Theoretische Physik II
Elektrodynamik

Vorlesung von Prof. Dr. Michael Thoss im Wintersemester 2018

Markus Österle   Andréz Gockel   Damian Lanzenstiel   Patrick Munnich

13. Januar 2019

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einführung

0.1 Zur Vorlesung

Dozent Michael Thoss

Übungen Donnerstag/Freitag (ILIAS) beginnt 18./19.10.18

Übungsleiter Jakob Bätge

Abgabe der Hausaufgaben bis Dienstag 12:00 - Briefkasten GuMi

Klausur 13.02.19, 10-12 Uhr, Hörsaal Anatomie (Nachklausur: 26.19, 10-12 Uhr)

Ankündigungen ILIAS Pass: theophy2.thoss18

Angaben Vorlesung: 4 SWS, Übung: 2 SWS, ECTS: 7

Vorkenntnisse Mathematik: Analysis für Physiker (Vektor Rechnung), Theoretische Physik I, Experimental Physik II.

Hinweis zu den Übungen

- Keine Anwesenheitspflicht.
- Keine Punktzahl nötig für Klausurzulassung.
- Kann auch wärend Übungen abgegeben werden.

Lehrbücher:

- W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 3: Elektrodynamik* (Springer)
- D.J. Griffiths, *Elektrodynamik: Eine Einführung* (Pearson)
- T. Fließbach, *Elektrodynamik* (Spektrum Akademischer Verlag)
- J.D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik* (Walter de Gruyter) geht dieser Vorlesung hinaus

0.2 Einführung und Überblick

Die vier fundamentalen Wechselwirkungen (WW):

- Starke WW
- **Elektromagnetische WW** Wird in dieser Vorlesung betrachtet
- Schwache WW
- Gravitation

0.2.1 Rückblick

Theoretische Physik 1:

- Mechanik
- Punktmechanik: Bahnkurven von Körpern
- Bewegungsgleichung: $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$

0.2.2 Elektrodynamik

- Grundlegende Größen
- Felder
- $$\underset{\text{elektrisches Feld}}{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)} \qquad \underset{\text{Magnetfeld}}{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}$$

$\rightarrow$ Feldtheorie sehr wichtiges Konzept

Wie sind Elektrische Felder definiert?
Experimentelle Definition als Messgröße: Kraft auf Ladung

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t))$$

Theoretische Definition ist Mathematisch: Feldgleichungen-Maxwellgleichungen

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0\boldsymbol{j}$$

Hierbei steht ρ für die Ladungsdichte und $\boldsymbol{j}$ für die Stromdichte.

0.3 Aufbau der Vorlesung

1./2. Statische Phänomene: $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

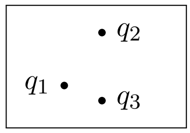
$$\underbrace{\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0}_{\text{1. Elektrostatik}} \qquad \underbrace{\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = 0}_{\text{2. Magnetostatik}}$$

3. Zeitabhängige magnetische/elektrische Felder
4. Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

Kapitel 1

Elektrostatik

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit **ruhenden Ladungen** und **zeitunabhängigen Feldern**. Das Grundproblem besteht darin, dass wir eine Ladungsverteilung haben und das Elektrische Feld und dessen Potential bestimmen wollen.



$\rightarrow$ Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$, el. Potential $\Phi(\boldsymbol{r})$

1.1 Elektrische Ladung und Coulomb'sches Gesetz

Ladung: Beobachtungstatsachen:

i) Zwei Arten „+", „-"

ii) Abgeschlossenes System: Ladung erhalten: $q = \sum_i q_i = \text{const.}$

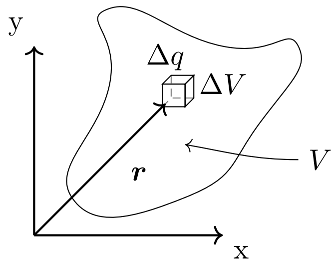
iii) Ladung ist quantisiert in Einheiten der Elementarladung:

$$q = ne, \ n \in \mathbb{Z}, \ e = 1,602 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$$

$n = -1$: für ein Elektron wäre ein Beispiel einer Punktladung

Kontinuierliche Ladungsverteilung Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}} = \frac{\Delta q}{\Delta V}$ Gesamtladung in V:

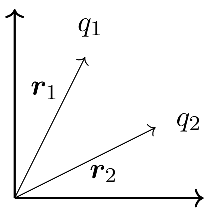
$$Q = \int_V \mathrm{d}^3 r\, \rho(\boldsymbol{r})$$



1.1.1 Coulombsches Gesetz

Die Kraft, welche eine am Ort $\boldsymbol{r}_2$ lokalisierte Punktladung auf eine Punktladung am Ort $\boldsymbol{r}_1$ ausübt, ist gegeben durch:

$$\boldsymbol{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2} \underbrace{\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}}_{\boldsymbol{e}_{r_{12}}}$$



1. $\boldsymbol{F}_{12} \sim q_1 q_2$
2. $\boldsymbol{F}_{12} \sim \frac{1}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2}$

3. $\boldsymbol{F}_{12} \sim q_1 q_2 \, \boldsymbol{e}_{r_{12}}$
4. $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$

Es gilt das Superpositionsprinzip: Das heißt, durch vektorielle Addition der Kräfte kann die Gesamtkraft ermittelt werden.

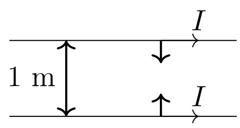
$$\boldsymbol{F}_1 = k \sum_{j=2}^{N} \frac{q_1 q_j}{r_{1j}^2} \boldsymbol{e}_{r_{1j}}$$

Zur Konstanten k:

Die Konstante ist abhängig von dem verwendeten Maßsystemen.

i) Gauß-System (cgs): $k \equiv 1$, dyn $= \frac{\mathrm{g \cdot cm}}{\mathrm{s}^2} = 10^{-5}\,\mathrm{N}$
   1 dyn $= \frac{(1\mathrm{ESE})^2}{\mathrm{cm}^2}$ $\quad 1\mathrm{ESE} = \frac{\sqrt{\mathrm{g \cdot cm}^3}}{\mathrm{s}}$

ii) SI (MKSA-System): Definition von A = Ampère



$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = 2 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

Strom $= \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}} \Rightarrow 1\mathrm{A} = \frac{1\mathrm{C}}{1\mathrm{s}} \quad \rightarrow \quad e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \qquad c \approx 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$\frac{\Delta F}{\Delta l} = k \frac{2I^2}{c^2 d} \qquad \rightarrow k = 2 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \frac{c^2 1\mathrm{m}}{2(1\mathrm{A})^2} = 10^{-7} c^2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

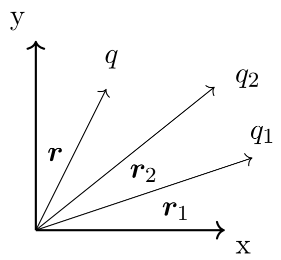
Damit erhalten wir für die Dielektrizitätskonstante des Vakuums:

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$$

1.2 Elektrisches Feld

1.2.1 Feld eines Systems von Punktladungen

N-Ladungen $q_1, \ldots, q_N$ ruhen an den Orten $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N$. Nun bringen wir eine Testladung q am Ort $\boldsymbol{r}$ mit ein.



Kraft von q_1, q_2 auf q

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \sum_{j=1}^{N} q_j \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|^3} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

Somit ist das elektrisches Feld:

$$\boxed{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} q_j \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|^3}}$$

Bemerkung

i) Testladung klein (formal: $\lim_{q\to 0} \frac{\boldsymbol{F}}{q}$)

ii) math. $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ Vektorpfeil

$$\text{kartesisch:} \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} E_x(\boldsymbol{r}) \\ E_y(\boldsymbol{r}) \\ E_z(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix}$$

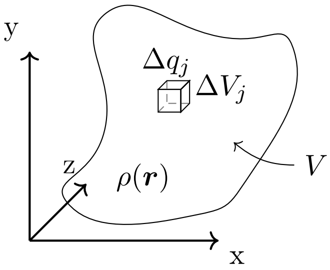
iii) Wechselwirkungsprozess: 2 Teile

$$q_j \to \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \to \boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

iv) Superpositionsprinzip gilt

1.2.2 Feld einer kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r})$

$$\boxed{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_V \mathrm{d}^3r' \, \rho(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}}$$



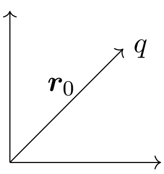
$$\underbrace{\int\limits_V \mathrm{d}^3r'}_{\text{schließt alle Ladungen ein}} \qquad \rho(\boldsymbol{r}_j) = \frac{\Delta q_j}{\Delta V_j}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= k \sum_j \Delta q_j \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|^3} \\ &= k \sum_j \Delta V_j \rho(\boldsymbol{r}_j) \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|^3} \\ \text{mit } \Delta V_j \to 0 \quad &= k \int_V \mathrm{d}^3r' \rho(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \end{aligned}$$

1.2.3 Ladungsdichte einer Punktladung

Deltafunktion

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$



Punktladung in $\boldsymbol{r}_0 \Rightarrow \rho(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}_0$
Ladungsdichte divergiert in $\boldsymbol{r}_0$

$$\rho(\boldsymbol{r}_0) = \infty$$

Modell für Punktladung:
Ladung q in Kugel mit Radius ε um $\boldsymbol{r}_0$, $\varepsilon \to 0$

$$\rho_2(\boldsymbol{r}) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{q}{v_k} & |\boldsymbol{r}| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \underbrace{\Theta(\varepsilon - |\boldsymbol{r}|)}_{\text{Stufenfunktion}}$$

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \rho_\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \left\{ \begin{array}{cc} \infty & \boldsymbol{r} = 0 \\ 0 & \boldsymbol{r} \neq 0 \end{array} \right.$$

Divergenz muss so sein, dass

$$\int\limits_{\substack{V \\ \boldsymbol{r}_0 \in V}} \mathrm{d}^3r \; \rho(\boldsymbol{r}) = q$$

Definition Delta-Funktion (Diracsche Deltafunktion)

1.
$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}_0 \\ \infty & \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 \end{cases}$$

2.
$$\int_V \mathrm{d}^3 r\ f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \begin{cases} f(\boldsymbol{r}_0) & \boldsymbol{r}_0 \in V \\ 0 & \boldsymbol{r}_0 \notin V \end{cases}$$

Mathematik

Distribution - Funktional

Funktional: Abb. Funktionen $\mapsto \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$\delta_{\boldsymbol{r}_0} : f \mapsto f(\boldsymbol{r}_0)$$

Physik

$$\int \mathrm{d}^3 r\ f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = f(\boldsymbol{r})$$

δ-Fkt. als Grenzwert einer Folge von Funktionen im Integral

$$\int \mathrm{d}^3 r\ f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int \mathrm{d}^3 r\ f(\boldsymbol{r}) g_\varepsilon(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

mit

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}_0 \\ \infty & \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 \end{cases}$$

$$\int_V \mathrm{d}^3 r\ g_\varepsilon(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = 1$$

