

Experimentalphysik III

Vorlesung von Prof. Dr. Oliver Waldmann im Wintersemester 2018

Markus Österle Andréz Gockel Damian Lanzenstiel Patrick Munnich

31. Januar 2019

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|----------|
| 0 | Einführung | 5 |
| 0.1 | Termine | 5 |
| 0.2 | Programm | 5 |
| 0.3 | Literatur | 5 |
| 0.4 | Übungen und Betreuer | 6 |
| 0.5 | Übungsblätter | 6 |
| 0.6 | Übungsgruppen | 6 |
| 0.7 | Klausur | 6 |
| 0.8 | Prüfungsleistung | 7 |
| I | Spezielle Relativitätstheorie | 8 |
| I.1 | Vorgeschichte | 8 |
| I.1.1 | Experiment von Michelson-Morley | 8 |
| I.1.2 | Lorenz-Invarianz der Maxwell-Gleichungen | 9 |
| I.1.3 | Einstein und die Patente | 9 |
| I.2 | Bezugssysteme und Inertialsysteme | 10 |
| I.2.1 | Was ist ein Bezugssystem (BZS) | 10 |
| I.2.2 | Was ist ein Inertialsystem (IS) | 10 |
| I.2.3 | Galilei-Transformation | 10 |
| I.2.4 | Lorenz-Transformation (LT) | 11 |
| I.3 | Einsteins Axiome der speziellen Relativitätstheorie (SRT) | 11 |
| I.4 | Konsequenzen aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit | 11 |
| I.4.1 | Lorenz-Trafo und Lorenz-Invarianz | 11 |
| I.4.2 | Relativität der Gleichzeitigkeit | 13 |
| I.4.3 | Zeitdilatation | 13 |
| I.4.4 | Längenkontraktion | 14 |
| I.4.5 | Doppler Effekt | 14 |
| I.4.6 | Aberration des Lichts | 15 |
| I.5 | Relativistische Dynamik | 15 |
| I.5.1 | Impulserhaltung und relativistischer Impuls | 15 |
| I.5.2 | Energieerhaltung und relativistische Energie | 16 |
| I.5.3 | Relativistische Energie-Impuls-Beziehung und Viererimpuls | 16 |
| I.5.4 | Kraft und Energie-Impuls Erhaltung | 17 |
| I.5.5 | Anwendungsbeispiele | 18 |
| I.6 | Von der SRT zur ART | 18 |
| I.6.1 | Äquivalenzprinzip (<i>die heilige Kuh der Physik</i>) | 18 |
| I.6.2 | Gravitation und Raumkrümmung | 19 |
| I.6.3 | Periheldrehung des Merkurs | 20 |
| I.6.4 | Ablenkung von Licht durch Gravitation | 20 |
| I.6.5 | Gravitationswellen | 20 |
| I.6.6 | Global Positioning System (GPS) | 20 |

| | |
|--|-----------|
| II Geometrische Optik | 21 |
| II.1 Lichtstrahlen | 21 |
| II.2 Das Fermat'sche Prinzip | 21 |
| II.2.1 Fermat'sches Prinzip | 21 |
| II.2.2 Weg zwischen zwei Punkten A und B | 22 |
| II.2.3 Reflexionsgesetz | 22 |
| II.2.4 Brechungsgesetz von Snellius | 22 |
| II.3 Einfache Anwendungen | 23 |
| II.3.1 Totalreflexion | 23 |
| II.3.2 Optisches Prisma | 23 |
| II.4 Sphärische, dünne Linse | 24 |
| II.4.1 Brennpunkt und Brennebene | 24 |
| II.4.2 Berechnung des Brennpunktes bzw. der Brennweite | 25 |
| II.4.3 Abbildung (am Beispiel einer Sammellinse) | 26 |
| II.5 Abbildungsfehler | 27 |
| II.5.1 Dicke Linsen | 27 |
| II.5.2 Sphärische Abberation | 27 |
| II.5.3 Chromatische Abbreration | 27 |
| II.5.4 Astigmatismus | 27 |
| II.5.5 Absorption | 27 |
| II.5.6 Beugung | 27 |
| II.5.7 Optisches Auflösungsvermögen | 27 |
| II.6 Optische Instrumente | 27 |
| II.6.1 Vergrößerung | 27 |
| II.6.2 Das menschliche Auge | 28 |
| II.6.3 Optisches Instrument mit einer Linse: Lupe | 28 |
| II.6.4 Optische Instrumente mit zwei Linsen | 29 |
| II.7 Elektronenoptik | 30 |
| II.7.1 Beispiel: Brechungsgesetz für Elektronen | 30 |
| II.7.2 Elektrische Rohrlinse | 30 |
| II.7.3 Magnetische Linsen | 30 |
| II.7.4 Elektronenmikroskope | 31 |
| III Wellenoptik | 32 |
| III.1 Wiederholung (Schwingungen und Wellen) | 32 |
| III.1.1 Schwingungen | 32 |
| III.1.2 Wellen | 32 |
| III.1.3 Fourier-Transformation | 32 |
| III.1.4 Kohärenz | 33 |
| III.2 Inteferenz und Beugung I | 34 |
| III.2.1 Inteferenz am Doppelspalt | 34 |
| III.2.2 Beugung am Einzelspalt | 34 |
| III.2.3 Beugung am Gitter | 35 |
| III.2.4 Beugung am Raum- oder Oberflächengitter | 36 |
| III.2.5 Interferenz an planparallelen Glasplatten | 37 |
| III.2.6 Vielstahlinterferenz, Fabry-Pérot-Interferometer | 39 |
| III.3 Interferenz und Beugung II - Huygen'sches Prinzip | 40 |
| III.3.1 Huygen'sches Prinzip | 40 |
| III.3.2 Interferenz am Doppelspalt | 41 |
| III.3.3 Beugung | 41 |
| III.3.4 Allgemeine Behandlung der Beugung | 41 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| III.3.5 | Allgemeines Ergebnis für die Beugung im Fernbereich, Fraunhofer Beugung | 42 |
| III.3.6 | Auflösungsvermögen optischer Instrumente | 43 |
| III.3.7 | Räumliches Auflösungsvermögen | 43 |
| IV | Licht - Materie Wechselwirkung | 46 |
| IV.1 | lineare und zirkulare Polarisation | 46 |
| IV.1.1 | Lineare Polarisation | 46 |
| IV.1.2 | Zirkuläre Polarisation | 46 |
| IV.1.3 | Zusammenhang zwischen linear und zirkular polarisierten Wellen | 47 |
| IV.1.4 | Elliptische Polarisation | 47 |
| IV.1.5 | Polarisation beim Durchgang durch Materie | 47 |
| IV.2 | Polarisation durch Brechung und Reflexion | 47 |
| IV.2.1 | Maxwell Gleichungen in Materie | 48 |
| IV.2.2 | Erinnerung: Polarisation bei Brechung und Reflexion | 48 |
| IV.2.3 | Maxwell-Gleichungen und Stetigkeitsbedingungen | 49 |
| IV.2.4 | Warum war es „erlaubt“ mit ebenen Wellen zu rechnen ? | 50 |
| IV.3 | Maxwell-Gl. in Materie, komplexer Brechungsindex | 50 |
| IV.3.1 | Polarisation eines Dielektrikums | 50 |
| IV.3.2 | Ensemble unabhängiger induzierter Dipolmomente | 51 |
| IV.3.3 | Lorenz-Lorentz-Oszillatormodell | 51 |
| IV.3.4 | Wellengleichung in Materie | 51 |
| IV.3.5 | Wellengleichung in Materie in komplexer Schreibweise | 51 |
| IV.3.6 | Transversale Lösungen | 52 |
| IV.3.7 | Komplexwertiger Brechungsindex | 53 |
| IV.3.8 | Lösung für kleine imaginäre Anteile. (schwache Dämpfung bzw Absorbtion) | 53 |
| IV.3.9 | Evaneszente Welle | 53 |
| IV.4 | Streuung, Spektren und Verwandtes | 55 |
| IV.4.1 | Grobe Einteilung | 55 |
| IV.4.2 | Physikalische Prozesse: Grundgedanken | 55 |
| IV.4.3 | Wirkungsquerschnitt (W.Q.S.) | 56 |
| IV.4.4 | Energie und Impulserhaltung | 56 |
| IV.4.5 | Spektroskopie | 57 |
| IV. | Fragerunde | 58 |
| IV.5 | Ratengleichungen | 59 |
| IV.5.1 | Exponentieller Zerfall | 59 |
| IV.5.2 | Zwei-Niveausystem | 59 |
| IV.5.3 | Zwei-Niveau System im Strahlungsfeld, Einstein Parameter | 60 |
| V | Entwicklung der Atom- und Quantenphysik | 62 |
| V.1 | Quantelung von Masse und Ladung | 62 |
| V.1.1 | Quantelung der Masse | 62 |
| V.1.2 | Quantelung der Ladung | 63 |
| V.1.3 | Bestimmung von Q/M (Ladung/Masse) | 64 |
| V.2 | Struktur der Materie | 66 |
| V.2.1 | Materie besteht aus Atomen/Ionen | 66 |
| V.2.2 | Atome bestehen aus Elektronen und „sonst etwas“ | 66 |
| V.2.3 | Atomkerne bestehen aus Atomschalen + Atomkernen | 66 |
| V.2.4 | Festkörper bestehen aus einer periodischen Anordnung von Atomen | 67 |
| V.3 | Quantelung von Energie, Planck'sches Strahlungsgesetz | 67 |
| V.3.1 | Energiezustände, Spektren | 67 |
| V.3.2 | Hohlraumstrahlung | 68 |
| V.3.3 | Klassische Berechnung: Rayleigh-Jeans Gesetz | 69 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| V.3.4 | Planck'sches Strahlungsgesetz I | 69 |
| V.3.5 | Gedanken zum Plank'schen Strahlungsgesetz | 70 |
| V.3.6 | Planck'sches Strahlungsgesetz II: Einstein | 71 |
| V.4 | Welle-Teilchen Dualismus | 72 |
| V.4.1 | Photoelektrischer Effekt (Photoeffekt) | 72 |
| V. | Fragerunde | 73 |
| V.4.2 | Anwendungen des Photoeffekts | 74 |
| V.4.3 | Compton-Effekt (Licht verhält sich wie Teilchen) | 75 |
| V.4.4 | Teilchenstrahl Beugung/Interferenz (Teilchen verhalten sich wie Wellen) | 75 |
| V.4.5 | Welle-Teilchen-Dualismus | 75 |
| VI | Grundlagen der Quantenmechanik | 77 |
| VI.1 | Axiome der Quantenmechanik | 77 |
| VI.2 | Wellenfunktion, Operatoren, Zustände | 78 |
| VI.2.1 | Wellenfunktionen | 78 |
| VI.2.2 | Operatoren | 78 |
| VI.2.3 | Hilbert-Raum (Ultrakompakt) | 78 |
| VI.2.4 | Zustand Darstellung und Wellenfunktion | 80 |
| VI.2.5 | Analogie zwischen Vektor- und Hilbertraum | 80 |
| VI.3 | Nicht relativistische QM und Schrödingergleichung | 81 |
| VI.3.1 | Zustand und Bewegung eines Teilchens | 81 |
| VI.3.2 | „Herleitung“ der Schrödingergleichung (SGL) | 82 |
| VI.3.3 | Freies Teilchen in Ortsdarstellung | 82 |
| VI.3.4 | Teilchen im Potential in Ortsdarstellung | 83 |
| VI.3.5 | Zeitunabhängige SGL | 83 |
| VI.3.6 | Zusammenfassung | 84 |
| VI.4 | Stern-Gerlach Experiment und Elektronen-Spin (1922 - 25) | 85 |
| VI.5 | Zustand, Wellenfunktion und Messprozess | 86 |
| VI.5.1 | Elektronenspin | 86 |
| VI.5.2 | Messung des Elektronenspins | 86 |
| VI.6 | Einige einfache Quantensysteme | 88 |
| VI.6.1 | Konstantes Potential $V(x) = V_0$ | 89 |
| VI.6.2 | Potentialstufe | 89 |
| VI.6.3 | Potentialbarriere | 90 |
| VI.6.4 | Beispiele für den Tunneleffekt | 92 |
| VI.6.5 | Harmonischer Oszillator | 93 |
| VI.6.6 | Beispiele für den quantenmechanischen Oszillator (QHO) | 94 |
| VI.6.7 | Unschärferelation und Quanten- klassischer Übergang | 94 |
| VI.7 | Elektron im Coulomb-Feld einer Zentralladung | 96 |
| VI.7.1 | Lösung der SGL | 97 |

Kapitel 0

Einführung

Dozent Prof. Oliver Waldmann, Zi. 202, Physik-Hochhaus

Zeit Di, 8-10 Uhr, Mi, 8-10 Uhr

Ort Großer Hörsaal der Physik

0.1 Termine

Vorlesungsbeginn Di., 16.10.2018

Erstes Übungsblatt Mi., 17.10.2018

Übungsbeginn Mo., 29.10.2018 - Fr., 2.11.2018

Letzte Vorlesung Mi., 6.2.2019

Klausur Sa., 9.2.2019, 9:00 - 12 Uhr

Wiederholungsklausur Sa., 27.4.2019., 10:00-13 Uhr

0.2 Programm

1. Spezielle Relativitätstheorie
2. Fortgeschrittene Optik
3. Quantenphysik
4. Einfache atomare Systeme

0.3 Literatur

- alle Lehrbücher
- Demtröder, Experimentalphysik 3 (Springer)
- Tipler/Mosca, Physik (Elsevier)
- Bergmann/Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 3
- Gerthsen, Physik (Springer)
- Giancoli, Physik (Pearson)

0.4 Übungen und Betreuer

Übungsleiter: Krunoslav Prša, Zi. 203, Physik-Hochhaus, Tel. 7631

Gruppe 3: Mi 10-12, SR III, Tutor: Fabian Thielemann

Gruppe 7: Fr 14-16, SR GMH, Tutor: Rupert Michiels

0.5 Übungsblätter

- Ausgabe der Übungsblätter jeweils am ENDE der Vorlesung am Mittwoch im großen Hörsaal, oder online auf ILIAS (siehe Ordner "Übungsblätterünten")
- Rückgabe der schriftlichen Lösungen VOR der Vorlesung am Mittwoch, die Lösungen sind im Hörsaal vorne auf den Tisch zu legen
- jedes Übungsblatt umfasst typischerweise 4 - 5 Aufgaben mit insgesamt ca. 35 Punkten
- jedes Übungsblatt enthält typischerweise eine leichte und eine schwere Aufgabe

0.6 Übungsgruppen

- bis zu zwei (2) Studierende können ein Lösungsblatt gemeinsam bearbeiten und abgeben (sie müssen dann aber in einer Übungsgruppe sein)
- bitte DEUTLICH auf dem Lösungsblatt angeben: Namen der Studierenden, Übungsgruppe (Nr, Name des Übungsleiters, Ort, Zeit)
- Gruppenarbeit ist erwünscht, es wird aber erwartet, dass jede(r) Studierende die Aufgaben vorrechnen kann, sonst Punktabzug :-)
- Einschreibung in die Übungsgruppen über ILIAS von Di., 17.10, 20:00 Uhr bis Do., 19.10, 20:00 Uhr (siehe unten)
- Anwesenheitspflicht & Vorrechnenpflicht!

0.7 Klausur

Zusassung zur Klausur 40% der Übungspunkte

Termin Sa, 9. Februar 2019, 9:00 - 12 Uhr, Großer Hörsaal Physik

Dauer 120 Minuten

Inhalt Vorlesungsstoff + Übungen, Aufgaben sind ähnlich zu den Übungen gestellt

Sprache Die Klausuraufgaben werden in Deutsch zur Verfügung gestellt

Erlaubt Din-A4 Blatt mit eigenen Notizen beidseitig beliebigbeschrieben/bedruckt (spezielle Lesehilfen sind nicht erlaubt!), Stifte, Geodreieck/Lineal

Nicht erlaubt Es ist alles verboten was nicht erlaubt ist (Taschenrechner, Handy, Bücher, usw.) (leere geheftete Blätter werden verteilt)

Mitzubringen Studierendenausweis, Schreibstifte, Geodreieck/Lineal

Anmeldung zur Klausur

Online Anmeldung, der Ablauf und Termine werden durch die jeweiligen Prüfungsämter bekannt gegeben.

0.8 Prüfungsleistung

- mindestens 40% der Übungspunkte werden für die Zulassung zur Klausur benötigt
- bestandene schriftliche Klausur oder Nachklausur
- Bewertungsgrundlage ist das Ergebnis der Klausur oder Wiederholungsklausur

Täuschungsversuche:

Sowohl die Übungen wie die Klausur sind Teil der Prüfungs/Studienleistung! Täuschungsversuche können zum Nicht-Bestehen führen!

Kapitel I

Spezielle Relativitätstheorie

I.1 Vorgeschichte

1861-1867: Maxwell Gleichungen

Vor Maxwell brauchten alle bekannten Wellen (Wasserwellen, Schall) ein Medium oder Trägerstoff. Daher stammte die Annahme, auch elektro-magnetische Wellen also Licht bräuchte ein Medium: der Äther. Somit wollte man experimentell versuchen zu zeigen, wie schnell wir uns durch den Äther bewegen und welches das Inertialsystem, das ausgezeichnete Bezugssystem des Äthers ist.

Mit dem Ziel den Äther nachzuweisen wurde das Michelson-Morley Experiment durchgeführt.

I.1.1 Experiment von Michelson-Morley

Die Idee des Experimentes war es die Bewegung der Erde relativ zum Äther zu messen.

Anforderungen:

- Erde 30 km/s
- Licht $3 \cdot 10^5$ km/s

⇒ relative Auflösung von circa 10^{-4} nötig

Prinzip:

Lichtlaufzeiten:

Arm parallel zum Ätherwind

$$t_2 = \frac{L_2}{c+v} + \frac{L_2}{c-v} = \frac{2cL_2}{(c^2-v^2)} = \frac{2L_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Arm senkrecht zum Ätherwind

$$t_1 = 2 \frac{L'_1}{c}$$

Nebenrechnung:

$$L'^2 = L^2 + (vt)^2 \quad \Rightarrow \quad (ct)^2 = L^2 + (vt)^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

$$t_1 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Somit ist die Zeitdifferenz der beiden Lichtstrahlen

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2L}{c} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{2L}{c} \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{lv^2}{c^2}$$

Hieraus können wir nun den Phasenunterschied der beiden Strahlen berechnen

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{c\Delta t}{\lambda}$$

Abschätzung:

$$L = 2 \times 11 \text{ m} , \quad v = 30 \text{ km/s} , \quad \lambda = 500 \text{ nm} \Rightarrow \Delta\varphi/\pi \approx 0,88$$

Auflösung

$$\frac{\Delta\varphi}{\pi} \approx \frac{1}{4}$$

Ergebnis:

Es gibt keine Verschiebung des Interferenzmusters.

Konsequenz:

\Rightarrow Es gibt keinen Ätherwind.

\Rightarrow Es gibt kein ausgezeichnetes Bezugssystem. Alle Bezugssysteme sind gleichwertig.

Aber:

Kontraktionshypothese von Fitzgerald & Lorentz

Wenn der Arm in Richtung der Äthers um Faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Arm parallel zum Ä.W.:

$$t_2 = \frac{2cL_2}{c^2 - v^2} \frac{1}{\gamma} = \frac{2L_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Arm senkrecht zum Ä.W.:

$$t_1 = \frac{2L_1}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Aber:

Äther nicht beobachtbar

I.1.2 Lorenz-Invarianz der Maxwell-Gleichungen

Maxwell-Gleichungen sind Lorenz-invariant und nicht Galilei-invariant.

Beispiel: Relativität der Feder. \Rightarrow Im Laborsystem: $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$

\Rightarrow Im Ruhesystem: $\mathbf{v}' = 0 \Rightarrow F_L = 0 \nabla$

\Rightarrow ein zusätzliches E' -Feld, $\mathbf{F}_q = q\mathbf{E}$

\Rightarrow neue „Transformationsgleichungen“

Transformation

- K : „ruhende“ Bezugssystem
- K' : „sich in Bezug auf K konstant entlang der x -Achse bewegendes“ Bezugssystem

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= (E_x, \gamma(E_y - vB_z), \gamma(E_z - vB_y))^T \\ \mathbf{B}' &= (B_x, \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z), \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y))^T \end{aligned}$$

I.1.3 Einstein und die Patente

Einstein arbeitete um 1092 beim Patentamt in Bern. Zu dieser Zeit wurden häufig neue Patente zur Synchronisierung verschiedenen Uhren angemeldet, was zu Einsteins Inspiration und seinen späteren Entdeckungen führte.

I.2 Bezugssysteme und Inertialsysteme

Zur Diskussion der Relativitätstheorie ist ein bestimmtes Vokabular mit klaren Definitionen notwendig. Hierzu soll dieser Abschnitt dienen.

I.2.1 Was ist ein Bezugssystem (BZS)

Ein Bezugssystem ist ein Koordinatensystem bezüglich dessen man die Bewegung von Objekten beschreibt.

Konsequenzen:

- es gibt einen Koordinatenursprung O
- Koordinatenursprünge verschiedener BZS können sich gegeneinander bewegen

⇒ Transformationsgesetze

ACHTUNG

Unterscheide sorgfältig zwischen Basisvektoren, Vektoren und Koordinaten

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' \quad \begin{matrix} \mathbf{v} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i \\ \mathbf{v}' = \sum_i x'_i \mathbf{e}'_i \end{matrix} \rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \mathbf{x}'$$

I.2.2 Was ist ein Inertialsystem (IS)

Bezugssystem in welchem das Trägheitsgesetz gilt.

Konsequenzen:

⇒ Inertialsystem bewegen sich geradlinig - gleichförmig gegeneinander

Klassisches Relativitätsprinzip

Grundgesetze der Physik nicht in allen Inertialsystemen gleich (Form invariant)

I.2.3 Galilei-Transformation

Galilei-Trafo

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{v}t \\ t' &= t \end{aligned}$$

\mathbf{v} : Geschwindigkeit vom O' gegenüber O

Test:

$$\begin{aligned} k: \quad \mathbf{F} &= m\mathbf{a} \quad \Leftrightarrow \quad k': \quad \mathbf{F}' = m\mathbf{a}' \\ \mathbf{a}' &= \frac{d^2 \mathbf{v}'}{dt'^2} = \frac{d^2 \mathbf{v}}{dt^2} = \mathbf{a} \end{aligned}$$

Bemerkung

Invarianz unter Drehungen ⇒ Tensoren

Transformation der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

⇒ Lichtgeschwindigkeit ist NICHT konstant !

I.2.4 Lorentz-Transformation (LT)

Lorentz-Trafo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{u}{c^2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \text{LT}$$

Ziel der speziellen Relativitätstheorie:

Die **Gesetze der Mechanik** sollen **Lorentz-invariant** sein !

Bemerkung

Die Galilei-Transformation ergibt sich aus der Lorentz-Transformation für $\frac{u}{v} \rightarrow 0$ somit wird dann $\gamma \rightarrow 1$ gehen.

I.3 Einsteins Axiome der speziellen Relativitätstheorie (SRT)

1. Relativitätsprinzip:
Alle Naturgesetze nehmen in allen IS die gleiche Form an.
2. Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist Konstant.

Bemerkungen

- Punkt 1 legt die Lorentz-Trafo fest
- Das Umgekehrte gilt nicht

I.4 Konsequenzen aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Da durch, dass die Lichtgeschwindigkeit eine Konstante sein soll ergeben sich schon bei einfachen Beispielen Schwierigkeiten. Ein solches Beispiel wäre die Addition von Geschwindigkeiten. Fährt man nun in einem Zug der die Geschwindigkeit $0,8c$ hat und schießt ein Geschoss mit $0,3c$ in Fahrtrichtung ab so sollte dieses mit $1,1c$ schneller als die Lichtgeschwindigkeit sein. Warum dies nicht der Fall ist und wie man damit umgeht und welche weiteren Konsequenzen aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit folgen wird im folgenden Abschnitt erläutert.

I.4.1 Lorentz-Trafo und Lorentz-Invarianz

- 1) Lichtstrahlen:
Im IS K : $x = ct$
Im IS K' : $x' = ct'$
- 2) Alle IS sind gleichberechtigt
Trafo $K \rightarrow K'$: $x' = \gamma(x - ut)$
Trafo $K' \rightarrow K$: $x = \gamma(x' - ut')$
- 3) $\Rightarrow xx' = \gamma^2 xx' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$4) \quad t' = \gamma(t - ax) \\ t' = \frac{x'}{c} = \gamma \frac{1}{c}(x - ut) = \gamma(t - \frac{ux}{c^2})$$

5) Insgesamt:

Lorenz-Trafo

$$x' = \gamma(x - ut) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right)$$

Transformation der Geschwindigkeiten

NR:

$$\frac{dx'}{dt} = \gamma \left(\frac{dx}{dt} - u \right) = \gamma(v_x - u) \\ \frac{dt'}{dt} = \gamma \left(1 - \frac{u}{c^2} v_x \right)$$

Daraus folgt dann für die Geschwindigkeitsadditionen in verschiedene räumliche Komponenten:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \\ v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \\ v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_z}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

Test:

- $u \ll c \Rightarrow$ Galilei-Trafo
- Umkehrung

Lorenz-Invarianz

Feststellung $x^2 - c^2 t^2 = \text{const.} = x'^2 - c^2 t'^2$

Raum-Zeit-Abstand: $L = \sqrt{x^2 - c^2 t^2}$

\rightarrow RZ-Abstand bleibt unter Lorenz-Trafo invariant.

Minkowski Raum

„Drehung“ im M-Raum \Leftrightarrow Lorenz-Trafo

A)

$$\mathbf{x} = (x, y, z, ict) \\ \mathbf{x}\mathbf{x} = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = l^2$$

B)

$$\mathbf{x} = (x, y, z, ct) \quad \text{Metrik:} \quad \bar{g} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow l^2 = \mathbf{x}\bar{g}\mathbf{x} = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

\Rightarrow Kovarianten und Kontravarianten Vierervektoren

Elementare Diskussion des M-Raums

Frage: Wie sieht ein anderes sich bewegendes IS (K') im eigenen IS (K) aus ?

K: Die Achsen ct, x stehen rechtwinklig aufeinander.

K': wie liegen ct', x' in K ?

Für die Lage von ct' : Betrachte $x' = 0 \rightarrow$ LT $\Rightarrow x = \frac{u}{c}ct$

Für die Lage von x' : Betrachte $ct' = 0 \rightarrow$ LT $\Rightarrow ct = \frac{u}{c}x$

I.4.2 Relativität der Gleichzeitigkeit

Lichtlaufzeit und Ereignisse:

Das beobachtete Licht (z.B. von Galaxien) entspricht einem Blick in die Vergangenheit.

Was soll gleichzeitig bedeuten?

Definition der Gleichzeitigkeit

In einem IS sind die Ereignisse A und C gleichzeitig, wenn die von den beiden Ergebnissen ausgehenden Lichtpulse einen Beobachter B in der Mitte der beiden Punkte zur selben Zeit erreichen.

