Experimentalphysik II

Vorlesung von Prof.Dr. Schumacher im Sommersemester 2018

Markus Österle
Andréz Gockel

16.04.2018

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Elektrostatik

I.1 Elektrische Ladung

Exp: Auf Thales Spuren

(PVC Rohr mit Filz gerieben, Lametta zum schweben gebracht)

I.1.1 Reibungselektrizität

- Reibung von Kunststoff und Filz ⇒ Aufladung des Stabes
- Berührung Lametta mit Stab ⇒ Abstoßung

Anziehende/Abstoßende Kräfte: Elektrizität

Exp:

i) 2 Kunststoffstäbe ⇒ Abstoßung, gleiche Ladung

ii) Kunststoff-, Glasstab ⇒ Anziehung, ungleiche (entgegengesetzte) Ladung

⇒ Es gibt zwei Arten von Ladungen

⇒ Aufladung ist Materialabhängig. „Reihenfolge“: Triboelektrische Reihe [1]

Zwei Materialien A und B und $W_A < W_B$
Energiefreisetzung wenn Elektron e^- von A nach B wandert
⇒ A positiv (Elektronenmangel), B negativ (Elektronenüberschuss)
Ladungen „wandern“, werden aber nicht erzeugt oder vernichtet.

I.1.2 Die elektrische Ladung

Elektrische Ladung Q quantifiziert Elektrizität. Q bezeichnet die Menge Elektrizität die ein Körper trägt.
Neues Phänomen ⇒ nicht Rückführbar auf „m,kg,s“
$[Q] = C$ Coulomb (C.A. de Coulomb)

[1] (Erklärung in Festkörperphysik: Austrittsarbeit W_{Aus} ist die Arbeit um ein Elektron aus einer Oberfläche zu entfernen bzw. die freigesetzte Energie wenn es von einer Oberfläche absorbiert wird)

keine basiseinheit Def. mittels Stromstärke
$[A] = A$ Ampere
$1C =$ Ladung die von einem Strom mit Stärke $I = 1A$ in der Zeit $\Delta t = 1s$
$1C$ ist eine relativ große Ladung:
Vergleich:

- $Q_{\text{Elektron}} = -1,602 \cdot 10^{-19}C$
- $Q_{\text{Reibungselektrizität}} = \mu Q = 10^{-6}C$

Elektrometer: Messung von Ladung ohne Vorzeichen. Beobachtung: 2 Ladungsvorzeichen, Ladungen sind Additiv

> Erhaltungssatz der Ladungen: In einem geschlossenen System ist die Summe der Ladungen konstant.

Erinnerung: geschlossenes System $\widehat{=}$ kein Austausch von Materie mit Umgebung (Ladung gekoppelt an Materie)

Noether - Theorem
Erhaltungssatz $\Leftrightarrow$ Symmetrie des Systems/ Gesetzes. hier: Eichsymmetrie $U(1)_Q \Leftrightarrow$ Ladungserhaltung (später fortgeschrittene Quantenmechanik, Teilchenphysik)

I.1.3 Die Elementarladung

Faraday Elektrolyseexperimente
Bei der Umsetzung von einem Mol eines Elements wird eine feste Ladung umgesetzt.
1 wertig: 96486 C/mol (Faraday Konstante)
Also bei der Reaktion eines Moleküls wird $Q = 1,6 \cdot 10^{-19}$C (Annahme Avogardozahl bekannt, erste Bestimmung 1865 Loschschmidt)
Frage: Mittelwert über viele Reaktionen oder fester Wert für jede Reaktion.

Exp: $\rightarrow$ 1913 Millikan - Experiment

Kräfte:
Gewichtskraft:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g} = (\frac{4}{3}\pi r^3_{\text{tröpf}})\rho_{\text{Öl}}\vec{g} \downarrow$$

Elektrische Kraft:

$$\vec{F_{el}} = Q_{\text{tröpf}}\vec{E} \downarrow\uparrow$$

Auftrieb:

$$\vec{F_A} = -\frac{4}{3}\pi T^3_{\text{tröpf}}\rho_{\text{Luft}}\vec{g} \uparrow$$

Reibungskraft:

$$\vec{F_R} = -G\pi\eta_{\text{Luft}}\vec{v}_{\text{tröpf}} \uparrow\downarrow$$

Laminare Strömung
Da $r_{\text{tröpf}} \sim \lambda_{\text{frei}}$
$\rightarrow$ Conningham - Korrektur

$$F_R = 1 + \frac{\lambda_{\text{frei}}}{r_{\text{tropf}}}\left(A_1 + A_2 e^{-A_3}\frac{r_{\text{tropf}}}{\lambda_{\text{frei}}}\right)$$

Luft: $A_1 = 1,257 A_2 = 0,4 A_3 = 1,1$

- Suche Tröpfchen
- Beobachtete Bewegung bei 2. Spannung
- Bestimme Sink- bzw. Steiggeschwingigkeit
- $\rightarrow r_{\text{tröpf}}$ und $Q_{\text{tröpf}}$

a) Suchmethode
   - sinken bei $0V = U$
   - Erhöhung von U bis Schwebung der Tropfen $\vec{v}_{\text{tropf}} = \vec{0}$

b) Steig-/Sink Methode
   - zwei Spannungen $U_c(> 0)$ Messe $\vec{r}_{\text{tropf}}$

Mathode a) (ohne Conningham Korrektur)

$$U = 0V \quad |\vec{F}_G| = |\vec{F}_A| + |\vec{F}_R|$$

(Stationärer Zustand ($\vec{a} = \text{const}$))

$$\frac{4}{3}\pi\rho_{\text{Oel}} r^3_{\text{tropf}} g = \frac{4}{3}\pi\rho_{Luft} r^3_{\text{tropf}} g + 6\pi\eta_{\text{Luft}} + r|\vec{v}|$$

$$\Rightarrow r_{\text{tropf}} = \sqrt{\frac{9}{2g}\frac{\eta_{\text{Luft}} + |\vec{r}|}{\rho_{\text{Oel}} - \rho_{\text{Luft}}}}$$

Bei Schwebung:

$$U = 0V \quad |\vec{F}_G| = |\vec{F}_A| + |\vec{F}_{el}|$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{Oel}} g = \frac{4}{3}\pi r^3_\pi \rho_{\text{Luft}} + Q_{\text{tropf}}\frac{U}{d}$$

d = Abstand Kondensatorplatten

$$Q\pi = \frac{4}{3}\pi g\left(\rho_{\text{Oel}} - \rho_{\text{Luft}}\frac{d}{U}\right)$$

viele Tröpfchen $\rightarrow$ Statistische Auswertung
Ergebnis von Millikan
Elektrische Ladung ist gequantelt $\pm e; \pm 2e; \ldots$

$$e = 1.6021766208(88) \cdot 10^{-19} C$$

Erstmals gequantelte Größe
Drittelzahlige Ladungen der Quarks
Quarks sind Konstituenten von Protonen und Neutronen
Proton p $\hat{=}$ (uud) Neutron n $\hat{=}$ (udd)

$$Q_u = +\frac{2}{3}, Q_d = -\frac{1}{3} \Rightarrow Q_p = 1 Q_n = 0$$

$$Q_p + Q_e < 10{-}21e$$

aus Stabilität der Materie
Historisch:
$Q = 4,774 + -0,009 \cdot 10^{-10}$esu (Electrostatic unit)
1 esu$= 3,34 \cdot 10^{-10} C$
Millikans wert für Elementarladung:

$$\text{esu} \Rightarrow \text{SI} : e = 1,592 + -0,003 \cdot 10^{-19} C$$

„5σ" - Effekt → Fehler unterschätzt.

I.2 Kraft und Feld

I.2.1 Coulomb - Gesetz

Elektrische Kraft zwischen zwei Körpern (punktförmig) mit Ladungen Q_1 und Q_2 im Abstand r

$$\vec{F}_{el} = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad \hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$$

Kraft auf Q_2 von Q_1

Exp: Coulomb - Waage

$k = 8,99 \cdot 10^9 \frac{\text{N m}^2}{C^2}$
für $Q_1 = Q_2 = 1$ C, $r = 1$ m $\Rightarrow |\vec{F}_{el}|$ $8,99 \cdot 10^9$ N Im SI-System: $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$
ϵ_0Dielektrizitätskonstante: $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{\text{Nm}^2}$
(cgs-System k = 1 ⇒ Umdefinition der Ladung)

$$\vec{F}_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\hat{r}_{12}$$

Coulomb - Gesetz
Motivation der Abhängigkeit:

- $\sim Q_2$ Additivität der Ladungen
- $\sim Q_1$ „actio = reactio"
- $\sim \frac{1}{r^2}$ dreidimensionaler (für 4 Raumdimensionen wäre es $\sim \frac{1}{r^3}$)

I.2.2 Influez

Beobachtung: Ausschlag des Elektrometers ohne Berührung. Anhängig von der nähe des Stabes.
Erklärung: Kraft von e^- auf dem Stab verdrängen die e^- aus der Kugel in die Zeiger.
$\Rightarrow$ Kugel positiv geladen, Zeiger negativ geladen

Influenz: Trennung von Ladungen in einem neutralen Körper.

In Metallen und Leitern sind die Elektronen (zu einem bestimmten vom Material abhängigen Grad) frei beweglich.
$Q_1 = Q_2$ da neutral

$$|\vec{F_1}| = k\frac{Q_1 Q}{r_1^2} \quad |\vec{F_2}| = k\frac{Q_2 Q}{r_2^2} \quad \text{da } r_1 < r_2 \quad |\vec{F_1}| > |\vec{F_2}|$$

Leiter angezogen

Nichtleiter:
Ladungen/Elektronen nicht Frei beweglich Verschiebung bei Polaren Molekülen. Wasser H_2O $\alpha = 105$ e^- vom H zum O verschoben $\rightarrow$ Dipol

I.2.3 Das Elektrische Feld

Bisher: Kraft zwischen zwei Ladungen q und $Q \rightarrow \vec{F}$
Frage : woher kennt q die Existenz von Q ?
$\rightarrow$ abstraktes Konzept: elektrisches Feld $\vec{E}$

- um jede Ladung Q bildet sich ein Feld $\vec{E}$
- Probeladung q spürt eine Kraft $\vec{F} = q\vec{E}$

Quantenelktrodynamik (QED):

- Anregung des Feldes = Photonen γ
- Kraft/Wechselwirkung = Austausch von γ

Pragmatisch: gegben: beliebige Ladungsverteilung wie sieht die Kraft auf eine pkt.förmige q ? (q klein $\rightarrow$ keine Verzerrung von $\vec{E}$)

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{\text{Probe}}} \quad \text{unabhängig von } q_{\text{Probe}}$$

El. Feld einer Pktladung

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{\text{Punkt}}}{q_{\text{Probe}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq_{\text{Probe}}}{r^2 q_{\text{Probe}}}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

Zusammenfassung:

- jede Ladung Q von $\vec{E}$-Feld umgeben
- es gilt Superpositonsprinzip $\vec{E}_{Q_1+Q_2} = \vec{E}_{Q_1} + \vec{E}_{Q_2}$ folgt aus Addition von Kräften

- Nahwirkung der Kraft: Feld breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit c aus

Superposition:

- N Punktladungen $Q_i, i = 1, \ldots, N$ $\quad \vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$

$$\Rightarrow \vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

- kontinuierliche **Ladungsverteilung:** $\rho(\vec{r})$

  Gesamtladung $Q = \int dV \rho(\vec{r'}) \quad (dV = d\vec{r'}^3)$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r'} \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

Visualisierung:

a) Feldvektoren an vorgegebenen Gitterpunkten im Raume oft Vektor $\widehat{=}$ Projektion von $\vec{E}$ in Ebene

b) Feldlinien:

   - Tangenten $\widehat{=}$ Richtung von $\vec{E}$
   - Dichte der Linie $\widehat{=}$ Stärke $|\vec{E}|$

Exp: Feldlinien

- Feldlinien kreuzen sich nicht [Falls Kreuzung: dann 2 Felder $\vec{E}$, 2 $\vec{E}$ in einem Punkt wid: Superpositionsprinzip]
- Feldlinien $\perp$ orthogonal auf Oberfläche der Leiter
- keine Feldlinien innerhalb geschlossener Leiter

Elektrisches Feld im Leiter

- e^- frei beweglich und sie stoßen sich ab
- „Kräftegleichgewicht“ wenn e^- an der Oberfläche sitzen
- $\vec{E}, \vec{F} \perp$ Oberfläche
- $\vec{E}$-Feld im Inneren verschwindet

Kugel mit Radius:

$$\vec{E}(\vec{R}) = 0 \qquad |\vec{r}| < R$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \qquad |\vec{r}| \geq R$$

verhält sich bei großem Abstand wie Punkt-förmige Ladung im Zentrum

Beliebige Flächen:
Approximation durch Ebenen und Kugelschalen Kugel:

$$|\vec{E}| \sim \frac{1}{r^2}$$

kleiner Krümmungsradius $\rightarrow$ großes $|\vec{E}|$
„Spitze“ $\rightarrow$ kleines r $\rightarrow$ großes $|\vec{E}|$ $\rightarrow$ führt zur Entladungen

Faradaysche Becher:

- begränzte Ladungsaufnahme von außen

$\rightarrow$ Ladungen von innen aufbringen

Feldberechnung:

1) **homogen geladener Ring** Radius R, Dicke vernachlässigbar
   - $\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$ $\quad [\lambda] = \frac{C}{m}$ Linienladungsdichte
   - gesucht: $\vec{E}(a)$ auf Symmetrieachse (y=z=0)
   - Symmetrie: $\vec{E}(a) = E\vec{e}_x$ [andere Komponenten kompensieren sich]
   - Element auf Ring trägt Ladung λdx, liefert Feldbeitrag

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\cos\phi dQ$$

   - Es gilt:

$$E_x = \cos\phi|\vec{E}| \qquad \cos\phi = \frac{a}{r} \qquad r = \sqrt{R^2 + a^2}$$

   - Integration über Ring in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{\text{Ring}} dQ\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\cos\phi \\ &= \int_{\text{Ring}} dQ \end{aligned}$$

$$\int_{\text{Ring}} dQ\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R^2+a^2}\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{a}{(R^2+a^2)^{(\frac{3}{2})}}$$

$$\begin{aligned} \text{große Entfernung: } a \gg R: &\qquad E_x \sim \frac{1}{a^2} \text{ wie Pkt.ladung} \\ \text{Nähe des Rings: } a \sim R: &\qquad \text{langsamer Anstieg von} \\ &\qquad |\vec{E}| \text{ als für Pkt.ladung} \\ a = 0: &\qquad E_x = 0 \text{ aus Symmetrie} \end{aligned}$$

2) **unendlich dünne, unendlich ausgedehnte leitende Platte**
   Flächenladungsdichte σ $\quad [\sigma] = \frac{C}{m^2}$

– Symmetrie: $\vec{E} = \vec{E}_z \vec{e}_z \perp$ auf Platte

$$Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V\text{Platte}} d^3\vec{r}\, \rho(\vec{r})$$

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V\text{Platte}} d^3\vec{r}\, \frac{\rho(\vec{r})}{r^2}\hat{r} \qquad \hat{r} \perp \text{ Platte} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{A\text{Platte}} d^2\vec{r}\, \frac{\sigma}{r^2}\hat{r}\end{aligned}$$

– Es gilt: $E_z = \cos\beta|\vec{E}| \qquad \cos\beta = \frac{a}{d}$
Integration in kleinen Ringen bzw. Polarkoordinaten ($dA = r\, dr\, d\varphi$)

$$E_z(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, r \frac{\sigma}{a^2} \cos\beta$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 a^2} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^3\beta$$

mit

$$r = a\tan\beta \qquad dr = \frac{a}{\cos^2\beta} d\beta$$

$$\begin{aligned} r = 0 &\mathrel{\widehat{=}} \beta = 0 \\ r = \infty &\mathrel{\widehat{=}} \beta = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_z(a) &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 a^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin\beta\, d\beta \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (-\cos\beta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\end{aligned}$$

– homogenes Feld in z-Richtung (d.h. senkrecht $\perp$ zur Platte)

I.2.4 Das elektrische Potential

- **Bewegung von Ladung im elektrischen Feld**

$$W = -\int\limits_{Weg} \vec{F}\, d\vec{s} = -q \int\limits_{Weg} \vec{E}\, d\vec{s}$$

$W > 0$: von außen gegen $\vec{E}$-Feld verrichten
$W < 0$: Feld verrichtet Arbeit Charakteristik der Feldes: Arbeit pro Einheitsladung

$$\frac{W}{q} = -\int\limits_{Weg} \vec{E}\, d\vec{s}$$

- **Arbeit im Feld einer Punktladung** $\vec{E} \perp d\vec{s}$ keinen Beitrag

$$\frac{W_{ACB}}{q} = -\int_A^C |\vec{E}|ds = -\frac{1}{a\pi\epsilon_0}\int_{r_A}^{r_C}\frac{Q}{r^2}dr = -\frac{1}{a\pi\epsilon_0}(-\frac{Q}{r})\Bigg|_{r_A}^{r_C} = -\frac{Q}{a\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_C})$$

analog:

$$\frac{W_{ADB}}{q} = -\int_D^B |\vec{E}|ds = -\frac{Q}{a\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r_D} - \frac{1}{r_B})$$

$$r_A = r_D \quad r_B = r_C \Rightarrow \frac{W}{q} \text{ auf beiden Wegen gleich}$$

$$\Rightarrow \oint_{\text{geschlossenem Weg}} \vec{E}\, d\vec{s} = 0 \qquad\qquad W \text{ unabh. von Weg}$$

+ Superpositionsprinzip $\Rightarrow$ Arbeit auf einem geschlossenen Weg verschwindet (i.e $= 0$)
Erlaubt Definition der potentiellen Energie

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}\, d\vec{s}$$

$\vec{r}_0$ ist ein Bezugspunkt (Referenzpunkt) oft im unendlichen da ($\vec{E}(|\vec{r}| \to \infty) \to 0$)
In Praxis: nur

$$\Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}(\vec{r}_2) - E_{\text{pot}}(\vec{r}_1)$$

relevant. Normierung von E_{pot} auf im Feld bewegte Ladung: el. Potential

$$\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_0) = \int \vec{E}\, d\vec{s} \qquad\qquad \text{oft } \varphi(\vec{r}_0) = 0$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int \vec{E}\, d\vec{s}$$

Für Punktladung Q $\quad \vec{r}_0 \to \infty$:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}|}$$

- **Superpositionsprinzip:**
N Punktladungen Q_i bei $\vec{r}_i$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N}\varphi_i(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Potential ist Skalarfeld $\to$ Rechnungen oft einfacher, graphische Darstellung mittels Äquipotentialflächen:
(auf diesen gilt $\varphi(\vec{r}) = \text{const.}$)

  - für Pkt. Ladung: Äquipotentialflächen = Kugelschalen
  - Feldlinien / $\vec{E}$-Feld $\perp$ Äquipotentialflächen
  - Bewegung in Äquipotentialflächen $\to$ keine Arbeit wird verrichtet

Zusammenhang elektrisches Feld $\vec{E}$ und Potential φ
Wir hatten:

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}\, d\vec{s} \qquad \varphi(\vec{r}_0) = 0$$

Ist dies umkehrbar?

a) infinitesimaler Weg dx, Probeladung q

$$\begin{aligned} dW &= -q[\varphi(x,y,z) - \varphi(x+dx,y,z] \\ &= q\frac{\varphi(x+dx,y,z)-\varphi(x,y,z)}{dx}dx \\ &= q\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x}dx \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} dW &= -q\vec{E}(\vec{r})\, d\vec{s} \qquad d\vec{s} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -qE_x\, dx \end{aligned}$$

Vgl:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{dx}$$

analog zu Bewegung in y- und in z-Richtung

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x\right) + \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y\right) + \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z\right) \\ &= -\text{grad}\ \varphi(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) \qquad \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Elektrostatik: äquivalente Beschreibung durch entweder $\vec{E}$-Feld oder φ

<u>Wirbelfreiheit von $\vec{E}$</u> Rotation von

$$\begin{aligned} \vec{E}:\ \text{rot}(\vec{E}) &= \vec{\nabla}\times\vec{E} \\ &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z \end{aligned}$$

da $\vec{E} = \text{grad}\varphi$ und

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$$

Partielle Ableitungen vertauschbar

$$\Rightarrow \quad \text{rot}\vec{E} = -\text{rot}(\text{grad}\varphi) = \vec{0}$$

$\vec{E}$-Felder in Elektrostatik sind Wirbelfrei
Zusammenhang: mit Stokesschem Satz

$$\int\limits_A \vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r})\, d\vec{A} = \oint\limits_{S=dA} \vec{V}(\vec{r})\, d\vec{s} \qquad \vec{V}(\vec{r})\text{Vetorfeld}$$

hier

$$\int_A \operatorname{rot}(\vec{E})\, d\vec{A} = \oint_{\delta A} \vec{E}\, d\vec{s} \stackrel{\text{E. statik}}{=} 0$$

Bedeutung: wirbelfrei bzw. keine geschlossenen Feldlinien

Beispiele Potential-Berechung:

1) Potential eines homogenen ringförmigen Leiters. Beitrag $d\varphi$ aus dQ auf Ring

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\, dQ$$

Aus Abbildung: $r = \sqrt{R^2 + a^2}$

$$\varphi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}}$$

da $r =$ const. auf x-Achse
für $a \gg R \quad \varphi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}$ Potential einer Pkt. Ladung

$$E_x = -\frac{\partial\varphi(a)}{\partial a} = -\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}\left(-\frac{1}{2}\right)2a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qa}{(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2) Beispiel 2: leitende Kugel Radius R

$$\varphi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a} \qquad a \geq R$$

$$\varphi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R} = \text{const.} \qquad a < R$$

$$\begin{aligned} \to \vec{E} = -\text{grad}\varphi &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2}\vec{e}_R \qquad a \geq R \\ &= 0 \Rightarrow \qquad a < R \end{aligned}$$

Bisher: $\varphi(\vec{r})$ aus $\rho(\vec{r})$ via Poisson-Integral teilweise $\rho(\vec{r})$ nicht bekannt, aber Randbedingungen $\varphi(\vec{r}) = 0$ auf Leiteroberfläche. ($\rho(\vec{r})$ kann komlex sein)
$\Rightarrow$ Randwertproblem (Theo II.)

„Einfaches“ Beispiel mit **Methode der <u>Spiegelladung</u>**

Platte geerdet $\varphi(x, y, z) \stackrel{!}{=} 0$ Punktladung q_1 bei $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}$
Realisierung der Randbedingungen durch Spiegelladung q_2
Brauche: $\varphi(x, y, z = 0) = 0$
Superposition $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

$\Rightarrow q_2 = -q_1 \quad z_2 = -z_1$ erfüllen Randbedingung

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{a_r}{4\pi\epsilon}\left\{\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}\right\}$$

$\vec{E}$-Feld aus $-\vec{\nabla}\varphi$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{a_r}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} - \frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}\right\}$$

für z=0 : $E_x = E_y = 0 \quad \vec{E} \perp (x,y)$-Ebene
Flächenladungsdichte: $\sigma \quad [\sigma] = \frac{C}{m^2}$
Später: $\sigma = 2\epsilon_0 E_z$

$$\sigma = -\frac{q_1}{2\pi}\frac{z_1}{(x^2+y^2+z_1^2)}$$

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

I.2.5 Der elektrische Fluss

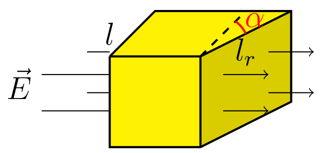
Elektrischer Fluss Φ ist ein Maß für die dichte der el. Feldlinien. Er ist definiert für eine gegebene Fläche A.

$$\boxed{\Phi_A = \int_A \vec{E}\, d\vec{A}} \qquad \vec{A} = \text{infinitisimaler Normalvektor} \qquad \vec{A} \perp \text{ Fläche}$$

offene Fläche: Orientierung beliebig
geschlossene Fläche: Orientierung nach außen

Fluss durch geschlossene Fläche:

Bsp: **Würfel im Plattenkondensator** (Abb.auf [Folie: Elektrischer Fluss durch geschlossene Oberfläche]) nur Beiträge von linker und rechter Fläche:



$$\Phi = \Phi_l + \Phi_r = \vec{E}\vec{A}_l + \vec{E}\vec{A}_r = -EA_l + EA_r\cos\alpha = -EA_l + EA_l = 0$$
$$\vec{A}_l = -\vec{A}_r\cos\alpha$$

Superposition bzw. Approximation von Körper durch inf. Würfel $\Rightarrow$ Fluss durch geschlossene Oberfläche im homogenen Feld verschwindet.
Bsp: Kugelschale

$$\vec{A}(r) = 4\pi r^2 \vec{e}_R \begin{cases} + & \text{für äußere} \\ - & \text{für innere} \end{cases}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

$$\left|\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r})\right| = \text{ const}$$

$$\Phi = \Phi(r_1) + \Phi(r_2) = + \text{ const} - \text{ const} = 0$$

In elektrischen Feldern (wenn keine Ladungen im Volumen) $\Rightarrow$ Fluss durch geschlossene Oberfläche verschwindet.

I.2.6 Quellstärke des elektrischen Feldes

$\Phi_A \neq 0$ wenn Ladungen innerhalb geschlossener Oberfläche. Bsp: Kugel mit Radius R. Punktladung im Ursprung $d\vec{A}$ und $\vec{E}$ radial nach außen $\sim \vec{e}_r$

$$\Phi = \oint_{\text{R = const}} \vec{E}\, d\vec{A} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2}}_{|\vec{E}|} \underbrace{4\pi R^2}_{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Ergebnis unabhängig von:

- Form der Oberfläche
- Position der Ladung innerhalb der Oberfläche

Mehrere Ladungen Q_i aus Superposition der $\vec{E}_i$

$$\Phi = \oint \left(\sum_i \vec{E}_i\right) d\vec{A} = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0}$$

„externe" Q_i liefern keinen Beitrag
Es gilt:

$$\boxed{\Phi = \oint \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{Q_{\text{ein}}}{\epsilon_0}}$$

Gaußsches Gesetz (Integralform)
Mit Gaußschen Satz : Oberflächen- $\rightarrow$ Volumenintegral

$$\oint_A \vec{E}\, d\vec{A} = \int_V \text{div}\vec{E}\, d\vec{V} \quad \text{mit} \quad Q_{\text{ein}} = \int_V \rho(\vec{r})\, dV$$

$$\int_V \text{div}\vec{E}\, dV = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r})\, dV$$

gültig für beliebige Volumen
$\Rightarrow \text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ differentielle Form des Gaußschen Gesetzes
Ladungen die Quellen ($\rho > 0$) bzw. Senken ($\rho < 0$) des elektrischen Feldes sind.