Beispiel: $g_\varepsilon(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \frac{\Theta(\varepsilon-|\boldsymbol{r}|)}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3}$

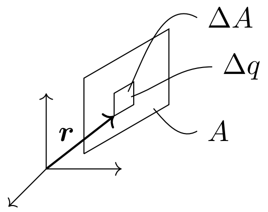
Mehrere Punktladungen q_j in $\boldsymbol{r}_j$

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_j q_j \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \mathrm{d}^3 r'\ \rho(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \mathrm{d}^3 r'\ \sum_j q_j \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j) \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_j q_j \int_V \mathrm{d}^3 r'\ \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j) \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_j q_j \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|^3} \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

1.2.4 Flächenladungsdichte

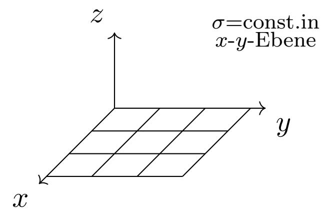
$\sigma(\boldsymbol{r}) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}} = \frac{\Delta q}{\Delta A}$



erzeugtes elektrisches Feld:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_A \underbrace{\mathrm{d}f'}_{\substack{\text{Flächen-}\\ \text{element}}} \sigma(\boldsymbol{r})\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

Beispiel: Elektrisches Feld einer homogenen Flächenladung



$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y'\ \sigma\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \qquad \boldsymbol{r}' = (x', y', 0)$$

Symmetrie: $\boldsymbol{E}$ unabhängig von x, y $\qquad \boldsymbol{r} = (0, 0, z)$

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}' = (-x', -y', z),\ |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3 = (x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}$$

$$E_x \sim \sigma\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y'\ \frac{(-x')}{(x'^2+y'^2+z^2)^{3/2}} = 0 = E_y$$

$\boldsymbol{E} = (0, 0, E_z)$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma_z\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'\ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y'\ \frac{(x')}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}}$$

$$\frac{1}{x'^2+z^2}\ \frac{y'}{(x'^2+y'^2+z^2)^{3/2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{x'^2+z^2}\ \frac{\mathrm{sgn}(y')}{\sqrt{1+\frac{x'^2+z^2}{y'^2}}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{x'^2+z^2}$$

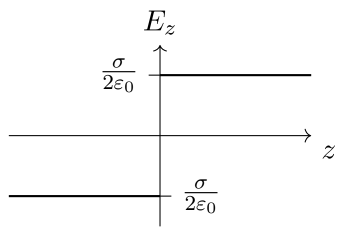
$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\sigma_z \quad \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'\ \frac{1}{x'^2+z^2}}_{\frac{1}{z}\arctan\left(\frac{x'}{2}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{z}\mathrm{sgn}(z)\pi}$$

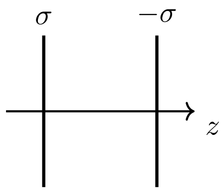
$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathrm{sgn}(z)$$

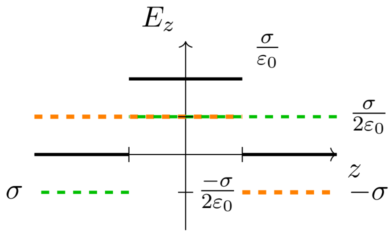
Grenzfläche: $z \to 0$

$$\boldsymbol{E} \underset{z\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z & z < 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{E}_{\perp_+} - \boldsymbol{E}_{\perp_-} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \qquad \boldsymbol{E}_{\|} = 0$$



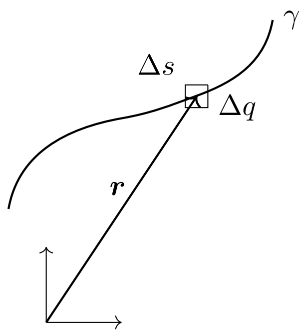




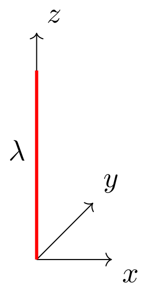
1.2.5 Linenladungsdichte

$$\lambda(\boldsymbol{r}) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Länge}} = \frac{\Delta q}{\Delta s}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\int_\gamma}_{\text{Linienintegral}} \mathrm{d}s' \; \lambda(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$



Beispiel: Elektrisches Feld einer homogenen Linienladung $\lambda = \text{const.}$



$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\gamma \mathrm{d}s' \; \lambda \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \qquad \gamma : z' \mapsto \boldsymbol{r}'(z') = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \; \frac{\boldsymbol{r} - \big(0,0,z\big)^\top}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

$\tilde{z} = z' - z$:

$$E_x = \frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \; \frac{1}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tilde{z} \; \frac{1}{(x^2 + y^2 + \tilde{z}^2)^{3/2}}}_{\frac{2}{x^2+y^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Wegen der Symmetrie genau so:

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \; \frac{z - z'}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = 0$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\rho} \boldsymbol{e}_\rho, \qquad \boldsymbol{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.3 Feldgleichungen und elektrostatisches Potential

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \; \rho(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

1.3.1 Elektrostatisches Potential

elektrische Feld ist ein Potentialfeld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}) = -\left(\boldsymbol{e}_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial\phi}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$
Nebenrechnung:

$$\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = -\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

zur Überprüfung hier die x-Komponente berechnet:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}} = \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right)\quad 2(x-x')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} = \frac{(x-x')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

Somit erhalten wir für das $\boldsymbol{E}$-Feld:

$$\Rightarrow \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\left(-\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = (-)\boldsymbol{\nabla}_F\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\ \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$\rightarrow$ elektrostatisches Potential

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\ \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + c$$

übliche Konvention: $c = 0 \quad (\phi(\boldsymbol{r}) \overset{|\boldsymbol{r}|\to\infty}{\to} 0)$

Beispiel: Potential einer Punktladung in $\boldsymbol{r}_0$:

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3r'\ \frac{q\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}$$

(Funktional-Analysis Siegfried Großmann Springer)
(Landau-Lipschitz Buch geht weit der Vorlesung hinaus)

1.3.2 Feldgleichung (differentielle Form)

Rotation (Wirbel)

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\phi) = 0$$

Mathe: Sie sind äquivalent

i) $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$

ii) $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = 0$ (auf einfach zusammenhängendem Gebiet)

iii) Kurvenintegral $\int_\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}$ ist Wegunabhängig

$$\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E} = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}\mathrm{d}t\ \underbrace{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}(t))}_{\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}} = \underbrace{(\phi(\boldsymbol{r}_2)-\phi(\boldsymbol{r}_1))}_{\text{Potentialdifferenz}}$$

Divergenz (Quellen)

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \mathrm{d}^3r'\rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\end{aligned}$$

x-Anteil:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x-x'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} &= \frac{1\cdot[\dots]^{3/2}(x-x')(x-x')^{3/2}\cdot 2[\dots]^{1/2}}{[\dots]^3}\\ &= \frac{[\dots]^{1/2}((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-3(x-x')^2)}{[\dots]^{3/2}}\\ &= \frac{(y-y')^2+(z-z')^2-2(x-x')^2}{[\dots]^{3/2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\frac{y-y'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} &= \frac{(x-x')^2+(z-z')^2-2(y-y')^2}{[\dots]^{3/2}}\\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{z-z'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} &= \frac{(x-x')^2+(y-y')^2-2(z-z')^2}{[\dots]^{3/2}}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = 0 \quad \text{falls} \quad \boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}'$$

$$\Rightarrow \text{falls} \quad \boldsymbol{r}\notin V,\ \text{d.h. } \boldsymbol{r} \text{ in Gebiet ohne Ladungsdichte } \rho(\boldsymbol{r})=0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$$

$\boldsymbol{r}\in V$: Grenzwertbetrachtung (Regularisierung des Integranden)
statt

$$\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

betrachten wir:

$$f_a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} = \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{3/2}} \qquad a\in\mathbb{R},\ a>0$$

am Ende Grenzwert $\lim\limits_{a\to 0}$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{a\to 0}\int_V \mathrm{d}^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\ \boxed{\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\cdot f_a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x-x'}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{3/2}} &= \frac{[\dots+a^2]^{3/2}-(x-x')\frac{3}{2}\cdot 2(x-x')[\dots+a^2]^{3/2}}{[\dots+a^2]^3}\\ &= \frac{(y-y')^2+(z-z')^2+a^2-2(x-x')^2}{[\dots+a^2]^{3/2}}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\cdot f_a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{3a^2}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{5/2}}$$

$$\lim_{a\to 0} f_a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}' \\ \infty & \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}' \end{cases}$$

$\Rightarrow$ zum Integral $\displaystyle\int_V \mathrm{d}^3r' \ldots$ trägt (im Limes $a\to 0$) nur der Bereich $\boldsymbol{r}'\approx\boldsymbol{r}$ bei

$$K_R(\boldsymbol{r}) = \{\boldsymbol{r}'\in\mathbb{R}^3 : |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\leq R\}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{a\to 0}\int_V \mathrm{d}^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\cdot f_a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\
&= \lim_{a\to 0}\int_{K_R(\boldsymbol{r})} \mathrm{d}^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\frac{3a^2}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{5/2}} \\
&\underbrace{+\lim_{a\to 0}\int_{V/K_R(\boldsymbol{r})} \mathrm{d}^3r'\rho(\boldsymbol{r}')\frac{3a^2}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{5/2}}}_{=0}
\end{aligned}$$

Wähle R klein genug, dass man innerhalb $K_R(\boldsymbol{r})$, $\rho(\boldsymbol{r}')$ in Taylorreihe um $\boldsymbol{r}$ entwickeln kann.