Synchronisation von Uhren

- man nehme zwei Uhren in einem IS, ruhend
- man sende zwei Photonen von der Mitte der Verbindungsstrecke aus

\Rightarrow die beiden Photonen kommen gleichzeitig an den beiden Orten an

I.4.3 Zeitdilatation

Uhren \Rightarrow Lichtuhr

Zeitdilatation: bewegte Uhren laufen langsamer

Grund: Licht muss größere Wege zurücklegen.

im Eigensystem: $\Delta t' = 2\frac{L}{c}$

in „unserem“ System: $\Delta t = 2\frac{\bar{L}}{c}$

$$\bar{L}^2 = L^2 + \left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2$$

$$\Delta t^2 = \Delta t'^2 + \frac{u^2}{c^2} \Delta t'^2$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \Delta t' = \gamma \Delta t' \quad ; \Delta t \geq \Delta t'$$

Betrachtung im Minkowski Diagramm

Betrachtung mit Lorenz-Trafo

$$\begin{aligned} x'_0 = 0 & \quad \Rightarrow \quad x = ut \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{u}{c^2} ut \right) = \gamma \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) t = \frac{1}{\gamma} t \end{aligned}$$

Zeitdilatation

$$t' = \frac{1}{\gamma} t$$

Eigenzeit

τ : Tickdauer im Ruhesystem der Uhr *Beispiele*:

- Myonenzerfall - Lebensdauer $\tau = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$
Entstehung in Erdatmosphäre:
gemessene Lebensdauer $\tau' = 30 \cdot 10^{-6} \text{ s}$
- Nebelkammer

Zwillingsparadoxon Lösung: [Erdszwilling hat recht](#).
Modernes Experiment

I.4.4 Längenkontraktion

Die Längenkontraktion besagt, dass bewegte Gegenstände in Bewegungsrichtung kürzer erscheinen.

$$l = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} l' = \frac{1}{\gamma} l'$$

Längenkontraktion

$$l' = \gamma l$$

Minkowski-Diagramm:

Benutze Lorenz-Invarianz

Lorenz-Trafo:

$$t = 0$$

$$\begin{aligned} \text{LT für Ort: } x' &= \gamma(x - ut) = \gamma x \\ \Rightarrow l' &= x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma l \end{aligned}$$

Ruder-Filme

Lichtlaufzeit berücksichtigen

I.4.5 Doppler Effekt

Klassischer Doppler Effekt

$$f_B = f_S \frac{c + v_B}{c - v_S}$$

- bewegter Empfänger: $v_S = 0 \Rightarrow f_B = \left(1 + \frac{v_B}{c}\right) \cdot f_S$
- bewegter Sender: $v_B = 0 \Rightarrow f_B = f_S \frac{1}{1 - \frac{v_S}{c}} \approx f_S \left(1 + \frac{v_S}{c} + \frac{v_S^2}{c^2} + \dots\right)$

Relativistischer Doppler Effekt

$$f_B = f_S \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \cos \alpha \frac{v}{c}}$$

- $\cos \alpha = \pm 1$: longitudinaler DE
- $\cos \alpha = 0$: transversaler DE

[Folie: Relativistischer DE] zum Beispiel: Michelson-Interferometer

Laufzeit des Lichtes muss bei Lorenz-kontraktion ein berechnet werden. In QM wird gezeigt das alles wärme Energie abstrahlt. Jetzt betrachten wir Farben.

[Folie: Video zu Bewegte Strahlung]

I.4.6 Aberration des Lichts

[Folie: Folien zur Aberration des Lichts, Fernrohr]

I.5 Relativistische Dynamik

Wir wollen jetzt die Newton Gleichungen Lorenz-invariant hinbekommen. Wobei wir das Fundamentale und die Erhaltungssätze nicht "kaputt" machen wollen.

Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Erhaltungssätze (Energie, Impuls, Drehimpuls)

Energieerhaltung: Homogenität der Zeit

Impulserhaltung: Homogenität des Raums

$\Rightarrow E$ und p Erhaltung auch in SRT

I.5.1 Impulserhaltung und relativistischer Impuls

Gedankenexperiment

Vorher: ●●

Nacher: $\xleftarrow{v_1} \bullet \bullet \xrightarrow{v_2}$
A

Im Laborsystem gilt $\mathbf{p}_{\text{vorher}} = \mathbf{p}_{\text{nacher}}$:

$$\Rightarrow 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_0(v - v) = 0$$

Im Ruhesystem von Körper A gilt dann:

$$u = -v_1 \quad , \quad v'_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (m_1 + m_2)v_1 = m_2 v'_2$$

Klassisch gilt somit:

$$m_1 = m_2 = m_0 \quad v'_2 = v_2 + v = 2v \quad \checkmark$$

In der **SRT** gelten aber folgende Additionstheoreme für Geschwindigkeiten:

$$v'_2 = \frac{v_2 - u}{1 - v_2 \frac{u}{c^2}} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

Dies liefert jedoch einen Widerspruch mit unserem zuverigen Ergebnis.

$$\Rightarrow v'_2 < 2v \quad \nleftrightarrow \text{Impulsbilanz nicht erfüllt}$$

Relativistischer Impuls

$$\mathbf{p} = m(v) \cdot \mathbf{v} = \boxed{\gamma(v)m_0\mathbf{v}}$$

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

v ist die Geschwindigkeit der Systeme zueinander.

\mathbf{v} Die Geschwindigkeit des Körpers.

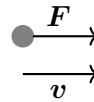
$$\boxed{\mathbf{p} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

I.5.2 Energieerhaltung und relativistische Energie

Gedankenexperiment:

Beschleunigung eines Körpers in einem konstanten Kraftfeld.

⇒ Körper gewinnt kinetische Energie.



$$E_{\text{kin}} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\begin{aligned} dE_{\text{kin}} &= F ds \stackrel{?}{=} \frac{dp}{dt} ds \\ &= m_0 d(\gamma v) \cdot v = m_0 v (v d\gamma + \gamma dv) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Trick: } 1 &= \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\ \Rightarrow 0 &= c\gamma d\gamma \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \gamma^2 \left(-\frac{2v}{c^2} dv\right) \\ \Rightarrow c^2 d\gamma &= v^2 d\gamma + \gamma v dv \\ \Rightarrow dE_{\text{kin}} &= m_0 c^2 d\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= m_0 c^2 [\gamma(v) - \gamma(0)] \\ &= \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 \end{aligned}$$

Einstein: $E = \gamma m_0 c^2 \hat{=}$ „Gesamtenergie“

$$\boxed{E = E_{\text{kin}} + m_0 c^2}$$

I.5.3 Relativistische Energie-Impuls-Beziehung und Viererimpuls

Dispersionsrelation: $E(\mathbf{p})$

Klassisch: $E(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m}$

SRT: $E = \gamma m_0 c^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E^2 &= \gamma^2 (m_0 c^2)^2 \text{ mit } \gamma^2 = 1 + \gamma^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 \\ \Rightarrow m_0 c^2 \gamma^2 &= m_0^2 c^2 + \gamma^2 m_0^2 v^2 = m_0^2 c^2 + \mathbf{p}^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow E^2 = (m_0 c^2)^2 + c^2 \mathbf{p}^2}$$

$$E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + c^2 \mathbf{p}^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 = (m_0 c)^2$$

Viererimpuls

$$\hat{\mathbf{p}} = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 \quad \text{ist Lorentz-invariant !}$$

\Rightarrow Die Ruhemasse m_0 ist Lorentz-invariant.

Was ist Masse?

Masse charakterisiert die Energie-Impuls-Beziehung relativistischer Teilchen $\hat{=}$ masseloser Teilchen $\hat{=} v = c \Leftrightarrow m_0 = 0$.

$$\Rightarrow E(\mathbf{p}) = c|\mathbf{p}|$$

Massebehaftete Teilchen, $m_0 > 0$, $v < c$

$$E(\mathbf{p}) = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + c^2 \mathbf{p}^2} \xrightarrow{v \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0}$$

I.5.4 Kraft und Energie-Impuls Erhaltung

klassisch gilt:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

und Impulserhaltung:

$$\mathbf{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{p} = \text{const.}, \quad E = \text{const.}$$

In der SRT gilt:

$$\hat{\mathbf{F}} = \gamma(m_0 c \frac{d\gamma}{dt}, F_x, F_y, F_z)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{p}}$$

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt$$

Relativistische Energie-Impuls Erhaltung

$$\hat{\mathbf{F}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\mathbf{p}} = \text{const.}$$

- Zeitanteil $\hat{=}$ Energieerhaltung: $E_{\text{ges}} = E(\mathbf{p}) + E_{\text{pot}} \dots = \text{const.}$
- Raumanteil $\hat{=}$ Impulserhaltung: $\mathbf{p}_{\text{nacher}} = \mathbf{p}_{\text{vorher}}$

I.5.5 Anwendungsbeispiele

Äquivalenz von Masse und Energie

$m_0 c^2$ ist eine Energie, also muss sie, rein physikalisch gesehen, frei umwandelbar sein.

Bindungsenergie: ein mehr Teilchensystem hat mehr Energie als die einzelnen Teilchen, diese zusätzliche Energie ist die Bindungsenergie und sie äußert sich als Massenänderung.

$$E = m_0 c^2$$
$$1\text{kg} \hat{=} mc^2 = 10^{17} \text{ J}$$

Weltenergieverbrauch ca.: $4 \cdot 10^{20} \text{ J} \hat{=} 4 \text{ T} / \text{Jahr}$

Bindungsenergie $\hat{=}$ Massenänderung

[Folie: Fusion/Kernspaltung]

$$p : \quad m_p = 938,27 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$
$$n : \quad m_n = 939,54 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$
$${}^4\text{He} : \quad m_{\text{He}} = 3727 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$
$$2n + 2p = 3754 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$
$$\Rightarrow \text{Bindungsenergie} \quad 24 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

[Folie: Bindungsenergie von Atomen] Kernspaltung/Kernfusion

Beispiel: Compton Effekt

Streuung eines Photons an einem (quasi-) freien, ruhenden Elektron

$$\Delta R = \lambda_c (1 - \cos \theta)$$
$$\lambda_c = \frac{h}{mc} = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Allgemeine Relativitäts Theorie: die Grundlage ist Masse in Gravitation.

I.6 Von der SRT zur ART

ART $\hat{=}$ allgemeine Relativitätstheorie

I.6.1 Äquivalenzprinzip (*die heilige Kuh der Physik*)

Träge und schwere Masse sind zwei unterschiedliche Größen aus den zwei Formeln. Fahrstuhl hat kein Bezug auf die Umwelt, man spürt nur eine Kraft.

Beobachtung: Träge Masse $\hat{=}$ schwere Masse $m_t = m_s$

$$\mathbf{F} = m_t \mathbf{a} \quad \text{träge Masse}$$
$$\mathbf{F}_{12} = G \frac{m_{1S} m_{2S}}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|} \rightarrow \mathbf{F} = m_s \mathbf{g} \quad \text{schwere Masse}$$

[Folie: Fahrstuhl-Äquivalenzprinzip]

⇒ In einem geschlossenen Raum gilt: Die Beschleunigung aufgrund einer Kraft ist nicht von der Gravitation zu unterscheiden ☹

Experimente:

- Pendel
- Satelliten: lokales Inertialsystem das Kräftefrei ist
- Freie-Fall-Experimente (Parabelflug bei Flugzeugen oder Freifall Experiment Turm)
[Folie: Freifall Experiment Turm in Bremen]

Äquivalenzprinzip war anfangs auf 1 g bestätigt aber mittlerweile sehr genau, also wollen wir es aufrecht erhalten.

[Folie: Wie genau ist das Äquivalenzprinzip bestätigt]

[Folie: Verletzungen des Äquivalenzprinzips]

Äquivalenz Prinzip, drei Formulierungen

Inertialsysteme gelten nur in kleinen Raumbereichen da die Gravitationskraft abhängig von r^2 ist.

[Folie: Verletzung des Äquivalenzprinzips]

Die Gravitation ist bis heute noch ein ungelöstes Problem. Ähnlich wie Newton und Maxwell, an irgendeiner Stelle müssen wir etwas korrigieren, da die Theorien der Wechselwirkungen nicht vereinbar sind. Vielleicht existiert eine fünfte fundamentale Kraft.

- 1) Ein kleines Labor, welches in einem Schwerfeld frei fällt ist äquivalent zu einem lokalen Inertialsystem, in welchem die Gesetze der SRT gelten.
- 2) Beobachte im Fahrstuhl, Raumschiff (ohne Antrieb):
⇒ Es ist nicht entscheidbar ob man sich gradlinig im freien Raum oder beschleunigt im Gravitationsfeld bewegt.
- 3) Der freie Fall ist Äquivalent zur Schwerelosigkeit

I.6.2 Gravitation und Raumkrümmung

Die Abweichung von einer geraden Bahn kann man auf zwei Arten definieren oder festlegen:

- (i) Kraft oder
- (ii) Krümmung des Raums

[Folie: zur Raumkrümmung]

Idee: Gravitation nicht mehr als Kraft, sondern als Krümmung des Raums betrachten.

Gilt nur für die Gravitationskraft!

Mathematisch: Gravitation beeinflusst die Metrik des Raums

Eine Möglichkeit ist es, ict^2 zu verwenden damit ein Minus bei dem Skalarprodukt auftaucht, eine andere option ist das Skalarprodukt anders zu definieren zum Beispiel mit einem Vektor $(1, 1, 1, -1)$. Die Feldgleichungen der ART sind tatsächlich sehr kompliziert und werden meistens nicht behandelt.

Konsequenzen:

- Raum und Zeit sind nicht statisch, sondern dynamisch
- Inertialsystem nur noch lokal, im homogenen Schwerfeld

I.6.3 Periheldrehung des Merkurs

Kepler'sche Bahngesetze [Folie: zur Periheldrehung des Merkur]

⇒ geschlossene Ellipsen mit der Sonne im Brennpunkt

Beobachtung beim Merkur:

Periheldrehung $5,74''$ pro Jahr

[Folie: Merkur Umlaufbahn]

Merkur ist nah an der Sonne da treten diese Periheldrehungen deutlicher auf. Was kann diese Bewegung laut Newton beeinflussen? Andere Planeten.

Rechnungen nach Newton mit Einbeziehung der Potentiale der anderen Planeten: $0,4311''$ pro Jahr mehr als die gemessene

ART: Überschuss von $0,4303''$ pro Jahr

I.6.4 Ablenkung von Licht durch Gravitation

[Folie: zur gravitativen Ablenkung von Licht][Folie: Bilder zur Ablenkung von Licht um die Sonne bei einer Sonnenfinsternis]

Durch die Sonnenfinsternis konnte ein Stern beobachtet werden dessen Position am Himmel sich durch der Lichtbeugung verändert während die Sonne sich in der Nähe bewegt. Dies hat dieses Phänomen bestätigt.

⇒ Sonnenfinsternis 1919

[Folie: Mehr Bilder zu Gravitationslinsen][Folie: Video: zu Gravitationslinsen]

I.6.5 Gravitationswellen

Indirekte Beobachtung umkreisender Neutronensterne PSR1913+16

Abstrahlung von Gravitationswellen ⇒ Energieverlust → Sterne kommen sich immer näher.
Nobel Preis 1993

Direkte Beobachtung: Detektoren durch Relativbewegung von Massen

- (i) Resonanzdetektor
- (ii) interferometrische Detektoren (Michelson-Morley)
[Folie: zu Michelson Interferometern]
11. Februar 2016: LIGO
Nobel Preis 2017

I.6.6 Global Positioning System (GPS)

gegeben: Satelliten, Atomuhren, $3,87 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ in Höhe von ca. 20000 km

SRT: ⇒ Zeitdilatation um $\approx 7 \mu\text{s}/\text{Tag}$

ART: ⇒ Zeitdilatation um $\approx 45 \mu\text{s}/\text{Tag}$

⇒ Ortsmessung um ca $11,4 \text{ km}/\text{Tag}$ verschoben falsch

Kapitel II

Geometrische Optik

II.1 Lichtstrahlen

Licht hat eine **Ausbreitungsgeschwindigkeit** $s = ct$. Diese Geschwindigkeit ist nur im Vakuum konstant und hängt von der Materie die der Lichtstrahl durchläuft ab. Diese Geschwindigkeit im Medium ist gegeben durch den **Brechungsindex**.

$$n = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{c_{\text{Medium}}}$$

Luft: $n = 1,00027$

Wasser: $n = 1,333$

Diamant: $n = 2,417$

Warum ist das denn so? Wie interagieren die elektromagnetischen Felder des Lichtstrahls also mit der Materie?

Antwort:

Die Ladungsträger in der Materie erfahren aufgrund der elektrischen Felder eine Kraft. Die Ströme der bewegten Ladungen Wechselwirkungen mit den Magnetischen Feldern, jedoch ist dieser Effekt viel kleiner als der der \mathbf{E} -Felder.

Die Elektronen kann man sich mit einer Feder an der Atomkern gebunden vorstellen. Mit dem \mathbf{E} -Feld des Lichtstrahls haben wir das Modell eines getriebenen gedämpften harmonischen Oszillators: **Das Lorenz-Lorentz-Oszillator Modell**.

Genaugenommen kann man sich das auch so vorstellen, dass die Photonen immer wieder absorbiert und nach einer Zeitverzögerung abgestrahlt werden, jedoch ist dies schwer zu berechnen.

Bemerkung:

zwei Medien $n_1 > n_2$

n_1 : **optisch dichter**

n_2 : **optisch dünner**

II.2 Das Fermat'sche Prinzip

II.2.1 Fermat'sches Prinzip

Die Ausbreitung des Lichts zwischen zwei Punkten erfolgt auf dem Weg, für den die benötigte Zeit extremal ist.



⇒ Konsequenz

Der Strahlengang ist umkehrbar ☺

Mathematische Handwerkzeuge

$$t = \frac{1}{c_{\text{Vakuum}}} \int_{P_1}^{P_2} n(s) ds$$

Parametrisierung des Wegs τ

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$$

$$t(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_{\text{Vakuum}}} \int_{P_1}^{P_2} n(\mathbf{x}(\tau)) \sqrt{\left(\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}\right)^2} d\tau$$

II.2.2 Weg zwischen zwei Punkten A und B

A • ————— • B

II.2.3 Reflexionsgesetz

[Folie: zu Reflexion an Oberflächen]

Berechnung der Wegstrecke

$$s(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{d^2 + (b-x)^2}$$



Extremum:

Da wir uns in einem homogenen Medium befinden und die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, ist die Strecke s proportional zur Zeit t und wir können das Extremum der Strecke berechnen.

$$\frac{ds}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}}_{\sin \alpha} = \underbrace{\frac{b-x}{\sqrt{d^2 + (b-x)^2}}}_{\sin \beta}$$

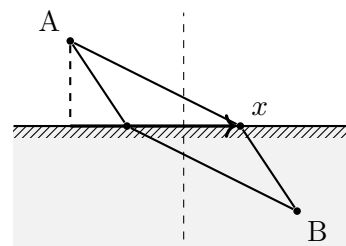
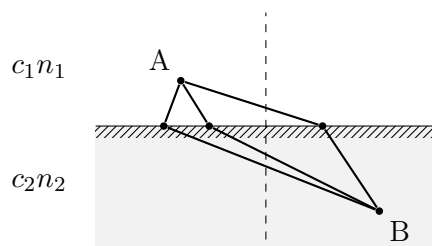
Reflexionsgesetz

$$\sin \alpha = \sin \beta$$

Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel.

II.2.4 Brechungsgesetz von Snellius

$$n_1 \neq n_2 \quad \Leftrightarrow \quad n(s) \neq \text{const.}$$



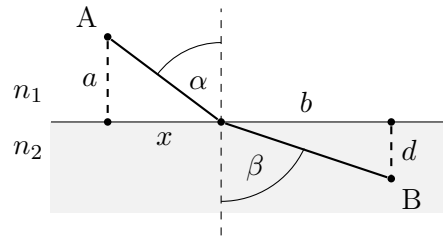
Berechnung des Laufzeit des Lichts

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(b-x)^2 + d^2}}{c_2} = \frac{1}{c} \left(n_1 \sqrt{x^2 + a^2} + n_2 \sqrt{(b-x)^2 + d^2} \right)$$

[Folie: zu Brechung] $\frac{dt}{dx} = 0$

Brechungsgesetz

$$\Rightarrow n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$$



II.3 Einfache Anwendungen

II.3.1 Totalreflexion

→ siehe Experimentalphysik II

[Folie: zur Totalreflexion z.B. unter Wasser]

$$\sin \alpha_{\text{TR}} = \frac{n_2}{n_1}$$

II.3.2 Optisches Prisma

Bei Drehung des Prismas kann der Winkel δ verändert werden. Hier gibt es es ein Minimum, jedoch kann er nie null werden, da das Licht nie gerade durch das Prisma hindurch kommen kann.

Beobachtung I

Die Ablenkung ist minimal für den symmetrischen Strahlengang

$$\sin \frac{\delta_{\min} + \gamma}{2} = n \sin \frac{\gamma}{2}$$

[Folie: Demtröder: Prisma]



Berechnung:

(i) $\gamma = \beta_1 + \beta_2$

(ii) $\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2$

(iii) $\sin \alpha_1 = n \sin \beta_1$, $\sin \alpha_2 = n \sin \beta_2$

gesucht ist $\frac{d\delta}{d\alpha_1} = 0$

\Rightarrow

(i) $d\gamma = d\beta_1 + d\beta_2 = 0$

(ii) $d\alpha_1 = d\alpha_2$ ($\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma$) ($d\delta = 0$)

(iii) $\cos \alpha_1 d\alpha_1 = n \cos \beta_1 d\beta_1$
 $\cos \alpha_1 d\alpha_2 = n \cos \beta_2 d\beta_2$

$$\Rightarrow \frac{\cos \alpha_1 \cancel{d\alpha_1}}{\cos \alpha_2 \cancel{d\alpha_2}} = \frac{\cos \beta_1 \cancel{d\beta_1}}{\cos \beta_2 \cancel{d\beta_2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \sin^2 \alpha_1}{1 - \sin^2 \alpha_2} = \frac{1 - \sin^2 \beta_1}{1 - \sin^2 \beta_2} = \frac{n^2 - \sin^2 \alpha_1}{n^2 - \sin^2 \alpha_2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta_1 = \beta_2 \end{array} \right\} \text{symmetrischer Strahlengang}$$

$$\Rightarrow \delta_{\min} = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma = 2\alpha - \gamma \quad \gamma = 2\beta$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = n \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \sin \frac{\delta_{\min} + \gamma}{2} = n \sin \frac{\gamma}{2}$$

□

Bemerkung:

Dieser Zusammenhang wurde früher zur Bestimmung von n genutzt ☹

Professor redet darüber, dass wir immer kompliziertere Experimente verstehen können, und diese aufgrund des Aufwands bei der Ausführung nicht mehr immer in der Vorlesung gezeigt werden können. Wir sollen lernen uns Experimente vorzustellen ohne sie direkt zu sehen und die Formeln als Handlungsanweisungen zu sehen die wir nutzen können. Abgesehen davon sollen wir uns auch im klaren darüber sein wie genau verschiedene Messmethoden sind.

Beobachtung II

optische Dispersion:

$$\frac{dn(\lambda)}{d\lambda} < 0 \quad (\text{normale Dispersion})$$

(Bei der anormalen Dispersion ist $\frac{dn(\lambda)}{d\lambda} > 0$)

[Folie: zur Dispersion: Beispiel Regenbogen]

Wieso gibt es Dispersion? Vorstellung: Die Atome mit ihren Elektronen haben Resonanzfrequenzen. Somit ist die erzwungene Schwingung, die die Licht-Welle in der Materie anregt, von der Frequenz des Lichts abhängig.

Die meisten Resonanzfrequenzen liegen im Ultraviolett-Bereich. Deshalb sehen wir meist normale Dispersion. Im Bereich über Ultraviolettem Licht ist auch anormale Dispersion beobachtbar.

⇒ Experimentalphysik II

II.4 Sphärische, dünne Linse

Zunächst einmal betrachten wir sphärische Linsen speziell dünne Linsen: Wir betrachten die dünne Linse als eine unendlich-dünne Linse, da wir hierbei einige vereinfachungen machen können (Taylor-entwicklungs-Terme fallen weg).

II.4.1 Brennpunkt und Brennebene

[Folie: zur Sammel- und Streulinsen]

Wir betrachten zunächst den Strahlengang einer Linse:

Lieblingsprüfungsfrage: Parallel einfallendes Licht, das nicht parallel zur optischen Achse verläuft, in eine Sammellinse. Strahlen werden immer noch fokussiert aber Brennpunkt verschoben. Konstruktion mit Zentralstrahlengang ?

[Folie: zur der Lieblingsfrage]

3 Regeln zur Konstruktion von Strahlengängen

Nur für dünne Linsen:

- 1) Parallel einfallende Strahlen fallen durch den Brennpunkt aus
- 2) Durch Brennpunkt einfallender Strahlen fallen parallel aus
- 3) Der Zentralstrahl wird nicht abgelenkt

II.4.2 Berechnung des Brennpunktes bzw. der Brennweite

Bei der Streulinse genau dasselbe nur ein negatives Vorzeichen an der Brennweite.

[Folie: zu Strahlengängen durch Sammellinsen]

Ein Linsenstück im Abstand h von der optischen Achse betrachten wir als Prisma.

Näherungen der „dünnen“ Linse

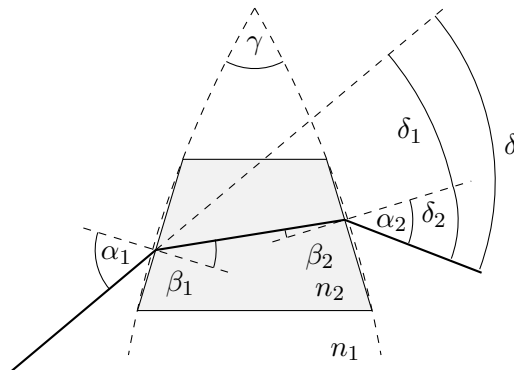
alle Winkel sind klein \rightarrow trigonometrische Näherungen

$$\sin(x) \approx x \quad \cos(x) \approx 1 \quad \tan(x) \approx x$$

Berechnung:

Ablenkung des Strahls

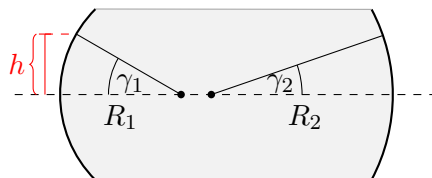
- (i) $\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2$
- (ii) $\beta_1 + \beta_2 = \gamma$
- (iii) $n_1 \alpha_1 \approx n_2 \beta_1 \quad n_2 \beta_2 \approx n_1 \alpha_2$
 $\Rightarrow \delta = \gamma \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right)$



Winkel γ :

- (iv) $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$
- (v) $\gamma_1 \approx \frac{h}{R_1} \quad ; \quad \gamma_2 \approx \frac{h}{R_2}$
 $\Rightarrow \gamma = h \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$

Winkel δ :



(vi) $\delta \approx \frac{h}{f}$



Linsenschleiferformel

$$\Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

\Rightarrow Die Brennweite f ist unabhängig von h . Hätte wir oben keine Näherungen für die Winkelfunktionen benutzt (bei allen Rundungssymbolen), dann wäre die Brennweite abhängig von der Höhe h . Hier sehen wir, dass die Gleichung für eine dünne Linse nur eine Annäherung an echte Linsen ist.