I.2.7 Maxwell-Gleichungen

für statische (unbewegte) Ladungen Integral- und Differentialform

$$\boxed{\oint \vec{E}\, d\vec{s} = 0 \quad \text{rot}\vec{E} = \vec{0} \quad \text{Wirbelfrei}} \tag{1}$$

$$\boxed{\oint \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{Q_{\text{ein}}}{\epsilon_0} \quad \text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Quellen/Senken}} \tag{3}$$

1. gilt allgemein in Zentralkraftfeldern d.h. $\rho(\vec{r}) \sim |\vec{r}|$
3. gilt nur für $\varphi \sim \frac{1}{|\vec{r}|}|\vec{E}| \sim \frac{1}{|\vec{r}|^2}$ im 3-dimensionalen Raum

MW-Gleichungen sind Axiome der Elektrostatik d.h. F_{coulomb} ableitbar
betrachte Ladungen $Q_1 = Q_{\text{ein}}$
1.Gl:

$$\oint_A \vec{E}\; d\vec{A} = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

$$|\vec{E}(r)| 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

Kraft auf Ladung Q_2: $\vec{F}_{Q_2} = \vec{E}_{Q_1} \cdot Q_2$

$$|\vec{F}_{Q_2}| = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

$\square$

Bsp.: **homogene geladene Kugel**, Radius R, $\rho(\vec{r}) = \text{const} \quad |\vec{r}| \leq R$

$$Q_{\text{ges}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

Symmetrie: $\vec{E} = |\vec{E}|\vec{e}_r$ radial $|\vec{E}| = E_r$

- $|\vec{r}| \geq R$:

$$\Phi = \oint_A \vec{E}\; d\vec{A} = \int_A E_r\; dA = E_r 4\pi r^2 \stackrel{!}{=} \frac{Q_{\text{ein}}}{\epsilon_0}$$

$$E_r = \frac{\rho_0 R^3}{\epsilon_0 3 r^2}$$

  wie bei Punktladung

- $|\vec{r}| \leq R$:

$$Q_{\text{ein}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \qquad \Phi = \frac{Q_{\text{ein}}}{\epsilon_0}$$

$$E_r = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}$$

  linearen Anstieg

Potential $\varphi(\vec{r})$:
$\varphi(r_0 = \infty) = 0$

$$\varphi(r) = -\int_\infty^r \vec{E}\; d\vec{r} \stackrel{(r\geq R)}{=} -\int_\infty^r \frac{\rho R^3}{\epsilon_0 3 r'^2}\; dr' = \int_r^\infty \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{R^3}{3r'^2}\; dr' = \frac{\rho R^3}{\epsilon 3 r}$$

$$\left(\frac{\partial(\hat{r})}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\right)$$

Innenraum: $(r \leq R)$

$$\varphi(r) = -\int \frac{\rho r'}{3\epsilon_0}\; dr' = -\frac{1}{2}\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{r^2}{3} + \text{const}$$

Wähle c so, dass φ stetig bei $r = R$ ist
$\rightarrow c = \frac{R^2\rho}{2\epsilon_0}$

$$\varphi(r) = \frac{R^2\rho}{2\epsilon_0}(1 - \frac{r^2}{3R^2}) \quad \text{für } r \leq R$$

Maxwell-Gl. und Potential φ

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}(\varphi)$$

1. Gl

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi) \overset{\text{linear}}{=} 0$$

da $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$ können wir $\vec{E}$ als $\mathrm{grad}\varphi$ schreiben
3. Gl

$$\mathrm{div}\vec{E} = \mathrm{div}(-\mathrm{grad}\varphi) = -\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right] = -\Delta\varphi$$

$$\rightarrow \quad -\Delta\varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Poisson-Gl. ($\rho = 0$ Laplace-Gl.)
Poisson-Gl. äquivalent zu beiden Maxwell-Gl.
MW-Gl: 2 Gl. erster Ordnung in Ableitungen ($\frac{\partial}{\partial x}, \dots$)
Poisson-Gl: 1.Gl. zweiter Ordnung in Ableitung ($\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \dots$)

I.3 Multipole

- für beliebige Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ist

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\vec{r'}\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

  komplex i.a.

- oft interessiert nur Fernfeld $\rho(\vec{r}), \vec{E}(\vec{r}), \quad |\vec{r}| \gg |\vec{r'}| \text{ mit } \rho(\vec{r'}) = 0$
  Abstand $\gg$ Ausdehnung der Ladungsverteilung

- Approximation von $\rho(r)$ in Taylor-Entwicklung
  $\rightarrow$ Multipolentwicklung

$$\rho(\vec{r}) = \underbrace{\frac{a}{T}}_{\text{Monopol}} + \underbrace{\frac{b}{T^2}}_{\text{Dipol}} + \underbrace{\frac{c}{T^3}}_{\text{Quadrupol}} + \dots$$

Monopol:

$$\vec{E}_{\text{Mono}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r} \qquad \varphi_{\text{Mono}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

dominiert für $r \rightarrow \infty$ wenn $Q_{\text{ges}} \neq 0$

$$Q_{\text{Mono}} = \sum_{i=1}^{N} Q_i \text{ Pkt. Ladungen} \qquad Q_{\text{Mono}} = \int d^3\vec{r}\rho(\vec{r})$$

Q_{Mono} bei $\vec{r}_s$ Ladungsschwerpunkt platzieren

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_i |Q_i| \vec{r}_i}{\sum_i |Q_i|}$$

$$\vec{r}_s = \frac{\int |\rho(\vec{r})| \vec{r} d^3 \vec{r}}{\int |\rho(\vec{r})| d^3 \vec{r}}$$

Dipol:
zwei entgegengesetzte, gleich große Ladungen $Q > 0$ im Abstand $d = |\vec{d}|$. Richtung $\vec{d}$ von $-Q$ nach $+Q$

$$\vec{r}_- = \vec{r}_0 - \frac{\vec{d}}{2} \qquad \vec{r}_+ = \vec{r}_0 + \frac{\vec{d}}{2}$$

Potential $\varphi(\vec{r})$ aus Superposition

$$\varphi_{\text{Dipol}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{|\vec{r}_0 + \frac{\vec{d}}{2}|} - \frac{1}{|\vec{r}_0 - \frac{\vec{d}}{2}|} \right\}$$

für $(|\vec{r}_0| \gg |\vec{d}|)$ nutze Näherung

$$\frac{1}{|\vec{r}_0 \pm \frac{\vec{d}}{2}|} = \frac{1}{\sqrt{\vec{r}_0^2 \pm r_0 \vec{d} + \frac{\vec{d}^2}{4}}} = \frac{1}{|\vec{r}_0|} \frac{1}{\sqrt{1 \pm \frac{r_0 \vec{d}}{|\vec{r}_0|^2} + \frac{\vec{d}^2}{4\vec{r}_0^2}}} = \frac{1}{|\vec{r}_0|} \left(1 \mp \frac{\vec{r}_0 \vec{d}}{\vec{r}_0^2} \right)$$

$$\varphi_{\text{Dipol}} \sim \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\vec{r}} \vec{d}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}\, \hat{\vec{r}}}{r^2}$$

$\vec{p} = Q\vec{d} = [\vec{p}] = c_m$ **Dipolmoment**

$$\varphi_{\text{Dipol}}(\vec{r}) = \frac{Q\vec{d}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} \qquad \theta = \sphericalangle(\vec{d}, \vec{r})$$

- Potential richtungsabhängig $\sim \cos\theta$
  maximal entlang $\vec{d}$ verschwindend $\perp \vec{d}$
- $\varphi \sim \frac{1}{r^2} \Rightarrow$ Erwartung $|\vec{E}| \sim \frac{1}{r^3}$

Bestimmung des $\vec{E}$-Feldes:
$\vec{d}$ entlang z-Achse
Geometrie $\rightarrow$ Zylindersymmetrie des Feldes, d.h. keine Abhängigkeit vom Azimutalwinkel ϕ

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = \frac{1}{r \sin\theta} \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}}_{\varnothing} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} |\vec{p}| \left(2\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta \right)$$

- für N Punktladungen $\vec{p} = \sum_i Q_i \vec{r}_i$
- für Ladungsverteilung $\vec{p} = \int d^3\vec{r}\, \rho(\vec{r}) \vec{r}$

$\vec{p}$ abhängig von Wahl des Koordinatenursprungs

Bsp.: Punktladung bei $\vec{r}_0 \Rightarrow \begin{cases} \text{i)} & \vec{r}_0 = \vec{0} \quad \text{dann} \quad \vec{p} = \vec{0} \\ \text{ii)} & \vec{r}_0 \neq \vec{0} \quad \text{dann} \quad \vec{p} \neq \vec{0} \end{cases}$

Konvention: Ursprung bei $\vec{r}_s$ Ladungsschwerpunkt

- punktsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \rho(-\vec{r})$ gilt $\vec{p} = \vec{0}$
- wenn $Q_{\text{ges}} = 0$ dann $\vec{p}$ unabhängig von Ursprung

I.3.1 Kräfte auf Dipol

a) **homogenes $\vec{E}$-Feld** (Bsp. Plattenkondensator)
Beobachtung: Dipol richtet sich im Kondensator wie erwartet aus: Plus zu Minus, Minus zu Plus
Kraft:

$$\vec{F}_{ges} = Q\vec{E} + (-Q)\vec{E} = \vec{0}$$

$\rightarrow$ keine Translation
Drehmoment:

$$\begin{aligned} \vec{T}_{ges} &= \sum_{i=1}^{2} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \\ &= \frac{\vec{d}}{2} \times Q\vec{E} + \frac{-\vec{d}}{2} \times (-Q\vec{E}) = Q\vec{d} \times \vec{E} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{T}_{ges} = \vec{p} \times \vec{E}}$$

$\vec{p} \perp \vec{E} \quad \vec{T}$ Maximal
$\vec{p} \parallel \vec{E} \quad \vec{T}$ verschwindet
$\rightarrow$ Ausrichtung im $\vec{E}$-Feld
Potentiellen Energie:

$$\begin{gathered} E_{\text{Dip}} = Q\varphi(\vec{r}_1) - Q\varphi(\vec{r}_2) \\ \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = \vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\vec{d} = -\vec{E}\vec{d} \\ E_{\text{Dip}} = -Q\vec{E}\vec{d} = -\vec{p}\vec{E} \end{gathered}$$

$p \uparrow\uparrow E$ minimiert $E_{\text{Dip}} \quad \rightarrow$ Richtung von $\vec{p}$ im $\vec{E}$

b) **inhomogenes $\vec{E}$-Feld**
zusätzliche Kraft:

$$\begin{gathered} \vec{F}_{ges} = Q\vec{E}(\vec{r} + \vec{d}) - Q\vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{E}(\vec{r} + \vec{d}) \overset{\text{Taylor-Entwicklung}}{=} \vec{E}(\vec{r}) + (\vec{d} \cdot \nabla)\vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{F}_{ges} = Q(\vec{q} \cdot \nabla)\vec{E}(\vec{r}) = (\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E}(\vec{r}) \end{gathered}$$

i) Ausrichtung von Dipol durch $\vec{T}_{ges}$
ii) Bewegung ins Gebiet höherer Feldstärke $\vec{E}$

I.3.2 Quadrupol

- vier Ladungen $2: \ +Q,\ 2: \ -Q$, jeweils im Abstand d
- zwei Dipole $\vec{p}$ bei $(x,z)=(\frac{d}{2},0) \quad -\vec{p}$ bei $(x,z)=(-\frac{d}{2},0)$

$$\varphi_{\text{Dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \qquad \vec{r}_s=\vec{0} \quad \theta=\sphericalangle(\vec{r},\vec{e}_z)$$

$$\varphi_{\text{Quadrupol}} = \varphi_{\text{oben}}(\vec{r}-\frac{\vec{d}}{2}) - \varphi_{\text{unten}}(\vec{r}+\frac{\vec{d}}{2})$$

für $|\vec{d}|$ klein :

$$\approx -d\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{\text{Dipol}}(\vec{r})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{\text{Dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-2\frac{p\cos\theta}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{p\sin\theta}{r^2}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]$$

Kettenregel:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\phi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{r^2}2x = \frac{x}{r} = \sin\theta\cos\phi$$

$$\frac{\partial\cos\theta}{\partial x} = -\frac{1}{r}\sin\theta\sin\phi\cos\phi$$

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{Quadrupol}}(\vec{r}) &= -\frac{|\vec{p}||\vec{d}|}{4\pi\epsilon_0}\left\{-\frac{2\cos\theta}{r^3}\sin\theta\cos\phi - \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\right\} \\ &= \frac{3|\vec{p}||\vec{d}|}{4\pi\epsilon_0 r^3}\cos\theta\sin\theta\cos\phi\end{aligned}$$

$$Q_{\text{Mono}}=0 \quad \vec{p}_{\text{gesamt}}=\vec{0}$$

Fernferld:

$$\varphi(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^3} \quad \text{bzw.} \quad \vec{E}(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^4}\vec{e}_R$$

Bsp.: **linearer Quadrupol**

$$\varphi_{\text{Quad}}^{\text{lin}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|\vec{d}|^2 Q}{r^3}(3\cos^2\theta-1)$$

Kraft und Elektrische Energie des Quadrupols

- homogenes Feld: $\vec{F}_{\text{ges}} = \vec{0} \quad ; \quad \vec{T}_{\text{ges}} = \vec{0}$
- inhomogenes Feld : komplexe $\vec{F}_{\text{ges}}$, $\vec{T}_{\text{ges}}$

Elektrische Energie

$$E_{el} = \sum_{i=1}^{4} Q_i \varphi_{\text{ext}}(\vec{r}_i) \quad \text{(eine kleine Rechnung)}$$

$$E_{el} = Q|\vec{d}|^2 \frac{\partial^2 \varphi_{\text{ext}}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{3} \hat{Q}_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_{\text{ext}}}{\partial x \partial y}$$

$$\hat{Q}_{x_1} = 3Q|\vec{d}|^2 \text{ Quadrupol}$$

allgemein gilt : für $x_1 \widehat{=} x, x_2 \widehat{=} y, x_3 \widehat{=} z$

$$E_{el} = \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^{3} \hat{Q}_{ij} \frac{\partial^2 \varphi_{ext}}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\hat{Q}_{ij} = \int d^3\vec{r} \{3x_i x_j - |\vec{r}|^2 \delta_{ij}\} \rho(\vec{r})$$

Tensor 2. Stufe $i, j = 1 \to 3$
für N Punktladungen :

$$\hat{Q}_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (3x_i x_j)_n - |\vec{r}|^2 \delta_{ij} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} i = j & 1 \\ i \neq j & \text{sonst} \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

E_{el} in Multipolentwicklung

$$\begin{aligned} E_{el} &= Q_{\text{ges}} \varphi_{\text{ext}}(\vec{r}) + \sum_{i=1}^{3} p_i \frac{\partial \varphi_{\text{ext}}}{\partial x_i} + \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^{3} \hat{Q}_{ij} \frac{\partial^2 \varphi_{\text{ext}}}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= Q_{\text{Mono}} \varphi_{\text{ext}}(\vec{r}) + \underbrace{\vec{p}\, \vec{\nabla} \varphi_{\text{ext}}(\vec{r})}_{\text{Dipolanteil}} + \underbrace{\frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^{3} \hat{Q}_{ij} \frac{\partial^2 \varphi_{\text{ext}}}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{Quadrupolanteil}} \end{aligned}$$

Bem.: $\vec{p}, \hat{Q}$ abhängig von Wahl des Koordinatensystems

I.4 Elektrostatische Energie und Kapazität

I.4.1 Spannung

Erinnerung:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\text{“}W(\vec{r}_0 \to \vec{r})\text{“}}{q} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}\, d\vec{s} + \varphi(\vec{r}_0)$$

$\vec{r}_0$ Bezugspunkt
Spannung U als Potentialdifferenz zwischen $\vec{r}_A$ und $\vec{r}_B$

$$U_{\text{BA}} = \varphi(\vec{r}_B) - \varphi(\vec{r}_A) = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E}\, d\vec{s} \quad \text{unabhängig von} \vec{r}_0$$

$$[U] = 1V = 1\frac{J}{C}$$

I.4.2 Kapazität

- alle Potentiale $\sim$ Ladung: $\varphi(\vec{r}) \sim Q$
  N Punktladungen

  $$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

  für $Q_i \to zQ_i$ gilt $\varphi(\vec{r}) \to z\varphi(\vec{r})$
  Es folgt:

  $$U = \frac{1}{C} Q$$

  C Kapazität

  $$[C] = 1F(\text{Farad}) = a\frac{C}{V}$$

  typische Werte für C: pF bis mF ($10^{-12}F$ - $10^{-3}F$) Bei gegebener Spannung U ist die **Kapazität C ein Maß dafür wieviel Ladung eine Konfiguration von Leitern aufnehmen kann**

- C abhängig von Geometrie der Leiter
  Beispiele:

  a) **homogene Kugel** Radius R, Ladung Q

  $$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \quad r_0 = \infty \quad \varphi(\vec{r}_0) = 0$$

  $$U(R) = \varphi(R) - \varphi(\infty) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R}$$

  $$\boxed{C_{\text{Kugel}} = 4\pi\epsilon_0 R}$$

  b) **Plattenkondensator** (homogenes Feld)

  $$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{e}_z \qquad \sigma = \frac{Q}{A} \quad \text{Flächenladungsdichte}$$

  $$\varphi(\vec{r}) = \int_{z=0}^{z} \vec{E}\, d\vec{z} = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Q}{A} z \qquad \varphi(z=0) = 0$$

  $$U = \varphi(d\vec{e}_z) - \varphi(d\vec{e}_z) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Q}{A} d = |\vec{E}| d$$

  $$\boxed{C_{\text{Platte}} = \frac{\epsilon_0 A}{d}}$$

c) **Zylinderkondensator**, Länge l

$$Q_1 = -Q_2$$

$\vec{E}$-Feld aus Gaußschem Gesetz
für $R_1 > r > R_2 \quad \vec{E} = 0$ da $Q_{\text{ein}} = 0$
für $R_1 \leq r \leq R_2$:

$$\oint\limits_{\text{Zylinder(r)}} \vec{E}\, d\vec{A} = \int_0^l \int_0^{2\pi} dz d\varphi E_r(|\vec{r}|) = l 2\pi r E_r$$

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \frac{1}{l}$$

$$\varphi = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \ln r$$

$$U = \varphi(R_2) - \varphi(R_2) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\boxed{C_{\text{Zylinder}} = 2\pi\epsilon_0 \frac{l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}}$$

d) **Lecherleitung/parallele Drähte**
einzelner Draht mit Radius R, Ladungsdichte $\frac{Q}{l}$

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

Drahtpaar mit $\mp\frac{Q}{l}$, Abstand a

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{r_+}{R}\right) - \ln\left(\frac{r_-}{R}\right) \right]$$

Sei $R \ll a$. U aus 2 Punkten auf Drähten
pos. Draht: $r_+ \approx R \quad r_- \approx a$
neg. Draht: $r_+ \approx a \quad r_- \approx R$

$$\begin{aligned} U &= \varphi(\text{pos. D}) - \varphi(\text{neg- D}) \\ &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} [\ln \frac{R}{R} - \ln \frac{a}{R} - \ln \frac{a}{R} + \ln \frac{R}{R}] \\ &= \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \ln \frac{a}{R} \end{aligned}$$

$$\boxed{C_{\text{Lecher}} = \frac{\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{a}{R}}}$$

e) **Kugelkondensator**

$$\boxed{C_{\text{Kugelkond.}}} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \boxed{= \frac{4\pi\epsilon_0 R_1}{1 - \frac{R_1}{R_2}}}$$

für $R_2 \to \infty \quad C_{Kugel} = 4\pi\epsilon_0 R_1$

I.4.3 Kondensatorschaltungen

a) **Parallelschaltung**

$$C_1 : Q_1 = C_1 U \quad C_2 : Q_2 = C_2 U$$

Potentiale / Spannungen gleich $U_1 = U_2 = U = \varphi_+ - 0$
$Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2$ Ladungserhaltung
$Q_{\text{ges}} = C_{\text{ges}} U$ Frage: C_{ges}

$$Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2 = U(C_1 + C_2) \quad \text{also} \quad C_{\text{ges}} = C_1 + C_2$$

allgemein für n parallele C_i:

$$C_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Parallelschaltung erlaubt großes C_{ges}

b) **Reihenschaltung**
Es gilt: $Q_1^+ = -Q_1^- = Q_2^+ = -Q_2^-$
$Q_1 \equiv Q$
$U = U_1 + U_2$

$$U = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}) = \frac{Q}{C_{\text{ges}}}$$

also

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

allg. für serielle C_i:

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} \quad C_{\text{ges}} < C_i$$

I.4.4 Elektrische Energie

- wie viel Energie notwendig um Ladungen im $\vec{E}$-Feld zu bewegen
- Punktladung q von $A \to B$
  $W_{A \to B} = q\varphi(\vec{r}_B) - q\varphi(\vec{r}_A)$
- zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 von ∞ an $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$
  $Q_1 : \infty \to \vec{r}_1$: kein $\vec{E}$-Feld, kein $\varphi \to$ keine Arbeit
  $Q_2 : \infty \to \vec{r}_2$: Arbeit im Feld von Q_1

$$W_2 = Q_2 \varphi_1(\vec{r}_2) = Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

andere Reihenfolge:

$$W_1 = Q_1 \varphi_2(\vec{r}_1) = Q_1 \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$E_{el} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1 \; i \neq j}^{2} Q_i \varphi_j(\vec{r}_i)$$

dritte Punktladung $Q_3 : \infty \to \vec{r}_3$

$$W_3 = Q_3\varphi_1(\vec{r}_3) + Q_3\varphi_2(\vec{r}_3)$$

Es gilt: $Q_3\varphi_i(\vec{r}_3) = Q_i\varphi_3(\vec{r}_i) \quad i = 1,2$

$$\begin{aligned} E_{el} &= \frac{1}{2}Q_1[\varphi_2(\vec{r}_1) + \varphi_3(\vec{r}_1)] \\ &+ \frac{1}{2}Q_2[\varphi_1(\vec{r}_2) + \varphi_3(\vec{r}_2)] \\ &+ \frac{1}{2}Q_3[\varphi_1(\vec{r}_3) + \varphi_2(\vec{r}_3)] \end{aligned}$$

$$E_{el} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i\varphi(\vec{r}_i) \quad \text{für N Punktladungen}$$

mit

$$\varphi(\vec{r}_i) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N} \varphi_j(\vec{r}_i)$$

konst. Ladungsvertielung $\varphi(\vec{r}) : \sum Q_i \to \int dQ$

$$E_{el} = \frac{1}{3}\int \frac{d^3\vec{r}\rho(\vec{r})}{dQ}\varphi(\vec{r})$$

Bsp.: **homogengeladene Kugelschale** mit Radius R

$$\varphi(\vec{r}) = \text{const} \quad r < R \qquad \varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \quad r \geq R$$

Sei zunächst $Q = 0$. dQ aus $\infty \to R$

$$dE_{el} = \varphi(e)dQ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}\,dQ$$

$$E_{el} = \int_0^Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^1}{R}\,dQ^1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2}\frac{(Q^1)^2}{R}\Bigg|_0^{Q???R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2}\frac{Q^2}{R} = \frac{1}{2}Q\varphi(R)$$

wie oben Bsp.: homogen geladene Kugel Radius R, Ladung Q:

$$E_{el} = \frac{3}{5}\ k\ \frac{Q^2}{R}$$

Andere Form von E_{el} mit $\vec{E}$

$$\begin{aligned} E_{el} &= \frac{1}{2}d^3\tilde{r}\rho(\tilde{r})\varphi(\tilde{r}) \qquad \text{(3. MW-Gl.)} \quad \text{div}(\tilde{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ &= \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3\vec{r}\vec{\nabla}\vec{E}(\vec{r})\varphi(\vec{r}) \end{aligned}$$

partielle Integraltion $\left(1 \text{ dim: } \int_a^b dxf(x)g'(x) = fg\Big|_a^b - \int dxf'(x)g(x)\right)$ in 3 Dimensionen:

$$E_{el} = \frac{\epsilon_0}{2}\left[\oint_{\substack{\text{Rand des}\\ \text{Volumens}}} \varphi(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\,d\vec{s} - \int d^3\vec{r}\,\vec{E}(\vec{r})\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right]$$

Volumen $\to \infty; E(\vec{r}) \to 0$ auf Rand $\Rightarrow \oint_{\text{Rand}} \to 0$ verschwindet

$$E_{el} = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\vec{E}(\vec{r})|^2 d^3\vec{r} \qquad \vec{\nabla}\varphi = -\vec{E}$$

$E_{el} \sim |\vec{E}|^2$ Energie im $\vec{E}$-Feld gespeichert
Energiedichte $W_{el} = \frac{\epsilon_0}{2}|\vec{E}|^2$

Bsp.: **Plattenkondensator mit Spannung** $U(q)$
E_{el} und dq auf Platte hinzufägen?
$dE_{el} = Udq = \frac{q}{C}\, dq$ Energie um Kondensator von $\varnothing$ nach Q laden

$$E_{el} = \int_0^Q \frac{q}{C}\, dq = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}|_0^Q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$\boxed{E_{el} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 V_{\text{Kond}}|\vec{E}|^2}$$

$$V_{\text{Kond}} = Ad \quad C = \epsilon_0\frac{A}{d} \quad |\vec{E}| = \frac{U}{d}$$

I.5 Materie in elektrischen Feldern

I.5.1 Polarisation des Mediums

Betrachte Nichtleiter, $Q = 0$ im externen $\vec{E}$-Feld

- keine freien Elektronen e^-
- Verschiebung der e^- im Atom / Molekül.
  $\to$ mikroskopische Dipole $\vec{p}_i = q_i\vec{d}_i$
  $\to$ Ausrichtung im $\vec{E}$-Feld: $\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{p}_i$ parallel

Effekt:

- Polarisation des Mediums $\vec{P}$ oder $(\underline{P})$
- Flächenladungsdichte σ_{pol} am Rand des Mediums

Polarisation $\vec{P}$:

$$\vec{P} \equiv \frac{1}{V}\sum_i \vec{p}_i$$

Mittelung der mikroskopischen Dipole über Volumen V
$[\vec{P}] = \frac{C}{m^2}$ Annahme: alle $\vec{p}_i$ gleich $\vec{P}$, gleich ausgerichtet, Dipoldichte η
Gilt:

$$P = |\vec{P}| = \eta|\vec{p}\,| = \eta qd$$

Flächenladungsdichte σ_{pol}
Betrachte $V = dA$ am Rand des Mediums

$$P = \frac{\eta qdA}{A} = \frac{\eta qV}{A} = \frac{Q}{A} = \sigma_{\text{pol}}$$

d.h. Polarisation $\widehat{=}$ Flächenladungsdichte am Rand

Polarisationsfeld $\vec{E}_{\text{pol}}$ im Medium

Anwendung von Maxwell-Gl auf Bereich mit σ_+

$$\oint_{\sigma_+} \vec{E}_{\text{pol}}\, d\vec{A} = \frac{Q_{\text{ein}}}{\epsilon_0}$$

rechts $\vec{E}_{\text{pol}} = 0$ keine Beitrag zum Fluss
links $\vec{E}_{\text{pol}} \upuparrows \vec{A}$

$$E_{\text{pol}} A = \frac{Q_{\text{ein}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{\text{pol}} = \frac{Q_{\text{ein}}}{A\epsilon_0} = \frac{\sigma_{\text{pol}}}{\epsilon_0} = \frac{P}{\epsilon_0}$$

Richtung von $\vec{E}_{\text{pol}}$:
$\vec{p}$ von neg. Pol zur pos Pol
$\vec{E}_{\text{pol}}$ von pos. Ladung zur neg Ladung

$$\rightarrow \vec{P} = -\epsilon_0 \vec{E}_{\text{pol}}$$

$\vec{E}_{\text{Med}}$ Überlagerung von $\vec{E}_{\text{Pol}}$ und $\vec{E}_{\text{frei}}$

a) $\vec{E}_{\text{frei}}$ **ohne Medium** $\quad$ $\vec{E}_{\text{pol}}$ **aus Dipolen**

$$\vec{E}_{\text{Med}} = \vec{E}_{\text{frei}} + \vec{E}_{\text{Pol}} = \vec{E}_{\text{frei}} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

Polarisation abhängig von $\vec{E}_{\text{Med}}$: $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_{\text{Med}}$
$\chi_e \mathrel{\widehat{=}}$ dielektrische Suszeptibilität

$$\vec{E}_{\text{Med}} = \frac{\vec{E}_{\text{frei}}}{1 + \chi_e}$$

$\epsilon = 1 + \chi_e$ relative Dielektrizitätskonstante / Permitivität

$$\vec{E}_{\text{Med}} = \frac{\vec{E}_{\text{frei}}}{\epsilon}$$

ϵ Faktor um den Feld geschwächt wird
ϵ, χ_e abhängig von der Art und Struktur des Mediums

I.5.2 Felder und Maxwell gl. im Medium

3. MW-Gl:

$$\text{div} \vec{E}_{\text{Med}} = \frac{P}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{Pol}}) \tag{$*$}$$

ρ_{frei} freie Ladung, ρ_{Pol} Polarisationsladungen
Polarisationsladung in V mit Rand A

$$\Delta Q_{\text{Pol}} = \int_A \sigma_{\text{Pol}}\, dA = \int_A \vec{P}\, dA \tag{1}$$

Außerdem:

$$\Delta Q_{\text{Pol}} = -\int \rho_{\text{Pol}}\, dV \tag{2}$$

$\vec{P} \uparrow\uparrow, \vec{E}_{\text{frei}} \rightarrow \vec{P} \uparrow\downarrow \vec{A}$ auf rechter Grenze also mit „+“ $\Delta Q_{\text{Pol}} < 0$ in (1)
$\rho_{\text{Pol}} > 0$ in (2) $\rightarrow$ „−“ Zeichen in (2)

Gaußscher Satz:

$$\oint \vec{P}\, d\vec{A} = \int \text{div}\vec{P}\, dV = \int -\rho_{\text{Pol}}\, dV$$

Es folgt:

$$\rho_{\text{Pol}} = -\text{div}\vec{P} = \epsilon_0 \text{div}\vec{E}_{\text{Pol}}$$

In (*):

$$\text{div}\vec{E}_{\text{Med}} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_{\text{frei}} + \epsilon_0 \text{div}\vec{E}_{\text{Pol}})$$

$$\text{div}(\vec{E}_{\text{Med}} - \vec{E}_{\text{Pol}}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho_{\text{frei}}$$