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r},\ \mathrm{d}^3r' = \mathrm{d}^3\tilde{r}$$

$$\int_{K_R(\boldsymbol{r})} \mathrm{d}^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\frac{3a^2}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{5/2}} = \int_{K_R(0)} \mathrm{d}^3\tilde{r}\ \rho(\boldsymbol{r}+\tilde{\boldsymbol{r}})\frac{3a^2}{[\tilde{\boldsymbol{r}}^2+a^2]^{5/2}}$$

Taylorentwicklung von $\rho(\boldsymbol{r}+\tilde{\boldsymbol{r}})$ um $\tilde{\boldsymbol{r}}=0$

$$\rho(\boldsymbol{r}+\tilde{\boldsymbol{r}}) = \rho(\boldsymbol{r})+\tilde{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho(\boldsymbol{r})+\ldots$$

$$= \int_{K_R(0)} \mathrm{d}^3\tilde{r}\ (\rho(\boldsymbol{r})+\tilde{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho(\boldsymbol{r})+\ldots)\frac{3a^2}{[\tilde{\boldsymbol{r}}^2+a^2]^{5/2}}$$

1. Integral:

$$\int_{K_R(0)} \mathrm{d}^3\tilde{r}\ \rho(\boldsymbol{r})\frac{3a^2}{(\tilde{r}^2+a^2)^{5/2}} = \rho(\boldsymbol{r})\underbrace{\int_0^R \mathrm{d}\tilde{r}\ \frac{3a^2}{(\tilde{r}^2+a^2)^{5/2}}}_{\left[\frac{\tilde{r}^3}{(\tilde{r}^2+a^2)^{3/2}}\right]_0^R}\underbrace{\int \overset{\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{\overset{||}{\mathrm{d}\Omega}}}_{=4\pi}$$

$$= 4\pi\rho(\boldsymbol{r})\frac{R^3}{(R^2+a^2)^{3/2}} \quad \xrightarrow[a\to 0]{} \quad 4\pi\rho(\boldsymbol{r})$$

2. Integral:

$$\int_{K_R(0)} \mathrm{d}^3\tilde{r}\ \underset{\tilde{r}\boldsymbol{e}_{\tilde{r}}}{\underset{||}{\tilde{\boldsymbol{r}}}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\rho(\boldsymbol{r})\frac{3a^2}{(\tilde{r}^2+a^2)^{5/2}} = \underbrace{\int_0^R \mathrm{d}\tilde{r}\ \frac{3a^2\tilde{r}^3}{(\tilde{r}^2+a^2)^{3/2}}}_{\frac{2}{3}a-3a^2\left(\frac{R^2+\frac{2}{3}a^2}{(R^2+a^2)^{3/2}}\right)}\underbrace{\int \mathrm{d}\Omega\ \boldsymbol{e}_{\tilde{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho(\boldsymbol{r})}_{\text{unabh. von } a} \quad \xrightarrow[a\to 0]{} \quad 0$$

Das gilt auch für alle höheren Terme. Alle höheren Terme werden im Limit $\lim_{a\to 0}= 0$.

$$\lim_{a\to 0}\int_V \mathrm{d}^3r'\rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{3/2}} = 4\pi\rho(\boldsymbol{r})$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{a\to 0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \quad \boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^3}$$

1.3.3 Zusammenfassung:

Feldgleichungen der Elektrostatik

Mathe: partielle DGL

$$\boxed{\begin{gathered}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})\text{ inhomogene DGL}\\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=0\text{ homogene DGL}\end{gathered}}$$

DGL für Potential ϕ: $\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{\nabla}\phi$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{\nabla}\cdot(-\boldsymbol{\nabla}\phi)&=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\begin{pmatrix}\partial_x\phi\\ \partial_y\phi\\ \partial_z\phi\end{pmatrix}\\ &=-\underbrace{\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)}_{=:\Delta\phi}\end{aligned}$$

Partielle DGL 2. Ordnung:

Poissongleichung

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

für Gebiete mit $\rho(\boldsymbol{r})=0$:

Laplacegleichung

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r})=0$$

Darstellung der Deltafunktion:

$$\lim_{a\to0}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\underbrace{\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{3/2}}}_{\frac{3a^2}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{5/2}}=:g_a(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})}=4\pi\rho(\boldsymbol{r})$$

$\frac{1}{4\pi}g_a$ liefert Grenzwertdarstellung der δ-funktion.

$$\lim_{a\to0}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\frac{1}{4\pi}g_a(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})=\rho(\boldsymbol{r})$$

$$\lim_{a\to0}g_a(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})=\begin{cases}0 & \boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}'\\ \infty & \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'\end{cases}$$

$$\delta(\boldsymbol{r})=\lim_{a\to0}\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{r^2}{(r^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\overset{\text{formal}}{=}\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\cdot\underbrace{\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}}_{=-\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}}=-\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}\right)=\frac{-1}{4\pi}\Delta\frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow\quad\Delta\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

z.B. Potential einer Punktladung ρ q in $\boldsymbol{r}_0$:

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$$

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \underbrace{\Delta_{\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}}_{=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}_{=\rho(\boldsymbol{r})} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

Wiederholung

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

1.3.4 Integralsätze der Vektoranalysis

1) Gaußscher Satz:

Sei $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ ein Vektorfeld im Volumen $V \subset \mathbb{R}^3$, so gilt:

$$\int_V \mathrm{d}^3r\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_{\partial V}\mathrm{d}\boldsymbol{f}\ \cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

∂V Rand von V

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \underset{\substack{\downarrow\\ \text{nach außen orientierter}\\ \text{Normaleneinheitsvektor}}}{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}f$$

Bemerkung:

i) Analogie 1D: Fundamentalsatz der Integralrechnung:

$$\int_a^b \mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f(b) - f(a)$$

ii) Geometrische / physikalische Interpretation:
Fluss des Vektorfeldes $\boldsymbol{A}$ durch ∂V

$$\int_{\partial V}\mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{A}$$

Integral über die Quellen von $\boldsymbol{A}$

$$\int_V \mathrm{d}^3r\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A} = \text{const.} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0$$

Beispiel: Geschwindigkeit einer Flüssigkeit: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$

$$\boldsymbol{v} = \text{const.} \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0 \quad \int_{\partial V}\mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} = 0$$

$\Rightarrow$ Es gibt keine Quellen von $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{r}\neq 0 \quad \int_{\partial V}\mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\neq 0$$

iii)

$$\int_V \mathrm{d}^3r\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_0^{\Delta x}\mathrm{d}x\int_0^{\Delta y}\mathrm{d}y\int_0^{\Delta z}\mathrm{d}z\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\Delta z}\mathrm{d}z\int_0^{\Delta y}\mathrm{d}y\underbrace{\int_0^{\Delta x}\mathrm{d}x\frac{\partial A_x}{\partial x}}_{A_x(\Delta x,y,z)-A_x(0,y,z)}\\
&=\int_0^{\Delta z}\mathrm{d}z\int_0^{\Delta y}\mathrm{d}yA_x(\Delta x,y,z)-\int_0^{\Delta z}\mathrm{d}z\int_0^{\Delta y}\mathrm{d}yA_x(0,y,z)\\
&=\int_{F_x^+}\mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{A}+\int_{F_x^-}\mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

$$F_x^+:\quad \mathrm{d}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad F_x^-:\quad \mathrm{d}\boldsymbol{f}=-\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

ebenso gilt dann für die anderen Koordinaten:

$$\int_0^{\Delta x}\mathrm{d}x\int_0^{\Delta z}\mathrm{d}z\int_0^{\Delta y}\mathrm{d}y\frac{\partial A_y}{\partial y}=\int_{F_y^+}\mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{A}+\int_{F_y^-}\mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{A}$$
$$\int_0^{\Delta x}\mathrm{d}x\int_0^{\Delta y}\mathrm{d}y\int_0^{\Delta z}\mathrm{d}z\frac{\partial A_z}{\partial z}=\int_{F_z^+}\mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{A}+\int_{F_z^-}\mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\Rightarrow \int_V\mathrm{d}^3r\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=\int_{\partial V}\mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{A}$$

2) Stokescher Satz

Sei $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ ein Vektorfeld, F eine Fläche mit Randkurve ∂F, so gilt:

$$\int_{\text{Linienintegral}\rightarrow\partial F}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\int_{F\leftarrow\text{Oberflächenint.}}\mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}))$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}f$$

Richtung von $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ und Umlauf sinn von ∂F: rechte Hand Regel.
Beispiel:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\\\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\\\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1+1\end{pmatrix}=2\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{r}(\varphi) = R\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix} \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = R\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\int_{\partial F} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(\varphi))\\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi R(+\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 2\pi R^2\end{aligned}$$

$$\int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f}\,\overbrace{(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})}^{2\boldsymbol{e}_z} = 2\pi R^2$$

Vektorfeld ohne Wirbel z.B. $\boldsymbol{A} = \text{const.}$
$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = 0$
Bemerkung:

1.3.5 Integrale Form der Feldgleichung

1.3.6 Gaußsches Gesetz

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{d}^3 r \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \mathrm{d}^3 r \rho(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_V\\ &= \int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_V}$$

Berechnung elektrischer Felder für hochsymmetrische Ladungsverteilungen

Beispiel:
Homogen geladene Kugel mit Radius R und Gesamtladung Q. Damit ist die Ladungsdichte innerhalb der Kugel:

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_r(r)\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{r} = r\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$
Fluss von $\boldsymbol{E}$ durch Oberfläche einer Kugel mit Radius r

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_r r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{E} = E_r(r) r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial K_r(0)} \mathrm{d}\boldsymbol{f}\ \boldsymbol{E} &= \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi E_r(r) r^2 \sin\theta \\
&= E_r(r) r^2 4\pi \\
&= \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{K_r(0)} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{K_r(0)} \mathrm{d}^3 r\ \rho(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{cases} Q & r > R \\ Q\frac{r^3}{R^3} & r \leq R \end{cases} \\
\Rightarrow E_r(r) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{r^2} & r > R \\ \frac{r}{R^3} & r \leq R \end{cases}
\end{aligned}
$$

1.3.7 Satz von Stokes

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$$

Definition: $\gamma = \partial F$
$\int_\gamma$ ist dann ein Linienintegral über eine geschlossene Kurve

$$\boxed{\int_\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E} = \int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) = 0}$$

1.3.8 Zusammenfassung: Feldgleichungen der Elektrostatik

differentielle Darstellung:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi \quad \rightarrow \quad \Delta\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

Integral Darstellung:

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_V \quad , \quad \oint_\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

1.4 Elektrostatische Energie

potentielle Energie einer Punktladung im äußeren elektrischen Feld
Kraft auf Ladung q:

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$$

Die Arbeit bei Verschiebung der Ladung von $\boldsymbol{a}$ nach $\boldsymbol{b}$

$$
\begin{aligned}
W &= -\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{F} = -q \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \\
&= q \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi = q \underbrace{(\Phi(\boldsymbol{b}) - \Phi(\boldsymbol{a}))}_{\text{Potentialdifferenz}}
\end{aligned}
$$

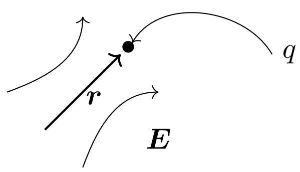
Die Arbeit um q aus dem unendlichen ∞ nach $\boldsymbol{r}$ zu bringen ist dann:

$$W = q(\Phi(\boldsymbol{r}) - \Phi(\infty))$$

Zur Referenz: $\Phi(\infty) = 0$
Damit ist die Energie der Ladung q im äußeren Feld:

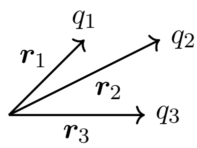
$$\Rightarrow \quad \boxed{W = q\ \Phi(\boldsymbol{r})}$$

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$$



1.4.1 Elektrostatische Potentielle Energie

Energie einer Verteilung von Punktladungen



N Ladungen q: an Orten $\boldsymbol{r}_i$
Zunächst: $\underbrace{i-1}_{\text{erzeugen am Ort } \boldsymbol{r}_i}$ Ladungen q_j bei $\boldsymbol{r}_j$

Das Potential

$$\Phi(\boldsymbol{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|}$$

Arbeit um i-te Ladung aus dem unendlichen nach $\boldsymbol{r}$ zu bringen:

$$W_i = q_i \Phi(\boldsymbol{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

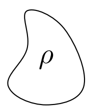
Somit ergibt sich die gesamte Arbeit für N Ladungen als:

$$\begin{aligned} W = \sum_{i=2}^{N} W_i &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \end{aligned}$$