Def: Brechkraft

$$D = \frac{n}{f}$$

Bemerkung:

$$D = D_{\text{Vorne}} + D_{\text{Hinten}}$$

II.4.3 Abbildung (am Beispiel einer Sammellinse)

Berechnung:

i) $\delta = \alpha + \beta$

ii) $\alpha \approx \frac{h}{a} \quad \beta \approx \frac{h}{b}$

iii) $\delta \approx \frac{h}{f}$



Abbildungsgesetz

$$\Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Abbildung eines Gegenstands G :

Graphisch:

- (1) parallel ein \rightarrow durch Brennpunkt aus
- (2) durch Brennpunkt ein \rightarrow parallel aus
- (3) Zentralstrahl läuft gerade

Rechnerisch

(i) $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

(ii) $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$



II.5 Abbildungsfehler

⇒ Beschränkung durch Beschreibung mit geometrischer Optik

⇒ Näherungen (dünne Linse)

II.5.1 Dicke Linsen

[Folie: Dicke Linsen]

Brechung der Lichtstrahlen an zwei Hauptebenen

II.5.2 Sphärische Abberation

[Folie: Sphärische Abberation]

II.5.3 Chromatische Abberation

[Folie: Chromatische Abberation]

optische Dispersion

II.5.4 Astigmatismus

[Folie: Astigmatismus]

II.5.5 Absorption

Bei verunreinigten Stoffen wird Licht absorbiert.

II.5.6 Beugung

Werden wir später behandeln.

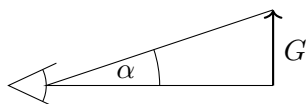
II.5.7 Optisches Auflösungsvermögen

Mit freilaufenden Wellen lassen sich keine Strukturen auflösen, die deutlich kleiner sind als die Wellenlänge λ sind.

II.6 Optische Instrumente

II.6.1 Vergrößerung

Sehwinkel:



$$\tan \alpha = \frac{\text{Größe des Objekts}}{\text{Entfernung des Objekts}}$$

Winkelvergrößerung

$$V = \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel ohne Instrument}}$$

Lateralvergrößerung oder Abbildungsmaßstab

$$L = \frac{\text{Bildgröße}}{\text{Gegenstandsgröße}}$$

II.6.2 Das menschliche Auge

[Folie: menschliches Auge]

Hornhaut & Linse. Die Hornhaut hat den größten Beitrag zur Brechung

Definition: Brennweite der deutlichen Sehweite

25 cm

$$\Rightarrow \tan \alpha_{\text{Auge}} = \frac{G}{25 \text{ cm}}$$

Vergrößerung

$$V = \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\alpha_{\text{Auge}}} = (\text{Sehwinkel mit Instrument}) \frac{25 \text{ cm}}{G}$$

II.6.3 Optisches Instrument mit einer Linse: Lupe



Gegenstand nahezu in Brennebenen, $g < f$

Graphisch: siehe oben

Rechnerisch: Abbildungsgesetz der Lupe $\frac{1}{g} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$

Abbildungsmaßstab

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} = \frac{f}{f - g} = \frac{f + b}{f}$$

Vergrößerung:

Sehwinkel des Instruments

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{G}{f} \quad (g \approx f)$$

$$\Rightarrow V = \frac{\alpha}{\alpha_{\text{Auge}}} = \frac{G}{f} \frac{25 \text{ cm}}{G} = \frac{25 \text{ cm}}{f}$$

II.6.4 Optische Instrumente mit zwei Linsen

zwei Linsen = drei Fälle:

Doppellinse, Fernrohr, Mikroskop

1) **Doppellinse: Abstand der Linse \ll Brennweiten f_1, f_2**

[Folie: zu Doppellinsen]

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Berechnung:

b_1 der 1ten Linse = virtuelle Gegenstandsweite $a_2 = b_1 - D$ der zweiten Linse

$$1. \text{ Linse } \frac{1}{a} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}$$

$$2. \text{ Linse } -\frac{1}{b_1 - D} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_2}$$

\Rightarrow

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

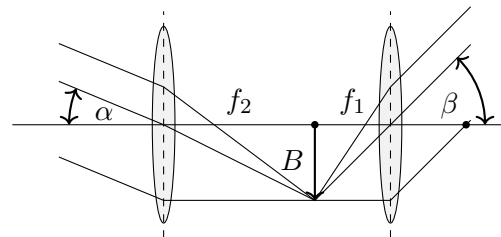
$$D_{\text{ges}} = D_1 + D_2$$

2) **Fernrohr (Kepler): Abstand der Linsen = Summe der Brennweiten $f_1 + f_2$**

\Rightarrow Zwischenbild in der Brennebene

Sehwinkel vor Objektiv:

$$\alpha \approx \frac{B}{f_1}$$



Sehwinkel nach Okular:

$$\beta \approx \frac{B}{f_2}$$

$$\Rightarrow \text{Vergrößerung } V = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{B}{f_2} \frac{f_1}{B} = \frac{f_1}{f_2}$$

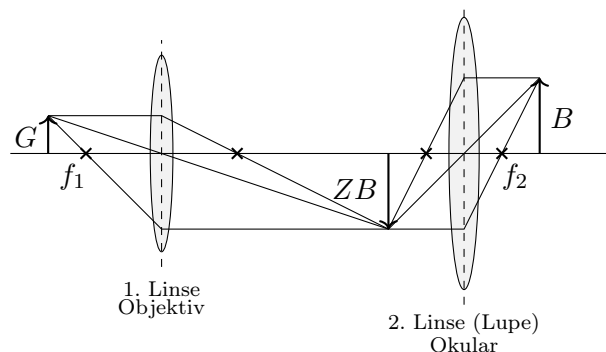
Bemerkung:

- Kepler Fernrohr: Bild wird invertiert
- Galilei Fernrohr: Sammellinse und Zerstreuungslinse
keine Invertierung und kürzere Bauweise
- Fernglas:

[Folie: Galilei Fernrohr und Fernrohr mit drei Linsen]

3) **Mikroskop: Abstand der Linsen \gg Summe der Brennweiten $f_2 + f_1$**

Gegenstand nah am Objektiv



[Folie: anderes Bildschema Mikroskop] Veränderung durch Änderung der Tubuslänge

Verstärkung durch Objektiv $V_1 = \frac{B}{G} = \frac{b}{f_1}$

Verstärkung durch Okular $V_2 = \frac{25 \text{ cm}}{f_2}$

⇒ Vergrößerung:

$$V = V_1 V_2 = \frac{t \cdot 25 \text{ cm}}{f_1 f_2}$$

$t \approx 18 \text{ cm}$ wurde so definiert um den Vergleich von Geräten zu vereinfachen.

II.7 Elektronenoptik

[Folie: Elektronen Strahl]

Die Idee hier ist das man einen Elektronenstrahl der von einem \mathbf{E} -Feld abgelenkt wird als wie eine optische Beugung betrachten...

Elektronenstrahl Ablenkung durch elektrische und magnetische Felder

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

II.7.1 Beispiel: Brechungsgesetz für Elektronen

$$\sin \alpha = \frac{v_{1,x}}{v_1} \quad \sin \beta = \frac{v_{2,x}}{v_2}$$

el. Feld entlang x

$$v_{1,x} = v_{2,x}$$

$$\Rightarrow v_1 \sin \alpha = v_2 \sin \beta$$

Definition

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_2}{v_1}$$

Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + eU$$
$$v_1 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2e(U + U_0)}{m}}$$

⇒ Brechindex

$$\frac{n_2}{n_1} = \sqrt{1 + \frac{U}{U_0}}$$

II.7.2 Elektrische Rohrlinse

II.7.3 Magnetische Linsen

Lange Spule = homogenes Magnetfeld

Lorenz Kraft ⇒ Spiralbahnen der Elektronen ⇒ Bild wird gedreht

⇒ kleine Spule = inhomogene Magnetfelder ⇒ Brechkraft

[Folie: Elektronen in Magnetfeldern]

II.7.4 Elektronenmikroskope

[Folie: Elektronmikroskop]

Man kann ein Material untersuchen in dem man die Streuelektronen analysiert, die bei dem Elektronenmikroskop entstehen.

Bei der SRT muss man nach Gedankenfehler suchen, bei Optik müssen wir die Näherungen als Fehlerquelle anschauen, „ZahnmedizinerInnen“ würden alle Fehlerpunkte auswendig gelernt haben, während ein Physiker überlegen ”ok, wir haben die geometrische Optik angewandt also alles was da schief gehen kann und so weiter.”

Kapitel III

Wellenoptik

III.1 Wiederholung (Schwingungen und Wellen)

III.1.1 Schwingungen

[Folie: Harmonische Schwingungen]

Zwei größen: Amplitude und Phase, und zwei komponenten: inphase, und out of phase

III.1.2 Wellen

[Folie: Harmonische ebene Welle, Polarisierung, Kugelwellen]

Harmonische Ebene Welle in 1D

$$A(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) = \Re \left[\hat{A} e^{-i(\omega t - kx)} \right]$$

Das Minus in der Komplexen Schreibweise Stammt aus der Wellengleichung. Es kommt auch aus der Lorenzinvarianten.

Da EM-Wellen Transversalwellen sind und Ladungserhaltung/Eichinvarianz gilt, kann es nur zwei Polarisationsrichtungen geben.

[Folie: Wellengleichung]

III.1.3 Fourier-Transformation

Ein Thema das nie richtig behandelt wird, aber wichtig ist, vielleicht leiste ich heute ein Beitrag dazu.

Harmonische Schwingungen:

$$A(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi) = \Re[\hat{A}_0 e^{-i\omega t}]$$

Periodische Schwingungen: Fourier-Reihe

$$A(t) = A(t + T) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) = \Re \left[\sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n e^{-in\omega_0 t} \right]$$
$$\omega_m \leq n\omega_0$$

Beliebige Zeitabhängigkeit: Fourier Transformation

$$A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega = \Re \left[\int \hat{A}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right]$$

Bemerkung: Wir können zwei Fourier Transformationen machen, nach Ort und nach Zeit.

- Umkehr Transformation: Faktor 2π taucht auf
- Analog für $e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$
- Die Fourier Transformation impliziert eine "Unschärfe Relation" Eine Eigenschaft der FT

$$\Delta\omega\Delta t \approx \mathcal{O}(2\pi) \quad \Delta\mathbf{k}\Delta\mathbf{x} \approx \mathcal{O}(2\pi)$$

Beispiel: Gedämpfte Schwingung, Zerfall, Relaxation

Exponentielles Abklingverhalten

$$A(t) \propto e^{-\frac{t}{\tau}} \Leftrightarrow = \text{Lorentz-Funktion}$$

τ : Zeitkonstante [Folie: Zeitraum/Frequenzraum]

Ein exponentieller Zerfall ist immer mit der Lorentz-Funktion verbunden. Eine ungedämpfte harmonische Schwingung: $\tau = \infty$.

Eine unendlich langer, unendlich langsamer Schwingung ist im Frequenzraum unendlich scharf. Eine ungedämpfte harmonische Schwingung ist also im Frequenzraum unendlich scharf und wird damit zu einer Dirac-Delta-Funktion mit dem Peak bei der Frequenz der Schwingung. Eine solche Welle ist im Ortsraum überall verteilt.

Beispiel: Wellenpaket

ebene Welle: $E(\mathbf{x}, t) = E_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x})}$

$$\Rightarrow |E|^2 = E_0^2 = \text{const.}$$

[Folie: Wellenpakete]

Im Wellenvektorraum ist die Welle jedoch wieder mit einer Delta-Funktion beschrieben. Ein Wellenpaket ist im Ortsraum lokalisiert aber im Wellenvektorraum sehr unscharf verteilt.

Die Fouriertransformation einer Gauß-Verteilung (wird oft für Wellenpakete verwendet) ist wieder eine Gauß-Verteilung. Die Fouriertransformation einer Exponentiell Abfallenden Welle ist eine Lorentz-Funktion.

III.1.4 Kohärenz

Definition: Zwei oder mehr Wellen sind Kohärent, wenn die Zeitabhängigkeit der Auslenkungen bis auf eine Phasendifferenz der gleiche ist ?

Viele gründe warum Wellen nicht kohärent sind:

- spontan emittiertes Licht vieler unabhängiger Lichtemitter (heiße Atome)
- zwei Lichtquellen schwanken leicht in Frequenz Amplitude, Phase (nicht stabil)
- zu ausgedehnte Lichtquelle

Gegenbeispiele:

- stimulierte Emission: einfallendes Licht zwingt angeregte Atome synchron mit dem Lichtfeld zu Schwingen und abzustrahlen.

Kohärenzlänge:

Kohärenzlänge: Keine Lichtquelle kann unendlich kohärentes Licht erstellen. Die minimal unterschiedlichen Frequenzen sorgen dafür, dass das Licht nach einer Weile nicht mehr kohärent ist. Die Flugweite der Lichtstrahlen bis die Kohärenz nicht mehr gegeben ist, nennt man Kohärenzlänge.

Kohärenzzeit:

Die dauer in der Kohärentes Licht nicht nicht mehr kohärent wird nennt man Kohärenzzeit.

$$\text{Kohärenzzeit} = \text{Kohärenzlänge}/c$$

Experimente:

- (i) Licht mit genügend großer Kohärenzlänge
- (ii) Licht aus **einer** Quelle aufteilen, wenn mehrere Kohärente Strahlen benötigt werden.

III.2 Intefferenz und Beugung I

III.2.1 Intefferenz am Doppelspalt

Berechnung der Maxima und Minima (d ist der Abstand der Spalte)

Gangunterschied $x = d \sin \alpha$

Maxima wenn x ein Vielfaches von λ ist (konstruktive intefferenz)

$$\rightarrow x = n\lambda$$

$$\Rightarrow \text{Maxima: } \sin \alpha = n \frac{\lambda}{d}$$

$$\Rightarrow \text{Minima: } \sin \alpha = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d}$$

Triviale aber Wichtige Feststellung: nicht nur d , nicht nur λ , sondern $\frac{\lambda}{d}$

Bemerkung:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Rightarrow kx = 2\pi n$$

$$\Delta f = 2\pi n = kx = \frac{2\pi}{\lambda} x$$

Feststellung: Ortsraum k -Raum reziprok

III.2.2 Beugung am Einzelspalt

Brechung der Intensitätsverteilungen $I(\alpha)$, in 6 Schritten

- (1) Strahl über Spalt wird in N Teilstrahlen zerlegt im Abstand: $\Delta b = \frac{b}{N}$
- (2) Amplitude eines Teilstrahls $a = \frac{\sqrt{I_0}}{N}$
- (3) Gangunterschied benachbarter Strahlen: $x = \Delta b \sin \alpha$
- (4) Phasenunterschied benachbarter Strahlen: $\Delta \varphi = kx = k\Delta b \sin \alpha$
- (5) Gesamtamplitude $\hat{=}$ Summe der N Teilstrahlen

$$\Rightarrow A = a \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i(\omega t + f_n)} = a e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Delta\varphi}$$

f_n ist die Phase des n -ten Teilstrahls und $f_n = n \cdot \Delta\varphi$

$$A = a e^{-i\omega t} \frac{e^{iN\Delta\varphi} - 1}{e^{i\Delta\varphi} - 1} = a e^{-i\omega t} e^{i\frac{N\Delta\varphi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\Delta\varphi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)}$$

$$\Rightarrow I(\alpha) = A^2 = a^2 \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}\Delta\varphi\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)} = a^2 \frac{\sin^2(x)}{\sin^2\left(\frac{x}{N}\right)} \quad x := \pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha$$

(6) Grenzübergang $\Delta b \rightarrow 0$ oder $N \rightarrow \infty$:

$$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{x}{N}\right) = \frac{x^2}{N^2}$$

$$\Rightarrow I(\alpha) = N^2 a^2 \frac{\sin^2(x)}{x^2}$$

Lösung:

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2(x)}{x^2} \quad x := \pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha$$

Diskussion:

Hauptmaxima: $x = 0 \rightarrow \alpha = 0$

Minima: $\sin x = 0 \rightarrow x = n\pi \Rightarrow \sin \alpha = n \frac{\lambda}{b}$

Nebenmaxima: $|\sin x| = 1 \rightarrow x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \Rightarrow \sin \alpha = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{b}$

Die Gleichungen sind unabhängig vom Abstand des Schirms. Dies stammt aus der Annahme es handelt sich um Ebene Wellen, die es nur im Fernbereich gibt. Daher gelten unsere Gleichungen und Annahmen auch nur im Fernbereich. Ist der Abstand zum Schirm nicht wesentlich größer als die Spaltbreite oder der Abstand der Spalten, gelten sie nicht mehr. Mehr dazu im Abschnitt Interferenz und Beugung II.

ACHTUNG:

Implizit Annahme ebener Wellen \Rightarrow Rechnung nur richtig im Fernbereich ☹

III.2.3 Beugung am Gitter

Definition:

Gitter: Regelmäßige Anordnung von „Strichen“ [Folie: Licht am optische Gitter] (wieder Annahme ebener Wellen)

Brechungs

- (1) Überlagerung von N Strahlen im Abstand d
- (2) Amplitude eines Strahls $a = \sqrt{I_0}$
- (3) Gangunterschied von benachbarten Strahlen $x = d \sin \alpha$

Weiter wie beim Einzelspalt:

- (4) Phasenunterschied $\Delta\varphi = kx = kd \sin \alpha$
- (5) Gesamtamplitude $\hat{=}$ Summe der Teilstrahlen

$$\Rightarrow A = a e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Delta\varphi}$$

$$\Rightarrow A(\alpha) = A_0 \frac{\sin\left(\pi \frac{Nd}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\sin\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin \alpha\right)} \quad A_0 : \text{geeignet definiert}$$

$$I(\alpha) = A^2$$

[Folie: Interferenzmuster in Abhängigkeit der Spaltenzahl]

Diskussion:

Hauptmaxima: Nenner klein $\pi \frac{d}{\lambda} \sin \alpha = m\pi$

$$\Rightarrow \sin \alpha = m \frac{\lambda}{d}$$

Nebenmaxima: Zähler klein $\Rightarrow \pi \frac{Nd}{\lambda} \sin \alpha = m\pi$

$$\Rightarrow \sin \alpha = m \frac{\lambda}{Nd}$$

Breite der Hauptmaxima:

Verhält sich wie der Abstand benachbarter Nebenmaxima

$$\Rightarrow B = \frac{2\lambda}{Nd}$$

Dispersion der Hauptmaxima (λ bzw. ω Abhängigkeit)

Lage: $\sin \alpha = m \frac{\lambda}{d}$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha}{d\lambda} = \frac{m}{d} \arccos \alpha \Rightarrow \frac{d\alpha}{d\lambda} > 0$$

Wenn ihr eine scharfe Linie wollt sollte euch sofort Gitter einfallen.

III.2.4 Beugung am Raum- oder Oberflächengitter

Definition:

Raumgitter: Kristall $\hat{=}$ regelmäßige Anordnung von Atomen im 3D Raum

[Folie: Diamant Kristallgitter]

$$\Rightarrow \boxed{2d \sin \alpha = m\lambda} \quad \text{Bragg-Bedingung}$$

d ist der Abstand von zwei Kristall-Ebenen oder Netzebenen

Versuch: Doppelspalt

Typischer Zahlenwert:

$$d \approx 1 \text{ \AA} \Rightarrow \lambda \approx 1 \text{ \AA} \approx \text{Röntgenstrahlung oder X-Ray}$$

Versuch: Gitter**Versuch: Kristall Struktur Messung it Röntgenstrahlung**

Anwendung von Kristallen: Röntgenstrukturanalyse mittels Röntgendefraktometer

X-Ray: Die Wechselwirkung von Röntgenstrahlung mit Materie ist die mit den Elektronen also der Lorenz-Lorentz-Oszillator $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Die Röntgenstrahlung Wechselwirkt also mit den Ladungen. Was wir beobachten ist also die Lage der Elektronen also nur indirekt die Lage der Atome.

Beispiel: Strukturanalyse von Kristallen

- X-ray: $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$
 - Streuung an der Elektronenhülle
 - Bestimmung der Elektronenladungshülle
- Neutronen n : starke WW
 - Streuung am Kern
 - Bestimmung der Kernpositionen

- Spin: magnetische Dipol-Dipol-WW
 - Streuung an Elektronenspins
 - \Rightarrow Magnetismus

Wie gut kommen Elektronen durch material durch? Überhaupt nicht gut, bei Isolatoren ist es in dem sehr kleinen 0,000... Å Bereich, bei Metallen trifft das Elektron gleich auf den "Elektronen See".

Beispiel: Untersuchung von Oberflächen LEED (Low Energy Electron Diffraction)

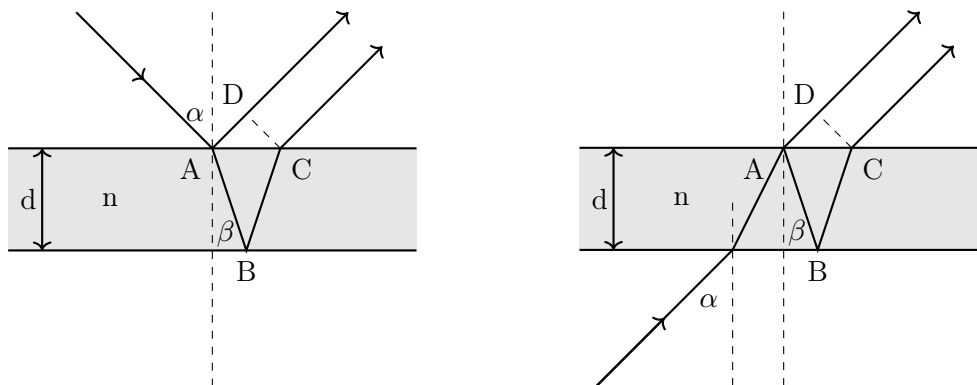
- e^- :
 - Streuung an der Elektronenhülle
 - Eindringtiefe ≈ 100 Å \Rightarrow Oberflächenanalyse

Die **Energie von Raumtemperatur** ist ungefähr $\frac{1}{40}$ eV. Sollte man Wissen.

[Folie: zu LEED]

III.2.5 Interferenz an planparallelen Glasplatten

[Folie: zu Reflexion an einer Glasplatte]



Reflexion

- (1) Länge der Wege \overline{AB} und \overline{BC}

$$x_{AB} = \frac{d}{\cos \beta} \quad x_{BC} = \frac{d}{\cos \beta}$$

- (2) Weg \overline{AD}

$$x_{AD} = \overline{AC} \sin \alpha = 2d \tan \beta \sin \alpha$$

- (3) Gangunterschied

$$x = n(x_{AB} + x_{BC}) - x_{AD}$$

n : Brechungsindex der Glasplatte

mit $\sin \alpha = n \sin \beta$ gilt:

$$x = 2dn \cos \beta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

(4) Phasenunterschied

Phasenunterschied aufgrund des Gangunterschieds $\Delta\varphi = kx = \frac{2\pi}{\lambda}x$

\approx senkrechter Einfall:

Phasensprung um π bei der Reflexion am optisch dichteren Medium ?

Bei senkrechtem Einfall, bei der Reflexion an einem optisch dichteren Medium, tritt ein Phasensprung um π auf (dies ergibt sich aus den Randbedingungen siehe z.B. ExpII, ist ähnlich zur Reflexion an „harter“ Oberfläche, siehe ExpI)

$$\Rightarrow \Delta\varphi = kx + \pi$$

(5) Für konstruktive Interferenz (Maxima): $\Delta\varphi = m2\pi$

$$\Rightarrow 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda$$

Transmission

(1) Gangunterschied wie zuvor

$$x = n(x_{AB} + x_{BC}) - x_{AD} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

(2) Phasenunterschied

Gangunterschied $\Rightarrow \Delta\varphi = kx$

Phasensprünge $\Rightarrow 0$

$$\Rightarrow \Delta\varphi = kx$$

(3) Maxima:

$$\Rightarrow 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = m\lambda$$

Test:

Annahme: keine Absorption in der Glasplatte: Die Intensitäten der Reflexion und die der Streuung sollten sich zu Gesamtintensität aufsummieren.

$$\Rightarrow \text{zu erwarten: } I = I_{\text{reflektiert}} + I_{\text{transmittiert}}$$

Wie erwartet da wo die Transmission maximal ist ist die Reflexion minimal und umgekehrt. Immer um $\frac{\lambda}{2}$ verschoben.

Anwendung

- **Versuch:** Interferenz mit zwei angewinkelten Spiegeln Fres'nelscher Doppelspiegel
[Folie: Fres'nelscher Doppelspiegel]
- [Folie: Newton's Ringe]
- **Versuch:** Seifenblase
die in Regenbogenfarben schillert
- **Versuch:** Interferenz an Planparalleler Folie
(mit grünem Laserlicht demonstriert)

III.2.6 Vielstrahlinterferenz, Fabry-Pérot-Interferometer

[Folie: Vielstrahlinterferenz an Planparallelen Platten]



Die Interferenz ähnelt der bei einem Gitter. Der große Unterschied liegt darin, dass die Intensität der Teilstrahlen mit zunehmenden Reflexionen abnimmt.

Reflexion (Transmission aus $I = I_{\text{ref}} + I_{\text{trans}}$)

- (1) Intensitäten der jeweiligen Teilstrahlen berücksichtigen
 \Rightarrow Reflexionskoeffizient R

$$\begin{aligned}
 |A_1| &= \sqrt{R}|A_0| \\
 |B_1| &= \sqrt{1-R}|A_0| \\
 |D_1| &= \sqrt{1-R}|B_1| = (1-R)|A_0| \\
 |C_1| &= \sqrt{R}|B_1| = \sqrt{R}\sqrt{1-R}|A_0| \\
 |A_2| &= \sqrt{1-R}|C_1| \\
 |B_2| &= \sqrt{R}|C_1| = R\sqrt{1-R}|A_0|
 \end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$\Rightarrow |A_{m+1}| = \sqrt{1-R}|C_m| = \sqrt{1-R}\sqrt{R}|B_m| = \sqrt{1-R}\sqrt{R}\sqrt{R}|C_{m-1}| = R|A_m|$$

$$\Rightarrow |A_{m+1}| = R|A_m| \quad |D_{m+1}| = R|D_m|$$

- (2) Gangunterschied benachbarter Strahlen (siehe Platte)

$$x = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

- (3) Phasenunterschied

$$\Delta\varphi = kx + \text{Phasensprünge}$$

\uparrow
 Gangunterschied

Bei den Phasensprüngen folgt nach längerer Arbeit, dass nur der Phasensprung A_1 übrig bleibt.

