildung

Sei  $V$  endlichdim. euklidischer oder unitärer Raum und  $F : V \rightarrow V$  eine Bijektive lineare Abbildung.

Folgende Aussagen sind dann äquivalent:

- 1)  $F$  ist orthogonal
- 2) Der adjunkte Endomorphismus  $F^\top$  von  $F$  ist  $F^{-1}$

### VI.1.8 Bew:

$$\boxed{1 \Rightarrow 2}$$

$\forall v, w \in V :$

$$\begin{aligned} \langle \underbrace{w}_{\parallel F(F^{-1}(w))}, F(v) \rangle &= \langle F^\top(w), v \rangle \\ &\stackrel{\parallel}{=} \langle F(F^{-1}(w)), F(v) \rangle \end{aligned}$$

$\leftarrow F$  orthogonal

$$\langle F^{-1}(w), v \rangle \stackrel{\text{Eindeutigkeit}}{\underset{\text{von } F^\top}{\Rightarrow}} F^{-1} = F^\top$$

$$\boxed{2 \Rightarrow 1}$$

$F$  orthogonal

$$\langle F(v), F(w) \rangle \stackrel{\text{Definition } F^\top}{=} \langle F^\top(F(v)), w \rangle \stackrel{F^\top = F^{-1}}{=} \langle F^{-1}(F(v)), w \rangle = \langle v, w \rangle$$

### VI.1.9 Kor: $F$ Bijektiv $\Rightarrow F^{-1} = F^\top$

$F : V \rightarrow V$  endlichdim. euklidisch oder unitäre orthogonale Abbildung  
 $\Rightarrow F$  ist bijektiv und normal, mit  $F^{-1} = F^\top$

### VI.1.10 Bew:

$F$  orthogonal  $\Rightarrow F$  injektiv  $\xrightarrow{\dim(V) < \infty}$   $F$  bijektiv ist  $\Rightarrow F^\top = F^{-1}$

$$F \circ F^\top = F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = F^\top \circ F \Rightarrow \text{normal}$$

### VI.1.11 Satz: Orthogonale Abbildung

Sei  $V$  endlichdim, euklidisch oder unitär  $F : V \rightarrow V$  orthogonale Abbildung.  
Dann haben alle Eigenwerte von  $F$  Absolutbetrag 1. Form ist  $\det(F) = 1$

### VI.1.12 Bew:

Beachte, dass 0 kein Eigenwert von  $D$  ist. (weil  $F$  injektiv ist !)

Sei  $\lambda \in K$  ein Eigenwert von  $F$  und  $v \in V \setminus \{0\}$  ein Eigenwert zu  $\lambda$

$$\begin{aligned} \|F(v)\| &= \|v\| \neq 0 \\ \| &\rightarrow |\lambda| = 1 \\ \|\lambda v\| &= |\lambda| \|v\| \end{aligned}$$

Sei  $A$  die Darstellungsmatrix von  $F$  bzgl. der ONB

$$\begin{aligned} |\det(F)| &= |\det(A)| = |\overline{\det(A)}| = |\det(\overline{A})| = |\det(\overline{A}^\top)| \\ &= |\det(\underbrace{\overline{A}^\top}_{A^*})| \stackrel{F \text{ orthogonal}}{=} |\det(F^\top)| = |\det(F^{-1})| = |\det(F)|^{-1} \end{aligned}$$

$$F \circ F^{-1} = Id_V$$

$$|\det(F)|^2 = 1 \Rightarrow |\det(F)| = 1$$

### Bem:

Sei  $B$  eine ONB von  $V$

$A$  die Darstellungsmatrix von  $F$  bzgl.  $B$

$A^*$  die Darstellungsmatrix von  $F^\top$  bzgl.  $B$

$A^{-1}$  die Darstellungsmatrix von  $F^{-1}$  bzgl.  $B$

$$F^{-1} = F^\top \Leftrightarrow A^{-1} = A^*$$

### VI.1.13 Def: Orthogonalität von $A$

Sei  $A \in \mathcal{M}_{(n \times n)}(K)$   $K = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  regulär