Definiere $\vec{D}$ als Flussdichte / elektrische Erregung / dielektrische Verschiebung

$$\vec{D} = \epsilon_0(\vec{E}_{\text{Med}} - \vec{E}_{\text{Pol}}) = \epsilon_0 \vec{E}_{\text{frei}} = \epsilon_0 E_{\text{Med}} + \vec{P}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{3.MW-GL}: & \text{div}\vec{D} = \rho_{\text{frei}} \\ \text{1.MW-GL}: & \text{rot}\vec{E}_{\text{Med}} = 0 \end{array}}$$

Feldverhalten an Grenzflächen

Betrachte Grenzfkäche: Medium/Dielekktrikum ($\epsilon > 1$) $\leftrightarrow$ Volumen ($\epsilon = 1$)

- nur Polarisation $\rho_{\text{frei}} = 0 \quad \cdot \vec{E}_{\text{ext}}$
- $\rho_{\text{frei}} = 0 \Rightarrow D^{\perp}_{\text{Med}} = D^{\perp}_{\text{Vak}} \qquad E^{\perp}_{\text{Med}} = \frac{1}{\epsilon} E^{\perp}_{\text{Vak}}$

$$\oint \vec{D}\, dA = 0 \text{ da frei } = 0$$

$d \rightarrow 0$: Beiträge von linker und rechter Stirnfläche

$$D^{\perp}_{\text{Med}}(A) + D^{\perp}_{\text{Vak}}(-A) = 0 \rightarrow D^{\perp}_{\text{Med}} = D^{\perp}_{\text{Vak}}$$

- parallele Komponenten $D^{\parallel}, E^{\parallel}$

$$\oint\limits_{ABCD} \vec{E}\, d\vec{s} = 0 \text{ da rot}\vec{E} = 0$$

$\overline{AB}, \overline{CD} \rightarrow 0$ nur $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ tragen bei

$$\int\limits_{\overline{BC}} \vec{E}\, d\vec{s} + \int\limits_{\overline{AD}} \vec{E}\, d\vec{s} = 0 \quad d\vec{s}_{\overline{AD}} = -d\vec{s}_{\overline{BC}}$$

$$\int_B^C E^{\parallel}_{\text{Med}}\, d\vec{s} + \int_A^D E^{\parallel}_{\text{Vak}}\, d\vec{s} = 0$$

$$\Rightarrow E^{\parallel}_{\text{Med}} = E^{\parallel}_{\text{Vak}} \rightarrow D^{\parallel}_{\text{Med}} = \epsilon D^{\parallel}_{\text{Vak}}$$

Berechnungsgesetz der Elektrostatik

$$\tan \alpha_{\text{Med}} = \frac{E^{\parallel}_{\text{Med}}}{E^{\perp}_{\text{Med}}} = \epsilon \frac{E^{\parallel}_{\text{Vak}}}{E^{\perp}_{\text{Vak}}} = \epsilon \tan \alpha_{\text{frei}}$$

I.5.3 Mikroskopische Beschreibung der Polarisation (Pol.)

angenommen $\vec{P} \sim \vec{E}_{\text{Med}}$

- Verhalten von Nichtleitern ohne permanentes Dipolmoment $\vec{p} = 0$
  z.B. H_2 Ladungsschwerpunkt ($\vec{r}_s$) mittig

- im $\vec{E}$-Feld verschiebung der e^- bzw. $\vec{r}_s$ $\quad \vec{F}_e \sim \vec{E}$
  $\rightarrow \vec{p} = \alpha \vec{E}$, $\quad \alpha \mathrel{\widehat{=}}$ elektrische Polarisierbarkeit solche Materialien: verschiebungs Polarisation dominiert, sind Dielektrika im engeren Sinne

- Makroskopische Polarisation $\vec{P}$

$$\vec{P} = n\vec{p} = n\alpha \vec{E}_{\text{Med}} \quad n \mathrel{\widehat{=}} \text{Moleküle} \quad n = \frac{N_A \ \rho}{m_{\text{Mol}}}$$

$$N_A \text{ Avogadrokonst.} \quad \rho \text{ Massendichte} \quad m_{\text{Mol}} \text{ Molmasse}$$

- Hatten $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_{\text{Med}}$
  Zusammenhang α und $\chi_e \epsilon$

$$\boxed{\alpha = \frac{\epsilon_0}{n}\chi_e = \frac{\epsilon_0}{n}(\epsilon - 1)}$$

  gut für kleine P (z.B. Gase)
  wen P groß, dann Dipol-Dipol-Wechselwirkung
  $\rightarrow$ Clausius-Mosotti-Beziehung: $\alpha = \epsilon \frac{\epsilon_0}{n} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$

Bsp.: H_2**-Molekül im E-Feld** $1 \frac{\text{MV}}{\text{m}}$

$$\alpha_{H_2} = 8,7 \cdot 10^{-41} \frac{\text{Cm}}{\text{V}} (\alpha_{\text{typ}} \approx 100 \alpha_{H_2})$$

$$|\vec{p}|_{H_2} = 8,7 \cdot 10^{-35} \text{Cm}$$

$$d = 2,7 \cdot 10^{-16}\text{m} \quad L = 7,4 \cdot 10^{-11}\text{m (Abstand H Atome)}$$

$d/L = 3,6 \cdot 10^{-6}$

Orientierungspolarisation:

- polare Moleküle (z.B. H_2O) mit permanentem Dipolmoment $\vec{p}$
  R $\rightarrow$ **paraelektrisch**

- $\vec{E}_{\text{Med}} = 0$ Richtung der $\vec{p}$ statistisch / gleichverteilt $\rightarrow$ kein $\vec{P}$

- $\vec{E}_{\text{Med}} \neq 0$ Ausrichtung der $\vec{p}$ im $\vec{E}$-Feld

Wärmebewegung behindert vollständige Ausrichtung. Ausrichtungsgrad beschrieben durch Boltzmannverteilung ($\rightarrow$ Ex1)

$$f(\Delta E) = f_0 e^{-\Delta E/kT} \quad \text{T Temperatur, k Boltzmannkonstante}$$

$$\Delta E = -|\vec{p}||\vec{E}|\cos\theta \quad \text{pot Energie des Dipols}$$

$\vec{E} = E\vec{e}_z$ Beitrag von 1 Molekül $\vec{p}_z = |\vec{p}|\cos\theta$
Polarisation aus $f(\theta)$
Ergibt:

$$P = n\vec{p}_z \underbrace{\left\{ \coth\frac{p|\vec{E}|}{kT} - \frac{kT}{p|\vec{E}|} \right\}}_{\text{Langevin fkt.} L(\frac{p|\vec{E}|}{kt})}$$

$L(x) = 1$ d.h. alle Dipole ausgerichtet. oft $p|\vec{E}| << kT$ dann $L(x) \approx \frac{1}{3}x$ für $|x| << 1$ dann

$$P = np\frac{1}{3}\frac{p|\vec{E}|}{kt} = \frac{1}{3}\frac{p^2|\vec{E}|}{kt}$$

wieder linear in $|\vec{E}|$

- für $|\vec{E}|$ groß, oder T klein nicht lineare Effekte und schließlich Sättigung
- Suszeptibilität abhängig von Temperatur $\chi_e(T)$

Bsp.: H_2O-Molekül in E-Feld $100\frac{\text{kV}}{\text{m}}$
$P_{H_2O} = 6,15 \cdot 10^{-30}\text{Cm} \quad \epsilon_{H_2O} \approx 80$
$\Delta E = |\vec{p}||\vec{E}| = 7,7 \cdot 10^{-27}\text{J} = 4,8 \cdot 10^{-8}\text{eV}$
Ausrichtungsgrad: $\frac{1}{3}\frac{p|\vec{E}|}{kT} = 1,9 \cdot 10^{-6}$
d.h. für 1 Million Moleküle, 2 mit $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{E}$ Paraelektrisch: Überlagerung von Verschieb. pol. und Orientierungs-pol.

$$P = n\left(\alpha + \frac{1}{3}\frac{p^2}{kT}\right)E_{\text{Med}}$$

plus Clausius-Moretti-Korrektur $3\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\epsilon_0 = n(\alpha + \frac{1}{3}\frac{p^3}{kT})$ hieraus $\chi_e, \epsilon \quad P = \epsilon_0\chi_e E_{\text{Med}}$
Exp. Bestimmung: Messung $C(T) \rightarrow \chi_e(T)$
Ferroelektrika

- große permanente Dipolmomente $\vec{p}$ (Kristalle, kein Eisen)
- Dipol-Dipol-Wechselwirkung $\rightarrow$ Domänenbildung ohne $\vec{E}$-Feld (durcheinander)
- in $\vec{E}$-Feld: Ausrichtung der Domänen sehr große ϵ bis 10^5

I.5.4 Kondensator im Dielektrikum

Meist: Dielektrikum zwischen den Platten
Ziel:

- Erhöhung der Spannungsfelder
- Erhöhung der Kapazität

Exp:

a) Ladung $Q = \text{const.}$ $C = \frac{Q}{U}$
Beobachtung: $U(|\vec{E}|)$ kleiner $\rightarrow C$ größer

b) Spannung $U = \text{const.}$
Beobachtung: Q größer $\rightarrow C$ größer

Erklärung: (a)

- Dielektrikum polarisiert
- Oberflächenladung σ_{pol} an Grenzflächen
$\rightarrow \vec{E}_{\text{pol}} \uparrow\downarrow \vec{E}_{\text{ext}} \Rightarrow \vec{E}_{\text{Med}}$ geschwächt $\rightarrow U$ kleiner $U = |\vec{E}|d$

U def. über Arbeit um dq von „+“ nach „−“ zu bewegen. Feld schwächer $\rightarrow U$ kleiner um Faktor ϵ also

$$\boxed{C = \epsilon\epsilon_0 \frac{A}{d}}$$

und

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\epsilon\epsilon_0|\vec{E}|^2 V$$

Energiedichte

$$W_{\text{el}} = \frac{E_{\text{el}}}{V} = \frac{1}{2}\epsilon\epsilon_0|\vec{E}|^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0\vec{D}\vec{E}$$

Vgl. von elektrischer Energie ohne und mit Dielektrikum

$$\begin{array}{ccc}
\text{ohne} & & \text{mit} \\
C_0 & \rightarrow & \epsilon C_0 \\
U_0 & \rightarrow & U_0/\epsilon \quad \text{bei } Q = \text{const.} \\
 & \Downarrow & \\
E_{\text{el}} & \rightarrow & E_{\text{el}}/\epsilon
\end{array}$$

Teilweise mit $\epsilon > 1$ **gefüllter Kondensator**

- Ladungsdichte größer bei $\epsilon > 1$ da $E_{\parallel}^{\text{Med}} = E_{\parallel}^{\text{Vak}}$
- Parallelschaltung von 2 Kondensatoren
- $C_{\text{Med}} = \epsilon C_{\text{Vak}} \rightarrow Q_{\text{Med}} = \epsilon Q_{\text{Vak}}$ da $U = \text{const.}$

Kapitel II

Magnetostatik

II.6 Ströme

II.6.1 Elektrischer Strom

Bisher: ruhende Ladungen, räumlich getrennt $\rightarrow \vec{E}, \varphi$
Jetzt: leitende Verbindung $\rightarrow$ pos. und/oder neg. Ladungen bewegen sich
Strom: Ladungsfluss pro Zeit durch eine gegebene Fläche

$$\boxed{I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{I = \frac{dQ}{dt}}$$

1. wenn $I =$ const. ist in Δt und 2.für $I(t)$
$[I] = 1A$ Ampére SI-Basiseinheit
Richtung: von „+“-Pol zu „−“-Pol $\rightarrow$ technische Stromrichtung
in Leitern (metall): $\uparrow\downarrow$ Richtung der Elektronen

Stromdichte:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{dI}{dA}\vec{e}_j \quad \vec{e}_j \text{ in Stromrichtung}$$

$$\text{Zshg.: } I = \int_A \vec{j}\, d\vec{A}$$

Bsp.: **Vakuumdiode**
v_e (Kathode) $\approx$ 0m/s Beschleunigung in $\vec{E} = E\vec{e}_z$
wieviele e^- treffen in dt auf pos. Platte?
Alle e^- im Abstand $< ds = v\, dt$ bzw. Volumen $ds\, A$ befinden $V = ds\, A = Av\, dt$ Anzahlt e^- in V: $n_e V$ n_e Elektronendichte. Transponierte Ladung $dQ = en_e Av\, dt$

$$\text{Strom } \boxed{I = en_e Av} \quad \text{Stromdichte } \boxed{\vec{j} = en_e \vec{v}}$$

$\vec{j}$ konstant entlang Flugrichtung wegen Ladungserhaltung
$\Rightarrow$ Kathode: kleine v, große n_e ; Anode: große v, kleine n_e

Kontinuitätsgleichung

Betrachte Volumen V, mit Oberfläche A
Strom (oder) Ladungsdichte/Zeit druch A = Änderung der Ladung in V

$$I = \oint_{A(V)} \vec{j}\, d\vec{A} = -\frac{dQ}{dt}$$

Gaußscher Satz:

$$\Rightarrow \int_V \text{div}\vec{j}\; dV = -\frac{d}{dt}\int \rho_Q \; dV$$

$Q = \int \rho_{el} \, dV$

$$\Rightarrow \boxed{\text{div}\vec{j}(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\rho_Q(\vec{r},t)} \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

Ladungen erhalten; werden nicht erzeugt oder vernichtet

II.6.2 Ohmsches Gesetz

G.S. Ohm (1826): ($I \sim U$) in vielen Leitern

$$\Rightarrow \boxed{U = RI}$$

Ohmsche Gesetze (OG.) makroskopische Form R: el./ohmscher Widerstand

$$[R] = 1\frac{\text{V}}{\text{A}} = 1\Omega \quad \text{Ohm}$$

Exp: Strom-Spannungs Charakteristika $I(U)$

$R(U) = \frac{dU}{dI}$

Kohlefaden	Glühlampe	Konstantandraht
R kleiner für große U	R größer für große U	R konstant

Ursache: Temperaturabhängigkeit $R(T)$ ($\rightarrow$später)
Strikt: Ohmscher Widerstand $I \sim U^1$; nicht-ohmsch $I \sim U^k \quad k \neq 1$

Supraleitung

Flüssiger Stickstoff: $T_{W_2} = 77K \widehat{=} -196°C$
Messung: $R(\Delta T) \quad \Delta T = T_{\text{Probe}} - T_{W_2}$ Zeitabstand $\Delta t \approx 5s$ Beobachtung:
Hochtemperatursupraleiter $R = 0\Omega$ bis zu $\Delta T \approx 8K$
$\rightarrow$ Sprungtemperatur $T_c = 77K + 8K = 85K \widehat{=} -188°C$
Kupfer:
$R = 0,7\text{m}\Omega$ für kleine ΔT, danach ohmscher Widerstand
Supraleitung:
gewisse Materialien die für $T < T_c$ Widerstand Verlieren

II.6.3 Arbeit und Leitung

An Ladung q (von φ_1 nach φ_2 gebracht) wird Arbeit verrichtet/gewonnen

$$W = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU$$

In dt wird dQ transportiert, dann wird Leistung P verrichtet.

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \frac{dQ}{dt}U = UI} \quad \text{el. Leistung}$$

Umkehrung:
$$W = \int_0^t P(t)\ dt = \int_0^t U(t)I(t)\ dt$$
$[P] = 1\mathrm{W} = 1\mathrm{VA} = 1\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{s}}$
Leistung wird im Leiter in Wärme umgewandelt geht aus Stromkreis verloren.

Exp: Widerstände

Widerstände aus Fe und Cn in Reihe geschalten $R_{Cn} < R_{Fe}$ Strom I gleich
$P = UI = RI^2 \quad \rightarrow \quad P_{Cn} < P_{Fe}$

II.6.4 Leitungsvorgänge in Metallen und Halbleitern

Metalle:
Strom durch die e^- im Leitungsband, U an Drahtenden $\rightarrow \vec{E}$-Feld
Beschleunigung der e^- $\quad \vec{F}_{e^-} = -e\vec{E}$
Aber: thermische Bewegung $hT(300\mathrm{K}) = 0,0025\mathrm{eV} \rightarrow v_{\mathrm{therm}} \approx 10^5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ Stöße mit den Atomen („Reibungseffekt")
$\rightarrow$ Drift der Elektronen mit v_{drift}
Stromdichte $\vec{j}$: in dt passieren alle e^- die Fläche A in $dl = v_0 t$ bzw $V = dl\ A$

$$dQ = N_e e = e n_e V\ dA\ dt$$

N_e Anzahl e^-, n_e e^--Dichte

$$\boxed{\vec{j} = -n_e e \vec{v}_0}$$

„$-$" weil $\vec{v}_0 \uparrow\downarrow \vec{E}$
Driftgeschewindigkeit v_D

$$v(t) = at = \frac{e|\vec{E}|}{m_e}t \qquad m_e \text{ Elektronenmasse}$$

(mit $F_e l = q \cdot \vec{E}$ und $q = e$)
Sei $\mathcal{T}_s$ mittlere Zeit zwischen 2 Stößen

$$v_0 = \frac{e|\vec{E}|\mathcal{T}_s}{m_e} = \boxed{\frac{n_e e^2 \mathcal{T}}{m_e}}|\vec{E}|$$

$$\boxed{\sigma_{el} = \frac{1}{\rho_{el}} = \frac{n_e e^2 \mathcal{T}}{m_e}}$$

σ_{el} Elektrische Leitfähigkeit?!?!? $\quad \rho_{el}$ **spezifischer Widerstand** $[\rho_{el}] = \Omega m$

$$\boxed{\vec{j} = \sigma_{el}\vec{E}}$$

ohmsches Gesetz in mikroskopischer/originaler Form
„Rückkehr" zu makroskopischem OG. $\vec{I} = \text{const.}$ über A

$$I = |\vec{j}|A = \frac{1}{\rho_{el}}|\vec{E}|A = \frac{1}{\rho_{el}}\frac{U}{l}A$$

d.h.

$$\boxed{R = \frac{\rho_{el}\ l}{A}}\textbf{Widerstand eines Drahtes}$$

Halbleiter:
Bandlücke ΔE zwischen Valenz- und Leitungsband

$$n_e = n_0 e^{-\frac{\Delta E}{kT}} \quad \text{steigt mit T}$$

- für $T < T_{\text{Sättigung}}$: $\frac{dR}{dT} < 0$
- für $T > T_{\text{Sättigung}}$: $\left.\begin{array}{ll} n_e & \to \text{const.} \\ \mathcal{T}_s & \text{sinkt mit T} \end{array}\right\} \sigma$ sinkt mit T

II.6.5 Kirchhoffsche Gesetze KHG

- 2 KHG + OG Grundlage für U bzw. I in R-Netzwerken
- 1.KHG (auch **Kontenregel**): im Knoten gilt $\sum_i I_i = 0$ aus Ladungserhaltung
- 2.KHG (auch **Maschenregel**): in Maschen gilt $\sum_i U_i = 0$ folgt $\oint \vec{E}\ d\vec{S} = 0$

Widerstandsschaltungen

- **Reihenschaltung:**
  Knotenregel: $I = I_1 = I_2$
  Machenregel: $U = U_1 + U_2$
  OG: $U = R_1 I_1 + R_2 I_2 = (R_1 + R_2)I$
  $\to R_{\text{ges}} = R_1 + R_2$
  bzw. für n R_i :

$$R_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

- **Parallelschaltung:**
  Knotenregel: $I = I_1 + I_2$
  Maschenregel: $U = U_1 = U_2$
  $I = I_1 + I_2 = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} = U(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$
  $\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$
  bzw. für n R_i :

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

Wheatstonesche Brückenschaltung
Ziel: Messung von unbekannten R_x
Spannungen an den grünen Punkten:

$$U_L = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0 \qquad U_R = \frac{R_x}{R_0 + R_x} U_0$$

kein Strom I wenn $U_L = U_R$ dann gilt: $\frac{R_2}{R_1+R_2} = \frac{R_x}{R_0+R_x}$

II.6.6 Leitungsvorgänge in Flüssigkeiten

Beobachtung: reines H_2O kein Strom, Zugabe von $NaCl$ Strom $\sim$ Konzentration des $NaCl$

- Elektrolyt: Lösung von Salz, Säure, Lauge die Strom leitet
- Dissoziation in Lösung (Ionisation/Hydratisierung)

$$NaCl \rightarrow Na^+(H_2O) + Cl^-(H_2O)$$

  wenn E(Anlagerung) $>$ E(Ionisation)

- Wanderung derNa^+, Cl^--Ionen im $\vec{E}$-Feld.
  Materialabscheidung an Elektroden (fest, gasförmig)
  Na^+ zu Kathode($-$): Abscheidung von Na ($Na^+ + e^- = Na$)
  CL^- zu Anode($+$): Abscheidung von Chlorgas ($2Cl^- \rightarrow Cl_2 + 2e^-$)

Exp:

Glas bei $T = 300$K Isolator, erstarrte Flüssigkeit bei $T = 600°$C Funken, erster Stromfluss
Strom $\rightarrow T \nearrow \rightarrow I \nearrow \rightarrow T \nearrow \dots$ bis das Glas schmilzt
Ionenleitung:
pos. Ionen mit Ladung Z_+ und Dichte n_+
neg. Ionen mit Ladung Z_- und Dichte n_-

Drift im $\vec{E}$-Feld: $\vec{v}_{+/-} = \pm\beta_\pm\vec{E}$ $\beta_\pm$ ist die Beweglichkeit der Ionen (teilweise: u, μ) $[\beta] = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{Vs}}$

Stromdichte:

$$|\vec{j}| = e(n_+Z_+V_+ + n_-Z_-V_-)$$

$$\sigma_{el} = e(n_+\beta_+Z_+ + n_-\beta_-Z_-)$$

für kleine n: $\beta \neq \beta(n)$ typisches $\beta \sim 10^{-8} \rightarrow 10^{-7}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{Vs}}$

Voltasche Spannungsreihe

Metall in Wasser: wenn $E_{\text{Ionisation}} < E_{\text{Hydratisierung}}$
Atom $\rightarrow A^+(H_2O) + e^-$ (Elektrode)
$\vec{E}$-Feld zwischen neg. Elektrode und pos. Elektrode <u>bewirkt</u> $E_{\text{Ionisation}}$ wächst $\rightarrow$ Sättigung der Ionisation
$n_{\text{Gleichgewicht}}$ und $U_{\text{Gleichgewicht}}$ (Elektrode und Flüssigkeit) $\rightarrow$ elektrolytische Tension

- zwei Elektroden aus
  a) gleichem Metall $\rightarrow$ keine Spannung zwischen Elektroden
  b) unterschiedliche Metalle $\rightarrow \Delta U$ Galvanisches Element
- Messung von ΔU zu Referenzelektrode (H_2 umspültes Platin)
  $\rightarrow$ Voltasche Spannungsreihe („$-$“ unedel $\rightarrow$ „+“edler)

II.6.7 Stromleitung in Gasen

- Gase: keine (minimale) freie Ladungsträger
- Entladung: Stromfluss durch Gas
- Ladungsträger: Ionen (A^+, M^+) und e^-, $n_+ \approx n_-$
- 2 Arten:
  - unselbstständige von außenerzeugte A^+, e^-
  - selbsständige: initialer Strom wird verstärkt

Unselbsständige Ionisation:

a) als Röntgenstralung $\gamma + A \to A^+ + e^-$

b) therm. Bewegung in Stößen
$T \nearrow$ dann $E_{\text{kin}} \nearrow$ für E_{kin}

Erzeugungsrate für Ionen $(e^-, A^+) : (\frac{dn}{dt})_{\text{erz}} = \alpha$
Vernichtungsrate/Rekombinationsrate: $(\frac{dn}{dt})_{\text{Reh}} = -\beta n_+ n_- = -\beta n^2$

$$n_+ = n_- = n$$

- Summe: $(\frac{dn}{dt})_{\text{Gesamt}} = \alpha - \beta n^2$
- Gleichgewicht: $(\frac{dn}{dt})_{\text{gesamt}} = 0 \to n_{\text{Gleichgew}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
  $n_{\text{Gleich.}} = \text{const.} \to$ ohmscher Bereich

$$\vec{j} = e\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}(\beta^+ + \beta^-)\vec{E}$$

- $U, \vec{E}$ sehr groß: $\lambda_{\text{frei}} \gg$ Abstand der Platten
  $\to$ keine Rekombination $\beta \to 0$
  Sättigungsstrom I_s : alle $e^- A^+$ abgesandt

$$I_s \sim \alpha$$

II.6.8 Stromquellen

Innenwiderstand

- $U_v < U_0$
- Stromquelle hat maximale Leitung

$\to$ Effekt beschrieben durch Ersatzschaltbild (Reale Stromquelle als Spannungsquelle in reihe mit Widerstand)

Spannungs-/Stromquelle mit U_0 in Serie mit Innenwiderstand R_I U_0 Elektromotorische Kraft EMK

$$I = \frac{U_0}{R_I + R_V} \qquad U_{kl} = R_V I = \frac{R_V}{R_I + R_V} U_0$$

Leistung:

$$P_V = U_{kl} I = \frac{R_V}{(R_V + R_I)^2} U_0^2$$

Grenzfälle:

a) $R_V \to \infty$ $U_{kl} \to U_0$ $I \to 0$ $P_V \to 0$ offene Stromstärke

b) $R_V \to 0$ $U_{kl} \to 0$ $I = \frac{U_0}{R_I} = \frac{U_{kl}}{R_V}$ $P_V \to 0$ kurz schluss

dazwischen P_V maximal (bei $R_I = R_V$ in Übung berechnet)

II.6.9 Thermoelektrizität

Kontaktpotential

- 2 unterschiedliche Metalle in Kontakt
  Fermi-Energien / Austrittsarbeiten sind unterschiedlich
  $E_F(A) < E_F(B)$: wandern e^- von A nach B, A pos. geladen / B neg. geladen
  $\to \vec{E}(B \to A)$ entgegengesetzt zu Strom

$\to$ Kontaktspannung $U_{\text{kon}} = E_F(B) - E_F(A)$
Geschlossener Kreis: $\sum_i U_{\text{kon}}^i = 0$ bei konstanter Temperatur

Seebeck-Effekt

- U_{kon} temperaturabhängig
- Kontakte 1 und 2 bei T_1 und T_2
  $\to$ Seebeck Koeffizienten $[S_i] = \frac{\text{V}}{\text{K}}$ typ: $10^{-5 \to -6}$ in Metall 10^{-3} in Halbleiter
- ΔT bewirkt Spannung

Peltier-Effekt
Strom durch Material A, B, A

- Strom durch Kontaktstellen bewirkt ΔT
- $E_F^A > E_F^B$ AB heiß BA kühl

$A \to B : \frac{dW}{dt} > 0$ T steigt, Energie dem Gitter zugeführt
$B \to A : \frac{dW}{dt} < 0$ T sinkt, Energie dem Gitter entzogen

$$\frac{dW}{dt} = (\Pi_A - \Pi_B) I \qquad \text{Peltierkoeffizienten}[\Pi] = \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (\text{typ } 10^2 J/K)$$

Es gilt: $\Pi_A = S_A T$

II.7 Das magnetische Feld

II.7.1 Eletromagnetische Kräfte

$\rightarrow$ Folie

II.7.2 Magnetisches Feld

- Elektrostatik: Coulombkraft $\vec{F}_e$
  $\rightarrow \vec{E}$-Feld $\quad \vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_{\text{Probe}}}$
- Beobachtung $\rightarrow$ Feld $\rightarrow$ Kraft
- Beobachtung:
  - **Feldlinien immer geschlossen**
    [auch innerhalb von Permanentmagneten]
    $\Rightarrow$ **Quellen-frei**
  - in Nähe von Pol und Stromdurchflossener Leiter Feldlinien Dichter
    $\rightarrow$ Feld größer $\sim \frac{1}{r^k} \quad k > 0$
  - Konvention:
    Außenbereich von Nord $\rightarrow$ Süd
    Innenbereich von Süd $\rightarrow$ Nord
    in **Permanentmagneten**

Idee: mathematische Beschreibung durch Vektorfeld $\vec{B}(\vec{r})$ „magnetische Feldstärke", „Flussdichte", „Induktion"
$[\vec{B}] = 1\text{T (Tesla)} = 1\frac{Vs}{m^2}$ (Zshg. später)
magnetischer Fluss $\Phi_M \equiv \int_A \vec{B}\, d\vec{A}$

II.7.3 Maxwell-Gleichung der Magnetostatik

- geschlossene Feldlinien ohne Anfang und Ende

$$\boxed{\begin{gathered} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \Phi_M = \oint_A \vec{B}\, d\vec{A} \end{gathered}}$$

4. MW-Gl. $\vec{B}$ ist Quellen-frei.

Äquivalenz mittels Gaußschen Satzes

$$\oint_A \vec{B}\, d\vec{A} = \int_V \text{div}\vec{B}\, dV = 0 \quad \text{für beliebige Volumina} \;\Rightarrow\; \text{div}\vec{B} = 0$$