- (4) Gesamtamplitude

$$A = \pm \sum_{m=1}^N A_m e^{i(m-1)\Delta\varphi}$$

N : Anzahl der betrachteten Teilstrahlen

\pm : Berücksichtigt die Phasensprünge

(5) Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ (unendlich lange Glasplatte):

$$\Rightarrow A = \pm A_0 \sqrt{R} \frac{1 - e^{i\Delta\varphi}}{1 - R e^{i\Delta\varphi}}$$

$$\Rightarrow I_R = |A|^2 = 2I_0 R \frac{1 - \cos \Delta\varphi}{1 - 2R \cos \Delta\varphi + R^2}$$

Ergebnis

Airy-Formeln

$$I_R = I_0 \frac{F \sin^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right)}{1 + F \sin^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right)}$$

$$I_T = I_0 \frac{1}{1 + F \sin^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right)}$$

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2} \quad \frac{\Delta\varphi}{2} = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

Beispiel: **senkrechter Einfall**

$$\Rightarrow \alpha = 0 \quad I_T = I_0 \frac{1}{1 + F \sin^2(ndk)}$$

wobei $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ Maxima:

$$2nd = m\lambda$$

FWHM (full width at half maximum)

$$\varepsilon = 4 \arcsin \sqrt{\frac{1}{F}} \approx \frac{4}{\sqrt{F}}$$

$\Rightarrow R \rightarrow 1 \Leftrightarrow$ schmal-bandige Maxima

[Folie: Maxima beim FWHM]

Anwendung: Fabry-Pérot-Interferometer

[Folie: zu Fabry-Pérot-Interferometern]

Versuch: Natrium-Dampf-Lampe Interferenz

[Folie: Interferenz mit einer Natrium-Dampf-Lampe]

Versuch: Abpumpen der Luft beim Interferenzmuster der Natrium-Dampf-Lampe
Das Muster verändert sich erheblich obwohl der Unterschied der Brechungsindizes so gering war.
Also hat das Farbinferferometer eine sehr hohe Auflösung.

III.3 Interferenz und Beugung II - Huygen'sches Prinzip

III.3.1 Huygen'sches Prinzip

Jeder Punkt einer Wellenfront ist Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle.

Beispiel: **Brechung**

Erklärung über Ausbreitung ebener Wellen [Folie: Brechung mit Ebenen Wellen]

III.3.2 Interferenz am Doppelspalt

Jeder Spalt, wenn er klein genug ist, wird als „Sender“ einer Elementarwelle angesehen.
⇒ Überlagerung von zwei Kugelwellen.

[Folie: zu Doppelspalt mit Kugelwellen]

III.3.3 Beugung

Beugung bezeichnet das Phänomen, das Licht (und andere Wellen) in Bereiche vordringt, in welche es als Strahl betrachtet nicht vordringen dürfte.

Beugung tritt immer an Stellen auf, an denen die Transmission einer Welle verhindert wird. Dies ist z.B. der Fall an Kanten bei denen an einer Seite komplette Abschattung und an der anderen komplette Transmission stattfindet.

Interferenz tritt dann auf, wenn es zwei solche Stellen gibt an denen Beugung auftritt.

Versuch: Laser mit Kante und später Loch-/Kreisblende und später Stecknadelkopf

Man sieht auch an dieser einzelnen Kante Interferenz. Dies zu verstehen ist Ziel der heutigen Vorlesung. **Das Interferenzmuster ist die Fouriertransformation einer Stufenfunktion.** Bei der Lochblende einer Fouriertransformation eines „Loches“.

[Folie: Doppelspalt Beugung][Folie: Einzelspalt]

III.3.4 Allgemeine Behandlung der Beugung

Zur Verallgemeinerung behandeln wir nun das Kirchhoff'sche Beugungsintegral.

Kirchhoff'sches Beugungsintegral

In verschiedenen Büchern treten häufig andere Formel des Gleichen Integrals auf.

[Folie: Beugungsintegral]

Die Blende wird als eine Transmissionsfunktion beschrieben. Zu jedem Punkt aus dem Schirm gibt es dann ein Integral der Intensitäten aller Elementarwellen aus der Blende. Blendenöffnung bei $z = 0$

Beobachtungsschirm bei $z = z' = z_0$

Kirchhoff'sches Beugungsintegral

$$E(\mathbf{x}') = \frac{ik}{2\pi} \int Q\tau(x, y) E_{\text{ein}}(\mathbf{x}) \frac{e^{-ikr}}{r} d\sigma$$

Q := Neigungsfaktor

τ := Transmissionsfunktion mit $\begin{cases} \tau = 1 : & \text{vollständige Transmission} \\ \tau = 0 : & \text{undurchlässig} \end{cases}$

r := Abstand des Punkts \mathbf{x} und \mathbf{x}'

$$r^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + z'^2$$

Sketch der Herleitung

(1) Für das von der Blende bei $z = 0$ durchgelassene Licht gilt:

$$E_{\text{Blende}}(x, y) = E_{\text{ein}}(x, y, z = 0) e^{i\varphi(x, y, z=0)}$$

(2) Jeder Punkt der Öffnung erzeugt eine Elementarwelle

$$dE(x', y', z') \propto Q\tau(x, y) E_{\text{ein}}(x, y) \frac{e^{-ikr}}{r} \underbrace{dx dy}_{d\sigma}$$

$$Q \propto \frac{1}{2}(\cos \theta_1 + \cos \theta)$$

(3) Insgesamt:

$$E(x, y', z') \propto \int Q \tau(x, y) E_{\text{ein}} \frac{e^{-ikr}}{r} d\sigma$$

(4) Vektoren und Beträge „richtig“ machen.

Grenzfälle:

- Fraunhofer-Beugung:

Abstand des Schirms von der Blende sehr groß gegenüber Öffnung der Blende.

$$z' \gg x, y \quad z_0 \gg \frac{b^2}{\lambda}$$

- Fresnel Beugung:

Abstand des Schirms von Blende klein.

$$z' \ll x, y \quad z_0 \ll \frac{b^2}{\lambda}$$

- Überganszone $z_0 \approx \frac{b^2}{\lambda}$

[Folie: Folie Nah-/Übergangs-/Fernbereich]

III.3.5 Allgemeines Ergebnis für die Beugung im Fernbereich, Fraunhofer Beugung

Fernbereich: $z' \gg x, y$

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z'^2}$$

Zur Näherung: Näherungen zu machen ist nicht sehr einfach und der Prozess nicht sehr präzise zu Beschreiben. Es ist nicht leicht eine gute Näherung zu finden. Man muss dabei darauf Achten, dass man durch seine Näherung nicht interessante physikalische Zusammenhänge „Wegnähert“. In unserem Fall muss die e -Funktion genau genähert werden, das r im Nenner nur grob.

präziser Nähern wir $z' \gg \frac{1}{\lambda}(x^2 + y^2)$

$$r \approx z' \left(1 - \frac{xx'}{z'^2} - \frac{yy'}{z'^2} + \frac{x'^2 + y'^2}{2z'^2} \right)$$

Im Nenner $r \approx z'$

In dieser Näherung auch $Q \approx 1$

Beugungsintegral für Fraunhofer Beugung

Nebenrechnung: $\frac{e^{-ikr}}{r} \approx \frac{e^{-ikz'}}{z'} e^{ik\frac{x'}{z'}x} e^{ik\frac{y'}{z'}y} e^{-ik\frac{1}{2z'}(x'^2 + y'^2)}$

Die ersten Beiden Faktoren hiervon landen später im Vorfaktor A .

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}') = \underbrace{A(\mathbf{x}')}_{\substack{\text{alles Lästige} \\ \text{geht dort rein}}} \int \tau(x, y) \mathbf{E}_{\text{ein}}(x, y) e^{ik\frac{x'}{z'}x} e^{ik\frac{y'}{z'}y} dx dy$$

2D Fourier Integral:

$$\mathbf{F}(u, v) \equiv \int \tau(x, y) \mathbf{E}_{\text{ein}}(x, y) e^{iux} e^{ivy} dx dy$$

Beugungsintegral für Fraunhofer Beugung

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{x}') = A(\mathbf{x}') \mathbf{F}\left(k \frac{x'}{z'}, k \frac{y'}{z'}\right)$$

Beispiel: Einfachspalt

$$\begin{array}{lll} \text{Ortsraum} & \Leftrightarrow & \text{Fourier Raum} \\ \tau(x, y) = \begin{cases} 1 & \forall -\frac{b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} & \Leftrightarrow & \mathbf{F}(k) = \frac{\sin x}{x} \quad x = \frac{\pi}{b} k \frac{x'}{z'} \\ \text{schmaler/breiter Spalt} & \Leftrightarrow & \text{breites/schmales Interferenzmuster} \end{array}$$

$$\Delta x \Delta h < \text{const.}$$

III.3.6 Auflösungsvermögen optischer Instrumente

Es ist Wichtig zu Wissen von welcher Art von Vergrößerung geredet wird. Welche wir hier benutzen wird später genauer erklärt.

Lochkurven

[Folie: Zu Lochkurven und Darstellung mit Lochblenden]

Versuch: Darstellung von Dia mit Lochblende

Rayleigh Kriterium

Zwei Punkte sind gerade dann noch unterscheidbar, wenn das Beugungsmaximum des einen Punktes in das 1.-te Beugungsminimum des anderen Punktes fällt.

[Folie: Auflösung: Überlagerung von Beugungsmustern]

Diese Definition ist nichts eindeutiges. Es ist nur eine Möglichkeit an einem Breiten Übergang von Scharf bis Unscharf.

Ein anderes Kriterium

Abstand der Hauptmaxima muss größer sein als deren Halbwertsbreite.

III.3.7 Räumliches Auflösungsvermögen

Beispiel: Linse

[Folie: Zu Bündelung von Licht mit einer Linse]

Versuch: Laser: Beugung an der Doppellochplatte

Je näher die Löcher in der Blende zueinander rücken, desto ausgeprägter wird das Interferenzmuster.

Beugung an einer Lochblende:

1. Maximum:

$$r \sin \alpha = 0,61 \lambda$$

Auflösung einer Lochblende

$$\Rightarrow \sin \alpha_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

D : Durchmesser des Lochs

Auflösung einer Linse

$$\Rightarrow \sin \alpha_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

D : Durchmesser der Linse

Auflösung eines Fernrohrs

Das durch das Objektiv erzeugte Zwischenbild ist bereits beugungsverbreitert.

$$\Rightarrow \sin \alpha_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

D : Durchmesser des Objektivs

Auflösung eines Mikroskops

Im Unterschied zu vorher ist das einfallende Licht nicht parallel.

[Folie: zur Auflösung am Mikroskop]

(1) mit der Kleinwinkelnäherung gilt:

$$d = b \alpha_{\min}$$

$$\Rightarrow \alpha_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

$$\Rightarrow d = 1,22 \frac{b \lambda}{D}$$

D : Durchmesser des Objektivs

(2) Für den Abstand δ_x vor dem Objektiv gilt

$$\delta_x \approx \frac{f_1}{b} d = 1,22 \frac{f_1 \lambda}{D}$$

(3) Öffnungswinkel φ

$$\sin \varphi \approx \frac{D}{2f_1}$$

Auflösung eines Mikroskop

$$\delta_x \approx 0,61 \frac{\lambda}{n \sin \varphi}$$

$n \sin \varphi$: numerische Apertur

Der **Gültigkeitsbereich der Formel** ist der **Fernbereich** (Frauenhofer Beugung). Wir versuchen Bessere Ergebnisse zu erzielen indem wir Situationen Betrachten, die außerhalb dieses Gültigkeitsbereichs liegen.

Warum tritt der Faktor $\sin \varphi$ auf? Dies ergibt sich einsichtig aus Abbe's Theorie: Zwei Punkte senden interferierende Kugelwellen aus (siehe Doppelspalt), wobei mindestens das 1.te Nebenmaximum vom Objektiv noch erfasst werden muss, um ein Bild entstehen zu lassen. Daher:

$$\text{1.tes Nebenmaximum: } \sin \alpha = \frac{\alpha}{\delta_x} \Rightarrow \sin \varphi \approx \sin \alpha \Rightarrow \delta_x \approx \frac{\lambda}{\sin \varphi}$$

Verbesserungen der beugungsbegrenzten Auflösung:

- kleines λ

→ Elektronenmikroskop (1 nm)

→ Röntgen (in Entwicklung)

- Immersionsöl mit Brechungsindex von $n \approx 1,5$

- Nahfeldmikroskopie

Die obigen Überlegungen basieren auf der Fraunhofer Beugung. In diesem Fall nutzen wir die Nahfeld Mikroskopie, wo die Fresnel'sche Beugung auftritt und wir darüber eine höhere Auflösung erzielen können.

Was im nächstes Kapitel nicht behandelt wird. Polarisierung, Doppelbrechung, nichtlineare optik

Kapitel IV

Licht - Materie Wechselwirkung

IV.1 lineare und zirkulare Polarisation

EM-Welle

$$\Rightarrow \mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{k}$$

Definition: Polarisation $\hat{=}$ Richtung von \mathbf{E}

transversale Wellen: $\mathbf{E} \perp \mathbf{k} \Leftrightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{k} = 0$

longitudinale Wellen: $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k} \Leftrightarrow \mathbf{E} \times \mathbf{k} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{E} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} = k^2 \mathbf{E}$

Für die Behauptung, dass EM-Wellen Transversalwellen haben wir die Annahme getroffen, dass wir uns im Vakuum befinden. In Materie ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit kleiner als c und der \mathbf{k} -Vektor hat eine Komponente parallel zur Ausbreitungsrichtung. \Rightarrow longitudinale EM-Wellen (eigentlich keine EM-Wellen sondern anderer Name).

zur Vereinfachung nehmen wir an $\Rightarrow \mathbf{k} = (0, 0, k)$

IV.1.1 Lineare Polarisation

[Folie: linear polarisierte EM-Welle]

$$\mathbf{E} = \underbrace{E_0 \begin{pmatrix} \cos \tilde{\varphi} \\ \sin \tilde{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}_0} \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

Bemerkung:

- Die zwei Polarisationsrichtungen schwingen **in Phase**.
- nur für die linear polarisierte ebene Welle kann der „Polarisationsanteil“ \mathbf{E}_0 vom „Ausbreitungsanteil“ $\cos(\omega t - \mathbf{kz} + \varphi)$ ab separiert werden

IV.1.2 Zirkuläre Polarisation

[Folie: zirkular polarisierte EM-Welle]

$$\mathbf{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t - kz + \varphi) \\ \pm \sin(\omega t - kz + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

- die zwei Polarisationsrichtungen schwingen um $\frac{\pi}{2}$ **Phasen verschoben**, aber haben gleiche Amplitude

IV.1.3 Zusammenhang zwischen linear und zirkular polarisierten Wellen

Jede linear polarisierte Welle kann in zwei entgegengesetzt zirkular polarisierte Wellen halber Amplitude zerlegt werden und umgekehrt.

Beispiel: Zerlegung von linearer in zirkulare Polarisation. $\cos(x + \frac{\pi}{2}) + \cos(x - \frac{\pi}{2}) = 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= A \begin{pmatrix} \cos(\omega t - kz + \varphi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{A}{2} \begin{pmatrix} \cos(\omega t - kz + \varphi) \\ \cos(\omega t - kz + \varphi + \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{A}{2} \begin{pmatrix} \cos(\omega t - kz + \varphi) \\ \cos(\omega t - kz + \varphi - \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

IV.1.4 Elliptische Polarisation

Die Spitze des \mathbf{E} -Feldvektors bewegt sich mit der Frequenz ω auf einer Ellipse

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \cos(\omega t - kz + \varphi) \\ E_y \cos(\omega t - kz + \varphi \pm \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

- die zwei Polarisationsrichtungen schwingen um $\frac{\pi}{2}$ Phase verschoben UND haben unterschiedliche Amplituden

IV.1.5 Polarisation beim Durchgang durch Materie

Doppelbrechung:

$$\begin{aligned} &k_x \neq k_y \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \begin{pmatrix} A_x \cos(\omega t - \mathbf{k}_x z + \varphi_x) \\ A_y \cos(\omega t - \mathbf{k}_y z + \varphi_y) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

optische Aktivität

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit bzw. der Wellenvektor für rechts und links zirkulare Polarisation unterschiedlich.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{A}{2} \begin{pmatrix} \cos(\omega t - \mathbf{k}^+ z + \varphi) \\ \cos(\omega t - \mathbf{k}^+ z + \varphi + \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{A}{2} \begin{pmatrix} \cos(\omega t - \mathbf{k}^- z + \varphi) \\ \cos(\omega t - \mathbf{k}^- z + \varphi - \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= A \begin{pmatrix} \cos(\delta k z) \\ \sin(\delta k z) \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t - \bar{k} z + \varphi) \\ &\quad k^+ = \bar{k} + \delta k \quad k^- = \bar{k} - \delta k \end{aligned}$$

IV.2 Polarisation durch Brechung und Reflexion

(siehe EX II)

IV.2.1 Maxwell Gleichungen in Materie

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho_0 & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j}_0 + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \end{aligned}$$

plus:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{F} &= q\mathbf{E} \end{aligned}$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_{\text{pol}} \equiv \frac{1}{\varepsilon} \rho_0 \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_{\text{mag}} \equiv \mu \mathbf{j}_0$$

Es fehlen hier noch einige Zusammenhänge die selbstverständlich immer noch gelten z.B.:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

alle sechs Felder: **DEP** **MHB** jeweils Maxwell-Gleichungen

plus:

Materialgleichungen z.B.: $\mathbf{D}(\mathbf{E})$, $\mathbf{P}(\mathbf{E})$, ...

IV.2.2 Erinnerung: Polarisation bei Brechung und Reflexion

[Folie: Brechung und Reflexion bei parallelem und orthogonalem \mathbf{E} -Feld in der Einfallsebene]

[Folie: Einfallswinkel und Reflexionswinkel (Brewsterwinkel)]

Physikalische Ursache: Stetigkeits & Randbedingungen

Gewöhnliche partielle Diff-Gleichungen

⇒ viele Lösungen

⇒ Anfangsbed., Randbed., Stetigkeitsbed.

Beispiele:

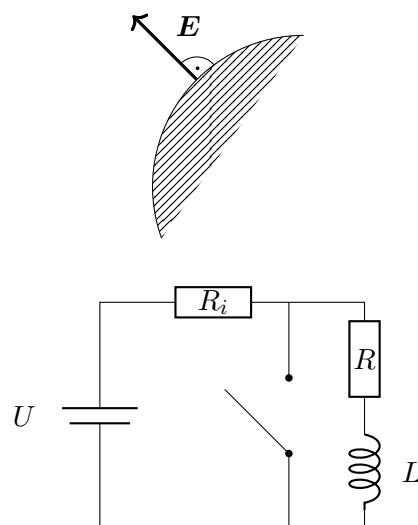
- Metall: Randbedingung aus Elektrostatik überlegt
- Ein- und Ausschaltvorgänge bei RLC Gleichungen
Anfang: Schalter offen, Spule „aufgeladen“

$$\Rightarrow I = \frac{U}{(R_i + R)}$$

Dann: Schalter schließen $\Rightarrow U = 0 \Rightarrow$ wie verhält sich aber $I, U_{\text{Spule}}, \dots$?

Energie der Spule ist stetig $E_{\text{Spule}} = \frac{1}{2} L I^2$

⇒ I_{Spule} stetig



IV.2.3 Maxwell-Gleichungen und Stetigkeitsbedingungen

Heute beschäftigen wir uns mit Stetigkeitsbedingungen. Diese sind sehr Wichtig für die Lösung von Differentialgleichungen zur Lösung von Randwertproblemen.

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma_{\text{Fläche}}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_0 + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \mathbf{n} = \mathbf{j}_{\text{Fläche}}$$

\Rightarrow Normalkomponenten von $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ ist stetig

\Rightarrow Tangentialkomponente von $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ ist stetig

(nahezu) senkrechten Einfall

$\alpha, \beta \approx 0$

Reflexion

Transmission

$$\perp: \quad E_{\text{ref}\perp} = -E_{\text{ein}\perp} \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$

$$E_{\text{trans}\perp} = E_{\text{ein}\perp} \frac{2n_1}{n_2 + n_1}$$

$$\parallel: \quad E_{\text{ref}\parallel} = E_{\text{ein}\parallel} \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$

$$E_{\text{trans}\parallel} = E_{\text{ein}\parallel} \frac{2n_1}{n_2 + n_1}$$

Betrachtung für senkrechten Einfall

[Folie: Stetigkeitsbed. bei senkrechtem Einfall]

(1) \perp und \parallel sind identisch \Rightarrow wähle \perp

(2) Aus Stetigkeit der Tangentialkomponenten von E

$$E_I = E_{II}$$

$$\Rightarrow \quad E_{\text{ein}\perp} + E_{\text{ref}\perp} = E_{\text{trans}\perp}$$

(aus Gauß Zylinder folgt die Gleichheit der E Felder auf einer Seite mit dem E Feld auf der anderen Seite)

(3) Stetigkeit des Energieflusses

[Folie: Stetigkeits an Randflächen]

$$\Rightarrow \quad I_{\text{ein}} = I_{\text{ref}} + I_{\text{trans}}$$

(4) $I = nc_0\epsilon_0 E^2$

$$\Rightarrow \quad n_1(E_{\text{ein}\perp})^2 = n_1(E_{\text{ref}\perp})^2 + n_2(E_{\text{trans}\perp})^2$$

\Rightarrow Lösungen wie oben

IV.2.4 Warum war es „erlaubt“ mit ebenen Wellen zu rechnen ?

- (1) Lösungen im homogenen Raum, Raum kann begrenzt sein
- (2) Grenzfälle \rightarrow Lösungen in den jeweiligen Teilräumen, wurden durch Stetigkeitsbed. angeschlossen.
- (3) Maxwell-Gleichungen sind linear \leftrightarrow Superpositionsprinzip.

spezielle Lösung:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} \quad \text{mit } \omega(\mathbf{k})$$

\mathbf{k} als Parameter zum „numerieren“ der Lösungen

allgemeine Lösung:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t)} d\mathbf{k} \quad (\text{IV.1})$$

\Rightarrow Allgemein:

$$\mathbf{E}_I(\mathbf{x}_{\text{Grenzfläche}}, t) = \mathbf{E}_{II}(\mathbf{x}_{\text{Grenzfläche}}, t)$$

speziell:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t, p)$$

allgemein:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{f}(p) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t, p) dp$$

IV.3 Maxwell-Gl. in Materie, komplexer Brechungsindex

☞ Im folgenden Kapitel tauchen oft μ und ε auf. Gemeint sind hier aber oft μ_r und ε_r ☞

Vereinfachung: $\mu = 1$ eigentlich μ_r $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$

IV.3.1 Polarisation eines Dielektrikums

phänomenologisch/makroskopisch:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

allgemein gültig, bis auf: Die Einschränkung der Maxwellgleichungen in Materie sind nur Mittlungen des Mikroskopische Bildes in eine fast Makroskopischen Bereich. Daraus ergibt sich die Einschränkung: Wenn unser Beobachtungsbereich zu klein wird, sind diese Mittlungen nicht mehr gültig.

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \overset{\circ}{\chi} \mathbf{E} + \dots$$

häufig gültig

lineare, isotrope Medien

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \mathbf{E}$$

χ : dielektrische Suszeptibilität $\chi_e = (\varepsilon - 1)$ eigentlich $\chi_r = (\varepsilon_r - 1)$

mikroskopisch:

$$\mathbf{d} = \alpha \mathbf{E}$$

\mathbf{d} : induziertes Dipolmoment

α : Polarisierbarkeit

IV.3.2 Ensemble unabhängiger induzierter Dipolmomente

$$\mathbf{P} = \frac{1}{V} \sum_i \mathbf{d}_i \rightarrow \frac{N}{V} \mathbf{d} \quad \text{da sich alle Objekte gleich verhalten}$$

$$\rightarrow \chi = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{N}{V} \alpha \equiv \varepsilon - 1 \quad (\varepsilon_r - 1)$$

Gilt bei Gasen gut, bei Festkörpern aufgrund von Dipol-Dipol-Wechselwirkungen nicht mehr gut.

IV.3.3 Lorenz-Lorentz-Oszillatormodell

[Folie: Lorenz-Lorentz-Oszillatormodell für die Polarisation]

$$\Rightarrow \hat{\varepsilon} = \varepsilon' + i\varepsilon''$$

Im Mitschrieb steht hier mehr zum Thema

IV.3.4 Wellengleichung in Materie

Materie $\Rightarrow \rho \neq 0$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{E} \neq 0$$

\Rightarrow Aus $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ folgte das eine EM-Welle im Vakuum transversal sind. Dies muss also nicht mehr so sein.

Unter Verwendung von

(1)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} \stackrel{\text{MW}}{=} -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B} \stackrel{\mu=1}{=} -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H} \stackrel{\text{MW}}{=} -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D}$$

(2)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E}$ ist wegen $\operatorname{div} \mathbf{E} \neq 0$

IV.3.5 Wellengleichung in Materie in komplexer Schreibweise

$$\hat{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \hat{\mathbf{E}} \quad \hat{\varepsilon} = \varepsilon' + i\varepsilon''$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c_0^2} \hat{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

(1) Einsetzen:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{E}}_0 \exp \left[i(\hat{\mathbf{k}} \mathbf{x} - \omega t) \right] \quad \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$$

(2) Ausführen der Differentiale

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \hat{\mathbf{E}}_0 e^{i(\hat{\mathbf{k}} \mathbf{x} - \omega t)} = \begin{pmatrix} i\hat{k}_x \\ i\hat{k}_y \\ i\hat{k}_z \end{pmatrix} \cdot \hat{\mathbf{E}}_0 e^{i(\hat{\mathbf{k}} \mathbf{x} - \omega t)}$$

und kürzen des Phasenfaktors

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{E} &\rightarrow i\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_0 \\
 \operatorname{rot} \mathbf{E} &\rightarrow i\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{E}}_0 \\
 \nabla^2 \mathbf{E} &\rightarrow -(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \hat{\mathbf{E}}_0 \\
 \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{E}) &\rightarrow -(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_0) \hat{\mathbf{k}} \\
 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} &\rightarrow -\omega^2 \hat{\mathbf{E}}_0
 \end{aligned}$$

(3) Lösung

$$\Rightarrow -(\hat{\mathbf{k}}^2) \hat{\mathbf{E}}_0 + \frac{\omega^2}{c_0^2} \hat{\mathbf{E}}_0 + (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_0) \hat{\mathbf{k}} = 0$$

Beachte:

$\hat{\mathbf{k}}^2$ ist **nicht** das Betragsquadrat

$$\hat{\mathbf{k}}^2 = \mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}''^2 + 2i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}''$$

Was bedeutet $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$?

$$e^{i(\hat{\mathbf{k}}\mathbf{x} - \omega t)} = e^{i\mathbf{k}''\mathbf{x}} e^{i(\mathbf{k}'\mathbf{x} - \omega t)}$$

Teil mit \mathbf{k}'' : Dämpfung, Absorption der Welle beim Durchgang durch Materie $I(x) = I_0 e^{-2|\mathbf{k}''|x}$

Teil mit \mathbf{k}' : Ausbreitung der Welle mit $\lambda = \frac{2\pi}{k'}$ *Bemerkung:*

harmonischer Oszillator: $\hat{\omega} = \omega - i\delta$

$$e^{i\hat{\omega}t} = e^{-\delta t} e^{-i\omega t}$$

δ ist die Dämpfung

IV.3.6 Transversale Lösungen

$$\text{transversal} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{k}} \perp \hat{\mathbf{E}}_0$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{k}}^2 \hat{\mathbf{E}}_0 + \frac{\omega^2}{c_0^2} \hat{\mathbf{E}}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{k}}^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \hat{\epsilon}$$

$$\Rightarrow \omega(\hat{\mathbf{k}}) = c_0 \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{k}}^2}{\hat{\epsilon}}}$$

Real- und Imaginärteil von $\hat{\mathbf{k}}$ sind verknüpft mit Real- und Imaginärteil von $\hat{\epsilon}$

IV.3.7 Komplexwertiger Brechungsindex

$$\hat{n} = n + iK = \sqrt{\hat{\epsilon}}$$

n : Brechungsindex

K : Extinktionskoeffizient

$$\Rightarrow \quad 2n^2 = \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} + \epsilon'$$

$$2K^2 = \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} - \epsilon'$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sqrt{\hat{k}^2} = \frac{\omega}{c_0} \hat{n}}$$

IV.3.8 Lösung für kleine imaginäre Anteile. (schwache Dämpfung bzw Absorption)

Im allgemeinen ist die Lösung nicht einfach, da hier die Wurzeln aus komplexen Zahlen gezogen werden. Deshalb betrachten wir hier die Lösung für kleine imaginäre Anteile.

$$k'' \ll k' \quad K \ll n \quad \epsilon'' \ll \epsilon'$$

$$2n^2 = \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} + \epsilon' \cong \epsilon' \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon''^2}{\epsilon'^2} \right) + \epsilon' \approx 2\epsilon'$$

$$2K^2 = \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} - \epsilon' \cong \epsilon' \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon''^2}{\epsilon'^2} \right) - \epsilon' \approx \frac{1}{2} \frac{\epsilon''^2}{\epsilon'} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon''^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{n = \sqrt{\epsilon'} \quad K = \frac{\epsilon''}{2n}}$$

Was den Wellenvektor angeht erhalten wir:

$$\sqrt{\hat{k}^2} = \sqrt{k'^2 - k''^2 + 2i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}''} \approx |\mathbf{k}'| + i \frac{\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}''}{|\mathbf{k}'|}$$

$$\Rightarrow \quad |\mathbf{k}'| + i \frac{\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}''}{|\mathbf{k}'|} = \frac{\omega}{c_0} (n + iK)$$

Physikalische Interpretation

Der Realteil von ϵ' führt zu einer Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon'}}$

Der Imaginärteil von ϵ' führt zu einer Dämpfung/Absorption der Welle.

