

# Experimentalphysik II

Vorlesung von Prof.Dr. Schumacher im Sommersemester 2018

Markus Österle  
Andréz Gockel

16.04.2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Elektrostatik</b>	<b>3</b>
I.1	Elektrische Ladung . . . . .	3
I.1.1	Reibungselektrizität . . . . .	3
I.1.2	Die elektrische Ladung . . . . .	3
I.1.3	Die Elementarladung . . . . .	4
I.2	Kraft und Feld . . . . .	6
I.2.1	Coulomb - Gesetz . . . . .	6
I.2.2	Influez . . . . .	7
I.2.3	Das Elektrische Feld . . . . .	7
I.2.4	Das elektrische Potential . . . . .	10
I.2.5	Der elektrische Fluss . . . . .	14
I.2.6	Quellstärke des elektrischen Feldes . . . . .	15
I.2.7	Maxwell-Gleichungen . . . . .	15
I.3	Multipole . . . . .	17
I.3.1	Kräfte auf Dipol . . . . .	19
I.3.2	Quadrupol . . . . .	20
I.4	Elektrostatische Energie und Kapazität . . . . .	21
I.4.1	Spannung . . . . .	21
I.4.2	Kapazität . . . . .	22
I.4.3	Kondensatorschaltungen . . . . .	24
I.4.4	Elektrische Energie . . . . .	24
I.5	Materie in elektrischen Feldern . . . . .	26
I.5.1	Polarisation des Mediums . . . . .	26
I.5.2	Felder und Maxwell gl. im Medium . . . . .	27
I.5.3	Mikroskopische Beschreibung der Polarisation (Pol.) . . . . .	29
I.5.4	Kondensator im Dielektrikum . . . . .	30
<b>II</b>	<b>Magnetostatik</b>	<b>32</b>
II.6	Ströme . . . . .	32
II.6.1	Elektrischer Strom . . . . .	32
II.6.2	Ohmsches Gesetz . . . . .	33
II.6.3	Arbeit und Leitung . . . . .	33
II.6.4	Leitungsvorgänge in Metallen und Halbleitern . . . . .	34
II.6.5	Kirchhoffsche Gesetze KHG . . . . .	35
II.6.6	Leitungsvorgänge in Flüssigkeiten . . . . .	36
II.6.7	Stromleitung in Gasen . . . . .	37
II.6.8	Stromquellen . . . . .	37
II.6.9	Thermoelektrizität . . . . .	38
II.7	Das magnetische Feld . . . . .	39

II.7.1	Eletromagnetische Kräfte . . . . .	39
II.7.2	Magnetisches Feld . . . . .	39
II.7.3	Maxwell-Gleichung der Magnetostatik . . . . .	39
II.7.4	Das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ . . . . .	40
II.7.5	Berechnung von Magnetfeldern . . . . .	41
II.8	Magnetische Kräfte . . . . .	43
II.8.1	Die Lorenz Kraft . . . . .	43
II.8.2	Kräfte auf Stöme . . . . .	44
II.8.3	Der Magnetische Dipol . . . . .	45
II.9	Magnetische Felder in Materie . . . . .	46
II.9.1	Magnetisierung der Materie . . . . .	46
II.9.2	Diamagnetismus . . . . .	48
II.9.3	Paramagnetismus . . . . .	48
II.9.4	Ferromagnetismus . . . . .	49
II.9.5	Elektromagnet . . . . .	49
<b>III</b>	<b>Elektrodynamik</b>	<b>51</b>
III.10	Elektromagnetische Induktion . . . . .	51
III.10.1	Induktionsgesetz . . . . .	51
III.10.2	Selbstinduktion . . . . .	53
III.10.3	Feldenergie . . . . .	54
III.10.4	Maxwell-Gleichungen . . . . .	55
III.11	Wechselstromkreise . . . . .	55
III.11.1	Wechselstrom . . . . .	55
III.11.2	Diodenschaltungen . . . . .	56
III.11.3	Zeigerdiagramme . . . . .	57
III.11.4	Komplexe Widerstände . . . . .	57
III.11.5	Frequenzfilter . . . . .	58
III.11.6	Blindleistung . . . . .	60
III.11.7	Transformator . . . . .	61
III.12	Elektromagnetische Schwingungen . . . . .	63
III.12.1	Einfache Schwingungen . . . . .	63
III.12.2	Gekoppelte Schwingungen . . . . .	67
III.12.3	Ungedämpfte Schwingungen . . . . .	68
III.13	Elektromagnetische Wellen . . . . .	68
III.13.1	Lecher-Leitung (LL) . . . . .	69
III.13.2	Vakuumwellen . . . . .	72
III.13.3	Hohlleiter . . . . .	77
III.13.4	Energietransport . . . . .	79
III.14	Wellenabstrahlung . . . . .	80
III.14.1	Hertzscher Dipol . . . . .	80
III.14.2	Abstrahlung des Hertzschen Dipols . . . . .	81
III.14.3	Beschleunigte Ladungen . . . . .	84
III.15	Elektro-magnetische Wellen in Materie . . . . .	87
III.15.1	Brechungsindex/Brechzahlen . . . . .	87

# Kapitel I

## Elektrostatik

### I.1 Elektrische Ladung

#### Exp: Auf Thales Spuren

(PVC Rohr mit Filz gerieben, Lametta zum schweben gebracht)

#### I.1.1 Reibungselektrizität

- Reibung von Kunststoff und Filz  $\Rightarrow$  Aufladung des Stabes
- Berührung Lametta mit Stab  $\Rightarrow$  Abstoßung

Anziehende/Abstoßende Kräfte: Elektrizität

#### Exp:

- i) 2 Kunststoffstäbe  $\Rightarrow$  Abstoßung, gleiche Ladung
  - ii) Kunststoff-, Glasstab  $\Rightarrow$  Anziehung, ungleiche (entgegengesetzte) Ladung
- $\Rightarrow$  Es gibt zwei Arten von Ladungen
- $\Rightarrow$  Aufladung ist Materialabhängig. „Reihenfolge“: Triboelektrische Reihe <sup>1</sup>

Zwei Materialien A und B und  $W_A < W_B$   
Energiefreisetzung wenn Elektron  $e^-$  von A nach B wandert  
 $\Rightarrow$  A positiv (Elektronenmangel), B negativ (Elektronenüberschuss)  
Ladungen „wandern“, werden aber nicht erzeugt oder vernichtet.

#### I.1.2 Die elektrische Ladung

Elektrische Ladung  $Q$  quantifiziert Elektrizität.  $Q$  bezeichnet die Menge Elektrizität die ein Körper trägt.

Neues Phänomen  $\Rightarrow$  nicht Rückführbar auf „m,kg,s“

$[Q] = C$  Coulomb (C.A. de Coulomb)

---

<sup>1</sup>(Erklärung in Festkörperphysik: Austrittsarbeit  $W_{Aus}$  ist die Arbeit um ein Elektron aus einer Oberfläche zu entfernen bzw. die freigesetzte Energie wenn es von einer Oberfläche absorbiert wird)

keine basiseinheit Def. mittels Stromstärke

$[A] = A$  Ampere

$1C$  = Ladung die von einem Strom mit Stärke  $I = 1A$  in der Zeit  $\Delta t = 1s$

$1C$  ist eine relativ große Ladung:

Vergleich:

- $Q_{\text{Elektron}} = -1,602 \cdot 10^{-19}C$
- $Q_{\text{Reibungselektrizität}} = \mu Q = 10^{-6}C$

Elektrometer: Messung von Ladung ohne Vorzeichen. Beobachtung: 2 Ladungsvorzeichen, Ladungen sind Additiv

Erhaltungssatz der Ladungen: In einem geschlossenen System ist die Summe der Ladungen konstant.

Erinnerung: geschlossenes System  $\hat{=}$  kein Austausch von Materie mit Umgebung (Ladung gekoppelt an Materie)

### Noether - Theorem

Erhaltungssatz  $\Leftrightarrow$  Symmetrie des Systems/ Gesetzes. hier: Eichsymmetrie  $U(1)_Q \Leftrightarrow$  Ladungserhaltung (später fortgeschrittene Quantenmechanik, Teilchenphysik)

## I.1.3 Die Elementarladung

### Faraday Elektrolyseexperimente

Bei der Umsetzung von einem Mol eines Elements wird eine feste Ladung umgesetzt.

1 wertig: 96486 C/mol (Faraday Konstante)

Also bei der Reaktion eines Moleküls wird  $Q = 1,6 \cdot 10^{-19}C$  (Annahme Avogadrozahl bekannt, erste Bestimmung 1865 Loschschmidt)

**Frage:** Mittelwert über viele Reaktionen oder fester Wert für jede Reaktion.

### Exp: $\rightarrow$ 1913 Millikan - Experiment

Kräfte:

Gewichtskraft:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g} = \left(\frac{4}{3}\pi r_{\text{tröpf}}^3\right)\rho_{\text{Öl}}\vec{g} \downarrow$$

Elektrische Kraft:

$$\vec{F}_{el} = Q_{\text{tröpf}}\vec{E} \downarrow \uparrow$$

Auftrieb:

$$\vec{F}_A = -\frac{4}{3}\pi T_{\text{tröpf}}^3\rho_{\text{Luft}}\vec{g} \uparrow$$

Reibungskraft:

$$\vec{F}_R = -G\pi\eta_{\text{Luft}}\vec{v}_{\text{tröpf}} \uparrow \downarrow$$

Laminare Strömung

Da  $r_{\text{tröpf}} \sim \lambda_{\text{frei}}$

→ Conningham - Korrektur

$$F_R = 1 + \frac{\lambda_{\text{frei}}}{r_{\text{tröpf}}} \left( A_1 + A_2 e^{-A_3 \frac{r_{\text{tröpf}}}{\lambda_{\text{frei}}}} \right)$$

Luft:  $A_1 = 1, 257 A_2 = 0, 4 A_3 = 1, 1$

- Suche Tröpfchen
- Beobachtete Bewegung bei 2. Spannung
- Bestimme Sink- bzw. Steiggeschwindigkeit
- →  $r_{\text{tröpf}}$  und  $Q_{\text{tröpf}}$

a) Suchmethode

- sinken bei  $0V = U$
- Erhöhung von U bis Schwebung der Tropfen  $\vec{v}_{\text{tröpf}} = \vec{0}$

b) Steig-/Sink Methode

- zwei Spannungen  $U_c (> 0)$  Messe  $\vec{r}_{\text{tröpf}}$

**Mathode a)** (ohne Conningham Korrektur)

$$U = 0V \quad |\vec{F}_G| = |\vec{F}_A| + |\vec{F}_R|$$

(Stationärer Zustand ( $\vec{a} = \text{const}$ ))

$$\frac{4}{3} \pi \rho_{\text{Oel}} r_{\text{tröpf}}^3 g = \frac{4}{3} \pi \rho_{\text{Luft}} r_{\text{tröpf}}^3 g + 6 \pi \eta_{\text{Luft}} + r |\vec{v}|$$

$$\Rightarrow r_{\text{tröpf}} = \sqrt{\frac{9}{2g} \frac{\eta_{\text{Luft}} + |\vec{r}|}{\rho_{\text{Oel}} - \rho_{\text{Luft}}}}$$

Bei Schwebung:

$$U = 0V \quad |\vec{F}_G| = |\vec{F}_A| + |\vec{F}_{el}|$$
$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\text{Oel}} g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\text{Luft}} g + Q_{\text{tröpf}} \frac{U}{d}$$

d = Abstand Kondensatorplatten

$$Q_{\pi} = \frac{4}{3} \pi g \left( \rho_{\text{Oel}} - \rho_{\text{Luft}} \frac{d}{U} \right)$$

viele Tröpfchen → Statistische Auswertung

Ergebnis von Millikan

**Elektrische Ladung ist gequantelt**  $\pm e; \pm 2e; \dots$

$$e = 1.6021766208(88) \cdot 10^{-19} C$$

Erstmals gequantelte Größe  
 Drittelzahlige Ladungen der Quarks  
 Quarks sind Konstituenten von Protonen und Neutronen  
**Proton p**  $\hat{=}$  (uud) **Neutron n**  $\hat{=}$  (udd)

$$Q_u = +\frac{2}{3}, Q_d = -\frac{1}{3} \Rightarrow Q_p = 1, Q_n = 0$$

$$Q_p + Q_e < 10^{-21} e$$

aus Stabilität der Materie

**Historisch:**

$Q = 4,774 + -0,009 \cdot 10^{-10} \text{esu}$  (Electrostatic unit)

$1 \text{ esu} = 3,34 \cdot 10^{-10} C$

Millikans wert für Elementarladung:

$$\text{esu} \Rightarrow \text{SI} : e = 1,592 + -0,003 \cdot 10^{-19} C$$

„5 $\sigma$ “ - Effekt  $\rightarrow$  Fehler unterschätzt.

## I.2 Kraft und Feld

### I.2.1 Coulomb - Gesetz

Elektrische Kraft zwischen zwei Körpern (punktförmig) mit Ladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  im Abstand  $r$

$$\vec{F}_{el} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad \hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$$

Kraft auf  $Q_2$  von  $Q_1$

**Exp: Coulomb - Waage**

$$k = 8,99 \cdot 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}$$

für  $Q_1 = Q_2 = 1 \text{ C}$ ,  $r = 1 \text{ m} \Rightarrow |\vec{F}_{el}| 8,99 \cdot 10^9 \text{ N}$  Im SI-System:  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

$\epsilon_0$  Dielektrizitätskonstante:  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$   
 (cgs-System  $k = 1 \Rightarrow$  Umdefinition der Ladung)

$$\vec{F}_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

Coulomb - Gesetz

Motivation der Abhängigkeit:

- $\sim Q_2$  Additivität der Ladungen
- $\sim Q_1$  „actio = reactio“
- $\sim \frac{1}{r^2}$  dreidimensionaler (für 4 Raumdimensionen wäre es  $\sim \frac{1}{r^3}$ )

### I.2.2 Influez

Beobachtung: Ausschlag des Elektrometers ohne Berührung. Anhängig von der Nähe des Stabes.

Erklärung: Kraft von  $e^-$  auf dem Stab verdrängen die  $e^-$  aus der Kugel in die Zeiger.

⇒ Kugel positiv geladen, Zeiger negativ geladen

Influenz: Trennung von Ladungen in einem neutralen Körper.

In Metallen und Leitern sind die Elektronen (zu einem bestimmten vom Material abhängigen Grad) frei beweglich.

$Q_1 = Q_2$  da neutral

$$|\vec{F}_1| = k \frac{Q_1 Q}{r_1^2} \quad |\vec{F}_2| = k \frac{Q_2 Q}{r_2^2} \quad \text{da } r_1 < r_2 \quad |\vec{F}_1| > |\vec{F}_2|$$

Leiter angezogen

Nichtleiter:

Ladungen/Elektronen nicht frei beweglich Verschiebung bei Polaren Molekülen. Wasser  $H_2O$   $\alpha = 105 e^-$  vom H zum O verschoben → Dipol

### I.2.3 Das Elektrische Feld

Bisher: Kraft zwischen zwei Ladungen  $q$  und  $Q \rightarrow \vec{F}$

Frage: woher kennt  $q$  die Existenz von  $Q$ ?

→ abstraktes Konzept: elektrisches Feld  $\vec{E}$

- um jede Ladung  $Q$  bildet sich ein Feld  $\vec{E}$
- Probeladung  $q$  spürt eine Kraft  $\vec{F} = q\vec{E}$

Quantenelektrodynamik (QED):

- Anregung des Feldes = Photonen  $\gamma$
- Kraft/Wechselwirkung = Austausch von  $\gamma$

Pragmatisch: gegeben: beliebige Ladungsverteilung wie sieht die Kraft auf eine pkt.förmige  $q$ ? ( $q$  klein → keine Verzerrung von  $\vec{E}$ )

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{\text{Probe}}} \quad \text{unabhängig von } q_{\text{Probe}}$$

El. Feld einer Pktladung

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{\text{Punkt}}}{q_{\text{Probe}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q q_{\text{Probe}}}{r^2 q_{\text{Probe}}} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Zusammenfassung:

- jede Ladung  $Q$  von  $\vec{E}$ -Feld umgeben
- es gilt Superpositionsprinzip  $\vec{E}_{Q_1+Q_2} = \vec{E}_{Q_1} + \vec{E}_{Q_2}$  folgt aus Addition von Kräften



- Nahwirkung der Kraft: Feld breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit  $c$  aus

Superposition:

- N Punktladungen  $Q_i, i = 1, \dots, N$   $\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$

$$\Rightarrow \vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

- kontinuierliche **Ladungsverteilung**:  $\rho(\vec{r})$

Gesamtladung  $Q = \int dV \rho(\vec{r})$  ( $dV = d\vec{r}^3$ )

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Visualisierung:

- Feldvektoren an vorgegebenen Gitterpunkten im Raume oft Vektor  $\hat{=}$  Projektion von  $\vec{E}$  in Ebene
- Feldlinien:
  - Tangenten  $\hat{=}$  Richtung von  $\vec{E}$
  - Dichte der Linie  $\hat{=}$  Stärke  $|\vec{E}|$

### Exp: Feldlinien

- Feldlinien kreuzen sich nicht [Falls Kreuzung: dann 2 Felder  $\vec{E}$ , 2  $\vec{E}$  in einem Punkt wid: Superpositionsprinzip]
- Feldlinien  $\perp$  orthogonal auf Oberfläche der Leiter
- keine Feldlinien innerhalb geschlossener Leiter

Elektrisches Feld im Leiter

- $e^-$  frei beweglich und sie stoßen sich ab
- „Kräftegleichgewicht“ wenn  $e^-$  an der Oberfläche sitzen
- $\vec{E}, \vec{F} \perp$  Oberfläche
- $\vec{E}$ -Feld im Inneren verschwindet

Kugel mit Radius:

$$\vec{E}(\vec{R}) = 0 \quad |\vec{r}| < R$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad |\vec{r}| \geq R$$

verhält sich bei großem Abstand wie Punkt-förmige Ladung im Zentrum

## Beliebige Flächen:

Approximation durch Ebenen und Kugelschalen Kugel:

$$|\vec{E}| \sim \frac{1}{r^2}$$

kleiner Krümmungsradius  $\rightarrow$  großes  $|\vec{E}|$

„Spitze“  $\rightarrow$  kleines  $r \rightarrow$  großes  $|\vec{E}| \rightarrow$  führt zur Entladungen

## Faradaysche Becher:

- begrenzte Ladungsaufnahme von außen

$\rightarrow$  Ladungen von innen aufbringen

## Feldberechnung:

1) **homogen geladener Ring** Radius  $R$ , Dicke vernachlässigbar

- $\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$   $[\lambda] = \frac{C}{m}$  Linienladungsdichte
- gesucht:  $\vec{E}(a)$  auf Symmetrieachse ( $y=z=0$ )
- Symmetrie:  $\vec{E}(a) = E\vec{e}_x$  [andere Komponenten kompensieren sich]
- Element auf Ring trägt Ladung  $\lambda dx$ , liefert Feldbeitrag

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos\phi dQ$$

- Es gilt:

$$E_x = \cos\phi |\vec{E}| \quad \cos\phi = \frac{a}{r} \quad r = \sqrt{R^2 + a^2}$$

- Integration über Ring in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{\text{Ring}} dQ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos\phi \\ &= \int_{\text{Ring}} dQ \end{aligned}$$

$$\int_{\text{Ring}} dQ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2 + a^2} \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

große Entfernung:  $a \gg R$  :  $E_x \sim \frac{1}{a^2}$  wie Pkt.ladung

Nähe des Rings:  $a \sim R$  : langsamer Anstieg von  $|\vec{E}|$  als für Pkt.ladung

$a = 0$  :  $E_x = 0$  aus Symmetrie

2) **unendlich dünne, unendlich ausgedehnte leitende Platte**

Flächenladungsdichte  $\sigma$   $[\sigma] = \frac{C}{m^2}$

- Symmetrie:  $\vec{E} = \vec{E}_z \vec{e}_z \perp$  auf Platte

$$Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_{\text{Platte}}} d^3\vec{r} \rho(\vec{r})$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_{\text{Platte}}} d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{r^2} \hat{r} \quad \hat{r} \perp \text{ Platte} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{A_{\text{Platte}}} d^2\vec{r}' \frac{\sigma}{r^2} \hat{r} \end{aligned}$$

- Es gilt:  $E_z = \cos \beta |\vec{E}|$        $\cos \beta = \frac{a}{d}$   
Integration in kleinen Ringen bzw. Polarkoordinaten ( $dA = r \, dr \, d\varphi$ )

$$\begin{aligned} E_z(a) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \, r \frac{\sigma}{a^2} \cos \beta \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 a^2} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^3 \beta \end{aligned}$$

mit

$$r = a \tan \beta \quad dr = \frac{a}{\cos^2 \beta} d\beta$$

$$r = 0 \hat{=} \beta = 0$$

$$r = \infty \hat{=} \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} E_z(a) &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 a^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin \beta \, d\beta \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (-\cos \beta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

- homogenes Feld in z-Richtung (d.h. senkrecht  $\perp$  zur Platte)

## I.2.4 Das elektrische Potential

- Bewegung von Ladung im elektrischen Feld

$$W = - \int_{W_{eg}} \vec{F} \, d\vec{s} = -q \int_{W_{eg}} \vec{E} \, d\vec{s}$$

$W > 0$  : von außen gegen  $\vec{E}$ -Feld verrichten

$W < 0$  : Feld verrichtet Arbeit Charakteristik der Feldes: Arbeit pro Einheitsladung

$$\frac{W}{q} = - \int_{W_{eg}} \vec{E} \, d\vec{s}$$

- **Arbeit im Feld einer Punktladung**  $\vec{E} \perp d\vec{s}$  keinen Beitrag

$$\frac{W_{ACB}}{q} = - \int_A^C |\vec{E}| ds = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_C} \frac{Q}{r^2} dr = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{Q}{r} \right) \Big|_{r_A}^{r_C} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_C} \right)$$

analog:

$$\begin{aligned} \frac{W_{ADB}}{q} &= - \int_D^B |\vec{E}| ds = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_D} - \frac{1}{r_B} \right) \\ r_A = r_D \quad r_B = r_C &\Rightarrow \frac{W}{q} \text{ auf beiden Wegen gleich} \\ \Rightarrow \oint_{\text{geschlossenem Weg}} \vec{E} d\vec{s} &= 0 \quad W \text{ unabh. von Weg} \end{aligned}$$

+ Superpositionsprinzip  $\Rightarrow$  Arbeit auf einem geschlossenen Weg verschwindet (i.e. = 0)

Erlaubt Definition der potentiellen Energie

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} d\vec{s}$$

$\vec{r}_0$  ist ein Bezugspunkt (Referenzpunkt) oft im unendlichen da  $(\vec{E}(|\vec{r}| \rightarrow \infty) \rightarrow 0)$   
In Praxis: nur

$$\Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}(\vec{r}_2) - E_{\text{pot}}(\vec{r}_1)$$

relevant. Normierung von  $E_{\text{pot}}$  auf im Feld bewegte Ladung: el. Potential

$$\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_0) = \int \vec{E} d\vec{s} \quad \text{oft } \varphi(\vec{r}_0) = 0$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int \vec{E} d\vec{s}$$

Für Punktladung Q  $\vec{r}_0 \rightarrow \infty$ :

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r}|}$$

- **Superpositionsprinzip:**

N Punktladungen  $Q_i$  bei  $\vec{r}_i$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

**Potential ist Skalarfeld**  $\rightarrow$  Rechnungen oft einfacher, graphische Darstellung mittels Äquipotentialflächen:  
(auf diesen gilt  $\varphi(\vec{r}) = \text{const.}$ )

- für Pkt. Ladung: Äquipotentialflächen = Kugelschalen
- Feldlinien /  $\vec{E}$ -Feld  $\perp$  Äquipotentialflächen
- Bewegung in Äquipotentialflächen  $\rightarrow$  keine Arbeit wird verrichtet

## Zusammenhang elektrisches Feld $\vec{E}$ und Potential $\varphi$

Wir hatten:

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \, d\vec{s} \quad \varphi(\vec{r}_0) = 0$$

Ist dies umkehrbar?

a) infinitesimaler Weg  $dx$ , Probeladung  $q$

$$\begin{aligned} dW &= -q[\varphi(x, y, z) - \varphi(x + dx, y, z)] \\ &= q \frac{\varphi(x + dx, y, z) - \varphi(x, y, z)}{dx} dx \\ &= q \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x} dx \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} dW &= -q \vec{E}(\vec{r}) \, d\vec{s} \quad d\vec{s} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -q E_x \, dx \end{aligned}$$

Vgl:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

analog zu Bewegung in y- und in z-Richtung

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x \right) + \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y \right) + \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z \right) \\ &= -\text{grad } \varphi(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \quad \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Elektrostatik: äquivalente Beschreibung durch entweder  $\vec{E}$ -Feld oder  $\varphi$

Wirbelfreiheit von  $\vec{E}$  Rotation von

$$\begin{aligned} \vec{E} : \text{rot}(\vec{E}) &= \vec{\nabla} \times \vec{E} \\ &= \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

da  $\vec{E} = \text{grad} \varphi$  und

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

Partielle Ableitungen vertauschbar

$$\Rightarrow \text{rot} \vec{E} = -\text{rot}(\text{grad} \varphi) = \vec{0}$$

$\vec{E}$ -Felder in Elektrostatik sind Wirbelfrei

Zusammenhang: mit Stokesschem Satz

$$\int_A \vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r}) d\vec{A} = \oint_{S=dA} \vec{V}(\vec{r}) d\vec{s} \quad \vec{V}(\vec{r}) \text{Vektorfeld}$$

hier

$$\int_A \text{rot}(\vec{E}) d\vec{A} = \oint_{\delta A} \vec{E} d\vec{s} \stackrel{\text{E. statik}}{=} 0$$

Bedeutung: wirbelfrei bzw. keine geschlossenen Feldlinien

### Beispiele Potential-Berechnung:

- 1) Potential eines homogenen ringförmigen Leiters. Beitrag  $d\varphi$  aus  $dQ$  auf Ring

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} dQ$$

Aus Abbildung:  $r = \sqrt{R^2 + a^2}$

$$\varphi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}}$$

da  $r = \text{const.}$  auf x-Achse

für  $a \gg R$   $\varphi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}$  Potential einer Pkt. Ladung

$$E_x = -\frac{\partial\varphi(a)}{\partial a} = -\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{1}{2}\right) 2a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qa}{(R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- 2) Beispiel 2: leitende Kugel Radius R

$$\varphi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \quad a \geq R$$

$$\varphi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = \text{const.} \quad a < R$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{E} &= -\text{grad}\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \vec{e}_R \quad a \geq R \\ &= 0 \Rightarrow \quad a < R \end{aligned}$$

Bisher:  $\varphi(\vec{r})$  aus  $\rho(\vec{r})$  via Poisson-Integral teilweise  $\rho(\vec{r})$  nicht bekannt, aber Randbedingungen  $\varphi(\vec{r}) = 0$  auf Leiteroberfläche. ( $\rho(\vec{r})$  kann komplex sein)

$\Rightarrow$  Randwertproblem (Theo II.)

### „Einfaches“ Beispiel mit Methode der Spiegelladung

Platte geerdet  $\varphi(x, y, z) \stackrel{!}{=} 0$  Punktladung  $q_1$  bei  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}$

Realisierung der Randbedingungen durch Spiegelladung  $q_2$

Brauche:  $\varphi(x, y, z = 0) = 0$

Superposition  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

$\Rightarrow q_2 = -q_1 \quad z_2 = -z_1$  erfüllen Randbedingung

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{a_r}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right\}$$

$\vec{E}$ -Feld aus  $-\vec{\nabla}\varphi$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{a_r}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} \right\}$$

für  $z=0$  :  $E_x = E_y = 0 \quad \vec{E} \perp (x, y)$ -Ebene

Flächenladungsdichte:  $\sigma \quad [\sigma] = \frac{C}{m^2}$

Später:  $\sigma = 2\epsilon_0 E_z$

$$\sigma = -\frac{q_1}{2\pi} \frac{z_1}{(x^2 + y^2 + z_1^2)}$$

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

## I.2.5 Der elektrische Fluss

Elektrischer Fluss  $\Phi$  ist ein Maß für die dichte der el. Feldlinien. Er ist definiert für eine gegebene Fläche A.