- kein skalares Potential φ_M definierbar

- Feld von stromdurchflossenen Leiter.

$$\vec{B}(\vec{r}) = B(|\vec{r}|)\vec{e}_\varphi \text{ nur von r abhängig}$$

$$\oint_{r=r_0} \vec{B}\, d\vec{s} = 2\pi r_0 B(r_0) \neq 0 \quad \mu_0 I \text{ experimentell}$$

$$\boxed{\rightarrow \quad \oint \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 I}$$

Ampéresches Gesetz μ_0 magnetische Feldkonstante Permeabilität des Volumens

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad \mu_0 \text{ ohne Felder } \rightarrow \text{später}$$

- Anwendung des stokesschen Satzes mit $I = \int \vec{j}\, d\vec{A}$

$$\oint_{R(A)} \vec{B}\, d\vec{s} = \int_A \text{rot } \vec{B}\, d\vec{A} = \mu_0 \int \vec{j}\, d\vec{A}$$

Weg $\vec{s}$ auf dem Rand $R(A)$ pos. Schraube um $\vec{A}$

$$\boxed{\text{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \qquad \oint \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 I}$$

2 MW-Gl. Wirbelkerne = Orte mit Stromdichte $\neq 0$

Def: **magnetische Feldenergie** E_{mag} bzw. **Energiedichte** w_{mag}

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2\mu_0} \int |\vec{B}|^2\, dV \qquad w_{\text{mag}} = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2$$

Zsfg:
$\vec{E}$ ist wirbelfreies Quellfeld
$\vec{B}$ ist quellfreies Wirbelfeld

II.7.4 Das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$

- da div$\vec{B} = 0$ gibt es $\vec{A}$, so dass $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$
- Frage:
  - wie bestimmt man $\vec{A}$
  - ist $\vec{A}$ „real“ oder nur mathematisches Hilfsmittel
    - klassische Physik: lediglich Hilfsmittel
    - Quantenmechanik: Aharahou-Bohm-Effekt
      $\vec{A} \neq 0$ beeinflusst einen e^--Strahl obwohl
      $\vec{B} = 0$ auf Weg des Strahls
    - QED: $(\varphi_{\text{el}}, \vec{A})$ ist „Wellenfunktion“ des Photon

- $\vec{A}$ ist nicht eindeutig
  $\vec{A}$ und $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad} f \quad f$ Skalarfeld liefern selbes $\vec{B}$, da $\text{rot}(\text{grad} f) = 0$
  $\rightarrow$ Eichfreiheit durch Wahl von f oft:
  Coulombgleichung: $\text{div}\vec{A} \stackrel{!}{=} 0$

- f eindeutig ? Nein.
  Alle f mit $\Delta f = \text{div grad} f = 0$ erfüllen $\text{div}(\vec{A}) = 0$
  nutze Freiheit in f, so dass $|\vec{A}(\vec{r})| \stackrel{|\vec{r}|\to\infty}{\longrightarrow} 0$

- Betrachte 2. MG.
  $$\text{rot}\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \cdots = -\Delta\vec{A}$$
  also
  $$\boxed{\begin{array}{c}\Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j} \\ t = 1\end{array}}$$

II.7.5 Berechnung von Magnetfeldern

Aus MW-Gl. bzw. Ampéresches Gesetz

1) **gerader Leiter**, Strom I
   $\int \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 I \quad B$ nur abhängig von r, in Richtung $\vec{e_r}$
   $B(r)2\pi r = \mu_0 I$
   $$\boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

2) **Koaxialkabel**
   $$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \begin{cases} \frac{r}{R_s} & \text{für} \quad r < R_s \\ \frac{1}{r} & \text{für} \quad R_s < r < R_n \\ 0 & \text{für} \quad R_n < r \end{cases}$$

3) **Solenoid**
   $$\oint \vec{B}\, d\vec{s} = \int_C^D \vec{B}\, d\vec{s} + \int_A^B \vec{B}\, d\vec{s} \quad \text{auf anderen Wegen} \quad \vec{B} \perp d\vec{s}$$
   B homogen und entlang Symmetrieachse
   für „AB“$\rightarrow \infty \quad B(\infty) \rightarrow 0$
   $$\oint \vec{B}\, d\vec{s} = \int_C^D \vec{B}\, d\vec{s} = Bl = \mu_0 N I$$
   l Länge des Solenoiden N Windungszahl
   $$\boxed{B = \frac{\mu_0 N I}{l}}$$

4) **Toroidspule** $\vec{B} = \frac{\mu N I}{2\pi R}\vec{e}_\varphi$

5) **Flächenstrom** $B_y = -\frac{1}{2}\mu_0\vec{j}d$

Biot-Savart-Gesetz BSG

- Ziel: Verfahren zur Berechnung von $\vec{B}$ für beliebige gegebene $\vec{j}, I$
- Betrachte infinitesimales Leiterstück mit infinitesimaler Stromdichte $d\vec{j} \to d\vec{V}$
  $\vec{B}_{\text{Gesamt}}$ aus Summe/Integral über $d\vec{j}$
- Es gilt: $\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$ [Vgl:$\Delta\varphi_{\text{el}} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$]

$$\text{Lsg:} \qquad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\vec{r'}\,\frac{\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$$

$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} = \cdots = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\vec{r}\,'\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\vec{\nabla}\times\vec{j}(\vec{r}\,') = +\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}^3\vec{j}\times(\vec{r}\times\vec{r}\,')\right]$
$\text{rot}\vec{j} = 0$ kein Kreisstrom ohne externen Antrieb in Magnetostatik

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\vec{r}\,'\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}}$$

wenn $\vec{j} = \text{const.}$ über Leiteroberfläche
$\vec{j}\,d\vec{V} = \vec{j}\,d\vec{A}\,d\vec{l} = I\,d\vec{l} \qquad d\vec{l}\upuparrows d\vec{j}\upuparrows\vec{I}$

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\times d\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}} \qquad \text{Biot Savart Gesetz}$$

Bestimmung von $\vec{B}$ mit BSG

1) Leiterschleife mit Radius R, Strom I
   ges: Magnetfeld auf der Achse aus $d\vec{l}\sim\vec{j} \quad d\vec{B}\sim-(\vec{r}-\vec{r'})\times d\vec{l}$
   Symmetrie bzw Kompensation von $d\vec{l}$ bei φ und $\varphi+\pi \Rightarrow \vec{B} = B_z\vec{e}_z$

$$dB_z = \cos\alpha dB \quad \cos\alpha = \frac{R}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

   $d\vec{l}\perp\vec{r}-\vec{r'} \Rightarrow$ Beträge ausreichend

$$\begin{aligned}B_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int dl\frac{\cos\alpha}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \quad \text{auf Kreis} \quad R, z = \text{const.}\\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

   für $z = 0$ (Ringzentrum) : $B_z = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{1}{R}$

2) Helmholzspulenpaar
   2 Spuen mit Radius R, Abstand d_0 (oft $= R$)

II.8 Magnetische Kräfte

II.8.1 Die Lorenz Kraft

Erinnerung: Anziehung $I_1 \uparrow\uparrow I_2$, Abstoßung $I_1 \uparrow\downarrow I_2$ keine Coulomb-Kräfte, da Leiter neutral

Exp: Fadenstrahlrohr

Beobachtung: $R \sim \frac{1}{I} \sim \frac{1}{|\vec{B}|}$
Richtung der Kraft: $-\vec{v}_e \times \vec{B}$ rechte-Hand-Regel „+“$Q_e = -e$

keine Arbeit verrichtet durch F_{Mag} (Loranzkraft) $W = \int F_{\text{Mag}}\, d\vec{s} = 0$ $F_{\text{Mag}} \perp \vec{v} \Rightarrow$ Richtung von $\vec{v}$ ändert sich, Betrag von $\vec{v}$ konstant

$$\boxed{\vec{F}_{\text{Mag}} = \vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}} \quad \text{Lorenzkraft}$$

Fadenstrahlrohr:

Beschleunigung in $\vec{E}$-Feld: $eU_B = \frac{1}{2}mv^2$ $v = \sqrt{\frac{2eU_B}{m}}$
für $U_B = 300\text{V}$ $v = 0,03$ Lichtgeschwindigkeit
$\vec{F}_L = \vec{F}_{\text{Zent}}$ $-e\vec{v} \times \vec{B} = -\frac{mv^2}{r}\vec{e}_r$
$\Rightarrow r = \frac{|\vec{p}|}{eB}$ $\vec{p} = m\vec{v}$

$$T_{\text{Umlauf}} = \frac{\text{Umfang } 2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{eB} \quad \omega_{\text{Umlauf}} = \frac{2\pi}{T_{\text{Umlauf}}} = \frac{e}{m_e}B \quad \textbf{Zyklotronfrequenz}$$

(gilt für $v << C$ Lichtgeschwindigkeit)
für $v \to c$ wird $T \nearrow, \omega \searrow$
Wenn $\vec{v} \perp \vec{B}$ dann in Gl. $\vec{v}, \vec{p} \to \vec{v}_{\perp\vec{B}}, \vec{p}_{\perp\vec{B}}$
$eB = \frac{v_{\perp B}}{\rho}(\cdot m_e)$? ρ Radius in Ebene $\perp \vec{B}$
$\vec{v}_{\parallel B}$ unbeeinflusst $\to$ **Helixbahn** des Elektronenstrahls
Anwendung: $\frac{e}{m}$- Bestimmung

Hall-Effekt:

- Hall-Effekt (Erwin Hall 1879 in Doktorarbeit)

Exp: Strom durch (Halb)leiter in Magnetfeld
$\to$ Spannung $U_{\text{Hall}} \perp \vec{B}$ und $\perp \vec{j}$

- e^- durch $\vec{F}_L$ abgelenkt $\to$ $\vec{E}$-Feld wegen e^--Mangel/Überschuss
- Gleichgewicht wenn $\vec{F}_{\text{el}} + \vec{F}_L = \vec{0}$
  $e|\vec{v}_D||\vec{B}| = e|\vec{E}|$ $|\vec{E}| = \frac{U_H}{b}$
  $I = |\vec{j}|A = jbd$ $j = n_e|\vec{v}_D|e$ $ev_D = \frac{j}{n_e}$
  Also: $F_L = \frac{I}{bdn_e}B$ $F_{\text{el}} = e\frac{U_H}{b}$

$$\to \boxed{U_H = \frac{IB}{edn_e}}$$

$(n_e)_{H_L} \ll (n_e)_{\text{Leiter}} \Rightarrow$ für $I = \text{const.}$ wird U_H größer

- Anwendung: Hall-Sonde zur Messung von B-Feldern.

II.8.2 Kräfte auf Stöme

Leiter mit Querschnitt A: $I = jA \quad \vec{j} = en_e\vec{v}_D$
Kraft auf infinitesimales Leiterstück dl, $\quad dq = en_eA\ dl$

$$d\vec{F} = dq(\vec{v}_D \times \vec{B}) = en_eA\ dl(\vec{v} \times \vec{B}) = A\ dl\vec{j} \times \vec{B}$$

$d\vec{l} \equiv dl\frac{\vec{j}}{|\vec{j}|}$

$$d\vec{F} = Ajd\vec{l} \times \vec{B} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

Integration über Leiter: $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \rightarrow$ erklärt rollenden Stab/Leiterschaukel

- **parallele Ströme (galvanische Kräfte)**
  I_2 erzeugt $\vec{B}(I_2)$ am Ort von I_1
  $\rightarrow$ Lorenzkraft auf I_1 gemäß obiger Gleichung
  Abstand der Leiter r , länge $l \gg r$
  Kraft auf dl_1 im Leiter 1

  $$d\vec{F}_1 = I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B}(I_2)$$

  Hatten:

  $$\vec{B}(I_2) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{r}\vec{e}_\varphi$$

  $\vec{B}(I_2) \perp I_1 \Rightarrow$ Beträge ausreichend

  $$dF_1 = I_1\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{r}dl_1$$

  $$\boxed{|\vec{F}_1| = \int_0^L \frac{\mu_0}{2\pi r}I_1 I_2\ dl_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{L}{r}I_1 I_2}$$

  $d\vec{l}_1 \times \vec{B}$ mit Rechte-Hand-Regel
  $\rightarrow$ Abstoßung für $I_1 \uparrow\downarrow I_2$
  actio = reactio Aymmtrie zwischen I_1 und I_2

Exp: „Stromwaage“

Masse von 200 mg zum Beschweren
$F_L = F_G \quad F_G = m \cdot g \quad F_L = \frac{\mu_0}{2\pi}I^2\frac{L}{r}$
$\rightarrow I = \sqrt{\frac{mg2\pi r}{L\mu_0}} = 15,1A$ Vgl. Exp: I = 14,9 A

Exp: Meissler-Ochsenfeldeffekt

Hochtemperatursupraleiter (Ytrium Barium Kupferoxid)

- Für $T < T_{\text{sprung}}$ supraleitend

- Magnetfeld aus Körper hinausgedrängt Erklärung in Festkörperphysik (Ginzburg-Landau-Th, BCS-Theorie)

- warum schweben über Magnetbahn ? → Übung

II.8.3 Der Magnetische Dipol

Def.: **magnetischer Dipol** C → **Leiterschleife**

$$\boxed{\vec{p}_M = I\vec{A}}$$

Richtung von $\vec{A}$ aus $\vec{j}$ über „Rechte-Hand-Regel“
Hatten B auf Achse:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{l^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_z$$

für $R^2 \ll z^2$:

$$= \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{z^3}\vec{e}_z \sim \boxed{\frac{1}{z^3}}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\vec{p}_M}{z^3} \quad \boxed{\vec{p_M} \upuparrows \vec{B}}$$

Allgemein (außerhalb Achse)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}|^3}\left(\frac{3\vec{r}(\vec{p}_M\cdot\vec{r})}{r^2} - \vec{p}_M\right)$$

Nordpol bei + z - Richtung, Südpol bei − z - Richtung
→ $\vec{p}_M$ zeigt von Süd- nach Nordpol

- Dipol des e^- im Wasserstoffatom (klassisch)

$$\vec{F}_{\text{el}} = \vec{F}_{\text{zen}} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = m_e\frac{v^2}{r} = \frac{Lv}{r^2} \quad L \equiv m_e v r$$

In QM: L quantisiert $n\hbar$ $\quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$ $\quad h$ Plancksches Wirkungsquantum
e^--Bewegung $\widehat{=}$ Kreisstrom $I = \frac{-e}{T}$ $\quad T$ Umlaufzeit

$$\vec{p}_H = I\vec{A} = \frac{-e}{T}\vec{A} = \frac{-ev}{2\pi r}\pi r^2\vec{e}_n = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}$$

für $L = 1\hbar$: $\qquad |\vec{p}_H| = \underbrace{\frac{e\hbar}{2m_e}}_{\mu_B} = 9,26\cdot 10^{-24}$ A m^2

μ_B = Bohrsches Magneton

Kräfte auf magnetischen Dipol

Leiterschleife $\vec{F} = I\oint d\vec{l}\times\vec{B} \quad \vec{M} = I\oint \vec{r}\times(d\vec{l}\times\vec{B})$

a) **homogenes $\vec{B}$-Feld**
$\vec{F}_{\text{ges}} = 0$ da Kompensation von $d\vec{l}$ bei φ und $d\vec{l}$ bei $\varphi + \pi$

$$\vec{M} = IB \sin\alpha \pi R^2 \vec{e}_y = \vec{p}_M \times \vec{B}$$

$\vec{B} \downarrow \rightarrow \vec{p}_M \qquad \vec{p}_M \uparrow\uparrow \vec{B}$ energetisch günstiger

$$\Delta E_{\text{mag}} \equiv -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \vec{M}\, d\vec{\alpha} = -\vec{p}_M \vec{B} \quad \text{Nullpunkt für } E_{\text{mag}} \text{ bei } \alpha = \pi/2$$

b) **inhomogenes $\vec{B}$-Feld**
Taylorentwicklung $\vec{B}(\vec{r}) = \underbrace{\vec{B}(\vec{r}_0)}_{\text{const.}} + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\vec{B}(\vec{r}))\,|_{\vec{r}=\vec{r}_0}$
$\vec{B}(\vec{r}_0)$ kein Beitrag zur Kraft
Rechnung zeigt: $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{B}\vec{p}_M)$
d.h. **Kraft in Richtung $\vec{B}$-Gradient. Dipol wird in Bereich großer Feldstärke gezogen**.

II.9 Magnetische Felder in Materie

II.9.1 Magnetisierung der Materie

- Atom: Elektronen und Kern. e^- mit $\vec{p}_M$ verbunden
  $\vec{p}_M$ im Magnetfeld $\vec{B}$ ausgerichtet
- $\vec{B}(\vec{p}_M) \equiv \vec{B}_{\text{Mag}}$ überlagert sich externes $\vec{B}$-Feld $\rightarrow \vec{B}_{\text{Med}}$
- e^- mit $\vec{L} \Rightarrow \; \vec{p}_M = \underbrace{-\frac{e}{2m_e}}_{\gamma_L} \vec{L} = \gamma_L \vec{L} \quad |\vec{L}| = n\hbar$
  γ_L = gyromagnetisches Verhältnis manchmal auch ohne -
  für $|\vec{L}| = 1\hbar \quad |\vec{p}_M| = \mu_B$ Bohrsche Magneton (des e^-)
- komplexe Atome: viele $e^- \rightarrow$ vektorielle Summe der $\vec{L}_i$
  $\rightarrow$ Quantenmechanik, Atomphysik
- Kern: $\gamma_{L,\text{ Photon}} = \frac{e}{2m_p} \approx \frac{1}{1836}\gamma_{L,e^-} \rightarrow$ vernachlässigbar
- Spin des e^- (Eigendrehimpuls) $\vec{S} : |\vec{S}| = \frac{1}{2}\hbar$

$$\vec{p}_M = \gamma_S \vec{S} \quad \gamma_S = -\frac{e}{m_e} = 2\gamma_L$$

- Gesamt Dipolmoment eines $e^- : \vec{p}_M = \vec{p}_{M,L} + \vec{p}_{M,S}$
  komplexes Atom: $\vec{p}_{M,\text{gesamt}}$ aus e^--Konfiguration
  aber: $\vec{p}_{\text{Atom}}$ fixiert, $\vec{B}_{\text{ext}}$ ändert nur Orientierung von $\vec{p}_{\text{Atom}}$

Magnetisierung der Materie

- Ziel: Einfluss der atomaren $\vec{p}_M$ auf $\vec{B}$-Feld in Materie quantifizieren
- Magnetisierung $\vec{M} \equiv \frac{1}{V}\sum_i \vec{p}_{M,i}$ aus Überlagerung von atomaren Kreisströmen
  - im Inneren Kompensation von entgegengerichteten Strömen
  - auf Rand Oberflächenstrom I_{Mag}

$$\vec{M} = \frac{I_{\text{Mag}}\vec{A}}{V} \qquad |\vec{M}| = \frac{I_{\text{Mag}}A}{Ad} = \frac{I_{\text{Mag}}}{d} \quad d = \text{Dicke der schicht}$$

- $\vec{B}_{\text{Mag}}$ aus I_{Mag} über Ampéresches Gesetz Annahme: $\vec{B}_{\text{Mag}}$ homogen, im Vakuum verschwindet

$$\oint \vec{B}_{\text{Mag}} d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{Mag}} \qquad B_{\text{Mag}} d = \mu_0 I_{\text{Mag}}$$

$$|\vec{B}_{\text{Mag}}| = \mu_0 \frac{I_{\text{Mag}}}{d} = \mu_0 |\vec{M}| \text{ Rechte-Hand-Regel} \vec{M} \uparrow\uparrow \vec{B}$$

- Vgl: Elektrostatik $\vec{E}_{\text{Pol}} = -\frac{1}{\epsilon_0}\vec{P} \quad \vec{B}_{\text{Mag}} = \mu_0 \vec{M}$
  $\vec{E}_{\text{Pol}} \uparrow\downarrow \vec{P} \rightarrow$ Schwächung des E-Feldes
  $\vec{B}_{\text{Mag}} \uparrow\uparrow \vec{M} \rightarrow$ Stärkung des B-Feldes

- Feld im Medium $\vec{B}_{\text{Med}} = \vec{B}_{\text{frei}} + \vec{B}_{\text{Mag}} = \vec{B}_{\text{frei}} + \mu_0 \vec{M}$
  $\vec{B}_{\text{Mag}}$ / $\vec{M}$ proportional zu $\vec{B}_{\text{frei}} \quad \vec{B}_{\text{Mag}} = \chi_m \vec{B}_{\text{frei}}$
  χ_m magnetische Suszeptibilität
  Achtung: $\vec{E}_{\text{Pol}} = \chi_e \vec{E}_{\text{Med}}$ (nicht via $\vec{E}_{\text{frei}}$)
  Zsgh:

$$\vec{B}_{\text{Med}} = (1 + \chi_m)\vec{B}_{\text{frei}} \equiv \mu \vec{B}_{\text{frei}}$$

  μ relative Permeabilität $\mu = 1 + \chi_m$
  $((1 + \chi_e)\vec{E}_{\text{Med}} = \vec{E}_{\text{frei}})$

Maxwell- Gleichungen im Medium

Def: neues Feld **magnetische Erregung**

$$\boxed{\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0}\vec{B}_{\text{frei}}} \qquad \text{magnetische Erregung}$$

Es gilt:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \qquad \vec{B}_{\text{Med}} = \vec{B}_{\text{frei}} + \vec{B}_{\text{Mag}} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

Verwendung von $\vec{B}$ und $\vec{H} \rightarrow$ kompaktere MW-Gl.

- Ab jetzt: „ Med “ unterdrücken
  $\vec{B}$ und $\vec{E}$ sind Felder (im Medium oder Vakuum) die gemessen werden
- Vorteil der MW-Gl in $\vec{B}, \vec{H}, \vec{E}, \vec{D}$
  - keine Kenntnis über $\rho, \vec{j}$ im Medium

- nur externen $\rho, \vec{j}$

$\vec{H}$ Teil des $\vec{B}$-Feldes $(\cdot \frac{1}{\mu_0})$ das aus der Externen Anregung/Erregung stammt

- keine magnetischen Monopole $\text{div}\vec{B} = 0$
  $\text{div}(\mu, \mu_0, \vec{H}) = \mu\mu_0 \text{ div}\vec{H} + \mu_0 \text{ grad}\mu \cdot \vec{H} \stackrel{!}{=} 0$
  - homogenes Medium $\mu = \text{const.} \rightarrow \text{div}\vec{H} = 0$
  - inhomogenes Medium $\mu = \mu(\vec{r}) \rightarrow \text{div}\vec{H} = -\frac{\text{grad}\mu\vec{H}}{\mu} \neq 0 \quad \text{i.a.}$
- Verhalten an Grenzflächen
  d.h.überlagerung von Vakuum ($\mu = 1$) zu Medium ($\mu \neq 1$)
  $\text{rot}\vec{H} = \vec{j} = 0 \Rightarrow \ \vec{H}^{\parallel}_{\text{frei}} = \vec{H}^{\parallel}_{\text{Med}} \quad \vec{B}^{\parallel}_{\text{frei}} = \frac{1}{\mu}\vec{B}^{\parallel}_{\text{Med}}$
  $\text{div}\vec{B} = 0 \Rightarrow \quad \vec{B}^{\perp}_{\text{frei}} = \vec{B}^{\perp}_{\text{Med}} \quad \vec{H}^{\perp}_{\text{frei}} = \mu\vec{H}^{\perp}_{\text{Med}}$

II.9.2 Diamagnetismus

- keine permanente Dipole ($\vec{I}_{\text{Atom}} = \vec{L}_{\text{Atom}} + \vec{S}_{\text{Atom}} = 0$)
  wenn abgeschlossene Schulen in Hülle (reist)
- $\vec{B}_{\text{ext}}$ induziert magnetische Dipole
  $\vec{P}^{\text{ind}}_{M} \uparrow\downarrow \quad \rightarrow$ nächstes Kapitel
  $\rightarrow$ Schwächung des B-Feldes, $\chi_m < 0, \mu < 1$
  typ: $\chi_m \sim -10^{-5} \rightarrow -10^{-6}$
- Kraft im inhomogenen Feld $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{p}_M)$
  $\vec{M} = \frac{1}{V}\sum_i \vec{p}_{M,i}$
  $\vec{p}_M = V\vec{M} = V\chi_m\vec{H} = \frac{V\chi_m}{\mu_0}\vec{B}$

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{B}\frac{V\chi_m}{\mu_0}\vec{B}) = \frac{V\chi_m}{\mu_0}\vec{\nabla}|\vec{B}|^2$$

- Probe aus Bereich von hohem Feld herausgedrängt
- alle Substanzen zeigen Diamagnetismus aber durch Paramagnetismus und Ferromagnetismus Effekt überdeckt

II.9.3 Paramagnetismus

- $x > 0 \quad \vec{M} \uparrow\uparrow \vec{B}_{\text{ext}}$ permanente magnetische Dipole
- $\vec{B}_{\text{ext}} = 0$ keine Ausrichtung des atomaren $\vec{p}_{M,i} \Rightarrow \vec{M} = 0$
- $\vec{B}_{\text{ext}} \neq 0$ teilweise Ausrichtung des $\vec{p}_{M,i}$
  Gegenwirkung durch thermische Bewegung
  Ausrichtung durch Boltzmannvtlg. $ce^{-\frac{\Delta E}{kT}} \approx c(1 - \frac{\Delta E}{kT})$
  $\Delta E = \mu_B|\vec{B}| = 9,26 \cdot 10^{-24}\text{J}$ für $B = 1T$
  $kT(T = 300\text{K}) = 4,14 \cdot 10^{-21}\text{J} \quad \Rightarrow \frac{\Delta E}{kT} \ll 1$

- Mittleres Dipolmoment eines Atoms

$$|\overline{\vec{p}_M}| = \frac{1}{3}\frac{|\vec{p}_m|^2}{kT}|\vec{B}| \qquad n_p \quad \text{Dipoldichte}$$

$$\vec{M} = n_p\overline{\vec{p}_M} = \frac{1}{3}\frac{n_p|\vec{p}_m|^2}{kT}\vec{B}$$

$$\boxed{\chi_m = \frac{\mu_0\vec{M}}{|\vec{B}|} = \frac{1}{3}\frac{n_p\mu_0|\vec{p}_m|^2}{kT} \sim \frac{1}{T}} \qquad \text{Curie- Gesetz}$$

$\chi_m(300\text{K}) \overset{\text{typ}}{\approx} 10^{-6} \rightarrow 10^{-4}$

- Probe in den Bereich größeres B-Feldes gezogen

II.9.4 Ferromagnetismus

- große χ, $\vec{M}$ aus WW der atomaren Dipole
- hohe Temperatur: Dipole statistisch verteilt $E_{\text{therm}} > E_{\text{Austausch}}$
- Temperatur sinkt: $E_{\text{therm}} > E_{\text{Austausch}}$
  $\rightarrow$ Ausrichtung der Dipole an mehreren stellen
  $\rightarrow$ Bildung der weißschen Bezirke / Domänen
- für $\vec{B} = \vec{0}$ gilt $\vec{M} = \vec{0}$ (zunächst)
- $\vec{B} \neq \vec{0}$: Ausrichtung der Domänen $\vec{M} \uparrow\uparrow \vec{B}$
  - Sprungweise $\rightarrow$ Barkhausen Effekt
  - Sättigung $\rightarrow$ alle Domänen ausgerichtet
- Phasenübergang bei Temperatur Erhöhung
  bei $T > T_c$: $E_{\text{therm}} > E_{\text{Austausch}}$ $(N_i : T_c = 358\text{C})$
  $\rightarrow$ auflösen der Domänen
  $\rightarrow$ $\vec{M} \rightarrow 0$ Entmagnetisierung
  Phasenübergang: Ferro- $\rightarrow$ Paramagnetismus

$$\text{obehalb } T_c : \chi = \frac{d}{(T - T_c)^r} \qquad c = \text{const.}, \ r = 1 \rightarrow 1,5$$

II.9.5 Elektromagnet

- Kombination Spule und Eisenkern
  $\rightarrow$ Formung des Magnetfeldes
  $\rightarrow$ Luftspalt zur Nutzung des Feldes
  Ampéresches Gesetz:

$$\oint \vec{H}d\vec{s} = H_{\text{Fe}} + l_{\text{Fe}} + H_0 d = NI$$

Grenze: $B_\perp = \text{const.}\ \mu_{\text{Fe}} H_{\text{Fe}} = H_0$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{\frac{l_{\text{Fe}}}{\mu_{\text{Fe}}} + d} \approx \frac{\mu_o NI}{d} \qquad \mu_{Fe} \approx 4000 \qquad hierfehltwas$$