→ In Materie gibt es transversale EM-Wellen mit $c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon'}}$ (falls $c \leq c_0$)

IV.3.9 Evaneszente Welle

Totalreflektion

[Folie: Evaneszente Welle]

$\alpha \geq \alpha_T \Rightarrow$ keine Wellenausbreitung im optisch dünneren Medium

Das bedeutet nicht, dass keine el.-mag.-Felder in diesen Bereich eindringen.

[Folie: Felder treten in Medium ein.]

Die Felder sind jedoch so schwach, dass sie nach großem Abstand nicht mehr messbar sind. Sie klingen mit der Einhüllenden $e^{ik''}$ ab. k' ist null, da es sich nur um EM-Felder handelt und nicht um eine sich ausbreitende Welle.

Versuch: Übertragung von Evaneszenten Wellen durch zwei Prismen mit geringem Abstand.

Beobachtung:

Die Evaneszente Welle kann ins zweite Prisma eindringen und sich dort ausbreiten.

Theorie:

Prisma: $\hat{\varepsilon} = \varepsilon' + i\varepsilon''$ $\varepsilon' \gg \varepsilon''$

Das Licht im Prisma wird nur schwach gedämpft. Es ist für Mikrowellen transparent so wie Glas für sichtbares Licht.

Vereinfachung:

$$\varepsilon'' = 0$$

Beachte: I.A. nicht $k'' = 0$

Frage: Kann es ein $\hat{\mathbf{k}}$ geben, der komplex bzw. imaginär ist?

$$\hat{\mathbf{k}}^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \varepsilon' = \mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}''^2 + 2i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}''$$

Für sichtbares Licht im Vakuum gilt:

$$\begin{aligned} \varepsilon' &> 0 \\ \Rightarrow \quad \mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}''^2 + 2i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' &> 0 \end{aligned}$$

Lösung 1: Der Normalfall der Wellenausbreitung

$$\mathbf{k}'' = 0$$

Lösung 2: Evaneszente Welle

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'' &> 0 \text{ aber } \mathbf{k}' \perp \mathbf{k}'' \\ \Rightarrow \quad \mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}''^2 &> 0 \end{aligned}$$

Beispiel: Totalreflexion mit $\beta = 90^\circ$

x -Achse in Richtung der Ausbreitung der Totalreflektierten, z -Achse orthogonal dazu in Richtung des dünneren Mediums n_2 ,

Die \mathbf{k}' Komponente ist bei der Totalreflexion parallel zur Oberfläche des Mediums.

einfallende Welle:

normale Ausbreitung

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{k}}_1 &= \mathbf{k}_1 + i0 \\ \Rightarrow \quad k_1^2 &= \frac{\omega^2}{c_0^2} n_1^2 \quad (k_1 : \text{Betrag von } \hat{\mathbf{k}}_1) \end{aligned}$$

aus der Geometrie folgt:

$$\begin{aligned} k_{1,x} &= k_1 \sin \alpha \\ \Rightarrow \quad k_{1,x}^2 &= \frac{\omega^2}{c_0^2} n_1^2 \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

ausfallende Welle:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{k}}_2 &= \begin{pmatrix} k_{2,x} \\ 0 \\ ik_{2,z} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{k}' &= (k_{2,x}, 0, 0) \\ \mathbf{k}'' &= (0, 0, k_{2,z}) \end{aligned} \\ \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{k}}_2^2 &= \frac{\omega^2}{c_0^2} n_2^2 = \mathbf{k}_2'^2 - \mathbf{k}_2''^2 = k_{2,x}^2 - k_{2,z}^2 > 0 \\ \frac{\omega^2}{c_0^2} n_2^2 &= k_{2,x}^2 - k_{2,z}^2 > 0 \end{aligned}$$

Brechungsgesetz: $n_1 \sin \alpha = n_2$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} k_{1,x}^2 = k_{2,x}^2 - k_{2,z}^2 > 0 \\ \uparrow \\ > 0 \end{array}$$

Q.E.D.

\Rightarrow Im Falle der Totalreflexion existiert eine evaneszente Welle \mathcal{Q}

IV.4 Streuung, Spektren und Verwandtes

IV.4.1 Grobe Einteilung

Materiewelle

- **reflektierend** = Licht wird **gerichtet** zurückgestrahlt
- **streuend** = Licht wird **ungerichtet** zurückgestrahlt

Materie ist

- **absorbierend** = Licht wird **verschluckt**
- **durchsichtig** = Licht wird **durchgelassen**
- **transparent** = Licht wird **teilweise durchgelassen**, teils **absorbiert** und/oder **teil gestreut**

IV.4.2 Physikalische Prozesse: Grundgedanken

A) elastischer/inelastischer Stoß \rightarrow Streuung

[Folie: zur Streuung an Teilchen]

wie beim Billard

Beispiel: Lichtstreuung, Streuung am Photon

- Rayleigh-Streuung: elastische Streuung von Photonen an gebundenen Elektronen
- Thomson-Streuung: elastische Streuung an „quasi freien“ Elektronen „quasi frei“: **eventuell gebunden aber winzige Bindungsenergie im Vergleich zur Energie der einfallenden Strahlung.**
- Compton-Streuung: inelastische Streuung an „quasi freien“ Elektronen relativistisches Billard
- Raman-Streuung: inelastische Streuung aufgrund eines inelastischen Stoßes
- Mie-Streuung, Brillouin-Streuung, ...

Beispiel: andere Teilchen

- Elektronenstreuung
- Neutronenstreuung
- geladene Teilchen: Rutherford-Streuung, Mott-Streuung

B) Anregung/Abregung

Genereller Ablauf:

Anregung des Systems durch Licht, Stöße oder Wärme \rightarrow **Lebensdauer der Anregung**
 \rightarrow **Abregung** des Systems als Licht, aussenden eines Teilchens, Wärme ...

Beispiel:

- Absorption: ein Photon wird absorbiert

$$\hbar\omega \rightarrow \Delta E_{\text{System}}$$

- spontane Emission, Luminanz

$$\Delta E_{\text{System}} \rightarrow \hbar\omega$$

Fluoreszenz: Lebensdauer Kurz ps bis ns

Phosphoreszenz: Lebensdauer deutlich länger als ns

- Stimulierte Emission:

$$\hbar\omega + \Delta E_{\text{System}} \rightarrow 2\hbar\omega$$

Aus einem Angeregten System und einem einfallenden Photon entstehen zwei kohärente Photonen.

- Photoeffekt:

$$\hbar\omega \rightarrow E_{e^-}$$

IV.4.3 Wirkungsquerschnitt (W.Q.S.)

Üblicherweise als differentieller W.Q.S. (entspricht geometrisch einer Streuung)

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE}$$

Der W.Q.S. ist ein Maß dafür wie sehr ein System Streut.

[Folie: Streuung und Wirkungsquerschnitt]

Hierbei wird die Kugel an der Gestreut wird in kleine Flächenelemente geteilt: Raumwinkel-Einheiten.

[Folie: Streuung von Teilchen an Materie (Atomen)]

IV.4.4 Energie und Impulserhaltung

⇒ Betrachtung im Energiediagramm

häufig: System durch diskrete Energieniveaus Beschrieben.

[Folie: Energiediagramme Absorption und „dips“ im Frequenz-Intensität Diagramm]

[Folie: Energiediagramme bei elastischer Streuung]

[Folie: Energiediagramme bei inelastischen Streuung]

[Folie: inelastische Streuung Vergleich von verschiedene Streuungen]

Streuung über Virtuelle Zustände (ein nicht diskretes Energieniveau)

[Folie: Spontane Emission, Lumineszenz]

[Folie: nochmal aber nicht Diskutiert]

[Folie: Quanten dots]

[Folie: Stimulierte Emission]

[Folie: Photo Effekt] hier wird das Elektron in einen nicht-diskreten Zustand gehoben.

[Folie: Up-Conversion (nicht-linearer Effekt)]

[Folie: Grüner Laserpointer (eigentlich IR Laser und Kristall der mit Up-Conversion grünes Licht erzeugt)]

IV.4.5 Spektroskopie

Spektroskopie = Intensität vs. Frequenz

Ein Energiespektrum und ein gemessenes Intensitätsspektrum sind nicht das selbe! Ein Energiespektrum zeigt absolute Energieniveaus an, ein Intensitätsspektrum Energiedifferenzen.

Typischer Aufbau:

Quelle \rightarrow Probe \rightarrow Analysator, Detektor

Die Quelle kann monochromatisch sein oder weißes Licht ausstrahlen (breites Spektrum von Frequenzen).

Die Energieanalyse „Richtung“ $\frac{d^2\sigma}{dE d\Omega}$ (σ = Wirkungsquerschnitt)

[Folie: einfaches Prismen-Spektrometer]

[Folie: ESR (Elektronen-Spin-Resonanz) Spektrometer]

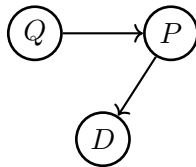
Beim ESP Spektrometer wird das Energiespektrum der Probe verändert (durch angelegte Magnetfelder). Der Messstrahl wird zuerst aufgeteilt in einen Vergleichsstrahl und einen Messstrahl, die vor dem Detektor wieder zusammengefügt werden um dort wie beim Michelson-Interferometer zu interferieren.

[Folie: ein kommerzielles Spektrometer]

Typische Messkonfiguration

- Reflektionsspektrum
- Transmissionsspektrum
- Emissionsspektrum
- Absorptionsspektrum

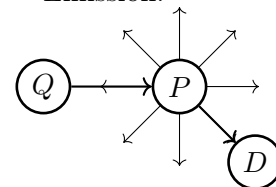
Reflektion:



Transmission:



Emission:



[Folie: Schematisch: Spektrometer]

Versuch: Natrium-Dampf-Lampe

Das Licht aus der Natrium-Dampf-Lampe geht durch eine Glasröhre mit aufgedampftem Natrium. Diese Röhre wird nun erhitzt, sodass das Natrium verdampft. Aufgrund der Erhitzung wird das nun gasförmige Natrium von der Lampe angeregt und emittiert selbst auch Licht derselben Farbe. Da dieses Licht nicht mehr gerichtet ist sondern in alle Richtungen strahlt, wird die Intensität des transmittierten Lichts geringer.

Bei sehr hoher Temperatur ist die Absorption so stark, dass nach dem Anfangsbereich der Röhre schon das ganze Licht absorbiert und ausgestrahlt wird.

Versuch: Weißes Licht auf Salz (Natriumchlorid)

Sichtbares Spektrum: Rot|Grün.

Emissionsspektrum über Erhitzung ohne Weißlicht-Beleuchtung mit Gasbrenner (farbige Flamme)

Bei Erhitzung und Beleuchtung: Absorptionsspektrum: Rot - Gelb - Grün.

Versuch: Rayleigh Strahlung

Eine Lampe strahlt unpolarisiertes weißes Licht aus.

Das an den Wassermolekülen (und Dreckrückständen im Wasser) gestreute Licht hat eine lineare Polarisation. Von den Molekülen geht eine Herz'sche Dipolstrahlung aus (Polarisation in Richtung der Antenne, Ausbreitung der Welle in der Ebene orthogonal dazu). Dies kommt daher, dass das Weiße Licht nur transversal polarisierte Anteile hat keine longitudinalen. Daraus ergibt sich, welche Dipole angeregt werden, und dass die Polarisation nur orthogonal zur Ausbreitung des Lichts stattfindet.

Die Rayleigh-Streuung ist mit ω^4 Frequenzabhängig, es wird also blau wesentlich stärker reflektiert als rotes Licht. Dies erklärt den blauen Schimmer um die Weiße Kreisscheibe auf dem Schirm.

Beim hinzugeben von winzigen Kügelchen, die im Wasser schwimmen, wird mehr Licht gestreut. Die Kreisscheibe wird immer rötlicher und rötlicher zunächst gelb dann dunkel orange wie die Abendsonne. Die blauen Frequenzen sind eher am Rand zu sehen und konzentrierter als zuvor. (Beim blauen Himmel sehen wir den Emissionsanteil hier den Transmissionsanteil).

Typen von Spektren

Linienpektrum & kontinuierliches Spektrum

[Folie: verschiedene Spektren]

Zugängliche Infos im Linienpektrum (Prüfungsrelevant!)

- 1) Die Lage des Peaks oder die Frequenz des Peaks gibt die **Übergangsenergie** an die nur eine Energiedifferenz angibt.

$$E_2 - E_1 = h\nu$$



- 2) **Intensität:** Diese hängt von der Übergangswahrscheinlichkeit und damit auch der Teilchendichte zusammen.

Die Intensität hat auch mit der **stärke der Wechselwirkung** von dem Eingestrahnten (**Sonde**) mit dem Bestrahlten (**Probe**) zu tun.

- 3) **Linienbreite/Linienform:** Bei der Lorenzverteilung ist die Breite der Verteilung verknüpft mit der Lebensdauer der Teilchen.

$$e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \text{Lorenzlinie} \Rightarrow \text{Lebensdauer}$$

[Folie: Gaußverteilung als Summe der Wahrscheinlichkeitsverteilungen einzelner Moleküle]

$$\text{statistische Verteilung} \Rightarrow \text{Gaußverteilung}$$

Fragerunde

Dispersionsrelation bei getriebener Schwingung:

(harmonischer Oszillator oder Dispersion bei Schwingungen)

Gleichschwingung bei geringer Antriebsfrequenz.

Phasenverschiebung bei zu schnellem Antrieb und geringe Amplitude des Schwingers quasi ein Tiefpass.

Dieses Problem ist mit komplexen Größen lösbar. Zur physikalischen Betrachtung der Lösung: Leistungsaufnahme des schwingenden Systems. Diese Leistung ist mit dem Imaginärteil verknüpft.

Bei unserem Beispiel eines dielektrischen Materials geht es um Absorption. Diese stammt aus dem Leistungsverlust aus dem Imaginärteil der Dielektrizitätskonstante. Der Realteil ist hier mit dem Brechungsindex verknüpft.

Angeregte Emissionen:

Das anregende und das angeregte Photon können aber müssen nicht in Phase sein. Allgemein ist dies nicht so.

Das angeregte Atom bleibt mit einer gewissen, statistisch verteilten Lebensdauer in dem Zustand. Wie die Anregung erfolgt ist (Stöße oder Absorption von Strahlung) ist egal. Daraus resultiert spontane Emission.

Die **stimulierte oder induzierte Emission** (erzeugt durch ein Strahlungsfeld) erzeugt die Abstrahlung von Photonen in Phase mit den eingestrahnten Photonen. Die Begründung ist recht kompliziert und kann nur über Quantenmechanik erfolgen.

Evaneszente Welle:

Undurchdringbarkeit ist nur eine Näherung. Kein Wechsel des Mediums ist eine echte Stufenfunktion (im mikroskopischen Bereich).

IV.5 Ratengleichungen

IV.5.1 Exponentieller Zerfall

$$\frac{d}{dt}n(t) = -\frac{1}{\tau}[n(t) - n_{eq}]$$

Statistisch unabhängige Prozesse. Egal wie viele Objekte es gibt nach der Halbwertszeit ist nur noch die Hälfte da. Die einzelnen Objekte verhalten sich also unabhängig voneinander so.

τ : Radiationszeit, Zerfallszeit, Lebensdauer, Halbwertszeit, ...

Lösung:

$$n(t) = [n(o) - n_{eq}]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + n_{eq}$$

IV.5.2 Zwei-Niveausystem



Bemerkung:

- oft gibt es eine **Zwangsbedingung** $\sum_k n_k = N$ N : Gesamtzahl der Zustände
- Prinzip des detaillierten Gleichgewichts

$$\Gamma_{k \rightarrow l} = \Gamma_{l \rightarrow k}$$

Ratengleichung:

$$\dot{n}_0 = -\Gamma_{0 \rightarrow 1}n_0 + \Gamma_{1 \rightarrow 0}n_1$$

$$\dot{n}_1 = -\Gamma_{1 \rightarrow 0}n_1 + \Gamma_{0 \rightarrow 1}n_0$$

Definition Gleichgewicht

$$\Rightarrow \begin{aligned} \dot{n}_0 &= -\Gamma(n_0 - n_1) \\ \dot{n}_1 &= -\Gamma(n_1 - n_0) \end{aligned}$$

konstante Gesamtbesetzung

$$n_0 + n_1 = N$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \delta N \equiv n_1 - n_0 &\rightarrow n_0 = \frac{1}{2}(N - \delta N) \\ n_1 &= \frac{1}{2}(N + \delta N) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\delta\dot{N} = \Gamma\delta N$$

$$\delta N(t) = \delta N(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Rantengleichung mit externen Stimuli

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{n}_0 &= -\Gamma_{n_0} + \Gamma_{n_1} + \Gamma_{0\text{ext}} \\ \dot{n}_1 &= -\Gamma_{n_1} + \Gamma_{n_0} + \Gamma_{1\text{ext}} \end{aligned}$$



IV.5.3 Zwei-Niveau System im Strahlungsfeld, Einstein Parameter

Im Folgenden Betrachten wir stets ein Zwei-Niveau-System wie hier in der Abbildung zu sehen ist:



spontane Emission:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{n}_1 &= -A_{1\rightarrow 0}n_1 \\ \dot{n}_0 &= +A_{1\rightarrow 0}n_1 \end{aligned}$$



Photon Absorption:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{n}_0 &= -B_{0\rightarrow 1}\rho(\nu)n_0 \\ \dot{n}_1 &= +B_{0\rightarrow 1}\rho(\nu)n_0 \end{aligned}$$



$\rho(\nu)$: Dichte des Strahlungsfeldes

ν : Frequenz

stimulierte Emission:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{n}_0 &= +B_{1\rightarrow 0}\rho(\nu)n_1 \\ \dot{n}_1 &= -B_{1\rightarrow 0}\rho(\nu)n_1 \end{aligned}$$



Definition Gleichgewicht n_0 :

$$A_{1 \rightarrow 0} n_1 - B_{0 \rightarrow 1} \rho(\nu) n_0 + B_{1 \rightarrow 0} \rho(\nu) n_1 = 0$$

Thermodynamik, Quantenstatistik:

$$\frac{n_k}{N} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_k}{k_B T}}$$

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

$Z := \sum_k e^{-\frac{E_k}{k_B T}}$ die Zustandssumme

k_B : Boltzmann-Konstante

\Rightarrow Planck'sches Strahlungsgesetz

Kapitel V

Entwicklung der Atom- und Quantenphysik

V.1 Quantelung von Masse und Ladung

V.1.1 Quantelung der Masse

Chemie:

Dalton'sches Gesetz der multiples Proportionen

Satz von Avogadro

⇒ Dalton'sche Atomhypothese

⇒ Periodensystem der Elemente

Periodizität festgestellt durch Atomvolumen. Erst später Ionisationsenergie (Abspaltung des am schwächsten gebundenen Elektron).

Physik:

kinetische Gastheorie (vor allem Maxwell)

Gas = Teilchen mit nur kinetischer Energie, WW mit einem Gefäß

$$\Rightarrow P = \frac{N}{V} m \frac{\bar{v}^2}{3}$$

Äquipartitionstheorem

$$\overline{E_{\text{kin}}} = \frac{3}{2} k_B T \quad (\text{eiatomiges Gas, } f = 3)$$

$$\Rightarrow \boxed{PV = N_A k_B T} \quad \text{ideale Gas Gleichung}$$

V : Molvolumen

⇒ Größe der Atome

Beispiel: Messung der Gaskonstanten R über Schallgeschwindigkeit

$$c^2 = \frac{f+2}{f} R \frac{T}{M}$$

[Folie: Versuchsaufbau zur Messung der Gaskonstante R]

Direkter Nachweis über die Rastertunnelmikroskopie

Ein Elektron, das von einem in den anderen Energiezustand springt:



Schematische Skizze eines Rastertunnelmikroskops:



Der Tunnelstrom ist hierbei exponentiell zur Spannung proportional:

$$I_T \propto U_T \exp \left(-2 \sqrt{\frac{2m\Phi}{\hbar^2}} d \right)$$

typische Zahlenwerte:

I_T ca. 1 – 10 nA

U_T ca. 100 mV

d ca. 1 – 10 nm

[Folie: Rastertunnelmikroskop]

Manövrieren mittels Piezokristallen um Präzisionen feiner als Atomare Skala zu erreichen.

[Folie: Rasterkraftmikroskop (AFM)]

V.1.2 Quantelung der Ladung

Elektrolyse

[Folie: zu Elektrolyse]

Prinzip \Rightarrow elektrische Ströme \Rightarrow Redox-Reaktion

\Rightarrow Stoffumsatz verknüpft mit Ladungsmenge

$$F = eN_A = 96485, \dots \frac{\text{C}}{\text{mol}}$$

Beispiel: NaCl



Um 1 mol Na abzuscheiden, oder $\frac{1}{2}$ mol Cl_2 Gas zu erzeugen werden $Q = 96486 \text{ C}$ benötigt.

$$\Rightarrow F = N_A e \Rightarrow e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Millikan Versuch

[Folie: Millikan Versuch]

Prinzip: geladenes Tröpfchen + angelegtes \mathbf{E} -Feld.

$$\Rightarrow m\mathbf{a} = q\mathbf{E} + m\mathbf{g} - \rho V\mathbf{g} + 6\pi\eta R\mathbf{v}$$

Schwebefeld-Methode

Idee: \mathbf{E} -Feld so einstellen, dass Tröpfchen schwebt.

Problem: R ist unbekannt.

$$\Rightarrow R \text{ ungenau} \Rightarrow q \text{ ungenau}$$

Versuch: Milikan Versuch

Kondensator aus Gitterplatten und Seifenblasen als Tröpfchen.

Gleichfeld-Methode

Idee: Am selben Tröpfchen zwei Messungen mit unterschiedlichen \mathbf{E} -Feldern.

Realisierung: \mathbf{E} -Feld Umpolen

Messung 1: Tröpfchen sinkt

Messung 2: Tröpfchen steigt

$\Rightarrow R$ wird eliminiert

v messen \Rightarrow das geht ganz gut

[Folie: Millikan Ergebnisse]

V.1.3 Bestimmung von Q/M (Ladung/Masse)

Prinzip:

- 1) Teilchenstrahlquelle: geladene Teilchen werden durch \mathbf{E} -Feld beschleunigt
- 2) Massentrennung: Teilchenstrahl durch \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder
- 3) Teilchenstrahl detektieren

Teilchenstrahlquelle

Glühkathode: [Folie: Glühkathoden]

Eine Drahtwindel wird in einem Vakuum stark erhitzt.

\Rightarrow Elektronen treten aus (überwinden Austrittsarbeit)



\Rightarrow Elektronenstrahl durch Beschleunigungsspannung.

Elektronenstoßionenquelle

Atome/Moleküle werden mit Elektronen beschossen:



Beispiel: $H_2O + e^- \rightarrow H_2O^+, OH^+, O^+ \dots$

[Folie: Elektronenstoßquelle]

Elektrospray Ionenquelle (ESI)

Prinzip: zu untersuchende Substanz wird in Flüssigkeit gebracht und mit dieser durch eine Düse aufgespritzt. Dabei wird außerdem eine hohe Spannung angelegt um die Tröpfchen zu beschleunigen.

⇒ Tröpfchen (1 - 10 nm)

→ Coulomb Explosion

→ Verdampfung der Flüssigkeit

[Folie: Elektronenspray-Ionenquelle]

Detektion

Faraday Becher

Gauß'scher Satz ⇒ Innerhalb um Metallkörper befinden sich keine Ladungen. Ladungen werden auf Außenseite gesammelt.

Nachweisgrenze: $10^{-14} \text{ A} \hat{=} 10^5 \frac{\text{Ionen}}{\text{s}}$

[Folie: Faraday-Becher]

Sekundärelektronenvervielfacher (SEV)

Ein auf Metall/Halbleiter auftreffendes Elektron erzeugt bei genügend Energie mehrere Sekundärelektronen.

Nachweisgrenze: einzelnes Ion

[Folie: SEV]

[Folie: Mikrokanalplatte (für Ortsauflösung)]

Massentrennung

Teilchenstrahl durch **E**- und **B**-Felder

Magnetisches Feld:

$$R = \frac{m}{q} \frac{v}{B}$$

Impulsfilter

Elektrisches Feld:

$$y(x) = \frac{qE}{2mv_x^2} x^2$$

Energiefilter

[Folie: Magnetisches und elektrisches Feld]

Thomson'sche Röhre

[Folie: Thomson'sche Röhre]

[Folie: Massen-Spektren]

Beschleunigung:

$$\frac{1}{2}mv^2 = qU$$

Ablenkung:

$$m \frac{v^2}{R} = qvB$$

Für das Ladungs-Masse-Verhältnis ergibt sich dann.

$$\Rightarrow \frac{q}{m} = \frac{2v}{(RB)^2}$$

Versuch: Glühkathode im Vakuum

Der Elektronenstrahl wird sichtbar, da Argon-Moleküle im nicht perfekten Vakuum angeregt werden und blau leuchten. Durch das homogene Magnetfeld der Helmholtzspulen wird aus dem Elektronenstrahl eine gekrümmte oder kreisförmige Bahn. Bei Drehung des Glaskörpers ergibt sich eine Spirale.