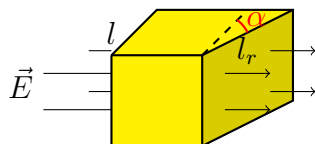
$$\boxed{\Phi_A = \int_A \vec{E} d\vec{A}} \quad \vec{A} = \text{infinitesimaler Normalvektor} \quad \vec{A} \perp \text{Fläche}$$

offene Fläche: Orientierung beliebig

geschlossene Fläche: Orientierung nach außen

### Fluss durch geschlossene Fläche:

Bsp: **Würfel im Plattenkondensator** (Abb.auf [Folie: Elektrischer Fluss durch geschlossene Oberfläche]) nur Beiträge von linker und rechter Fläche:



$$\Phi = \Phi_l + \Phi_r = \vec{E} \vec{A}_l + \vec{E} \vec{A}_r = -EA_l + EA_r \cos \alpha = -EA_l + EA_l = 0$$

$$\vec{A}_l = -\vec{A}_r \cos \alpha$$

Superposition bzw. Approximation von Körper durch inf. Würfel  $\Rightarrow$  Fluss durch geschlossene Oberfläche im homogenen Feld verschwindet.

Bsp: Kugelschale

$$\vec{A}(r) = 4\pi r^2 \vec{e}_R \begin{cases} + & \text{für äußere} \\ - & \text{für innere} \end{cases}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

$$\left| \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) \right| = \text{const}$$

$$\Phi = \Phi(r_1) + \Phi(r_2) = + \text{const} - \text{const} = 0$$

In elektrischen Feldern (wenn keine Ladungen im Volumen)  $\Rightarrow$  Fluss durch geschlossene Oberfläche verschwindet.

## I.2.6 Quellstärke des elektrischen Feldes

$\Phi_A \neq 0$  wenn Ladungen innerhalb geschlossener Oberfläche. Bsp: Kugel mit Radius R. Punktladung im Ursprung  $d\vec{A}$  und  $\vec{E}$  radial nach außen  $\sim \vec{e}_r$

$$\Phi = \oint_{R=\text{const}} \vec{E} d\vec{A} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}}_{|\vec{E}|} \underbrace{4\pi R^2}_A = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Ergebnis unabhängig von:

- Form der Oberfläche
- Position der Ladung innerhalb der Oberfläche

Mehrere Ladungen  $Q_i$  aus Superposition der  $\vec{E}_i$

$$\Phi = \oint \left( \sum_i \vec{E}_i \right) d\vec{A} = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0}$$

„externe“  $Q_i$  liefern keinen Beitrag

Es gilt:

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{\text{ein}}}{\epsilon_0}$$

Gaußsches Gesetz (Integralform)

Mit Gaußschen Satz : Oberflächen-  $\rightarrow$  Volumenintegral

$$\oint_A \vec{E} d\vec{A} = \int_V \text{div} \vec{E} dV \quad \text{mit} \quad Q_{\text{ein}} = \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

$$\int_V \text{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

gültig für beliebige Volumen

$\Rightarrow \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  differentielle Form des Gaußschen Gesetzes

Ladungen die Quellen ( $\rho > 0$ ) bzw. Senken ( $\rho < 0$ ) des elektrischen Feldes sind.

## I.2.7 Maxwell-Gleichungen

für statische (unbewegte) Ladungen Integral- und Differentialform

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad \text{rot} \vec{E} = \vec{0} \quad \text{Wirbelfrei} \quad (1)$$

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{\text{ein}}}{\epsilon_0} \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Quellen/Senken} \quad (3)$$



1. gilt allgemein in Zentralkraftfeldern d.h.  $\rho(\vec{r}) \sim |\vec{r}|$
3. gilt nur für  $\varphi \sim \frac{1}{|\vec{r}|} |\vec{E}| \sim \frac{1}{|\vec{r}|^2}$  im 3-dimensionalen Raum

MW-Gleichungen sind Axiome der Elektrostatik d.h.  $F_{\text{coulomb}}$  ableitbar  
 betrachte Ladungen  $Q_1 = Q_{\text{ein}}$

1.Gl:

$$\oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

$$|\vec{E}(r)| 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

Kraft auf Ladung  $Q_2$ :  $\vec{F}_{Q_2} = \vec{E}_{Q_1} \cdot Q_2$

$$|\vec{F}_{Q_2}| = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

□

Bsp.: **homogene geladene Kugel**, Radius  $R$ ,  $\rho(\vec{r}) = \text{const}$   $|\vec{r}| \leq R$

$$Q_{\text{ges}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

Symmetrie:  $\vec{E} = |\vec{E}| \vec{e}_r$  radial  $|\vec{E}| = E_r$

$|\vec{r}| \geq R$ :

$$\Phi = \oint_A \vec{E} d\vec{A} = \int_A E_r dA = E_r 4\pi r^2 \stackrel{!}{=} \frac{Q_{\text{ein}}}{\epsilon_0}$$

$$E_r = \frac{\rho_0 R^3}{\epsilon_0 3r^2}$$

wie bei Punktladung

$|\vec{r}| \leq R$ :

$$Q_{\text{ein}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad \Phi = \frac{Q_{\text{ein}}}{\epsilon_0}$$

$$E_r = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}$$

linearen Anstieg

Potential  $\varphi(\vec{r})$ :

$\varphi(r_0 = \infty) = 0$

$$\varphi(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} d\vec{r} \stackrel{(r \geq R)}{=} - \int_{\infty}^r \frac{\rho R^3}{\epsilon_0 3r'^2} dr' = \int_r^{\infty} \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{R^3}{3r'^2} dr' = \frac{\rho R^3}{\epsilon_0 3r}$$

$$\left( \frac{\partial(\hat{r})}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \right)$$

Innenraum:  $(r \leq R)$

$$\varphi(r) = - \int \frac{\rho r'}{3\epsilon_0} dr' = -\frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{r^2}{3} + \text{const}$$

Wähle  $c$  so, dass  $\varphi$  stetig bei  $r = R$  ist

$$\rightarrow c = \frac{R^2 \rho}{2\epsilon_0}$$

$$\varphi(r) = \frac{R^2 \rho}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right) \quad \text{für } r \leq R$$

**Maxwell-Gl. und Potential  $\varphi$**

$$\vec{E} = -\text{grad}(\varphi)$$

1. Gl

$$\text{rot} \vec{E} = -\text{rot}(\text{grad} \varphi) \stackrel{\text{linear}}{=} 0$$

da  $\text{rot} \vec{E} = 0$  können wir  $\vec{E}$  als  $\text{grad} \varphi$  schreiben

3. Gl

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= \text{div}(-\text{grad} \varphi) = -\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right] = -\Delta \varphi \\ &\rightarrow -\Delta \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Poisson-Gl. ( $\rho = 0$  Laplace-Gl.)

Poisson-Gl. äquivalent zu beiden Maxwell-Gl.

MW-Gl: 2 Gl. erster Ordnung in Ableitungen ( $\frac{\partial}{\partial x}, \dots$ )

Poisson-Gl: 1. Gl. zweiter Ordnung in Ableitung ( $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \dots$ )

## I.3 Multipole

- für beliebige Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$  ist

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

komplex i.a.

- oft interessiert nur Fernfeld  $\rho(\vec{r}), \vec{E}(\vec{r}), |\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$  mit  $\rho(\vec{r}') = 0$   
Abstand  $\gg$  Ausdehnung der Ladungsverteilung
- Approximation von  $\rho(r)$  in Taylor-Entwicklung  
 $\rightarrow$  Multipolentwicklung

$$\rho(\vec{r}) = \underbrace{\frac{a}{T}}_{\text{Monopol}} + \underbrace{\frac{b}{T^2}}_{\text{Dipol}} + \underbrace{\frac{c}{T^3}}_{\text{Quadrupol}} + \dots$$

**Monopol:**

$$\vec{E}_{\text{Mono}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad \varphi_{\text{Mono}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

dominiert für  $r \rightarrow \infty$  wenn  $Q_{\text{ges}} \neq 0$

$$Q_{\text{Mono}} = \sum_{i=1}^N Q_i \text{ Pkt. Ladungen} \quad Q_{\text{Mono}} = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r})$$

$Q_{\text{Mono}}$  bei  $\vec{r}_s$  Ladungsschwerpunkt platzieren

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_i |Q_i| \vec{r}_i}{\sum_i |Q_i|}$$

$$\vec{r}_s = \frac{\int |\rho(\vec{r})| \vec{r} d^3\vec{r}}{\int |\rho(\vec{r})| d^3\vec{r}}$$

### Dipol:

zwei entgegengesetzte, gleich große Ladungen  $Q > 0$  im Abstand  $d = |\vec{d}|$ . Richtung  $\vec{d}$  von  $-Q$  nach  $+Q$

$$\vec{r}_- = \vec{r}_0 - \frac{\vec{d}}{2} \quad \vec{r}_+ = \vec{r}_0 + \frac{\vec{d}}{2}$$

Potential  $\varphi(\vec{r})$  aus Superposition

$$\varphi_{\text{Dipol}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{|\vec{r}_0 + \frac{\vec{d}}{2}|} - \frac{1}{|\vec{r}_0 - \frac{\vec{d}}{2}|} \right\}$$

für  $(|\vec{r}_0| \gg |\vec{d}|)$  nutze Näherung

$$\frac{1}{|\vec{r}_0 \pm \frac{\vec{d}}{2}|} = \frac{1}{\sqrt{\vec{r}_0^2 \pm r_0 \vec{d} + \frac{\vec{d}^2}{4}}} = \frac{1}{|\vec{r}_0|} \frac{1}{\sqrt{1 \pm \frac{r_0 \vec{d}}{|\vec{r}_0|^2} + \frac{\vec{d}^2}{4\vec{r}_0^2}}} = \frac{1}{|\vec{r}_0|} \left( 1 \mp \frac{\vec{r}_0 \vec{d}}{\vec{r}_0^2} \right)$$

$$\varphi_{\text{Dipol}} \sim \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \vec{d}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \vec{r}}{r^2}$$

$\vec{p} = Q\vec{d} = [\vec{p}] = c_m$  **Dipolmoment**

$$\varphi_{\text{Dipol}}(\vec{r}) = \frac{Q\vec{d}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} \quad \theta = \angle(\vec{d}, \vec{r})$$

- Potential richtungsabhängig  $\sim \cos \theta$   
maximal entlang  $\vec{d}$  verschwindend  $\perp \vec{d}$
- $\varphi \sim \frac{1}{r^2} \Rightarrow$  Erwartung  $|\vec{E}| \sim \frac{1}{r^3}$

### Bestimmung des $\vec{E}$ -Feldes:

$\vec{d}$  entlang z-Achse

Geometrie  $\rightarrow$  Zylindersymmetrie des Feldes, d.h. keine Abhängigkeit vom Azimutalwinkel  $\phi$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}}_{\emptyset} \vec{e}_\phi$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} |\vec{p}| (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

- für N Punktladungen  $\vec{p} = \sum_i Q_i \vec{r}_i$
- für Ladungsverteilung  $\vec{p} = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \vec{r}$

$\vec{p}$  abhängig von Wahl des Koordinatenursprungs

Bsp.: Punktladung bei  $\vec{r}_0 \Rightarrow \begin{cases} \text{i) } \vec{r}_0 = \vec{0} & \text{dann } \vec{p} = \vec{0} \\ \text{ii) } \vec{r}_0 \neq \vec{0} & \text{dann } \vec{p} \neq \vec{0} \end{cases}$

Konvention: Ursprung bei  $\vec{r}_s$  Ladungsschwerpunkt

- punktsymmetrische Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}) = \rho(-\vec{r})$  gilt  $\vec{p} = \vec{0}$
- wenn  $Q_{\text{ges}} = 0$  dann  $\vec{p}$  unabhängig von Ursprung

### I.3.1 Kräfte auf Dipol

a) **homogenes  $\vec{E}$ -Feld** (Bsp. Plattenkondensator)

Beobachtung: Dipol richtet sich im Kondensator wie erwartet aus: Plus zu Minus, Minus zu Plus

Kraft:

$$\vec{F}_{\text{ges}} = Q\vec{E} + (-Q)\vec{E} = \vec{0}$$

$\rightarrow$  keine Translation

Drehmoment:

$$\begin{aligned} \vec{T}_{\text{ges}} &= \sum_{i=1}^2 \vec{r}_i \times \vec{F}_i \\ &= \frac{\vec{d}}{2} \times Q\vec{E} + \frac{-\vec{d}}{2} \times (-Q\vec{E}) = Q\vec{d} \times \vec{E} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{T}_{\text{ges}} = \vec{p} \times \vec{E}}$$

$\vec{p} \perp \vec{E}$   $\vec{T}$  Maximal

$\vec{p} \parallel \vec{E}$   $\vec{T}$  verschwindet

$\rightarrow$  Ausrichtung im  $\vec{E}$ -Feld

Potentiellen Energie:

$$\begin{aligned} E_{\text{Dip}} &= Q\varphi(\vec{r}_1) - Q\varphi(\vec{r}_2) \\ \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) &= \vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\vec{d} = -\vec{E}\vec{d} \\ E_{\text{Dip}} &= -Q\vec{E}\vec{d} = -\vec{p}\vec{E} \end{aligned}$$

$p \uparrow \uparrow E$  minimiert  $E_{\text{Dip}}$   $\rightarrow$  Richtung von  $\vec{p}$  im  $\vec{E}$

b) **inhomogenes  $\vec{E}$ -Feld**

zusätzliche Kraft:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{ges}} &= Q\vec{E}(\vec{r} + \vec{d}) - Q\vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{E}(\vec{r} + \vec{d}) &\stackrel{\text{Taylor-Entwicklung}}{=} \vec{E}(\vec{r}) + (\vec{d} \cdot \nabla)\vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{F}_{\text{ges}} &= Q(\vec{d} \cdot \nabla)\vec{E}(\vec{r}) = (\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E}(\vec{r}) \end{aligned}$$

i) Ausrichtung von Dipol durch  $\vec{T}_{\text{ges}}$

ii) Bewegung ins Gebiet höherer Feldstärke  $\vec{E}$

### I.3.2 Quadrupol

- vier Ladungen  $2 : +Q, 2 : -Q$ , jeweils im Abstand  $d$
- zwei Dipole  $\vec{p}$  bei  $(x, z) = (\frac{d}{2}, 0)$   $-\vec{p}$  bei  $(x, z) = (-\frac{d}{2}, 0)$

$$\varphi_{\text{Dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad \vec{r}_s = \vec{0} \quad \theta = \angle(\vec{r}, \vec{e}_z)$$

$$\varphi_{\text{Quadrupol}} = \varphi_{\text{oben}}(\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2}) - \varphi_{\text{unten}}(\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2})$$

für  $|\vec{d}|$  klein :

$$\approx -d \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{\text{Dipol}}(\vec{r})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi_{\text{Dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ -2 \frac{p \cos \theta}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{p \sin \theta}{r^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]$$

Kettenregel:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{r^2} 2x = \frac{x}{r} = \sin \theta \cos \phi$$

$$\frac{\partial \cos \theta}{\partial x} = -\frac{1}{r} \sin \theta \sin \phi \cos \phi$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{Quadrupol}}(\vec{r}) &= -\frac{|\vec{p}||\vec{d}|}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{2 \cos \theta}{r^3} \sin \theta \cos \phi - \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi \right\} \\ &= \frac{3|\vec{p}||\vec{d}|}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cos \theta \sin \theta \cos \phi \end{aligned}$$

$$Q_{\text{Mono}} = 0 \quad \vec{p}_{\text{gesamt}} = \vec{0}$$

Fernferld:

$$\varphi(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^3} \quad \text{bzw.} \quad \vec{E}(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^4} \vec{e}_R$$

Bsp.: **linearer Quadrupol**

$$\varphi_{\text{Quad}}^{\text{lin}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{d}|^2 Q}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

## Kraft und Elektrische Energie des Quadrupols

- homogenes Feld:  $\vec{F}_{\text{ges}} = \vec{0}$  ;  $\vec{T}_{\text{ges}} = \vec{0}$
- inhomogenes Feld : komplexe  $\vec{F}_{\text{ges}}$  ,  $\vec{T}_{\text{ges}}$

Elektrische Energie

$$E_{el} = \sum_{i=1}^4 Q_i \varphi_{\text{ext}}(\vec{r}_i) \quad (\text{eine kleine Rechnung})$$

$$E_{el} = Q|\vec{d}|^2 \frac{\partial^2 \varphi_{\text{ext}}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{3} \hat{Q}_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_{\text{ext}}}{\partial x \partial y}$$

$$\hat{Q}_{x_1} = 3Q|\vec{d}|^2 \text{ Quadrupol}$$

allgemein gilt : für  $x_1 \hat{=} x, x_2 \hat{=} y, x_3 \hat{=} z$

$$E_{el} = \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 \hat{Q}_{ij} \frac{\partial^2 \varphi_{\text{ext}}}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\hat{Q}_{ij} = \int d^3 \vec{r} \{ 3x_i x_j - |\vec{r}|^2 \delta_{ij} \} \rho(\vec{r})$$

Tensor 2. Stufe  $i, j = 1 \rightarrow 3$

für N Punktladungen :

$$\hat{Q}_{ij} = \sum_{k=1}^N (3x_i x_j)_k - |\vec{r}|^2 \delta_{ij} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} i=j & 1 \\ i \neq j & \text{sonst} \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{el}$  in Multipolentwicklung

$$\begin{aligned} E_{el} &= Q_{\text{ges}} \varphi_{\text{ext}}(\vec{r}) + \sum_{i=1}^3 p_i \frac{\partial \varphi_{\text{ext}}}{\partial x_i} + \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 \hat{Q}_{ij} \frac{\partial^2 \varphi_{\text{ext}}}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= Q_{\text{Mono}} \varphi_{\text{ext}}(\vec{r}) + \underbrace{\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \varphi_{\text{ext}}(\vec{r})}_{\text{Dipolanteil}} + \underbrace{\frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 \hat{Q}_{ij} \frac{\partial^2 \varphi_{\text{ext}}}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{Quadrupolanteil}} \end{aligned}$$

Bem.:  $\vec{p}, \hat{Q}$  abhängig von Wahl des Koordinatensystems

## I.4 Elektrostatische Energie und Kapazität

### I.4.1 Spannung

Erinnerung:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{W(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r})}{q} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \varphi(\vec{r}_0)$$

$\vec{r}_0$  Bezugspunkt

Spannung  $U$  als Potentialdifferenz zwischen  $\vec{r}_A$  und  $\vec{r}_B$

$$U_{BA} = \varphi(\vec{r}_B) - \varphi(\vec{r}_A) = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E} \, d\vec{s} \quad \text{unabhängig von } \vec{r}_0$$

$$[U] = 1V = 1 \frac{J}{C}$$

### I.4.2 Kapazität

- alle Potentiale  $\sim$  Ladung:  $\varphi(\vec{r}) \sim Q$   
N Punktladungen

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

für  $Q_i \rightarrow zQ_i$  gilt  $\varphi(\vec{r}) \rightarrow z\varphi(\vec{r})$

Es folgt:

$$U = \frac{1}{C}Q$$

C Kapazität

$$[C] = 1F(\text{Farad}) = a \frac{C}{V}$$

typische Werte für C: pF bis mF ( $10^{-12}F$  -  $10^{-3}F$ ) Bei gegebener Spannung  $U$  ist die **Kapazität C ein Maß dafür wieviel Ladung eine Konfiguration von Leitern aufnehmen kann**

- C abhängig von Geometrie der Leiter  
Beispiele:

a) **homogene Kugel** Radius  $R$ , Ladung  $Q$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad r_0 = \infty \quad \varphi(\vec{r}_0) = 0$$

$$U(R) = \varphi(R) - \varphi(\infty) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

$$\boxed{C_{\text{Kugel}} = 4\pi\epsilon_0 R}$$

b) **Plattenkondensator** (homogenes Feld)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z \quad \sigma = \frac{Q}{A} \quad \text{Flächenladungsdichte}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{z=0}^z \vec{E} \, d\vec{z} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} z \quad \varphi(z=0) = 0$$

$$U = \varphi(d\vec{e}_z) - \varphi(0\vec{e}_z) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} d = |\vec{E}|d$$

$$\boxed{C_{\text{Platte}} = \frac{\epsilon_0 A}{d}}$$

c) **Zylinderkondensator**, Länge  $l$

$$Q_1 = -Q_2$$

$\vec{E}$ -Feld aus Gaußschem Gesetz

für  $R_1 > r > R_2$   $\vec{E} = 0$  da  $Q_{\text{ein}} = 0$

für  $R_1 \leq r \leq R_2$ :

$$\oint_{\text{Zylinder}(r)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_0^l \int_0^{2\pi} dz d\varphi E_r(|\vec{r}|) = l 2\pi r E_r$$

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \frac{1}{r}$$

$$\varphi = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \ln r$$

$$U = \varphi(R_1) - \varphi(R_2) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

$$C_{\text{Zylinder}} = 2\pi\epsilon_0 \frac{l}{\ln \frac{R_1}{R_2}}$$

d) **Lecherleitung/parallele Drähte**

einzelner Draht mit Radius  $R$ , Ladungsdichte  $\frac{Q}{l}$

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \ln \left( \frac{r}{R} \right)$$

Drahtpaar mit  $\mp \frac{Q}{l}$ , Abstand  $a$

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \left[ \ln \left( \frac{r_+}{R} \right) - \ln \left( \frac{r_-}{R} \right) \right]$$

Sei  $R \ll a$ .  $U$  aus 2 Punkten auf Drähten

pos. Draht:  $r_+ \approx R$   $r_- \approx a$

neg. Draht:  $r_+ \approx a$   $r_- \approx R$

$$\begin{aligned} U &= \varphi(\text{pos. D}) - \varphi(\text{neg. D}) \\ &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \left[ \ln \frac{R}{R} - \ln \frac{a}{R} - \ln \frac{a}{R} + \ln \frac{R}{R} \right] \\ &= \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \ln \frac{a}{R} \end{aligned}$$

$$C_{\text{Lecher}} = \frac{\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{a}{R}}$$

e) **Kugelkondensator**

$$C_{\text{Kugelkond.}} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1}{1 - \frac{R_1}{R_2}}$$

für  $R_2 \rightarrow \infty$   $C_{\text{Kugel}} = 4\pi\epsilon_0 R_1$



### I.4.3 Kondensatorschaltungen

#### a) Parallelschaltung

$$C_1 : Q_1 = C_1 U \quad C_2 : Q_2 = C_2 U$$

Potentiale / Spannungen gleich  $U_1 = U_2 = U = \varphi_+ - 0$

$Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2$  Ladungserhaltung

$Q_{\text{ges}} = C_{\text{ges}} U$  Frage:  $C_{\text{ges}}$

$$Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2 = U(C_1 + C_2) \quad \text{also} \quad C_{\text{ges}} = C_1 + C_2$$

allgemein für n parallele  $C_i$ :

$$C_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n C_i$$

Parallelschaltung erlaubt großes  $C_{\text{ges}}$

#### b) Reihenschaltung

Es gilt:  $Q_1^+ = -Q_1^- = Q_2^+ = -Q_2^-$

$Q_1 \equiv Q$

$U = U_1 + U_2$

$$U = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{Q}{C_{\text{ges}}}$$

also

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

allg. für serielle  $C_i$ :

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad C_{\text{ges}} < C_i$$

### I.4.4 Elektrische Energie

- wie viel Energie notwendig um Ladungen im  $\vec{E}$ -Feld zu bewegen
- Punktladung  $q$  von  $A \rightarrow B$   
 $W_{A \rightarrow B} = q\varphi(\vec{r}_B) - q\varphi(\vec{r}_A)$
- zwei Punktladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  von  $\infty$  an  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$   
 $Q_1 : \infty \rightarrow \vec{r}_1$  : kein  $\vec{E}$ -Feld, kein  $\varphi \rightarrow$  keine Arbeit  
 $Q_2 : \infty \rightarrow \vec{r}_2$  : Arbeit im Feld von  $Q_1$

$$W_2 = Q_2 \varphi_1(\vec{r}_2) = Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

andere Reihenfolge:

$$W_1 = Q_1 \varphi_2(\vec{r}_1) = Q_1 \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \quad_{i \neq j} Q_i \varphi_j(\vec{r}_i)$$

dritte Punktladung  $Q_3 : \infty \rightarrow \vec{r}_3$

$$W_3 = Q_3 \varphi_1(\vec{r}_3) + Q_3 \varphi_2(\vec{r}_3)$$

Es gilt:  $Q_3 \varphi_i(\vec{r}_3) = Q_i \varphi_3(\vec{r}_i) \quad i = 1, 2$

$$\begin{aligned} E_{el} &= \frac{1}{2} Q_1 [\varphi_2(\vec{r}_1) + \varphi_3(\vec{r}_1)] \\ &\quad + \frac{1}{2} Q_2 [\varphi_1(\vec{r}_2) + \varphi_3(\vec{r}_2)] \\ &\quad + \frac{1}{2} Q_3 [\varphi_1(\vec{r}_3) + \varphi_2(\vec{r}_3)] \end{aligned}$$

$$E_{el} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i \varphi(\vec{r}_i) \quad \text{für N Punktladungen}$$

mit

$$\varphi(\vec{r}_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \varphi_j(\vec{r}_i)$$

konst. Ladungsverteilung  $\varphi(\vec{r}) : \sum Q_i \rightarrow \int dQ$

$$E_{el} = \frac{1}{3} \int \frac{d^3 \vec{r} \rho(\vec{r})}{dQ} \varphi(\vec{r})$$

Bsp.: **homogengeladene Kugelschale** mit Radius  $R$

$$\varphi(\vec{r}) = \text{const} \quad r < R \quad \varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad r \geq R$$

Sei zunächst  $Q = 0$ .  $dQ$  aus  $\infty \rightarrow R$

$$\begin{aligned} dE_{el} &= \varphi(e) dQ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} dQ \\ E_{el} &= \int_0^Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^1}{R} dQ^1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{(Q^1)^2}{R} \Big|_0^{Q^{???R}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{Q^2}{R} = \frac{1}{2} Q \varphi(R) \end{aligned}$$

wie oben Bsp.: homogen geladene Kugel Radius  $R$ , Ladung  $Q$ :

$$E_{el} = \frac{3}{5} k \frac{Q^2}{R}$$

Andere Form von  $E_{el}$  mit  $\vec{E}$

$$\begin{aligned} E_{el} &= \frac{1}{2} d^3 \tilde{r} \rho(\tilde{r}) \varphi(\tilde{r}) \quad (3. \text{ MW-Gl.}) \quad \text{div}(\tilde{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3 \vec{r} \vec{\nabla} \vec{E}(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) \end{aligned}$$

partielle Integration  $\left( 1 \text{ dim: } \int_a^b dx f(x) g'(x) = f g \Big|_a^b - \int dx f'(x) g(x) \right)$  in 3 Dimensionen:

$$E_{el} = \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \oint_{\text{Rand des Volumens}} \varphi(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} - \int d^3 \vec{r} \vec{E}(\vec{r}) \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \right]$$

Volumen  $\rightarrow \infty$ ;  $E(\vec{r}) \rightarrow 0$  auf Rand  $\Rightarrow \oint_{\text{Rand}} \rightarrow 0$  verschwindet

$$E_{el} = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\vec{E}(\vec{r})|^2 d^3\vec{r} \quad \vec{\nabla}\varphi = -\vec{E}$$

$E_{el} \sim |\vec{E}|^2$  Energie im  $\vec{E}$ -Feld gespeichert

Energiedichte  $W_{el} = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$

Bsp.: **Plattenkondensator mit Spannung  $U(q)$**

$E_{el}$  und  $dq$  auf Platte hinzufügen?