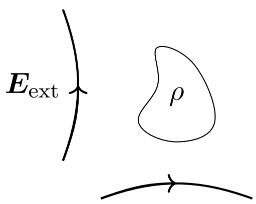
$$\Rightarrow W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \underbrace{\left(\sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} \right)}_{\Phi_{\not i}(\boldsymbol{r}_i)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \Phi_{\not i}(\boldsymbol{r}_i) \end{aligned}$$

Energie einer kontinuierlichen lokalisierten Ladungsverteilung



$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r \int \mathrm{d}^3 r' \, \frac{\rho(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|} \\ &= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \, \rho(\boldsymbol{r}) \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r' \, \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|}}_{\Phi(\boldsymbol{r})} \end{aligned}$$



$$W_{\text{ext}} = \int \mathrm{d}^3 r \, \rho(\boldsymbol{r}) \Phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r})$$

Energie W durch $\boldsymbol{E}$ ausdrücken:

$$\boldsymbol{\Delta}\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad\Rightarrow\quad W = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r\,\varepsilon_0 \underbrace{\boldsymbol{\Delta}\Phi(\boldsymbol{r})\Phi(\boldsymbol{r})}_{\substack{\boldsymbol{\nabla}\cdot(\Phi\boldsymbol{\nabla}\Phi)-(\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2 \\ \| \\ \boldsymbol{E}}}$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3r\,\boldsymbol{\nabla}\cdot(\Phi\boldsymbol{\nabla}\Phi)} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3r\,\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r})$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{K_R(0)}\mathrm{d}^3r\,\boldsymbol{\nabla}\cdot(\Phi\boldsymbol{\nabla}\Phi) = \lim_{R\to\infty}\int_{\partial K_R(0)} \underbrace{\mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\underbrace{(\Phi\boldsymbol{\nabla}\Phi)}_{\overset{R\to\infty}{\sim}\frac{1}{R^3}}}_{\sim\frac{1}{R}} = 0$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3r\,\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r})$$

Zur Umformung oben wurde benutzt:

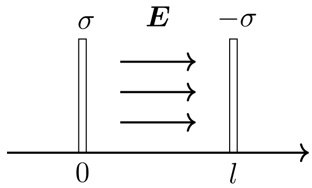
$$\Phi \overset{R\to\infty}{\sim} \frac{1}{R} \qquad \boldsymbol{\nabla}\Phi \sim \frac{1}{R^2} \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{n}\underbrace{\mathrm{d}f}_{\sim R^2}$$

Damit ergibt sich für die Energie einer Verteilung von Punktladungen

$$\Rightarrow \quad \boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3r\ \boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r})} \qquad \text{nicht für Punkladungen selbst!!!}$$

Energiedichte des elektrostatischen Feldes

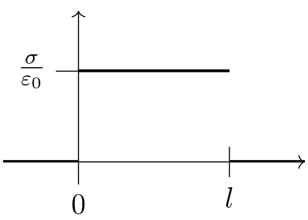
$$\boxed{w(\boldsymbol{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r})}$$



Beispiel: **Plattenkondensator**
Fläche F, Ladung $\rightarrow$ $\sigma = \frac{q}{F}$ $\rightarrow$ $\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x$

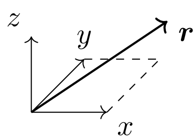
$\rightarrow$ Die Energiedichte ist: $w = \frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$ (nicht für Punktladungen)

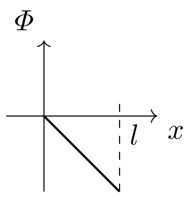
$\rightarrow$ Die Energie beträgt: $W = \int \mathrm{d}^3r w(\boldsymbol{r}) = l\cdot F\cdot\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$



Potentialdifferenz - Spannung

$$\Phi(\boldsymbol{r}) - \Phi(0) = -\int_0^{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') = -\int_0^x \mathrm{d}x'\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x$$





Die Spannung zwischen zwei Kondensatorplatten ist dann:

$$U = \Phi(0) - \Phi(l) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} l = \frac{q}{\varepsilon_0 F} l$$

Die Kapazität ist also:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0 F}{l}$$

Was ist die Energie bei einer Verteilung von Punktladungen und bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung. Bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung haben wir herausgefunden:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \qquad \text{für Punktladungen}$$

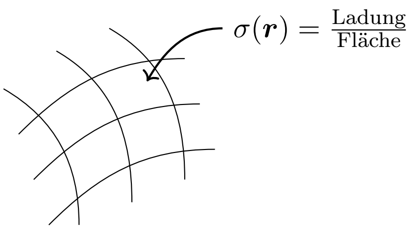
Die Energie der Punktladung selbst steckt hier nicht drinnen. Man muss dabei aufpassen, welche Gleichung man für welches Modell benutzt.

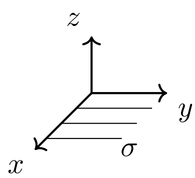
$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad \int \mathrm{d}^3 r\ \boldsymbol{E}^2 = \int \mathrm{d}^3 r\ \frac{1}{r^4} = \infty$$

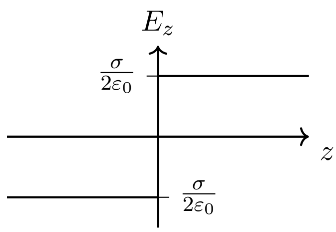
1.5 Verhalten des el. Feldes an Grenzflächen mit Flächenladung

$\rightarrow$ Diskontinuitäten von $\boldsymbol{E}$

Beispiel: Wir betrachten eine **homogene Flächenladung**.



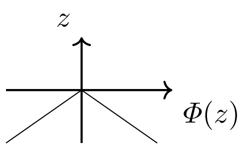




$$\Rightarrow \boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathrm{sgn}(z) \boldsymbol{e}_z$$

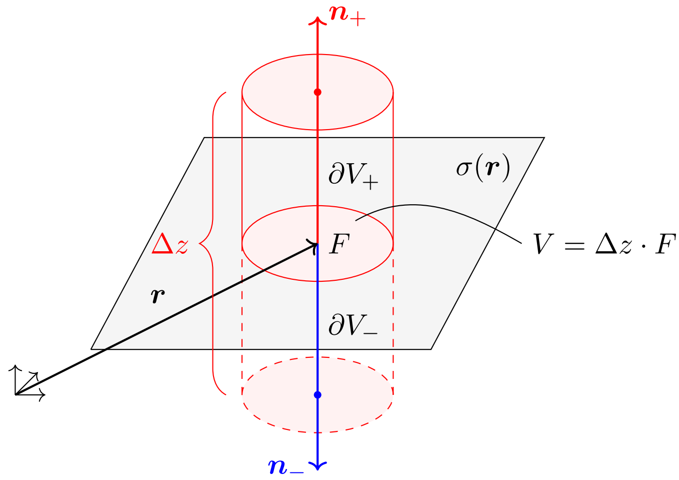
$$\boldsymbol{E}_\perp = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \boldsymbol{e}_z$$
$$\boldsymbol{E}_\parallel = 0$$

Das elektrische Feld $\boldsymbol{E}_\parallel$ ist gleich der Ableitung des elektrischen Potentials:
Das elektrische Potential ist also stetig.



Normalkomponente $\boldsymbol{E}_\perp$

Gaußscher Satz für V:



$$\int_V \mathrm{d}^3r'\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') = \int_{\partial V}\mathrm{d}\boldsymbol{f}'\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$
$$= \underset{\substack{\downarrow\,\Delta z\to 0\\ 0}}{\int_{\text{Mantel}}\mathrm{d}\boldsymbol{f}'\ \boldsymbol{E}} + \underset{\substack{\downarrow\,\Delta z\to 0\\ \int_F \mathrm{d}f'\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_+}}{\int_{\partial V_+}\mathrm{d}\boldsymbol{f}'\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})} + \underset{\substack{\downarrow\,\Delta z\to 0\\ -\int_F \mathrm{d}f'\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_-}}{\int_{\partial V_-}\mathrm{d}\boldsymbol{f}'\ \boldsymbol{E}}$$

$\boldsymbol{E}_\pm$ ist das Feld auf beiden Seiten der Grenzfläche

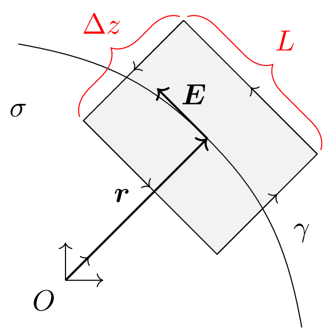
$$\int_{\partial V}\mathrm{d}\boldsymbol{f}'\boldsymbol{E} \quad \xrightarrow{\Delta z\to 0} \quad \int_F \mathrm{d}f\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_-) \quad \xrightarrow{F\to 0} \quad F\ \boldsymbol{n}\cdot\big(\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r})\big)$$
$$\|$$
$$\int_V \mathrm{d}^3r'\underset{\substack{\|\\ \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}')}}{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \mathrm{d}^3r'\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_F \mathrm{d}f'\sigma(\boldsymbol{r}') \quad \xrightarrow{F\to 0} \quad \frac{1}{\varepsilon_0}F\sigma(\boldsymbol{r})$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r})) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\boldsymbol{r})$$

$$E_{\perp_\pm} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_\pm \qquad E_{\perp_+}(\boldsymbol{r}) - E_{\perp_-}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\boldsymbol{r})$$

Tangentialkomponente $E_\parallel$

Satz von Stokes:



$$0 = \oint_r \mathrm{d}\boldsymbol{r}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') = \underbrace{\int \cdots + \int \cdots}_{=0 \text{ für } \Delta z\to 0} + \underbrace{\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\boldsymbol{E} + \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\boldsymbol{E}}_{\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'(\boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_-)}$$

$$0 = \oint_\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{E} \quad \xrightarrow{\Delta z \to 0} \quad \int_{-\frac{L}{2}}^{-\frac{L}{2}} \mathrm{d}s\boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_-) \quad \xrightarrow{L \to 0} \quad L\, \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r})) = 0$$
$$\to \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r})) = 0$$

$\to$ Die Tangentialkomponente ist stetig

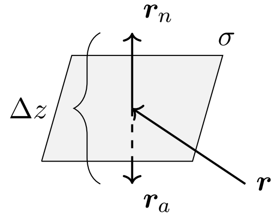
$$E_{\parallel +} = E_{\parallel -}$$

Insgesamt ergibt sich damit:

$$\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{n}$$

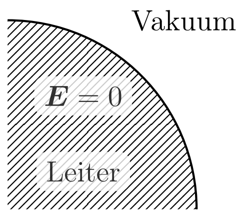
Das elektrische Potential $\varPhi$ ist damit stetig.

$$\underbrace{\varPhi(\boldsymbol{r}_b) - \varPhi(\boldsymbol{r}_a)}_{\varPhi_+(\boldsymbol{r}) - \varPhi_-(\boldsymbol{r})} = \int_{\boldsymbol{r}_a}^{\boldsymbol{r}_b} \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{E} \quad \xrightarrow{\Delta z \to 0} 0$$

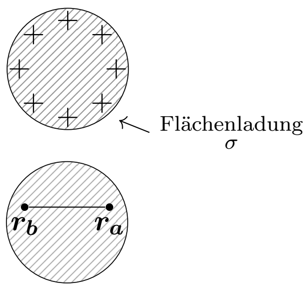


Und hiermit auch auf beiden Seiten der Flächenladung symmetrisch.