Versuch: Thomson'sche Röhre

Prinzip wie beim Wien'scher Filter mit gekreuzten E - und B -Feldern.

V.2 Struktur der Materie

V.2.1 Materie besteht aus Atomen/Ionen

Dalton's Atomhypothese

V.2.2 Atome bestehen aus Elektronen und „sonst etwas“

⇒ e^- müssen gebunden sein

⇒ Bindungsenergie für e^-

⇒ Ionisationsenergie: Bindungsenergie für „erstes“ Elektron e^-

Franck-Hertz-Versuch

Idee:

- 1) e^- werden im Atomgas beschleunigt, gewinnen kinetische Energie. Je nach Wechselwirkung der e^- mit den Atomen tritt ein Energieverlust auf.
- 2) Nach einer gewissen Strecke erreichte kinetische Energie wird gemessen

Aufbau: [Folie: Franck-Hertz-Versuch]

- Quecksilberdampf, ca. 10 mbar
- Glühkathode mit Beschleunigungsspannung

Photoionisation

Versuch: Photoionisation

Licht verschiedener Frequenzen wird auf Material gestrahlt. Bei bestimmter Frequenz wird viel absorbiert ⇒ Energie um äußerstes Elektron anzuregen.

[Folie: Photoionisation]

⇒ direkte Bestimmung der Ionisationsenergie

V.2.3 Atomkerne bestehen aus Atomschalen + Atomkernen

$$(e^-) \qquad (p, n)$$

Rutherford-Experiment

Idee:

- 1) α Teilchenstrahl ⇒ auf Gold-Folie geschossen
- 2) Steuerverteilung der α Teilchen

[Folie: Rutherford-Experiment]

Coulombfelder (wie auch Gravitationsfelder) sind weitreichende Kräfte, da sie mit $\frac{1}{r}$ abfallen. Ihr Beitrag ist auch bei sehr großen Entfernungen messbar und nicht vernachlässigbar. Kräfte, die exponentiell oder schneller als mit $\frac{1}{r}$ abfallen sind schnell abfallende Kräfte, die nicht weit reichen.

Um das Coulombpotential der Atomkerne zu überwinden und in ihre Nähe zu gelangen benötigt man Strahlung mit viel Energie. Aufgrund der Feststellung, dass ein Großteil der Strahlung kaum gestreut wird können wir annehmen, die Atomkerne sind sehr klein. Bei dem Rutherford-Experiment liegt also Coulombstreuung vor.

- fast nur Vorwärtsstreuung
- Streuung am Coulombpotential \Rightarrow kleine Kerne

Versuch: Rutherford-Experiment

In Luft \Rightarrow keine α -Teilchen kommen am Detektor an. Im Vakuum ohne Goldfolie \Rightarrow ca. 650 - 740 Teilchen pro 10 s. Mit Goldfolie im Vakuum \Rightarrow ca. 650 - 700 Teilchen pro 10 s. Bei Abgelenkten Teilchenstrahl und angewinkelter Goldfolie \Rightarrow gelegentlich ein paar gestreute Teilchen im Detektor.

[Folie: Atommodell]

Verhältnis von Atomkern zu Elektronenhülle: $10^{-4} = \frac{1}{10000}$ mal kleiner.

V.2.4 Festkörper bestehen aus einer periodischen Anordnung von Atomen

Dies kann man mit der **Bragg-Streuung** zeigen.

Bei Röntgenstrahlung (X-ray) messen wir die Streuung an der Elektronenhülle ($\mathbf{F} = q\mathbf{E}$). Wir messen die Ladungsdichte der Elektronen.

Bei Neutrinos: nichts (sie wechselwirken kaum mit Materie)

Bei Elektronen: Streuung an Elektronenhülle. Starkes \mathbf{E} -Feld \rightarrow kleine Eindringtiefe \rightarrow Oberflächenmessung.

Alpha-Teilchen sind erstens sehr massiv und positiv geladen und wechselwirken daher mit den Kernen und gehen durch die Elektronenhülle durch.

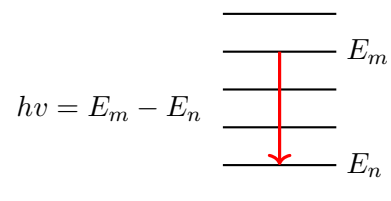
Bei Neutronen: Streuung am Kern: starke WW (WW zwischen Kernbausteinen) „Kernkraft“. Messung der Kernpositionen.

V.3 Quantelung von Energie, Planck'sches Strahlungsgesetz

V.3.1 Energiezustände, Spektren

diskrete Spektren sind diskreten (gequantelten) Energiezuständen zugewiesen

Energiezustände werden auch manchmal Spektren genannt
Energiespektrum \neq Spektrum
(Energie-Differenzen)



Quantenmechanische Beschreibung

- **Zustände:** $|\psi\rangle$

Bei Koordinatentransformationen verändern sich die Koordinaten, Vektoren bleiben gleich. Für die Angabe von Koordinaten benötigt man eine Basis oder einen Ursprung.

Genauso braucht man für Wellenfunktionen eine Basis. Für Zustände nicht (sie repräsentieren im Beispiel hier die Vektoren). (**Lage der Peaks**)

- **Übergänge zwischen den Zuständen** $\langle \psi | \hat{V} | \psi' \rangle$

Der **Operator** \hat{V} ist die Wechselwirkung. Der Operator eines Neutrinos wäre also $= 0$ (Bzw. die Übergangselement-Matrix ist $= 0$). Bei X-rays wäre der Operator der Dipoloperator, da die positiven X-rays mit den Elektronen wie ein Dipol Wechselwirken. (**Intensität der Peaks**)

Definiert man einen Zustand als Vektor \mathbf{v} so ist der Übergang dann $\mathbf{v}^\top \hat{A} \mathbf{v}$

- Ensemble von Objekten \leftrightarrow Besetzungszahlen (-wahrscheinlichkeiten)

Beim thermodynamischen Gleichgewicht:

$$n_i \propto e^{-\beta E_i} \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

Versuch: Spektren mit Leuchtstoffröhren

Helium Gas: Spektrum mit diskreten Linien

Neon Gas: Weniger diskrete Maxima und eher höhere Frequenzen

anderes Gas: Türkis (andere Frequenzen zu hoch für menschliches Auge)

Wasserstoff: wenige diskrete Peaks

Balmer-Serie des Wasserstoffs

$$f = R_y \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad R_y = 13,6 \text{ eV}$$

V.3.2 Hohlraumstrahlung

Strahlung eines Körpers mit Temperatur T genauer:

Strahlung eines Körpers im thermodynamischen Gleichgewicht mit Strahlungsfeld.

Schwarzer Körper

Strahlung jeder Wellenlänge wird vollständig absorbiert.

thermodynamisches GGW \Leftrightarrow Körper strahlt im gleichen Maße ab wie er auch absorbiert (für jede Frequenz!).

Hohlraumstrahler

Strahlung jeder Wellenlänge wird vollständig absorbiert. Emission jedoch nicht von ganzen Körper, sondern nur einem kleinen Loch.

Gesucht \Rightarrow Intensität als Funktion der Frequenz:

- Energiedichte der Strahlung $\omega(f)$ oder Energie im Frequenzintervall $\omega(f) df$

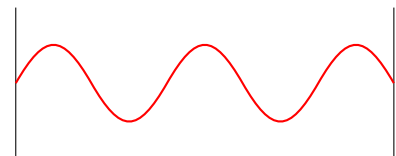
Grundlage der Beschreibung von Hohlraumstrahlung

\Rightarrow Randbedingungen für EM-Wellen

\Rightarrow Frequenz/Wellenlängen sind eingeschränkt

\Rightarrow Moden

\Rightarrow Modendichte $g(f)$



$$g(f) df = \frac{8\pi f^2}{c^3} df$$

\Rightarrow Energiedichte $w(f)$

$$w(f, T) df = g(f) \overline{W}(f, T) df$$

$\overline{W}(f, T)$: mittlere Energie pro Mode im Frequenzintervall df

V.3.3 Klassische Berechnung: Rayleigh-Jeans Gesetz

Thermodynamisches GGW: Äquipartitionstheorem $f = 2$ (Die Ebene der Polarisationsrichtungen einer EM-Welle)

$$\Rightarrow \overline{W} = kT$$

$$\Rightarrow w(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} kT$$

Bei diesem Ergebnis gibt es das Problem, dass die Energiedichte für sehr große Frequenzen gegen unendlich geht. ⚡

Problem:

- $f \rightarrow \infty \Rightarrow$ UV-Katastrophe
- Stimmt nicht mit Experiment überein. (Nur für kleine Frequenzen!)

V.3.4 Planck'sches Strahlungsgesetz I

Annahme für die Energie einer Mode:

$$W_n = nhf \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

n : Besetzungszahl der Mode

\Rightarrow Besetzungszahldichte im thermodynamischen GGW:

$$p_n = \frac{e^{-\frac{W_n}{kT}}}{Z(T)} = \frac{e^{-\frac{nhf}{kT}}}{\sum_n e^{-\frac{nhf}{kT}}}$$

$$\Rightarrow \overline{W} = \sum_n p_n W_n$$

$$\Rightarrow \overline{W} = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}$$

Planck'sches Strahlungsgesetz

$$\Rightarrow w(f) = \frac{8\pi hf^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}$$

[Folie: Planck'sches Strahlungsgesetz]

Wien'sches Verschiebungsgesetz

$$f_{\max} \propto T$$

Bemerkung:

$$\lambda_{\max} \neq \frac{c}{f_{\max}} \quad ?$$

Stefan-Boltzmann Gesetz

$$P \propto T^4$$

P : gesamte Strahlungsleistung

Versuch: Spektrum einer Glühlampe

Beispiel: Sonne

[Folie: Strahlungsspektrum der Sonne (aus dem Weltall)]

Stefan Boltzmann $\Rightarrow T_{\text{Sonnenoberfläche}} \approx 5777 \text{ K}$

Wien $\Rightarrow T_{\text{Sonnenoberfläche}} \approx 5800 \text{ K}$

\Rightarrow Das Modell „Sonne = schwarzer Körper“ stimmt ungefähr aber nicht perfekt.

V.3.5 Gedanken zum Plank'schen Strahlungsgesetz

Grenzfälle:

- $\frac{hf}{kT} \rightarrow 0 : \bar{W} \rightarrow kT \Rightarrow \text{Rayleigh Jeans} \hat{=}$ klassischer Fall
- $\frac{hf}{kT} \rightarrow \infty : \bar{W} \rightarrow (hf)^3 e^{-\frac{hf}{kT}} \Rightarrow \text{keine UV-Katastrophe} \hat{=}$ quantenmechanischer Grenzfall

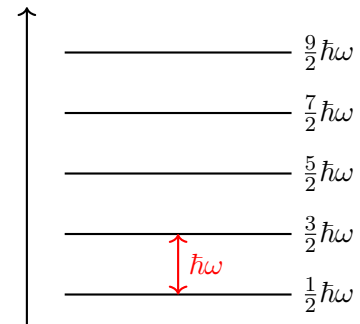
\Rightarrow Das Gesetz impliziert **Quantum für Licht (Photon)**

$$E = hf = \hbar\omega$$

Energiespektrum einer Schwingungsmode.

Wie ist die Quantisierung der kontinuierlichen Kurve zu sehen?

Aus dem exponentiellen Abfall der Kurve bei niedrigen Wellenlängen mit $e^{-\frac{hf}{kT}}$ sehen wir es muss ein $hf > 0$ geben. Dies ist der in rot eingezeichnete erste Energiesprung vom untersten, ins erste höhere, Niveau.



$$\frac{hf}{kT} \rightarrow \infty \Leftrightarrow w(f) \propto e^{-\frac{hf}{kT}}$$

Besetzungszahlen

- klassisch $\frac{hf}{kT} \rightarrow 0 \Rightarrow$ alle Zustände nahezu gleich besetzt $P_n \approx \frac{1}{N}$
- quanten mechanik $\frac{hf}{kT} \rightarrow \infty \Rightarrow$ alle Zustände exp. schwach besetzt bis auf Grundzustand
 $P_0 \approx 1 \quad P_1 \approx e^{-\frac{hf}{kT}} \quad P_n \propto e^{-n\frac{hf}{kT}}$

Beispiel: Einstein Modell für spezifische Wärme in Festkörpern

klassisch: Äquipartitionstheorem $c_v = 3NK$

$$\bar{W} = \frac{6}{2}kT = 3kT \quad U = N\bar{W}$$

$$c_v = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V = 3Nk$$

Einstein Modell: alle Gitterschwingungen schwingen mit Frequenz f_0 .

$$\Rightarrow W_n = nkf_0 = n\hbar\omega_0$$

$$\Rightarrow c_v = 3Nk \left(\frac{\hbar\omega_0}{kT} \right)^2 \frac{e^{\frac{\hbar\omega_0}{kT}}}{\left[e^{\frac{\hbar\omega_0}{kT}} - 1 \right]^2}$$

[Folie: Einstein Modell: Plot von c_v]

$\Rightarrow c_v(T \rightarrow 0) \propto e^{-\frac{\hbar\omega_0}{kT}} \Leftrightarrow$ System „friert“ aus.

[Folie: Energie einer EM-Welle quadratisch von der Amplitude (wie Intensität von der Feldstärke)]

V.3.6 Plank'sches Strahlungsgesetz II: Einstein

[Folie: Energieniveaus und 3 Prozesse:]

spontane Emission, Absorption und stimulierte Emission.

Ensemble von Objekten

$$\frac{dN_2}{dt} = - \frac{dN_2}{dt} \Big|_{\text{spont. Emission}} + \frac{dN_2}{dt} \Big|_{\text{Abs.}} - \frac{dN_2}{dt} \Big|_{\text{stim. Emission}}$$

\dot{N}_1 Analog dazu

Thermodynamisches Gleichgewicht:

i) Boltzmann.Faktor

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{e^{-\frac{E_2}{kT}}}{e^{-\frac{E_1}{kT}}} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}}$$

ii) $E_2 - E_1 = hf$

iii) stationär

$$\dot{N}_2 \Big|_{\text{Abs.}} = \dot{N}_2 \Big|_{\text{spont. Emission}} + \dot{N}_2 \Big|_{\text{stim. Emission}}$$

iv)

$$\dot{N}_2 \Big|_{\text{Abs.}} = B\sigma(f)N_1$$

$$\dot{N}_2 \Big|_{\text{stim. Emission}} = C\sigma(f)N_2$$

$$\dot{N}_2 \Big|_{\text{spont. Emission}} = AN_2$$

$\sigma(f)$: Energiedichte des Strahlungsfelds

Im thermodynamischen Gleichgewicht: $\sigma(f) = w(f)$

$$\Rightarrow Bw(f)N_1 = AN_2 + Cw(f)N_2$$

$$\Rightarrow w(f) = \frac{A}{Be^{\frac{hf}{kT}} - C}$$

v) klassischer Grenzfall $T \rightarrow \infty$:

$$\Rightarrow B = C \quad \Rightarrow w(f) = \frac{A}{B} \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}$$

vi) Vergleich mit Rayleigh-Jeans:

$$\Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{8\pi f^2}{c^3} hf$$

Konsequenzen

1)

$$w(f) = \frac{8\pi hf^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}$$

2) drei Prozesse

$$3) \frac{A}{B} = \frac{8\pi hf^3}{c^3}$$

4) MASER (M $\hat{=}$ Mikrowellen), später LASER

V.4 Welle-Teilchen Dualismus

V.4.1 Photoelektrischer Effekt (Photoeffekt)

[Folie: äußerer Photoeffekt, Hallwachs Versuch]

Photoeffekt:

Wechselwirkung mit Licht führt zu Absorption eines Photons und Emission eines Elektrons.

- i) äußerer Photoeffekt
- ii) innerer Photoeffekt in Halbleitern
- iii) Photoionisation

Versuch: Halwachs Versuch

Aufbau:

UV-Lampe (Viel UV aber auch sichtbares Weißes Licht), die über Kollimatorlinse und eine Lochblende auf Zinkplatte strahlt. Daran angeschlossen ist ein Elektrometer.

- i) Die Zinkplatte wird negativ aufgeladen. Wird die Abdeckung weggenommen so nimmt die Ladung auf der Platte schnell ab. Die Elektronen werden also aus dem Material ausgestoßen.
- ii) Die Zinkplatte wird positiv aufgeladen. Wird die Abdeckung nun weggenommen passiert nichts. Die Ladung bleibt auf der Platte.
- iii) Die Zinkplatte wird wieder negativ aufgeladen. Die Abdeckung wird mit einer Glasplatte ersetzt so tut sich nichts oder nur sehr wenig. Wird die Glassplatte entfernt passiert das selbe wie bei i).
- iv) Tageslicht funktioniert nicht oder nur sehr langsam.

Interpretation:

- i) freigesetzte e^- werden von Ladung auf der Platte abgestoßen
⇒ Ladung sinkt ab
- ii) freigesetzte e^- werden von Ladung auf der Platte angezogen
⇒ Ladung bleibt gleich
- iii) kaum UV-Strahlung ⇒ nichts ⇒ Effekt hängt von f ab nicht von der Intensität
- iv) Tageslicht reicht nicht um e^- herauszuschlagen

⇒ Effekt hängt von f ab, nicht von der Intensität.

Versuch: Leonard Versuch (Theorie)

[Folie: Versuchsaufbau]

Die Energie der Elektronen ist begrenzt durch die hineingesteckte Energie minus die Austrittsenergie.

Aufbau (Gegenfeldmethode: anders herum als auf der Folie abgebildet):

- Photokathode wird mit Licht bestrahlt
- freigesetzte e^- werden durch ein elektrisches Gegenfeld einer Anode abgebremst
- Die Anzahl der hier noch durchkommenden Elektronen wird als Photostrom gemessen

Bemerkung:

- freigesetzte e^- haben kinetische Energie mit einer (unbekannten) Verteilung. Mit Gegenspannung U wird die maximale kinetische Energie bestimmt: $U_0 \Leftrightarrow I_{\text{Photo}} = 0$

Beobachtung:

[Folie: Graph der Energie gegenüber der Frequenz des eingestrahnten Lichts]

- $U_0 = \text{const.} \cdot f - \frac{W_A}{e}$
- Der Photostrom ist proportional zur Intensität des Lichts.
- Die Gegenspannung U_0 hängt **NICHT** von der Intensität ab.
- Es gibt eine minimale Spannung $\frac{W_A}{e}$
- Achsenabschnitt bzw. Wert von $\frac{W_A}{e}$ ist materialabhängig (die Steigung jedoch nicht)

Interpretation:

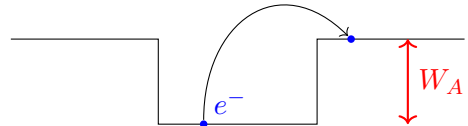
Energie des Lichts wird an e^- in Metall abgegeben
 $\Rightarrow e^-$ treten mit maximaler kinetischer Energie aus:

$$\Rightarrow eU = E_{\text{Licht}} - W_A$$

$$\Rightarrow \text{Experiment: } E_{\text{Licht}} = hf$$

Entscheidend: klassisch:

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0(E^2 + c^2B^2) = \frac{1}{c}I$$



Einstein's Photonenhypothese

Licht verhält sich wie ein Teilchenstrom. Diese Teilchen nennen wir Photonen. Sie haben eine Energie von $E = hf$

$$\Rightarrow \boxed{eU = hf - W_A}$$

\Rightarrow Nobelpreis 1921

Fragerunde

Zu Leonard Versuch: Warum das Magnetfeld:

Nur Teilchen mit bestimmter Masse (Elektronenmasse) kommen in den Detektor, nicht auch andere Teilchen, die irgendwie anders in dieselbe Richtung fliegen. (Glaßkörper ist nicht perfekt ...).

Versuch: Leonard Versuch (Praktisch)

i)

$$U_{\text{max}} = \text{const.} \cdot f - U_0 \quad U_0 = \frac{W_A}{e}$$

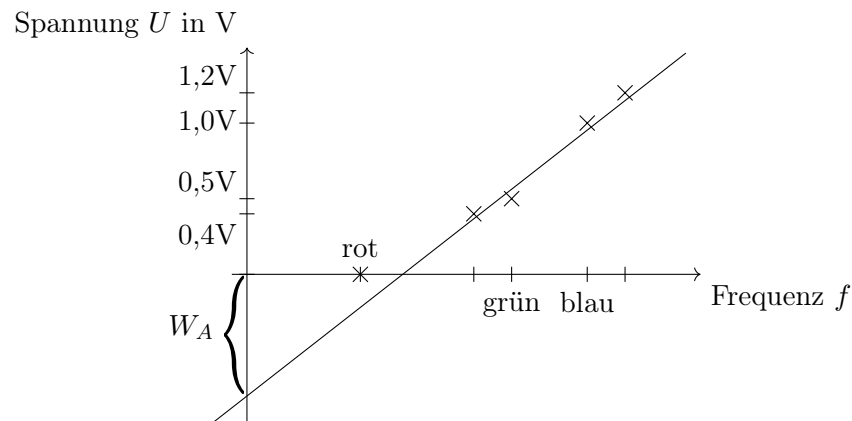
ii) Photostrom \propto Intensität des einfallenden Lichts.

iii) Die Gegenspannung ist von der Intensität unabhängig.

Hier scheitert die klassische Interpretation. Nehmen wir an die Energie des Lichts sei an die Intensität gebunden so würden wir erwarten, bei höherer Energie eine höhere Gegenspannung zu messen. Dies ist aber nicht so. Die Energie die auf ein Elektron übertragen wird ist $E = hf$ also die Energie eines Photons und damit Frequenzabhängig nicht Intensitätsabhängig. Die Intensität sorgt nur für mehr Elektronen pro Zeiteinheit aber nicht für Elektronen mit mehr Energie.

⇒ Einstein:

$$E_{\text{Photon}} = hf$$



V.4.2 Anwendungen des Photoeffekts

$$U_{\text{max}} = \text{const.} \cdot f - U_0 \quad U_0 = \frac{W_A}{e}$$

PES: Photoelektronenspektroskopie

Material mit Licht bestrahlen ⇒ austretende Photoelektronen genau analysieren.

⇒ Materialanalyse

e^- : geringe Eindringtiefe von wenigen hundert Angström, kurze Weglängen ⇒ Oberflächen, Filme, ...

UPS: UV Licht

(typische Energie Licht: 1 – 2eV wie oben im Diagramm zu sehen, typische Energie Röntgen: 10 – 100keV, typische Energie Radioaktivität: mehrere MeV.)

⇒ Spektroskopie an Valenzelektronen.

XPS: X-ray Strahlung

⇒ Spektroskopie an Core-Elektronen (innere Schalen)

⇒ Elementanalyse

Photomultiplikator

[Folie: Photomultiplikator]

Zum Teilchenbild

[Folie: Harmonischer Oszillator und Potential und Äquidistantes Energiespektrum]

Die Energien der Zustände sind im Potential des harmonischen Oszillators **Äquidistant**.

V.4.3 Compton-Effekt (Licht verhält sich wie Teilchen)

[Folie: Compton-Effekt]

Streuung eines Photons an einem nominell freien Elektron.

$$\lambda_S = \lambda_0 + 2\lambda_c \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} \approx 2,4\text{pm}$$

Beobachtung für weißes Licht

Versuch: Compton-Effekt

⇒ es zeigt sich, dass sich Licht in „allen“ (vielen kinematischen) Aspekten wie ein Teilchen verhält.

$$E = hf$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Dispersionsrelation:

$$E(\mathbf{p}) = cp \quad (\text{masseloses/relativistisches Teilchen})$$

V.4.4 Teilchenstrahl Beugung/Interferenz (Teilchen verhalten sich wie Wellen)

Doppelspalteffekt würde auch gehen.

Versuch: Interferenz von Elektronen (am Kristall)

Wegen des Polykristallinen Materials bekommen wir Ringe als Interferenzmuster statt horizontal verteilten Peaks.

Das selbe geht auch mit Neutronen oder großen Molekülen (z.B. C₆₀)

[Folie: Neutronen, C₆₀, Übergang QM - Klassische Physik]

V.4.5 Welle-Teilchen-Dualismus

Zusammengefasst:

Energie:

$$E = hf = \hbar\omega$$

Impuls:

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

Dispersionsrelation:

$$E(\mathbf{p}) = cp$$

[Folie: Graph Wellenlänge vs. Energie]

Frage: Wann verhält sich ein Teilchen wie ein Teilchen oder wie eine Welle, und umgekehrt?

EM-Strahlung:

| | Welle | Teilchenstrahl |
|---------------|--|---|
| | $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ | $j = \frac{1}{A} \frac{dN}{dt} = c\rho$ |
| Energiedichte | $w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (E^2 + c^2 B^2)$ | $w = \rho \hbar \omega$ |
| Impulsdichte | $\mathbf{\Pi} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \varepsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ | $\mathbf{\Pi} = \rho \hbar \mathbf{k}$ |
| Intensität | $I = c \varepsilon_0 E^2$ | $I = c \rho \hbar \omega$ |

j : Teilchenstromdichte $\frac{1}{A} \dot{N}$

ρ : Teilchendichte $\frac{N}{V}$

A : Querschnittsfläche

$$\Rightarrow |\mathbf{E}_0| = \sqrt{\frac{\hbar \omega \rho}{\varepsilon_0}}$$

Planck:

$$E_n = n h f$$

Einstein:

jede(s) Anregung/Quant/Teilchen

$$E = h f$$

$$\Rightarrow n \hat{=} \text{Teilchenzahl } N$$

i) viele Photonen $\hat{=} n$ ist groß $\hat{=} \text{gro\ss e Amplitude}$
 $\approx \text{klassische Welle}$

ii) wenige Photonen $\hat{=} n$ ist klein $\hat{=} \text{kleine Amplitude}$
 $\approx \text{Quanten Fall}$

QM: Teilchenzahl-Phasen-Unschärferelation:

$$\Delta N \cdot \Delta f \geq \sim \mathbf{\Pi}$$

Kapitel VI

Grundlagen der Quantenmechanik

Dies ist das letzte Kapitel dieser Vorlesung. Vektor Algebra muss man für dieses Kapitel gut verstanden haben.

VI.1 Axiome der Quantenmechanik

[Folie: Die Axiome der Quantenmechanik]

- I) Der Zustand wird beschrieben durch die Wellenfunktion Ψ bzw. den Zustandsvektor $|\Psi\rangle$

$\Psi =$ Wellenfunktion

$|\Psi\rangle =$ Zustandsvektor, q.m. Zustand, Zustand

- II) Einer messbaren Eigenschaft ist ein hermitescher Operator \hat{A} zugeordnet, \hat{A} heißt Observable

$$\text{Impuls} \leftrightarrow \hat{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \hat{p}_x \\ \hat{p}_y \\ \hat{p}_z \end{pmatrix}$$

Ort $\leftrightarrow \hat{\mathbf{x}}$

Energie $\leftrightarrow \hat{H}$

- III) Der Erwartungswert eines Operators \hat{O} im Zustand $|\Psi\rangle$ bzw. für die Wellenfunktion Ψ ist

$$\text{gegeben durch: } \langle \hat{O} \rangle = (\Psi, \hat{O}, \Psi) \quad \text{oder} \quad \langle \hat{O} \rangle = \langle \Psi | \hat{O} | \Psi \rangle = \sum_n \overbrace{p_n}^{\text{Wahrscheinlichkeit}} \underbrace{a_n}_{\text{Zahlen}}$$

Wobei das erste $\langle \hat{O} \rangle$ das statistische Mittelwert bedeutet.