$dE_{el} = U dq = \frac{q}{C} dq$  Energie um Kondensator von 0 nach  $Q$  laden

$$E_{el} = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \Big|_0^Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$E_{el} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 V_{\text{Kond}} |\vec{E}|^2$$

$$V_{\text{Kond}} = Ad \quad C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad |\vec{E}| = \frac{U}{d}$$

## I.5 Materie in elektrischen Feldern

### I.5.1 Polarisation des Mediums

Betrachte Nichtleiter,  $Q = 0$  im externen  $\vec{E}$ -Feld

- keine freien Elektronen  $e^-$
- Verschiebung der  $e^-$  im Atom / Molekül.  
 $\rightarrow$  mikroskopische Dipole  $\vec{p}_i = q_i \vec{d}_i$   
 $\rightarrow$  Ausrichtung im  $\vec{E}$ -Feld:  $\vec{E} \uparrow \uparrow \vec{p}_i$  parallel

Effekt:

- Polarisation des Mediums  $\vec{P}$  oder  $(\underline{P})$
- Flächenladungsdichte  $\sigma_{\text{pol}}$  am Rand des Mediums

Polarisation  $\vec{P}$ :

$$\vec{P} \equiv \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_i$$

Mittelung der mikroskopischen Dipole über Volumen  $V$

$[\vec{P}] = \frac{C}{m^2}$  Annahme: alle  $\vec{p}_i$  gleich  $\vec{P}$ , gleich ausgerichtet, Dipoldichte  $\eta$

Gilt:

$$P = |\vec{P}| = \eta |\vec{p}| = \eta q d$$

Flächenladungsdichte  $\sigma_{\text{pol}}$

Betrachte  $V = dA$  am Rand des Mediums

$$P = \frac{\eta q d A}{A} = \frac{\eta q V}{A} = \frac{Q}{A} = \sigma_{\text{pol}}$$

d.h. Polarisation  $\hat{=}$  Flächenladungsdichte am Rand

## Polarisationsfeld $\vec{E}_{\text{pol}}$ im Medium

Anwendung von Maxwell-Gl auf Bereich mit  $\sigma_+$

$$\oint_{\sigma_+} \vec{E}_{\text{pol}} d\vec{A} = \frac{Q_{\text{ein}}}{\epsilon_0}$$

rechts  $\vec{E}_{\text{pol}} = 0$  keine Beitrag zum Fluss

links  $\vec{E}_{\text{pol}} \uparrow \uparrow \vec{A}$

$$E_{\text{pol}} A = \frac{Q_{\text{ein}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{\text{pol}} = \frac{Q_{\text{ein}}}{A \epsilon_0} = \frac{\sigma_{\text{pol}}}{\epsilon_0} = \frac{P}{\epsilon_0}$$

Richtung von  $\vec{E}_{\text{pol}}$ :

$\vec{p}$  von neg. Pol zur pos Pol

$\vec{E}_{\text{pol}}$  von pos. Ladung zur neg Ladung

$$\rightarrow \vec{P} = -\epsilon_0 \vec{E}_{\text{pol}}$$

?????

$\vec{E}_{\text{Med}}$  (tsl?) Überlagerung von ????????

a)  $\vec{E}_{\text{frei}}$  ohne Medium  $\vec{E}_{\text{pol}}$  aus Dipolen

$$\vec{E}_{\text{Med}} = \vec{E}_{\text{frei}} + \vec{E}_{\text{Pol}} = \vec{E}_{\text{frei}} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

Polarisation abhängig von  $\vec{E}_{\text{Med}}$ :  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_{\text{Med}}$

$\chi_e \hat{=}$  dielektrische Suszeptibilität

$$\vec{E}_{\text{Med}} = \frac{\vec{E}_{\text{frei}}}{1 + \chi_e}$$

$\epsilon = 1 + \chi_e$  relative Dielektrizitätskonstante / Permittivität

$$\vec{E}_{\text{Med}} = \frac{\vec{E}_{\text{frei}}}{\epsilon}$$

$\epsilon$  Faktor um den Feld geschwächt wird

$\epsilon, \chi_e$  abhängig von der Art und Struktur des Mediums

## I.5.2 Felder und Maxwell gl. im Medium

3. MW-Gl:

$$\text{div} \vec{E}_{\text{Med}} = \frac{P}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{Pol}}) \quad (*)$$

$\rho_{\text{frei}}$  freie Ladung,  $\rho_{\text{Pol}}$  Polarisationsladungen

Polarisationsladung in V mit Rand A

$$\Delta Q_{\text{Pol}} = \int_A \sigma_{\text{Pol}} dA = \int_A \vec{P} dA \quad (1)$$

Außerdem:

$$\Delta Q_{\text{Pol}} = - \int \rho_{\text{Pol}} dV \quad (2)$$

$\vec{P} \uparrow \uparrow, \vec{E}_{\text{frei}} \rightarrow \vec{P} \uparrow \downarrow \vec{A}$  auf rechter Grenze also mit „+“  $\Delta Q_{\text{Pol}} < 0$  in (1)  
 $\rho_{\text{Pol}} > 0$  in (2)  $\rightarrow$  „-“ Zeichen in (2)

Gaußscher Satz:

$$\oint \vec{P} d\vec{A} = \int \text{div} \vec{P} dV = \int -\rho_{\text{Pol}} dV$$

Es folgt:

$$\rho_{\text{Pol}} = -\text{div} \vec{P} = \epsilon_0 \text{div} \vec{E}_{\text{Pol}}$$

In (\*):

$$\text{div} \vec{E}_{\text{Med}} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{frei}} + \epsilon_0 \text{div} \vec{E}_{\text{Pol}})$$

$$\text{div} (\vec{E}_{\text{Med}} - \vec{E}_{\text{Pol}}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{frei}}$$

Definiere  $\vec{D}$  als Flussdichte / elektrische Erregung / dielektrische Verschiebung

$$\vec{D} = \epsilon_0 (\vec{E}_{\text{Med}} - \vec{E}_{\text{Pol}}) = \epsilon_0 \vec{E}_{\text{frei}} = \epsilon_0 \vec{E}_{\text{Med}} + \vec{P}$$

3.MW-GL : $\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{frei}}$ 1.MW-GL : $\text{rot} \vec{E}_{\text{Med}} = 0$
--

## Feldverhalten an Grenzflächen

Betrachte Grenzfläche: Medium/Dielektrikum ( $\epsilon > 1$ )  $\leftrightarrow$  Volumen ( $\epsilon = 1$ )

- nur Polarisation  $\rho_{\text{frei}} = 0$   $\cdot \vec{E}_{\text{ext}}$
- $\rho_{\text{frei}} = 0 \Rightarrow D_{\text{Med}}^\perp = D_{\text{Vak}}^\perp$   $E_{\text{Med}}^\perp = \frac{1}{\epsilon} E_{\text{Vak}}^\perp$

$$\oint \vec{D} dA = 0 \text{ da } \rho_{\text{frei}} = 0$$

$d \rightarrow 0$  : Beiträge von linker und rechter Stirnfläche

$$D_{\text{Med}}^\perp(A) + D_{\text{Vak}}^\perp(-A) = 0 \rightarrow D_{\text{Med}}^\perp = D_{\text{Vak}}^\perp$$

- parallele Komponenten  $D^\parallel, E^\parallel$

$$\oint_{ABCD} \vec{E} d\vec{s} = 0 \text{ da } \text{rot} \vec{E} = 0$$

$\overline{AB}, \overline{CD} \rightarrow 0$  nur  $\overline{BC}$  und  $\overline{AD}$  tragen bei

$$\int_{\overline{BC}} \vec{E} d\vec{s} + \int_{\overline{AD}} \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad d\vec{s}_{\overline{AD}} = -d\vec{s}_{\overline{BC}}$$

$$\int_B^C E_{\text{Med}}^\parallel d\vec{s} + \int_A^D E_{\text{Vak}}^\parallel d\vec{s} = 0$$

$$\Rightarrow E_{\text{Med}}^\parallel = E_{\text{Vak}}^\parallel \rightarrow D_{\text{Med}}^\parallel = \epsilon D_{\text{Vak}}^\parallel$$

## Berechnungsgesetz der Elektrostatik

$$\tan \alpha_{\text{Med}} = \frac{E_{\text{Med}}^{\parallel}}{E_{\text{Med}}^{\perp}} = \epsilon \frac{E_{\text{Vak}}^{\parallel}}{E_{\text{Vak}}^{\perp}} = \epsilon \tan \alpha_{\text{frei}}$$

### I.5.3 Mikroskopische Beschreibung der Polarisation (Pol.)

angenommen  $\vec{P} \sim \vec{E}_{\text{Med}}$

- Verhalten von Nichtleitern ohne permanentes Dipolmoment  $\vec{p} = 0$   
z.B.  $H_2$  Ladungsschwerpunkt ( $\vec{r}_s$ ) mittig
- im  $\vec{E}$ -Feld Verschiebung der  $e^-$  bzw.  $\vec{r}_s$   $\vec{F}_e \sim \vec{E}$   
 $\rightarrow \vec{p} = \alpha \vec{E}$ ,  $\alpha \hat{=}$  elektrische Polarisierbarkeit solche Materialien: Verschiebungspolarisation dominiert, sind Dielektrika im engeren Sinne
- Makroskopische Polarisation  $\vec{P}$

$$\vec{P} = n\vec{p} = n\alpha\vec{E}_{\text{Med}} \quad n \hat{=} \text{Moleküle} \quad n = \frac{N_A \rho}{m_{\text{Mol}}}$$

$N_A$  Avogadrokonst.  $\rho$  Massendichte  $m_{\text{Mol}}$  Molmasse

- Hatten  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_{\text{Med}}$   
Zusammenhang  $\alpha$  und  $\chi_e \epsilon$

$$\alpha = \frac{\epsilon_0}{n} \chi_e = \frac{\epsilon_0}{n} (\epsilon - 1)$$

gut für kleine  $P$  (z.B. Gase)  
wen  $P$  groß, dann Dipol-Dipol-Wechselwirkung  
 $\rightarrow$  Clausius-Mosotti-Beziehung:  $\alpha = \epsilon \frac{\epsilon_0}{n} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$

Bsp.:  $H_2$ -Molekül im **E-Feld**  $1 \frac{\text{MV}}{\text{m}}$

$$\alpha_{H_2} = 8,7 \cdot 10^{-41} \frac{\text{Cm}}{\text{V}} (\alpha_{\text{typ}} \approx 100 \alpha_{H_2})$$

$$|\vec{p}|_{H_2} = 8,7 \cdot 10^{-35} \text{Cm}$$

$$d = 2,7 \cdot 10^{-16} \text{m} \quad L = 7,4 \cdot 10^{-11} \text{m} \quad (\text{Abstand H Atome})$$

$$d/L = 3,6 \cdot 10^{-6}$$

#### Orientierungspolarisation:

- polare Moleküle (z.B.  $H_2O$ ) mit permanentem Dipolmoment  $\vec{p}$   
R  $\rightarrow$  **paraelektrisch**
- $\vec{E}_{\text{Med}} = 0$  Richtung der  $\vec{p}$  statistisch / gleichverteilt  $\rightarrow$  kein  $\vec{P}$
- $\vec{E}_{\text{Med}} \neq 0$  Ausrichtung der  $\vec{p}$  im  $\vec{E}$ -Feld

Wärmebewegung behindert vollständige Ausrichtung. Ausrichtungsgrad beschrieben durch Boltzmannverteilung ( $\rightarrow$  Ex1)

$$f(\Delta E) = f_0 e^{-\Delta E/kT} \quad T \text{ Temperatur, } k \text{ Boltzmannkonstante}$$

$$\Delta E = -|\vec{p}||\vec{E}| \cos \theta \quad \text{pot Energie des Dipols}$$

$$\vec{E} = E\vec{e}_z \text{ Beitrag von 1 Molekül } \vec{p}_z = |\vec{p}| \cos \theta$$

Polarisation aus  $f(\theta)$

Ergibt:

$$P = n\vec{p}_z \underbrace{\left\{ \coth \frac{p|\vec{E}|}{kT} - \frac{kT}{p|\vec{E}|} \right\}}_{\text{Langevin fkt. } L(\frac{p|\vec{E}|}{kT})}$$

$L(x) = 1$  d.h. alle Dipole ausgerichtet. oft  $p|\vec{E}| \ll kT$  dann  $L(x) \approx \frac{1}{3}x$  für  $|x| \ll 1$  dann

$$P = np \frac{1}{3} \frac{p|\vec{E}|}{kT} = \frac{1}{3} \frac{p^2|\vec{E}|}{kT}$$

wieder linear in  $|\vec{E}|$

- für  $|\vec{E}|$  groß, oder  $T$  klein nicht lineare Effekte und schließlich Sättigung
- Suszeptibilität abhängig von Temperatur  $\chi_e(T)$

Bsp.:  $H_2O$ -Molekül in E-Feld  $100 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$

$$P_{H_2O} = 6,15 \cdot 10^{-30} \text{Cm} \quad \epsilon_{H_2O} \approx 80$$

$$\Delta E = |\vec{p}||\vec{E}| = 7,7 \cdot 10^{-27} \text{J} = 4,8 \cdot 10^{-8} \text{eV}$$

$$\text{Ausrichtungsgrad: } \frac{1}{3} \frac{p|\vec{E}|}{kT} = 1,9 \cdot 10^{-6}$$

d.h. für 1 Million Moleküle, 2 mit  $\vec{p} \uparrow \uparrow \vec{E}$  Paraelektrisch: Überlagerung von Verschieb. pol. und Orientierungs-pol.

$$P = n \left( \alpha + \frac{1}{3} \frac{p^2}{kT} \right) E_{\text{Med}}$$

plus Clausius-Moretti-Korrektur  $3 \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \epsilon_0 = n \left( \alpha + \frac{1}{3} \frac{p^2}{kT} \right)$  hieraus  $\chi_e, \epsilon \quad P = \epsilon_0 \chi_e E_{\text{Med}}$

**Exp. Bestimmung: Messung**  $C(T) \rightarrow \chi_e(T)$

**Ferroelektrika**

- große permanente Dipolmomente  $\vec{p}$  (Kristalle, kein Eisen)
- Dipol-Dipol-Wechselwirkung  $\rightarrow$  Domänenbildung ohne  $\vec{E}$ -Feld (durcheinander)
- in  $\vec{E}$ -Feld: Ausrichtung der Domänen sehr große  $\epsilon$  bis  $10^5$

## I.5.4 Kondensator im Dielektrikum

Meist: Dielektrikum zwischen den Platten

Ziel:

- Erhöhung der Spannungsfelder
- Erhöhung der Kapazität

**Exp:**

a) Ladung  $Q = \text{const.}$   $C = \frac{Q}{U}$   
 Beobachtung:  $U(|\vec{E}|)$  kleiner  $\rightarrow C$  größer

b) Spannung  $U = \text{const.}$   
 Beobachtung:  $Q$  größer  $\rightarrow C$  größer

Erklärung: (a)

- Dielektrikum polarisiert
- Oberflächenladung  $\sigma_{\text{pol}}$  an Grenzflächen  
 $\rightarrow \vec{E}_{\text{pol}} \uparrow \downarrow \vec{E}_{\text{ext}} \Rightarrow \vec{E}_{\text{Med}}$  geschwächt  $\rightarrow U$  kleiner  $U = |\vec{E}|d$

$U$  def. über Arbeit um  $dq$  von „+“ nach „-“ zu bewegen. Feld schwächer  $\rightarrow U$  kleiner um Faktor  $\epsilon$  also

$$C = \epsilon \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

und

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 |\vec{E}|^2 V$$

Energiedichte

$$W_{\text{el}} = \frac{E_{\text{el}}}{V} = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 |\vec{E}|^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{D} \vec{E}$$

Vgl. von elektrischer Energie ohne und mit Dielektrikum

ohne		mit	
$C_0$	$\rightarrow$	$\epsilon C_0$	
$U_0$	$\rightarrow$	$U_0/\epsilon$	bei $Q = \text{const.}$
	$\Downarrow$		
$E_{\text{el}}$	$\rightarrow$	$E_{\text{el}}/\epsilon$	

**Teilweise mit  $\epsilon > 1$  gefüllter Kondensator**

- Ladungsdichte größer bei  $\epsilon > 1$  da  $E_{\parallel}^{\text{Med}} = E_{\parallel}^{\text{Vak}}$
- Parallelschaltung von 2 Kondensatoren
- $C_{\text{Med}} = \epsilon C_{\text{Vak}} \rightarrow Q_{\text{Med}} = \epsilon Q_{\text{Vak}}$  da  $U = \text{const.}$



# Kapitel II

## Magnetostatik

### II.6 Ströme

#### II.6.1 Elektrischer Strom

Bisher: ruhende Ladungen, räumlich getrennt  $\rightarrow \vec{E}, \varphi$

Jetzt: leitende Verbindung  $\rightarrow$  pos. und/oder neg. Ladungen bewegen sich

Strom: Ladungsfluss pro Zeit durch eine gegebene Fläche

$$\boxed{I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{I = \frac{dQ}{dt}}$$

1. wenn  $I = \text{const.}$  ist in  $\Delta t$  und 2. für  $I(t)$

$[I] = 1A$  Ampère SI-Basiseinheit

Richtung: von „+“-Pol zu „-“-Pol  $\rightarrow$  technische Stromrichtung

in Leitern (metall):  $\uparrow\downarrow$  Richtung der Elektronen

**Stromdichte:**

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{dI}{dA} \vec{e}_j \quad \vec{e}_j \text{ in Stromrichtung}$$

$$\text{Zshg.: } I = \int_A \vec{j} d\vec{A}$$

Bsp.: **Vakuumdioden**

$v_e$  (Kathode)  $\approx 0\text{m/s}$  Beschleunigung in  $\vec{E} = E\vec{e}_z$

wieviele  $e^-$  treffen in  $dt$  auf pos. Platte?

Alle  $e^-$  im Abstand  $< ds = v dt$  bzw. Volumen  $ds A$  befinden  $V = ds A = Av dt$  Anzahl

$e^-$  in  $V$ :  $n_e V$   $n_e$  Elektronendichte. Transponierte Ladung  $dQ = en_e Av dt$

$$\text{Strom } \boxed{I = en_e Av} \quad \text{Stromdichte } \boxed{\vec{j} = en_e \vec{v}}$$

$\vec{j}$  konstant entlang Flugrichtung wegen Ladungserhaltung

$\Rightarrow$  Kathode: kleine  $v$ , große  $n_e$ ; Anode: große  $v$ , kleine  $n_e$

#### Kontinuitätsgleichung

Betrachte Volumen  $V$ , mit Oberfläche  $A$

Strom (oder) Ladungsdichte/Zeit durch  $A =$  Änderung der Ladung in  $V$

$$I = \oint_{A(V)} \vec{j} d\vec{A} = -\frac{dQ}{dt}$$

Gaußscher Satz:

$$\Rightarrow \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = -\frac{d}{dt} \int \rho_Q dV$$

$$Q = \int \rho_{el} dV$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_Q(\vec{r}, t)} \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

Ladungen erhalten; werden nicht erzeugt oder vernichtet

## II.6.2 Ohmsches Gesetz

G.S. Ohm (1826): ( $I \sim U$ ) in vielen Leitern

$$\Rightarrow \boxed{U = RI}$$

Ohmsche Gesetze (OG.) makroskopische Form R: el./ohmscher Widerstand

$$[R] = 1 \frac{V}{A} = 1 \Omega \quad \text{Ohm}$$

**Exp: Strom-Spannungs Charakteristika  $I(U)$**

$$R(U) = \frac{dU}{dI}$$

<u>Kohlefaden</u>	<u>Glühlampe</u>	<u>Konstantendraht</u>
$R$ kleiner für große $U$	$R$ größer für große $U$	$R$ konstant

Ursache: Temperaturabhängigkeit  $R(T)$  ( $\rightarrow$  später)

Strikt: Ohmscher Widerstand  $I \sim U^1$ ; nicht-ohmsch  $I \sim U^k \quad k \neq 1$

## Supraleitung

Flüssiger Stickstoff:  $T_{W_2} = 77K \hat{=} -196^\circ C$

Messung:  $R(\Delta T) \quad \Delta T = T_{\text{Probe}} - T_{W_2} \quad \text{Zeitabstand } \Delta t \approx 5s \quad \text{Beobachtung:}$

Hochtemperatursupraleiter  $R = 0\Omega$  bis zu  $\Delta T \approx 8K$

$\rightarrow$  Sprungtemperatur  $T_c = 77K + 8K = 85K \hat{=} -188^\circ C$

Kupfer:

$R = 0,7m\Omega$  für kleine  $\Delta T$ , danach ohmscher Widerstand

Supraleitung:

gewisse Materialien die für  $T < T_c$  Widerstand Verlieren

## II.6.3 Arbeit und Leistung

An Ladung  $q$  (von  $\varphi_1$  nach  $\varphi_2$  gebracht) wird Arbeit verrichtet/gewonnen

$$W = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU$$

In  $dt$  wird  $dQ$  transportiert, dann wird Leistung  $P$  verrichtet.

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \frac{dQ}{dt} U = UI} \quad \text{el. Leistung}$$

Umkehrung:

$$W = \int_0^t P(t) dt = \int_0^t U(t)I(t) dt$$

$$[P] = 1W = 1VA = 1 \frac{J}{s}$$

Leistung wird im Leiter in Wärme umgewandelt geht aus Stromkreis verloren.

### Exp: Widerstände

Widerstände aus Fe und Cu in Reihe geschaltet  $R_{Cu} < R_{Fe}$  Strom I gleich

$$P = UI = RI^2 \rightarrow P_{Cu} < P_{Fe}$$

## II.6.4 Leitungsvorgänge in Metallen und Halbleitern

### Metalle:

Strom durch die  $e^-$  im Leitungsband, U an Drahtenden  $\rightarrow \vec{E}$ -Feld

Beschleunigung der  $e^-$   $\vec{F}_{e^-} = -e\vec{E}$

Aber: thermische Bewegung  $kT(300K) = 0,0025eV \rightarrow v_{therm} \approx 10^5 \frac{m}{s}$  Stöße mit den Atomen („Reibungseffekt“)

$\rightarrow$  Drift der Elektronen mit  $v_{drift}$

Stromdichte  $\vec{j}$ : in dt passieren alle  $e^-$  die Fläche A in  $dl = v_0 t$  bzw  $V = dl A$

$$dQ = N_e e = en_e V dA dt$$

$N_e$  Anzahl  $e^-$ ,  $n_e$   $e^-$ -Dichte

$$\boxed{\vec{j} = -n_e e \vec{v}_0}$$

„-“ weil  $\vec{v}_0 \uparrow \downarrow \vec{E}$

Driftgeschwindigkeit  $v_D$

$$v(t) = at = \frac{e|\vec{E}|}{m_e} t \quad m_e \text{ Elektronenmasse}$$

(mit  $F_e l = q \cdot \vec{E}$  und  $q = e$ )

Sei  $\mathcal{T}_s$  mittlere Zeit zwischen 2 Stößen

$$v_0 = \frac{e|\vec{E}|\mathcal{T}_s}{m_e} = \boxed{\frac{n_e e^2 \mathcal{T}}{m_e}} |\vec{E}|$$

$$\boxed{\sigma_{el} = \frac{1}{\rho_{el}} = \frac{n_e e^2 \mathcal{T}}{m_e}}$$

$\sigma_{el}$  Elektrische Leitfähigkeit?!?!?  $\rho_{el}$  spezifischer Widerstand  $[\rho_{el}] = \Omega m$

$$\boxed{\vec{j} = \sigma_{el} \vec{E}}$$

ohmsches Gesetz in mikroskopischer/originaler Form

„Rückkehr“ zu makroskopischem OG.  $\vec{I} = \text{const. über A}$

$$I = |\vec{j}|A = \frac{1}{\rho_{el}} |\vec{E}|A = \frac{1}{\rho_{el}} \frac{U}{l} A$$

d.h.

$$R = \frac{\rho_{el} l}{A} \quad \text{Widerstand eines Drahtes}$$

### Halbleiter:

Bandlücke  $\Delta E$  zwischen Valenz- und Leitungsband

$$n_e = n_0 e^{-\frac{\Delta E}{kT}} \quad \text{steigt mit } T$$

- für  $T < T_{\text{Sättigung}}$ :  $\frac{dR}{dT} < 0$
- für  $T > T_{\text{Sättigung}}$ :  $\left. \begin{array}{l} n_e \rightarrow \text{const.} \\ \mathcal{T}_s \text{ sinkt mit } T \end{array} \right\} \sigma \text{ sinkt mit } T$

## II.6.5 Kirchhoffsche Gesetze KHG

- 2 KHG + OG Grundlage für U bzw. I in R-Netzwerken
- 1.KHG (auch **Kontenregel**): im Knoten gilt  $\sum_i I_i = 0$  aus Ladungserhaltung
- 2.KHG (auch **Maschenregel**): in Maschen gilt  $\sum_i U_i = 0$  folgt  $\oint \vec{E} d\vec{S} = 0$

### Widerstandsschaltungen

- **Reihenschaltung:**

Knotenregel:  $I = I_1 = I_2$

Machenregel:  $U = U_1 + U_2$

OG:  $U = R_1 I_1 + R_2 I_2 = (R_1 + R_2) I$

$\rightarrow R_{\text{ges}} = R_1 + R_2$

bzw. für  $n$   $R_i$ :

$$R_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n R_i$$

- **Parallelschaltung:**

Knotenregel:  $I = I_1 + I_2$

Maschenregel:  $U = U_1 = U_2$

$I = I_1 + I_2 = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} = U \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$

$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

bzw. für  $n$   $R_i$ :

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

### Wheatstonesche Brückenschaltung

Ziel: Messung von unbekannten  $R_x$

Spannungen an den grünen Punkten:

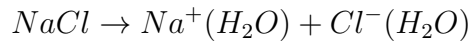
$$U_L = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0 \quad U_R = \frac{R_x}{R_0 + R_x} U_0$$

kein Strom  $I$  wenn  $U_L = U_R$  dann gilt:  $\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_x}{R_0 + R_x}$

## II.6.6 Leitungsvorgänge in Flüssigkeiten

Beobachtung: reines  $H_2O$  kein Strom, Zugabe von  $NaCl$  Strom  $\sim$  Konzentration des  $NaCl$

- Elektrolyt: Lösung von Salz, Säure, Lauge die Strom leitet
- Dissoziation in Lösung (Ionisation/Hydratisierung)



wenn  $E(\text{Anlagerung}) > E(\text{Ionisation})$

- Wanderung der  $Na^+$ ,  $Cl^-$ -Ionen im  $\vec{E}$ -Feld.  
Materialabscheidung an Elektroden (fest, gasförmig)  
 $Na^+$  zu Kathode(-): Abscheidung von  $Na$  ( $Na^+ + e^- = Na$ )  
 $Cl^-$  zu Anode(+): Abscheidung von Chlorgas ( $2Cl^- \rightarrow Cl_2 + 2e^-$ )

### Exp:

Glas bei  $T = 300K$  Isolator, erstarrte Flüssigkeit bei  $T = 600^\circ C$  Funken, erster Stromfluss

Strom  $\rightarrow T \nearrow \rightarrow I \nearrow \rightarrow T \nearrow \dots$  bis das Glas schmilzt

Ionenleitung:

pos. Ionen mit Ladung  $Z_+$  und Dichte  $n_+$

neg. Ionen mit Ladung  $Z_-$  und Dichte  $n_-$

Drift im  $\vec{E}$ -Feld:  $\vec{v}_{+/-} = \pm \beta_{\pm} \vec{E}$   $\beta_{\pm}$  ist die Beweglichkeit der Ionen (teilweise:  $u, \mu$ )  
 $[\beta] = \frac{m^2}{Vs}$

Stromdichte:

$$|\vec{j}| = e(n_+ Z_+ V_+ + n_- Z_- V_-)$$

$$\sigma_{el} = e(n_+ \beta_+ Z_+ + n_- \beta_- Z_-)$$

für kleine  $n$ :  $\beta \neq \beta(n)$  typisches  $\beta \sim 10^{-8} \rightarrow 10^{-7} \frac{m^2}{Vs}$

### Voltasche Spannungsreihe

Metall in Wasser: wenn  $E_{\text{Ionisation}} < E_{\text{Hydratisierung}}$

Atom  $\rightarrow A^+(H_2O) + e^-$  (Elektrode)

$\vec{E}$ -Feld zwischen neg. Elektrode und pos. Elektrode bewirkt  $E_{\text{Ionisation}}$  wächst  $\rightarrow$  Sättigung der Ionisation

$n_{\text{Gleichgewicht}}$  und  $U_{\text{Gleichgewicht}}$  (Elektrode und Flüssigkeit)  $\rightarrow$  elektrolytische Tension

- zwei Elektroden aus
  - a) gleichem Metall  $\rightarrow$  keine Spannung zwischen Elektroden
  - b) unterschiedliche Metalle  $\rightarrow \Delta U$  Galvanisches Element
- Messung von  $\Delta U$  zu Referenzelektrode ( $H_2$  umspültes Platin)  
 $\rightarrow$  Voltasche Spannungsreihe („-“ unedel  $\rightarrow$  „+“ edler)