$A$  ist Orthogonal, falls  $A^{-1} = A^*$



**Bem:**

$F$  ist orthogonal  $\Leftrightarrow$  Die Darstellungsmatrix von  $F$  bzgl.  $\begin{pmatrix} \text{einer} \\ \text{jeder} \end{pmatrix}$  ONB orthogonal

### VI.1.14 Kor: Zeilen-/Spalten-orthonormalbasis

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$  regulär ist orthogonal  $\Leftrightarrow$  die Zeilenvektoren (bzw die Spaltenvektoren) ein Orthonormalsystem in  $K^n$  bilden (und somit eine ONB)

### VI.1.15 Bew:

$$A \text{ orthogonal} \Leftrightarrow A^{-1} = A^* \Leftrightarrow A \cdot A^* = E_n = A \cdot A^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot \overline{a_{jk}}}_{\substack{\parallel \\ \langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle \in K^n}} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\langle \underbrace{\vec{a}_i}_{\text{i-te Zeile}}, \underbrace{\vec{a}_j}_{\text{j-te Zeile}} \rangle \in K^n \text{ mit dem Standardprodukt}$$

### VI.1.16 Kor: zu Satz VI.1.11

Sei  $F : V \rightarrow V$  normale Abbildung eines endlichdimensionalen unitären Raumes  $V$  derart, dass alle Eigenwerte von  $F$  Absolutbetrag 1 haben. Dann ist  $F$  orthogonal.

### VI.1.17 Bew:

$\chi_F(T) \in \mathbb{C}[T]$  zerfällt in Linearfaktoren

$\Downarrow F$  normal

Es existiert eine ONB  $\{b_1, \dots, b_n\}$  von Eigenvektoren von  $F$   $F(b_i) = \lambda_i \cdot b_i$

$F$  hat Darstellungsmatrix:  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$  bzgl  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$

$$\Rightarrow 0 \neq |\det(F)| = \left| \prod \lambda_i \right| = \prod |\lambda_i| = 1$$

F hat Darstellungsmatrix:  $\begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$  bzgl  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$

$$\lambda_i \cdot \overline{\lambda_i} = |\lambda_i|^2 = 1 \Rightarrow \overline{\lambda_i} = \lambda_i^{-1}$$

$F^\top (= F^{-1})$  hat Darstellungsmatrix:  $\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$  bzgl  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$

$$\Rightarrow F^{-1} = F^\top \rightarrow F \text{ ist orthogonal}$$

### VI.1.18 Def: Orthogonal diagonalisierbar

Eine Matrix  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$  ist orthogonal diagonalisierbar, falls es eine orthogonale (reguläre) Matrix  $S$  gibt, sodass  $S^{-1}AS (= S^*AS)$  in Diagonalform ist.

### VI.1.19 Prop: Orthogonal diagonalisierbar

Jede normale Matrix  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$  deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, ist orthogonal diagonalisierbar.

### VI.1.20 Bew:

Sei  $F_A : K^n \rightarrow K^n$  die zugehörige lineare Abbildung  $\Rightarrow F_A$  ist normal  $\Rightarrow \chi_A(T)$  zerfällt in Linearfaktoren.

Es gibt eine ONB  $\{b_1, \dots, b_n\}$  von Eigenvektoren von  $F$  (d.h. von  $A$ )

Sei  $S = (b_1 | \dots | b_n)$   $b_i$  als Spaltenvektoren

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ in Diagonalform}$$

Es genügt zu zeigen, dass  $S$  eine orthogonale Matrix ist.

Aber die Spaltenvektoren von  $S$  bilden ein orthonormales System.

$$\Rightarrow S \text{ ist orthogonal}$$

### VI.1.21 Kor: Symmetrie und diagonalisierbarkeit

Jede symmetrische  $n \times n$  Matrix über  $\mathbb{R}$  bzw. jede hermitesche Matrix über  $\mathbb{C}$  ist orthogonal diagonalisierbar.