Diese Aussage gilt für alle Operatoren, nicht nur Hermitesche.

- IV) Die Zeitentwicklung der Zustände bzw. Wellenfunktionen wird durch die Schrödinger-Gleichung beschrieben:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H} \Psi \quad \text{bzw.} \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle$$

- V) Bei Messungen der Observablen \hat{A} für ein System im Zustand $|\Psi\rangle$ bzw. der Wellenfunktion Ψ erhält man mit der Wahrscheinlichkeit $p_n = |(\Psi_n, \Psi)|^2$ bzw. $p_n = |\langle \Psi_n | \Psi \rangle|^2$ den Eigenwert a_n : der Zustand des Systems geht in die zugeordnete Eigenfunktion Ψ_n bzw. $|\Psi_n\rangle$ über (Messprozess \rightarrow Kollaps der Wellenfunktion).

Außerdem gilt: Der Erwartungswert $\langle \hat{A} \rangle$ der Observablen \hat{A} ist der Mittelwert der Messergebnisse a_n von sehr vielen (gleichen) Experimenten $\langle \hat{A} \rangle = \sum_n p_n a_n$.

VI.2 Wellenfunktion, Operatoren, Zustände

VI.2.1 Wellenfunktionen

Doppelspalt

[Folie: Interferenz/Einzel-Teilchen Experimente]

\mathbf{E} : reelle, vektorielle Funktion um \mathbf{r} und t

Ψ : komplexe, skalare Funktion von \mathbf{r} und t

Interpretation der Wellenfunktion

$|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür ein Teilchen zur Zeit t am Ort \mathbf{r} zu finden.

\Rightarrow Normierung

Gesamtwahrscheinlichkeit muß 1 sein. $\Rightarrow \int \Psi^*(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = 1$ wobei Ψ^* das komplex konjugierte ist.

VI.2.2 Operatoren

Die mathematische Definition ist fürchterlich einfach.

Mathematische Definition

$$\Psi' = \hat{O}\Psi \quad |\Psi'\rangle = \hat{O}|\Psi\rangle$$

Anschauliche Definition

Ein Operator verändert einen Zustand.

Beispiel:

$$\Psi'(\mathbf{r}, t) = C e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\mathbf{r} - Et)}$$

- $\hat{O} = (5 + 3i)$ $\Psi'(\mathbf{r}, t) = (5 + 3i)\Psi(\mathbf{r}, t) = (5 + 3i)C e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\mathbf{r} - Et)}$
- $\hat{O} = \frac{\partial}{\partial t}$ $\Psi'(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}, t) = -C \frac{i}{\hbar} E e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\mathbf{r} - Et)}$
- $\hat{O} = \frac{\partial}{\partial x}$ $\Psi'(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial x}\Psi(\mathbf{r}, t) = C \frac{i}{\hbar} p_x e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\mathbf{r} - Et)}$
- $\hat{O} = \text{Zeitumkehroperator} : \hat{T}$ $\Psi'(\mathbf{r}, t) = \hat{T}\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}, -t)$

VI.2.3 Hilbert-Raum (Ultrakompakt)

Frage: Was ist der Unterschied bzw. Zusammenhang zwischen Ψ und $|\Psi\rangle$???

Antwort:

$\Psi(\mathbf{r}, t)$ ist die Wellenfunktion des Zustandes $|\Psi(\mathbf{r}, t)\rangle$ in der Ortsdarstellung.

Vektorraum

$$\mathbf{v}(t) = \sum_k c_k(t) \mathbf{e}_k$$

Vektor = Koordinaten und Basisvektoren (Koordinatensystem)

\downarrow
 $|\Psi\rangle$

\downarrow
 Ψ

\downarrow
Darstellung

Reihenentwicklung von Funktionen, Funktionen als Vektorraum

$$f(x) = \sum_k c_k g_k(x) \quad \text{diskreten}$$

Funktion = Entwicklungskoeffizienten & Funktionenbasis

(1) endlich diskret

$$f(x) = \sum_{k=0}^N c_k g_k(x)$$

(2) unendlich diskret

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k g_k(x)$$

(3) kontinuierlich

$$f(x) = \int c(k) g(k, x) dk$$

(4) diskret + kontinuierlich

$$f(x) = \sum_k c_k g_k(x) + \int c(k) g(k, x) dk$$

Beispiele:

- Fourier-Reihe: unendlich diskret

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_n a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

- Fourier-Integral/Transformation: kontinuierlich

$$f(x) = \int F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$e^{-i\omega t}$: Basisfunktionen

$F(\omega)$: Entwicklungskoeffizienten

- Kugelflächenfunktionen:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} Y_m^l(\theta, \phi)$$

- Taylor-Reihe:

$$f(x) = \sum_n \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$$

- Legendre-Polynome:

$$f(x) = \sum_n c_n P_n(x)$$

Sehr allgemeines Konzept, es gibt viele Beispiele wie Hermite Polynome.

Hilbertraum

Ähnlich wie ein Vektorraum, nur mit Funktionen als Basis.

Funktionsbasis + gewisse Eigenschaften

Bracket-Notation

$$\begin{array}{c} | \quad \rangle \\ \uparrow \\ \text{Freiraum} \\ |\Psi\rangle, |\mathbf{r}, t\rangle, |\Psi, t\rangle, |n\rangle, |E\rangle, |\dots\rangle \end{array}$$

die Bracket können vieles bedeuten wie zum Beispiel $f(x)$ kann alle möglichen Funktionen darstellen.

VI.2.4 Zustand Darstellung und Wellenfunktion

$$\begin{array}{lll} |\Psi\rangle = & \Psi & \text{und} & |n\rangle \\ \text{Zustand} & \text{Wellenfunktion} & & \text{Darstellung} \\ \mathbf{v} = & \text{Koordinaten} & & \text{Basisvektoren} \end{array}$$

QM-Zustand: $\hat{=}$ Zustandsfunktion $|\Psi, t\rangle$

Darstellung: $\hat{=}$ gewählter Basisfunktionensatz $|n\rangle$

Wellenfunktion: $\Psi(\mathbf{r}, t) \hat{=}$ Entwicklungskoeffizienten in Ortsdarstellung

Darstellungswechsel: $\hat{=}$ Koordinatentransformation/Basiswechsel

Beispiel:

- Ortsdarstellung: Basis sind die Ortseigenfunktionen $|\mathbf{r}\rangle$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}|\mathbf{r}\rangle &= \mathbf{r}|\mathbf{r}\rangle \\ \Rightarrow |\Psi, t\rangle &= \int \underbrace{\Psi(\mathbf{r}, t)}_{\text{Wellenfkt. in Ortsdarstellung}} |\mathbf{r}\rangle d\mathbf{r} \end{aligned}$$

- Impulsdarstellung: Basis sind die Impulseigenfunktion $|\mathbf{p}\rangle$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}|\mathbf{p}\rangle &= \mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle \\ \Rightarrow |\Psi, t\rangle &= \int \underbrace{\Psi(\mathbf{p}, t)}_{\text{Wellenfkt. in Impulsdarstellung}} |\mathbf{p}\rangle d\mathbf{p} \end{aligned}$$

- Energie- (Spektral-) Darstellung: Basis sind Energieeigenfunktionen $|E_n\rangle$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}|E_n\rangle &= E_n|E_n\rangle \\ \Rightarrow |\Psi, t\rangle &= \sum_k \underbrace{C_k(t)}_{\text{Wellenfkt. in der Energiedarstellung}} |E_n\rangle \end{aligned}$$

VI.2.5 Analogie zwischen Vektor- und Hilbertraum

$$\mathbf{v}(t) = \sum_k C_k(t) \mathbf{e}_k \quad \leftrightarrow \quad |\Psi, t\rangle = \sum_n C_n(t) |n\rangle \quad \text{oder} \quad |\Psi, t\rangle = \int C(n, t) |n\rangle dn$$

[Folie: Analogie zwischen Vektor- und Hilbertraum]

Vektoroperator

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \hat{=} \hat{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \hat{p}_x \\ \hat{p}_y \\ \hat{p}_z \end{pmatrix}$$

Wir brauchen alle drei Zahlen um die Bewegung des Teilchens zu beschreiben.

VI.3 Nicht relativistische QM und Schrödingergleichung

VI.3.1 Zustand und Bewegung eines Teilchens

klassisch:

Zustand $\mathbf{v}(t), \mathbf{p}, t$

Messgrößen können ausgedrückt werden als Funktionen um $\mathbf{v}(t), \mathbf{p}(t), t, \dots$

Bewegung Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = E$

QM, in der Sprache der Wellenfunktionen in der Ortsdarstellung

Zustand Wellenfunktion $\Psi(\mathbf{r}, t)$

Messgrößen Eigenwert a_k der Observable \hat{A} mit einer Wahrscheinlichkeit $p_k = |(\Psi_k, \Psi)|^2$

Bewegung Hamiltonoperator $\hat{\mathcal{H}}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}})$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathcal{H}} \Psi(\mathbf{r}, t)$$

QM in der Sprache der Zustandsfunktionen

Zustand $|\Psi, t\rangle$

Messgrößen Eigenwert a_k der Observable \hat{A} mit einer Wahrscheinlichkeit $p_k = |\langle \Psi_k | \Psi \rangle|^2$

Bewegung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(\mathbf{r}, t)\rangle = \hat{\mathcal{H}} |\Psi, t\rangle$$

$F = ma$

Wichtige Darstellung

- t ist ein Parameter
- \mathbf{r} in $\Psi(\mathbf{r}, t)$ hängt nicht implizit selber von t ab.
- \mathbf{r} in $\Psi(\mathbf{r}, t)$ ist **NICHT** der Ort des Teilchens \mathcal{Q}
Der Ort der Teilchens ergibt sich aus Axiom V)

$$p(\mathbf{r}) = |(\Psi_{\mathbf{r}} | \Psi)|^2 = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$$

- $\Psi(\mathbf{r}, t)$ hängt **NUR** von \mathbf{r} und t ab, **NICHT** von z.B. \mathbf{p}, E, \dots
Der Impuls des Teilchens ergibt sich aus Axiom V)

$$p(\mathbf{p}) = |(\Psi_{\mathbf{p}} | \Psi)|^2 = |\cancel{\Psi(\mathbf{p}, t)}|^2$$

VI.3.2 „Herleitung“ der Schrödingergleichung (SGL)

Wir betrachten ein freies Teilchen $\hat{=}$ Ebene Welle $\Psi(\mathbf{r}, t) = C e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)}$

Ortsoperator

$$\hat{\mathbf{r}}\Psi = \mathbf{r}\Psi \quad \text{nach Konst}$$

Dies geht, da der Ortsoperator auf Ψ angewendet gleich $\mathbf{r}\Psi$ ist.

Impulsoperator

$$\hat{\mathbf{p}}\Psi = \mathbf{p}\Psi$$

$$\text{Beobachte: } \frac{\partial}{\partial x}\Psi = \frac{i}{\hbar}p_x\Psi \quad \Rightarrow \quad \nabla\Psi = \frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\Psi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla} \quad \text{Impulsoperator in der Ortsdarstellung}$$

Schrödinger-Gleichung

$$\hat{E}\Psi = E\Psi$$

$$\text{Beobachte: } \frac{\partial}{\partial t}\Psi = -\frac{i}{\hbar}E\Psi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}}$$

Neben klassischer Gleichung $\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = E$, und ersetzen durch Operatoren

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathcal{H}}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}})\Psi(\mathbf{r}, t)}$$

\Rightarrow Verallgemeinerung: Zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

Zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi, t\rangle = \hat{\mathcal{H}}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}})|\Psi, t\rangle$$

VI.3.3 Freies Teilchen in Ortsdarstellung

klassisch:

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$$

quantenmechanisch:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \quad (\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta)$$

da $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$

Schrödingergleichung:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{r}, t)$$

Lösung:

i) Lösungsansatz:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = C e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)}$$

ii) 1. Seite der Schrödinger-Gleichung: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = E \Psi$

iii) 2. Seite der Schrödinger-Gleichung: $-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \right)^2 \Psi = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \Psi$

$$\Rightarrow E \Psi = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \Psi$$

$$\boxed{E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}} \quad \checkmark \quad \Rightarrow \quad \Psi(\mathbf{r}, t) = C e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)}$$

VI.3.4 Teilchen im Potential in Ortsdarstellung

klassisch:

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

quantenmechanisch:

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r})$$

Schrödinger-Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \Psi(\mathbf{r}, t)$$

Bemerkung:

- ebene Wellen sind **keine Lösung** dieser SGL

$$\Psi = \text{ebene Welle} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \quad \text{weil in Ortsdarstellung gilt:} \quad \hat{\mathbf{r}} \Psi = \mathbf{r} \Psi$$

$$\nRightarrow E \neq \text{const.} : E(\mathbf{r})$$

Wir wissen aber E ist nicht vom Ort abhängig sondern eine Konstante.

Hier ist der Lösungsansatz also Falsch. \nRightarrow

VI.3.5 Zeitunabhängige SGL

Für explizit nicht von der Zeit abhängiger Hamiltonoperatoren läßt sich die SGL allgemein lösen:

Ansatz:

$$|\Psi, t\rangle = f(t) |\Psi, 0\rangle$$

\Rightarrow in zeitabhängige SGL einsetzen \Rightarrow Gleichung separieren \Rightarrow zwei Gleichungen für die zwei separierten Bruchstücke

- (1) eine Lösung stellt sich als eindeutig heraus

$$f(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} Et}$$

- (2) **Zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung**

$$\hat{\mathcal{H}} |\Psi, 0\rangle = E |\Psi, 0\rangle$$

Feststellung 1:

Das ist eine Eigenwertgleichung zum Hamiltonoperator

| diskret | kontinuierlich |
|---|--|
| $\hat{\mathcal{H}} n\rangle = E_n n\rangle$ | $\hat{\mathcal{H}} n\rangle = E(n) n\rangle$ |

n abzählbar

Energiezustände $|n\rangle$

Energie-Eigenwerte E_n bzw. $E(n)$

Feststellung 2

Die Lösungen der zeitunabhängigen SGL sind die **stationären Zustände** des Quantensystems

Zeitabhängigkeit stationärer Zustände

$$|n, t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} |n\rangle$$

Zeitabhängigkeit von Zeitunabhängigen Erwartungswerten in stationären Zuständen

$$\langle \hat{O} \rangle(t) \equiv \langle n | e^{\frac{i}{\hbar} E_n t} \hat{O} e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} | n \rangle = \langle n | \hat{O} | n \rangle = \text{const.}$$

Damit gilt auch $\langle n, t | n, t \rangle = \langle e^{\frac{i}{\hbar} E_n t} e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} | n \rangle = \langle n | n \rangle = 1 = \text{const.}$ Somit ist der Begriff „stationärer Zustand“ gerechtfertigt.

Feststellung 3

F1 ist äquivalent zu F2

Wiederholung

Ansatz:

$$|\Psi, t\rangle = f(t) |\Psi, 0\rangle$$

1) $f(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$

2) $\hat{\mathcal{H}} |\Psi, 0\rangle = E |\Psi, 0\rangle$

Feststellung 2:

$$\langle \hat{O} \rangle(t) = \text{mit unabhängig für stationäre zustände}$$

VI.3.6 Zusammenfassung

Zustand, Wellenfunktion, Darstellung $|\Psi\rangle = \sum_k \Psi_k |k\rangle$ oder $|\Psi\rangle = \int \Psi(k) |k\rangle dk$

Operatoren $\Psi' = \hat{O}\Psi$, $|\Psi'\rangle = \hat{O}|\Psi\rangle$

Messung Axiom V)

Bewegung const. $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi, t\rangle = \hat{\mathcal{H}} |\Psi, t\rangle$

$$\text{plus } \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathcal{H}} = 0 \quad E|\Psi\rangle = \hat{\mathcal{H}}|\Psi\rangle, \quad |\Psi, t\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} E t} |\Psi\rangle$$

VI.4 Stern-Gerlach Experiment und Elektronen-Spin (1922 - 25)

Ziel: Messung des magnetischen Moments μ von Atomen

$$\tau = \mu \times B$$

In einem inhomogenen Magnetfeld gibt es einen Feldgradienten ungleich null und damit eine Faraday-Kraft:

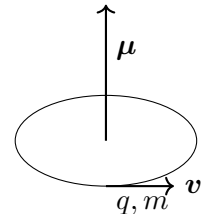
$$\text{Faraday Kraft } F = \nabla(\mu \cdot B)$$

Vorbereitung:

$$L = r \times p$$

$$\mu = IAn$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = \frac{q}{2m} L} \quad \text{Klassisch}$$



Aufbau und Durchführung

Klassische Erwartung

$$F = \nabla(\mu \cdot B) = \underbrace{\mu_z}_{\text{wird gemessen}} \frac{\partial B}{\partial z} e_z$$

Ofen \Rightarrow statische Verteilung der Richtungen des μ 's der Atome

Experiment

[Folie: The Spin, A Quantum Magnet (video)]

Versuch: Magnetische Dipole durch inhomogenes Feld

\Rightarrow nur zwei Arten von Dipolen werden gemessen $\pm p_z$, da nur p_z gemessen wird.

So als würden nur Dipole mit zwei verschiedenen Richtungen in das inhomogene Magnetfeld eintreten. Wir wissen aber, dass die eintretenden Dipole in **alle Richtungen** zeigen.

Schlussfolgerungen:

- 1) Das Elektron trägt neben der Ladung zusätzlich ein magnetisches Moment μ_e .

$$\Rightarrow \text{„Eigendrehimpuls“ oder auch Spin } S$$

- 2) Es existiert eine räumliche Quantisierung des magnetischen Moments.

- 3) \Rightarrow das magnetische Moment hat zwei „Einstellungen“
 $\Rightarrow S = \frac{1}{2}$

- 4) Zusammenhang zwischen μ_e und S ist ca. 2-mal größer als klassisch erwartet.

$$\mu_z = -g\mu_B \frac{S_z}{\hbar} \quad g = 2 \quad S_z = \pm \frac{1}{2}$$

Das Minus Zeichen kommt daher, dass μ_B eine positive Naturkonstante ist und die Ladung eines Elektrons e negativ.

- 5) Zum Elektronenspin gibt es **kein** klassisches Analogon. \Rightarrow es gibt z.B. kein $\Psi(r, t)$ also keinen Spin in der Ortsdarstellung.

Bemerkung:

- S ist für uns über μ messbar $\rightarrow \begin{cases} \text{Observable} \\ \text{3D Vektor} \end{cases}$

VI.5 Zustand, Wellenfunktion und Messprozess

VI.5.1 Elektronenspin

Zustandsfunktion

$$|\Psi\rangle = \text{Linearkombi. von Wellenfunktionen mal Basisfunktionen} = \sum_n c_n |n\rangle$$

(Die Wellenfunktionen sind hier die Entwicklungskoeffizienten)

$$|\Psi\rangle = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle$$

Beim Elektronenspin haben wir einen 2-dimensionalen Hilbertraum \mathcal{Q}

α, β : komplexe Zahlen

$\alpha^2 + \beta^2 = 1$: Normierung

Die Ortsfunktion „lebt“ in einem Unendlich-dimensionalen Hilbertraum!

Bemerkung:

- Analogie 2-dim Vektorraum $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y = x_1\mathbf{r}_1 + x_2\mathbf{e}_2 = \dots$
- Wir haben „unbemerkt“ eine Quantisierungsachse festgelegt (bei uns bis jetzt die z -Achse)
Dies bedeutet es gibt kein Experiment bei dem man gleichzeitig mehrere Komponenten von $\boldsymbol{\mu}$ misst. Man könnte zuerst die z -Richtung messen und danach versuche die x -Richtung zu messen, aber nicht gleichzeitig.

$$\Rightarrow \begin{array}{c} |\uparrow\rangle \\ |\downarrow\rangle \end{array} \quad \text{sind mit der Richtung der Quantisierungsachse verknüpft !}$$

- Erinnerung:

$$|\Psi\rangle = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle \quad \alpha = \langle \uparrow | \Psi \rangle \quad \beta = \langle \downarrow | \Psi \rangle$$

Analogie Vektorraum:

$$\mathbf{v} = \alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \mathbf{e}_1^\top \cdot \mathbf{v} \quad \beta = \mathbf{e}_2^\top \cdot \mathbf{v}$$

Wellenfunktion:

Wie schauen $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ aus?

\Rightarrow keine Ahnung

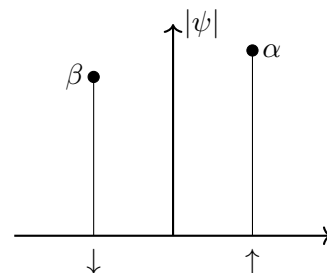
Was wir nur wissen ist wie Operatoren auf sie wirken

$$\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z, (\mathbf{S})^2$$

$$\hat{S}_z |\uparrow\rangle = +\frac{1}{2} |\uparrow\rangle$$

$$\hat{S}_z |\downarrow\rangle = -\frac{1}{2} |\downarrow\rangle$$

man kann auch $\hat{S}_x |\uparrow\rangle = ???$ ausrechnen. (siehe Quantenmechanik 2)



VI.5.2 Messung des Elektronenspins

Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Wellenfunktion Ψ und Axiom V).

Was ist eine Eigenwertgleichung:

Vektorraum:

$$\overset{\circ}{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \lambda_n, \mathbf{v}_n \quad \overset{\circ}{A} \xrightarrow{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \overset{\circ}{A} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Da $\overset{\circ}{A}$ hermitesch sein muss (Observable) ist die auch diagonalisierbar. Somit gibt es so viele Eigenwerte, wie hoch die Dimension der Matrix ist.

Funktionenraum:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \Psi^2} \right) \mathcal{Y}_{lm}(0, 1) = -l(l+1) \mathcal{Y}_{lm}(0, 1)$$

Hilberraum:

$$\hat{O}|\Psi\rangle = \lambda|\Psi\rangle \quad \Rightarrow \quad \lambda_n, |\Psi_n\rangle$$

Spin: $S = \frac{1}{2} \quad \hat{S}_z|\Psi\rangle = S_z|\Psi\rangle$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Lösung: } \hat{S}_z|\uparrow\rangle &= +\frac{1}{2}|\uparrow\rangle & \Rightarrow & +\frac{1}{2}, |\uparrow\rangle \\ \hat{S}_z|\downarrow\rangle &= -\frac{1}{2}|\downarrow\rangle & \Rightarrow & -\frac{1}{2}, |\downarrow\rangle \end{aligned}$$

Übersetzt auf unseren Fall:

$$|\Psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$$

\Rightarrow Wahrscheinlichkeit Wert

$$\begin{aligned} p\left(+\frac{1}{2}\right) & \text{ also } +\frac{1}{2} \text{ zu messen } = \alpha^2 = |\langle \uparrow | \Psi \rangle|^2 \\ p\left(-\frac{1}{2}\right) & \text{ also } -\frac{1}{2} \text{ zu messen } = \beta^2 = |\langle \downarrow | \Psi \rangle|^2 \end{aligned}$$

Wellenfunktion für Spin $\frac{1}{2}$ in Spin-Darstellung

$$\Psi(x) = \begin{cases} \alpha & \text{für } x = +\frac{1}{2} \\ \beta & \text{für } x = -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$p(x) = |\Psi(x)|^2$$

Beispiele:

- Nehmen wir an: e befindet sich im Zustand $|\Psi\rangle = |\uparrow\rangle \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1 \quad \beta = 0$

$$\begin{aligned} p\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 \\ p\left(-\frac{1}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Bemerkung:

Es muss gelten $p(\frac{1}{2}) + p(-\frac{1}{2}) = 1$ und $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

- e befindet sich im Zustand $|\Psi\rangle = |\downarrow\rangle \Rightarrow \alpha = 0 \quad \beta = 1$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

- e befindet sich im Zustand $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$p_n = |\langle \Psi_n | \Psi \rangle|^2$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $\hat{A} \quad |\Psi\rangle$

Der Spin kann also **nach** der Messung nur **einen** von zwei Zuständen haben.

Kollaps der Wellenfunktion

$$|\Psi\rangle \xrightarrow{\text{Messung, Eignerwerte}} |\Psi_n\rangle$$

Die Messung ist nicht deterministisch aber die Schrödinger-Gleichung ist deterministisch ⚡

VI.6 Einige einfache Quantensysteme

- wir benutzen $\Psi(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{r} | \Psi \rangle$
- ein Teilchen der Masse m
- eindimensionale Bewegung
- nur t -unabhängiger Hamiltonian
 \Rightarrow Zeitunabhängige SGL
 \Rightarrow stationäre Zustände

$$E\Psi(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \Psi(x)$$

Physikalische Bedingungen an die Lösung:

- (1) Anschlussbedingungen an unstetigkeiten.
 $\Psi(x)$ und $\Psi'(x)$ müssen stetig sein.
- (2) Gebundene Teilchen
 \Rightarrow Lösungen müssen normierbar sein
 $\Psi(x \rightarrow \pm\infty) = 0$

Die Wellenfunktionen von nicht gebundenen Teilchen sind auch normiert, allerdings ist dies nicht einfach so berechenbar. Eine freie EM-Welle im unendlichen Raum hätte folglich überall winzige Aufenthaltswahrscheinlichkeiten, da wir quasi durch unendlich Teilen. Hierzu müsste man Randbedingungen oder ein endlich großes Universum einführen.

VI.6.1 Konstantes Potential $V(x) = V_0$

Annahme: Teilchen läuft von links nach rechts

Ansatz: $\Psi(x) = C e^{ikx}$

SGL:

$$E\Psi = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_0 \right) \Psi$$

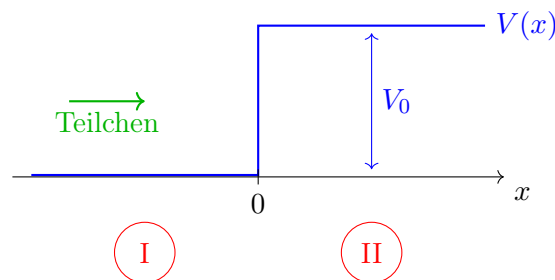
$$\hat{V}_0 \Psi = V_0 \Psi \quad V(\hat{x}) = V(x) \Psi(x)$$

Lösung: mit $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} : \hbar k = \sqrt{2m(E - V_0)}$

Bemerkung:

$$\bullet \Psi(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar} E t} \Psi(x) + \{-k\} = C e^{\frac{i}{\hbar} (\hbar k x - E t)} + \{-k\}$$

VI.6.2 Potentialstufe



klassisch:

- $E > V_0$: Teilchen fliegt weiter aber langsamer
- $E < V_0$: Teilchen wird reflektiert (an Wand umkehren) \Rightarrow kann sich **nicht** im Bereich II aufhalten

Quantenmechanik:

[Folie: Reflexion und Transmission]

- $E > V_0$:

Lösung in I:

$$\Psi_I(x) = e^{ikx} + R e^{-ikx} \quad \hbar k = \sqrt{2mE}$$

Lösung in II:

$$\Psi_{II}(x) = T e^{iqx} \quad \hbar q = \sqrt{2m(E - V_0)}$$

Mit dem neuen Wellenvektor q !