## II.6.7 Stromleitung in Gasen

- Gase: keine (minimale) freie Ladungsträger
- Entladung: Stromfluss durch Gas
- Ladungsträger: Ionen ( $A^+$ ,  $M^+$ ) und  $e^-$ ,  $n_+ \approx n_-$
- 2 Arten:
  - unselbstständige von außen erzeugte  $A^+$ ,  $e^-$
  - selbstständige: initialer Strom wird verstärkt

Unselbstständige Ionisation:

- a) als Röntgenstrahlung  $\gamma + A \rightarrow A^+ + e^-$
- b) therm. Bewegung in Stößen  
 $T \nearrow$  dann  $E_{\text{kin}} \nearrow$  für  $E_{\text{kin}}$

Erzeugungsrate für Ionen ( $e^-$ ,  $A^+$ ) :  $(\frac{dn}{dt})_{\text{erz}} = \alpha$

Vernichtungsrate/Rekombinationsrate:  $(\frac{dn}{dt})_{\text{Reh}} = -\beta n_+ n_- = -\beta n^2$

$$n_+ = n_- = n$$

- Summe:  $(\frac{dn}{dt})_{\text{Gesamt}} = \alpha - \beta n^2$
- Gleichgewicht:  $(\frac{dn}{dt})_{\text{gesamt}} = 0 \rightarrow n_{\text{Gleichgew}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$   
 $n_{\text{Gleich.}} = \text{const.} \rightarrow \text{ohmscher Bereich}$

$$\vec{j} = e \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} (\beta^+ + \beta^-) \vec{E}$$

- $U, \vec{E}$  sehr groß:  $\lambda_{\text{frei}} \gg$  Abstand der Platten  
 $\rightarrow$  keine Rekombination  $\beta \rightarrow 0$   
Sättigungsstrom  $I_s$  : alle  $e^- A^+$  abgesandt

$$I_s \sim \alpha$$

## II.6.8 Stromquellen

Innenwiderstand

- $U_v < U_0$
  - Stromquelle hat maximale Leitung
- $\rightarrow$  Effekt beschrieben durch Ersatzschaltbild (Reale Stromquelle als Spannungsquelle in reihe mit Widerstand)

Spannungs-/Stromquelle mit  $U_0$  in Serie mit Innenwiderstand  $R_I$   $U_0$  Elektromotorische Kraft EMK

$$I = \frac{U_0}{R_I + R_V} \quad U_{kl} = R_V I = \frac{R_V}{R_I + R_V} U_0$$

Leistung:

$$P_V = U_{kl} I = \frac{R_V}{(R_V + R_I)^2} U_0^2$$

Grenzfälle:

$$\text{a) } R_V \rightarrow \infty \quad U_{kl} \rightarrow U_0 \quad I \rightarrow 0 \quad P_V \rightarrow 0 \text{ offene Stromstärke}$$

$$\text{b) } R_V \rightarrow 0 \quad U_{kl} \rightarrow 0 \quad I = \frac{U_0}{R_I} = \frac{U_{kl}}{R_V} \quad P_V \rightarrow 0 \text{ kurzschluss}$$

dazwischen  $P_V$  maximal (bei  $R_I = R_V$  in Übung berechnet)

## II.6.9 Thermoelektrizität

### Kontaktpotential

- 2 unterschiedliche Metalle in Kontakt

**Fermi-Energien** / **Austrittsarbeiten** sind unterschiedlich

$E_F(A) < E_F(B)$  : wandern  $e^-$  von  $A$  nach  $B$ ,  $A$  pos. geladen /  $B$  neg. geladen

$\rightarrow \vec{E}(B \rightarrow A)$  entgegengesetzt zu Strom

$\rightarrow$  Kontaktspannung  $U_{\text{kon}} = E_F(B) - E_F(A)$

Geschlossener Kreis:  $\sum_i U_{\text{kon}}^i = 0$  bei konstanter Temperatur

### Seebeck-Effekt

- $U_{\text{kon}}$  temperaturabhängig
- Kontakte 1 und 2 bei  $T_1$  und  $T_2$   
 $\rightarrow$  Seebeck Koeffizienten  $[S_i] = \frac{V}{K}$  typ:  $10^{-5} \rightarrow -6$  in Metall  $10^{-3}$  in Halbleiter
- $\Delta T$  bewirkt Spannung

### Peltier-Effekt

Strom durch Material A, B, A

- Strom durch Kontaktstellen bewirkt  $\Delta T$
- $E_F^A > E_F^B$  AB heiß BA kühl

$A \rightarrow B : \frac{dW}{dt} > 0$  T steigt, Energie dem Gitter zugeführt

$B \rightarrow A : \frac{dW}{dt} < 0$  T sinkt, Energie dem Gitter entzogen

$$\frac{dW}{dt} = (\Pi_A - \Pi_B) I \quad \text{Peltierkoeffizienten} [\Pi] = \frac{J}{K} \quad (\text{typ } 10^2 J/K)$$

Es gilt:  $\Pi_A = S_A T$

## II.7 Das magnetische Feld

### II.7.1 Elektromagnetische Kräfte

→ Folie

### II.7.2 Magnetisches Feld

- Elektrostatik: Coulombkraft  $\vec{F}_e$   
→  $\vec{E}$ -Feld  $\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_{\text{Probe}}}$
- Beobachtung → Feld → Kraft
- Beobachtung:
  - **Feldlinien immer geschlossen**  
[auch innerhalb von Permanentmagneten]  
⇒ **Quellen-frei**
  - in Nähe von Pol und Stromdurchflossener Leiter Feldlinien Dichter  
→ Feld größer  $\sim \frac{1}{r^k}$   $k > 0$
  - Konvention:  
**Außenbereich** von Nord → Süd  
**Innenbereich** von Süd → Nord  
in **Permanentmagneten**

Idee: mathematische Beschreibung durch Vektorfeld  $\vec{B}(\vec{r})$  „magnetische Feldstärke“, „Flussdichte“, „Induktion“

$[\vec{B}] = 1\text{T (Tesla)} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$  (Zshg. später)

magnetischer Fluss  $\Phi_M \equiv \int_A \vec{B} d\vec{A}$

### II.7.3 Maxwell-Gleichung der Magnetostatik

- geschlossene Feldlinien ohne Anfang und Ende

$$\begin{array}{l} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \Phi_M = \oint_A \vec{B} d\vec{A} \end{array}$$

4. MW-Gl.  $\vec{B}$  ist Quellen-frei.

Äquivalenz mittels Gaußschen Satzes

$$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = \int_V \text{div} \vec{B} dV = 0 \quad \text{für beliebige Volumina} \Rightarrow \text{div} \vec{B} = 0$$

- kein skalares Potential  $\varphi_M$  definierbar



- Feld von stromdurchflossenen Leiter.

$$\vec{B}(\vec{r}) = B(|\vec{r}|)\vec{e}_\varphi \text{ nur von } r \text{ abhängig}$$

$$\oint_{r=r_0} \vec{B} d\vec{s} = 2\pi r_0 B(r_0) \neq 0 \quad \mu_0 I \text{ experimentell}$$

$$\rightarrow \oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I$$

Ampéresches Gesetz  $\mu_0$  magnetische Feldkonstante Permeabilität des Volumens

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad \mu_0 \text{ ohne Felder} \rightarrow \text{später}$$

- Anwendung des stokeschen Satzes mit  $I = \int \vec{j} d\vec{A}$

$$\oint_{R(A)} \vec{B} d\vec{s} = \int_A \text{rot } \vec{B} d\vec{A} = \mu_0 \int \vec{j} d\vec{A}$$

Weg  $\vec{s}$  auf dem Rand  $R(A)$  pos. Schraube um  $\vec{A}$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I$$

2 MW-Gl. Wirbelkerne = Orte mit Stromdichte  $\neq 0$

Def: **magnetische Feldenergie**  $E_{\text{mag}}$  bzw. **Energiedichte**  $w_{\text{mag}}$

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2\mu_0} \int |\vec{B}|^2 dV \quad w_{\text{mag}} = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2$$

Zsfg:

$\vec{E}$  ist wirbelfreies Quellfeld

$\vec{B}$  ist quellfreies Wirbelfeld

## II.7.4 Das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$

- da  $\text{div } \vec{B} = 0$  gibt es  $\vec{A}$ , so dass  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$
- Frage:
  - wie bestimmt man  $\vec{A}$
  - ist  $\vec{A}$  „real“ oder nur mathematisches Hilfsmittel
    - \* klassische Physik: lediglich Hilfsmittel
    - \* Quantenmechanik: Aharonov-Bohm-Effekt  
 $\vec{A} \neq 0$  beeinflusst einen  $e^-$ -Strahl obwohl  
 $\vec{B} = 0$  auf Weg des Strahls
    - \* QED:  $(\varphi_{\text{el}}, \vec{A})$  ist „Wellenfunktion“ des Photon

- $\vec{A}$  ist nicht eindeutig  
 $\vec{A}$  und  $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad} f$   $f$  Skalarfeld liefern selbes  $\vec{B}$ , da  $\text{rot}(\text{grad} f) = 0$   
 $\rightarrow$  Eichfreiheit durch Wahl von  $f$  oft:  
 Coulombgleichung:  $\text{div} \vec{A} \stackrel{!}{=} 0$
- $f$  eindeutig ? Nein.  
 Alle  $f$  mit  $\Delta f = \text{div grad} f = 0$  erfüllen  $\text{div}(\vec{A}) = 0$   
 nutze Freiheit in  $f$ , so dass  $|\vec{A}(\vec{r})| \xrightarrow{|\vec{r}| \rightarrow \infty} 0$
- Betrachte 2. MG.

$$\text{rot} \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \dots = -\Delta \vec{A}$$

also

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \\ t = 1 \end{array}}$$

## II.7.5 Berechnung von Magnetfeldern

Aus MW-Gl. bzw. Ampèresches Gesetz

- 1) **gerader Leiter**, Strom  $I$

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I \quad B \text{ nur abhängig von } r, \text{ in Richtung } \vec{e}_r$$

$$B(r) 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

- 2) **Koaxialkabel**

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \begin{cases} \frac{r}{R_s} & \text{für } r < R_s \\ \frac{1}{r} & \text{für } R_s < r < R_n \\ 0 & \text{für } R_n < r \end{cases}$$

- 3) **Solenoid**

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \int_C^D \vec{B} d\vec{s} + \int_A^B \vec{B} d\vec{s} \quad \text{auf anderen Wegen} \quad \vec{B} \perp d\vec{s}$$

$B$  homogen und entlang Symmetrieachse

für „AB“  $\rightarrow \infty$   $B(\infty) \rightarrow 0$

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \int_C^D \vec{B} d\vec{s} = Bl = \mu_0 NI$$

$l$  Länge des Solenoiden  $N$  Windungszahl

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 NI}{l}}$$

- 4) **Toroidspule**  $\vec{B} = \frac{\mu NI}{2\pi R} \vec{e}_\varphi$

- 5) **Flächenstrom**  $B_y = -\frac{1}{2} \mu_0 \vec{j} d$

## Biot-Savart-Gesetz BSG

- Ziel: Verfahren zur Berechnung von  $\vec{B}$  für beliebige gegebene  $\vec{j}, I$
- Betrachte infinitesimales Leiterstück mit infinitesimaler Stromdichte  $d\vec{j} \rightarrow d\vec{V}$   
 $\vec{B}_{\text{Gesamt}}$  aus Summe/Integral über  $d\vec{j}$
- Es gilt:  $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$  [Vgl:  $\Delta \varphi_{\text{el}} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ ]

$$\text{Lsg: } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \dots = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla} \times \vec{j}(\vec{r}') + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}') \right]$$

$\text{rot} \vec{j} = 0$  kein Kreisstrom ohne externen Antrieb in Magnetostatik

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

wenn  $\vec{j} = \text{const.}$  über Leiteroberfläche  
 $\vec{j} d\vec{V} = \vec{j} d\vec{A} d\vec{l} = I d\vec{l} \quad d\vec{l} \uparrow \uparrow d\vec{j} \uparrow \uparrow \vec{I}$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Biot Savart Gesetz

## Bestimmung von $\vec{B}$ mit BSG

- 1) Leiterschleife mit Radius R, Strom I

ges: Magnetfeld auf der Achse aus  $d\vec{l} \sim \vec{j} \quad d\vec{B} \sim -(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{l}$

Symmetrie bzw Kompensation von  $d\vec{l}$  bei  $\varphi$  und  $\varphi + \pi \Rightarrow \vec{B} = B_z \vec{e}_z$

$$dB_z = \cos \alpha dB \quad \cos \alpha = \frac{R}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$d\vec{l} \perp \vec{r} - \vec{r}' \Rightarrow$  Beträge ausreichend

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int dl \frac{\cos \alpha}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{auf Kreis} \quad R, z = \text{const.} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

für  $z = 0$  (Ringzentrum) :  $B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{1}{R}$

- 2) Helmholtzspulenpaar

2 Spuen mit Radius R, Abstand  $d_0$  (oft = R)

## II.8 Magnetische Kräfte

### II.8.1 Die Lorentz Kraft

Erinnerung: Anziehung  $I_1 \uparrow\uparrow I_2$ , Abstoßung  $I_1 \uparrow\downarrow I_2$  keine Coulomb-Kräfte, da Leiter neutral

#### Exp: Fadenstrahlrohr

Beobachtung:  $R \sim \frac{1}{I} \sim \frac{1}{|\vec{B}|}$

Richtung der Kraft:  $-\vec{v}_e \times \vec{B}$  rechte-Hand-Regel „+“  $Q_e = -e$

keine Arbeit verrichtet durch  $F_{\text{Mag}}$  (Loranzkraft)  $W = \int F_{\text{Mag}} d\vec{s} = 0$   $F_{\text{Mag}} \perp \vec{v} \Rightarrow$  Richtung von  $\vec{v}$  ändert sich, Betrag von  $\vec{v}$  konstant

$$\boxed{\vec{F}_{\text{Mag}} = \vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}} \quad \text{Lorentzkraft}$$

#### Fadenstrahlrohr:

Beschleunigung in  $\vec{E}$ -Feld:  $eU_B = \frac{1}{2}mv^2$   $v = \sqrt{\frac{2eU_B}{m}}$

für  $U_B = 300\text{V}$   $v = 0,03$  Lichtgeschwindigkeit

$$\vec{F}_L = \vec{F}_{\text{Zent}} \quad -e\vec{v} \times \vec{B} = -\frac{mv^2}{r}\vec{e}_r$$

$$\Rightarrow r = \frac{|\vec{p}|}{eB} \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

$$T_{\text{Umlauf}} = \frac{\text{Umfang } 2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{eB} \quad \omega_{\text{Umlauf}} = \frac{2\pi}{T_{\text{Umlauf}}} = \frac{e}{m_e} B \quad \text{Zyklotronfrequenz}$$

(gilt für  $v \ll c$  Lichtgeschwindigkeit)

für  $v \rightarrow c$  wird  $T \nearrow, \omega \searrow$

Wenn  $\vec{v} \perp \vec{B}$  dann in Gl.  $\vec{v}, \vec{p} \rightarrow \vec{v}_{\perp \vec{B}}, \vec{p}_{\perp \vec{B}}$

$$eB = \frac{v_{\perp \vec{B}}}{\rho} (\cdot m_e)? \quad \rho \text{ Radius in Ebene } \perp \vec{B}$$

$\vec{v}_{\parallel \vec{B}}$  unbeeinflusst  $\rightarrow$  **Helixbahn** des Elektronenstrahls

Anwendung:  $\frac{e}{m}$ - Bestimmung

#### Hall-Effekt:

- Hall-Effekt (Erwin Hall 1879 in Doktorarbeit)

#### Exp: Strom durch (Halb)leiter in Magnetfeld

$\rightarrow$  Spannung  $U_{\text{Hall}} \perp \vec{B}$  und  $\perp \vec{j}$

- $e^-$  durch  $\vec{F}_L$  abgelenkt  $\rightarrow \vec{E}$ -Feld wegen  $e^-$ -Mangel/Überschuss
- Gleichgewicht wenn  $\vec{F}_{\text{el}} + \vec{F}_L = \vec{0}$   
 $e|\vec{v}_D||\vec{B}| = e|\vec{E}| \quad |\vec{E}| = \frac{U_H}{b}$   
 $I = |\vec{j}|A = jbd \quad j = n_e|\vec{v}_D|e \quad ev_D = \frac{j}{n_e}$   
 Also:  $F_L = \frac{I}{bdn_e}B \quad F_{\text{el}} = e\frac{U_H}{b}$

$$\rightarrow \boxed{U_H = \frac{IB}{edn_e}}$$

$(n_e)_{H_L} \ll (n_e)_{\text{Leiter}} \Rightarrow$  für  $I = \text{const.}$  wird  $U_H$  größer

- Anwendung: Hall-Sonde zur Messung von B-Feldern.

## II.8.2 Kräfte auf Stöme

Leiter mit Querschnitt  $A$ :  $I = jA$   $\vec{j} = en_e \vec{v}_D$

Kraft auf infinitesimales Leiterstück  $dl$ ,  $dq = en_e A dl$

$$d\vec{F} = dq(\vec{v}_D \times \vec{B}) = en_e A dl(\vec{v} \times \vec{B}) = A dl \vec{j} \times \vec{B}$$

$$d\vec{l} \equiv dl \frac{\vec{j}}{|\vec{j}|}$$

$$d\vec{F} = A j d\vec{l} \times \vec{B} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Integration über Leiter:  $\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B} \rightarrow$  erklärt rollenden Stab/Leiterschaukel

- **parallele Ströme (galvanische Kräfte)**

$I_2$  erzeugt  $\vec{B}(I_2)$  am Ort von  $I_1$

$\rightarrow$  Lorenzkraft auf  $I_1$  gemäß obiger Gleichung

Abstand der Leiter  $r$ , Länge  $l \gg r$

Kraft auf  $dl_1$  im Leiter 1

$$d\vec{F}_1 = I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B}(I_2)$$

Hatten:

$$\vec{B}(I_2) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_2}{r} \vec{e}_\varphi$$

$\vec{B}(I_2) \perp I_1 \Rightarrow$  Beträge ausreichend

$$dF_1 = I_1 \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_2}{r} dl_1$$

$$|\vec{F}_1| = \int_0^L \frac{\mu_0}{2\pi r} I_1 I_2 dl_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{L}{r} I_1 I_2$$

$d\vec{l}_1 \times \vec{B}$  mit Rechte-Hand-Regel

$\rightarrow$  Abstoßung für  $I_1 \uparrow \downarrow I_2$

actio = reactio Aymmmtrie zwischen  $I_1$  und  $I_2$

### Exp: „Stromwaage“

Masse von 200 mg zum Beschweren

$$F_L = F_G \quad F_G = m \cdot g \quad F_L = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 \frac{L}{r}$$

$$\rightarrow I = \sqrt{\frac{mg2\pi r}{L\mu_0}} = 15,1 A \quad \text{Vgl. Exp: } I = 14,9 A$$

### Exp: Meissler-Ochsenfeldeffekt

Hochtemperatursupraleiter (Ytrium Barium Kupferoxid)

- Für  $T < T_{\text{sprung}}$  supraleitend

- Magnetfeld aus Körper hinausgedrängt Erklärung in Festkörperphysik (Ginzburg-Landau-Th, BCS-Theorie)
- warum schweben über Magnetbahn ? → Übung

## II.8.3 Der Magnetische Dipol

Def.: magnetischer Dipol  $C \rightarrow$  Leiterschleife

$$\boxed{\vec{p}_M = I \vec{A}}$$

Richtung von  $\vec{A}$  aus  $\vec{j}$  über „Rechte-Hand-Regel“

Hatten B auf Achse:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{l^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z$$

für  $R^2 \ll z^2$ :

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{z^3} \vec{e}_z \sim \boxed{\frac{1}{z^3}} \\ &= \frac{\mu_0 \vec{p}_M}{2\pi z^3} \quad \boxed{\vec{p}_M \uparrow \uparrow \vec{B}} \end{aligned}$$

Allgemein (außerhalb Achse)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r}|^3} \left( \frac{3\vec{r}(\vec{p}_M \cdot \vec{r})}{r^2} - \vec{p}_M \right)$$

Nordpol bei + z - Richtung, Südpol bei - z - Richtung

→  $\vec{p}_M$  zeigt von Süd- nach Nordpol

- Dipol des  $e^-$  im Wasserstoffatom (klassisch)

$$\vec{F}_{\text{el}} = \vec{F}_{\text{zen}} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m_e \frac{v^2}{r} = \frac{Lv}{r^2} \quad L \equiv m_e v r$$

In QM: L quantisiert  $n\hbar$   $\hbar = \frac{h}{2\pi}$   $h$  Planksches Wirkungsquantum  
 $e^-$ -Bewegung  $\hat{=}$  Kreisstrom  $I = \frac{e}{T}$   $T$  Umlaufzeit

$$\vec{p}_H = I \vec{A} = \frac{-e}{T} \vec{A} = \frac{-ev}{2\pi r} \pi r^2 \vec{e}_n = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$$

$$\text{für } L = 1\hbar : \quad |\vec{p}_H| = \underbrace{\frac{e\hbar}{2m_e}}_{\mu_B} = 9,26 \cdot 10^{-24} \text{ A m}^2$$

$\mu_B$  = Bohrsches Magneton

## Kräfte auf magnetischen Dipol

Leiterschleife  $\vec{F} = I \oint d\vec{l} \times \vec{B}$   $\vec{M} = I \oint \vec{r} \times (d\vec{l} \times \vec{B})$

a) **homogenes  $\vec{B}$ -Feld**

$\vec{F}_{\text{ges}} = 0$  da Kompensation von  $d\vec{l}$  bei  $\varphi$  und  $d\vec{l}$  bei  $\varphi + \pi$

$$\vec{M} = IB \sin \alpha \pi R^2 \vec{e}_y = \vec{p}_M \times \vec{B}$$

$\vec{B} \downarrow \rightarrow \vec{p}_M$       $\vec{p}_M \uparrow \uparrow \vec{B}$  energetisch günstiger

$$\Delta E_{\text{mag}} \equiv - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \vec{M} d\vec{\alpha} = -\vec{p}_M \vec{B} \quad \text{Nullpunkt für } E_{\text{mag}} \text{ bei } \alpha = \pi/2$$

b) **inhomogenes  $\vec{B}$ -Feld**

Taylorentwicklung  $\vec{B}(\vec{r}) = \underbrace{\vec{B}(\vec{r}_0)}_{\text{const.}} + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \vec{B}(\vec{r}))|_{\vec{r}=\vec{r}_0}$

$\vec{B}(\vec{r}_0)$  kein Beitrag zur Kraft

Rechnung zeigt:  $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{B}\vec{p}_M)$

d.h. **Kraft in Richtung  $\vec{B}$ -Gradient. Dipol wird in Bereich großer Feldstärke gezogen.**

## II.9 Magnetische Felder in Materie

### II.9.1 Magnetisierung der Materie

- Atom: Elektronen und Kern.  $e^-$  mit  $\vec{p}_M$  verbunden  
 $\vec{p}_M$  im Magnetfeld  $\vec{B}$  ausgerichtet
- $\vec{B}(\vec{p}_M) \equiv \vec{B}_{\text{Mag}}$  überlagert sich externes  $\vec{B}$ -Feld  $\rightarrow \vec{B}_{\text{Med}}$
- $e^-$  mit  $\vec{L} \Rightarrow \underbrace{\vec{p}_M}_{\gamma_L} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L} = \gamma_L \vec{L} \quad |\vec{L}| = n\hbar$   
 $\gamma_L$  = gyromagnetisches Verhältnis manchmal auch ohne -  
für  $|\vec{L}| = 1\hbar \quad |\vec{p}_M| = \mu_B$  Bohrsche Magneton (des  $e^-$ )
- komplexe Atome: viele  $e^- \rightarrow$  vektorielle Summe der  $\vec{L}_i$   
 $\rightarrow$  Quantenmechanik, Atomphysik
- Kern:  $\gamma_{L, \text{Photon}} = \frac{e}{2m_p} \approx \frac{1}{1836} \gamma_{L, e^-} \rightarrow$  vernachlässigbar
- Spin des  $e^-$  (Eigendrehimpuls)  $\vec{S} : |\vec{S}| = \frac{1}{2}\hbar$

$$\vec{p}_M = \gamma_S \vec{S} \quad \gamma_S = -\frac{e}{m_e} = 2\gamma_L$$

- Gesamt Dipolmoment eines  $e^-$  :  $\vec{p}_M = \vec{p}_{M,L} + \vec{p}_{M,S}$   
komplexes Atom:  $\vec{p}_{M, \text{gesamt}}$  aus  $e^-$ -Konfiguration  
aber:  $\vec{p}_{\text{Atom}}$  fixiert,  $\vec{B}_{\text{ext}}$  ändert nur Orientierung von  $\vec{p}_{\text{Atom}}$

## Magnetisierung der Materie

- Ziel: Einfluss der atomaren  $\vec{p}_M$  auf  $\vec{B}$ -Feld in Materie quantifizieren
- Magnetisierung  $\vec{M} \equiv \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_{M,i}$  aus Überlagerung von atomaren Kreisströmen
  - im Inneren Kompensation von entgegengerichteten Strömen
  - auf Rand Oberflächenstrom  $I_{\text{Mag}}$

$$\vec{M} = \frac{I_{\text{Mag}} \vec{A}}{V} \quad |\vec{M}| = \frac{I_{\text{Mag}} A}{Ad} = \frac{I_{\text{Mag}}}{d} \quad d = \text{Dicke der Schicht}$$

- $\vec{B}_{\text{Mag}}$  aus  $I_{\text{Mag}}$  über Ampèresches Gesetz Annahme:  $\vec{B}_{\text{Mag}}$  homogen, im Vakuum verschwindet

$$\oint \vec{B}_{\text{Mag}} d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{Mag}} \quad B_{\text{Mag}} d = \mu_0 I_{\text{Mag}}$$

$$|\vec{B}_{\text{Mag}}| = \mu_0 \frac{I_{\text{Mag}}}{d} = \mu_0 |\vec{M}| \quad \text{Rechte-Hand-Regel } \vec{M} \uparrow \uparrow \vec{B}$$

- Vgl: Elektrostatik  $\vec{E}_{\text{Pol}} = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}$   $\vec{B}_{\text{Mag}} = \mu_0 \vec{M}$   
 $\vec{E}_{\text{Pol}} \uparrow \downarrow \vec{P} \rightarrow$  Schwächung des E-Feldes  
 $\vec{B}_{\text{Mag}} \uparrow \uparrow \vec{M} \rightarrow$  Stärkung des B-Feldes
- Feld im Medium  $\vec{B}_{\text{Med}} = \vec{B}_{\text{frei}} + \vec{B}_{\text{Mag}} = \vec{B}_{\text{frei}} + \mu_0 \vec{M}$   
 $\vec{B}_{\text{Mag}} / \vec{M}$  proportional zu  $\vec{B}_{\text{frei}}$   $\vec{B}_{\text{Mag}} = \chi_m \vec{B}_{\text{frei}}$   
 $\chi_m$  magnetische Suszeptibilität  
 Achtung:  $\vec{E}_{\text{Pol}} = \chi_e \vec{E}_{\text{Med}}$  (nicht via  $\vec{E}_{\text{frei}}$ )  
 Zsgh:

$$\vec{B}_{\text{Med}} = (1 + \chi_m) \vec{B}_{\text{frei}} \equiv \mu \vec{B}_{\text{frei}}$$

$\mu$  relative Permeabilität  $\mu = 1 + \chi_m$   
 $((1 + \chi_e) \vec{E}_{\text{Med}} = \vec{E}_{\text{frei}})$

## Maxwell- Gleichungen im Medium

Def: neues Feld **magnetische Erregung**

$$\boxed{\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_{\text{frei}}} \quad \text{magnetische Erregung}$$

Es gilt:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \vec{B}_{\text{Med}} = \vec{B}_{\text{frei}} + \vec{B}_{\text{Mag}} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Verwendung von  $\vec{B}$  und  $\vec{H} \rightarrow$  kompaktere MW-Gl.