Spalt kleiner, dann B größer
vgl: Luftspule $B = \frac{\mu_0 NI}{L_{\text{Spule}}}$ hier Verstärkung $\frac{dL_{\text{Spule}}}{d}$

Kapitel III

Elektrodynamik

III.10 Elektromagnetische Induktion

III.10.1 Induktionsgesetz

1831 Faraday: in veränderlichem $\vec{B}$-Feld wird entlang Leiter Spannung induziert U_{ind}

Beobachtung: $U_{\text{ind}} \sim \frac{d}{dt}A,\ \frac{d}{dt}\vec{B},\ \frac{d}{dt}$ Winkel $(\vec{A}, \vec{B})$

$$U_{\text{ind}} \sim \frac{d}{dt}\Phi_M \quad \Phi_M = \int_M \vec{B} d\vec{A}$$

- Wer verursacht U_{ind}?
- F_L auf beweglichen e^- und ortsfesten A^+
- e^- verschoben $\to$ E-Feld bis Gleichgewicht $F_{el} = F_L$

$$e|\vec{E}| = e|\vec{v}||\vec{B}| \quad U_{\text{ind}} = l|\vec{E}| = l|\vec{v}||\vec{B}|$$

$$v = \frac{ds}{dt},\ l = \text{const.},\ |\vec{B}| = \text{const.}$$

$$|U_{\text{ind}}| = |\vec{B}|\frac{d}{dt}(ls) = |\vec{B}|\frac{d}{dt}|\vec{A}| = \frac{d}{dt}\Phi_M \quad \Phi_M = |\vec{B}|A$$

Lorentzkraft bewirkt U_{ind}. Hier: aus Änderung von A

- Leiterschleife (A =const.) im $\vec{B}$-Feld
  $\boxed{A}$ $\vec{B}$ homogen, $\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{B} \to \Phi_M = \text{const.}, U_{\text{ind}} = 0$
  $\boxed{B}$ B inhomogen, $B_z = f(z)B_0 \quad f(z)$ stetige, monoton fallend

$$B_z \uparrow\uparrow \vec{v} \text{ keine } F_L,\ \text{keine } U_{\text{ind}}$$

$$\text{radiale komponente } B_r,\ \vec{B}_r \perp \vec{v} \to F_L \to U_{\text{ind}} \neq 0$$

$$\text{aus div } \vec{B} = 0 \text{ folgt } B_r = \frac{B_0}{r}\int dr\ r\frac{df(z)}{dz}$$

Ring geschlossen: fließt Induktionstrom I_{ind}
Offen: Induktionsspannung an Enden

$$F_{el} = e|\vec{E}| = e\frac{|U_{\text{ind}}|}{2\pi r} \stackrel{!}{=} e|\vec{v}|B_r = F_L$$

$$|U_{\text{ind}}| = 2\pi r|\vec{v}|B_r \tag{1}$$

Betrachte Fluss durch Leiterschleife

$$\Phi_M = \int_A \vec{B}d\vec{A} = \oint_A B_z dA = \int d\varphi \int dr\ rB_0 f(z)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_M}{dt} &= \underbrace{2\pi}_{\int d\varphi} B_0 \frac{d}{dt}\int dr\ rf(z) = 2\pi B_0 \int \frac{df(z)}{dz}\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{v}\ r\ dr \\ &= 2\pi B_0|\vec{v}|\int dr\ r\frac{df(z)}{dz} = f2\pi B_r r|\vec{v}| \end{aligned}\tag{2}$$

also aus Vgl (1) und (2) $|U_{\text{ind}}| = \frac{d\Phi_M}{dt}$

Lenzsche Regel

- Richtung von U_{ind} und I_{ind}?
- Betrachte Leiterschleife $\vec{A} \uparrow\uparrow z$-Achse /Symmetrieachse
  Ring nach links bewegen $\frac{d\Phi_M}{dt} > 0$
  für $U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_M}{dt}$ Strom Linksschraube um $\vec{A}$ machen oben I nach unten, e^- Lorentzkraft nach vorne Richtung von I konstant mit Herleitung aus F_L
- Gedanken Experiment: $\vec{B}_{\text{ind}}(I_{\text{ind}}) \uparrow\downarrow \Delta\vec{B}_{\text{sol}}$ sonst Verletzung der Energieerhaltung

Lensche Regel:

$\boxed{I_{\text{ind}} \text{ so gerichtet, dass erzeugte } \vec{B}_{\text{ind}} \text{ der Änderung von } \Phi_M \text{ entegenwirkt.}}$

Zusammenfassung: Änderung von Φ_M in A erzeugt/induziert U_{ind} auf Rand des Leiters gemäß Faradayschen Induktionsgesetzes.

$$\boxed{U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_M}{dt}}$$

- I_{ind} ist Kreisstrom (z.B. in Ring) $\to$ Kreis/Ring förmiges $\vec{E}$-Feld
  $\oint \vec{E}d\vec{s} = U_{\text{ind}} \neq 0$ zunächst Widerspruch zu 1. MX-Gl.
  aber bisher: $\Phi_M = \text{const.} \to U_{\text{ind}} = 0$
  neuer Term in MW-Gl.

$$\boxed{\oint_{dA} \vec{E}d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B}d\vec{A} + \text{satz von Stokes}}$$

$$\oint_{dA} \vec{E}d\vec{s} = \int_A \text{rot}\vec{E}d\vec{A} = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B}d\vec{A}$$

$$A \text{ beliebig } \Rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{E} = -\frac{d}{dt}\vec{B}}$$

1. MW- Gl.:
„zeitlich veränderliche $\vec{B}$-Feld erzeugt elektrisches Wirbelfeld“

„Wirbelströme"

- bisher: Leiterschleifen, Spulen
- generell: in geschlossenem Leiter erzeugte elektrische Wirbelfeld Kreisströme / Wirbelströme
- Wirbelströme erzeugen $\vec{B}$-Feld gemäß Lenzscher Regel
  [Folie: Wirbelstrom bremse des ICE3]

III.10.2 Selbstinduktion

- Schleife/ Spule mit Induktion und separates veränderliches Magnetfeld
- aber: Induktion im Feld-erzeugenden Leiter → Selbstinduktion

Betrachte Spule: Strom $I \to \vec{B}$-Feld erzeugt

$$\Phi_M \sim |\vec{B}| \sim I \quad \boxed{\Phi_M \equiv LI}$$

(selbst-)Induktion L $[L] = 1\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} = 1\mathrm{H}$ (Henry)

Lenzsche Regel

$$\boxed{U_{\text{ind}} = \frac{d\Phi_M}{dt} = -L\frac{dI}{dt}}$$

L abhängige von Geometrie des Leiters, zeitlich konstant

Maschenregel $U_0 = U_L + U_R$

Gegenspannung $U_L = -U_{\text{ind}}$

$\to U_0 = U_R - U_{\text{ind}} = RI + L\frac{dI}{dt}$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I + \frac{U_0}{L} \qquad \text{(DGL)}$$

Lösungsansatz: $I(t) = Ae^{-\chi t} + B$

$$\frac{dI}{dt} = -\chi A e^{-\chi t}$$

Einsetzen: $-\chi A e^{-\chi t} = -\frac{R}{L}Ae^{-\chi t} - \frac{R}{L}B + \frac{U_0}{L}$
für belt: $\to \chi = \frac{R}{L} A_{\text{bel}} B = \frac{U_0}{R}$

$$\to I(t) = \frac{U_0}{R}(1-e)^{-\frac{R}{L}t}$$

starker Anstieg, asymptotisch gegen $\frac{U_0}{R} (\hat{=} L = 0)$

Ausschaltvorgang

[Folie: Ausschaltvorgang]

Knotenregel $I_1 = -I_2$

Maschenregel $0 = U_2 - U_1 = R_2 I_2 - U_{\text{ind}} - R_1 I_1 = R_2 I_2 + L\frac{dI_2}{dt} - R_1 I_1$

$$\frac{d}{dt} I_2(t) = -\frac{R_1 + R_2}{L} I_2(t)$$

Lösung $I_2(t) = \frac{U_0}{R_2} e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t} \quad I_2(0) = \frac{U_0}{R_2}$

Beispiele für Induktivitäten

1. Solenoid spule

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I \text{ Wicklungsdichte } \eta = \frac{N}{l}$$

$$\Phi_M = \int_A \vec{B} d\vec{A} = \mu_0 \eta A I \quad \vec{B} \uparrow\uparrow \vec{A}, \quad \vec{B} \text{ homogen}$$

in jeder Windung Spannung induziert

$$\begin{aligned} U_{\text{ind}} = -N\frac{d\Phi_M}{dt} &= -\mu_0 N \eta A \frac{dI}{dt} \\ &= -\mu_0 \eta^2 l A \frac{dI}{dt} \end{aligned}$$

Da $U_{\text{ind}} = -L\frac{dI}{dt}, \quad L = \mu_0 \eta^2$ V

2. Koaxialkabel $L = \frac{\mu_0}{2\pi}(\frac{1}{2} + ln\frac{R}{R_s})l$

3. Lecherleitung $L = \frac{\mu_0 l}{\pi}[\frac{1}{2} + ln\frac{d-r_0}{r_0}]$ minimal für $d = 2r_0$

III.10.3 Feldenergie

- Betrachte Schaltvorgänge in Spule
  - Einschalten → Aufbau $\vec{B}$-Feld Energie im $\vec{B}$-Feld gespeichert
  - Ausschalten $U_{\text{ext}} = 0$, Stromfluss → Energiefreisetzung
    Strom durch R_1 und R_2 in Serie → $P = I^2 R \quad R = R_1 + R_2$

$$W_m = \int_0^\infty I^2(t) R \, dt = \int_0^\infty I_0^2 e^{-\frac{2R}{L}t} R \, dt = -I_0^2 \frac{LR}{2R} e^{-\frac{2R}{L}t}\Big|_0^\infty$$

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2} I_0^2 L}$$

Solenoid: $L = \mu_0 n^2 A l \quad B = \mu_0 n I_0$
dann $w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} I_0^2 \mu_0 = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2$

Ergebnis ist allgemeingültig

Zsfg :	$W_{\text{el}} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \vert\vec{E}\vert^2$	Kondensators	$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} C U^2$
	$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2\mu_0} \vert\vec{B}\vert^2$	spule	$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L I^2$
	mit $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$		c für Lichtgeschwindigkeit
	$W_{\text{ges}} = \frac{1}{2}\epsilon_0 (\vert\vec{E}\vert^2 + c^2 \vert\vec{B}\vert^2)$		

III.10.4 Maxwell-Gleichungen

- Gl. für statische Situation
  + Faradays Induktionsgesetz
  + neuer Term „Verschiebungsstrom“ aus Theo. Argument (Maxwell)

Betrachte:

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I$$

Links ringförmigen Weg am Leiter $\oint \vec{B}\ ds = 0$
Widerspruch zu Ampéreschen Gesetz/ Maxwell-Gl.

Rechts keinen Strom I im Kondensator aller el. Fluss Φ_{el} durch Zylinderfläche $\rightarrow$ zusätzlicher Beitrag $\frac{d\Phi_{\mathrm{el}}}{dt}$ nur wenn $\frac{d\Phi_{\mathrm{el}}}{dt} \neq 0$ fließt I und erzeugt $\vec{B}$-Feld

Rechnung $I_V = \frac{dQ}{dt}$ $\frac{dQ}{dt}$ Änderung auf Kondensatorplatten

$$|\vec{E}| = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \quad Q = |\vec{E}|A\epsilon_0$$

$$\begin{aligned} I_V &= \frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt}(|\vec{E}|A) \\ &= \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E}\ d\vec{A} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_{\mathrm{el}}}{dt} \end{aligned}$$

Addition von I_V zu normalen Strom in MW-Gl.

$$\boxed{\oint \vec{B}\ d\vec{s} = \mu_0(I + I_V) = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}\Phi_{\mathrm{el}}}$$

Diff. Form: $I = \int_A \vec{j}\ d\vec{A}$ und Stokes‘scher Satz

$$\int_A \mathrm{rot}\ \vec{B}\ d\vec{A} = \mu_0 \int \vec{j}\ d\vec{A} + \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E}\ d\vec{A}$$

A beliebig:

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}\vec{E}$$

Finale Form der MW-Gl. im Vakuum Kopplung von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ durch „$\frac{d}{dt}$”-Therme

III.11 Wechselstromkreise

III.11.1 Wechselstrom

- periodische Änderung der Polarität der Spannungsquelle meist Sinusförmig:

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 \sin\omega t & \frac{1}{T} &= f \text{ Frequenz} \\ I(t) &= I_0 \sin\omega t & \frac{2\pi}{T} &= 2\pi f = \omega \end{aligned}$$

I_0 bzw. U_0 Maximal o. Spitzenwerte
Leistung am ohmschen Widerstand $P(t) = U(t)I(t)$
Spitzenwert $U_0 I_0 = \frac{U_0^2}{R} = R_0 I_0^2$

$$P(t) = \frac{U_0^2}{R}\sin^2\omega t = RI_0^2\sin^2\omega t$$

$$\begin{aligned}\overline{P} =& \frac{1}{T}\int_0^T \frac{U_0^2}{R}\sin^2\omega t\ dt \\ &= \frac{1}{2}\frac{U_0^2}{R} = \frac{1}{2}I_0^2 R = \frac{1}{2}U_0 I_0\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Effektivwerte: Werte die Gleichstrom hat mit gleichem Leistungsverbrauch

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

[Folie: Netzspannung in Deutschland]
[Folie: Drei-Phasen-Wechselspannung]
[Folie: Generator zur Erzeugung der Netzwechselspannung]

III.11.2 Diodenschaltungen

Diode Bauelement, dass Strom nur in eine Richtung fließt Schaltsymbol durchlässig

[Folie: Kennlinie und Schaltsymbol]

$U_{Ak} > 0,5$V Diode wird leitend
$U_{Ak} \gg 0,7$V l_{in} $I-U$-Charakteristik $I = k(U-0,7\text{V})$
$U_{Ak} < 0,5$V fließt Sperrstrom $I_{\text{sperr}} \approx pA \rightarrow \mu A$
$U_{Ak} \ll 0$ Durchbruch

Gleichrichter

[Folie: Brückengleichrichtung]

- Ziel: Erzeugung von Gleichspannung aus Wechselspannung

i) **Einweggleichrichtung**
  - nur in pos. Halbperiode Diode leitend
  - $U_{\text{aus}}^{\text{max}} = U_{\text{ein}} - 0,7$V
  - Glättung durch Kondensator $U_{\text{aus}}(t) = U_{\max}e^{-t/RC} \approx U_{\max}(1-\frac{t}{RC})$

ii) **Grätzschaltung**
  - in jeder Halbperiode 2 Dioden leitend
  - $U_{\max}^{\text{aus}} = U_{\text{ein}} - 1,4$V

– Glättung wie oben

iii) **Villardschaltung**
Einschalten: U_C bis $U_0 - 0,7\text{V}$ geladen
Maschenregel: $U_{\text{aus}} = U_{\text{ein}} + U_C = U_{\text{ein}} + U_0 \approx U_0 + U_0 \cos\omega t$
$\rightarrow$ Spannungsschub um U_0
+ Gleichrichter $\rightarrow$ Greinacher Schaltung
$U_{D_1} = U_0 + U_0 \cos\omega t$
$U^{\text{aus}}_{\text{max}} = 2U_0(-1,4\text{V})$

iv) **Kaskadenschaltung nach Greinacher**

1. Stufe $U_{A_0} = 2U_0 - 1,4\text{V}$ gleichgerichtet
$U_{D_2} = 2U_0 \sim \omega t \rightarrow$ Eingang für 2. Stufe
2. Stufe $U_{AB} = 2U_0 - 1,4\text{V}$ gleichgerichtet
$\rightarrow U^{\text{max}}_{B0} = 4U_0 - 2,8\text{V}$ viele Kaskaden $\rightarrow$ Hochspannung
Begrenzung: Feldstärke in letzter Stufe
Anwendung: Cockroft-Walton-Kaskade in Beschleunigern

III.11.3 Zeigerdiagramme

- komplexe Schaltungen $\rightarrow$ Rechnen mit $\cos, \sin$ und Additionstheorem schwierig
$\rightarrow$ komplexe Schreibweise sin und cos als Realteile der komplexen Exponentialfunktion
z.B. $U_0 \cos\omega t = \text{Re}(U_0 e^{i\omega t}) \quad U_0 \sin\omega t = \text{Re}(U_0 r^{i\omega t - \pi/2})$

$$\exp(ia) = \cos a i \sin a \quad \cos(a - \frac{\pi}{2}) \sin a$$

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\Phi} \quad \Phi = \arctan\frac{b}{a}$$

oft Re weggelassen: $U = U_0 e^{i\omega t}$

  – nur Hilfsmittel, an Ende Realteil bilden
  – Veranschaulichung im Zeigerdiagramm

III.11.4 Komplexe Widerstände

<u>**Kondensator:**</u> Gilt: $U = \frac{Q}{C} \quad \frac{d}{dt} : \frac{dU}{dt} = \frac{I}{C}$

$$U(t) = U_0 \cos\omega t \quad \text{gegeben}$$

$$I(t) = C\frac{dU}{dt} = -\omega U_0 C \sin\omega t = I_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Spitzenwert $I_0 = \omega C U_0 \quad I$ teilt U um $\frac{\pi}{2}(90°)$ voraus

Spule: Maschenregel: $U - U_L = 0 \quad U_L = -U_{\text{ind}}$
$-U_{\text{ind}} = L\frac{dI}{dt} = U(t)$
Geg: $U(t) = U_0 \cos\omega t$
$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{L}U(t) = \frac{U_0}{L}\cos\omega t$

$$I(t) = \int \frac{U_0}{L}\cos\omega t\, dt = \frac{U_0}{L\omega} = \frac{U_0}{L\omega}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Spitzenwert $I_0 = \frac{U_0}{\omega L}$ Spannung eilt Strom um $\frac{\pi}{2}$ voraus

Impedanz Z: Widerstand für Bauteil um $\frac{U}{I}$ zu beschreiben. naiv: $\frac{U(t)}{I(t)}$ „Widerstand" zeitabhängig, negativ

alternativ: $\boxed{Z = \frac{U(t)}{I(t)}}$ wobei U, I komplexwertige Funktionen sind.

i) **Kondensator mit Kapazität C** $U(t) = U_0 e^{i\omega t} \quad I(t) = \omega C U_0 r^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}$
$\boxed{Z_C = \frac{1}{\omega C}\frac{1}{e^{i\pi/2}} = \frac{1}{i\omega C}}$
$\omega \to 0 : Z_C \nearrow \infty \quad \omega \to \infty : Z_C \searrow 0$

ii) **Spule mit Induktivität L**
$U(t) = U_0 e^{i\omega t} \quad I(t) = \frac{U_0}{\omega L}e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$
$\boxed{Z_L = \omega\frac{1}{e^{-i\pi/2}} = i\omega L}$
$\omega \to 0 : Z_L \searrow 0 \quad \omega \to \infty : Z_L \nearrow \infty$

iii) **Ohmscher Widerstand**
$\boxed{Z_R = R}$ (trivial)

Kirchhoffsche Gesetze auch hier gültig (da auf Q- und E-Erhaltung basierend) Berechnung von Netzwerken mit KHG und den Impedanzen.

III.11.5 Frequenzfilter

Bem: periodisches Signal mit beliebigem Amplitudenverlauf aus Überlagerung von cos- und sin-förmigen Signalen
$\rightarrow$ **Fourierzerlegung**

Komplexe Widerstände

- Ändern das Frequenzspektrum
- Beeinflussen Form des Signals/Größe in Abhängigkeit von ω

Hochpass: Spannungsteiler mit $Z_1 = \frac{1}{i\omega C} \quad Z_2 = R$
Übertragungsfaktor $k = \frac{U_{\text{aus}}}{U_{\text{ein}}} = \frac{Z_{\text{aus}}}{Z_{\text{ges}}}$

$$k = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}}\frac{R + \frac{i}{\omega C}}{R + \frac{i}{\omega C}} = \frac{R^2 + i\frac{R}{\omega C}}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{\omega^2 C^2 R^2}{\omega^2 C^2 R^2 + 1} + i\frac{\omega C R}{\omega^2 C^2 R^2 + 1}$$

$$|k| = \frac{|U_{\text{aus}}|}{|U_{\text{ein}}|} \quad |k|^2 = \frac{\omega^2 C^2 R^2}{\omega^2 C^2 R^2 + 1} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \qquad \omega_0 \equiv \frac{1}{RC}$$

Phase Φ $\quad \tan\Phi = \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \frac{1}{\omega CR} = \frac{\omega_0}{\omega}$
für $\omega \to \infty$ $\quad |k| \to 1$ „Hochpass"
für $\omega \to 0$ $\quad Z_C \to \infty$ Kondensator sperrt
für ω klein eilt Spannung um $\frac{\pi}{2}$ hinterher

Def: Grenzfrequenz $\omega_{\mathbf{Gr}}$ $\quad$ Frequenz bei der $|k(\omega_{\text{Gr}})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$
Hochpass: $\omega_{\text{Gr}} = \omega_0 = \frac{1}{RC}$

Tiefpass:

a) RC-Serienschaltung mit Abgiff über C

b) LR-Serienschaltung mit Abgriff über R

$$Z_1 = i\omega L \quad Z_2 = R \quad k = \frac{R}{R + i\omega L}$$

$$|k|^2 = \frac{R^2}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \qquad \omega_0 \equiv \frac{R}{L}$$

$\tan\Phi = \frac{-\omega L}{R} = \frac{-\omega}{\omega_0}$
für $\omega \to 0$ $\quad |k| \to 1 \quad \Phi \to 0$ Tiefpass
für $\omega \to \infty$ $\quad |k| \to 0 \quad \Phi \to -\frac{\pi}{2}$

Bandpass:

1. R-L-C-Serienschaltung
2. nur Durchlass in einem gewissen Frequenzbereich
3. zwei frequenzabhängige Impedanzen $\sim \omega, \sim \frac{1}{\omega}$

$$|k| = \frac{R}{\sqrt{R^2[\omega L - \frac{1}{\omega C}]}} \qquad \tan\Phi = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}$$

4. $|k| = 1$ maximal bei $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ dort Sprung in Φ von $+\pi/2 \to -\pi/2$
5. Breite des Bereichs in ω mit $|k| > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Delta\omega = \sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}$$

III.11.6 Blindleistung

- Bestimmung von Leistung P an Impedanz Z
- Gleichspannung: $P = UI$ zeitlich konstant
- An Impedanz Z: $U(t) = U_0 \cos \omega t \quad I(t) = I_0 \cos(\omega t - \Phi)$
  Mittlere Leistung $\overline{P} \equiv \frac{1}{T} \int\limits_0^T U(t) I(t) dt$

$$\overline{P} = \frac{1}{T} \int\limits_0^T U_0 I_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t - \Phi) \cdots = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \Phi$$

  ohmscher Widerstand $Z = R \quad \Phi = 0 \quad \overline{P} = \frac{U_0 I_0}{2} \equiv U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$

- für reine C, reine L $\quad \Phi = \pm \frac{\pi}{2} \to \overline{P} = 0$
- Blindleistung: Leistung von C und / oder L aufgenommen wird
-

$$Z = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{I_0 e^{i(\omega t - \Phi)}} = \frac{U_0}{I_0} e^{+i\Phi}$$

  Wirkwiderstand $\text{Re}(z) = \frac{U_0}{I_0} \cos \Phi$
  Blindwiderstand $\text{Im}(z) = \frac{U_0}{I_0} \sin \Phi$

- Wirkleistung $\overline{P} = \frac{1}{2} I_0^2 \ \text{Re}(z) = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{\text{Re}(z)}$
  Blindleitung $\overline{Q} = \frac{1}{2} I_0^2 \ \text{Im}(z) = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{\text{Im}(z)}$

[Folie: Wirk- und Blindleistung]

Leistungsanpassung Betrachte Spule mit $R \ll \omega L \to$ geringe Wirkleistung aber eventuell sehr großer Strom

- optimale Leistungsübertragung $\to$ weitere Anpassungsimpedanz Z_A in Reihe an Last $\overline{P} = \frac{1}{2} I_0^2 \ \text{Re}(Z_L)$

$$I(t) = \frac{U(t)}{Z_A + Z_L} \to I_0 = \frac{U_0}{|Z_A + Z_L|}$$

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{|Z_A + Z_L|^2} \text{ Re } Z_L = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{(\text{Re } Z_A + \text{ Re } Z_L)^2 (\text{Im } Z_A + \text{ Im } Z_L)^2} \text{ Re } Z_L$$

$$\overline{P} \text{ maximal wenn Im } (Z_A) = \text{ Im } (Z_L)$$

Impedanz verhaltern, die $\Delta\Phi$ kompensiert.
hier: Kondensator mit $\frac{1}{\omega C} = \omega L$.
weiterhin: $\text{Re}(Z_A) = 0$ damit $\overline{P}(Z_n) = 0$
wenn R_z gegeben, dann $R_L = R_Z$ maximal $\overline{P}$

III.11.7 Transformator

Ziel Strom oder Spannung erhöhen/erniedrigen

Prinzip Induktion zwischen gekoppelten Spulen

[Folie: Transformator - Schaltzeichnung und technische Umsetzung]

Ideale, unbelaster Trafo

- ideal: reine L, keine R
- unbelastet: $I_2 = 0$, keinen Verbraucher

Primärspule: $U_1(t) = U_0 \cos \omega t$

$$I_1 \to \Phi_{m,1} \to U_{\text{ind},1} = -N_1 \frac{d\Phi_{m,1}}{dt} = -U_1$$

Also

$$\frac{d\Phi_{\omega,1}}{dt} = -\frac{U_{\text{ind , 1}}}{N_1} = \frac{U_1}{N_1}$$

Flussänderung in Spule 1 = Flussänderung in Spule 2

$$\frac{d\Phi_{m,1}}{dt} = \frac{d\Phi_{m,2}}{dt}$$

Induziert

$$U_2(t) = -N_2 \frac{d\Phi_{m,1}}{dt} = -\frac{N_2}{N_1} U_1(t) \text{ also } \frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1} \quad \Delta\phi = \pi \text{ gegenphasig}$$

ideal: kein Leistungsverbrauch

$$U_1(t)\ I_1(t) \ = U_2(t)\ I_2(t) \to \frac{I_2(t)}{I_1(t)} = -\frac{N_1}{N_2}$$

großes $N_2/N_1 \to$ Erzeugung von Hochspannung
kleines $N_2/N_1 \to$ Erzeugung von hohe Ströme
aber: wenn $I_2 \neq 0$ dann Gegeninduktion

Realer, belastender Trafo

a) $R \neq 0 \to$ Maschenregel

$$\begin{aligned} U_1(t) - R_1 I_1(t) &= N_1 \frac{d\Phi_{m,1}}{dt} && (*) \text{ Primärspule} \\ U_2(t) - R_2 I_2(t) &= N_2 \frac{d\Phi_{m,1}}{dt} && (*) \text{ Sekundärspule} \end{aligned}$$

b) Gegeninduktion
Gilt: $U_L = -U_{\text{ind}} = L\frac{dI}{dt} = N\frac{d\Phi_m}{dt}$
$LI = N\Phi_m$

$I_2 \neq 0$: Überlagerung der magnetischen Flüssse
$\rightarrow$ Beiträge zu U_{ind} in beiden Spulen
Sei Φ_{ij} der Fluss erzeugt durch I_j in Spule i
L_{11}, L_{22} Selbstinduktivitäten
L_{12}, L_{21} Gegeninduktivitäten
perfekte koppelung, keine Verluste von Φ_m dann $L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_{11}L_{22}}$

$$N_1\Phi_{m,1} = N_1[\Phi_{m,11} + \Phi_{m,12}] = L_{11}I_1 + L_{12}I_2$$

$$N_2\Phi_{m,2} = N_2[\Phi_{m,21} + \Phi_{m,22}] = L_{21}I_1 + L_{22}I_2$$

Einsetzen in $(*)$ $\rightarrow$ Transfromator gleichungen

$$U_1 - R_1I_1 = L_{11}\frac{dI_1}{dt} + L_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

$$U_2 - R_2I_2 = L_{21}\frac{dI_1}{dt} + L_{22}\frac{dI_2}{dt}$$

Für Spitzenwerte $U_0,\ I_0$ mit $U_1 = U_0e^{i\omega t}$

$$U_1 - R_1I_1 = i\omega L_{11}I_1 + \omega L_{12}I_2$$

$$U_2 + R_2I_2 = -i\omega L_{21}I_1 - \omega L_{22}I_2$$

Phasenverschiebung U_2 zu U_1 von $\pi \rightarrow$ „ - " Zeichen
Für weitere Diskussion $R_1^{\text{spule}} = R_2^{\text{spule}} = 0$ aber Last Z Sekundärkreis