Anschlussbedingungen: $\Psi_I(0) = \Psi_{II}(0)$ und Ableitungen $\Psi'_I(0) = \Psi'_{II}(0)$ Hier kommen die Stetigkeitsbedingungen aus der Schrödinger-Gleichung statt wie in der Elektrodynamik aus den Maxwell-Gleichungen.

$$\Rightarrow \quad R = \frac{k - q}{k + q} \quad T = \frac{2k}{k + q}$$

physikalische Bedeutung der Lösung:

mit der Wahrscheinlichkeit R^2 wird die Welle reflektiert

mit der Wahrscheinlichkeit T^2 wird die Welle transmittiert (läuft weiter)

Bemerkung:

Wann ist $R^2 + T^2 \neq 1$?

Aufgrund der veränderten Wellenlänge muss mit eingerechnet werden.

$$1 - R^2 = \frac{q}{k} T^2$$

- $E < V_0$:
gleicher Ansatz: aber Wellenvektor im Bereich II ist imaginär

$$\Rightarrow \Psi_{II}(x) = T e^{iqx} \equiv T e^{-\kappa x}$$

$$\hbar \kappa \rightarrow -i \hbar q \text{ bzw. } \hbar q \rightarrow i \hbar \kappa$$

\Rightarrow Welle im Bereich II fällt exponentiell ab

$$\Rightarrow q \rightarrow i \kappa$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{k - i\kappa}{k + i\kappa} \quad T = \frac{2k}{k + i\kappa}}$$

$$|R|^2 = 1$$

[Folie: Tunnel-Effekt]

Fall einer unendlich hohen Potentialstufe $V_0 \rightarrow \infty$

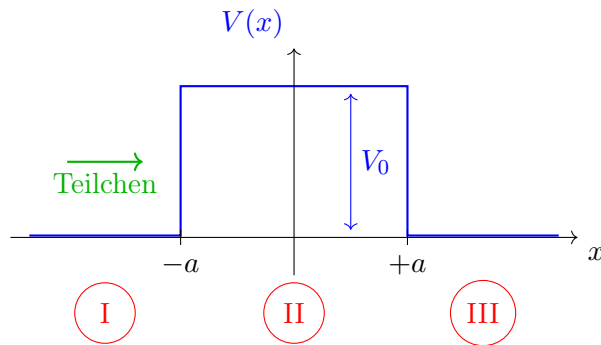
$$\Rightarrow \gamma \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow R = -1 \quad T = 0$$

$$\Rightarrow \Psi_I(x) = e^{ikx} - e^{-ikx}$$

$$\Rightarrow \Psi_{II}(x) = 0$$

VI.6.3 Potentialbarriere



[Folie: Potentialstufe]

klassisch:

- $E > V_0$: Teilchen fliegt darüber
- $E < V_0$: Teilchen wird am Potential umgekehrt

Quantenmechanik:

- Bereich I:

$$\Psi_I(x) = e^{ikx} + R e^{-ikx} \quad \hbar k = \sqrt{2mE}$$

- Bereich II:

$$\Psi_{II}(x) = B e^{iqx} + C e^{-iqx} \quad \hbar q = \sqrt{2m(E - V_0)}$$

- Bereich III:

$$\Psi_{III}(x) = T e^{ikx}$$

+ Anschlussbedingungen

- Fall $E < V_0$: $\Rightarrow q$ ist imaginär $\hbar\kappa = -i\hbar q$

$$\Rightarrow \Psi_{\text{II}}(x) = Be^{-\kappa x} + Ce^{\kappa x}$$

\Rightarrow Anschlussbedingungen

$$T = \frac{e^{-ikq}}{\cosh(\kappa a) + i\varepsilon \sinh(\kappa a)} \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{k} - \frac{k}{\kappa} \right)$$

- Fall $E > V_0$: analog dazu

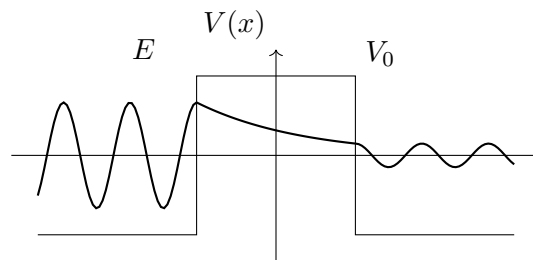
[Folie: Tunneleffekt]

\Rightarrow **Tunneleffekt**

Tunnelwahrscheinlichkeit:

$$t(E) = T^2 = \left(1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2(\kappa a) \right)^{-1}$$

Die Tunnelwahrscheinlichkeit hängt also vor allem von dem Potentialunterschied und der „Dicke der Wand“ ab.



Die Wahrscheinlichkeit auf der anderen Seite gemessen zu werden ist kleiner aber die Energie ist die selbe ☹

Diskussion:

- $\kappa a \gg 1$ (hohe und breite Barriere)

$$\Rightarrow t(E) \cong \exp \left[-\frac{2a}{\pi} \sqrt{2m(V_0 - E)} \right]$$

Die Tunnelwahrscheinlichkeit wird also exponentiell kleiner mit den Faktoren der Höhe und Breite der Barriere.

- Im Rahmen der WKB-Näherung ergibt sich für allgemeine Potentialbarrieren $V(x)$

$$\Rightarrow t(E) = \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(V(x) - E)} dx \right]$$

a, b : klassische Umkehrpunkte [Folie: WKB-Näherung]

Bei der WKB-Näherung integriert man über verschiedene Potentiale und summiert somit also die exponentiellen Abfälle durch diese infinitesimal dünnen Barrieren.

VI.6.4 Beispiele für den Tunneleffekt

Beispiel: Zerfallswahrscheinlichkeit

- 1) $dN = -\frac{N}{\tau} dt$
 $dN = -N \cdot \text{Zerfallswahrscheinlichkeit} \cdot dt$
- 2) Zerfallswahrscheinlichkeit $\frac{1}{\tau} = \text{Tunnelwahrscheinlichkeit} \cdot \text{Frequenz der Wandstöße}$
[Folie: Tunneln und Zerfallswahrscheinlichkeiten]

$$t_\alpha(E) \cong \exp \left[-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \left(\pi e^2 \frac{Z_1 Z_2}{\sqrt{E}} - 4e\sqrt{Z_1 Z_2} \right) \right]$$

\Rightarrow Kernfusion bevorzugt mit $Z =$ kleine Kerne
(Alpha-Zerfall (α -Zerfall)) ist die Umkehrreaktion

Beispiel: **Feldemission**

[Folie: Metall ohne und mit \mathbf{E} -Feld]

thermische Energie \gg Austrittsarbeit (also keine Glühemission)

\Rightarrow Metall ins starke Feld

\Rightarrow Potentialbarriere

$$j(E) = k_1 \frac{E^2}{W_A} \exp \left[-\frac{k_2 W_A^{\frac{3}{2}}}{|E|} \right]$$

k_1, k_2 : für uns hier unwichtige konstanten

Versuch: Feldemission

Kathode wird bis zur Glut erhitzt, aber anders als eine Glühwendel, nicht zur Emission von Elektronen sondern zur Reinigung der Nadeloberfläche. An der spitzen Kathode bildet sich bei Anlegung von Spannung ein sehr starkes \mathbf{E} -Feld. Aufgrund dieser großen Potentialdifferenz können mehr Elektronen Tunneln und werden auf den Leuchtschirm beschleunigt.

Mit einer anderen Konstruktion können wir gezielt Barium Atome in die Glaskugel verdampfen. Somit können wir die Nadelspitze gezielt verunreinigen. Durch diese an der Nadel abgesetzten Atome verringert sich auf kleinen Bereichen der Krümmungsradius und damit der Potentialunterschied. Deshalb erhöht sich an diesen Stellen die Tunnelwahrscheinlichkeit.

Bei sauberer Nadel sieht man, in grün, auf dem Leuchtschirm die Struktur der Nadelspitze (Periodisch aufgrund der Kristallstruktur des Metalls).

Bei gezielter Verunreinigung durch Barium Atome bilden sich einige (wieder periodisch verteilte) dunkle Flecken mit hellen Rändern (höhere Tunnelwahrscheinlichkeit).

Nun wird die Nadelspitze wieder ein wenig aufgeheizt (nicht genug um sie zu reinigen). Das Bild wird beweglich und Wabert herum wie heiße Luft. Diese Bewegung ist die Thermische Bewegung der Barium Atome auf der Oberfläche (Brown'sche-Bewegung).

Beispiel: **kalte Emission**

\rightarrow Rastertunnelmikroskop

$$I(d) \propto \frac{U}{d} \exp \left[-\frac{2d}{\hbar} \sqrt{2mW_A} \right]$$

[Folie: Tunneln und Potentiale]

[Folie: Carbon-Kristallstruktur und Rastertunnelmikroskopaufnahme]

genaue Analyse:

$$I(d) \approx |\Psi_{\text{Oberfläche}}|^2 e^{-\Lambda d}$$

\Rightarrow **Quantenkäfige**

[Folie: Bilder zu Quantenkäfigen]

Aus Interferenz entstehende Wellenfunktion der gefangenen Elektronen ist im Rastertunnelmikroskop gut sichtbar. Bei kreisförmigem Käfig: Sehr wahrscheinlich in der Mitte. Bei ellipsenförmigem Käfig sehr wahrscheinlich in einem der beiden Brennpunkte.

Beispiel: Tunnel diode

[Folie: Tunnel diode]

Man kann damit einen Spannungsabhängigen negativen Widerstand herstellen.

Beispiel: Elektrodynamik

evaneszente Wellen [Folie: evaneszente Wellen]

VI.6.5 Harmonischer Oszillator

$$\Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}Dx^2 \equiv \frac{m\omega_0^2}{2}x^2 \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

\Rightarrow Hamiltonfunktion:

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}D\mathbf{x}^2$$

\Rightarrow Hamiltonoperator:

zeitunabhängige SGL

$$E\Psi(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega_0^2}{2}x^2 \right) \Psi(x)$$

klassisch:

- $E = 0$: Teilchen ist in Ruhe bei $x = 0$
- $E > 0$: Teilchen schwingt mit Amplitude A

$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2$$

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Ort x
(im Bereich von a bis b)

$$p(t)dt = \frac{1}{T}dt = p(x)dx$$

$$\Rightarrow p(x) = \left(2\pi A \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2} \right)^{-1} = \frac{\omega_0}{2\pi V(x)}$$

Quantenmechanisch:

Die SGL kann für den harmonischen Oszillator exakt gelöst werden

Zusammenhang mit den sog. Hermitpolynomen $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad n \in \mathbb{N}_0$

Energie:

$$E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Grundzustand:

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}x_0}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$$

Anregungszustände:

$$\Psi_{m>0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}x_0}} H_n \left(\frac{x}{x_0} \right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}$$

Definition: Erwartungswert eines Operators

$$\langle \hat{O} \rangle_n = \langle \Psi_n | \hat{O} | \Psi_n \rangle = \int \Psi_n^*(x) \hat{O} \Psi_n(x) dx$$

Erwartungswerte

$$\langle \hat{x} \rangle_n = 0$$

$$\langle \hat{p} \rangle_n = 0$$

$$\langle \hat{x}^2 \rangle_n = x_0^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle_n = \frac{\hbar^2}{x_0^2} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

[Folie: Wellenfunktionen und Potentiale]

VI.6.6 Beispiele für den quantenmechanischen Oszillator (QHO)

Beispiel: Schwingungszustände in mehratomigen Molekülen und Festkörpern

[Folie: Molekülschwingungen und Bindungspotential der Atome im Molekül oder Festkörper]

[Folie: Federmodell für Molekül und Festkörperschwingungen]

Wo sieht man diese Schwingungen? Zum Beispiel wenn wir Schall durch einen Festkörper jagen bewegen sich die Kerne (nicht die Elektronen) in dieser harmonischen Schwingungen mit und klingen dann in ihren Eigenfrequenzen (siehe Stimmgabel).

Beispiel: EM-Strahlung

$$E_n = \hbar \omega_0 n \quad \text{Planck}$$

$$\hbar \omega_0 \quad \uparrow \quad \text{Photon} \quad \text{Einstein}$$

VI.6.7 Unschärferelation und Quanten- klassischer Übergang

Definition: Schwankung/Unschärfe

$$(\Delta O)^2 = \left\langle \left(\hat{O} - \langle \hat{O} \rangle \right)^2 \right\rangle = \langle \hat{O}^2 \rangle - \langle \hat{O} \rangle^2$$

Bemerkung:

$$\langle \hat{O}^n \rangle = \int \Psi^* \hat{O}^n \Psi dx$$

Nullpunktschwingung

Grundzustand $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0$

\Rightarrow Der QM Oszillator kann **NICHT** zur Ruhe kommen

Anders als ein Pendel, das KANN man einfach anhalten ☺

$$\Delta x^2 \equiv \langle \hat{x}^2 \rangle = x_0^2 \left(n + \frac{1}{2} \right) \xrightarrow{n=0} \frac{1}{2} x_0^2$$

$$\Delta p^2 \equiv \langle \hat{p}^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{x_0^2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \xrightarrow{n=0} \frac{\hbar^2}{2x_0^2}$$

Unschärferelation

Pärchen von Operatoren \hat{A}, \hat{B}

$$[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \begin{cases} 0 & \text{komutieren} \\ \neq 0 & \text{komutieren nicht} \end{cases}$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] \Psi = \hat{A}\hat{B}\Psi - \hat{B}\hat{A}\Psi = \begin{cases} = 0 & \text{komutieren} \\ \neq 0 & \text{komutieren nicht} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|$$

z.B. der Orts- und Impulsoperator

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

$$\Rightarrow \Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar$$

\Rightarrow QHO:

$$\Delta x \Delta p = \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) \xrightarrow{n=0} \frac{1}{2} \hbar$$

Der QHM hat die Unschärferelation also so gut wie möglich ausgenutzt \mathcal{Q}

\Rightarrow Nullpunktschwingung ist eine Konsequenz der Unschärferelation \mathcal{Q}

Quanten- klassischer Übergang

Aufenthaltswahrscheinlichkeit:
klassisch:

$$p(x) = \frac{\omega_0}{2\pi V(x)}$$

Quantenmechanik:

$$|\Psi_n(x)|^2$$

[Folie: Wellenfunktion und Aufenthaltswahrscheinlichkeit]

für größere n nähern sich $p(x)$ und $|\Psi_n(x)|^2$ an.

\Rightarrow je größer der Oszillator angeregt ist, um so klassischer wird er \mathcal{Q}

„Amplitude“ der Schwingung

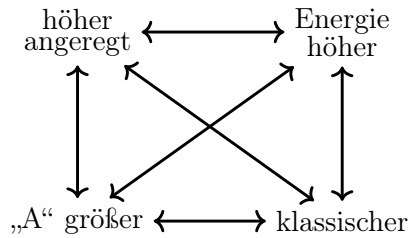
Das Wort Amplitude ist hier mit Vorsicht zu behandeln, da wir hier die zeitunabhängige SGL betrachtet haben \mathcal{Q} . Deshalb erhalten wir auch keine schwingenden Erwartungswerte: Die Erwartungswerte von stationären Zuständen sind ebenfalls stationär. Es geht hier also um Aufenthaltswahrscheinlichkeiten und nicht um das tatsächliche Verfolgen eines schwingenden Objekts (Es gibt solche zeitabhängigen, schwingenden Zustände, diese sind jedoch komplizierter und werden in den folgenden Vorlesungen behandelt).

Varianz: $\Delta x^2 \equiv \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2 \propto A^2$

| | klassisch | Quantenmechanik |
|------------|---|---|
| Energie | $E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 = \hbar \omega_0 \frac{m \omega_0}{2\hbar} A^2$ | $E_n = \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right)$ |
| Schwingung | $\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} A^2$ | $\Delta x^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle = x_0^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)$ |

$$\frac{1}{2} A^2 \longleftrightarrow x_0^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

\Rightarrow je höher der Oszillator angeregt ist, desto größer ist seine „Amplitude“



Zur Unschärferelation: statistische Mechanik: bei häufigem Würfeln geht die Schwankung nicht gegen 0 sonder fehlt mit \sqrt{n} ab. Der relative Fehler ist somit mit $\frac{\sqrt{n}}{n}$ gegeben. Der Messwert wird also trotz steigendem Fehler immer Genauer. In der Quantenmechanik können wir z.B. den QHM sehr hoch anregen (hohes n) und damit Δx und auch Δp sehr scharf festlegen. Hier sieht man wieder bei einer hohen Anregung (Quanten- klassischer Übergang), dass die Unschärferelation weniger gut gilt und man wieder von scharfem Impuls und Ort reden (gleichzeitig Messbar, anders als in der QM).

VI.7 Elektron im Coulomb-Feld einer Zentralladung

Elektron: $q = -e$

positive Zentralladung $Q = +Ze$

Coulomb-Potential

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon r}$$

Alles was mit Planetenbahnen zu tun hat wir im Folgenden als bekannt vorausgesetzt.

Lenz'scher Vektor: konstante die geschlossene Ellipsenbahnen begründet. Mit Relativistischen Effekten, wie bei Merkur, ergeben sich Rosettenbahnen.

Zeitunabhängige SGL (Ortsdarstellung)

$$E\Psi(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \Psi(\mathbf{r})$$

Dies genügt hier, da wir und wie bei der Planetenbewegung auf den Massenmittelpunkt beziehen, d.h. alle anderen Abstände gelten relativ zwischen den beiden Körpern.

Wichtige Eigenschaften

- (1) 3-dimensionales Problem
- (2) hat eine hohe Symmetrie
 - Coulomb Potential \rightarrow
 - hat den spezielle $\frac{1}{r}$ Verlauf

\Rightarrow siehe Kepler-Problem

Ideen zur Lösung der SGL

Dies wird eigentlich zu kompliziert und involviert Mathematik, die wir noch nicht beherrschen. Im folgenden die grobe Idee:

- (1) Einschränkung der Lösung auf gebundene Zustände $E < 0$:
 \Rightarrow Normierbarkeit der Wellenfunktionen

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\Psi(\mathbf{r})|^2 \rightarrow 0$$

muss gegeben sein (es muss nicht nur gegen 0 gehen sondern auch schnell genug abfallen!)

- (2) Zentralsymmetrisches Problem \rightarrow Kugelkoordinaten r, θ, φ

$$\mathbf{r} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

- (3) Separationsansatz für die Wellenfunktion

$$\Rightarrow \Psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \mathcal{Y}(\theta, \varphi)$$

Bemerkung:

Kugelkoordinaten: wenn wir Kugelkoordinaten wählen machen wir eine implizite Wahl. Somit brechen wir die Symmetrie. Wir müssen nun also Rechnen (Koordinatentransformation) um die Kugelsymmetrie wieder sichtbar zu machen.

Ein Problem, dass sich hier ergibt ist, dass wir eine z -Achse wählen und θ und φ davon abhängig machen. Somit werden die Ergebnisse in jedem Fall Rotationssymmetrisch. Für eine gut sichtbare Kugelsymmetrie muss noch weiter gerechnet werden. Diese z -Achse nennt man in der Quantenmechanik die Quantisierungsachse.

VI.7.1 Lösung der SGL

5 Schritte

- (1) Transformation auf Kugelkoordinaten $\mathbf{r} \rightarrow r, \theta, \varphi$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} &\rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ \Rightarrow E \Psi(r, \theta, \varphi) &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon r} \right] \Psi(r, \theta, \varphi) \end{aligned}$$

Bemerkung

- $x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi)$

- (2) Vereinfachung mit Drehimpuls

$$\text{klassisch: } \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad \text{QM: } \hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{p}}^2 = -\hbar^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{L}}^2$$

$$\Rightarrow E \Psi(r, \theta, \varphi) = \left[-\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}}_{\text{effektives Potential}} \right] \Psi(r, \theta, \varphi)$$

Das Effektive Potential berechnet sich aus der Fliehkraft minus der Coulomb Kraft.

(3) Separation in $R(r)$ und $\mathcal{Y}(\theta, \varphi)$

Der Hamiltonoperator hat diese Struktur:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_R(r) + f(r)\hat{\mathcal{H}}_Y(\hat{\mathbf{L}})$$

$$\Rightarrow \Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\mathcal{Y}(\theta, \varphi)$$

$$\Rightarrow \text{Gl. \#1} \quad \hat{\mathbf{L}}^2 \mathcal{Y}(\theta, \varphi) = c \mathcal{Y}(\theta, \varphi) \quad (\#1)$$

$$\text{Gl. \#2} \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{c}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] R(r) = ER(r) \quad (\#2)$$

Das c ist eine Konstante die aus dem Separationsansatz kommt. Genau wie das E bei der Herleitung zur Zeitunabhängigen SGL.

Bemerkung:

$$ER(r)\mathcal{Y}(\theta, \varphi) = \left[\hat{\mathcal{H}}_R(r) + f(r)\hat{\mathcal{H}}_Y(\hat{\mathbf{L}}) \right] R(r)\mathcal{Y}(\theta, \varphi)$$

$$\left[E - \hat{\mathcal{H}}_R(r) \right] R(r)\mathcal{Y}(\theta, \varphi) = f(r)\hat{\mathcal{H}}_Y(\hat{\mathbf{L}})R(r)\mathcal{Y}(\theta, \varphi) = f(r)R(r)\hat{\mathcal{H}}_Y(\hat{\mathbf{L}})\mathcal{Y}(\theta, \varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{\left[E - \hat{\mathcal{H}}_R(r) \right] R(r)}{f(r)R(r)} = c = \frac{\hat{\mathcal{H}}_Y(\hat{\mathbf{L}})\mathcal{Y}(\theta, \varphi)}{(\theta, \varphi)}$$

$$\Rightarrow \#1: \quad \hat{\mathcal{H}}_Y(\hat{\mathbf{L}})\mathcal{Y}(\theta, \varphi) = c\mathcal{Y}(\theta, \varphi)$$

$$\#2: \quad \left[E - \hat{\mathcal{H}}_R(r) \right] R(r) = cf(r)R(r)$$

□

(4) Lösung von Gleichung (#1)

Drehimpuls Eigenwertgleichung

\Rightarrow Lösungen sind die Kugelflächenfunktionen $\mathcal{Y}_{lm}(\theta, \varphi)$

$$\hat{\mathbf{L}}^2 \mathcal{Y}(\theta, \varphi) = c\mathcal{Y}(\theta, \varphi)$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{L}}^2 \mathcal{Y}_{lm}(\theta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) \mathcal{Y}_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$\mathcal{Y}_{lm}(\theta, \varphi) = C_{lm} P_{lm}(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad l \in \mathbb{N}_0 \quad |m| \leq l$$

$$\Rightarrow l = 0 \rightarrow m = 0$$

$$l = 1 \rightarrow m = -1, 0, 1$$

$$l = 2 \rightarrow m = -2, -1, 0, 1, 2 \quad (2l+1) \text{ } m\text{-Werte pro } l$$

[Folie: Kugelflächenfunktionen für verschiedene l, m]

Bemerkungen:

- $\mathcal{Y}(\theta, \varphi)$ lassen sich in Polynome von x, y, z umschreiben

$$\mathcal{Y}_{0,0} \propto 1$$

$$\mathcal{Y}_{1,0} \propto z$$

$$\mathcal{Y}_{1,1} \propto x + iy$$

$$\mathcal{Y}_{1,-1} \propto x - iy$$

$$\mathcal{Y}_{2,0} \propto (ez^2 - 1)$$

Die Ordnung des Polynoms ist gegeben durch l

- Kugelflächenfunktionen \rightarrow **Orbitale**

$$\text{Orbital} \hat{=} |\mathcal{Y}_{l,m} \pm \mathcal{Y}_{l,-m}|$$

$$\begin{array}{ll} s\text{-Orbital: } l = 0 : & \mathcal{Y}_{0,0} \propto 1 \\ p_x\text{-} & p_x \propto \mathcal{Y}_{1,1} + \mathcal{Y}_{1,-1} \propto x \\ p_y\text{-Orbitale: } l = 1 : & p_y \propto \mathcal{Y}_{1,1} - \mathcal{Y}_{1,-1} \propto y \\ p_z\text{-} & p_z \propto \mathcal{Y}_{1,0} \propto z \end{array}$$

- Notation:

$$\begin{array}{cccccccc} l = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & s & p & d & f & g & h & k \end{array}$$

[Folie: Orbitale]

- \hat{L}^2 Eigenwertgleichung \Rightarrow Eigenwert $l(l+1)$

$$\Rightarrow \text{Länge des Drehimpulses} \hat{=} \sqrt{l(l+1)}$$

In der QM spricht man von Drehimpulsen 1, 2, 3... also den jeweiligen l -Werten der Orbitale.

$$\hat{L}_z \text{ Eigenwertgleichung} \Rightarrow \text{Eigenwert } m:$$

$$\hat{L}_z \mathcal{Y}_{lm}(\theta, \varphi) = \hbar m \mathcal{Y}_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$\Rightarrow \text{Komponente entlang } z \hat{=} m$$

(5) Lösung von Gleichung (#2)

$$\Rightarrow c = \hbar^2 l(l+1)$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] R_{ml}(r) = E_n R_{ml}(r)$$

Warum hängt die Energie E_n nicht von l ab. Das hat mit der Kugelsymmetrie und der Drehimpulserhaltung zu tun ☺ Hier taucht also zum ersten mal auf warum wir Kugelkoordinaten und Drehimpuls benutzen.

$$\Rightarrow R_{ml}(r) = \tilde{r}^l e^{-\tilde{r}} L_{ml}(2\tilde{r}) \quad \tilde{r} = \frac{Z}{na_B} r$$

L_{ml} : Lagere Polynome

a_B : Bohr'scher Atomradius $\approx 0,5$

$$n = l + 1, l + 2, l + 3, \dots$$

$$E_n = -R_y \frac{Z^2}{n^2}$$

R_y : **Rydberg Konstante**: 13,6 eV

[Folie: Radialfunktionen]

$$\text{Grundzustand: } n = 1, l = 0 \quad E_0 = -R_y Z^2$$

Da die Radialfunktionen exponentiell abfallen (gebundene Zustände) wodurch sie normierbar sind, wie wir es gefordert haben.

$$\text{erster Angeregter Zustand: } n = 2, \quad \begin{array}{ll} l = 0 & s \\ l = 1 & p \end{array} \left\{ \begin{array}{l} m = 0 \\ m = -1 \\ m = 0 \\ m = 1 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 4 \text{ Zustände} \\ \text{energetisch} \\ \text{entartet} \end{array}$$

$$\text{zweiter angeregter Zustand } n = 3 \left\{ \begin{array}{lll} l = 0 & s & m = 0 \\ l = 1 & p & m = -1, 0, 1 \\ l = 2 & d & m = -2, -1, 0, 1, 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 9 \text{ Zustände} \\ \text{entartet} \end{array}$$