- Ab jetzt: „Med“ unterdrücken  
 $\vec{B}$  und  $\vec{E}$  sind Felder (im Medium oder Vakuum) die gemessen werden
- Vorteil der MW-Gl in  $\vec{B}, \vec{H}, \vec{E}, \vec{D}$ 
  - keine Kenntnis über  $\rho, \vec{j}$  im Medium



- nur externen  $\rho, \vec{j}$

$\vec{H}$  Teil des  $\vec{B}$ -Feldes ( $\cdot \frac{1}{\mu_0}$ ) das aus der Externen Anregung/Erregung stammt

- keine magnetischen Monopole  $\text{div} \vec{B} = 0$   
 $\text{div}(\mu, \mu_0, \vec{H}) = \mu \mu_0 \text{div} \vec{H} + \mu_0 \text{grad} \mu \cdot \vec{H} \stackrel{!}{=} 0$ 
  - homogenes Medium  $\mu = \text{const.} \rightarrow \text{div} \vec{H} = 0$
  - inhomogenes Medium  $\mu = \mu(\vec{r}) \rightarrow \text{div} \vec{H} = -\frac{\text{grad} \mu \cdot \vec{H}}{\mu} \neq 0$  i.a.
- Verhalten an Grenzflächen  
d.h. Überlagerung von Vakuum ( $\mu = 1$ ) zu Medium ( $\mu \neq 1$ )  
 $\text{rot} \vec{H} = \vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{H}_{\text{frei}}^{\parallel} = \vec{H}_{\text{Med}}^{\parallel} \quad \vec{B}_{\text{frei}}^{\parallel} = \frac{1}{\mu} \vec{B}_{\text{Med}}^{\parallel}$   
 $\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B}_{\text{frei}}^{\perp} = \vec{B}_{\text{Med}}^{\perp} \quad \vec{H}_{\text{frei}}^{\perp} = \mu \vec{H}_{\text{Med}}^{\perp}$

## II.9.2 Diamagnetismus

- keine permanente Dipole ( $\vec{I}_{\text{Atom}} = \vec{L}_{\text{Atom}} + \vec{S}_{\text{Atom}} = 0$ )  
wenn abgeschlossene Schalen in Hülle (reist)
- $\vec{B}_{\text{ext}}$  induziert magnetische Dipole  
 $\vec{P}_M^{\text{ind}} \uparrow \downarrow \rightarrow$  nächstes Kapitel  
 $\rightarrow$  Schwächung des B-Feldes,  $\chi_m < 0, \mu < 1$   
typ:  $\chi_m \sim -10^{-5} \rightarrow -10^{-6}$
- Kraft im inhomogenen Feld  $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{p}_M)$   
 $\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_{M,i}$   
 $\vec{p}_M = V \vec{M} = V \chi_m \vec{H} = \frac{V \chi_m}{\mu_0} \vec{B}$ 

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \left( \vec{B} \frac{V \chi_m}{\mu_0} \vec{B} \right) = \frac{V \chi_m}{\mu_0} \vec{\nabla} |\vec{B}|^2$$
- Probe aus Bereich von hohem Feld herausgedrängt
- alle Substanzen zeigen Diamagnetismus aber durch Paramagnetismus und Ferromagnetismus Effekt überdeckt

## II.9.3 Paramagnetismus

- $x > 0 \quad \vec{M} \uparrow \uparrow \vec{B}_{\text{ext}}$  permanente magnetische Dipole
- $\vec{B}_{\text{ext}} = 0$  keine Ausrichtung des atomaren  $\vec{p}_{M,i} \Rightarrow \vec{M} = 0$
- $\vec{B}_{\text{ext}} \neq 0$  teilweise Ausrichtung des  $\vec{p}_{M,i}$   
Gegenwirkung durch thermische Bewegung  
Ausrichtung durch Boltzmannvltg.  $c e^{-\frac{\Delta E}{kT}} \approx c(1 - \frac{\Delta E}{kT})$   
 $\Delta E = \mu_B |\vec{B}| = 9,26 \cdot 10^{-24} \text{ J für } B = 1 \text{ T}$   
 $kT(T = 300 \text{ K}) = 4,14 \cdot 10^{-21} \text{ J} \Rightarrow \frac{\Delta E}{kT} \ll 1$

- Mittleres Dipolmoment eines Atoms

$$|\overline{\vec{p}_M}| = \frac{1}{3} \frac{|\vec{p}_m|^2}{kT} |\vec{B}| \quad n_p \quad \text{Dipoldichte}$$

$$\vec{M} = n_p \overline{\vec{p}_M} = \frac{1}{3} \frac{n_p |\vec{p}_m|^2}{kT} \vec{B}$$

$$\chi_m = \frac{\mu_0 \vec{M}}{|\vec{B}|} = \frac{1}{3} \frac{n_p \mu_0 |\vec{p}_m|^2}{kT} \sim \frac{1}{T} \quad \text{Curie- Gesetz}$$

$$\chi_m(300\text{K}) \stackrel{\text{typ}}{\approx} 10^{-6} \rightarrow 10^{-4}$$

- Probe in den Bereich größeres B-Feldes gezogen

## II.9.4 Ferromagnetismus

- große  $\chi$ ,  $\vec{M}$  aus WW der atomaren Dipole
- hohe Temperatur: Dipole statistisch verteilt  $E_{\text{therm}} > E_{\text{Austausch}}$
- Temperatur sinkt:  $E_{\text{therm}} > E_{\text{Austausch}}$   
 → Ausrichtung der Dipole an mehreren Stellen  
 → Bildung der weißschen Bezirke / Domänen
- für  $\vec{B} = \vec{0}$  gilt  $\vec{M} = \vec{0}$  (zunächst)
- $\vec{B} \neq \vec{0}$ : Ausrichtung der Domänen  $\vec{M} \uparrow \uparrow \vec{B}$ 
  - Sprungweise → Barkhausen Effekt
  - Sättigung → alle Domänen ausgerichtet
- Phasenübergang bei Temperatur Erhöhung  
 bei  $T > T_c$ :  $E_{\text{therm}} > E_{\text{Austausch}}$  ( $N_i$ :  $T_c = 358\text{C}$ )  
 → auflösen der Domänen  
 →  $\vec{M} \rightarrow 0$  Entmagnetisierung  
 Phasenübergang: Ferro- → Paramagnetismus

$$\text{oberhalb } T_c : \chi = \frac{d}{(T - T_c)^r} \quad c = \text{const.}, \quad r = 1 \rightarrow 1,5$$

## II.9.5 Elektromagnet

- Kombination Spule und Eisenkern  
 → Formung des Magnetfeldes  
 → Luftspalt zur Nutzung des Feldes  
 Ampèresches Gesetz:

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = H_{\text{Fe}} + l_{\text{Fe}} + H_0 d = NI$$

Grenze:  $B_{\perp} = \text{const.}$   $\mu_{\text{Fe}} H_{\text{Fe}} = H_0$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{\frac{l_{\text{Fe}}}{\mu_{\text{Fe}}} + d} \approx \frac{\mu_0 N I}{d} \quad \mu_{\text{Fe}} \approx 4000 \quad \text{hier fehlt was}$$

Spalt kleiner, dann  $B$  größer

vgl: Luftspule  $B = \frac{\mu_0 N I}{L_{\text{Spule}}}$  hier Verstärkung  $\frac{dL_{\text{Spule}}}{d}$

# Kapitel III

## Elektrodynamik

### III.10 Elektromagnetische Induktion

#### III.10.1 Induktionsgesetz

**1831 Faraday:** in veränderlichem  $\vec{B}$ -Feld wird entlang Leiter Spannung induziert  $U_{\text{ind}}$

**Beobachtung:**  $U_{\text{ind}} \sim \frac{d}{dt}A, \frac{d}{dt}\vec{B}, \frac{d}{dt} \text{Winkel}(\vec{A}, \vec{B})$

$$U_{\text{ind}} \sim \frac{d}{dt}\Phi_M \quad \Phi_M = \int_M \vec{B} d\vec{A}$$

- Wer verursacht  $U_{\text{ind}}$ ?
- $F_L$  auf beweglichen  $e^-$  und ortsfesten  $A^+$
- $e^-$  verschoben  $\rightarrow E$ -Feld bis Gleichgewicht  $F_{el} = F_L$

$$e|\vec{E}| = e|\vec{v}||\vec{B}| \quad U_{\text{ind}} = l|\vec{E}| = l|\vec{v}||\vec{B}|$$

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad l = \text{const.}, \quad |\vec{B}| = \text{const.}$$

$$|U_{\text{ind}}| = |\vec{B}| \frac{d}{dt}(ls) = |\vec{B}| \frac{d}{dt}|\vec{A}| = \frac{d}{dt}\Phi_M \quad \Phi_M = |\vec{B}|A$$

Lorentzkraft bewirkt  $U_{\text{ind}}$ . Hier: aus Änderung von A

- Leiterschleife ( $A = \text{const.}$ ) im  $\vec{B}$ -Feld

$$\boxed{A} \quad \vec{B} \text{ homogen, } \vec{v} \uparrow \uparrow \vec{B} \rightarrow \Phi_M = \text{const.}, \quad U_{\text{ind}} = 0$$

$$\boxed{B} \quad B \text{ inhomogen, } B_z = f(z)B_0 \quad f(z) \text{ stetige, monoton fallend}$$

$$B_z \uparrow \uparrow \vec{v} \text{ keine } F_L, \text{ keine } U_{\text{ind}}$$

$$\text{radiale Komponente } B_r, \quad \vec{B}_r \perp \vec{v} \rightarrow F_L \rightarrow U_{\text{ind}} \neq 0$$

$$\text{aus } \text{div } \vec{B} = 0 \text{ folgt } B_r = \frac{B_0}{r} \int dr \quad r \frac{df(z)}{dz}$$

Ring geschlossen: fließt Induktionstrom  $I_{\text{ind}}$

Offen: Induktionsspannung an Enden

$$F_{el} = e|\vec{E}| = e \frac{|U_{\text{ind}}|}{2\pi r} \stackrel{!}{=} e|\vec{v}|B_r = F_L$$

$$|U_{\text{ind}}| = 2\pi r |\vec{v}| B_r \quad (1)$$

Betrachte Fluss durch Leiterschleife

$$\begin{aligned} \Phi_M &= \int_A \vec{B} d\vec{A} = \oint_A B_z dA = \int d\varphi \int dr r B_0 f(z) \\ \frac{d\Phi_M}{dt} &= \underbrace{2\pi}_{\int d\varphi} B_0 \frac{d}{dt} \int dr r f(z) = 2\pi B_0 \int \frac{df(z)}{dz} \underbrace{\frac{dz}{dt}}_v r dr \\ &= 2\pi B_0 |\vec{v}| \int dr r \frac{df(z)}{dz} = f 2\pi B_r r |\vec{v}| \end{aligned} \quad (2)$$

also aus Vgl (1) und (2)  $|U_{\text{ind}}| = \frac{d\Phi_M}{dt}$

### Lenzsche Regel

- Richtung von  $U_{\text{ind}}$  und  $I_{\text{ind}}$ ?
- Betrachte Leiterschleife  $\vec{A} \uparrow \uparrow z$ -Achse /Symmetrieachse  
Ring nach links bewegen  $\frac{d\Phi_M}{dt} > 0$   
für  $U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_M}{dt}$  Strom Linksschraube um  $\vec{A}$  machen oben  $I$  nach unten,  $e^-$  Lorentzkraft nach vorne Richtung von  $I$  konstant mit Herleitung aus  $F_L$
- Gedanken Experiment:  $\vec{B}_{\text{ind}}(I_{\text{ind}}) \uparrow \downarrow \Delta \vec{B}_{\text{sol}}$  sonst Verletzung der Energieerhaltung

### Lenzsche Regel:

$I_{\text{ind}}$  so gerichtet, dass erzeugte  $\vec{B}_{\text{ind}}$  der Änderung von  $\Phi_M$  entgegenwirkt.

**Zusammenfassung:** Änderung von  $\Phi_M$  in  $A$  erzeugt/induziert  $U_{\text{ind}}$  auf Rand des Leiters gemäß Faradayschen Induktionsgesetzes.

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_M}{dt}$$

- $I_{\text{ind}}$  ist Kreisstrom (z.B. in Ring)  $\rightarrow$  Kreis/Ring förmiges  $\vec{E}$ -Feld  
 $\oint \vec{E} d\vec{s} = U_{\text{ind}} \neq 0$  zunächst Widerspruch zu 1. MX-Gl.  
aber bisher:  $\Phi_M = \text{const.} \rightarrow U_{\text{ind}} = 0$   
neuer Term in MW-Gl.

$$\oint_{dA} \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} d\vec{A} + \text{satz von Stokes}$$

$$\oint_{dA} \vec{E} d\vec{s} = \int_A \text{rot} \vec{E} d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} d\vec{A}$$

$$A \text{ beliebig} \Rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{E} = -\frac{d}{dt} \vec{B}}$$

1. MW- Gl.:

„zeitlich veränderliche  $\vec{B}$ -Feld erzeugt elektrisches Wirbelfeld“

## „Wirbelströme“

- bisher: Leiterschleifen, Spulen
- generell: in geschlossenem Leiter erzeugte elektrische Wirbelfeld Kreisströme / Wirbelströme
- Wirbelströme erzeugen  $\vec{B}$ -Feld gemäß Lenzscher Regel  
[Folie: Wirbelstrom bremsen des ICE3]

### III.10.2 Selbstinduktion

- Schleife/ Spule mit Induktion und separates veränderliches Magnetfeld
- aber: Induktion im Feld-erzeugenden Leiter  $\rightarrow$  Selbstinduktion

Betrachte Spule: Strom  $I \rightarrow \vec{B}$ -Feld erzeugt

$$\Phi_M \sim |\vec{B}| \sim I \quad \boxed{\Phi_M \equiv LI}$$

(selbst-)Induktion  $L [L] = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 1\text{H}$  (Henry)

#### Lenzsche Regel

$$\boxed{U_{\text{ind}} = \frac{d\Phi_M}{dt} = -L \frac{dI}{dt}}$$

$L$  abhängig von Geometrie des Leiters, zeitlich konstant

**Maschenregel**  $U_0 = U_L + U_R$

**Gegenspannung**  $U_L = -U_{\text{ind}}$

$$\rightarrow U_0 = U_R - U_{\text{ind}} = RI + L \frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I + \frac{U_0}{L} \quad (\text{DGL})$$

Lösungsansatz:  $I(t) = Ae^{-\chi t} + B$

$$\frac{dI}{dt} = -\chi Ae^{-\chi t}$$

Einsetzen:  $-\chi Ae^{-\chi t} = -\frac{R}{L}Ae^{-\chi t} - \frac{R}{L}B + \frac{U_0}{L}$

für  $B$ :  $\rightarrow \chi = \frac{R}{L} \quad A_{\text{bel}} B = \frac{U_0}{R}$

$$\rightarrow I(t) = \frac{U_0}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

starker Anstieg, asymptotisch gegen  $\frac{U_0}{R} (\hat{=} L = 0)$

## Ausschaltvorgang

[Folie: Ausschaltvorgang]

**Knotenregel**  $I_1 = -I_2$

**Maschenregel**  $0 = U_2 - U_1 = R_2 I_2 - U_{\text{ind}} - R_1 I_1 = R_2 I_2 + L \frac{dI_2}{dt} - R_1 I_1$

$$\frac{d}{dt} I_2(t) = -\frac{R_1 + R_2}{L} I_2(t)$$

**Lösung**  $I_2(t) = \frac{U_0}{R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} t}$   $I_2(0) = \frac{U_0}{R_2}$

## Beispiele für Induktivitäten

1. Solenoid spule

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I \quad \text{Wicklungsdichte } \eta = \frac{N}{l}$$

$$\Phi_M = \int_A \vec{B} d\vec{A} = \mu_0 \eta A I \quad \vec{B} \uparrow\uparrow \vec{A}, \quad \vec{B} \text{ homogen}$$

in jeder Windung Spannung induziert

$$\begin{aligned} U_{\text{ind}} &= -N \frac{d\Phi_M}{dt} = -\mu_0 N \eta A \frac{dI}{dt} \\ &= -\mu_0 \eta^2 l A \frac{dI}{dt} \end{aligned}$$

$$\text{Da } U_{\text{ind}} = -L \frac{dI}{dt}, \quad L = \mu_0 \eta^2 V$$

2. Koaxialkabel  $L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \ln \frac{R}{R_s} \right) l$

3. Lecherleitung  $L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \ln \frac{d-r_0}{r_0} \right]$  minimal für  $d = 2r_0$

## III.10.3 Feldenergie

- Betrachte Schaltvorgänge in Spule

– Einschalten  $\rightarrow$  Aufbau  $\vec{B}$ -Feld Energie im  $\vec{B}$ -Feld gespeichert

– Ausschalten  $U_{\text{ext}} = 0$ , Stromfluss  $\rightarrow$  Energiefreisetzung

Strom durch  $R_1$  und  $R_2$  in Serie  $\rightarrow P = I^2 R$   $R = R_1 + R_2$

$$W_m = \int_0^\infty I^2(t) R dt = \int_0^\infty I_0^2 e^{-\frac{2R}{L} t} R dt = -I_0^2 \frac{LR}{2R} e^{-\frac{2R}{L} t} \Big|_0^\infty$$

$$W_m = \frac{1}{2} I_0^2 L$$

Solenoid:  $L = \mu_0 n^2 A l$   $B = \mu_0 n I_0$   
dann  $w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} I_0^2 \mu_0 = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2$

Ergebnis ist allgemeingültig

$$\text{Zsfg: } W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2$$

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2$$

$$\text{mit } \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$W_{\text{ges}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 (|\vec{E}|^2 + c^2 |\vec{B}|^2)$$

$$\text{Kondensators } W_{\text{el}} = \frac{1}{2} C U^2$$

$$\text{spule } W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L I^2$$

$c$  für Lichtgeschwindigkeit

### III.10.4 Maxwell-Gleichungen

- Gl. für statische Situation
  - + Faradays Induktionsgesetz
  - + neuer Term „Verschiebungsstrom“ aus Theo. Argument (Maxwell)

Betrachte:

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I$$

**Links** ringförmigen Weg am Leiter  $\oint \vec{B} ds = 0$   
Widerspruch zu Ampèreschen Gesetz/ Maxwell-Gl.

**Rechts** keinen Strom  $I$  im Kondensator aller el. Fluss  $\Phi_{\text{el}}$  durch Zylinderfläche  $\rightarrow$  zusätzlicher Beitrag  $\frac{d\Phi_{\text{el}}}{dt}$  nur wenn  $\frac{d\Phi_{\text{el}}}{dt} \neq 0$  fließt  $I$  und erzeugt  $\vec{B}$ -Feld

**Rechnung**  $I_V = \frac{dQ}{dt}$   $\frac{dQ}{dt}$  Änderung auf Kondensatorplatten

$$|\vec{E}| = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \quad Q = |\vec{E}| A \epsilon_0$$

$$\begin{aligned} I_V &= \frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} (|\vec{E}| A) \\ &= \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E} d\vec{A} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_{\text{el}}}{dt} \end{aligned}$$

Addition von  $I_V$  zu normalen Strom in MW-Gl.

$$\boxed{\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 (I + I_V) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_{\text{el}}}$$

Diff. Form:  $I = \int_A \vec{j} d\vec{A}$  und Stokes'scher Satz

$$\int_A \text{rot } \vec{B} d\vec{A} = \mu_0 \int \vec{j} d\vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} d\vec{A}$$

A beliebig:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E}$$

Finale Form der MW-Gl. im Vakuum Kopplung von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  durch „ $\frac{d}{dt}$ “-Terme

## III.11 Wechselstromkreise

### III.11.1 Wechselstrom

- periodische Änderung der Polarität der Spannungsquelle meist Sinusförmig:

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 \sin \omega t & \frac{1}{T} &= f \text{ Frequenz} \\ I(t) &= I_0 \sin \omega t & \frac{2\pi}{T} &= 2\pi f = \omega \end{aligned}$$



$I_0$  bzw.  $U_0$  Maximal o. Spitzenwerte

Leistung am ohmschen Widerstand  $P(t) = U(t)I(t)$

Spitzenwert  $U_0 I_0 = \frac{U_0^2}{R} = R I_0^2$

$$P(t) = \frac{U_0^2}{R} \sin^2 \omega t = R I_0^2 \sin^2 \omega t$$

$$\begin{aligned} \overline{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_0^2}{R} \sin^2 \omega t \, dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R} = \frac{1}{2} I_0^2 R = \frac{1}{2} U_0 I_0 \end{aligned}$$

→ Effektivwerte: Werte die Gleichstrom hat mit gleichem Leistungsverbrauch

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

[Folie: Netzspannung in Deutschland]

[Folie: Drei-Phasen-Wechselspannung]

[Folie: Generator zur Erzeugung der Netzwechselspannung]

### III.11.2 Diodenschaltungen

**Diode** Bauelement, dass Strom nur in eine Richtung fließt Schaltsymbol durchlässig

[Folie: Kennlinie und Schaltsymbol]

$U_{Ak} > 0,5\text{V}$  Diode wird leitend

$U_{Ak} \gg 0,7\text{V}$   $I_{\text{in}}$   $I - U$ -Charakteristik  $I = k(U - 0,7\text{V})$

$U_{Ak} < 0,5\text{V}$  fließt Sperrstrom  $I_{\text{sperr}} \approx pA \rightarrow \mu A$

$U_{Ak} \ll 0$  Durchbruch

#### Gleichrichter

[Folie: Brückengleichrichtung]

- Ziel: Erzeugung von Gleichspannung aus Wechselspannung

##### i) Einweggleichrichtung

- nur in pos. Halbperiode Diode leitend
- $U_{\text{aus}}^{\text{max}} = U_{\text{ein}} - 0,7\text{V}$
- Glättung durch Kondensator  $U_{\text{aus}}(t) = U_{\text{max}} e^{-t/RC} \approx U_{\text{max}} (1 - \frac{t}{RC})$

##### ii) Grätzschaltung

- in jeder Halbperiode 2 Dioden leitend
- $U_{\text{max}}^{\text{aus}} = U_{\text{ein}} - 1,4\text{V}$

– Glättung wie oben

iii) **Villardschaltung**

Einschalten:  $U_C$  bis  $U_0 - 0,7V$  geladen

Maschenregel:  $U_{\text{aus}} = U_{\text{ein}} + U_C = U_{\text{ein}} + U_0 \approx U_0 + U_0 \cos \omega t$

→ Spannungsschub um  $U_0$

+ Gleichrichter → Greinacher Schaltung

$$U_{D_1} = U_0 + U_0 \cos \omega t$$

$$U_{\text{max}}^{\text{aus}} = 2U_0(-1, 4V)$$

iv) **Kaskadenschaltung nach Greinacher**

1. Stufe  $U_{A_0} = 2U_0 - 1,4V$  gleichgerichtet

$U_{D_2} = 2U_0 \sim \omega t$  → Eingang für 2. Stufe

2. Stufe  $U_{AB} = 2U_0 - 1,4V$  gleichgerichtet

→  $U_{B_0}^{\text{max}} = 4U_0 - 2,8V$  viele Kaskaden → Hochspannung

Begrenzung: Feldstärke in letzter Stufe

Anwendung: Cockroft-Walton-Kaskade in Beschleunigern

### III.11.3 Zeigerdiagramme

- komplexe Schaltungen → Rechnen mit  $\cos, \sin$  und Additionstheorem schwierig  
→ komplexe Schreibweise  $\sin$  und  $\cos$  als Realteile der komplexen Exponentialfunktion

$$\text{z.B. } U_0 \cos \omega t = \text{Re}(U_0 e^{i\omega t}) \quad U_0 \sin \omega t = \text{Re}(U_0 e^{i\omega t - \pi/2})$$

$$\exp(ia) = \cos a + i \sin a \quad \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = \sin a$$

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\Phi} \quad \Phi = \arctan \frac{b}{a}$$

oft  $\text{Re}$  weggelassen:  $U = U_0 e^{i\omega t}$

– nur Hilfsmittel, an Ende Realteil bilden

– Veranschaulichung im Zeigerdiagramm

### III.11.4 Komplexe Widerstände

**Kondensator:** Gilt:  $U = \frac{Q}{C} \quad \frac{d}{dt} : \frac{dU}{dt} = \frac{I}{C}$

$$U(t) = U_0 \cos \omega t \quad \text{gegeben}$$

$$I(t) = C \frac{dU}{dt} = -\omega U_0 C \sin \omega t = I_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Spitzenwert  $I_0 = \omega C U_0$   $I$  teilt  $U$  um  $\frac{\pi}{2}$  ( $90^\circ$ ) voraus

**Spule:** Maschenregel:  $U - U_L = 0 \quad U_L = -U_{\text{ind}}$

$$-U_{\text{ind}} = L \frac{dI}{dt} = U(t)$$

Geg:  $U(t) = U_0 \cos \omega t$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{L} U(t) = \frac{U_0}{L} \cos \omega t$$

$$I(t) = \int \frac{U_0}{L} \cos \omega t dt = \frac{U_0}{L\omega} = \frac{U_0}{L\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Spitzenwert  $I_0 = \frac{U_0}{\omega L}$  Spannung eilt Strom um  $\frac{\pi}{2}$  voraus

**Impedanz  $Z$ :** Widerstand für Bauteil um  $\frac{U}{I}$  zu beschreiben. naiv:  $\frac{U(t)}{I(t)}$  „Widerstand“ zeitabhängig, negativ

alternativ:  $Z = \frac{U(t)}{I(t)}$  wobei  $U, I$  komplexwertige Funktionen sind.

i) **Kondensator mit Kapazität  $C$**   $U(t) = U_0 e^{i\omega t} \quad I(t) = \omega C U_0 e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}$

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} \frac{1}{e^{i\pi/2}} = \frac{1}{i\omega C}$$

$$\omega \rightarrow 0 : Z_C \nearrow \infty \quad \omega \rightarrow \infty : Z_C \searrow 0$$

ii) **Spule mit Induktivität  $L$**

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} \quad I(t) = \frac{U_0}{\omega L} e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

$$Z_L = \omega \frac{1}{e^{-i\pi/2}} = i\omega L$$

$$\omega \rightarrow 0 : Z_L \searrow 0 \quad \omega \rightarrow \infty : Z_L \nearrow \infty$$

iii) **Ohmscher Widerstand**

$$Z_R = R \quad (\text{trivial})$$

Kirchhoffsche Gesetze auch hier gültig (da auf Q- und E-Erhaltung basierend) Berechnung von Netzwerken mit KHG und den Impedanzen.