Nutze $U_2 = ZI_2$ und nach Strömen auflösen

$$I_1 = \frac{i\omega L_{22} + Z}{i\omega L_{11}Z + \omega^2(l_{12}^2 - L_{11}L_{22})}U_1$$

$$I_2 = \frac{i\omega L_{12}}{i\omega L_{11}Z + \omega^2(L_{12}^2 - L_{11}L_{22})}U_1(evtlauchU_1)$$

Darus Übersetzungsverhältnisse für U_i, I_i

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{i\omega L_{12}}{i\omega L_{22} + Z} \quad \frac{U_2}{U_1} = -\frac{i\omega L_{12}Z}{i\omega L_{11}Z + \omega^2(L_{12}^2 lL_1L_2)}$$

Def: Kopplungsgrad $k =\rightarrow \frac{L_{12}}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}$ $\quad 0 < k < 1$ $k = 1$ vollständige Kopplung $k = 0$ entkoppelt

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{iL_{12}}{iL_{11} + \omega^2(k^2 - 1)\frac{L_{11}L_{22}}{Z}}$$

Beträge:

$$\frac{|I_2|}{|I_1|} = \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{Z^2 + \omega^2 L_{12}^2}} \quad \frac{|U_2|}{|U_1|} = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_{11}^2 + \omega^2\frac{L_{11}^2L_{22}^2}{|Z|^2}(1 - k^2)}}$$

a) $k = 1 \quad L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_{11}L_{22}}$

$$|\frac{U_2}{U_1}| = \frac{L_{12}}{L_{11}} = \sqrt{\frac{L_{22}}{L_{11}}} = \frac{N_2}{N_1} \text{ wie beim idealen unbelasteten Trafo}$$

unabhängig von Last Z

$$\frac{|I_2|}{|I_1|} \xrightarrow{|Z|\to 0} \frac{N_1}{N_2} \text{ sonst } I_2 \text{ kleiner wgen Last } Z$$

b) $k < 1$

i) $Z = R \quad \frac{|U_2|}{|U_1|}$ sinkt mit sinkendem R

$$\tan \phi_{U_1,U_2} = -\frac{\omega L_{22}(L-k)}{R}$$

$k = 1 \quad \phi = \pi$ unabhängig von R
$k < 1 \quad \phi < \pi$

ii) $Z = i\omega L$

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{L_{12}/L_{11}}{1 + L_{22}/L_{11}(1-k^2)}$$

$\Delta\phi = \pi$ unabhängig von Last

iii) $Z = \frac{1}{i\omega C}$
$\frac{U_2}{U_1} = \frac{L_{12}}{L_{11} - \omega^2 C L_{11} L_{22}(1-k^2)}$
U_2/U_1 größer als bei Leerlauf $|Z| = \infty$
Resonanzverhalten $\omega_R = \frac{1}{\sqrt{CL_{22}(1-k^2)}}$

Anwendungen/Experimenten:

1. „Hörnerblitz" $N_1 = 500 \quad N_2 = 2300$ $U_1 = 230$ V $\rightarrow U_2 \approx 10$ kV
2. „Punktschweißen" $N_1 = 500 \quad N_2 = 5$ $U_1 = 230$ V $\rightarrow U_2 \approx 10$ kV
3. Leistungsübertragung über Kabel
   Ziel: $P_{\text{el}} = U_I$ übertragen
   Leitung mit $R_L \rightarrow$ Leistungsverlust $I^2 R_L = \Delta P_{\text{el}}$
   Relativer Leistungsverlust:

$$\frac{\Delta P_{\text{el}}}{P_{\text{el}}} = \frac{I^2 R_L}{UI} = \frac{I R_L}{U} = \frac{R_L}{U^2} P_{\text{el}}$$

   d.h. bei gegebener Leistung P_{el} sinkt ΔP_{el} mit $\frac{1}{U^2}$
   [Folie: Leistungsübertragung]

III.12 Elektromagnetische Schwingungen

III.12.1 Einfache Schwingungen

RLC-Serienschaltung $\rightarrow$ Bandpass (ohne R)

- Exp: Resonanz bei $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}(\approx 2,2$ kHz$) \quad \Delta\phi = 0$
- Suche $I(t)$

$$\text{Knotenregel} \quad I \text{ gleich in allen Bauteilen}$$

$$\text{Maschenregel} \quad U_{\text{ext}} = \underbrace{U_L}_{-U_{\text{ind}}} + U_C + U_R = L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}Q + RI$$

[Folie: Serienschwingkeris]

$$\frac{d}{dt}: \quad \frac{dU_{\text{ext}}}{dt} = L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I$$

$U_{\text{ext}} = U_0 \sin \omega t \quad (??? \cdot \frac{1}{C})$

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = \frac{U_0\omega}{L}\cos \omega t$$

inhomogene DGL 2. Ordnung für den Strom $I(t)$

Lösung: mit komplexwertigem Ansatz
zunächst $U_{\text{ext}} = U_0 e^{i\omega t}$

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = \frac{iU_0\omega}{L}e^{i\omega t}$$

Ansatz : $I(t) = I_0 e^{i(\omega t - \Phi)}$
Bilden zeitliche Ableitung und Einsetzen

$$(\underbrace{i\omega L}_{Z_L} + \underbrace{\frac{1}{i\omega L}}_{Z_C} + \underbrace{R}_{Z_R})I_0 = U_0 e^{i\Phi}$$

wie erwartet für Impedanzen in Serie
$I(t) = \frac{U(t)}{Z_{\text{ges}}}$ Resonanz wenn Z_{ges} minimal

$$\left.\frac{dZ_{\text{ges}}}{d\omega}\right|_{\omega_R} \stackrel{!}{=} 0 \qquad iL\omega_R - \frac{1}{i\omega_R C} = 0 \Leftrightarrow \omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Freie, ungedämpfte Schwingung

- LC-Kreis $R = 0$ keine externe Anregung
- Kondensator laden, bei $t = 0$ mit Spule verbinden
  $\rightarrow$ Schwingungen
- periodisches Umladen des Kondensators, periodische Ströme in Spule
  [Folie: El.-mag. Schwingkreis und mech. Modell eines Oszillators im Vergleich]
- Maschenregel $U_C + U_L = 0 \quad U_L = -U_{\text{ind}}$
  $\frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = 0$
- Lösungsansatz: $Q = Q_0 \cos \omega t$
  Einsetzen: $-Q_0\omega^2 \cos \omega t + \frac{1}{LC}Q_0 \cos \omega t = 0$
  also:

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{Thomson-Formel}$$

harmonische Schwingung mit Randbedingung $Q(t=0)=Q_0$ andere Startbedingung: $Q(t)=Q_0\cos(\omega t+\phi)$
$I(t)=\frac{dQ}{dt}=-Q_0\omega\sin(\omega t+\phi)=Q_0\omega\cos(\omega t-\frac{\pi}{2}+\phi)$
d.h. I eilt U_C bzw. Q_C um $\frac{\pi}{2}$ hinterher

Gedämpfte Schwingung $R\neq 0$

- RLC-Kreis $\quad Q(t=0)=Q_{\max}$
- $t=0$ Kreis schließen $\rightarrow$ Schwingung mit abnehmender Amplitude
- Maschenregel: $U_L+U_C+U_R=0$

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\underbrace{\frac{R}{L}}_{2\gamma}\frac{dQ}{dt}+\underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}Q=0$$

γ ist die Dämpfungskonstante, 2γ Dämpfungsterm

$$\frac{d}{dt}:\frac{d^2I}{dt^2}+2\gamma\frac{dI}{dt}+\omega_0^2I=0$$

homogene DGL 2. Ordnung für Strom I
Lösungsansatz: $I(t)=ae^{\lambda t}$
Fallunterscheidung: $I(0)=I_0$

i) starke Dämpfung/Kriechfall $\gamma>\omega_0 \quad \frac{R}{2L}>\frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$I(t)=I_0e^{-\gamma t}\cosh\alpha t \quad \alpha^2=\gamma^2-\omega_0^2$$

ii) kritische Dämpfung/aperiodischer Grenzfall
$\gamma=\omega_0 \quad \frac{R}{2L}=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$I(t)=I_0(1+\gamma t)e^{-\lambda t}$$

iii) Schwache Dämpfung/Schwingfall

$$\gamma<\omega_0 \quad R/2L<\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$I(t)=I_0e^{-\gamma t}\cos(\omega t+\phi)$$

Frequenz $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$ kleiner als bei freien schwingungen.
Zeitkonstante der Dämpfung $\gamma=\frac{R}{2L}$

Erzwungene Schwinung

- Serien- und Parallelschwingkreis

- Nach dem Einschwingverhalten stationäre Lösung
  d.h. Amplitude unabhängig von Zeit
  $$U(t) = U_0 e^{i\omega t} \quad I(t) = \frac{U(t)}{Z_{\text{ges}}}$$
  Kreis schwingt mit externer Frequenz $I_0 = \frac{U_0}{|Z_{\text{ges}}|}$
- Serienkreis $\quad Z_{\text{ges}} = i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R$
  Parallelkreis $Z_{\text{ges}} = (i\omega L)^{-1} + (\frac{1}{i\omega C})^{-1} + (R)^{-1}$
  Resonanzverhalten in beiden Fällen

Serienkreis

$$\frac{dI_0}{d\omega} \stackrel{!}{=} 0$$

Maximum bei $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad I_0 ? \frac{U_0}{R}$
$U_C(t) = \frac{I_0(\omega_0)}{\omega_0 C} = \frac{U_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$
$U_L(t) = \omega_0 L I_0(\omega_0) = \frac{U_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$
Bem: $U_C, U_L \gg U_0$ werden $\rightarrow$ Spannungsresonanz

umgesetzte Leistung (nur R)

$$\begin{aligned} P_{\text{wirk}} &= \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos\Phi \qquad \cos\Phi = \frac{R}{|Z_{\text{ges}}|} \\ &= \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{|Z_{\text{ges}}|}^2 R \end{aligned}$$

maximal bei ω_0, dann Z_{ges} minimal

Parallelkreis

- Resonanzfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Strom über R und P_{wirk} minimal bei ω_0 großer Strom im Kreis von Kondensator und Spule
  $I_C(\omega_0) = I_L(\omega_0) = U_0\sqrt{\frac{C}{L}}$
  $I_C \gg I_R$ Stromresonanz

Bem: In Mechanik: Resonanzfrequenz verschoben
Hier: beide Fälle $\omega_{\text{Resonanz}} = \omega_0^{\text{Thomson}}$
Mechanik: Resonanz def. über max. Auslenkung von Pendel/Feder
E-Dynamik: Analogon wäre el. Ladung Q. Aber: Resonanz def. über $I = \frac{dQ}{dt}$ Resonanz für Q auch bei $\omega_R < \omega_0^{\text{Thomson}}$
[Folie: Gekoppelte Schwingkeise]

III.12.2 Gekoppelte Schwingungen

Zwei induktiv gekoppelte Schwingkreise magnetischer Fluss durch beide Spulen
→ Schwingung in Kreis 1 durch gemeinsamesn magnetischen Fluss bzw. Gegeninduktivitäten L_{12}, L_{21} auf Kreis 2 übertragen
[Folie: Induktive gekoppelte Schwingkreise]

Differentialgl. aus Maschenregel in Kreis 1 und 2

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 + \frac{Q_1}{C_1} + L_{12} \frac{dI_2}{dt} = 0$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 + \frac{Q_2}{C_2} + L_{21} \frac{dI_1}{dt} = 0$$

Terme 1 bis 3 wie bei Serienschwingkreis und letzter Term aus Gegeninduktion

$$\frac{d}{dt} : L_1 \frac{d^2 I_1}{dt^2} + R_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{I_1}{C_1} = -L_{12} \frac{d^2 I_2}{dt^2}$$
$$\frac{d}{dt} : L_2 \frac{d^2 I_2}{dt^2} + R_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{I_2}{C_2} = -L_{21} \frac{d^2 I_1}{dt^2}$$

Lösungsansatz: $I_1(t) = \hat{I}_1 e^{i\omega t} \quad I_2(t) = \hat{I}_2 e^{i\omega t}$
Einsetzen in DGL und sortieren

$$\underbrace{\begin{pmatrix} R_1 + i(L_1\omega - \frac{1}{\omega C_1}) & iL_{12}\omega \\ iL_{21}\omega & R_2 + i(L_2\omega - \frac{1}{\omega C_2}) \end{pmatrix}}_{\text{Impedanzmatrix } \mathcal{M}} \begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Triviale Lösung: $\hat{I}_1 = \hat{I}_2 = 0$
Nicht triviale Lösung: Bedingung $\det \mathcal{M} = 0$

$$\det \mathcal{M} = \Big(R_1 + i(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1})\Big)\Big(R_2 + i(\omega_2 L_2 - \frac{1}{\omega_2 C_2})\Big) + \omega^2 L_{12} L_{21} \stackrel{!}{=} 0$$

allgemeiner Lösungsansatz:
hier fehlt was
Thomsonfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Kopplungsparameter $k = \frac{L_{12}}{L}$
Wir haben 2 Eigenfrequenzen ($k \ll 1 \quad \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \omega_0 k$)
$k = 0$: Entkopplung Schwingung bei ω_0
$k \to 1$: $\omega_2 \to \infty \quad \omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ verständlich 1 Kreis mit doppelter Kapazität
$0 < k < 1$: Beobachtung beider Frequenzen bzw. Überlagerung → Schebung

$$\cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$$

Nun Anregung in Kreis 1: $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$
obige Matrix-Gl mit rechter Seite $\begin{pmatrix} U(t) \\ 0 \end{pmatrix}$
Gekoppelte DGL mit Inhomogenität $U(t)$
Allgemeine Lsg: = Allg. Lsg der homogenen DGL (A) + Spezielle Lsg der inhomogenen DGL (B)

(A) freie, gedämpfte Schwingung (s.o.)
Amplitude abklingend ($R \neq 0$) $\rightarrow$ Einschwingvorgang für t groß $A(t) \rightarrow 0$: d.h. kein Beitrag

(B) t groß dominant. Sationäre Lösung Amplitude zeitlich konstat, abhängig von ω

Hier: Bestimmung von (B)
„homogene“ Zeile der DGL:

$$I_1 = -\frac{R_2 + i(L_2\omega - \frac{1}{\omega C_2})}{iL_{21}\omega}\hat{I}_2$$

Einsetzen in „inhomogene“ Zeile

$$-\{R_1 + i(L_1\omega - \frac{1}{\omega C_1})\}\frac{R_2 + i(L_2\omega - \frac{1}{\omega C_2})}{iL_{21}\omega}\hat{I}_2 + iL_{12}\omega\hat{I}_2 = U(t)$$

Daraus $\hat{I}_2$ messen als U_2 an R_2

$$-\{R_1 + i(L_1\omega + \frac{1}{\omega C_1})\}\{R_2 + i(L_2\omega + \frac{1}{\omega C_2})\} - L_{12}L_{21}\omega^2 = iR_2L_{21}\omega\frac{U(t)}{U_2} \qquad (*)$$

Spezialfall $R \equiv R_1 = R_2 \quad C \equiv C_1 = C_2 \quad L \equiv L_1 = L_2 \quad L_{12} = L_{21}$
Definiere Blindwiderstand $x \equiv \omega L - \frac{1}{\omega C}$
($*$) vereinfacht zu

$$-(R + ix)^2 - L_{12}^2\omega^2 = iRL_{12}\omega\frac{U(t)}{U2}$$

Multipliziere mit $(-\frac{i}{RL_{12}\omega})$ und Kehrwert bilden

$$\frac{U_2}{U(t)} = \frac{RL_{12}\omega}{i(R^2 - X^2 + \omega^2L_{12}^2 - 2RX}$$

$$\frac{|U_2|}{|U(t)|} = \frac{RL_{12}\omega}{\sqrt{(R^2 - X^2 + \omega^2L_{12}^2)^2 + 4R^2X^2}}$$

Bei $\omega = \omega_{1/2}$ Signifikante Übertragung von Leistungen aus Kreis 1 und Kreis 2

III.12.3 Ungedämpfte Schwingungen

$\rightarrow$ [Folie: Erzeugung einer ungedämpften Schwingung durch manuelle Pulsierung]
[Folie: Erzeugung einer ungedämpften Schwingung mittels Rückkopplung]

III.13 Elektromagnetische Wellen

1864 Vorhersage von el-magnetischen Wellen J.C.Maxwell

1886 Nachweis von Heinrich Hertz (heute Mikrowellen $\lambda \sim \mathcal{O}(10\text{ cm})$)

1888 Untersuchung der Ausbreitung durch E.lecher
Ausbreitungsgeschwindigkeit $\approx$ Lichtgeschw. c
$\rightarrow$ Licht ist eine el.-mag. Welle
$v_{\text{Welle}} = f\lambda$ λ Wellenlänge, f Frequenz

III.13.1 Lecher-Leitung (LL)

Induktieve Kopplung von offener/geschlossener LL an Schwingkreis mit Frequenz f

Exp:

$f \approx 250$MHz Annahme: $v_{\text{Welle}} = c \to \lambda \approx 120$cm
Beobachtung:
Spannungsmaxim (Bäuche) und .minima (Knoten)
Strom minima (Knoten) und -maxima(Bäuche)
Abstand der Knoten ≈ 60 cm $\approx \frac{\lambda}{2}$ erwartet
Nur für „gute“ Länge der LL Knoten und Bäuche

Erklärung:

- Bildung eines periodischen Strom bzw. Ladungverschiebung
- offenes Ende $I = 0 \to$ Spannungsband
- geschlossenes Ende $U = 0 \to$ Strombauch
- Entstehung einer stehenden Welle wenn l_{LL} auf λ abgestimmt ist
  2 abgeschlossene Enden: $l_{LL} = n\frac{\lambda}{2}$
  [Folie: Lecher-Leitung und davor]

Mathematische Beschreibung

Ersatzschaltbild $\to$ [Folie: Lecher-Leitung: Ersatzschaltbild]
$l \equiv \frac{L}{z} = \frac{\mu_0\mu}{\pi}\ln(\frac{2a}{d}) \quad c = \frac{C}{z} = \frac{\pi\epsilon_0\epsilon}{\ln(\frac{2a}{d})}$ d Durchmesser der Leiter, a Abstand der Leiter
$r = \frac{R}{z} \quad g = \frac{G}{z} \quad G = \frac{1}{R_{\text{Luft}}}$
ideal: $r \to 0 \quad g \to 0$

Telegraphengleichung (TGl):

Leiterstück dz Taylorentwicklung (an Stelle z) für $U(z+dz), I(z+dz)$ bis lin. Term

$$U(z+dz) = U(z) + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

∂U durch

i) Abfall über r

ii) Induktion in l

$R = \frac{\partial U}{\partial I} \quad G = \frac{\partial I}{\partial U}$

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial z} = -rT - l\frac{dI}{dt}} \tag{1}$$

$$I(z+dz) = I(z) + \frac{\partial I}{\partial z}dz$$

Stromfluss über c und g

$$\boxed{\frac{\partial I}{\partial z} = -\frac{U}{g} - c\frac{dU}{dt}} \tag{2}$$

$I_C = C\frac{\partial U}{\partial t} \quad \frac{1}{g} \to g \quad \frac{\partial I}{\partial z} = \delta U_{\pm}$
Ableiten von (1) und (2) nach $\frac{d}{dt}$ bzw $\frac{d}{dz}$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -r\frac{\partial I}{\partial z} - l\frac{\partial^2 I}{\partial z \partial t} \quad \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = -\frac{1}{g}\frac{\partial Z}{\partial z} - c\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial t}$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial z} = -r\frac{\partial I}{\partial t} - l\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 I}{\partial t \partial z} = -\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} - c\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

„Gemischte“ Ableitung aus Zeile 2 in Zeile 1 einsetzen und Ersetzen von 1. Abl durch (1) und (2)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -r\Big(-\frac{U}{g} - c\frac{\partial U}{\partial t}\Big) - l\Big(-\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} - c\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\Big)$$
$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = -g\Big(-rI - l\frac{\partial I}{\partial t}\Big) - c\Big(-r\frac{\partial I}{\partial t} - l\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}\Big)$$

Entkopplung von U und I in DGL
TGl.:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = grU + (rc+gl)\frac{\partial U}{\partial t} + lc\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial I}{\partial z^2} = grI + (rc+gl)\frac{\partial I}{\partial t} + lc\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$$

Beschreibung der Ausbreitung von Signalen auf LL

Wellengleichung

approximative Lsg. der TGl für $r = 0,\ g = 0$

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = lc\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = lc\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}}$$

homogene Wellengleichung
hier: $\partial U,\ \partial I$ in z-Richtung
Für bel. Richtung der LL: $\Delta U(\vec{r},t) = lc\frac{\partial U(\vec{r},t)}{\partial t^2} \quad \Delta I(\vec{r},t) = lc\frac{\partial I(\vec{r},t)}{\partial t^2}$
Lösungsansatz: $U(z,t) = U_0 e^{i(\omega t \mp kz - \phi)} \quad I(z,t) I_0 e^{i(\omega t \mp kz - \phi)}$
Einsetzen von $U(z,t)$ in Wellen-Gl
$k^2 = lc\omega^2 \quad v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
v_{ph} Phasengeschwindigkeit der Welle
Werte für lecher-Leitung einsetzen

$$v_{\text{ph}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\pi}\ln\left(\frac{2a}{d}\right)\frac{\pi\epsilon_0\epsilon}{\ln\left(\frac{2a}{d}\right)}}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon\mu}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}c$$

in Medium $v_{\text{ph}} < c$
v_{ph} unabhängig von Geometrie der LL
„$\mp kz$"-Lösungen: „$-$" Ausbreitung in pos. z-Richtung, „$+$" Ausbreitung in neg. z-Richtung

$$\text{Wellengleichung:} \quad \left(\Delta - \frac{1}{v_{\text{ph}}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U(\vec{r},t) = 0$$

Bisher: ideale, unendlich lang
Nun: Verbraucher aus Ende mit Impedanz Z_V
Betrachte LL: Stromquelle mit Innenwiderstand Z_L

$$Z_L = \frac{U}{I} = \frac{\partial U/\partial z}{\partial U/\partial z} = \frac{-rI - l\frac{\partial I}{\partial t}}{den}$$

hier fehlt was

$$Z_L = \sqrt{\frac{r + il\omega}{g + ic\omega}} \overset{\text{ideal}}{=} \sqrt{\frac{l}{c}}$$

$$\text{Für LL:} \ = \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\epsilon_0\epsilon}\frac{\ln\frac{2a}{d}}{\pi}} = 377\Omega\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}\frac{\ln\frac{2a}{d}}{\pi}}$$

$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377\Omega$ Wellenwiderstand des Volumens
Vollständige Leistungsanpassung: $Z_L = Z_V$

- $Z_V \neq Z_L$: nur Teil der Leistung in Z_V umgesetzt der Rest der Leistung reflektiert
- Extremfälle: $Z_V = 0$ (Kurzschluss) und $Z_V = \infty$ (offene LL)
- $Z_V = 0 : U(Z_V) = 0$ Spannungsknoten
- $Z_V = \infty : I(Z_V) = 0$ Stromknoten

komplette oder teilweise Reflexion der Welle
$\rightarrow$ Überlagerung von einlaufender und auslaufender Welle $\rightarrow$ stehende Welle (wie in Mechanik bei Seilen)

Rechnung: zur Entstehung der stehenden Welle

einlaufend: $U_{\text{ein}}(z,t) = U_0 e^{i(\omega t - kz)}$
Annahme vollständige Reflexion: $\Delta\phi = 0$ an losen Ende
rücklaufend: $U_{\text{rück}}(z,t) = U_0 e^{i(\omega t + kz)}$
Gesamt: $U_{\text{ges}} = U_{\text{ein}} + U_{\text{rück}} = U_0 e^{i(\omega t)}(e^{ikz} + e^{-ikz}) = 2U_0 \cos kz \cos \omega t$ (übergang zu Realteil)
Dies ist stehende Welle mit $\omega = 2\pi f \quad k = 2\pi\lambda$
Weise Beobachtung wenn LL ∞-lang, offene Leitung
Hier/Exp: geschlossenes Ende $\Delta\phi = \pi$ beii Reflexion
Endliche Länge $\rightarrow$ viele Reflexionen und Überlagerungen
Bedingung für stehende Welle/konstruktive Interferenz
1 lose / 1 fest (offen/geschlossen) : $l = \frac{2n-1}{4}\lambda$
2 lose oder 2 feste (offen/geschlossen) : $l = n\frac{\lambda}{2}$

Wellenausbreitung mit Absorption

jetzt: $r, g \neq 0 \quad r, g < \omega L < \frac{1}{\omega L}$
d.h. Term: „$r \cdot gU(z,t)$“ vernachlässigbar
Ansatz: $U = U_0 e^{i(\omega t - \overline{k} z)}$
Einsetzen in Telegraphen Gl. teile durch $U_0 e^{i(\omega t - \overline{k} z)}$
$-k^{-2} = i(rc + lg)\omega - lc\omega^2$
$\overline{k} = \sqrt{lc}\omega\sqrt{1 - i\frac{rc+lg}{lc}\omega} \approx \sqrt{lc}\omega - i\frac{1}{2}\frac{rc+lg}{\sqrt{lc}}\omega^2$
$(\sqrt{1-x} \approx 1 + \frac{x}{2})$
Def: $k = \text{Re}\ \overline{k} = \sqrt{lc}\omega$
$\frac{1}{s} = -\text{Im}\ \overline{k} = \frac{1}{2}\frac{rc+lg}{\sqrt{lc}}\omega^2$
Dann: $U(z,t) = U_0 e^{-z/s} e^{i(\omega t - kz)}$
Welle mit Frequenz ω, Wellenzahl k mit Abnehmender Amplitude $(e^{-z/s})$

Exp:

Koaxialkabel $v^{-1} = 5\frac{\text{ns}}{\text{m}}$ Länge = 20 m
Rechteckimpuls von 75 ns
[Folie: Signalausbreitung auf Koaxialkabel]

III.13.2 Vakuumwellen

Einleitung: el.-mag. Welle auf Leiter eingeschränkt auch Ausbreitung im Raum (Vakuum/Medien)
[Folie: Vom Schwingkreis zum Hertzschen Dipol]

Vom Schwingkreis zum Hertzschen Dipol

C vom Kondensator → C Endplatten → C Stab

- L von Spule → L Windung → L Stab
  offener Schwingkreis: C und L pro Länge
- geschlossener Schwingkreis: $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld lokalisiert Streufelder vernachlässigbar
- gerader Draht: Ladungen schwingen zwischen Enden $\vec{E}$ und $\vec{B}$ im ganzen Raum ausgedehnt. Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit c
- Antenne für stehende Welle $l = n\frac{\lambda}{2}$
  Sender induktiv an Schwingkreis gekoppelt
  Empfänger: Nachweis von U/I durch Glimmlage / Glühlampe

[Folie: Stabsendesantenne und -empfängerantenne]
[Folie: Wellenlänge in Wasser]

Wellengleichung

Betrachte Maxwell Gl. im Vakuum ($\rho = 0, \vec{j} = 0$)

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Auswertung:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

3 Maxwell Gl. im Vakuum: $\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$

$$\boxed{\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}} \text{ Wellen gleichung für } E_x, E_y, E_z$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit durch Faktor von $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$$\boxed{\frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0}$$

Kompakte Schreibweise:

$$\underbrace{(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})}_{\partial' \text{ Alambert/Quabla-Operator}} \qquad \vec{E} = 0 \quad \Box \vec{E} = 0$$

Analog für $\vec{B}$-Feld : $\boxed{\Box \vec{B} = 0}$ wellen gl. für $\vec{B}$-Feld

Lsg: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t \mp \vec{k} \vec{r})}$ Ausbreitung in + bzw. - $\vec{k}$- richtung

Ebene Welle

Sei $\vec{k} = k \vec{e}_z$

Ebene Welle: Amplitude konstant in Wellenfront für feste Zeit; Wellenfront: Ebene $\perp \vec{k}$

[Folie: Ebene Welle in z-Richtung]

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0 \quad \text{für festes z und t}$$

3MW-Gl: $\vec{\nabla} \vec{E} \overset{\text{Vakuum}}{=} 0 \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow E_z = \text{const. in } z$

Aus Wellengl.: $\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \ \ E_z = \text{const. in } t \ = 0$ durch Randbedingungen

$$\rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} \perp \vec{k} \quad \text{d.h. transversale Welle}$$

$$\text{div} \vec{E}(\vec{r}, t) \overset{\text{Ansatz}}{=} \vec{E}_0 i (\mp \vec{k}) e^{i(\omega t \mp \vec{k} \vec{r})} \overset{!}{=} 0$$

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{k} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \vec{E}_0 \perp \vec{k}$$

für g. Ausbreitungsrichtung 2 lin. unabhängige Lsg.