1.5.1 Randbedingungen an el. Leitern



Leiter: Material mit freibeweglichen Ladungsträgern (Metall)
Eigenschaften von $\boldsymbol{E}$ im Leiter:



i) $\boldsymbol{E} = 0$

ii) $0 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \qquad \rho(\boldsymbol{r}) = 0$

iii) Nettoladung befinden sich an Oberfläche

iv) Potential $\varPhi(\boldsymbol{r}_b) - \varPhi(\boldsymbol{r}_a) = 0 \quad \to \quad \varPhi(\boldsymbol{r}) = \text{const.}$

Randbedingungen

$$\boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_- = \frac{\sigma^-}{\varepsilon_0}\boldsymbol{n}$$
$$\boldsymbol{E}_- = 0$$
$$\to \boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) = \frac{\sigma(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$$

[Folie: Ladung an Oberfläche eines Leiters]

1.6 Randwertprobleme (RWP) der Elektrostatik und Lösungsmethoden

1.6.1 Formulierung des Randwertproblems

Das elektrische Potential: $\varPhi(\boldsymbol{r})$: $\quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\varPhi(\boldsymbol{r})$

$$\boldsymbol{\Delta}\varPhi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \qquad \text{Poisson-Gleichung}$$

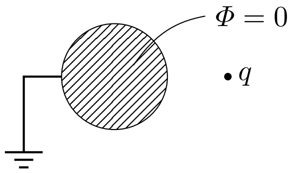
Für eine gegebene lokale Ladungsverteilung ρ gilt:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3r' \, \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

$$\to \Phi(\boldsymbol{r}) \xrightarrow{|\boldsymbol{r}| \to 0} 0$$

Typische Problemstellung:
Ladungsverteilung ρ + Werte des Potentials auf Randfläche

Beispiel:

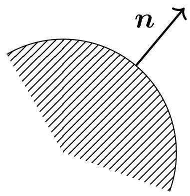


Randwertproblem: Gegeben: $\rho(\boldsymbol{r}')$ im Raumbereich V
$\Phi(\boldsymbol{r})$ oder $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ auf Randfläche ∂V
Gesucht: $\Phi(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ überall in V

Zwei Fälle:

i) $\Phi(\boldsymbol{r})$ ist auf der Randfläche gegeben
$\to$ **Dirichlet-Randbedingung**

ii) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ ist auf der Randfläche gegeben
$\to$ **Neumannsche Randbedingung**



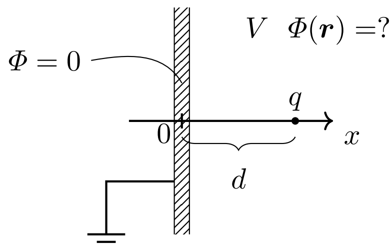
Gegeben sei: $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E}$ dies ist gleich der **Normalenableitung**:

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{n}\boldsymbol{\nabla}\Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

Wir beschränken uns vorwiegend auf den ersten Fall. Zur Lösung dieser Probleme gibt es einige Methoden. Zum Einstieg und zur betrachten wir zunächst die Methode der Spiegelladung.

1.6.2 Methode der Bildladung (Spiegelladung)

Punktladung vor leitender, geerdeter Metallplatte



$$\boldsymbol{\Delta}\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$$

$\boldsymbol{r} \in V \qquad \boldsymbol{r}_0 = (d, 0, 0) \qquad V = \{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3, x > 0\}$

Randbedingungen:

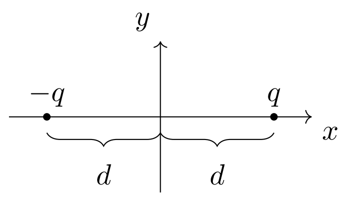
$$\Phi(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \text{für} \quad \boldsymbol{r} \in \partial V, \qquad \text{d.h. } \boldsymbol{r} = (0, y, z)$$

Idee: Ersetze ursprüngliche Problem durch "Fiktives" Problem mit zusätzlichen Ladungen außerhalb von V, welche die Randbedingungen simulieren.

Potential der Punkladungen in $\boldsymbol{r}_0$:

$$\Phi_q(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}$$

addiere Ladung $-q$ in $\boldsymbol{r}_0' = (-d, 0, 0) = -\boldsymbol{r}_0$



$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|} - \frac{q}{|\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_0|} \right)$$

Schauen wir nun nach ob dies die Poisson-GLeichung erfüllt:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Delta}\Phi &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\underbrace{\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}}_{=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)} - \underbrace{-\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_0|}}_{=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_0)}\right) \\
&= \underset{\checkmark}{-\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)} + \frac{q}{\varepsilon_0}\underbrace{\delta(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_0)}_{=0 \text{ für } \boldsymbol{r}\neq-\boldsymbol{r}_0\ \checkmark} \quad {\scriptstyle \forall \boldsymbol{r}\in V}
\end{aligned}
$$

Diskussion der Lösung

i) **Struktur**

$$
\Phi(\boldsymbol{r}) = \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}}_{=:\ \Phi_\mathrm{s}(\boldsymbol{r})} + \underbrace{\frac{(-q)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_0|}}_{=:\ \Phi_\mathrm{hom}(\boldsymbol{r})}
$$

$\boldsymbol{r} \in V$

$$
\begin{aligned}
\Delta\Phi_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}) &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \quad \text{Poisson-Gleichung} \\
\Delta\Phi_\mathrm{hom}(\boldsymbol{r}) &= 0 \qquad \text{Laplace-Gleichung}
\end{aligned}
$$

Mathematisch: Lösung inhomogener DGL

$$
\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}) + \Phi_\mathrm{hom}(\boldsymbol{r})
$$

Φ_hom wird so gewählt, dass die Randbedingungen erfüllt werden:

$$
\boldsymbol{r} \in \partial V: \quad \Phi_\mathrm{o}(\boldsymbol{r}) = \Phi_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}) + \Phi_\mathrm{hom}(\boldsymbol{r})
$$

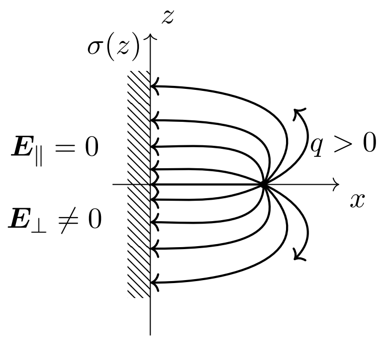
ii) **Elektrisches Feld**

$$
\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(x-d,y,z)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} - \frac{(x+d,y,z)}{|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_0|^3}\right)
$$

An der Oberfläche $x \to 0$, $x \geq 0$
$|\boldsymbol{r} \pm \boldsymbol{r}_0|^3 \to (d^2+y^2+z^2)$

$$
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\bigg|_{\boldsymbol{r}\in\partial V} = -\frac{qd}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_x
$$

Durch das externe elektrische Feld verschieben sich die Ladungsträger im Metall und es entsteht eine Influenzladung an der Oberfläche.



iii) **Influenzladung auf Metalloberfläche**

$$
\boldsymbol{E}_+ - \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\boldsymbol{E}_-} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{n} \qquad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_x
$$

$\boldsymbol{r} \in \partial V$:

$$
\sigma(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) = -\frac{qd}{2\pi(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}
$$

gesamte influenzierte Ladung

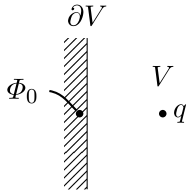
$$
q_i = \int_{\partial V} df\ \sigma(\boldsymbol{r}) = \cdots = -q
$$

iv) **Kraft zwischen Punktladungen und Metallplatte**

$$\boldsymbol{F} = q\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}_0) = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0(2d)^2}\boldsymbol{e}_x$$

Eindeutigkeit der Lösung des Randwertproblems

Dirichlet-Randwertproblem:



$$\begin{aligned} \Delta\Phi(\boldsymbol{r}) &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \qquad && \boldsymbol{r} \in V \\ \Phi(\boldsymbol{r}) &= \Phi_0(\boldsymbol{r}) && \boldsymbol{r} \in \partial V \end{aligned}$$

Annahme: $\Phi_1,\ \Phi_2$ lösen RWP

$$\text{d.h.} \qquad \begin{aligned} \Delta\Phi_1(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) &= \Delta\Phi_2(\boldsymbol{r}) \qquad && \boldsymbol{r} \in V \\ \Phi_1(\boldsymbol{r}) = \Phi_0(\boldsymbol{r}) &= \Phi_2(\boldsymbol{r}) && \boldsymbol{r} \in \partial V \end{aligned}$$

Setze :

$$(\boldsymbol{r}) := \Phi_1(\boldsymbol{r}) - \Phi_2(\boldsymbol{r})$$

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \boldsymbol{r} \in V$$

$$\boldsymbol{r} \in \partial V \quad \Psi(\boldsymbol{r}) = \Phi_1(\boldsymbol{r}) - \Phi_2(\boldsymbol{r}) = 0$$

Greensche Identität:

g, h Funktionen an V:

$$\begin{aligned} &\int_V d^3r\, [(\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{r})) \cdot (\boldsymbol{\nabla}h(\boldsymbol{r}))) + g(\boldsymbol{r})\Delta h(\boldsymbol{r})] \\ &= \int_{\partial V} d\boldsymbol{f} \cdot (g(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\nabla}h(\boldsymbol{r}) \\ &= \int_{\partial V} d\boldsymbol{f} g(\boldsymbol{r}) \underbrace{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nabla}h(\boldsymbol{r})}_{=\frac{\partial h}{\partial n}(\boldsymbol{r})} \end{aligned}$$

$h = g = \Psi$

$$\Rightarrow \quad \int_V d^3r\, ((\boldsymbol{\nabla}\Psi)^2 + \Psi(\boldsymbol{r}) \underbrace{\Delta\Psi(\boldsymbol{r})}_{=0}) = \int_{\partial V} df\, \underbrace{\Psi(\boldsymbol{r})}_{=0} \frac{\partial\Psi(\boldsymbol{r})}{\partial n}$$

$$\Rightarrow \int_V d^3r\, (\boldsymbol{\nabla}\Psi(\boldsymbol{r}))^2 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\Psi(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad \boldsymbol{r} \in V$$

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \text{const.} \qquad \Psi(\boldsymbol{r}) = 0 \text{ in } V \quad \Rightarrow \quad \Phi_1(\boldsymbol{r}) = \Phi_2(\boldsymbol{r})$$

1.6.3 Formale Lösungen des elektrostatischen Randwertproblems mit Greenschen Funktionen (GF)

GF: generelle Methode um inhomogene DGL zu lösen

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

Greensche Funktionen der Poisson-Gleichung: $\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ mit

Greensche Funktionen der Poisson-Gleichung

$$\Delta_{\boldsymbol{r}}\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

Diese Gleichung geht vor einer Punktladung mit $q = 1$ aus, ist hier aber zunächst einmal eine Definition.