### III.11.5 Frequenzfilter

**Bem:** periodisches Signal mit beliebigem Amplitudenverlauf aus Überlagerung von cos- und sin-förmigen Signalen

→ **Fourierzerlegung**

#### Komplexe Widerstände

- Ändern das Frequenzspektrum
- Beeinflussen Form des Signals/Größe in Abhängigkeit von  $\omega$

**Hochpass:** Spannungsteiler mit  $Z_1 = \frac{1}{i\omega C} \quad Z_2 = R$

$$\text{Übertragungsfaktor } k = \frac{U_{\text{aus}}}{U_{\text{ein}}} = \frac{Z_{\text{aus}}}{Z_{\text{ges}}}$$

$$k = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} \frac{R + \frac{i}{\omega C}}{R + \frac{i}{\omega C}} = \frac{R^2 + i\frac{R}{\omega C}}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{\omega^2 C^2 R^2}{\omega^2 C^2 R^2 + 1} + i \frac{\omega C R}{\omega^2 C^2 R^2 + 1}$$

$$|k| = \frac{|U_{\text{aus}}|}{|U_{\text{ein}}|} \quad |k|^2 = \frac{\omega^2 C^2 R^2}{\omega^2 C^2 R^2 + 1} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \quad \omega_0 \equiv \frac{1}{RC}$$

Phase  $\Phi$       $\tan \Phi = \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \frac{1}{\omega CR} = \frac{\omega_0}{\omega}$   
 für  $\omega \rightarrow \infty$     $|k| \rightarrow 1$  „Hochpass“  
 für  $\omega \rightarrow 0$     $Z_C \rightarrow \infty$  Kondensator sperrt  
 für  $\omega$  klein eilt Spannung um  $\frac{\pi}{2}$  hinterher

**Def: Grenzfrequenz  $\omega_{\text{Gr}}$**    Frequenz bei der  $|k(\omega_{\text{Gr}})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$   
 Hochpass:  $\omega_{\text{Gr}} = \omega_0 = \frac{1}{RC}$

### Tiefpass:

- a) RC-Serienschaltung mit Abgriff über C
- b) LR-Serienschaltung mit Abgriff über R

$$Z_1 = i\omega L \quad Z_2 = R \quad k = \frac{R}{R + i\omega L}$$

$$|k|^2 = \frac{R^2}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \omega_0 \equiv \frac{R}{L}$$

$\tan \Phi = \frac{-\omega L}{R} = -\frac{\omega}{\omega_0}$   
 für  $\omega \rightarrow 0$     $|k| \rightarrow 1$     $\Phi \rightarrow 0$  Tiefpass  
 für  $\omega \rightarrow \infty$     $|k| \rightarrow 0$     $\Phi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

### Bandpass:

1. R-L-C-Serienschaltung
2. nur Durchlass in einem gewissen Frequenzbereich
3. zwei frequenzabhängige Impedanzen  $\sim \omega, \sim \frac{1}{\omega}$

$$|k| = \frac{R}{\sqrt{R^2[\omega L - \frac{1}{\omega C}]^2}} \quad \tan \Phi = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}$$

4.  $|k| = 1$  maximal bei  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  dort Sprung in  $\Phi$  von  $+\pi/2 \rightarrow -\pi/2$
5. Breite des Bereichs in  $\omega$  mit  $|k| > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Delta\omega = \sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}$$

### III.11.6 Blindleistung

- Bestimmung von Leistung  $P$  an Impedanz  $Z$
- Gleichspannung:  $P = UI$  zeitlich konstant
- An Impedanz  $Z$ :  $U(t) = U_0 \cos \omega t$   $I(t) = I_0 \cos(\omega t - \Phi)$

Mittlere Leistung  $\bar{P} \equiv \frac{1}{T} \int_0^T U(t) I(t) dt$

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t - \Phi) \dots = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \Phi$$

ohmscher Widerstand  $Z = R$   $\Phi = 0$   $\bar{P} = \frac{U_0 I_0}{2} \equiv U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$

- für reine C, reine L  $\Phi = \pm \frac{\pi}{2} \rightarrow \bar{P} = 0$
- Blindleistung: Leistung von C und / oder L aufgenommen wird

•

$$Z = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{I_0 e^{i(\omega t - \Phi)}} = \frac{U_0}{I_0} e^{+i\Phi}$$

Wirkwiderstand  $\text{Re}(z) = \frac{U_0}{I_0} \cos \Phi$

Blindwiderstand  $\text{Im}(z) = \frac{U_0}{I_0} \sin \Phi$

- Wirkleistung  $\bar{P} = \frac{1}{2} I_0^2 \text{Re}(z) = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{\text{Re}(z)}$
- Blindleistung  $\bar{Q} = \frac{1}{2} I_0^2 \text{Im}(z) = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{\text{Im}(z)}$

[Folie: Wirk- und Blindleistung]

**Leistungsanpassung** Betrachte Spule mit  $R \ll \omega L \rightarrow$  geringe Wirkleistung aber eventuell sehr großer Strom

- optimale Leistungsübertragung  $\rightarrow$  weitere Anpassungsimpedanz  $Z_A$  in Reihe an Last  $\bar{P} = \frac{1}{2} I_0^2 \text{Re}(Z_L)$

$$I(t) = \frac{U(t)}{Z_A + Z_L} \rightarrow I_0 = \frac{U_0}{|Z_A + Z_L|}$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{|Z_A + Z_L|^2} \text{Re } Z_L = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{(\text{Re } Z_A + \text{Re } Z_L)^2 + (\text{Im } Z_A + \text{Im } Z_L)^2} \text{Re } Z_L$$

$\bar{P}$  maximal wenn  $\text{Im}(Z_A) = -\text{Im}(Z_L)$

Impedanz verhalten, die  $\Delta\Phi$  kompensiert.

hier: Kondensator mit  $\frac{1}{\omega C} = \omega L$ .

weiterhin:  $\text{Re}(Z_A) = 0$  damit  $\bar{P}(Z_n) = 0$

wenn  $R_z$  gegeben, dann  $R_L = R_Z$  maximal  $\bar{P}$

### III.11.7 Transformator

**Ziel** Strom oder Spannung erhöhen/erniedrigen

**Prinzip** Induktion zwischen gekoppelten Spulen

[Folie: Transformator - Schaltzeichnung und technische Umsetzung]

#### Ideale, unbelasteter Trafo

- ideal: reine  $L$ , keine  $R$
- unbelastet:  $I_2 = 0$ , keinen Verbraucher

Primärspule:  $U_1(t) = U_0 \cos \omega t$

$$I_1 \rightarrow \Phi_{m,1} \rightarrow U_{\text{ind},1} = -N_1 \frac{d\Phi_{m,1}}{dt} = -U_1$$

Also

$$\frac{d\Phi_{m,1}}{dt} = -\frac{U_{\text{ind},1}}{N_1} = \frac{U_1}{N_1}$$

Flussänderung in Spule 1 = Flussänderung in Spule 2

$$\frac{d\Phi_{m,1}}{dt} = \frac{d\Phi_{m,2}}{dt}$$

Induziert

$$U_2(t) = -N_2 \frac{d\Phi_{m,1}}{dt} = -\frac{N_2}{N_1} U_1(t) \text{ also } \frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1} \quad \Delta\phi = \pi \text{ gegenphasig}$$

ideal: kein Leistungsverbrauch

$$U_1(t) I_1(t) = U_2(t) I_2(t) \rightarrow \frac{I_2(t)}{I_1(t)} = -\frac{N_1}{N_2}$$

großes  $N_2/N_1 \rightarrow$  Erzeugung von Hochspannung

kleines  $N_2/N_1 \rightarrow$  Erzeugung von hohen Strömen

aber: wenn  $I_2 \neq 0$  dann Gegeninduktion

#### Realer, belastender Trafo

a)  $R \neq 0 \rightarrow$  Maschenregel

$$U_1(t) - R_1 I_1(t) = N_1 \frac{d\Phi_{m,1}}{dt} \quad (*) \text{ Primärspule}$$

$$U_2(t) - R_2 I_2(t) = N_2 \frac{d\Phi_{m,1}}{dt} \quad (*) \text{ Sekundärspule}$$

b) Gegeninduktion

$$\text{Gilt: } U_L = -U_{\text{ind}} = L \frac{dI}{dt} = N \frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$LI = N\Phi_m$$

$I_2 \neq 0$ : Überlagerung der magnetischen Flüsse

→ Beiträge zu  $U_{\text{ind}}$  in beiden Spulen

Sei  $\Phi_{ij}$  der Fluss erzeugt durch  $I_j$  in Spule i

$L_{11}, L_{22}$  Selbstinduktivitäten

$L_{12}, L_{21}$  Gegeninduktivitäten

perfekte koppelung, keine Verluste von  $\Phi_m$  dann  $L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_{11}L_{22}}$

$$N_1 \Phi_{m,1} = N_1 [\Phi_{m,11} + \Phi_{m,12}] = L_{11} I_1 + L_{12} I_2$$

$$N_2 \Phi_{m,2} = N_2 [\Phi_{m,21} + \Phi_{m,22}] = L_{21} I_1 + L_{22} I_2$$

Einsetzen in (\*) → Transformator gleichungen

$$U_1 - R_1 I_1 = L_{11} \frac{dI_1}{dt} + L_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

$$U_2 - R_2 I_2 = L_{21} \frac{dI_1}{dt} + L_{22} \frac{dI_2}{dt}$$

Für Spitzenwerte  $U_0, I_0$  mit  $U_1 = U_0 e^{i\omega t}$

$$U_1 - R_1 I_1 = i\omega L_{11} I_1 + \omega L_{12} I_2$$

$$U_2 + R_2 I_2 = -i\omega L_{21} I_1 - \omega L_{22} I_2$$

Phasenverschiebung  $U_2$  zu  $U_1$  von  $\pi \rightarrow , - "$  Zeichen

Für weitere Diskussion  $R_1^{\text{spule}} = R_2^{\text{spule}} = 0$  aber Last  $Z$  Sekundärkreis

Nutze  $U_2 = Z I_2$  und nach Strömen auflösen

$$I_1 = \frac{i\omega L_{22} + Z}{i\omega L_{11} Z + \omega^2 (L_{12}^2 - L_{11} L_{22})} U_1$$

$$I_2 = \frac{i\omega L_{12}}{i\omega L_{11} Z + \omega^2 (L_{12}^2 - L_{11} L_{22})} U_1 \quad (\text{evtl. auch } U_1)$$

Darus Übersetzungsverhältnisse für  $U_i, I_i$

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{i\omega L_{12}}{i\omega L_{22} + Z} \quad \frac{U_2}{U_1} = -\frac{i\omega L_{12} Z}{i\omega L_{11} Z + \omega^2 (L_{12}^2 - L_{11} L_{22})}$$

**Def:** Kopplungsgrad  $k \rightarrow \frac{L_{12}}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}$   $0 < k < 1$   $k = 1$  vollständige Kopplung  $k = 0$  entkoppelt

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{iL_{12}}{iL_{11} + \omega^2 (k^2 - 1) \frac{L_{11}L_{22}}{Z}}$$

Beträge:

$$\frac{|I_2|}{|I_1|} = \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{Z^2 + \omega^2 L_{12}^2}} \quad \frac{|U_2|}{|U_1|} = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_{11}^2 + \omega^2 \frac{L_{11}^2 L_{22}^2}{|Z|^2} (1 - k^2)}}$$

a)  $k = 1$   $L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_{11}L_{22}}$

$$\left| \frac{U_2}{U_1} \right| = \frac{L_{12}}{L_{11}} = \sqrt{\frac{L_{22}}{L_{11}}} = \frac{N_2}{N_1} \text{ wie beim idealen unbelasteten Trafo}$$

unabhängig von Last  $Z$

$$\frac{|I_2|}{|I_1|} \xrightarrow{|Z| \rightarrow 0} \frac{N_1}{N_2} \text{ sonst } I_2 \text{ kleiner wegen Last } Z$$

b)  $k < 1$

i)  $Z = R \quad \frac{|U_2|}{|U_1|}$  sinkt mit sinkendem  $R$

$$\tan \phi_{U_1, U_2} = -\frac{\omega L_{22}(L - k)}{R}$$

$k = 1 \quad \phi = \pi$  unabhängig von  $R$

$k < 1 \quad \phi < \pi$

ii)  $Z = i\omega L$

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{L_{12}/L_{11}}{1 + L_{22}/L_{11}(1 - k^2)}$$

$\Delta\phi = \pi$  unabhängig von Last

iii)  $Z = \frac{1}{i\omega C}$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{L_{12}}{L_{11} - \omega^2 C L_{11} L_{22}(1 - k^2)}$$

$U_2/U_1$  größer als bei Leerlauf  $|Z| = \infty$

Resonanzverhalten  $\omega_R = \frac{1}{\sqrt{C L_{22}(1 - k^2)}}$

Anwendungen/Experimenten:

1. „Hörnerblitz“  $N_1 = 500 \quad N_2 = 2300 \quad U_1 = 230 \text{ V} \rightarrow U_2 \approx 10 \text{ kV}$

2. „Punktschweißen“  $N_1 = 500 \quad N_2 = 5 \quad U_1 = 230 \text{ V} \rightarrow U_2 \approx 10 \text{ kV}$

3. Leistungsübertragung über Kabel

Ziel:  $P_{\text{el}} = U_I$  übertragen

Leitung mit  $R_L \rightarrow$  Leistungsverlust  $I^2 R_L = \Delta P_{\text{el}}$

Relativer Leistungsverlust:

$$\frac{\Delta P_{\text{el}}}{P_{\text{el}}} = \frac{I^2 R_L}{UI} = \frac{I R_L}{U} = \frac{R_L}{U^2} P_{\text{el}}$$

d.h. bei gegebener Leistung  $P_{\text{el}}$  sinkt  $\Delta P_{\text{el}}$  mit  $\frac{1}{U^2}$

[Folie: Leistungsübertragung]

## III.12 Elektromagnetische Schwingungen

### III.12.1 Einfache Schwingungen

RLC-Serienschaltung  $\rightarrow$  Bandpass (ohne  $R$ )

- Exp: Resonanz bei  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} (\approx 2,2 \text{ kHz}) \quad \Delta\phi = 0$

- Suche  $I(t)$



Knotenregel  $I$  gleich in allen Bauteilen

$$\text{Maschenregel } U_{\text{ext}} = \underbrace{U_L}_{-U_{\text{ind}}} + U_C + U_R = L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} Q + RI$$

[Folie: Serienschwingkreis]

$$\frac{d}{dt} : \quad \frac{dU_{\text{ext}}}{dt} = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I$$

$$U_{\text{ext}} = U_0 \sin \omega t \quad (??? \cdot \frac{1}{C})$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = \frac{U_0 \omega}{L} \cos \omega t$$

inhomogene DGL 2. Ordnung für den Strom  $I(t)$

**Lösung:** mit komplexwertigem Ansatz

zunächst  $U_{\text{ext}} = U_0 e^{i\omega t}$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = \frac{iU_0 \omega}{L} e^{i\omega t}$$

Ansatz :  $I(t) = I_0 e^{i(\omega t - \Phi)}$

Bilden zeitliche Ableitung und Einsetzen

$$\left( \underbrace{i\omega L}_{Z_L} + \underbrace{\frac{1}{i\omega C}}_{Z_C} + \underbrace{R}_{Z_R} \right) I_0 = U_0 e^{i\Phi}$$

wie erwartet für Impedanzen in Serie

$I(t) = \frac{U(t)}{Z_{\text{ges}}}$  Resonanz wenn  $Z_{\text{ges}}$  minimal

$$\left. \frac{dZ_{\text{ges}}}{d\omega} \right|_{\omega_R} \stackrel{!}{=} 0 \quad iL\omega_R - \frac{1}{i\omega_R C} = 0 \Leftrightarrow \omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

## Freie, ungedämpfte Schwingung

- LC-Kreis  $R = 0$  keine externe Anregung
- Kondensator laden, bei  $t = 0$  mit Spule verbinden  
→ Schwingungen
- periodisches Umladen des Kondensators, periodische Ströme in Spule  
[Folie: El.-mag. Schwingkreis und mech. Modell eines Oszillators im Vergleich]
- Maschenregel  $U_C + U_L = 0 \quad U_L = -U_{\text{ind}}$   
 $\frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0$
- Lösungsansatz:  $Q = Q_0 \cos \omega t$   
Einsetzen:  $-Q_0 \omega^2 \cos \omega t + \frac{1}{LC} Q_0 \cos \omega t = 0$   
also:

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad f = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Thomson-Formel

harmonische Schwingung mit Randbedingung  $Q(t=0) = Q_0$  andere Startbedingung:  $Q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \phi)$   
 $I(t) = \frac{dQ}{dt} = -Q_0 \omega \sin(\omega t + \phi) = Q_0 \omega \cos(\omega t - \frac{\pi}{2} + \phi)$   
d.h. I eilt  $U_C$  bzw.  $Q_C$  um  $\frac{\pi}{2}$  hinterher

### Gedämpfte Schwingung $R \neq 0$

- RLC-Kreis  $Q(t=0) = Q_{\max}$
- $t=0$  Kreis schließen  $\rightarrow$  Schwingung mit abnehmender Amplitude
- Maschenregel:  $U_L + U_C + U_R = 0$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\gamma} \frac{dQ}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} Q = 0$$

$\gamma$  ist die Dämpfungskonstante,  $2\gamma$  Dämpfungsterm

$$\frac{d}{dt} : \frac{d^2 I}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = 0$$

homogene DGL 2. Ordnung für Strom I

Lösungsansatz:  $I(t) = ae^{\lambda t}$

Fallunterscheidung:  $I(0) = I_0$

- i) starke Dämpfung/Kriechfall  $\gamma > \omega_0 \quad \frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$I(t) = I_0 e^{-\gamma t} \cosh \alpha t \quad \alpha^2 = \gamma^2 - \omega_0^2$$

- ii) kritische Dämpfung/aperiodischer Grenzfall

$$\gamma = \omega_0 \quad \frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$I(t) = I_0(1 + \gamma t)e^{-\lambda t}$$

- iii) Schwache Dämpfung/Schwingfall

$$\gamma < \omega_0 \quad R/2L < \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$I(t) = I_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$$

Frequenz  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  kleiner als bei freien schwingungen.

Zeitkonstante der Dämpfung  $\gamma = \frac{R}{2L}$

### Erzwungene Schwinung

- Serien- und Parallelschwingkreis

- Nach dem Einschwingverhalten stationäre Lösung  
d.h. Amplitude unabhängig von Zeit

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} \quad I(t) = \frac{U(t)}{Z_{\text{ges}}}$$

Kreis schwingt mit externer Frequenz  $I_0 = \frac{U_0}{|Z_{\text{ges}}|}$

- Serienkreis  $Z_{\text{ges}} = i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R$   
Parallelkreis  $Z_{\text{ges}} = (i\omega L)^{-1} + (\frac{1}{i\omega C})^{-1} + (R)^{-1}$   
Resonanzverhalten in beiden Fällen

### Serienkreis

$$\frac{dI_0}{d\omega} \stackrel{!}{=} 0$$

Maximum bei  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$   $I_0 \stackrel{?}{=} \frac{U_0}{R}$

$$U_C(t) = \frac{I_0(\omega_0)}{\omega_0 C} = \frac{U_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$U_L(t) = \omega_0 L I_0(\omega_0) = \frac{U_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Bem:  $U_C, U_L \gg U_0$  werden  $\rightarrow$  Spannungsresonanz

umgesetzte Leistung (nur R)

$$\begin{aligned} P_{\text{wirk}} &= \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \Phi & \cos \Phi &= \frac{R}{|Z_{\text{ges}}|} \\ &= \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{|Z_{\text{ges}}|^2} R \end{aligned}$$

maximal bei  $\omega_0$ , dann  $Z_{\text{ges}}$  minimal

### Parallelkreis

- Resonanzfrequenz  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Strom über R und  $P_{\text{wirk}}$  minimal bei  $\omega_0$  großer Strom im Kreis von Kondensator und Spule  
 $I_C(\omega_0) = I_L(\omega_0) = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}$   
 $I_C \gg I_R$  Stromresonanz

**Bem:** In Mechanik: Resonanzfrequenz verschoben

Hier: beide Fälle  $\omega_{\text{Resonanz}} = \omega_0^{\text{Thomson}}$

Mechanik: Resonanz def. über max. Auslenkung von Pendel/Feder

E-Dynamik: Analogon wäre el. Ladung Q. Aber: Resonanz def. über  $I = \frac{dQ}{dt}$  Resonanz für Q auch bei  $\omega_R < \omega_0^{\text{Thomson}}$

[Folie: Gekoppelte Schwingkreise]

### III.12.2 Gekoppelte Schwingungen

Zwei induktiv gekoppelte Schwingkreise magnetischer Fluss durch beide Spulen  
 → Schwingung in Kreis 1 durch gemeinsamen magnetischen Fluss bzw. Gegeninduktivitäten  $L_{12}, L_{21}$  auf Kreis 2 übertragen

[Folie: Induktive gekoppelte Schwingkreise]

Differentialgl. aus Maschenregel in Kreis 1 und 2

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 + \frac{Q_1}{C_1} + L_{12} \frac{dI_2}{dt} = 0$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 + \frac{Q_2}{C_2} + L_{21} \frac{dI_1}{dt} = 0$$

Terme 1 bis 3 wie bei Serienschwingkreis und letzter Term aus Gegeninduktion

$$\frac{d}{dt} : L_1 \frac{d^2 I_1}{dt^2} + R_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{I_1}{C_1} = -L_{12} \frac{d^2 I_2}{dt^2}$$

$$\frac{d}{dt} : L_2 \frac{d^2 I_2}{dt^2} + R_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{I_2}{C_2} = -L_{21} \frac{d^2 I_1}{dt^2}$$

Lösungsansatz:  $I_1(t) = \hat{I}_1 e^{i\omega t}$   $I_2(t) = \hat{I}_2 e^{i\omega t}$

Einsetzen in DGL und sortieren

$$\underbrace{\begin{pmatrix} R_1 + i(L_1\omega - \frac{1}{\omega C_1}) & iL_{12}\omega \\ iL_{21}\omega & R_2 + i(L_2\omega - \frac{1}{\omega C_2}) \end{pmatrix}}_{\text{Impedanzmatrix } \mathcal{M}} \begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Triviale Lösung:  $\hat{I}_1 = \hat{I}_2 = 0$

Nicht triviale Lösung: Bedingung  $\det \mathcal{M} = 0$

$$\det \mathcal{M} = \left( R_1 + i(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}) \right) \left( R_2 + i(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}) \right) + \omega^2 L_{12} L_{21} \stackrel{!}{=} 0$$

allgemeiner Lösungsansatz:

hier fehlt was

Thomsonfrequenz  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Kopplungsparameter  $k = \frac{L_{12}}{L}$

Wir haben 2 Eigenfrequenzen ( $k \ll 1$   $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \omega_0 k$ )

$k = 0$ : Entkopplung Schwingung bei  $\omega_0$

$k \rightarrow 1$ :  $\omega_2 \rightarrow \infty$   $\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$  verständlich 1 Kreis mit doppelter Kapazität

$0 < k < 1$ : Beobachtung beider Frequenzen bzw. Überlagerung → Schwebung

$$\cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$$

Nun Anregung in Kreis 1:  $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$

obige Matrix-Gl mit rechter Seite  $\begin{pmatrix} U(t) \\ 0 \end{pmatrix}$

Gekoppelte DGL mit Inhomogenität  $U(t)$

Allgemeine Lsg: = Allg. Lsg der homogenen DGL (A) + Spezielle Lsg der inhomogenen DGL (B)

(A) freie, gedämpfte Schwingung (s.o.)

Amplitude abklingend ( $R \neq 0$ )  $\rightarrow$  Einschwingvorgang für  $t$  groß  $A(t) \rightarrow 0$ : d.h. kein Beitrag

(B)  $t$  groß dominant. Stationäre Lösung Amplitude zeitlich konstant, abhängig von  $\omega$

Hier: Bestimmung von (B)

„homogene“ Zeile der DGL:

$$I_1 = -\frac{R_2 + i(L_2\omega - \frac{1}{\omega C_2})}{iL_{21}\omega} \hat{I}_2$$

Einsetzen in „inhomogene“ Zeile

$$-\{R_1 + i(L_1\omega - \frac{1}{\omega C_1})\} \frac{R_2 + i(L_2\omega - \frac{1}{\omega C_2})}{iL_{21}\omega} \hat{I}_2 + iL_{12}\omega \hat{I}_2 = U(t)$$

Daraus  $\hat{I}_2$  messen als  $U_2$  an  $R_2$

$$-\{R_1 + i(L_1\omega - \frac{1}{\omega C_1})\} \{R_2 + i(L_2\omega - \frac{1}{\omega C_2})\} - L_{12}L_{21}\omega^2 = iR_2L_{21}\omega \frac{U(t)}{U_2} \quad (*)$$

Spezialfall  $R \equiv R_1 = R_2$   $C \equiv C_1 = C_2$   $L \equiv L_1 = L_2$   $L_{12} = L_{21}$

Definiere Blindwiderstand  $x \equiv \omega L - \frac{1}{\omega C}$

(\*) vereinfacht zu

$$-(R + ix)^2 - L_{12}^2\omega^2 = iRL_{12}\omega \frac{U(t)}{U_2}$$

Multipliziere mit  $(-\frac{i}{RL_{12}\omega})$  und Kehrwert bilden

$$\frac{U_2}{U(t)} = \frac{RL_{12}\omega}{i(R^2 - X^2 + \omega^2 L_{12}^2 - 2RX)}$$
$$\frac{|U_2|}{|U(t)|} = \frac{RL_{12}\omega}{\sqrt{(R^2 - X^2 + \omega^2 L_{12}^2)^2 + 4R^2 X^2}}$$

Bei  $\omega = \omega_{1/2}$  Signifikante Übertragung von Leistungen aus Kreis 1 und Kreis 2

### III.12.3 Ungedämpfte Schwingungen

$\rightarrow$  [Folie: Erzeugung einer ungedämpften Schwingung durch manuelle Pulsierung]

[Folie: Erzeugung einer ungedämpften Schwingung mittels Rückkopplung]

## III.13 Elektromagnetische Wellen

1864 Vorhersage von el-magnetischen Wellen J.C.Maxwell

1886 Nachweis von Heinrich Hertz (heute Mikrowellen  $\lambda \sim \mathcal{O}(10 \text{ cm})$ )

1888 Untersuchung der Ausbreitung durch E.lecher

Ausbreitungsgeschwindigkeit  $\approx$  Lichtgeschw.  $c$

$\rightarrow$  Licht ist eine el.-mag. Welle

$v_{\text{Welle}} = f\lambda$   $\lambda$  Wellenlänge,  $f$  Frequenz

### III.13.1 Lecher-Leitung (LL)

Induktive Kopplung von offener/geschlossener LL an Schwingkreis mit Frequenz  $f$

**Exp:**

$f \approx 250\text{MHz}$  Annahme:  $v_{\text{Welle}} = c \rightarrow \lambda \approx 120\text{cm}$

Beobachtung:

Spannungsmaxima (Bäuche) und -minima (Knoten)

Strom minima (Knoten) und -maxima (Bäuche)

Abstand der Knoten  $\approx 60\text{ cm} \approx \frac{\lambda}{2}$  erwartet

Nur für „gute“ Länge der LL Knoten und Bäuche

Erklärung:

- Bildung eines periodischen Strom bzw. Ladungsverschiebung
- offenes Ende  $I = 0 \rightarrow$  Spannungsband
- geschlossenes Ende  $U = 0 \rightarrow$  Strombauch
- Entstehung einer stehenden Welle wenn  $l_{LL}$  auf  $\lambda$  abgestimmt ist  
2 abgeschlossene Enden:  $l_{LL} = n \frac{\lambda}{2}$   
[Folie: Lecher-Leitung und davor]

#### Mathematische Beschreibung

Ersatzschaltbild  $\rightarrow$  [Folie: Lecher-Leitung: Ersatzschaltbild]

$l \equiv \frac{L}{z} = \frac{\mu_0 \mu}{\pi} \ln\left(\frac{2a}{d}\right)$   $c = \frac{C}{z} = \frac{\pi \epsilon_0 \epsilon}{\ln\left(\frac{2a}{d}\right)}$   $d$  Durchmesser der Leiter,  $a$  Abstand der Leiter

$r = \frac{R}{z}$   $g = \frac{G}{z}$   $G = \frac{1}{R_{\text{Luft}}}$

ideal:  $r \rightarrow 0$   $g \rightarrow 0$

#### Telegraphengleichung (TGl):

Leiterstück  $dz$  Taylorentwicklung (an Stelle  $z$ ) für  $U(z+dz)$ ,  $I(z+dz)$  bis lin. Term

$$U(z+dz) = U(z) + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

$\partial U$  durch

i) Abfall über  $r$

ii) Induktion in  $l$

$$R = \frac{\partial U}{\partial I} \quad G = \frac{\partial I}{\partial U}$$

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial z} = -rI - l \frac{dI}{dt}} \quad (1)$$

$$I(z+dz) = I(z) + \frac{\partial I}{\partial z} dz$$

Stromfluss über c und g

$$\boxed{\frac{\partial I}{\partial z} = -\frac{U}{g} - c \frac{dU}{dt}} \quad (2)$$

$$I_C = C \frac{\partial U}{\partial t} \quad \frac{1}{g} \rightarrow g \quad \frac{\partial I}{\partial z} = \delta U_{\pm}$$

Ableiten von (1) und (2) nach  $\frac{d}{dt}$  bzw  $\frac{d}{dz}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= -r \frac{\partial I}{\partial z} - l \frac{\partial^2 I}{\partial z \partial t} & \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} &= -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial z} - c \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial t} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial z} &= -r \frac{\partial I}{\partial t} - l \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 I}{\partial t \partial z} &= -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - c \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \end{aligned}$$

„Gemischte“ Ableitung aus Zeile 2 in Zeile 1 einsetzen und Ersetzen von 1. Abl durch (1) und (2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= -r \left( -\frac{U}{g} - c \frac{\partial U}{\partial t} \right) - l \left( -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - c \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} &= -g \left( -r I - l \frac{\partial I}{\partial t} \right) - c \left( -r \frac{\partial I}{\partial t} - l \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \right) \end{aligned}$$