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = A_x \vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)}$$
$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = A_y \vec{e}_y e^{i(\omega t - kz)}$$

A_i konstante Amplituden

Einsetze in Welengleichung (z.B. $\vec{E}_1(\vec{r},t)$)

$$-A_x \vec{e}_x k^2 - \frac{1}{c^2}(-A_x \vec{e}_x \omega^2) = 0$$

$$\text{d.h. } c = \frac{\omega}{k} \text{ bzw. } V_{\text{ph}} \equiv \frac{\omega}{k} = c$$

keine Dispersion im Vakuum $V_{\text{ph}} \neq V_{\text{ph}}(\omega)$

Räumliche Periodizität

$$\omega t - k(\lambda + z) - (\omega t - kz) = 2\pi \quad k\lambda = 2\pi$$

Zeitliche Periodizität

$$\omega(t + T) - kz - (\omega t - kz) = 2\pi \quad \omega T = 2\pi$$

[Folie: Eben Welle in z-Richtung]

Polarisation

- lineare Polarisation: $\vec{E}$ zeigt immer in die selbe Richtung $\perp \vec{k}$
  $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ sind linear polarisierte Lösungen

  Phasengleiche Überlagerung von $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$

  $$\vec{E}_{\text{ges}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = A_x \vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)} + A_y \vec{e}_y e^{i(\omega t - kz)}$$

  $\vec{E}$-Feld schwingt in Richtung

  $$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

  linear Polarisiert
  [Folie: Linear polarisierte Wellen]

- zirkulare Polarisation
  $\vec{E}$-Vektor dreht sich um $\vec{k}$ mit konstanter Kreisgeschwindigkeit ω
  2 unabhängige Lsg: links/rechts zirkular links/rechts polarisiert
  Aus Überlagerung von 2 lin. polarisierten Wellen mit Phasenverschiebung $\pm\frac{\pi}{2}$

  $$\vec{E}_1'(\vec{r},t) = E_0 \vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)}$$

  $$\vec{E}_2'(\vec{r},t) = E_0 \vec{e}_y e^{i(\omega t - kz - \frac{\pi}{2})}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_1' + \vec{E}_2' = (E_0\vec{e}_x + iE_0\vec{e}_y)e^{i(\omega t - kz)} = \vec{E}_1 - i\vec{E}_2$$

Richtung von $\vec{E}_L$ aus Realteil

$$\vec{E}_L = \vec{e}_x E_0 \cos(\omega t - kz) + E_0\vec{e}_y \sin(\omega t - kz)$$

festes z: Rotation um k-Achse
[Folie: Zirkular Polarisierte Wellen]
$\sigma_{+/-}$ Drehimpuls der Welle $\sigma_+ : \vec{L} \uparrow\uparrow k$ links zirkular $\quad \sigma_- : \vec{L} \uparrow\downarrow k$ rechts zirkular
elliptische Polarisation: wenn $E_{0,x} = E_{0,y}$ oder $\Delta\phi = \pm\frac{\pi}{2}$
$\vec{E}$-Vektor beschreibt Ellipse um k-Achse

$$\vec{E}_{R,\text{el}} = A_x\vec{E}_1 + iA_y\vec{E}_2 \quad A_x \neq A_y$$

unpolarisiert: wenn $\vec{E}$-Vektor keine zeitlich konstante Richtung und keine Ellipsen periodisch durchläuft, bzw. Richtung in Raum und Zeit statistisch verteilt i.A. Lichtquelle unpolarisiert weil Überlagerung von vielen Emissionen von Atomen/Dipolen.
[Folie: Das Spektrum der el.mag. Strahlung]
[Folie: Messung der Lichtgeschwindigkeit nach B.L. Foucault]

Stehende Welle

- Reflexion von ebener Vakuumwelle an Metalloberfläche
- Überlagerung von ein- und rücklaufender Welle
  $\rightarrow$ stehende Welle

z.B. Welle in z-Richtung, lin. polarisiert in x-Richtung

$$\vec{E}_\text{ein} = E_0\vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\vec{E}_\text{rück} = -E_0\vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)}$$

Metalloberfläche bildet festes Ende. d.h. Phasensprung $\Delta\phi = \pi$ da $\vec{E}_\text{tangetial} = 0 \Rightarrow$ „$-E_0$“

$$\vec{E}_\text{ges} = \vec{E}_\text{ein} + \vec{E}_\text{Rück} = -E_0\vec{e}_x e^{i\omega t} \underbrace{\{\overbrace{e^{ikz}}^{\text{Rück}} - \overbrace{e^{-ikz}}^{\text{Ein}}\}}_{2\sin kz}$$

$$|\Re(\vec{E}_\text{ges})| = 2E_0\vec{e}_x \sin kz \sin \omega t$$

zwei Metallflächen: Abstand $a = n\frac{\lambda}{2}$ stehende Welle

Magnetfeld der Wellen

Betrachte: $\vec{E} = E_0\vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)}$ lin. pol. in x-Richtung, Ausbreitung in +z-Richtung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = E_0(\vec{e}_y)e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\text{Maxwell-Gl:} \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$$

B_x, B_z zeitlich konstant und können $= 0$ gewählt werden

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = +ikE_x = ikE_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

Integration t: $B_y = ikE_0 \int dt e^{i(\omega t - kz)} = \frac{k}{\omega} E_0 e^{i(\omega t - kz)}$
Also: $\vec{B} = \frac{1}{c} |\vec{E}| \vec{e}_y$ mit $\frac{\omega}{k} = c$
$\vec{B} \perp \vec{E}; \vec{B}, \vec{E} \perp \vec{k}$
Kompakt:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{\omega}(\vec{k} \times \vec{E})} \quad \text{im Vakuum}$$

$\vec{B}$ und $\vec{E}$ in Phase schwingen
[Folie: Momentanaufnahme der lin. pol. Welle von E- und B-Feld]

Hohlraumresonator

- 3-dim „Einsperrung der Welle“ $\rightarrow$ leitender Hohlraum (Metallquader)
- Betrachte Quader: l_x, l_y, l_z (a, b, c)
  [Folie: Hohlraumresonator]
- Tangentialkomponente des $\vec{E}$-Feldes verschwindet auf Wänden
- El.-mag. Welle wird vielfach reflektiert und überlagert
  $\rightarrow$ stehende Welle wenn folgende Bedingungen erfüllt sind

  $$k_x = \frac{l\pi}{l_x} \quad k_y = \frac{n\pi}{l_y} \quad k_z = \frac{m\pi}{l_z} \quad l, n, m \text{ ganze Zahlen} \geq 0$$

  Zsgh:

  $$|\vec{k}| = k = \pi \sqrt{\frac{l^2}{l_x^2} + \frac{n^2}{l_y^2} + \frac{m^2}{l_z^2}}$$

  Mögliche Frequenzen $\omega = V_{\text{ph}} k = ck = c\pi$[siehe oben]
  stehende Welle der Form:

  $$E_{lnm} = E_0(l, n, m) \cos \omega t$$

  [Folie: Resonanzbedingung im Hohlraumresonator]

$E_0(l, m, n)$ ergibt sich aus den Bedingungen

i) $\vec{E} \perp \vec{k}$

ii) $\vec{E}_{\text{tangential auf Wänden}} = 0$

- Frage: wie viele Moden unterhalb Grenzfrequenz ω_0 gibt es ?
  wichtig bei der Quantenmechanik Entwicklung

Vereinfachung: Würfel $l_x = l_y = l_z = a$
Bestimme alle $\vec{k} \leq k_G \quad k_G = \frac{\omega_G}{c}$
Punkte (n, m, l) im $\vec{k}$-Raum mit Gitterkonstanten $\frac{\pi}{a}$
Für ω_G bzw. k_G groß d.h. $n^2 + m^2 + l^2 \gg 1$
N_G Anzahl der Gitterpunkte durch $\frac{V_{\text{Kugel}}(|\vec{k}|)}{V_0}$
V_0 Volumen der Einheitszelle im $\vec{k}$-Raum: $V_0 = (\frac{\pi}{a})^3$
$V_{\text{Kugel}}(|\vec{k}|) = \frac{1}{8}\frac{4\pi}{3}k_G^3 \quad \frac{1}{8}$ nur pos. Oktanten $(n, m, l \geq 0)$
Anzahl der Resonatormoden ergibt sich dazu:

$$\begin{aligned} N_G &= 2\frac{V_{\text{Kugel}}(k_G)}{V_0} \quad \text{2 für Polarisationsfreiheitsgrade} \\ &= 2\frac{\pi}{6}(\frac{a\omega_G}{\pi c})^3 = \frac{8\pi f_G^3 a^3}{3c^3} \quad f_G = \frac{\omega_G}{2\pi} \end{aligned}$$

$$\text{Modendichte:} \quad \frac{N_G}{V} = \frac{8\pi f_G^3}{3c^3}$$

$$\text{Spektrale Modendichte:} \quad \frac{dN_G/V}{df} = \frac{8\pi f_G^2}{c^3}$$

III.13.3 Hohlleiter

Hohlraumresonator mit zwei offenen Enden
Ziel: Transport von Mikrowellen

a) planparallele Platten in y/z-Ebene im Abstand d Drehung des Koordinatensystems
$\rightarrow \vec{k} = (k_x, 0, k_z) \quad k_z > 0$
Reflexion an Platten mit Phasensprung π

$$k_x \rightarrow -k_x \quad k_z \rightarrow k_z$$

Polarisation in y-Richtung ($\vec{E} \perp \vec{k}$)

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0\vec{e}_y e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)} + E_0\vec{e}_y e^{i(\omega t + k_x x - k_z z)} \\ &= 2iE_0\vec{e}_y \sin k_x x e^{i(\omega t - k_z z)} \end{aligned}$$

aus Bedingungen, $\vec{E}_{\text{tang.}} \stackrel{!}{=} 0$ folgt $k_x = \frac{n\pi}{d}$ keine Einschränkung auf k_z
Resultat: Welle in z-Richtung mit modulierter Amplitude $\sin \frac{\pi k_x}{d}x$
Algemeine Lösung:

a) $\vec{E} \perp$ Ausbreitung $E_0 = (E_{x0}, E_{y0}, 0)$
TE-Wellen transversal elektrisch
b) $E_z \neq 0$ dann $B_0 = (B_{x0}, B_{y0}, 0)$
d.h. $\vec{B} \perp$ Ausbreitung
TM-Wellen transversal magnetisch

„$e^{i(\omega t - k_z z)}$" beschreibt Ausbreitung. Phasengeschwindigkeit $v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k_z}$
Weiterhin gilt $c = \frac{\omega}{|k|} = \frac{\omega}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}$

$$\rightarrow v_{\text{ph}} = \frac{c}{k_z}\sqrt{k_z^2 + k_x^2} = c\sqrt{1 + \frac{k_x^2}{k_z^2}} \geq c$$

Aber Gruppengeschwindigkeit

$$v_{\mathrm{Gr}} = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \frac{\partial \omega}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial k_z} = \frac{c^2}{\omega} k_z = \frac{c^2}{v_{\mathrm{ph}}} \leq c$$

kleiner als für Wellen im Vakuum
Mit Bedingung $k \overset{!}{=} \frac{n\pi}{d}$ ergibt sich:

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{d^2}}$$

[Folie: Phasen- und Gruppengeschwindigkeit zwischen parallelen Grenzflächen]

b) Wellenleiter

- Rechteckiger Querschnitt
- Mechanismus wie bei parallelen Platten Reflexion + Überlagerung → Welle entlang Achse eines Hohlleiters
  zusätzliche Bedingung in y-Richtung

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x, y) e^{i(\omega t - k_z z)} \qquad (*)$$

  Tangentialkomp von $\vec{E} = 0$ auf 4 Wänden
  $(*)$ in Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial y^2} + \vec{E}_0\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right) = 0 \qquad (**)$$

  wieder TE und TM - Lsg.
  Hier: TE- Moden, d.h. $\vec{E} \perp$ Ausbreitungsrichtung

$$\text{Ansatz:} \quad \vec{E}_0 = \begin{pmatrix} E_0 x \cos k_x x \sin k_y y \\ E_0 y \sin k_x x \cos k_y y \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Aus Randbed.: $k_x = \frac{n\pi}{e_x} \quad k_y = \frac{n\pi}{e_y}$
  l_x, l_y Abmessungen des Hohlleiters
  Aus $(**)$ erhalten wir Bedingungen für k_z

$$-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$k_z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2}(k_x^2 + k_y^2)}}$$

  Phasengeschwindigkeit:

$$v_{\mathrm{ph}} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2}(k_x^2 + k_y^2)}}$$

  Räumliche Periode:

$$\lambda_{\mathrm{eff}} = \lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}(k_x^2 + k_y^2)}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \lambda_0^2\left(\frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_z}^2\right)}}$$

λ_0 Wellenlänge im Vakuum bei ω
$\lambda_x \equiv \frac{2\pi}{k_x} \quad \lambda_y \equiv \frac{2\pi}{k_y}$
$\lambda_z \geq \lambda_0$ da $v_{\text{ph}} \geq c$
k_z muss reelle Zahl sein

$$\rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} \geq k_x^2 + k_y^2$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} \geq \left(\frac{n\pi}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{l_y}\right)^2 \quad \text{oder}$$

$$f \geq f_{\text{Grenz}} = c\sqrt{\left(\frac{n}{2l_x}\right)^2 + \left(\frac{m}{2l_y}\right)^2}$$

Hohlleiter wirkt als Hochpass
$f < f_{\text{Grenz}}(n, m)$ können sich nicht ausbreiten
[Folie: Radiowellen in Erdatmosphäre]

III.13.4 Energietransport

Intensität der Welle

Energiedichte des el-mag. Feldes

$$w = \frac{1}{2}E_o(\vec{E}^2 + c^2\vec{B}^2)$$

Mit $\vec{B} = \frac{1}{\omega}(\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{1}{c}(\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{E})$ im Vakuum $|\vec{B}| = |\vec{E}|/c$

$$w = \epsilon_0|\vec{E}|^2$$

Ebene Welle unendlich ausgedehnt $\rightarrow E$ unendlich Groß.
Intensität $\equiv$ Energie der Welle die Pro Zeit dt durch die Fläche $A \perp$ zur Ausbreitungsrichtung transportiert wird.

$$I = \frac{E_{\text{em}}}{dt\ A} = \frac{w_{\text{em}V}}{dt\ A} = \frac{w_{\text{em}}\, c\, dt\ A}{dt\ A}$$

Mittellung über Wellenlänge $\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2}$

$$\vec{E} = E_0\vec{e}_x \cos(\omega t - kz_0) \quad \text{an Stelle } z_0$$

$$I(t) = I_0 \cos^2(\omega t - kz_0) \quad I_0 = \epsilon c E_0^2$$

$$\begin{aligned}\overline{I} &= \frac{1}{T}\int_0^T I_0 \cos^2(\omega t - kz_0)dt \\ &= \frac{1}{2}I_0 = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2\end{aligned}$$

Für zirkular polarisierte Welle:

$$\overline{I} = c\epsilon_0 E_0^2 \quad \text{da } |\vec{E}| = \text{const.}$$

Intensität $\sim$ (Amplitude der Welle)^2

Poynting-Vektor $\vec{S}$

Def:

$$\vec{S} \equiv \vec{E} \times \vec{H} \overset{\text{Vakuum}}{=} \epsilon_0 c^2 (\vec{E} \times \vec{B})$$

Vakuum:

$$\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{k} \Rightarrow \vec{S} \upuparrows \vec{k}$$

$$S = |\vec{S}| = \epsilon_0 c^2 |\vec{E}||\vec{B}| = \epsilon_0 c |\vec{E}|^2 = I$$

$\vec{S}$ beschreibt Richtung und Betrag des Energieflusses
Betrachte Volumen V

$$E_{\text{em}} = \epsilon_0 \int\limits_V |\vec{E}|^2 dV$$

keine Verbrauch von E_{em} in V lediglich Zu- oder Abfluss

$$-\frac{\partial E_{\text{em}}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_V \epsilon_0 |\vec{E}|^2 dV = \oint\limits_A \vec{S} d\vec{A} = \int\limits_{\substack{\text{Gausscher} \\ \text{Satz}}} \text{div } \vec{S} dV$$

$$\boxed{-\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 |\vec{E}|^2) = \text{div } \vec{S}}$$

[Folie: Impulstransport/Strahlungsdruck und davor]

Impulstransport

el.-mag. Welle transportiert auch Impuls

$$\begin{array}{ll} \text{Impulstransport} & \vec{\pi} \equiv \dfrac{1}{c^2}\vec{S} = \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) \\ \text{Strahlungsdruck} & P_{\text{St}} = \dfrac{F}{A} = \dfrac{dp}{dt}\dfrac{1}{A} \\ \text{Impulsänderung} & dp = |\vec{\pi}|V = |\vec{\pi}|Ac\ dt \end{array}$$

$$\Rightarrow P_{\text{St}} = \epsilon_0 |\vec{E}|^2 = w_{\text{em}} \quad \text{für Absorption}$$

Spiegel mit Reflexion der Welle $\Delta p \to 2\Delta p$

III.14 Wellenabstrahlung

III.14.1 Hertzscher Dipol

- offener, gerader Schwingkreis
- e^- im Leitungsband schwingen periodisch
- Trennung der Ladungen: e^--überschuss oder e^--Mangel
  → Bildung eines oszillierenden Dipols $\vec{p} = q\vec{d}$ $\pm q$ Ladungen , $\vec{d} : -q \xrightarrow{\vec{d}} +q$
  Beachte $|\vec{d}| \ll l_{\text{stab}}$ typ: $|\vec{d}| \sim \mu$m

III.14.2 Abstrahlung des Hertzschen Dipols

- q spürt Kraftwirkung aus dem $\vec{E}$-Feld des Dipols erst nach $\Delta t = \frac{\text{Abstand}}{c}$

$\rightarrow$ Retardierung, $\vec{E}$, $\vec{B}$ breiten sich mit Verzögerung im Raum aus

Magnetfeld

Bio-Savart für Vektorpotential $\vec{A}$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

[Folie: Zur Berechnung des B-Feldes]
Stromdichte der e^- im Stab:

$$\vec{j}(\vec{r}', t) = \underbrace{\vec{v}(\vec{r}', t)}_{\text{Geschw.}} \underbrace{\rho(\vec{r}', t)}_{\text{Ladungsdichte}}$$

Betrachte:

- $|\vec{r} - \vec{r}'| \gg l$ Stab dann
  - a) $r = |\vec{r}| \gg l$
  - b) $|\vec{r} - \vec{r}'| \approx |\vec{r}|$ unabhängig von $\vec{r}'$
- Laufzeit der Wellen im Stab $\mathcal{T} = \frac{l}{c} \ll T = \frac{2\pi}{\omega}$
  d.h. alle Wellenfronten von unterschiedlicher $\vec{r}'$ gleichzeitig bei $\vec{r}$ ankommen

Berücksichtigung der Retardierung

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{v}(\vec{r}', t')\rho(\vec{r}', t') d^3\vec{r}'$$

$$t' = t - \frac{r}{c} \quad \text{Retardierung}$$

Integrand durch oszillierenden Dipol beschreibbar. Dipol in z-Richtung: $\vec{p}(t) = qd \sin \omega t \vec{e}_z$
Aus $\frac{d}{dt}\vec{d} = \vec{v}$ folgt: $\frac{d}{dt}\vec{p} = q\frac{d}{dt}\vec{d} = q\vec{v}$
Raum- $\rightarrow$ Ladungsintegral $\rho d^3\vec{r}' = dq$

$$\rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{1}{q} \frac{dp(t - \frac{r}{c})}{dt} \int_{\text{Stab}} dq$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} qd\omega\{\omega(t - \frac{r}{c})\}\vec{e}_z \quad p_0 = qd$$

- $\frac{d}{dt}\vec{p}$ erzeugt $\vec{A}$ und damit $\vec{E}$ und $\vec{B}$-Felder
- Magnetfeld $\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial A_z}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix}$

Bei Ableitung beachten: $\tau(x,y)$ und Retardierung

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}p(t-\frac{r}{c})\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y}\frac{d}{dt}p(t-\frac{r}{c}) \\ -\frac{d}{dt}p(t-\frac{r}{c})\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}\frac{d}{dt}p(t-\frac{r}{c}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t' = t - \frac{r}{c} \quad \frac{d}{dt}p(t-\frac{r}{c}) = \frac{d}{dt'}p(t')\underbrace{\frac{dt'}{dt}}_{1} \equiv \dot{p}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial r} = -\frac{1}{c} \quad \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial y} = \frac{1}{2r}2y = \frac{y}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\dot{p} = -\ddot{p}\frac{1}{c}\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{r}) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{-2r^3}2y = -\frac{y}{r^3}$$

Ergibt:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\begin{Bmatrix} -\dot{p}\frac{y}{r^3} - \ddot{p}\frac{y}{cr^2} \\ +\dot{p}\frac{x}{r^3} + \ddot{p}\frac{x}{cr^2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{mu_0}{4\pi}\left\{\frac{\dot{\vec{p}}}{r^2}x\vec{e}_r + \frac{\ddot{\vec{p}}}{cr}x\vec{e}_r\right\}$$

$\vec{B} \perp \vec{p} \quad (\vec{p} \parallel \dot{\vec{p}} \parallel \ddot{\vec{p}}) \quad \vec{B} \perp \vec{r}$ Beiträge:

a) „$\dot{\vec{p}}$“ , $\sim \frac{1}{r^2}$
   Vgl. Bio-Savart $d\vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{j}\times\vec{r}}{r^2}dV$
   $\dot{\vec{p}}\int\vec{j}dV \Rightarrow \dot{\vec{p}}$ stammt aus Oszillation von $\vec{j}$

b) „$\ddot{\vec{p}}$“ , $\sim \frac{1}{r}$ aus $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ bzw. des Verschiebungsstromes
   Vgl: Maxwell-Gl:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Elektrisches Feld

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\mu_0}{4\pi}(\dot{p}\frac{z}{r^3} + \ddot{p}\frac{z}{cr^2})$$

In Lorentzeichung:

$$\text{div } \vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\text{el}} \quad \text{mit} \quad \epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$\rho_{\text{el}}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{p\frac{z}{r^3} + \dot{r}\frac{z}{cr^2}\right\}$$

Final

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\rho_{\text{el}} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\begin{Bmatrix} 3p\frac{xz}{r^5} + 3\dot{p}\frac{xz}{cr^4} + \ddot{p}\frac{xz}{c^2r^3} \\ 3p\frac{yz}{r^5} + 3\dot{p}\frac{yz}{cr^4} + \ddot{p}\frac{yz}{c^2r^3} \\ p(3\frac{z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}) + \dot{p}(3\frac{z^2}{cr^4} - \frac{1}{cr^2}) + \ddot{p}(\frac{z^2}{c^2r^3} - \frac{1}{c^2r}) \end{Bmatrix}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{3(\frac{\vec{p}}{r^3}\vec{e}_r)\vec{e}_r - \frac{\vec{p}}{r^3} + 3(\frac{\vec{p}}{cr^2}\vec{e}_r)\vec{e}_r - \frac{\dot{\vec{p}}}{cr^2} + (\frac{\ddot{\vec{p}}}{cr^2} \times \vec{e}_r)\vec{e}_r\right\}$$

Nahfeld: Terme $\sim \frac{1}{r^2}$ und $\sim \frac{1}{r^3}$

$$\vec{E}_N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}[-\vec{p}^* + 3(\vec{p}^*\vec{e}_r)\vec{e}_r]$$

$$\vec{p}^* ? \vec{p} + \frac{r}{c}\dot{\vec{p}}$$

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ um $\frac{\pi}{2}$ verschoben
Fernfeld: Term $\sim \frac{1}{r}$

$$\vec{E}_F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}[\ddot{\vec{p}} - (\vec{e}_r \cdot \ddot{\vec{p}})\vec{e}_r]$$

$\perp \vec{r}$, $\perp \vec{B}$, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in Phase wie von Vakuumwelle erwartet
Amplitude $\sim \frac{1}{r} \Rightarrow$ Intensität $\sim \frac{1}{r^2}$
$\rightarrow$ Energie und Impuls durch eine Kugelfläche konstant

$$|\vec{E}| = \frac{|\ddot{\vec{p}}|\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}$$

$$\theta : \sphericalangle \text{ Dipolachse und Richtung der Welle}$$

nicht isotrop, maximal $\perp$ Dipolachse. Verschwindet entlang Dipolachse
[Folie: Nahfeld des Hertzschen Dipol und davor]

Strahlungsdämpfung

Energiestromdichte: $|\vec{S}| = \epsilon_0 c|\vec{E}|^2$
Im Fernfeld: $S = \epsilon_0 c\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\ddot{p}}{c^2 r}\sin\theta\right)^2$
mit $\ddot{p}^2 = -p_0^2\omega^4\sin^2(\omega(t+\frac{r}{c}))$
Mittlung über Schwingungsperiode $\overline{\ddot{p}^2} = \frac{1}{2}p_0^2\omega^4$
Beachte Skalierung mit ω^4
$\rightarrow$ signifikante Abstrahlung bei hohen Frequenzen

$$\boxed{p = \frac{p_0^2\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}}$$

- Energie wird der Schwingung des Dipols entzogen
  $\rightarrow$ Dämpfung der Schwingung
  aber Kompensation durch gekoppelte Schwingkreis

- Berechnung für freie Schwingung
  Bei $t=0$ Schwingung mit Amplitude p_0 dann schwache Dämpfung $p(t) = p_0 e^{-\gamma t}$
  Da $E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \sim |\text{Amplitude}|^2$
  gilt $E_{\text{tot}} = E_{\text{tot}}(t=0)e^{-2\gamma t}$
  Abgestrahlte Leistung $P > 0$
  $-P = \frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = -2\gamma E_{\text{tot}} \quad \gamma = \frac{1}{2}\frac{P}{E_{\text{tot}}}$

In Mechanik: $E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 d^2$
Daraus $\gamma = \frac{q^2\omega^2}{12\pi\epsilon_0 m_e c^3}$
m_e Masse el., q Ladung des Dipols

- Wie sieht das Frequenzspektrum aus ?

  - naiv: nur $\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
  - Dämpfung bewirkt Verbreitung. Antenne sendet eine Welle aus mit esp. abklingender Amplitude.
    Mechanik:
    $$d = \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + (2\gamma\omega)^2}}$$
    d Amplitude, ω_0 Resonanzfrequenz
    K Stärke der Anregung $= \frac{E_0 q}{m}$
    Einsetzen in $P = +2\gamma E_{\text{tot}}$
    $$P = \frac{q^2\omega^2 K^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + (2\gamma\omega)^2}$$
    bei $\omega_{1/2} = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} \pm \gamma$ fällt P auf die Hälfte $\Delta\omega = 2\gamma$ volle Breite auf halber Höhe
    [Folie: Lebensdauer eines atomaren Zustands]

III.14.3 Beschleunigte Ladungen

Elektrostatik $\varphi(\mathbf{r})$ aus $\rho(\vec{r}')$ via Poisson-Integrals

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

Bewegte Ladungen $\rightarrow$ Modifikationen

i) Retardierung: $\vec{r}'(t - \frac{r}{c}) \quad \rho(\vec{r}'(t - \frac{r}{c}))$

ii) „Deformation“ des Integrationsvolumens dV_R'
[Folie: Verlängerung der Strecke in Bewegungsrichtung]

Verlängerung von $d^3\vec{r}'$ in Richtung von $\vec{v}$ der Ladungsbewegung

$$dV_R' = \frac{d^3\vec{r}'}{1 - \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}} \frac{\vec{v}}{c}$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}'(t - \frac{r}{c}))}{|\vec{r} - \vec{r}'(t - \frac{r}{c})|} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\vec{v}}{c} d^3\vec{r}'$$

Für eine Punkladung q

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qC}{|\vec{r} - \vec{r}'|c - (\vec{r} - \vec{r}')\vec{v}}\bigg|_{\text{ret}}$$

analog ergibt sich

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qC}{|\vec{r}-\vec{r}'|c-(\vec{r}-\vec{r}')\vec{v}}\Bigg|_{\text{ret}} \\ &= \frac{\vec{v}}{c^2}\varphi(\vec{r},t)\end{aligned}$$

Liénard-Wiedert-Potentiale für Pkt. ladungen

Felder der bewegten Ladung

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

Einsetzen und lange rechnen ...