$\mathcal{G}$ bekannt

$$\rightarrow \Phi(\boldsymbol{r}) = \int d^3r'\ \mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')$$

$$\Delta_{\boldsymbol{r}}\Phi(\boldsymbol{r}) = \int d^3r'\ \underbrace{(\Delta_{\boldsymbol{r}}\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'))}_{=\frac{1}{\varepsilon_0\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}\rho(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})\ \checkmark$$

$$\Delta_{\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = 4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$$\rightarrow \Delta_{\boldsymbol{r}}\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

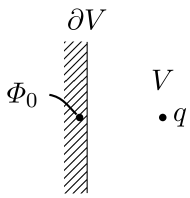
$$\Phi(\boldsymbol{r}) \overset{|\boldsymbol{r}|\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\rightarrow\ \Delta_{\boldsymbol{r}}\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \underset{|\boldsymbol{r}|\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Dirichlet-Randwertproblem

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \qquad && \boldsymbol{r}\in V\\ \Phi(\boldsymbol{r}) &= \Phi_0(\boldsymbol{r}) && \boldsymbol{r}\in\partial V\end{aligned}$$



Green'sche Funktionen (GF):

$$\begin{aligned}\Delta_{\boldsymbol{r}}\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &= \ \frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \quad && \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in V\\ \mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &= 0 \qquad \text{für} && \boldsymbol{r}\in\partial V \quad \boldsymbol{r}'\in V\end{aligned}$$

Hiermit haben wir das Grenzwertproblem auf eine Integration zurückgeführt. Dies werden wir nun Beweisen:

Beiweis:
Die 2. Greensche Identität lautet:

$$\begin{aligned}&\int_V d^3r'\ (g(\boldsymbol{r}')\Delta_{\boldsymbol{r}'}h(\boldsymbol{r}') - h(\boldsymbol{r}')\Delta_{\boldsymbol{r}'}g(\boldsymbol{r}'))\\ =&\int_{\partial V} d\boldsymbol{f}'\cdot\big(g(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'}h(\boldsymbol{r}') - h(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'}g(\boldsymbol{r}')\big)\end{aligned}$$

$$g(\boldsymbol{r}') := \varPhi(\boldsymbol{r}') \qquad h(\boldsymbol{r}') := \mathcal{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$$

$$\Rightarrow \quad \int_V d^3r' \left[\varPhi(\boldsymbol{r}') \underbrace{\Delta_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})}_{=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})} - \mathcal{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) \underbrace{\Delta_{\boldsymbol{r}'} \varPhi(\boldsymbol{r}')}_{=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}')} \right]$$

$$= \int_{\partial V} d\boldsymbol{f}' \left[\underbrace{\varPhi(\boldsymbol{r}')}_{=\varPhi_0(\boldsymbol{r}')} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) - \underbrace{\mathcal{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})}_{=0} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \varPhi(\boldsymbol{r}') \right]$$

$$\Rightarrow = -\frac{1}{\varepsilon_0} \varPhi(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r' \; \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \rho(\boldsymbol{r})$$

$$= \int_{\partial V} d\boldsymbol{f}' \; \varPhi_0(\boldsymbol{r}') \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$$

$$= \int_{\partial V} d\boldsymbol{f}' \; \varPhi_0(\boldsymbol{r}') \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$$

$$\Rightarrow \varPhi(\boldsymbol{r}) = \int_V d^3r' \; \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \rho(\boldsymbol{r}') - \varepsilon_0 \int_{\partial V} df' \; \varPhi_0(\boldsymbol{r}') \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$$

Es gilt (HA):

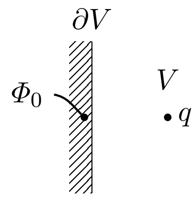
$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \mathcal{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) \qquad \text{Reziprozität}$$
$$\rightarrow \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$$
$$\Delta_{\boldsymbol{r}} \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \Delta_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$$

Potential bei Randwertproblem

$$\varPhi(\boldsymbol{r}) = \int_V \mathrm{d}^3r' \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \rho(\boldsymbol{r}') - \varepsilon_0 \int_{\partial V} \mathrm{d}f' \varPhi_0(\boldsymbol{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \tag{1}$$

Wiederholung

$$\Delta \varPhi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\boldsymbol{r}) \qquad \boldsymbol{r} \in V$$
$$\varPhi(\boldsymbol{r}) = \varPhi_0(\boldsymbol{r}) \qquad \boldsymbol{r} \in \partial V$$



Green'sche Funktionen:

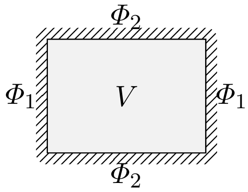
$$\Delta_{\boldsymbol{r}} \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \qquad \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}' \in V$$
$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = 0 \qquad \text{für} \qquad \boldsymbol{r} \in \partial V \quad \boldsymbol{r}' \in V$$

Wenn die Green'sche Funktion $\mathcal{G}$ die Bedingungen erfüllt, können wir das Potential so schreiben wie in Gleichung (1).

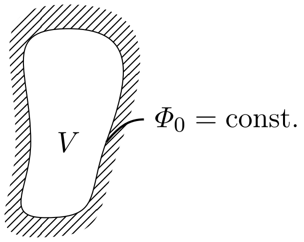
Bemerkungen:

i) Spezialfälle:

1) V Ladungsfrei ($\rho(\boldsymbol{r}) = 0$ in V)



$$\to \Phi(\boldsymbol{r}) = -\varepsilon \int_{\partial V} \mathrm{d}f' \Phi_0(\boldsymbol{r}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$$



$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Phi(\boldsymbol{r}) &= -\varepsilon \Phi_0 \underbrace{\int_{\partial V} \mathrm{d}f' \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}_{\int \mathrm{d}f' \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G}} \\
&= -\varepsilon \Phi_0 \int \mathrm{d}\boldsymbol{f}' \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G} \\
&\overset{\text{S.v.G.}}{=} \int_V \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r}' \quad \underbrace{\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \cdot (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G})}_{\Delta_{\boldsymbol{r}'} \cdot \mathcal{G} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')} \\
&= -\frac{1}{\varepsilon_0} \\
\Rightarrow \Phi(\boldsymbol{r}) &= \Phi_0
\end{aligned}$$

2) $V = \mathbb{R}^3$, lokalisierte Ladungsverteilung ρ

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r}' \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \qquad \int_{\partial V} \cdots \to 0$$

eine spezielle Lösung für $\mathcal{G}$

ii) $\mathcal{G}$ ist auch die Lösung einer inhomogenen partiellen DGL

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \underbrace{\mathcal{G}_s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}_{\substack{\text{spezielle} \\ \text{Lösung der} \\ \text{inhomogenen} \\ \text{DGL}}} + \underbrace{F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}_{\substack{\text{Lösung} \\ \text{zugehörigen} \\ \text{homogenen} \\ \text{DGL}}}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G}_s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \\
\Delta_{\boldsymbol{r}'} F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') &= 0
\end{aligned}$$

$$\mathcal{G}_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \qquad \text{Laplace anwenden !}$$

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}}_{\text{immer zur Lösung}} + \underbrace{F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}_{\substack{\text{so wählen, dass} \\ \text{Randbedingungen erfüllt}}}$$

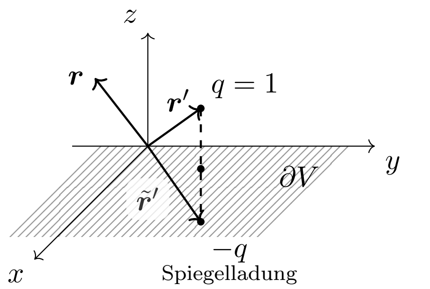
$F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ so wählen, dass die Randbedingungen erfüllt sind: $\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = 0 \quad \boldsymbol{r} \in \partial V$.

1.6.4 Greensche Funktion des Dirichlet Randwertproblems einer Ebene

$$\Delta_{\boldsymbol{r}'}\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' \in V$$

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0 \qquad \boldsymbol{r} \in \partial V \ \ \text{(z=0)}, \quad \boldsymbol{r} \in V$$

$$V = \{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3 | z < 0\}$$



Analog: Punktladung „$q = 1$“ in $\boldsymbol{r}'$ vor leitender Ebene mit Potential 0

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} - \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}'|}\right) \qquad \tilde{\boldsymbol{r}}' = (x', y', -z')$$

$$\boxed{\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{q}\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} - \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}'|}\right)}$$

Beweis:

$$\Delta_{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Bigg(\underbrace{\Delta_{\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}_{-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} - \underbrace{\Delta_{\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}'|}}_{-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}')=0}\Bigg) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

1. Teil: $\boldsymbol{r} \in \partial V$: $\quad z = 0$, $\qquad$ 2. Teil $= 0$: $\tilde{\boldsymbol{r}}' \notin V$.

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z')^2}} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(-z)^2}}$$
$$= \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}'|}$$

$\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0 \quad \boldsymbol{r} \in \partial V$

Bemerkung:

i) $\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$
$F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}'|}$
$\Delta_{\boldsymbol{r}}F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0$

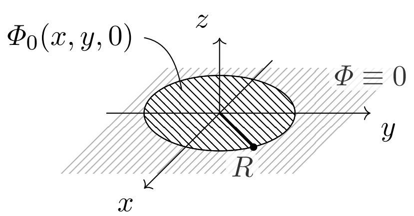
ii) Symmetrie der Greenschen Funktion (Reziprozitätsrelation):

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \mathcal{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$$

$\rightarrow$ formale Lösung des Randwertproblems für eine beliebige Ladungsverteilung und Randwerte $\Phi_0(\boldsymbol{r})$ in der Ebene:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \int_V \mathrm{d}^3r'\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}') - \varepsilon_0\int_{\partial V}\mathrm{d}f'\Phi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial n'}$$

$$\rho \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0 \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\leq R} \mathrm{d}y'\mathrm{d}x'\Phi_0(x',y',0)\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial n'}$$



1.6.5 Separation der Variablen und Entwicklung nach orthogonalen Funktionen

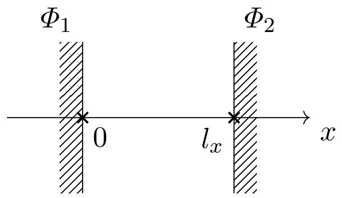
Eine allgemeine Methode zur Lösung partieller DGL.

