II Lagrange-Formalismus

nach Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813; italien. Mathematiker/Astronom)
geboren als Giuseppe Lodovico Lagrangia

1788: „Mécanique analytique"

0. Motivation

- Newtonsche Mechanik: alle Kräfte müssen bekannt sein $\left(m\ddot{\vec{r}} = \sum_i \vec{F}_i\right)$
- Aber oft: nur Wirkung der Kraft, nicht Kraft selbst, bekannt

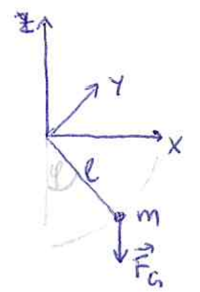
  z.B. Pendel: fester Abstand des Massenpunkts zur Aufhängung

  Gas in geschlossenem Gefäß: Moleküle können Gefäß nicht verlassen

1. Zwangsbedingungen (ZB)

→ schränken Bewegung des Systems auf einen Unterraum ein
(z.B. Achterbahn, Bewegung in 2D)

Bsp.: Fadenpendel



- Gravitationskraft $\vec{F}_G$ wirkt nach unten, aber Faden (oder Stange) der Länge ℓ hält Masse m auf Kreisbahn (allgemeiner: auf Kugelschale)

  → Zwangsbedingungen: $y = 0$, $x^2 + z^2 = \ell^2$ (1)

- Übersetzung der ZB in Newtonsche Bewegungsgl.: Zwangskraft $\vec{Z}$

  $$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_G + \vec{Z} \qquad (2)$$

- $\vec{Z}$ nicht von vornherein bekannt, nur Wirkung (1)

Lösungsansätze

- $\vec{Z}$ bestimmen: Lagrange-Gln. 1. Art
- Zwangsbedingungen durch Wahl geeigneter Koordinaten eliminieren
  (im Bsp.: $\varphi(t)$ anstatt $\vec{r}(t)$)

  → Bewegungsgl. für neue Koordinaten: Lagrange-Gln. 2. Art

Klassifizierung von ZB

- System mit f Freiheitsgraden (N Massenpunkte : $f = 3N$)

  $x_1, \dots, x_f \rightarrow$ Anzahl der ZB $R < f$ (bei $R = f$: keine Bewegung möglich)

- Formulierung der ZB :

  $$g_\alpha(x_1, \dots, x_f, t) = 0 \quad , \; \alpha = 1, \dots, R \qquad (3)$$

  Bsp.: $f = 3$

  $$g_1(x, y, z, t) = y = 0$$
  $$g_2(x, y, z, t) = x^2 + z^2 - \ell^2 = 0$$

- jede ZB reduziert Anzahl der Freiheitsgrade

  (Massenpunkt ohne ZB : Bewegung in 3D
  erste ZB : Bewegung auf Fläche
  zweite ZB : Bewegung auf Schnitt zweier Flächen
  Bsp.: Kreisbahn)

- ZB der Art (3) heißen <u>holonom</u>
- ZB, die explizit von der Zeit t abhängen, heißen <u>rheonom</u>
- ZB, die nicht -"- , heißen <u>skleronom</u>

- Beispiele für nicht-holonome ZB:

  $g_k(\vec{r}) = r - R < 0$ (Inneres einer Kugel)

  $g_k(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = 0$ (benötigt Geschwindigkeit)

2. Lagrange-Gleichungen 1. Art

- Eine holonome ZB : Beschränkung der Bewegung eines Teilchens auf eine Fläche

  ($g_1(\vec{r},t) = y = 0 \rightarrow xz$ - Ebene

  oder

  $g_2(\vec{r},t) = x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 = 0 \rightarrow$ Kugelschale mit Radius ℓ)

- keine weitere Einschränkung der Bewegung innerhalb dieser Fläche durch die ZB

  $\rightarrow \vec{Z}$ kann keine Komponente tangential zu der Fläche haben

  $\rightarrow \vec{Z}$ ist orthogonal zur Fläche, die durch $g(\vec{r},t) = 0$ definiert wird

$\rightarrow$ wird erfüllt durch den Ansatz

$$\underline{\vec{Z}(\vec{r},t) = \lambda(t) \text{ grad } g(\vec{r},t)} \qquad (4)$$

mit zeitabhängigem Parameter $\lambda(t)$

(allgemein $\lambda(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$, aber $\vec{r}(t)$, $\dot{\vec{r}}(t)$ eindeutige Fkt von $t \rightarrow \lambda(t)$)

(Bsp.: $\text{grad } g_1(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\text{grad } g_2(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = 2\vec{r}$)

- Ansatz (4) ist zwar plausibel, kann aber nicht bewiesen werden

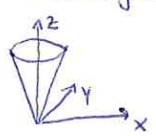
  $\rightarrow$ (4) ist eigenständiges Axiom der Mechanik