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qw}{(\vec{\omega}\cdot\vec{u})^3}\left\{(c^2-v^2)\vec{u}+\vec{w}\times(\vec{u}\times\vec{a})\right\}_{\text{ret}}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{e}_w\times\vec{E} \quad \vec{v},\vec{a} \text{ Geschwindigkeit, Beschleunigung der Ladung q}$$

$$\vec{w}\equiv\vec{r}-\vec{r}'_{\text{ret}} \qquad \vec{u}\equiv c\vec{e}_w-\vec{v}$$

2 Beiträge:

i) Term $\sim\vec{u}$ Nahfeld $|\vec{E}|,|\vec{B}|\sim\frac{1}{w^2}$
Energiefluss $\sim\frac{1}{w^4}\longrightarrow 0$ für Kugelschale mit $R\to\infty$

ii) Term $\sim\vec{w}\times(\vec{u}\times\vec{a})$ Fernfeld $|\vec{E}|,|\vec{B}|\sim\frac{1}{w}$
Energiefluss $\sim\frac{1}{w^2}\longrightarrow$ konstant durch Kugelschalen
$\rightarrow$ Dieser Term bestimmt Abstrahlung $\sim|\vec{a}|$ bewirkt Energieverlust von q

2 Spezialfälle:

i) ruhende Ladung $n = c\vec{e}_w \ \parallel\ \vec{r}-\vec{r}'$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qw}{c^3(\vec{w}\vec{e}_w)}c^2(c\vec{e}_w) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{w^2}\vec{e}_w$$

$\vec{B}=0$ wie in Elektrostatik

ii) konstante Geschwindigkeit $\vec{r}'(t)=\vec{v}t$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qw}{(\vec{w}\vec{u})^3}(c^2-v^2)\vec{u}\Bigg|_{\text{ret}}$$

Es gilt: $w\vec{u} = c\Delta\vec{r} \qquad \Delta\vec{r}\equiv\vec{r}-\vec{r}'=\vec{r}-\vec{v}t$
weiterhin: $\vec{w}\vec{u} = c\Delta\vec{r}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}$
$\theta = \sphericalangle\vec{v}$ und $\vec{E}$

$$\text{Ergibt:}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\frac{q}{\Delta r^2}\Delta\vec{r}$$

[Folie: Elektrische Feldlinien bewegter Punktladungen]Für $|\vec{v}|\to c$ $\quad E_{\text{trans}}$ wächst, E_{long} nimmt ab

Abstrahlung

- im Fernfeld, $\sim |\vec{a}|$ der Pkt.ladung Energiefluss aus Pointingvektor

  $$\begin{aligned}\vec{S} &= \epsilon_0 c^2 (\vec{E} \times \vec{B}) = \epsilon_0 c(\vec{E} \times (\vec{e}_w \times \vec{E})) \\ &= \epsilon_0 c(\vec{E}^2 \vec{e}_w - (\vec{e}_w \vec{E})\vec{E})\end{aligned}$$

  im Fernfeld gilt $\vec{E} \perp \vec{w} \to$ 2. Term $= 0$

  $$\boxed{\vec{S} = \epsilon_0 c |\vec{E}|^2 \vec{e}_w}$$

  $\vec{E}$ abhängig von $\vec{v}$ und $\vec{a}$ der Ladung

- wenn $\vec{v} = \vec{0}$ dann $\vec{u} = c\vec{e}_w$ aber Abstrahlung $\neq 0$
- wenn $\vec{a} = \vec{0}$ dann Abstrahlung $= 0$
  $\vec{a} \neq \vec{0}$ dann Abstrahlung in gewisse Richtung
  $\boxed{\text{Beschleunigte el. Ladungen strahlen el. mag. Wellen aus}}$

Abgestrahlte Leistung in $d\Omega = d\varphi \sin\theta \; d\theta$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \epsilon_0 c |\vec{E}|^2 w^2$$

$\vec{S}$ gibt Leistung von Bewegung Q in Richtung $d\varphi,\ d\theta$ aus Sicht der Ladung.
Suche: Leistung an Ort $\vec{r}$ (ruhender Beobachter).
Leistung unterschiedlich da Art Dopplereffekt:

$\to$ Abstände Wellentäler ändert sich

$\to$ zusätzlicher Faktor

$$\frac{dP}{d\Omega} = \epsilon_0 c |\vec{E}|^2 w^2 \frac{\vec{w}\vec{u}}{wc} \qquad \left(\substack{\text{ohne} \\ \text{Ableitung}}\right)$$

Betrachte 2 Spezialfälle:

i) $\vec{a}$ parallel $\vec{v}$
$\vec{u} \times \vec{a} = c(\vec{w} \times \vec{a})$ und $\vec{w} \cdot \vec{u} = \vec{w}(c - \vec{e}_w \vec{v})$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 c^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{\{\vec{e}_w \times (\vec{e}_w \times \vec{a})\}}{(c - \vec{e}_w \vec{v})^5} \qquad = \frac{q^2 |\vec{a}|^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{\sin^2\theta}{(1 - \frac{v}{c}\cos\theta)^5}$$

$\theta = \sphericalangle \vec{v}$, Beobachtungsrichtung
$v \to 0 :\sim \sin^2\theta$ Senkrecht zu $\vec{a}$
$v \to \infty$: Nenner $\to 0$ für $\theta \to 0 \Rightarrow$ Vorwärtsabstrahlung

$$\boxed{P = \int \frac{dP}{d\Omega}\Omega = \frac{q^2 c^2 \gamma^6}{6\pi\epsilon_0 c^3}}$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E_{\text{ges}}}{den} mc^2 \geq 1 \quad \beta = \frac{v}{c} \leq 1$$

Beachte: $\gamma^6 = (\frac{E}{m})^6$ Abhängigkeit
„Bremstrahlung“wenn $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{v}$
Gleich für Beschleunigung und Abbremsung ($|\vec{a}|^2$)
[Folie: Bremsstrahlung in Materie] [Folie: Röntgenröhren]

ii) $\vec{a} \perp \vec{v}$ $\quad |\vec{v}| = \text{const.}$ Kreisbewegung
$\vec{v} \sim \vec{e}_w$ und $\vec{a} \sim \vec{e}_x$ $\vec{w}$ in Polarkoordinaten

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2a^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{(1-\beta\cos\theta)^2 - (1-\beta^2)\sin^2\theta\cos^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}$$

$$P = \frac{q^2a^2\gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

„Synchrotronstrahlung": 1964 erstmals an Kreisbeschleuniger beobachtet

- $\gamma^4 = (\frac{E}{m})^4$ Abhängigkeit
  limitiert maximale Energie von Kreisförmigen $\frac{e^+}{e^-}$-Beschleunigern
- Abstrahlungscharakteristik
  $\beta \approx 0 : \sim 1 - \sin^2\theta\cos^2\varphi$
  $\varphi = 0 :\ 1 - \sin^2\theta$ (wieder $\perp \vec{a}$)
  $\varphi = 90° :\ 1$
  $\varphi = 45° :\ (\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}})1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta$
  $\beta \to 1 :\ \frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^3}$
  Strahlung in Vorwärtsrichtung gebündelt
  [Folie: Abstrahlung bei v senkrecht a]
  [Folie: Kosmische Synchrotronstrahlung]
  [Folie: Strahlentod der Atomen]

III.15 Elektro-magnetische Wellen in Materie

III.15.1 Brechungsindex/Brechzahlen

- wie verändert sich Welle im Medium?
- Wissen bereits:
  - $$v_{\text{ph}}^{\text{med}} = c = c_{\text{med}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon\mu}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad c_0\text{Lichtgeschw. im Vakuum}$$
  - Dipol im Wasser: $\lambda < \lambda_0$ $\qquad \lambda_0$Vakuumwellenlänge
  - e^- in Atomen zu periodischen Schwingungen angeregt

    $$\omega_{e^-} = \omega_{\text{ext Welle}}$$

    $\to$ Abstrahlung von Sekundärwellen
- Brechzahl $n = \frac{c_0}{c_{\text{med}}}$ da $\omega = \text{const.}$ folgt $\lambda_{\text{med}} = \frac{\lambda_0}{n}$

[Folie: Anregung von Atomschwingungen]

Reaktion des Mediums

e^--Schwingung durch Welle in z-Richtung, in x linear polarisiert

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Dx = -eE_0 e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = Ke^{i\omega t} \qquad K = -\frac{eE_0}{m}$$

b beschreibt die Dämpfung die durch Energieübertragung auf Festkörper entsteht
D beschreibt die Stärke der atomaren Rückstellkraft
E_0 ist die Amplitude der Anregenden Welle

Lösung:

$$x(t) = x_0(\omega)e^{i\omega t}$$

$$x_0(\omega) = \frac{k}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}$$

Phasenverschiebung:

$$\phi(\omega) = \pi + \arctan\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$|x_0(\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + (2\gamma\omega)^2}}$$

$\rightarrow$ Emission von Sekundärwellen von allen e^- im Medium ω/ω_0 klein $\rightarrow$ positive Phasenverschiebung $\Delta\phi > 0$ klein
[Folie: Überlagerung von Primärwelle und Sekundärwelle(n)]
Überlagerung der Wellen bewirkt:

- Phase wird in jeder Schicht verzögert
- Abstand der Maxima/Wellenlänge wird reduziert
- Welle $\perp$ Ausbreitungsrichtung interferieren zu 0

$\Rightarrow$ λ und c im Medium sind reduziert um n

Makroskopische Welle

[Folie: Phasenverzögerung im Medium]
Strecke Δz im Medium
Vakuumwelle bräuchte: $t_0 = \frac{\Delta z}{c_0}$
Mediumwelle braucht: $t_{\Delta z} = \frac{\Delta z}{c} = \frac{n\Delta z}{c_0} = t_0 + \underbrace{\frac{(n-1)\Delta z}{c_0}}_{\Delta t}$
Welle beim Eintritt: $E(t) = E_0 e^{i\omega t}$ bei $z = 0$
Beim Austritt: $E(\Delta z, t) = E_0 e^{i\omega(t - t_{\Delta z})} = \underbrace{E_0 e^{i\omega(t - \frac{\Delta z}{c_0})}}_{\text{ungestörte Welle im Vakuum}} \quad \underbrace{e^{-i\omega(n-1)\frac{\Delta z}{c_0}}}_{\equiv e^{-i\phi}\text{Phasenverzögerung}}$

$$\phi = \omega(n-1)\frac{\Delta z}{c_0} = 2\pi(n-1)\frac{\Delta z}{\lambda_0}$$

Dünne Schicht: $\phi \ll 1 \Rightarrow e^{-i\phi} \approx 1 - i\phi$
Welle hinter Medium:

$$E(\Delta z, t) = \underbrace{E_0 e^{i\omega(t-\frac{\Delta z}{c_0})}}_{\text{Primärwelle}} \underbrace{- i\omega(n-1)\frac{\Delta z}{c_0} E_0 e^{i\omega(t-\frac{\Delta z}{c_0})}}_{\text{Effekt von Sekundärwellen}}$$

Mikroskopische Modell:

[Folie: Zur Berechnung des E-Feldes der Sekundärwelle]

- Betrachte $\vec{E}$-Feld eines Hertzschen Dipols (Dipol $p_0 = -ex_0$) im Fernfeld $z_0 \gg x_0$ am Punkt z_0 vom Dipol bei $z = 0, \rho, \varphi$

$$\vec{E}_{\text{1D}}(z_0, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e\omega^2 x_0}{c_0^2 r} e^{i\omega(t-\frac{r}{c_0})} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\rho^2}{r^2}\cos^2\varphi \\ -\frac{\rho^2}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi \\ \rho\frac{z_0}{r^2}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Kreisring bei ρ summieren/integrieren
Kreisscheibe mit Dichte Δz : $dV = \Delta z\; d\varphi \rho\; d\rho$
Anzahl der Dipole in Kreisscheibe: $dN = n_{\text{at}} dV \quad n_{\text{at}} \mathrel{\widehat{=}}$ Atomdichte auf z-Achse
konstruktive Überlagerung da Δt gleich
$\Rightarrow$ resultierende Welle dN mal Welle für 1 Dipol

$$d\vec{E}_0(z_0, t) = n_{\text{at}} \vec{E}_{\text{1D}}(z_0, t)$$

$$\vec{E}_{\text{D}} = n_{\text{at}} \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \rho \vec{E}_{\text{1D}}(z_0, t)$$

$\vec{E}_{\text{D}}$ in x-Richtung. $\int d\varphi$ bewirkt $E_y = E_z = 0$

$$\left.\vec{E}_0(z_0, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-ex_0\omega^2}{c_0^2} n_{\text{at}} \Delta z e^{i\omega t}\right\} \equiv A$$

$$\int_{z_0}^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi (1 - \frac{\rho^2}{r^2}\cos^2\varphi) e^{-i\omega\frac{r}{c_0}} \vec{e}_x$$

Änderung der Integrationsvariablen $\rho \to r$

$$\rho\; d\rho = r\; dr \quad \text{da} \quad r^2 = \rho^2 + z_0^2 \quad z_0 = \text{const.}$$

Integration über $d\varphi$ durchführen:

$$\vec{E}_{\text{D}}(z_0, t) = A \int_{z_0}^\infty dr \pi \Big(1 + \frac{z_0^2}{r^2}\Big) e^{-i\frac{\omega}{c_0} r} \vec{e}_x$$

Für ∞-ausgedehnte Welle divergiert Integral. Durchmesser der Lichtwelle $2\rho_{\max}$, nur Dipole mit $\rho < \rho_{\max}$ teil $z_0^2 \approx r^2$ im Fernfeld $\Big(1 + \frac{z_0^2}{r^2}\Big) \approx 2$
Berücksichtige nur untere Integrationsgrenze

$$\vec{E}_{\text{D}}(z_0, t) = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{ex_0\omega^2}{c_0^2} n_{\text{at}} \Delta z e^{i\omega t} \Big(i\frac{c_0}{\omega}\Big) e^{-i\frac{\omega}{c_0} r} \vec{e}_x$$

Mit Amplitude x_0 der e^--Schwingung

$$\vec{E}_{\mathrm{D}}(z_0,t) = -i\frac{e^2\omega^2 n_{\mathrm{at}}}{2\epsilon_0 m}\frac{\Delta z}{c_0}E_0\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+2i\gamma\omega}e^{i\omega(t-\frac{z_0}{c})}\vec{e}_x$$

Vergleich zwischen makroskop. und mikroskop. Beschreibung

$$\frac{e^2\omega n_{\mathrm{at}}\Delta z}{2\epsilon_0 m c_0}E_0\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+2i\gamma\omega} \overset{!}{=} \omega(n-1)\frac{\Delta z}{c_0}E_0$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 1 + \frac{e^2 n_{\mathrm{at}}}{2\epsilon_0 m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+2i\gamma\omega}} \qquad \text{komplexe Größe}$$

- abhängig von $n_{\mathrm{at}}, \omega_0, \gamma$
- Achtung: gilt strikt nur für Medien mit $n-1 \ll 1$ Hier nur eine Eigenfrequenz $\rightarrow$ Verallgemeinerung

$$n = 1 + \frac{e^2}{2\epsilon_0 m}\sum_{j=1}^{N}\frac{n_{j,\mathrm{at}}}{\omega_j^2-\omega^2+2i\gamma_j\omega_j}$$

für N Eigenfrequenzen ω_j, mit Dämpfung γ_j und Dipoldichte $n_{j,\mathrm{at}}$

Absorption und Dispersion

Aufspaltung $n = \underset{(n_r)}{\underset{\parallel}{n'}} - i\kappa$

Realteil:

$$n' = 1 + \frac{e^2 n_{\mathrm{at}}}{2\epsilon_0 m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}$$

Imaginärteil:

$$\kappa = \frac{e^2 n_{\mathrm{at}}}{2\epsilon_0 m}\frac{4\gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2} \qquad = 0 \quad \text{für} \quad \gamma = 0$$

Welle bei Austritt aus Medium:

$$\begin{aligned}\vec{E}(z_0,t) &= E_0 e^{\omega\kappa\frac{\Delta z}{c_0}}e^{-i\omega(n'-1)\frac{\Delta z}{c_0}}e^{i\omega(t-\frac{\Delta z}{c_0})} \\ &= E_0 e^{2\pi\kappa\frac{\Delta z}{\lambda_0}}e^{-i2\pi(n'-1)\frac{\Delta z}{\lambda_0}}e^{i\omega(t-\frac{\Delta z}{c_0})}\end{aligned}$$

- $e^{i\omega(t-\frac{\Delta z}{c_0})}$ ausfallende ursprüngliche Welle
- $e^{-i\omega(n'-1)\frac{\Delta z}{c_0}}$ Phasenverschiebung im Medium
  $n'(\omega) \Rightarrow n'(\lambda)$ Dispersion
- $e^{-\omega\kappa\frac{\Delta z}{c_0}}$ exponentielle Abnahme der Amplitude

Def.: **Absorptionskoeffizienten** α

$$\boxed{I(\Delta z) = I_0 e^{-\alpha\Delta z}} \quad \text{Beersches Absorptionsgesetz}$$

I Intensität
[Folie: Dispersion in verschiedenen Gläsern]
Zshg. von κ und α: $\alpha = \frac{4\pi\kappa}{\lambda}$ $\qquad [\alpha] = \frac{1}{\mathrm{m}}$

Reflexions- und Brechungsgesetz

[Folie: Reflexion und Brechung]

- hier: Richtungen, Intensitäten/Polarisation (Mittwoch)
- Grenzfläche in x-z-Ebene
- Wellenvektor der einlaufenden Welle $\vec{k}_e$ in x-y-Ebene
  Normalenvektor $\vec{n}_{xz}$ und $\vec{k}_e$ bilden Einfallsebene
- Tangentialkomponente des $\vec{E}$-Feldes stetig an Grenzfläche

$$E_{e,t} + E_{r,t} = E_{g,t} \tag{$*$}$$

t tangential, e einlaufend, g gebrochen
bei $\vec{r} = 0$:

$$A_{e,t}e^{i\omega_e t} + A_{e,t}e^{i\omega_r t} = A_{g,t}e^{i\omega_g t}$$

Nur Lösung, wenn gilt $\omega_e = \omega_r = \omega_g$
Bedingung $(*)$ gilt nur für gesamte x-z-Ebene

$$k_e\vec{r} = k_r\vec{r} = \vec{k}_g\vec{r} \tag{$**$}$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + z\vec{e}_z \quad \text{in Grenzfläche}$$

$$\vec{k}_e = k_{ex}\vec{e}_x + k_{ey}\vec{e}$$

$$\vec{k}_r = k_{rx}\vec{e}_x + k_{ry}\vec{e}_y + k_{rz}\vec{e}_z \qquad \vec{k}_g = k_{gx}\vec{e}_x + k_{gy}\vec{e}_y + k_{gz}\vec{e}_z$$

Einsetzen in $(**)$

$$k_{ex}x = k_{rx}x + k_{rz}z = k_{gx}x + k_{gz}z$$

Muss für beliebige x und z in Grenzfläche gelten

$$\Rightarrow k_{ex} = k_{rx} = k_{gx} \qquad k_{rz} = k_{gz} = 0$$

d.h. Wellenvektoren von reflektierter und gebrochener Welle auch in Einfallsebene.
Aus Abb:

$$k_{ex} = k_e \sin\alpha \qquad k_{rx} = k_r \sin\alpha' \qquad k_{gx} = k_g \sin\beta$$

$$\frac{\sin\alpha}{c_1} = \frac{\sin\alpha'}{c_1} = \frac{\sin\beta}{c_2} \quad c_i \text{ Lichtgeschwindigketi im Medium i}$$

$$\boxed{\sin\alpha = \sin\alpha' \qquad \alpha = \alpha' \qquad \text{Reflexionsgesetz}}$$

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c1}{c2} = \frac{n2}{n_1} \qquad \text{Snelliusche Brechungsgesetz}}$$

[Folie: Anwendung er Totalreflexion: Retroreflexionsprisma und Lichtleiter]

Totalreflexion

Übergang $1 \to 2$; $n_1 > n_2$
$\sin\alpha\frac{n_1}{n_2} = \sin\beta \overset{!}{\leq} 1$
Für $\sin\beta > 1$ keine Brechung $\to$ Totalreflexion
Grenzwinkel $\sin\alpha_{\text{Gr}} = \frac{n_2}{n_1}$

$\alpha > \alpha_{\text{Gr}}$ wird $\vec{k}_g$ komplex $\Rightarrow$ evaneszente Welle:
Welle dringt in das Medium ein. Intensität $I_2 \sim e^{-\frac{z}{\lambda}}$

Absorption

κ, α werden groß wenn $\omega \approx \omega_0$. Dann $n_r = 1$
Exp: weißes Licht $\rightarrow$ Schatten des Stäbchens, „keine“ Absorption
Na-Lampe $\rightarrow$ Absorption in NaCl $\rightarrow$ Schatten der Flamme
$\hbar\omega_{\text{Licht}} = \Delta E_{\text{Na}}$ Unterschied der Energieniveaus im Na

III.15.2 Wellengleichung in Materie

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \mu (\vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t})$$
$$\vec{\nabla} \vec{D} = \rho \qquad \vec{\nabla} \vec{B} = 0$$
$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \rho, \vec{j} \text{ freien Dichten}$$

Nichtleiter/Isolator: $\vec{j} = 0$ ungeladen $\rho = 0$
Analog zu Vakuum: $\Delta \vec{E} = \mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0}}$
ebenso: $\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$ Annahme $\mu_r \approx \underline{1}$ (kein Ferromagnet)
Setze $\vec{D}(\vec{E}, \underline{\vec{P}})$ in rot$\vec{B}$ ein

$$\Delta \vec{E} = \underbrace{\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}_{\text{Primärwelle}} + \underbrace{\frac{1}{\epsilon_0 c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}}_{\text{Sekundärwelle aus Dipolen}} \qquad \mu \approx 1 \quad n = \sqrt{\epsilon}$$

Aus $\vec{B} \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E})$ folgt mit $\vec{k} = n \vec{k}_0$
$\vec{B} = \frac{n}{c} (\vec{e}_{\vec{n}_0} \times \vec{E}) = \frac{|n|}{c} (\vec{e}_{n_0} \times \vec{E}) e^{i\phi_B}$
mit $n = |n| e^{i\phi_b} \quad \tan \phi_B = -\frac{k}{n}$
für $k \neq 0$ sind $\vec{E}$ und $\vec{B}$ nicht mehr in Phase
In x lin. pol. Welle mit Ausbreitung in z-Richtung

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kz} \vec{e}_x \quad \underline{P} = N \alpha E_x$$
$$\alpha \text{ polarisierbarkeit}, N \text{ Dipoldichte}$$

α Polarisierbarkeit, N Dipoldichte
Einsetzen in Wellengleichung: $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \frac{N\alpha}{\epsilon_0}) \qquad \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k}$
ergibt:

$$\boxed{n^2 = 1 + \frac{N\alpha}{\epsilon_0}}$$

Zusammenhang zwischen Brechzahl und Polarisierbarkeit
Induzierter Dipol:

$$p = -eX_0 = \frac{e^2 E}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\gamma i \omega)}$$

Andererseits: $\vec{p} = \alpha(\omega) \vec{E}$
Also folgt:

$$\alpha = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 \omega^2 + 2i\gamma\omega)}$$

bzw: $n^2 = 1 + \frac{e^2 N}{\epsilon m (\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)}$
Gültig für n-1 groß
Für $(n-1) \ll 1$ „altes“ Ergebnis mit $(n^2 - 1) \approx 2(n-1)$

III.15.3 Wellen an Grenzflächen

einfallend $E_e = A_e e^{i(\omega t - \vec{k}_e \vec{r})}$

reflektiert $E_r = A_r e^{i(\omega t - \vec{k}_r \vec{r})}$

gebrochen $E_g = A_g e^{i(\omega t - \vec{k}_g \vec{r})}$

$\vec{k}_0, \vec{k}_r$ aus Reflexions- bzw. Brechungsgesetz
jetzt: Amplituden und Polarisationen

Randbedingungen an $\vec{E}$ und $\vec{R}$ auf Grenzfläche

Tangentialkomponente E_t, B_t und Normalkomponente E_n, B_n
Beim übergang: E_t und B_n stetig
Weiterhin: $|\vec{E}_1|\epsilon_1 = |\vec{E}_2|\epsilon_2$
da E_t gleicht:

$$\frac{E_{1,n}}{E_{2,n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \overset{\substack{\mu=1 \\ k=0}}{\approx} \frac{n_2^2}{n_1^2}$$

analog für $\vec{B}$: $B_{1n} = B_{2n}$

$$\frac{B_{1,t}}{B_{2,t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \overset{\mu=1}{\approx} 1$$

Amplituden

Zerlege Amplitude von $\vec{E}$ in A_p parallel und A_s senkrecht zur Einfallsebene $(\vec{k}_e, \vec{n}_{\text{Grenz}})$
hier: $A_p = (A_x, A_y, 0) \quad A_s = (0, 0, A_z)$

Nutze Stetigkeit von E_t und B_t und Reflexions- bzw. Brechungsgesetz
$\rightarrow$ $\boxed{\text{Fresnelsche Gleichungen}}$

Senkrechte Komponenten

Reflexionskoeffizient ρ_s

$$\rho_s = \frac{A_{rs}}{A_{es}} = \frac{1-a}{1+a} = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Transmissionskoeffizienten τ_s

$$\tau_s = \frac{A_{gs}}{A_{es}} = \frac{2}{1-a} = \frac{2n_1\cos\alpha}{n_1\cos\alpha + n_2\cos\beta}$$

Analog für parallele Komponenten

$$\rho_p = \frac{A_{rp}}{A_{ep}} = \frac{\tan(\alpha-\beta)}{\tan(\alpha+\beta)}$$
$$\tau_p = \frac{A_{gp}}{A_{ep}} = \frac{2\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$$

Grundlage um Reflexion und Transmission zu berechnen Reflexions- und Transmissionsvermögen

$$\overline{I}_e = \epsilon_0\epsilon_1|\vec{E}_e|^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_1 c_1 A_e^2 \quad A_e = \sqrt{A_{e,s}^2 + A_{e,p}^2}$$
$$\overline{I}_R = \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_1 c_1 A_r^2$$

Reflexionsvermögen $R = \frac{\overline{I}_r}{\overline{I}_e} = \frac{A_r^2}{A_e^2}$
Strikt Fläche $\perp$ Strahl $\quad \frac{1}{\cos\alpha}$ Fläche auf der Grenze

$$R = \frac{\overline{I}_R\cos\alpha'}{\overline{I}_e\cos\alpha} = \frac{\overline{I}_R}{\overline{I}_e} \quad \text{da } \alpha = \alpha'$$

Transmissionsvermögen $T = \frac{\overline{I}_t\cos\beta}{\overline{I}_e\cos\beta}$

$$\begin{aligned}\overline{I}_t &= \frac{1}{2}\epsilon_2\epsilon_0 c_2 A_g^2\\ &= \frac{1}{2}\frac{n_2}{\mu_0 c_0}A_g^2 \qquad \text{für } \mu = 1\end{aligned}$$

Analog: $\overline{I}_e = \frac{1}{2}\frac{n_1}{\mu_0 c_0}A_e^2$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{n_2\cos\beta A_g^2}{n_1\cos\alpha A_e^2}}$$

Da ρ_s, ρ_p unterschiedlich sind R_s, R_p unterschiedlich

$$R_s = \frac{A_{re}^2}{A_{es}^2} = \frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)} \qquad R_p = \frac{A_{rp}^2}{A_{ep}^2} = \frac{\tan^2(\alpha-\beta)}{\tan^2(\alpha+\beta)}$$

Senkrechter Einfall $\quad R(\alpha = 0) = \frac{(n_1-n_2)^2}{(n_1+n_2)^2}$
Allgemeiner Falls (nachrechnen !)

$$T_p + R_p = 1 \quad T_s + R_s = 1 \quad T + P = 1$$

$\rightarrow$ Intensität geht nicht verloren

Brewster-Winkel

Für $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} = 90°$ dann $\tan(\alpha+\beta) \to \infty$
$A_{rp} = 0$ d.h. die reflektierte Welle hat nur Anteile senkrecht zur Einfallsebene
Für Brewster-Winkel α_{Br} gilt $\vec{k}_r \perp \vec{k}_g$
Brewsterbedingung $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1} \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

$$\rightarrow \tan\alpha_{\text{Br}} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{für} \quad \frac{n_2}{n_1} = 1,5 \quad \alpha = 56.3°$$

Esp:

a) unpolarisiertes Licht
Reflexion: A_p wird nicht reflektiert, $\perp$ unpolarisiert
Transmission groß

viele Glaßplatten: nur A_s reflektiert (vielmals)
A_s klein $\to A_p$ dominiert $\to \|$ polarisiert

b) polarisiertes Licht
$\|$ polarisiert $\to$ keine Reflexion, vollständig Transmission
$\perp$ polarisiert $\to$ Reflexion und Transmission