### VI.1.22 Bew:

A ist normal,  $\chi_A(T)$  zerfällt in Linearfaktoren.

### VI.1.23 Def: Drehung

Sei  $V$  ein endlichdim euklidischer Raum.

$F : V \rightarrow V$  orthogonale Abbildung ist eine Drehung, falls  $\det(F) = 1$ .

**Bem:**

Die Kollektion aller Drehungen bilden eine Gruppe.

### VI.1.24 Satz: Drehung

Sei  $\mathbb{R}^2$  mit dem Standard-Skalarprodukt als euklidischer Raum.

$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist eine Drehung, gdw  $F$  Darstellungsmatrix bzgl  $\{e_1, e_2\}$  der Form:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

hat, für ein  $\alpha \in [0, 2\pi]$ . Wobei  $\alpha$  der Winkel der Drehung ist. Bsp:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} : \quad \curvearrowleft = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\rightarrow)} \curvearrowleft \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\uparrow)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\uparrow)} \curvearrowleft \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\leftarrow)} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### VI.1.25 Wid:

$V$  euklidischer Raum

$$\text{Dreh}(V) = \{F : V \rightarrow V \text{ Drehung}\}$$

Drehung  $\leftrightarrow$  orthogonale Abbildung mit  $\det(F) = 1$   
eins Gruppe

### VI.1.26 Bew: Satz

$\boxed{\Leftarrow}$

$$\det \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = 1$$

$\Rightarrow$  Sei  $\{e_1, e_2\}$  die kanonische Basis  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$  und die Darstellungsmatrix von  $F$ :

$$A = \begin{pmatrix} \langle F(e_1), e_1 \rangle & \langle F(e_2), e_1 \rangle \\ \langle F(e_1), e_2 \rangle & \langle F(e_2), e_2 \rangle \end{pmatrix}$$

Die Spaltenvektoren bilden ein orthonormales System.

$$\|F(e_1)\|^2 = 1$$

$$\langle F(e_1), e_1 \rangle^2 + \langle F(e_1), e_2 \rangle^2$$

$$\Rightarrow \exists \alpha \in [0, 2\pi] \quad \cos \alpha = \langle F(e_1), e_1 \rangle \quad \sin \alpha = \langle F(e_1), e_2 \rangle$$

$$\left. \begin{array}{l} \det(A) = 1 \\ 0 = \langle F(e_1), e_2 \rangle \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} 1 = \cos \alpha \langle F(e_2), e_2 \rangle - \sin \alpha \langle F(e_2), e_1 \rangle \\ 0 = \cos \alpha \langle F(e_2), e_1 \rangle + \sin \alpha \langle F(e_2), e_2 \rangle \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle F(e_2), e_1 \rangle \\ \langle F(e_2), e_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \langle F(e_2), e_1 \rangle \\ \langle F(e_2), e_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

□

## VI.1.27 Satz: Drehung

$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist genau dann eine Drehung, wenn  $F$  Darstellungsmatrix bzgl. einer geeigneten ONB  $\{b_1, b_2, b_3\}$  der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{hat.} \quad \alpha \in [0, 2\pi]$$

## VI.1.28 Bew:

$\Leftarrow$  ✓

$\Rightarrow$  Sei  $A$  die Darstellungsmatrix von  $F$  bzgl. der kanonischen Basis  $\{a_1, a_2, a_3\}$

$\Rightarrow A$  ist orthogonal

$\Rightarrow$  Als Matrix über  $\mathbb{C}$  haben alle Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  von  $A$  Absolutbetrag 1.