Zur Vereinfachung: **Laplace.Gl $\boldsymbol{\Delta\Phi = 0}$ + Randbedingung**

Verbindung zur Poisson-Gl: $\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi_s(\boldsymbol{r}) + \Phi_{\text{hom}} \qquad \Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + \Phi_{\text{hom}}$$

Motivation: 1-Dim Randwertproblem

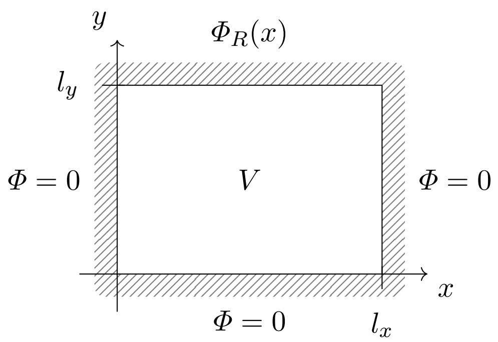


$$\Phi(x) =? \qquad \rho = 0$$
$$\Delta\Phi(x) = \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2} = 0$$
$$\Rightarrow \Phi(x) = c_1 + c_2 x$$

Randbedingungen:

$$\Phi(0) = c_1 = \Phi_1 \qquad \Phi(l_x) = \Phi_1 + c_2 l_x = \Phi_2$$
$$\to c_2 = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l_x} \qquad \to \qquad \Phi(x) = \Phi_1 + \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l_x}x$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l_x}\boldsymbol{e}_x$$

2-Dim Randwertproblem



Wir suchen: $\Phi = \Phi(x,y) \quad$ mit $\rho = 0$

$$0 = \Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$$

Randbedingungen:

i) $\Phi(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad y = 0$

ii) $\Phi(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad x = 0$

iii) $\Phi(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad x = l_x$

iv) $\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi_R(x) \qquad y = l_y$

Separationsansatz: $\Phi(x,y) = f(x)g(y)$

$$\begin{aligned} 0 = \Delta\Phi &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x)g(y) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} g(y) + f(x)\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \\ &= \Delta\Phi = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} g(y) + f(x)\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{0 = \Delta\Phi = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} g(y) + f(x)\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2}} \qquad \Big| \cdot \frac{1}{f\,g}$$

umformen:

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{f(x)}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}}_{\text{Fkt. von} x} = -\underbrace{\frac{1}{g(y)}\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2}}_{\text{Fkt. von} y} = \text{const.} = -\alpha^2$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = -\alpha^2 f(x) \quad \text{mit } e^{i\alpha x} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2} = \alpha^2 g(y) \quad \text{mit } e^{\alpha y}$$

$$e^{i\alpha x} \Rightarrow f(x) = a\sin(\alpha x) + b cos(\alpha x) \qquad e^{\alpha y} \Rightarrow g(x) = c\sinh(\alpha y) + d\cosh(\alpha y)$$

$\Phi(x,y) = f(x)\cdot g(y)$

Randbedingungen:

i) $0 = \Phi(x,0) = f(x)\cdot d \quad \Rightarrow d = 0$

ii) $0 = \Phi(0,y) = b\cdot g(y) \quad \Rightarrow b = 0$

$$\Rightarrow \Phi(x,y) = a\sin(\alpha x)c\sinh(\alpha y) = \underset{\substack{\parallel \\ a\cdot c}}{A}\sin(\alpha x)\sinh(\alpha y)$$

iii) $0 = \Phi(l_x,y) = A\sin(\alpha l_x)\sinh(\alpha y) \to \sin(\alpha l_x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{n\pi}{l_x} \qquad n\in\mathbb{Z}(\text{oder } n\in\mathbb{N})$

$$\to \Phi_n(x,y) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right)$$

iv) $\Phi(x,l_y) = \Phi_R(x)$

$$\Rightarrow \Phi_R(x) \underset{\uparrow}{=} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)\sinh\left(\frac{n\pi l_y}{l_x}\right) \qquad \forall x\in[0,l_y]$$

im allgemeinen ist dies nicht möglich, aber da es sich um eine lineare DGL ($\Delta\Phi = 0$) handelt:
$\to$ Linearkombinationen von Lösungen sind auch Lösungen

Ansatz für allgemeine Lösung:

$$\boxed{\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{l_x}\right)}$$

Der Ansatz erfüllt $\Delta\Phi = 0$ und erfüllt die Randbedingungen i), ii), iii). Um iv) zu erfüllen fordern wir:

$$\boxed{\Phi_R(x) \overset{!}{=} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)}_{\text{Entwicklung}} \underbrace{\sinh\left(\frac{n\pi l_y}{l_x}\right)}_{\text{const.}}}$$

Der erste Teil des Ausdrucks entspricht der Entwicklung von $\Phi_R(x)$ nach Funktionen $\sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)$ also einer Fourier-Reihe.

Bestimmung von A_n: Multipliziere mit $\sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right) \quad m \in \mathbb{N}$ und danach Integration:

$$\int_0^{l_x} \mathrm{d}x \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \Phi_R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left(\frac{m\pi l_y}{l_x}\right) \int_0^{l_x} \mathrm{d}x \underbrace{\overset{\overset{\text{zueinander orthogonale Vektoren}}{\uparrow}}{\sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right)} \overset{\uparrow}{\sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)}}_{=\frac{l_x}{2}\delta_{nm}}$$

$$= A_m \frac{l_x}{2} \sinh\left(\frac{n\pi l_y}{l_x}\right)$$

$$A_m = \frac{2}{l_x \sinh\left(\frac{n\pi l_y}{l_x}\right)} \int_0^{l_x} \mathrm{d}x \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right) \Phi_R(x)$$

in $\Phi(x,y)$ einsetzen

Wiederholung

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = 0 + \text{Randbedingungen}$$

$$\Phi = \Phi(x,y) = f(x)g(y)$$

$$\Phi_n(x,y) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{l_x}\right)$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$\Phi(x,y) = \sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{l_x}\right)$$

$$A_n = \frac{2}{l_x \sinh\left(\frac{n\pi l_y}{l_x}\right)} \int_0^{l_x} \mathrm{d}x \;\sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right) \Phi_R(x)$$

Zu dem Problem gehört die Skizze aus Abschnitt 1.6.5: 2-Dim Randwertproblem.

1.6.6 Vollständige Orthonormale Funktionensysteme (VONS)

Betrachte Funktionen $g(x), h(x)$ auf $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$

$$h, g: \quad I \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$$

Skalarprodukt: $(g,h) = \int_a^b \mathrm{d}x\ g^*(x)h(x)$
$(g,h) = 0$: g und h orthogonal, $(g,g) = 1$: g normiert
Norm: $||g|| = \sqrt{(g,g)}$

Ein abzählbarer Satz von Funktionen $\{f_n\} = \{f_1, f_2, \dots\}$
Heißt orthonormiert falls: $(f_m, f_n) = \delta_{nm}$ $\rightarrow$ Orthonormalsystem
Vollständigkeit: Ein Satz von Funktionen heißt vollständig (VONS) falls jede quadratintegrable[1] Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ in der Form $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ dargestellt werden kann.
Genauer: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b \mathrm{d}x \mid g(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)| = 0$

Bestimmung der Koeffizient a_n:

$$g(x) = \sum_n a_n f_n(x) \qquad \Big| \int \mathrm{d}x\ f_m^*(x)$$

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ f_m^*(x) g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_a^b \mathrm{d}x\ f_m^*(x) f_n(x)}_{=\delta_{nm}} = a_m$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_n a_n f_n(x) = \sum_n (f_n, g) f_n(x) \\ &= \sum_n \int_a^b \mathrm{d}x'\ f_n^*(x') g(x') f_n(x) \\ &= \int_a^b \mathrm{d}x'\ g(x') \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) f_n^*(x')}_{=\delta(x-x')} \end{aligned}$$

da $\int_a^b \mathrm{d}x' g(x') = g(x)$

Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) f_n^*(x') = \delta(x - x')$$

Beispiele:

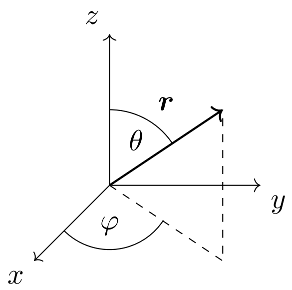
1)
$$f_n(x) = \sqrt{\frac{l}{2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad I = [0, l]$$
Bedeutung der einzelnen Terme $(f_n, f_m) = \delta_{nm}$
$g : \quad I \rightarrow \mathbb{R} \quad g(0))0 = g(l)$
$$g(x) = \sum_n a_n \sqrt{\frac{l}{2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

2) Fourierreihe: $\{f_n\}$:
$n = 0 : \quad \frac{1}{\sqrt{l}}$
$$n \in \mathbb{N} : \qquad \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad ; \qquad \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad I = [0, l]$$
$$g(x) = a_0 \frac{1}{\sqrt{l}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + b_n \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]$$

[1] Falls $\int \mathrm{d}x\ |g(x)|^2$ existiert

Vectoren	Bezeichnung	Funktionen
$\boldsymbol{r}$	Vektor	$g(x)$
$\{\boldsymbol{e}_n\}$	Basis	$\{f_n(x)\}$
$(\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}_{n'}) = \delta_{nn'}$	Orthonormierung	$(f_n, f_{n'}) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)_{nn'}$
$\boldsymbol{r} = \sum\limits_{n=1}^{3} a_n \boldsymbol{e}_n$	Entwicklung	$g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$
$a_n = (\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{r})$	Entwicklungs-koeffizienten	$a_n = (f_n, g)$
$\boldsymbol{r} := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$	Darstellung durch Spaltenvektor	$g(x) := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$

1.6.7 Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten



$$\boldsymbol{r} = r \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\varPhi(\boldsymbol{r}) = \varPhi(r, \theta, \varphi)$$

$$\Delta\varPhi = 0$$

$$\to \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varPhi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varPhi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varPhi}{\partial\varphi^2} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varPhi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varPhi}{\partial r}\right)$$

Separationsansatz:

$$\varPhi(r, \theta, \varphi) = \frac{U(r)}{r}P(\cos\theta)Q(\varphi)$$

1. Term:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\cancel{r}\frac{U(r)}{\cancel{r}}P(\cos\theta)Q(\varphi)\right) = P(\cos\theta)Q(\varphi)\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}$$

$$\Rightarrow 0 = PQ\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} + UQ\frac{1}{r^3\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right) + UP\frac{1}{r^3\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\varphi^2} \qquad \Bigg| \cdot \frac{r^3\sin^2\theta}{UPQ}$$

$$\Rightarrow \underbrace{-r^2\sin^2\theta\frac{1}{U}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} - \sin\theta\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right)}_{\text{unabhängig von }\varphi} = \underbrace{\frac{1}{Q}\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\varphi^2}}_{\text{unabhängig von }r,\theta} = \text{const.} := -m^2$$

für Q:

i)

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\varphi^2} + m^2Q = 0$$

Lösung:

$$Q(\varphi) = e^{im\varphi} = \cos(m\varphi) + i\sin(m\varphi)$$

$$Q(\varphi + 2\pi) = Q(\varphi) \quad e^{im(\varphi+2\pi)} = e^{im\varphi} \quad \Rightarrow \quad m = \mathbb{Z}$$

$$\frac{r^2}{U}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{P\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right) = \frac{m^2}{\sin^2\theta}$$

$$\underbrace{\frac{r^2}{U}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}}_{\text{unabh. von }\theta} = \underbrace{-\frac{1}{P\sin\theta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right)}_{\text{unabh. von }V} = \text{const.} := \lambda$$

ii)