Entkopplung von U und I in DGL

TGL:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= grU + (rc + gl) \frac{\partial U}{\partial t} + lc \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} &= grI + (rc + gl) \frac{\partial I}{\partial t} + lc \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Beschreibung der Ausbreitung von Signalen auf LL

## Wellengleichung

approximative Lsg. der TGL für  $r = 0, g = 0$

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = lc \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = lc \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}}$$

homogene Wellengleichung

hier:  $\partial U, \partial I$  in z-Richtung

Für bel. Richtung der LL:  $\Delta U(\vec{r}, t) = lc \frac{\partial^2 U(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad \Delta I(\vec{r}, t) = lc \frac{\partial^2 I(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$

Lösungsansatz:  $U(z, t) = U_0 e^{i(\omega t \mp kz - \phi)} \quad I(z, t) = I_0 e^{i(\omega t \mp kz - \phi)}$

Einsetzen von  $U(z, t)$  in Wellen-Gl

$$k^2 = lc \omega^2 \quad v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$v_{ph}$  Phasengeschwindigkeit der Welle

Werte für lecher-Leitung einsetzen

$$\begin{aligned} v_{ph} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\pi} \ln\left(\frac{2a}{d}\right) \frac{\pi \epsilon_0 \epsilon}{\ln\left(\frac{2a}{d}\right)}}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} c \end{aligned}$$

in Medium  $v_{\text{ph}} < c$

$v_{\text{ph}}$  unabhängig von Geometrie der LL

„ $\mp kz$ “-Lösungen: „-“ Ausbreitung in pos. z-Richtung, „+“ Ausbreitung in neg. z-Richtung

$$\text{Wellengleichung: } \left( \Delta - \frac{1}{v_{\text{ph}}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U(\vec{r}, t) = 0$$

Bisher: ideale, unendlich lang

Nun: Verbraucher aus Ende mit Impedanz  $Z_V$

Betrachte LL: Stromquelle mit Innenwiderstand  $Z_L$

$$Z_L = \frac{U}{I} = \frac{\partial U / \partial z}{\partial I / \partial z} = \frac{-rI - l \frac{\partial I}{\partial t}}{\text{den}}$$

hier fehlt was

$$Z_L = \sqrt{\frac{r + il\omega}{g + ic\omega}} \stackrel{\text{ideal}}{=} \sqrt{\frac{l}{c}}$$

$$\text{Für LL: } = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} \frac{\ln \frac{2a}{d}}{\pi} = 377 \Omega \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\ln \frac{2a}{d}}{\pi}$$

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega \text{ Wellenwiderstand des Volumens}$$

Vollständige Leistungsanpassung:  $Z_L = Z_V$

$Z_V \neq Z_L$ : nur Teil der Leistung in  $Z_V$  umgesetzt der Rest der Leistung reflektiert

Extremfälle:  $Z_V = 0$  (Kurzschluss) und  $Z_V = \infty$  (offene LL)

$Z_V = 0$  :  $U(Z_V) = 0$  Spannungsknoten

$Z_V = \infty$  :  $I(Z_V) = 0$  Stromknoten

komplette oder teilweise Reflexion der Welle

→ Überlagerung von einlaufender und auslaufender Welle → stehende Welle (wie in Mechanik bei Seilen)

### Rechnung: zur Entstehung der stehenden Welle

einlaufend:  $U_{\text{ein}}(z, t) = U_0 e^{i(\omega t - kz)}$

Annahme vollständige Reflexion:  $\Delta\phi = 0$  an losen Ende

rücklaufend:  $U_{\text{rück}}(z, t) = U_0 e^{i(\omega t + kz)}$

Gesamt:  $U_{\text{ges}} = U_{\text{ein}} + U_{\text{rück}} = U_0 e^{i(\omega t)} (e^{ikz} + e^{-ikz}) = 2U_0 \cos kz \cos \omega t$  (übergang zu Realteil)

Dies ist stehende Welle mit  $\omega = 2\pi f$   $k = 2\pi/\lambda$

Weise Beobachtung wenn LL  $\infty$ -lang, offene Leitung

Hier/Exp: geschlossenes Ende  $\Delta\phi = \pi$  bei Reflexion

Endliche Länge → viele Reflexionen und Überlagerungen

Bedingung für stehende Welle/konstruktive Interferenz

1 lose / 1 fest (offen/geschlossen) :  $l = \frac{2n-1}{4} \lambda$

2 lose oder 2 feste (offen/geschlossen) :  $l = n \frac{\lambda}{2}$



## Wellenausbreitung mit Absorption

jetzt:  $r, g \neq 0$   $r, g < \omega L < \frac{1}{\omega L}$

d.h. Term: „ $r \cdot g U(z, t)$ “ vernachlässigbar

Ansatz:  $U = U_0 e^{i(\omega t - \bar{k}z)}$

Einsetzen in Telegraphen Gl. teile durch  $U_0 e^{i(\omega t - \bar{k}z)}$

$$-k^2 = i(rc + lg)\omega - lc\omega^2$$

$$\bar{k} = \sqrt{lc}\omega \sqrt{1 - i\frac{rc+lg}{lc}\omega} \approx \sqrt{lc}\omega - i\frac{1}{2}\frac{rc+lg}{\sqrt{lc}}\omega^2$$

$$(\sqrt{1-x} \approx 1 + \frac{x}{2})$$

Def:  $k = \text{Re } \bar{k} = \sqrt{lc}\omega$

$$\frac{1}{s} = -\text{Im } \bar{k} = \frac{1}{2}\frac{rc+lg}{\sqrt{lc}}\omega^2$$

Dann:  $U(z, t) = U_0 e^{-z/s} e^{i(\omega t - kz)}$

Welle mit Frequenz  $\omega$ , Wellenzahl  $k$  mit Abnehmender Amplitude ( $e^{-z/s}$ )

### **Exp:**

Koaxialkabel  $v^{-1} = 5 \frac{\text{ns}}{\text{m}}$  Länge = 20 m

Rechteckimpuls von 75 ns

[Folie: Signalausbreitung auf Koaxialkabel]

## **III.13.2 Vakuumwellen**

Einleitung: el.-mag. Welle auf Leiter eingeschränkt auch Ausbreitung im Raum (Vakuum/Medien)

[Folie: Vom Schwingkreis zum Hertzschen Dipol]

### Vom Schwingkreis zum Hertzschen Dipol

C vom Kondensator  $\rightarrow$  C Endplatten  $\rightarrow$  C Stab

- L von Spule  $\rightarrow$  L Windung  $\rightarrow$  L Stab  
offener Schwingkreis: C und L pro Länge
- geschlossener Schwingkreis:  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Feld lokalisiert Streufelder vernachlässigbar
- gerader Draht: Ladungen schwingen zwischen Enden  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  im ganzen Raum ausgedehnt. Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit  $c$
- Antenne für stehende Welle  $l = n\frac{\lambda}{2}$   
Sender induktiv an Schwingkreis gekoppelt  
Empfänger: Nachweis von  $U/I$  durch Glimmlage / Glühlampe

[Folie: Stabsendesantenne und -empfängerantenne]

[Folie: Wellenlänge in Wasser]

## Wellengleichung

Betrachte Maxwell Gl. im Vakuum ( $\rho = 0, \vec{j} = 0$ )

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Auswertung:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

3 Maxwell Gl. im Vakuum:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$

$$\boxed{\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}} \quad \text{Wellen gleichung f\"ur } E_x, E_y, E_z$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit durch Faktor von  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$$\boxed{\frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0}$$

Kompakte Schreibweise:

$$\underbrace{\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)}_{\partial' \text{ Alambert/Quabla-Operator}} \vec{E} = 0 \quad \square \vec{E} = 0$$

Analog f\"ur  $\vec{B}$ -Feld :  $\boxed{\square \vec{B} = 0}$  wellen gl. f\"ur  $\vec{B}$ -Feld

Lsg:  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t \mp \vec{k} \cdot \vec{r})}$  Ausbreitung in + bzw. -  $\vec{k}$ - richtung

## Ebene Welle

Sei  $\vec{k} = k \vec{e}_z$

Ebene Welle: Amplitude konstant in Wellenfront f\"ur feste Zeit; Wellenfront: Ebene  $\perp \vec{k}$   
[Folie: Ebene Welle in z-Richtung]

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0 \quad \text{f\"ur festes } z \text{ und } t$$

3MW-Gl:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \stackrel{\text{Vakuum}}{=} 0 \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow E_z = \text{const. in } z$

Aus Wellengl.:  $\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \quad E_z = \text{const. in } t = 0$  durch Randbedingungen

$$\rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{E} \perp \vec{k}$  d.h. transversale Welle

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}, t) \stackrel{\text{Ansatz}}{=} \vec{E}_0 i(\mp \vec{k}) e^{i(\omega t \mp \vec{k} \cdot \vec{r})} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{k} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \vec{E}_0 \perp \vec{k}$$

für g. Ausbreitungsrichtung 2 lin. unabhängige Lsg.

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = A_x \vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = A_y \vec{e}_y e^{i(\omega t - kz)}$$

$A_i$  konstante Amplituden

Einsetze in Wellengleichung (z.B.  $\vec{E}_1(\vec{r}, t)$ )

$$-A_x \vec{e}_x k^2 - \frac{1}{c^2} (-A_x \vec{e}_x \omega^2) = 0$$

$$\text{d.h. } c = \frac{\omega}{k} \quad \text{bzw.} \quad V_{\text{ph}} \equiv \frac{\omega}{k} = c$$

keine Dispersion im Vakuum  $V_{\text{ph}} \neq V_{\text{ph}}(\omega)$

Räumliche Periodizität

$$\omega t - k(\lambda + z) - (\omega t - kz) = 2\pi \quad k\lambda = 2\pi$$

Zeitliche Periodizität

$$\omega(t + T) - kz - (\omega t - kz) = 2\pi \quad \omega T = 2\pi$$

[Folie: Eben Welle in z-Richtung]

## Polarisation

- lineare Polarisation:  $\vec{E}$  zeigt immer in die selbe Richtung  $\perp \vec{k}$   
 $\vec{E}_1$  und  $\vec{E}_2$  sind linear polarisierte Lösungen

Phasengleiche Überlagerung von  $\vec{E}_1$  und  $\vec{E}_2$

$$\vec{E}_{\text{ges}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = A_x \vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)} + A_y \vec{e}_y e^{i(\omega t - kz)}$$

$\vec{E}$ -Feld schwingt in Richtung

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear Polarisiert

[Folie: Linear polarisierte Wellen]

- zirkulare Polarisation  
 $\vec{E}$ -Vektor dreht sich um  $\vec{k}$  mit konstanter Kreisgeschwindigkeit  $\omega$   
2 unabhängige Lsg: links/rechts zirkular links/rechts polarisiert  
Aus Überlagerung von 2 lin. polarisierten Wellen mit Phasenverschiebung  $\pm \frac{\pi}{2}$

$$\vec{E}'_1(\vec{r}, t) = E_0 \vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\vec{E}'_2(\vec{r}, t) = E_0 \vec{e}_y e^{i(\omega t - kz - \frac{\pi}{2})}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}'_1 + \vec{E}'_2 = (E_0 \vec{e}_x + iE_0 \vec{e}_y) e^{i(\omega t - kz)} = \vec{E}_1 - i\vec{E}_2$$

Richtung von  $\vec{E}_L$  aus Realteil

$$\vec{E}_L = \vec{e}_x E_0 \cos(\omega t - kz) + E_0 \vec{e}_y \sin(\omega t - kz)$$

festes z: Rotation um k-Achse

[Folie: Zirkular Polarisierte Wellen]

$\sigma_{+/-}$  Drehimpuls der Welle  $\sigma_+ : \vec{L} \uparrow \uparrow k$  links zirkular  $\sigma_- : \vec{L} \uparrow \downarrow k$  rechts zirkular  
elliptische Polarisation: wenn  $E_{0,x} = E_{0,y}$  oder  $\Delta\phi = \pm \frac{\pi}{2}$

$\vec{E}$ -Vektor beschreibt Ellipse um k-Achse

$$\vec{E}_{R,el} = A_x \vec{E}_1 + iA_y \vec{E}_2 \quad A_x \neq A_y$$

unpolarisiert: wenn  $\vec{E}$ -Vektor keine zeitlich konstante Richtung und keine Ellipsen periodisch durchläuft, bzw. Richtung in Raum und Zeit statistisch verteilt i.A. Lichtquelle unpolarisiert weil Überlagerung von vielen Emissionen von Atomen/Dipolen.

[Folie: Das Spektrum der el.mag. Strahlung]

[Folie: Messung der Lichtgeschwindigkeit nach B.L. Foucault]

## Stehende Welle

- Reflexion von ebener Vakuumwelle an Metalloberfläche
- Überlagerung von ein- und rücklaufender Welle  
 $\rightarrow$  stehende Welle

z.B. Welle in z-Richtung, lin. polarisiert in x-Richtung

$$\vec{E}_{\text{ein}} = E_0 \vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\vec{E}_{\text{rück}} = -E_0 \vec{e}_x e^{i(\omega t + kz)}$$

Metalloberfläche bildet festes Ende. d.h. Phasensprung  $\Delta\phi = \pi$  da  $\vec{E}_{\text{tangential}} = 0 \Rightarrow „-E_0“$

$$\vec{E}_{\text{ges}} = \vec{E}_{\text{ein}} + \vec{E}_{\text{rück}} = -E_0 \vec{e}_x e^{i\omega t} \underbrace{\left\{ \overbrace{e^{ikz}}^{\text{Rück}} - \overbrace{e^{-ikz}}^{\text{Ein}} \right\}}_{2 \sin kz}$$

$$|\Re(\vec{E}_{\text{ges}})| = 2E_0 \vec{e}_x \sin kz \sin \omega t$$

zwei Metallflächen: Abstand  $a = n \frac{\lambda}{2}$  stehende Welle

## Magnetfeld der Wellen

Betrachte:  $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)}$  lin. pol. in x-Richtung, Ausbreitung in +z-Richtung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = E_0 (\vec{e}_y) e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\text{Maxwell-Gl: } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$$

$B_x, B_z$  zeitlich konstant und können  $= 0$  gewählt werden

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = +ikE_x = ikE_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

Integration t:  $B_y = ikE_0 \int dt e^{i(\omega t - kz)} = \frac{k}{\omega} E_0 e^{i(\omega t - kz)}$

Also:  $\vec{B} = \frac{1}{c} |\vec{E}| \vec{e}_y$  mit  $\frac{\omega}{k} = c$

$\vec{B} \perp \vec{E}; \vec{B}, \vec{E} \perp \vec{k}$

Kompakt:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E})} \quad \text{im Vakuum}$$

$\vec{B}$  und  $\vec{E}$  in Phase schwingen

[Folie: Momentanaufnahme der lin. pol. Welle von E- und B-Feld]

## Hohlraumresonator

- 3-dim „Einsperrung der Welle“  $\rightarrow$  leitender Hohlraum (Metallquader)
- Betrachte Quader:  $l_x, l_y, l_z$  ( $a, b, c$ )  
[Folie: Hohlraumresonator]
- Tangentialkomponente des  $\vec{E}$ -Feldes verschwindet auf Wänden
- El.-mag. Welle wird vielfach reflektiert und überlagert  
 $\rightarrow$  stehende Welle wenn folgende Bedingungen erfüllt sind

$$k_x = \frac{l\pi}{l_x} \quad k_y = \frac{n\pi}{l_y} \quad k_z = \frac{m\pi}{l_z} \quad l, n, m \text{ ganze Zahlen } \geq 0$$

Zsgh:

$$|\vec{k}| = k = \pi \sqrt{\frac{l^2}{l_x^2} + \frac{n^2}{l_y^2} + \frac{m^2}{l_z^2}}$$

Mögliche Frequenzen  $\omega = V_{\text{ph}} k = ck = c\pi$  [siehe oben]  
stehende Welle der Form:

$$E_{lmn} = E_0(l, n, m) \cos \omega t$$

[Folie: Resonanzbedingung im Hohlraumresonator]

$E_0(l, m, n)$  ergibt sich aus den Bedingungen

i)  $\vec{E} \perp \vec{k}$

ii)  $\vec{E}_{\text{tangential auf Wänden}} = 0$

- Frage: wie viele Moden unterhalb Grenzfrequenz  $\omega_0$  gibt es ?  
wichtig bei der Quantenmechanik Entwicklung

Vereinfachung: Würfel  $l_x = l_y = l_z = a$

Bestimme alle  $\vec{k} \leq k_G$   $k_G = \frac{\omega_G}{c}$

Punkte  $(n, m, l)$  im  $\vec{k}$ -Raum mit Gitterkonstanten  $\frac{\pi}{a}$

Für  $\omega_G$  bzw.  $k_G$  groß d.h.  $n^2 + m^2 + l^2 \gg 1$

$N_G$  Anzahl der Gitterpunkte durch  $\frac{V_{\text{Kugel}}(|\vec{k}|)}{V_0}$

$V_0$  Volumen der Einheitszelle im  $\vec{k}$ -Raum:  $V_0 = (\frac{\pi}{a})^3$

$V_{\text{Kugel}}(|\vec{k}|) = \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} k_G^3$   $\frac{1}{8}$  nur pos. Oktanten ( $n, m, l \geq 0$ )

Anzahl der Resonanzmoden ergibt sich dazu:

$$N_G = 2 \frac{V_{\text{Kugel}}(k_G)}{V_0} \quad 2 \text{ für Polarisationsfreiheitsgrade}$$

$$= 2 \frac{\pi}{6} \left( \frac{a\omega_G}{\pi c} \right)^3 = \frac{8\pi f_G^3 a^3}{3c^3} \quad f_G = \frac{\omega_G}{2\pi}$$

$$\text{Modendichte: } \frac{N_G}{V} = \frac{8\pi f_G^3}{3c^3}$$

$$\text{Spektrale Modendichte: } \frac{dN_G/V}{df} = \frac{8\pi f_G^2}{c^3}$$

### III.13.3 Hohlleiter

Hohlraumresonator mit zwei offenen Enden

Ziel: Transport von Mikrowellen

a) planparallele Platten in y/z-Ebene im Abstand d Drehung des Koordinatensystems

$\rightarrow \vec{k} = (k_x, 0, k_z)$   $k_z > 0$

Reflexion an Platten mit Phasensprung  $\pi$

$$k_x \rightarrow -k_x \quad k_z \rightarrow k_z$$

Polarisation in y-Richtung ( $\vec{E} \perp \vec{k}$ )

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0 \vec{e}_y e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)} + E_0 \vec{e}_y e^{i(\omega t + k_x x - k_z z)} \\ &= 2i E_0 \vec{e}_y \sin k_x x e^{i(\omega t - k_z z)} \end{aligned}$$

aus Bedingungen,  $\vec{E}_{\text{tang.}} \stackrel{!}{=} 0$  folgt  $k_x = \frac{n\pi}{d}$  keine Einschränkung auf  $k_z$

Resultat: Welle in z-Richtung mit modulierter Amplitude  $\sin \frac{\pi k_x}{d} x$

Allgemeine Lösung:

a)  $\vec{E} \perp$  Ausbreitung  $E_0 = (E_{x0}, E_{y0}, 0)$

TE-Wellen transversal elektrisch

b)  $E_z \neq 0$  dann  $B_0 = (B_{x0}, B_{y0}, 0)$

d.h.  $\vec{B} \perp$  Ausbreitung

TM-Wellen transversal magnetisch

„ $e^{i(\omega t - k_z z)}$ “ beschreibt Ausbreitung. Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k_z}$

Weiterhin gilt  $c = \frac{\omega}{|k|} = \frac{\omega}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}$

$$\rightarrow v_{\text{ph}} = \frac{c}{k_z} \sqrt{k_z^2 + k_x^2} = c \sqrt{1 + \frac{k_x^2}{k_z^2}} \geq c$$

Aber Gruppengeschwindigkeit

$$v_{\text{Gr}} = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial k_z} = \frac{c^2}{\omega} k_z = \frac{c^2}{v_{\text{ph}}} \leq c$$

kleiner als für Wellen im Vakuum

Mit Bedingung  $k \stackrel{!}{=} \frac{n\pi}{d}$  ergibt sich:

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{d^2}}$$

[Folie: Phasen- und Gruppengeschwindigkeit zwischen parallelen Grenzflächen]

## b) Wellenleiter

- Rechteckiger Querschnitt
- Mechanismus wie bei parallelen Platten Reflexion + Überlagerung → Welle entlang Achse eines Hohlleiters  
zusätzliche Bedingung in y-Richtung

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x, y) e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (*)$$

Tangentialkomp von  $\vec{E} = 0$  auf 4 Wänden

(\*) in Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial y^2} + \vec{E}_0 \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) = 0 \quad (**)$$

wieder TE und TM - Lsg.

Hier: TE- Moden, d.h.  $\vec{E} \perp$  Ausbreitungsrichtung

$$\text{Ansatz: } \vec{E}_0 = \begin{pmatrix} E_0 x \cos k_x x \sin k_y y \\ E_0 y \sin k_x x \cos k_y y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus Randbed.:  $k_x = \frac{n\pi}{e_x}$   $k_y = \frac{n\pi}{e_y}$

$l_x, l_y$  Abmessungen des Hohlleiters

Aus (\*\*) erhalten wir Bedingungen für  $k_z$

$$-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$k_z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2} (k_x^2 + k_y^2)}}$$

Phasengeschwindigkeit:

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2} (k_x^2 + k_y^2)}}$$

Räumliche Periode:

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} (k_x^2 + k_y^2)}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \lambda_0^2 \left( \frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2} \right)}}$$

$\lambda_0$  Wellenlänge im Vakuum bei  $\omega$

$$\lambda_x \equiv \frac{2\pi}{k_x} \quad \lambda_y \equiv \frac{2\pi}{k_y}$$

$$\lambda_z \geq \lambda_0 \text{ da } v_{\text{ph}} \geq c$$

$k_z$  muss reelle Zahl sein

$$\begin{aligned} &\rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} \geq k_x^2 + k_y^2 \\ \frac{\omega^2}{c^2} &\geq \left(\frac{n\pi}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{l_y}\right)^2 \quad \text{oder} \\ f &\geq f_{\text{Grenz}} = c \sqrt{\left(\frac{n}{2l_x}\right)^2 + \left(\frac{m}{2l_y}\right)^2} \end{aligned}$$

Hohlleiter wirkt als Hochpass

$f < f_{\text{Grenz}}(n, m)$  können sich nicht ausbreiten

[Folie: Radiowellen in Erdatmosphäre]

### III.13.4 Energietransport

#### Intensität der Welle

Energiedichte des el-mag. Feldes

$$w = \frac{1}{2} E_0 (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2)$$

Mit  $\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{1}{c} \left( \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{E} \right)$  im Vakuum  $|\vec{B}| = |\vec{E}|/c$

$$w = \epsilon_0 |\vec{E}|^2$$

Ebene Welle unendlich ausgedehnt  $\rightarrow E$  unendlich groß.

Intensität  $\equiv$  Energie der Welle die Pro Zeit  $dt$  durch die Fläche  $A \perp$  zur Ausbreitungsrichtung transportiert wird.

$$I = \frac{E_{\text{em}}}{dt A} = \frac{w_{\text{em}} V}{dt A} = \frac{w_{\text{em}} c dt A}{dt A}$$

Mittellung über Wellenlänge  $\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2}$

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t - k z_0) \quad \text{an Stelle } z_0$$

$$I(t) = I_0 \cos^2(\omega t - k z_0) \quad I_0 = \epsilon c E_0^2$$

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{1}{T} \int_0^T I_0 \cos^2(\omega t - k z_0) dt \\ &= \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} \epsilon c E_0^2 \end{aligned}$$

Für zirkular polarisierte Welle:

$$\bar{I} = \epsilon c E_0^2 \quad \text{da } |\vec{E}| = \text{const.}$$

Intensität  $\sim$  (Amplitude der Welle)<sup>2</sup>



## Poynting-Vektor $\vec{S}$

Def:

$$\vec{S} \equiv \vec{E} \times \vec{H} \stackrel{\text{Vakuum}}{=} \epsilon_0 c^2 (\vec{E} \times \vec{B})$$

Vakuum:

$$\begin{aligned} \vec{E}, \vec{B} \perp \vec{k} &\Rightarrow \vec{S} \uparrow \uparrow \vec{k} \\ S = |\vec{S}| &= \epsilon_0 c^2 |\vec{E}| |\vec{B}| = \epsilon_0 c |\vec{E}|^2 = I \end{aligned}$$

$\vec{S}$  beschreibt Richtung und Betrag des Energieflusses

Betrachte Volumen  $V$

$$E_{\text{em}} = \epsilon_0 \int_V |\vec{E}|^2 dV$$

keine Verbrauch von  $E_{\text{em}}$  in  $V$  lediglich Zu- oder Abfluss

$$-\frac{\partial E_{\text{em}}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \epsilon_0 |\vec{E}|^2 dV = \oint_A \vec{S} d\vec{A} = \int \text{div } \vec{S} dV \quad \text{Gausscher Satz}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 |\vec{E}|^2) = \text{div } \vec{S}$$

[Folie: Impulstransport/Strahlungsdruck und davor]

## Impulstransport

el.-mag. Welle transportiert auch Impuls

$$\text{Impulstransport} \quad \vec{\pi} \equiv \frac{1}{c^2} \vec{S} = \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$\text{Strahlungsdruck} \quad P_{\text{St}} = \frac{F}{A} = \frac{dp}{dt} \frac{1}{A}$$

$$\text{Impulsänderung} \quad dp = |\vec{\pi}| V = |\vec{\pi}| A c dt$$

$$\Rightarrow P_{\text{St}} = \epsilon_0 |\vec{E}|^2 = w_{\text{em}} \quad \text{für Absorption}$$

Spiegel mit Reflexion der Welle  $\Delta p \rightarrow 2\Delta p$

## III.14 Wellenabstrahlung

### III.14.1 Hertzscher Dipol

- offener, gerader Schwingkreis
- $e^-$  im Leitungsband schwingen periodisch
- Trennung der Ladungen:  $e^-$ -überschuss oder  $e^-$ -Mangel  
→ Bildung eines oszillierenden Dipols  $\vec{p} = q\vec{d} \quad \pm q$  Ladungen,  $\vec{d}: -q \xrightarrow{\vec{d}} +q$   
Beachte  $|\vec{d}| \ll l_{\text{stab}}$  typ:  $|\vec{d}| \sim \mu\text{m}$

### III.14.2 Abstrahlung des Hertzschen Dipols

- $q$  spürt Kraftwirkung aus dem  $\vec{E}$ -Feld des Dipols erst nach  $\Delta t = \frac{\text{Abstand}}{c}$

→ Retardierung,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  breiten sich mit Verzögerung im Raum aus

#### Magnetfeld

Bio-Savart für Vektorpotential  $\vec{A}$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

[Folie: Zur Berechnung des B-Feldes]

Stromdichte der  $e^-$  im Stab:

$$\vec{j}(\vec{r}', t) = \underbrace{\vec{v}(\vec{r}', t)}_{\text{Geschw.}} \underbrace{\rho(\vec{r}', t)}_{\text{Ladungsdichte}}$$

Betrachte:

- $|\vec{r} - \vec{r}'| \gg l$  Stab dann
  - a)  $r = |\vec{r}| \gg l$
  - b)  $|\vec{r} - \vec{r}'| \approx |\vec{r}|$  unabhängig von  $\vec{r}'$
- Laufzeit der Wellen im Stab  $\mathcal{T} = \frac{l}{c} \ll T = \frac{2\pi}{\omega}$   
d.h. alle Wellenfronten von unterschiedlicher  $\vec{r}'$  gleichzeitig bei  $\vec{r}$  ankommen

Berücksichtigung der Retardierung

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{v}(\vec{r}', t') \rho(\vec{r}', t') d^3\vec{r}'$$

$$t' = t - \frac{r}{c} \quad \text{Retardierung}$$

Integrand durch oszillierenden Dipol beschreibbar. Dipol in z-Richtung:  $\vec{p}(t) = qd \sin \omega t \vec{e}_z$

Aus  $\frac{d}{dt} \vec{d} = \vec{v}$  folgt:  $\frac{d}{dt} \vec{p} = q \frac{d}{dt} \vec{d} = q \vec{v}$

Raum- → Ladungsintegral  $\rho d^3\vec{r}' = dq$

$$\rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{1}{q} \frac{dp(t - \frac{r}{c})}{dt} \int_{\text{Stab}} dq$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} q d \omega \left\{ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} \vec{e}_z \quad p_0 = qd$$