Bemerkungen

① Skalare Fkt. von 2 Variablen $f(x,y) \rightarrow$ "Gebirge" in 3D $z = f(x,y)$

$\rightarrow$ partielle Ableitungen zeigen in Richtung maximaler Steigung

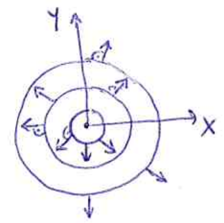
Bsp.: Kreiskegel



$z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

"Höhenlinien":

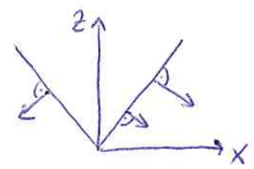


② Implizite Darstellung der Fläche in 3D:

$F(x,y,z) = z - f(x,y) = 0$ (holonome ZB)

Bsp.: $F = z^2 - x^2 - y^2 = 0$

$\text{grad } F = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 2z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf Kegel



③ Kraft ~ grad g legt nahe, dass die ZB g als eine Art "Potential" verstanden werden kann

- Aus (4) und (2) erhält man die Lagrange-Gln. 1. Art für 1 Teilchen unter einer holonomen ZB:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \operatorname{grad} g(\vec{r},t) \qquad (5)$$
$$g(\vec{r},t) = 0$$

(4 Gln. für 4 Unbekannte x, y, z, λ)

- Zwei holonome ZB: Beschränkung der Bewegung eines Teilchens auf eine Raumkurve

→ grad g_1 und grad g_2 stehen unabhängig voneinander senkrecht auf der Kurve

→ $\vec{Z}(\vec{r},t) = \lambda_1(t) \operatorname{grad} g_1(\vec{r},t) + \lambda_2(t) \operatorname{grad} g_2(\vec{r},t)$ steht senkrecht auf Kurve

- Verallgemeinerung auf R ZB und N Teilchen ($f = 3N$) mit $x \equiv (x_1, \dots, x_{3N})$:

$$\boxed{\begin{aligned} m_n \ddot{x}_n &= F_n + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t) \frac{\partial g_\alpha(x,t)}{\partial x_n} & n = 1,\dots,3N \\ g_\alpha(x,t) &= g_\alpha(x_1,\dots,x_{3N},t) = 0 & \alpha = 1,\dots,R \end{aligned}} \qquad (6)$$

Lagrange-Gln. 1. Art für 3N Variablen und R holonome ZB
(3N+R Gln. für 3N+R Unbekannte x_n, λ_α)

Bsp.: 2 Teilchen, 1 ZB $g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$

$$\vec{Z}_i = \lambda(t) \frac{\partial g}{\partial \vec{r}_i}$$

- $g = g(\vec{r}_1, t)$ → $\vec{Z}_1 = \lambda(t) \operatorname{grad}_1 g(\vec{r}_1,t)$, $\vec{Z}_2 = \vec{0}$

- $g(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t) = g(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - \ell = 0$ → $\vec{Z}_1 = -\vec{Z}_2$

Bemerkungen

1. Aufgrund des zusätzlichen Axioms (4) stellen die Lagrange-Gln. 1. Art (6) eine nichttriviale Verallgemeinerung der Newtonschen Axiome dar.

2. Alternativ kann der Ansatz (4) durch das d'Alembertsche Prinzip motiviert werden. (virtuelle Verrückungen)

3. Die Lagrange-Gln. 1. Art sind insbesondere in der technischen Mechanik von Bedeutung. In der Physik nutzt man hauptsächlich die Lagrange-Gln. 2. Art.

4. Erhaltung von Impuls, Drehimpuls, Energie wenn Zwangskräfte die entsprechende Symmetrie erhalten

Energieerhaltung: (konservative Kräfte)

(i) $\sum_n F_n \dot{x}_n = -\sum_n \frac{\partial U}{\partial x_n} \dot{x}_n = -\frac{d}{dt} U(x)$

(ii) $\sum_n m_n \ddot{x}_n \dot{x}_n = \frac{d}{dt} \sum_n \frac{m_n}{2} \dot{x}_n^2 = \frac{d}{dt} T(\dot{x})$

$\rightarrow$ (ii)-(i): $\frac{d}{dt}(T+U) = \sum_n (m_n \ddot{x}_n - F_n)\dot{x}_n \qquad |$ Lagr.-Gl. (6)

$= \sum_n \sum_\alpha \lambda_\alpha(t) \frac{\partial g_\alpha(x,t)}{\partial x_n} \dot{x}_n \qquad | \; g_\alpha = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} g_\alpha = 0 = \sum_n \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \dot{x}_n + \frac{\partial g_\alpha}{\partial t}$

$= -\sum_\alpha \lambda_\alpha(t) \frac{\partial g_\alpha(x,t)}{\partial t}$

$\Rightarrow$ Energieerhaltung für zeitunabhängige ZB