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$$

$\chi_F(T) = \chi_A(T)$  ist ein normiertes Polynom Grades 3 über  $\underline{\mathbb{R}}$   
 $\rightarrow$  Es muss eine Nullstelle in  $\mathbb{R}$  haben  $\rightarrow$  OBdA  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$

$$|\lambda_1| = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \pm 1$$

$$1 = \det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

**1er Fall:**  $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \rightarrow$  Für ein  $i$  muss  $\lambda_i = 1 \Rightarrow$  OBdA  $\lambda_1 = 1$

**2er Fall:** Sonst.  $\lambda_2 \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$

$$\chi_F(T) = (T - \lambda_1)(T - \lambda_2)(T - \lambda_3)$$

hat Koeffizienten in  $\mathbb{R}$

Insb.  $\overline{\lambda_2} = \begin{cases} \cancel{\lambda_1} \\ \lambda_3 \end{cases}$  nicht  $\lambda_1$  da es Reell ist.

$$|\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$$

$$\lambda_2 = e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad \lambda_3 = \overline{\lambda_2} = \cos \alpha - i \sin \alpha = e^{-i\alpha} = \frac{1}{\lambda_2}$$

$$\det(F) = 1 = \lambda_1 \cdot \underbrace{\lambda_2 \cdot (\lambda_2)^{-1}}_{=1}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1$$

Sei  $b_1 \in \mathbb{R}^3$  ein Eigenvektor zum Wert  $\underline{\lambda_1 = 1}$

Sei  $U = \text{span}(b_1)^\perp \rightarrow \dim(U) = 2$

**Frage:**  $F(U) \perp \text{span}(b_1)$  ?

$$\Leftrightarrow F(U) \subset U?$$

$$u \in U \quad \langle F(u), \underbrace{b_1}_{F(b_1)} \rangle \stackrel{\parallel}{=} 0 \Rightarrow F(u) \in U$$

gleich da  $F$  orthogonal

$$\langle u, b_1 \rangle = 0$$

Aus dem Gram-Schmidt'schen Verfahren wähle eine ONB  $\{b_2, b_3\}$  von  $U$ .  
 (aus dem Eulersatz)  $\Rightarrow \{b_1, b_2, b_3\}$  ist eine ONB von  $\mathbb{R}^3$ .

$F|_U$  hat auch eine Drehung !  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$

$\rightarrow F$  hat Darstellungsmatrix bzgl.  $\{b_1, b_2, b_3\}$  ist  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \square$

## VI.2 Multilineare Algebra

Sei  $K$  ein beliebiger Körper

### VI.2.1 Def:

Das Tensorprodukt von zwei K-VR  $U$  und  $V$  ist ein K-VR  $T$  zusammen mit einer (universellen) bilinearen Abbildung:  $\otimes : U \times V \rightarrow T$  derart, dass jede bilineare Abbildung  $g : U \times V \rightarrow W$  sich schreiben lässt als eine Komposition.

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{\otimes} & T \\ \downarrow f \circ \otimes = g & \blacksquare & \swarrow \exists! f \\ W & & \end{array}$$

für eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung  $f : T \rightarrow W$ . Formel ist  $(T; \otimes)$  bis auf Isomorphi eindeutig bestimmt.

### VI.2.2 Satz:

Je zwei K-VR  $U$  und  $V$  besitzen ein Tensor-Produkt  $(T; \otimes)$ , dass bis auf Isomorphi eindeutig bestimmt ist. Schreibe  $U \otimes V$ .

### VI.2.3 Bew:

Seien  $\{a_i\}_{i \in I}$  Basis von  $U$ .  $\{b_j\}_{j \in J}$  Basis von  $V$ .  
Wähle Elemente  $(c_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  K-linear unabh.

