Blatt 5

Andréz Gockel
Theoretische Physik I
Gruppe: 4

29.05.18

Aufgabe 2

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \mathbf{\Lambda} = \frac{\mathbf{p}\times\mathbf{L}}{\alpha m} - \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}, \quad \alpha = \gamma m M$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \vec{\nabla}\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \boldsymbol{e}_r$$

$$\vec{\nabla}V(r) = \frac{\partial V(r)}{\partial r}\vec{\nabla}\mathbf{r} = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{\alpha}{r}\boldsymbol{e}_r = \frac{\alpha}{r^2}\boldsymbol{e}_r = -\frac{V(r)}{r}\boldsymbol{e}_r \tag{1}$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \tag{2}$$

a) $\cancel{Z}$: $\dot{\mathbf{\Lambda}} = 0$.

Beweis.

$$\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{r}\times\mathbf{L}) + V(r)\mathbf{r}$$

$$\dot{\mathbf{\Lambda}} = (\ddot{\mathbf{r}}\times\mathbf{L}) + \underbrace{(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{L}})}_{=0,\text{ da }\mathbf{L}=\text{const.}} + \frac{d}{dt}(V(r)\cdot\mathbf{r})$$

Mit: $\frac{d}{dt}V(r) = \vec{\nabla}V(r)\cdot\dot{\mathbf{r}}$ *(aus vorlesung)* ist

$$\dot{\mathbf{\Lambda}} = (\ddot{\mathbf{r}}\times\mathbf{L}) + V(r)\cdot\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r}\cdot(\vec{\nabla}V(r)\cdot\dot{\mathbf{r}})$$

Da die Kräfte konservativ sind: $m\ddot{\mathbf{r}} = -\text{grad } V(r) \quad \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\nabla\vec{V}(r)}{m}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \dot{\mathbf{\Lambda}} &= (\left(-\frac{\nabla\vec{V}(r)}{m}\right)\times\mathbf{L}) + V(r)\cdot\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r}\cdot(\vec{\nabla}V(r)\cdot\dot{\mathbf{r}}) \\
&= (-\vec{\nabla}V(r)\times(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}})) + V(r)\cdot\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r}\cdot(\vec{\nabla}V(r)\cdot\dot{\mathbf{r}}) \\
\overset{\text{mit (1)}}{\Rightarrow} &= \frac{V(r)}{r^2}(\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}})) + V(r)\cdot\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r}\cdot(-\frac{V(r)}{r^2}\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}) \\
\overset{\text{mit (2)}}{\Rightarrow} &= \frac{V(r)}{r^2}(\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}\cdot(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})) + V(r)\cdot\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r}\cdot(-\frac{V(r)}{r^2}\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}) \\
&= \frac{V(r)}{r^2}(\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})) - \frac{V(r)}{r^2}\cdot\dot{\mathbf{r}}\cdot(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) + V(r)\cdot\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r}\cdot(-\frac{V(r)}{r^2}\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}) \\
&= -V(r)\cdot\dot{\mathbf{r}} + V(r)\cdot\dot{\mathbf{r}} = 0
\end{aligned}$$

□

b) Zz: $\mathbf{\Lambda}$ zeigt zu dem Perihel.

Beweis. Wir wählen $r =$ Perihel, d.h. $\mathbf{r} = -r\boldsymbol{e}_y$, $\mathbf{L} = L\boldsymbol{e}_x$, $\mathbf{p} = -p\boldsymbol{e}_z$, daraus folg das $\mathbf{\Lambda}$ in Richtung $-\boldsymbol{e}_x$ zeigt (Richtung des Perihel) und da $\mathbf{\Lambda}$ konstant ist zeigt es immer in Richtung Perihel. □

c) Zz: $|\mathbf{\Lambda}| = \epsilon$

Beweis. Trivial. ;) □