- $\frac{d}{dt} \vec{p}$  erzeugt  $\vec{A}$  und damit  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ -Felder

- Magnetfeld  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial A_z}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix}$

Bei Ableitung beachten:  $\tau(x, y)$  und Retardierung

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}p(t - \frac{r}{c}) \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \frac{d}{dt}p(t - \frac{r}{c}) \\ -\frac{d}{dt}p(t - \frac{r}{c}) \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \frac{d}{dt}p(t - \frac{r}{c}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t' = t - \frac{r}{c} \quad \frac{d}{dt}p(t - \frac{r}{c}) = \frac{d}{dt'}p(t') \underbrace{\frac{dt'}{dt}}_1 \equiv \dot{p}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial r} = -\frac{1}{c} \quad \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial y} = \frac{1}{2r} 2y = \frac{y}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \dot{p} = -\ddot{p} \frac{1}{c} \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{r}) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{-2r^3} 2y = -\frac{y}{r^3}$$

Ergibt:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{pmatrix} -\dot{p} \frac{y}{r^3} - \ddot{p} \frac{y}{cr^2} \\ +\dot{p} \frac{x}{r^3} + \ddot{p} \frac{x}{cr^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\dot{p}}{r^2} x \vec{e}_r + \frac{\ddot{p}}{cr} x \vec{e}_r \right\}$$

$\vec{B} \perp \vec{p}$  ( $\vec{p} \parallel \dot{\vec{p}} \parallel \ddot{\vec{p}}$ )  $\vec{B} \perp \vec{r}$  Beiträge:

a) „ $\dot{\vec{p}}$ “,  $\sim \frac{1}{r^2}$

Vgl. Bio-Savart  $d\vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^2} dV$

$\dot{\vec{p}} \int \vec{j} dV \Rightarrow \dot{\vec{p}}$  stammt aus Oszillation von  $\vec{j}$

b) „ $\ddot{\vec{p}}$ “,  $\sim \frac{1}{r}$  aus  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  bzw. des Verschiebungsstromes

Vgl: Maxwell-Gl:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

## Elektrisches Feld

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\mu_0}{4\pi} (\dot{p} \frac{z}{r^3} + \ddot{p} \frac{z}{cr^2})$$

In Lorentzbeziehung:

$$\text{div } \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{el}} \quad \text{mit} \quad \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$\rho_{\text{el}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \dot{p} \frac{z}{r^3} + \ddot{p} \frac{z}{cr^2} \right\}$$

Final

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \rho_{\text{el}} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \begin{array}{l} 3\dot{p} \frac{xz}{r^5} + 3\ddot{p} \frac{xz}{cr^4} + \ddot{p} \frac{xz}{c^2 r^3} \\ 3\dot{p} \frac{yz}{r^5} + 3\ddot{p} \frac{yz}{cr^4} + \ddot{p} \frac{yz}{c^2 r^3} \\ p(3\frac{z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}) + \dot{p}(3\frac{z^2}{cr^4} - \frac{1}{cr^2}) + \ddot{p}(\frac{z^2}{c^2 r^3} - \frac{1}{c^2 r}) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 3\left(\frac{\vec{p}}{r^3}\vec{e}_r\right)\vec{e}_r - \frac{\vec{p}}{r^3} + 3\left(\frac{\vec{p}}{cr^2}\vec{e}_r\right)\vec{e}_r - \frac{\dot{\vec{p}}}{cr^2} + \left(\frac{\ddot{\vec{p}}}{cr^2} \times \vec{e}_r\right)\vec{e}_r \right\}$$

Nahfeld: Terme  $\sim \frac{1}{r^2}$  und  $\sim \frac{1}{r^3}$

$$\vec{E}_N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [-\vec{p}^* + 3(\vec{p}^* \vec{e}_r)\vec{e}_r]$$

$$\vec{p}^* \vec{p} + \frac{r}{c} \dot{\vec{p}}$$

$\vec{E}$  und  $\vec{B}$  um  $\frac{\pi}{2}$  verschoben

Fernfeld: Term  $\sim \frac{1}{r}$

$$\vec{E}_F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} [\ddot{\vec{p}} - (\vec{e}_r \cdot \ddot{\vec{p}})\vec{e}_r]$$

$\perp \vec{r}$ ,  $\perp \vec{B}$ ,  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  in Phase wie von Vakuumwelle erwartet

Amplitude  $\sim \frac{1}{r} \Rightarrow$  Intensität  $\sim \frac{1}{r^2}$

$\rightarrow$  Energie und Impuls durch eine Kugelfläche konstant

$$|\vec{E}| = \frac{|\ddot{\vec{p}}| \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}$$

$\theta$  :  $\angle$  Dipolachse und Richtung der Welle

nicht isotrop, maximal  $\perp$  Dipolachse. Verschwindet entlang Dipolachse

[Folie: Nahfeld des Hertzchen Dipol und davor]

## Strahlungsdämpfung

Energiestromdichte:  $|\vec{S}| = \epsilon_0 c |\vec{E}|^2$

Im Fernfeld:  $S = \epsilon_0 c \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ddot{p}}{c^2 r} \sin \theta \right)^2$

mit  $\ddot{p}^2 = -p_0^2 \omega^4 \sin^2(\omega(t + \frac{r}{c}))$

Mittlung über Schwingungsperiode  $\overline{\ddot{p}^2} = \frac{1}{2} p_0^2 \omega^4$

Beachte Skalierung mit  $\omega^4$

$\rightarrow$  signifikante Abstrahlung bei hohen Frequenzen

$$p = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

- Energie wird der Schwingung des Dipols entzogen  
 $\rightarrow$  Dämpfung der Schwingung  
aber Kompensation durch gekoppelte Schwingkreis
- Berechnung für freie Schwingung  
Bei  $t = 0$  Schwingung mit Amplitude  $p_0$  dann schwache Dämpfung  $p(t) = p_0 e^{-\gamma t}$   
Da  $E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \sim |\text{Amplitude}|^2$   
gilt  $E_{\text{tot}} = E_{\text{tot}}(t=0) e^{-2\gamma t}$   
Abgestrahlte Leistung  $P > 0$   
 $-P = \frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = -2\gamma E_{\text{tot}} \quad \gamma = \frac{1}{2} \frac{P}{E_{\text{tot}}}$

In Mechanik:  $E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 d^2$

Daraus  $\gamma = \frac{q^2\omega^2}{12\pi\epsilon_0 m_e c^3}$

$m_e$  Masse el.,  $q$  Ladung des Dipols

- Wie sieht das Frequenzspektrum aus ?

– naiv: nur  $\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

– Dämpfung bewirkt Verbreitung. Antenne sendet eine Welle aus mit esp. abklingender Amplitude.

Mechanik:

$$d = \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + (2\gamma\omega)^2}}$$

$d$  Amplitude,  $\omega_0$  Resonanzfrequenz

$K$  Stärke der Anregung  $= \frac{E_0 q}{m}$

Einsetzen in  $P = +2\gamma E_{\text{tot}}$

$$P = \frac{q^2\omega^2 K^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + (2\gamma\omega)^2}$$

bei  $\omega_{1/2} = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} \pm \gamma$  fällt  $P$  auf die Hälfte  $\Delta\omega = 2\gamma$  volle Breite auf halber Höhe

[Folie: Lebensdauer eines atomaren Zustands]

### III.14.3 Beschleunigte Ladungen

Elektrostatik  $\varphi(\mathbf{r})$  aus  $\rho(\mathbf{r}')$  via Poisson-Integrals

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

Bewegte Ladungen  $\rightarrow$  Modifikationen

i) Retardierung:  $\mathbf{r}'(t - \frac{r}{c})$   $\rho(\mathbf{r}'(t - \frac{r}{c}))$

ii) „Deformation“ des Integrationsvolumens  $dV'_R$

[Folie: Verlängerung der Strecke in Bewegungsrichtung]

Verlängerung von  $d^3\mathbf{r}'$  in Richtung von  $\vec{v}$  der Ladungsbewegung

$$dV'_R = \frac{d^3\mathbf{r}'}{1 - \frac{(\vec{r} - \mathbf{r}') \cdot \vec{v}}{|\vec{r} - \mathbf{r}'| c}}$$

$$\Rightarrow \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}'(t - \frac{r}{c}))}{|\vec{r} - \mathbf{r}'(t - \frac{r}{c})|} \frac{1}{|\vec{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\vec{v}}{c} d^3\mathbf{r}'$$

Für eine Punktladung  $q$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qC}{|\vec{r} - \vec{r}'|c - (\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{v}} \Big|_{\text{ret}}$$

analog ergibt sich

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qC}{|\vec{r} - \vec{r}'|c - (\vec{r} - \vec{r}')\vec{v}} \Big|_{\text{ret}} \\ &= \frac{\vec{v}}{c^2} \varphi(\vec{r}, t)\end{aligned}$$

Liénard-Wiedert-Potentiale für Pkt. ladungen

Felder der bewegten Ladung

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Einsetzen und lange rechnen ...

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qw}{(\vec{\omega} \cdot \vec{u})^3} \left\{ (c^2 - v^2)\vec{u} + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right\}_{\text{ret}}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{e}_w \times \vec{E} \quad \vec{v}, \vec{a} \text{ Geschwindigkeit, Beschleunigung der Ladung } q$$

$$\vec{w} \equiv \vec{r} - \vec{r}'_{\text{ret}} \quad \vec{u} \equiv c\vec{e}_w - \vec{v}$$

2 Beiträge:

- i) Term  $\sim \vec{u}$  Nahfeld  $|\vec{E}|, |\vec{B}| \sim \frac{1}{w^2}$   
Energiefluss  $\sim \frac{1}{w^4} \rightarrow 0$  für Kugelschale mit  $R \rightarrow \infty$
- ii) Term  $\sim \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{a})$  Fernfeld  $|\vec{E}|, |\vec{B}| \sim \frac{1}{w}$   
Energiefluss  $\sim \frac{1}{w^2} \rightarrow$  konstant durch Kugelschalen  
 $\rightarrow$  Dieser Term bestimmt Abstrahlung  $\sim |\vec{a}|$  bewirkt Energieverlust von  $q$

2 Spezialfälle:

- i) ruhende Ladung  $n = c\vec{e}_w \parallel \vec{r} - \vec{r}'$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qw}{c^3(\vec{w}\vec{e}_w)} c^2(c\vec{e}_w) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{w^2} \vec{e}_w$$

$$\vec{B} = 0 \quad \text{wie in Elektrostatik}$$

- ii) konstante Geschwindigkeit  $\vec{r}'(t) = \vec{v}t$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qw}{(\vec{w}\vec{u})^3} (c^2 - v^2)\vec{u} \Big|_{\text{ret}}$$

$$\text{Es gilt: } w\vec{u} = c\Delta\vec{r} \quad \Delta\vec{r} \equiv \vec{r} - \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$$

$$\text{weiterhin: } \vec{w}\vec{u} = c\Delta\vec{r} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta}$$

$$\theta = \angle \vec{v} \text{ und } \vec{E}$$

$$\text{Ergibt: } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \frac{q}{\Delta r^2} \Delta\vec{r}$$

[Folie: Elektrische Feldlinien bewegter Punktladungen] Für  $|\vec{v}| \rightarrow c$   $E_{\text{trans}}$  wächst,  $E_{\text{long}}$  nimmt ab

## Abstrahlung

- im Fernfeld,  $\sim |\vec{a}|$  der Pkt.ladung Energiefluss aus Pointingvektor

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \epsilon_0 c^2 (\vec{E} \times \vec{B}) = \epsilon_0 c (\vec{E} \times (\vec{e}_w \times \vec{E})) \\ &= \epsilon_0 c (\vec{E}^2 \vec{e}_w - (\vec{e}_w \vec{E}) \vec{E})\end{aligned}$$

im Fernfeld gilt  $\vec{E} \perp \vec{w} \rightarrow 2. \text{ Term} = 0$

$$\boxed{\vec{S} = \epsilon_0 c |\vec{E}|^2 \vec{e}_w}$$

$\vec{E}$  abhängig von  $\vec{v}$  und  $\vec{a}$  der Ladung

- wenn  $\vec{v} = \vec{0}$  dann  $\vec{u} = c\vec{e}_w$  aber Abstrahlung  $\neq 0$
- wenn  $\vec{a} = \vec{0}$  dann Abstrahlung  $= 0$   
 $\vec{a} \neq \vec{0}$  dann Abstrahlung in gewisse Richtung

$$\boxed{\text{Beschleunigteel.Ladungenstrahlenel.mag.Wellenaus}}$$

Abgestrahlte Leistung in  $d\Omega = d\varphi \sin \theta d\theta$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \epsilon_0 c |\vec{E}|^2 w^2$$

$\vec{S}$  gibt Leistung von Bewegung  $Q$  in Richtung  $d\varphi, d\theta$  aus Sicht der Ladung.  
 Suche: Leistung an Ort  $\vec{r}$  (ruhender Beobachter).

Leistung unterschiedlich da Art Dopplereffekt:

→ Abstände Wellentäler ändert sich

→ zusätzlicher Faktor

$$\frac{dP}{d\Omega} = \epsilon_0 c |\vec{E}|^2 w^2 \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}}{wc} \quad (\text{ohne Ableitung})$$

Betrachte 2 Spezialfälle:

i)  $\vec{a}$  parallel  $\vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{a} = c(\vec{w} \times \vec{a}) \text{ und } \vec{w} \cdot \vec{u} = w(c - \vec{e}_w \vec{v})$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 c^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{\{\vec{e}_w \times (\vec{e}_w \times \vec{a})\}}{(c - \vec{e}_w \vec{v})^5} = \frac{q^2 |\vec{a}|^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)^5}$$

$\theta = \angle \vec{v}$ , Beobachtungsrichtung

$v \rightarrow 0 : \sim \sin^2 \theta$  Senkrecht zu  $\vec{a}$

$v \rightarrow \infty$  : Nenner  $\rightarrow 0$  für  $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow$  Vorwärtsabstrahlung

$$\boxed{P = \int \frac{dP}{d\Omega} \Omega = \frac{q^2 c^2 \gamma^6}{6\pi \epsilon_0 c^3}}$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E_{\text{ges}}}{mc^2} \geq 1 \quad \beta = \frac{v}{c} \leq 1$$

Beachte:  $\gamma^6 = (\frac{E}{m})^6$  Abhängigkeit

„Bremstrahlung“ wenn  $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{v}$

Gleich für Beschleunigung und Abbremsung ( $|\vec{a}|^2$ )

[Folie: Bremsstrahlung in Materie] [Folie: Röntgenröhren]

- ii)  $\vec{a} \perp \vec{v}$   $|\vec{v}| = \text{const.}$  Kreisbewegung  
 $\vec{v} \sim \vec{e}_w$  und  $\vec{a} \sim \vec{e}_x$   $\vec{w}$  in Polarkoordinaten

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}$$

$$P = \frac{q^2 a^2 \gamma^4}{6\pi \epsilon_0 c^3}$$

„Synchrotronstrahlung“: 1964 erstmals an Kreisbeschleuniger beobachtet

- $\gamma^4 = (\frac{E}{m})^4$  Abhängigkeit  
limitiert maximale Energie von Kreisförmigen  $\frac{e^+}{e^-}$ -Beschleunigern
- Abstrahlungscharakteristik  
 $\beta \approx 0 : \sim 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi$   
 $\varphi = 0 : 1 - \sin^2 \theta$  (wieder  $\perp \vec{a}$ )  
 $\varphi = 90^\circ : 1$   
 $\varphi = 45^\circ : (\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}) 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta$   
 $\beta \rightarrow 1 : \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3}$   
Strahlung in Vorwärtsrichtung gebündelt  
[Folie: Abstrahlung bei v senkrecht a]  
[Folie: Kosmische Synchrotronstrahlung]  
[Folie: Strahlentod der Atomen]

## III.15 Elektro-magnetische Wellen in Materie

### III.15.1 Brechungsindex/Brechzahlen

- wie verändert sich Welle im Medium?
- Wissen bereits:

–

$$v_{\text{ph}}^{\text{med}} = c = c_{\text{med}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad c_0 \text{ Lichtgeschw. im Vakuum}$$

- Dipol im Wasser:  $\lambda < \lambda_0$   $\lambda_0$  Vakuumwellenlänge
- $e^-$  in Atomen zu periodischen Schwingungen angeregt

$$\omega_{e^-} = \omega_{\text{ext Welle}}$$

→ Abstrahlung von Sekundärwellen

- Brechzahl  $n = \frac{c_0}{c_{\text{med}}}$  da  $\omega = \text{const.}$  folgt  $\lambda_{\text{med}} = \frac{\lambda_0}{n}$

[Folie: Anregung von Atomschwingungen]



## Reaktion des Mediums

$e^-$ -Schwingung durch Welle in z-Richtung, in x linear polarisiert

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Dx = -eE_0 e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = K e^{i\omega t} \quad K = -\frac{eE_0}{m}$$

$b$  beschreibt die Dämpfung die durch Energieübertragung auf Festkörper entsteht

$D$  beschreibt die Stärke der atomaren Rückstellkraft

$E_0$  ist die Amplitude der Anregenden Welle

## Lösung:

$$x(t) = x_0(\omega) e^{i\omega t}$$

$$x_0(\omega) = \frac{k}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}$$

Phasenverschiebung:

$$\phi(\omega) = \pi + \arctan \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$|x_0(\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

→ Emission von Sekundärwellen von allen  $e^-$  im Medium  $\omega/\omega_0$  klein → positive Phasenverschiebung  $\Delta\phi > 0$  klein

[Folie: Überlagerung von Primärwelle und Sekundärwelle(n)]

Überlagerung der Wellen bewirkt:

- Phase wird in jeder Schicht verzögert
- Abstand der Maxima/Wellenlänge wird reduziert
- Welle  $\perp$  Ausbreitungsrichtung interferieren zu 0

⇒  $\lambda$  und  $c$  im Medium sind reduziert um  $n$

## Makroskopische Welle

[Folie: Phasenverzögerung im Medium]

Strecke  $\Delta z$  im Medium

Vakuumwelle bräuchte:  $t_0 = \frac{\Delta z}{c_0}$

Mediumwelle braucht:  $t_{\Delta z} = \frac{\Delta z}{c} = \frac{n\Delta z}{c_0} = t_0 + \underbrace{\frac{(n-1)\Delta z}{c_0}}_{\Delta t}$

Welle beim Eintritt:  $E(t) = E_0 e^{i\omega t}$  bei  $z = 0$

Beim Austritt:  $E(\Delta z, t) = E_0 e^{i\omega(t-t_{\Delta z})} = \underbrace{E_0 e^{i\omega(t-\frac{\Delta z}{c_0})}}_{\substack{\text{ungestörte Welle} \\ \text{im Vakuum}}} e^{-i\omega(n-1)\frac{\Delta z}{c_0}}$   
||  
≡  $e^{-i\phi}$  Phasenverzögerung

$$\phi = \omega(n-1)\frac{\Delta z}{c_0} = 2\pi(n-1)\frac{\Delta z}{\lambda_0}$$

Dünne Schicht:  $\phi \ll 1 \Rightarrow e^{-i\phi} \approx 1 - i\phi$

Welle hinter Medium:

$$E(\Delta z, t) = \underbrace{E_0 e^{i\omega(t - \frac{\Delta z}{c_0})}}_{\text{Primärwelle}} - \underbrace{i\omega(n-1) \frac{\Delta z}{c_0} E_0 e^{i\omega(t - \frac{\Delta z}{c_0})}}_{\text{Effekt von Sekundärwellen}}$$

## Mikroskopische Modell:

[Folie: Zur Berechnung des E-Feldes der Sekundärwelle]

- Betrachte  $\vec{E}$ -Feld eines Hertzischen Dipols (Dipol  $p_0 = -ex_0$ ) im Fernfeld  $z_0 \gg x_0$  am Punkt  $z_0$  vom Dipol bei  $z = 0, \rho, \varphi$

$$\vec{E}_{1D}(z_0, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e\omega^2 x_0}{c_0^2 r} e^{i\omega(t - \frac{r}{c_0})} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\rho^2}{r^2} \cos^2 \varphi \\ -\frac{\rho^2}{r^2} \sin \varphi \cos \varphi \\ \rho \frac{z_0}{r^2} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Kreisring bei  $\rho$  summieren/integrieren

Kreisscheibe mit Dichte  $\Delta z$ :  $dV = \Delta z d\varphi \rho d\rho$

Anzahl der Dipole in Kreisscheibe:  $dN = n_{\text{at}} dV$   $n_{\text{at}} \hat{=}$  Atomdichte auf z-Achse  
konstruktive Überlagerung da  $\Delta t$  gleich

$\Rightarrow$  resultierende Welle  $dN$  mal Welle für 1 Dipol

$$d\vec{E}_0(z_0, t) = n_{\text{at}} \vec{E}_{1D}(z_0, t)$$

$$\vec{E}_D = n_{\text{at}} \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \rho \vec{E}_{1D}(z_0, t)$$

$\vec{E}_D$  in x-Richtung.  $\int d\varphi$  bewirkt  $E_y = E_z = 0$

$$\vec{E}_0(z_0, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-ex_0\omega^2}{c_0^2} n_{\text{at}} \Delta z e^{i\omega t} \Big\} \equiv A$$

$$\int_{z_0}^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2} \cos^2 \varphi\right) e^{-i\omega \frac{r}{c_0}} \vec{e}_x$$

Änderung der Integrationsvariablen  $\rho \rightarrow r$

$$\rho d\rho = r dr \quad \text{da} \quad r^2 = \rho^2 + z_0^2 \quad z_0 = \text{const.}$$

Integration über  $d\varphi$  durchführen:

$$\vec{E}_D(z_0, t) = A \int_{z_0}^\infty dr \pi \left(1 + \frac{z_0^2}{r^2}\right) e^{-i\frac{\omega}{c_0} r} \vec{e}_x$$

Für  $\infty$ -ausgedehnte Welle divergiert Integral. Durchmesser der Lichtwelle  $2\rho_{\text{max}}$ , nur Dipole mit  $\rho < \rho_{\text{max}}$  teil  $z_0^2 \approx r^2$  im Fernfeld  $\left(1 + \frac{z_0^2}{r^2}\right) \approx 2$

Berücksichtige nur untere Integrationsgrenze

$$\vec{E}_D(z_0, t) = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{ex_0\omega^2}{c_0^2} n_{\text{at}} \Delta z e^{i\omega t} \left(i \frac{c_0}{\omega}\right) e^{-i\frac{\omega}{c_0} r} \vec{e}_x$$

Mit Amplitude  $x_0$  der  $e^-$ -Schwingung

$$\vec{E}_D(z_0, t) = -i \frac{e^2 \omega^2 n_{\text{at}}}{2\epsilon_0 m} \frac{\Delta z}{c_0} E_0 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} e^{i\omega(t - \frac{z_0}{c})} \vec{e}_x$$

Vergleich zwischen makroskop. und mikroskop. Beschreibung

$$\frac{e^2 \omega n_{\text{at}} \Delta z}{2\epsilon_0 m c_0} E_0 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} \stackrel{!}{=} \omega(n-1) \frac{\Delta z}{c_0} E_0$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 1 + \frac{e^2 n_{\text{at}}}{2\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}} \quad \text{komplexe Größe}$$

- abhängig von  $n_{\text{at}}, \omega_0, \gamma$
- Achtung: gilt strikt nur für Medien mit  $n-1 \ll 1$  Hier nur eine Eigenfrequenz  
→ Verallgemeinerung

$$n = 1 + \frac{e^2}{2\epsilon_0 m} \sum_{j=1}^N \frac{n_{j,\text{at}}}{\omega_j^2 - \omega^2 + 2i\gamma_j \omega_j}$$

für  $N$  Eigenfrequenzen  $\omega_j$ , mit Dämpfung  $\gamma_j$  und Dipoldichte  $n_{j,\text{at}}$

## Absorption und Dispersion

Aufspaltung  $n = \underset{\substack{\parallel \\ (n_r)}}{n'} - i\kappa$

Realteil:

$$n' = 1 + \frac{e^2 n_{\text{at}}}{2\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}$$

Imaginärteil:

$$\kappa = \frac{e^2 n_{\text{at}}}{2\epsilon_0 m} \frac{4\gamma^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} = 0 \quad \text{für} \quad \gamma = 0$$

Welle bei Austritt aus Medium:

$$\begin{aligned} \vec{E}(z_0, t) &= E_0 e^{\omega\kappa \frac{\Delta z}{c_0}} e^{-i\omega(n'-1)\frac{\Delta z}{c_0}} e^{i\omega(t - \frac{\Delta z}{c_0})} \\ &= E_0 e^{2\pi\kappa \frac{\Delta z}{\lambda_0}} e^{-i2\pi(n'-1)\frac{\Delta z}{\lambda_0}} e^{i\omega(t - \frac{\Delta z}{c_0})} \end{aligned}$$

- $e^{i\omega(t - \frac{\Delta z}{c_0})}$  ausfallende ursprüngliche Welle
- $e^{-i\omega(n'-1)\frac{\Delta z}{c_0}}$  Phasenverschiebung im Medium  
 $n'(\omega) \Rightarrow n'(\lambda)$  Dispersion
- $e^{-\omega\kappa \frac{\Delta z}{c_0}}$  exponentielle Abnahme der Amplitude

Def.: **Absorptionskoeffizienten**  $\alpha$

$$\boxed{I(\Delta z) = I_0 e^{-\alpha \Delta z}} \quad \text{Beersches Absorptionsgesetz}$$

$I$  Intensität

[Folie: Dispersion in verschiedenen Gläsern]

Zshg. von  $\kappa$  und  $\alpha$ :  $\alpha = \frac{4\pi\kappa}{\lambda} \quad [\alpha] = \frac{1}{\text{m}}$

## Reflexions- und Brechungsgesetz

[Folie: Reflexion und Brechung]

- hier: Richtungen, Intensitäten/Polarisation (Mittwoch)
- Grenzfläche in x-z-Ebene
- Wellenvektor der einlaufenden Welle  $\vec{k}_e$  in x-y-Ebene  
Normalenvektor  $\vec{n}_{xz}$  und  $\vec{k}_e$  bilden Einfallsebene
- Tangentialkomponente des  $\vec{E}$ -Feldes stetig an Grenzfläche

$$E_{e,t} + E_{r,t} = E_{g,t} \quad (*)$$

t tangential, e einlaufend, g gebrochen

bei  $\vec{r} = 0$  :

$$A_{e,t} e^{i\omega_e t} + A_{r,t} e^{i\omega_r t} = A_{g,t} e^{i\omega_g t}$$

Nur Lösung, wenn gilt  $\omega_e = \omega_r = \omega_g$

Bedingung (\*) gilt nur für gesamte x-z-Ebene

$$k_e \vec{r} = k_r \vec{r} = \vec{k}_g \vec{r} \quad (**)$$

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + z \vec{e}_z \quad \text{in Grenzfläche}$$

$$\vec{k}_e = k_{ex} \vec{e}_x + k_{ey} \vec{e}_y$$

$$\vec{k}_r = k_{rx} \vec{e}_x + k_{ry} \vec{e}_y + k_{rz} \vec{e}_z \quad \vec{k}_g = k_{gx} \vec{e}_x + k_{gy} \vec{e}_y + k_{gz} \vec{e}_z$$

Einsetzen in (\*\*)

$$k_{ex} x = k_{rx} x + k_{rz} z = k_{gx} x + k_{gz} z$$

Muss für beliebige x und z in Grenzfläche gelten

$$\Rightarrow k_{ex} = k_{rx} = k_{gx} \quad k_{rz} = k_{gz} = 0$$

d.h. Wellenvektoren von reflektierter und gebrochener Welle auch in Einfallsebene.

Aus Abb:

$$k_{ex} = k_e \sin \alpha \quad k_{rx} = k_r \sin \alpha' \quad k_{gx} = k_g \sin \beta$$

$$\frac{\sin \alpha}{c_1} = \frac{\sin \alpha'}{c_1} = \frac{\sin \beta}{c_2} \quad c_i \text{ Lichtgeschwindigkeit im Medium } i$$

$\sin \alpha = \sin \alpha' \quad \alpha = \alpha' \quad \text{Reflexionsgesetz}$
---

$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{Snelliusche Brechungsgesetz}$
---

[Folie: Anwendung der Totalreflexion: Retroreflexionsprisma und Lichtleiter]