Setze

$$\begin{aligned} T &= \text{span}(\{c_{i,j}\}_{(i,j) \in I \times J}) \\ &= \left\{ \sum_{\text{endliche}} \lambda_{i',j'} c_{i',j'} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \otimes : U \times V &\rightarrow T \\ (a_i, b_j) &\mapsto c_{i,j} \end{aligned}$$

Erweitern wegen Bilinearität:

$$\otimes \left( \sum \lambda_i a_i, \sum \mu_j b_j \right) = \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j c_{i,j}$$

Sei nun  $g : U \times V \rightarrow W$ ,  $(a_i, b_j) \mapsto g(a_i, b_j)$  bilinear

$$f : T \rightarrow W$$

$$c_{i,j} \mapsto g(a_i, b_j)$$

erweitere f aus linearität  $\rightarrow$  f ist eindeutig bestimmt

$$f \circ \otimes(a_i, b_j) = g(a_i, b_j)$$

$$\rightarrow f \circ \otimes = g$$

$$a_i \otimes b_j := c_{i,j}$$

$$\otimes(a_i, b_j)$$

□

#### VI.2.4 Bew:

Sei  $\{a_i\}_{i \in I}$  Basis von U,  $\{b_j\}_{j \in J}$  Basis von V

$$\forall i \in I, j \in J \rightarrow T_{ij}$$

$$T = \left\{ \sum_{\substack{\text{endliche} \\ \in K}} \lambda_j T_{ij} \right\}$$

$$\otimes : U \times V \rightarrow T \rightarrow \text{Erweitere sie um Bilinearität}$$

$$(a_i, b_j) \rightarrow T_{ij}$$

$$F(T_{ij}) = g(a_i, b_j) \text{ ist eindeutig bestimmt!}$$

#### Eindeutigkeit:

Sei  $T'$  auch ein Tensorprodukt von U,V  $\otimes' : U \times V \rightarrow T'$

#### VI.2.5 Kor:

Für jede Basis  $\{a_i\}_{i \in I}$  von U und jede Basis  $\{b_j\}_{j \in J}$  von V ist:  $\{a_i \otimes b_j\}_{(i,j) \in I \otimes J}$  eine Basis von  $U \otimes V$ .

Isbesondere falls  $\dim U, \dim V = \infty$  ist  $\dim(U \otimes V) = \dim U \cdot \dim V$

#### VI.2.6 Kor:

Jedes Element  $w$  von  $U \otimes V$  lässt sich schreiben als  $\sum_{k=1}^n a_{i_k} \otimes v_k$  für  $v_k \in V$  eindeutig bestimmt.

### VI.2.7 Bew:

$$w \in U \otimes V$$

$$\{a_i \otimes b_j\} \quad \text{Basis}$$

$$\parallel$$

$$\otimes(a_i, b_j)$$

$$w = \sum \lambda_{ij} a_i \otimes b_j$$

$$= \sum a_i \otimes \lambda_{ij} b_j$$

$$= \sum_i \sum_j a_i \otimes \lambda_{ij} b_j$$

$$= \sum_i a_i \otimes \underbrace{\sum_j \lambda_{ij} b_j}_{v_i \in V}$$

**Frage:** Warum sind die  $v'_i$  s eindeutig bestimmt?

$$w = \sum a_i \otimes v'_i \longrightarrow v'_i = \sum \mu_{ij} b_j$$

$$w = \sum a_i \otimes \left( \sum \mu_{ij} b_j \right) = \sum_i \sum_j \mu_{ij} a_i \otimes b_j$$

$$\Rightarrow \lambda_{ij} = \mu_{ij} \Rightarrow v_i = v'_i$$

$\{a_i \otimes b_j\}$  eine Basis von  $U \otimes V$

□

**Achtung!**

Nicht jedes Element von  $U \otimes V$  lässt sich als ein rein Tensor  $u \otimes v$  schreiben!

### VI.2.8 Bew:

$U = V = \mathbb{R}^2$  mit der Standardbasis  $\{e_1, e_2\}$

□

### VI.2.9 Beh:

$$w = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$$

angenommen:

$$w = u \otimes v \quad u, v \in \mathbb{R}^2$$

$$u = (\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2) \quad v = (\mu_1 e_1, \mu_2 e_2)$$

$$u \otimes v = \lambda_1 \mu_1 e_1 \otimes e_1 + \lambda_1 \mu_2 e_1 \otimes e_2 + \lambda_2 \mu_1 e_2 \otimes e_1 + \lambda_2 \mu_2 e_2 \otimes e_2$$



$$\begin{array}{ccc}
\left. \begin{array}{l} \lambda_1 \mu_1 = 0 \\ \lambda_2 \mu_2 = 0 \\ \lambda_1 \mu_2 = 1 \\ \lambda_2 \mu_1 = 1 \end{array} \right\} & \begin{array}{l} \rightarrow \mu_1 = 0 \\ \uparrow \\ \rightarrow \lambda_1 \neq 0 \end{array} & \begin{array}{l} \rightarrow \mu_2 = 0 \\ \uparrow \\ \rightarrow \lambda_2 \neq 0 \end{array} \\
\rightarrow v = 0 \Rightarrow u \otimes v = 0 \neq e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1
\end{array}$$

### VI.2.10 Lemma:

V K-VR

$$K \otimes V \simeq V$$

### VI.2.11 Bew:

Wir wollen zuerst eine Abbildung von  $K \otimes V \rightarrow V$  konstruieren

$$\begin{array}{lcl}
G : V \rightarrow K \otimes V & \text{ist linear} \\
v \mapsto 1 \otimes v
\end{array}$$

$G$  ist surjektiv

$$\begin{array}{c}
\lambda \cdot (1 \otimes v) \\
\parallel \\
1 \otimes \lambda \cdot v \\
\parallel \\
G(\lambda v)
\end{array}$$

Weil 1 eine Basis von K über K ist!

Zu zeigen:  $F : K \otimes V \rightarrow V$  Isomorphismus

$$\begin{aligned}
G \circ F(\lambda \otimes v) &= G(\lambda v) \\
&= 1 \otimes \lambda \cdot v \\
&= \lambda(1 \otimes v) \\
&= \lambda \otimes v
\end{aligned}$$

$$F \circ G(v) = F(1 \otimes v) = 1 \cdot v = v$$

F und G sind Inverse voneinander

□

### VI.2.12 Lemma:

a)  $F : U \rightarrow U'$   $G : V \rightarrow V'$  lineare Abbildungen  
 $\Rightarrow \exists F \otimes G : U \otimes V \rightarrow U' \otimes V'$   $u \otimes v \mapsto F(u) \otimes G(v)$  lineare Abbildung

b)  $Id_{I_u} \otimes Id_{I_v} = Id_{u \otimes v}$

c)  $(F_1 + F_2) \otimes G = F_1 \otimes G + F_2 \otimes G$

d)  $(\lambda F) \otimes G = \lambda(F \otimes G)$

e)  $(F_2 \circ F_1) \otimes (G_2 \circ G_1) = (F_2 \otimes G_2) \circ (F_1 \otimes G_1)$

### VI.2.13 Bew:

a) Sei

$$U \times V \rightarrow U' \otimes V' \quad (u, v) \mapsto F(u) \otimes G(v) \quad \text{bilinear}$$

b) trivial

c) einfach:

d) einfach:

$$\begin{aligned} (F_1 + F_2) \otimes G(u \otimes v) &= (F_1 + F_2)(u) \otimes G(v) \\ &= (F_1(u) + F_2(u)) \otimes G(v) \\ &= F_1(u) \otimes G(v) + F_2(u) \otimes G(v) \\ &\quad \parallel \quad \parallel \\ &\quad (F_1 \otimes G)(u \otimes v) \quad (F_2 \otimes G)(u \otimes v) \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} &(F_2 \circ F_1) \otimes G_2 \circ G_1(v) \\ &= F_2 \circ F_1(u) \otimes G_2 \circ G_1(v) \\ &= F_2(F_1(u)) \otimes G_2(G_1(v)) \\ &= F_2 \otimes G_2(F_1(u) \otimes G_1(v)) \quad \text{ok !} \\ &\quad \parallel \\ &\quad (F_1 \otimes G_1)(u \otimes v) \end{aligned}$$

□