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} - \frac{\lambda}{r^2}U(r) = 0$$

→ Lösung für $\lambda = l(l+1)$ (Warum das eine Lösung ist, wird in iii) erklärt)

$$U(r) = a_l r^{l+1} + b_l r^{-l}$$

→ <u>Spezielle Lösung für $m = 0$:</u>

$$\Phi(r,\theta) = \frac{U(r)}{r}P_l(\cos\theta) = (a_l r^l + b_l r^{-l-1})P_l(\cos\theta)$$

allg. Lösung: $\Delta\Phi = 0$ für $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0$

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(\underset{\downarrow}{a_l} r^l + \underset{\downarrow}{b_l} r^{-l-1})P_l(\cos\theta)$$

durch Randbedingungen festgelegt

iii)

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)P(\cos\theta) = 0$$

$x := \cos\theta \quad P(x):$ DGL für $P(x)$ $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}P(x(\theta)) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$

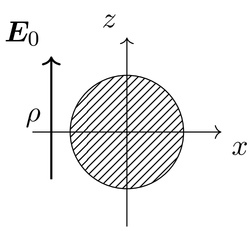
$$\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\Rightarrow -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\underset{\overset{\parallel}{1-x^2}}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P(x) = 0$$

Zugeordnete Legendresche DGL

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P(x) = 0$$

Spezialfall: **Zylindersymmetrische Probleme**: Φ unabhängig von φ
→ **Legendre-Polynome**



$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0, \quad Q(\varphi) = e^{im\varphi} \Rightarrow m = 0 \Rightarrow Q(\varphi) = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right) + \lambda P(x) = 0$$

Legendresche DGL

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \lambda P(x) = 0$$

Potenzreihenansatz: $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

$\rightarrow$ Fließbach

$\rightarrow$ Legendre Polynome

$\rightarrow$ relevante Lösung nur für $\lambda = l(l+1) \qquad l \in \mathbb{N}_0$

Wiederholung

Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

$$\Delta\Phi = 0 \qquad \Phi(r,\theta,\varphi)$$

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = \frac{U(r)}{r}P(\cos\theta)Q(\varphi)$$

i)

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\varphi^2} + m^2Q = 0 \qquad m \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow Q(\varphi) = e^{im\varphi}$$

ii)

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} - \frac{\lambda}{r^2}U = 0 \qquad \lambda = l(l+1) \quad l \in \mathbb{N}_0$$

$$U(r) = a_l r^{l+1} + b_l r^{-l}$$

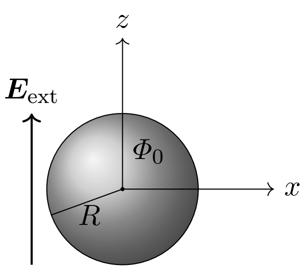
iii)

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)P(\cos\theta) = 0$$

Zylindersymmetrische Probleme: $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} = 0 \quad \rightarrow \quad m = 0$
$\rightarrow P_l(\cos\theta)$: Legendre-Polynome
$\rightarrow$ allgemeine Lösung:

$$\boxed{\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(a_l r^l + b_l r^{-l-1}\right)P_l(\cos\theta)}$$

Beispiel: **Leitende Kugel im homogenen Feld**



$$\boldsymbol{E}_{\text{ext}} = E_0\boldsymbol{e}_z$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi_0 \qquad |\boldsymbol{r}| \leq R$$

Die Frage ist jetzt was ist das äußere Potential und das äußere $\boldsymbol{E}$-Feld:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) \quad \text{für} \quad |\boldsymbol{r}| > R \qquad \to \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

Lösung des Randwertproblems $\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = 0$ für $|\boldsymbol{r}| > R$ mit der **Randbedingungen**:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi_0 \text{ für } |\boldsymbol{r}| = R$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) \overset{|\boldsymbol{r}|\to\infty}{\longrightarrow} -E_0 z + \text{const.} = -E_0 r\cos\theta + \Phi_1$$

Aufgrund der Zylindersymmetrie des Problems ist Φ eine Funktion von θ und r: $\Phi(r,\theta)$

$$\to \Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + b_l r^{-l-1}\right) P_l(\cos\theta)$$

i) $r = R$

$$\Phi(R,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l R^l + b_l R^{-l-1}\right) P_l(\cos\theta)$$
$$\overset{!}{=} \Phi_0 \cdot 1 = \Phi_0 P_0(\cos\theta)$$

an Beide Seiten Multiplizieren wir $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta) P_n(\cos\theta)$ für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l R^l + \frac{b_l}{R^{l+1}}\right) \underbrace{\int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta) P_n(\cos\theta) P_l(\cos\theta)}_{\delta_{nl}\frac{2}{2n+1}} = \Phi_0 \underbrace{\int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta) P_n(\cos\theta) P_l(\cos\theta)}_{\delta_{n0}\frac{2}{2n+1}=2\delta_{n0}}$$

$$\Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{2l+1} \left(a_l R^l + \frac{b_l}{R^{l+1}}\right) \delta_{nl} = 2\Phi_0 \delta_{n0} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\underline{n = 0:} \qquad 2\left(a_0 R^0 + \frac{b_0}{R}\right) = 2\Phi_0 \qquad \Rightarrow b_0 = R(\Phi_0 - a_0)$$

$$\underline{n \neq 0:} \quad \frac{2}{2n+1}\left(a_n R^n + \frac{b_n}{R^{n+1}}\right) = 0 \quad \Rightarrow b_n = R^{2n+1} a_n$$

ii) $r \to \infty$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) \to -E_0 r\cos\theta + \Phi_1$$
$$= -E_0 r P_1(\cos\theta) + \Phi_1 P_0(\cos\theta) \overset{r\to\infty}{\longleftarrow} \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{R^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{R^{l+1}}\right) \delta_{nl} \frac{2}{2n+1} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 2\Phi_1\delta_{n0} - E_0 r \delta_{n1} \frac{2}{2n+1} = 2\Phi_1\delta_{n0} - \frac{2}{3} E_0 r \delta_{n1}$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\underline{n = 0:} \quad \left(a_0 + \frac{b_0}{r}\right) 2 \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 2\Phi_1 \qquad \Rightarrow \qquad a_0 = \Phi_1$$

$$\underline{n = 1:} \quad \left(a_1 r + \frac{b_1}{r^2}\right) \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} E_0 r \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = E_0$$

$$\underline{n > 1:} \quad \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}\right) \frac{2}{2n+1} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \qquad \Rightarrow \qquad a_n = 0$$

$$
\begin{aligned}
\rightarrow \quad & b_0 = R(\Phi_0 - \Phi_1) \\
& b_1 = -R^3 \qquad a_1 = E_0 R^3 \\
n > 1: \quad & b_n = -R^{2n+1} \quad a_n = 0
\end{aligned}
$$

$$
\Phi(r,\theta) = \left[\Phi_1 + \frac{R(\Phi_0 - \Phi_1)}{r}\right] \underbrace{P_0(\cos\theta)}_{=1} + \left[-E_0 r + \frac{E_0 R^3}{r^2}\right] \underbrace{P_1(\cos\theta)}_{\cos\theta}
$$

Potential einer Kugel im homogenen $\boldsymbol{E}$-Feld

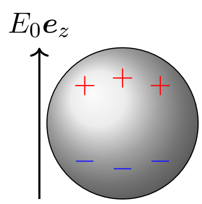
$$
\rightarrow \Phi(r,\theta) = \Phi_1 + (\Phi_0 - \Phi_1)\frac{R}{r} - E_0 r\cos\theta + E_0 \frac{R^3}{r^2}\cos\theta
$$

Diskussion der **Bedeutung der einzelnen Terme**:

- Φ_1 ist eine Konstante die auf das Potential keine physikalische Auswirkung hat.
- $-E_0 r\cos\theta$ ist das Potential des äußeren Feldes.
- $\Phi_0 - \Phi_1$ ist das Potential einer möglichen Gesamtladung auf der Kugel.
- $E_0 \frac{R^3}{r^2}\cos\theta$ ist der Beitrag der Ladungsverschiebung auf der Kugel. Also das Potential der Influenzierten Ladungen.

Eine Kugel mit Ladung Q ohne äußeres Feld ($E_0 = 0$):

$$
\begin{aligned}
\rightarrow \Phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r} + \text{const.} \\
&\overset{!}{=} \Phi_1 + (\Phi_0 - \Phi_1)\frac{R}{r}
\end{aligned}
$$



$$
\rightarrow \text{const.} = \Phi_1 \qquad \Phi_0 - \Phi_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}
$$

$$
\Rightarrow \quad \Phi_1 = \Phi_0 - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}
$$

Eine ungeladene Kugel: $Q = 0 \quad \rightarrow \Phi_1 = \Phi_0$

$$
\rightarrow \boxed{\Phi(r,\theta) = \Phi_0 - E_0 r\cos\theta + E_0\frac{R^3}{r^2}\cos\theta}
$$

Lösung für $m \neq 0$ (Potenzreihenansatz)

$\rightarrow$ Zugeordnete Legendre-Polynome

$$
P_l^m(x) \qquad x = \cos\theta
$$

- Allgemeine Struktur:

$$
P_l^m \sim (1-x^2)^{|m|/2} \times \text{ Polynom } (l-|m|)\text{ten Grades}
$$

Zusammenfassung der Funktionen:

$$
P, \theta \text{ in Produkt: } P_l^m(\cos\theta) Q_m(\varphi)
$$

⇒ **Kugelflächenfunktionen**

$$\mathcal{Y}_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

$$l = 0,1,2,\dots \qquad m = 0,\pm1,\pm2,\dots,\pm l \qquad \theta\in[0,\pi] \qquad \varphi\in[0,2\pi]$$

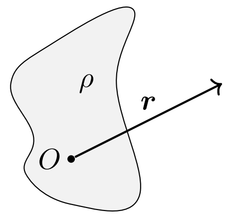
Allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten:

$$\boxed{\Phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(a_{lm}r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}}\right)\mathcal{Y}_{lm}(\theta,\varphi)}$$

$\Delta\Phi = 0$

1.7 Multipolentwicklung

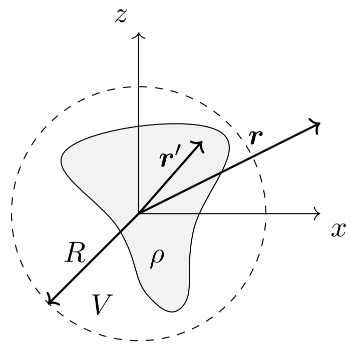
Beliebige endlich große Ladungsverteilung



$$q = \int \mathrm{d}^3r'\rho(\boldsymbol{r}')$$

$$\boldsymbol{r} \gg R \qquad \Phi(\boldsymbol{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

statische, lokalisierte Ladungsverteilung:



$$\rho(\boldsymbol{r}) = \begin{cases}\text{beliebig} & r < R\\ 0 & r > R\end{cases}$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \mathrm{d}^3r'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

Für $r > R:\ |\boldsymbol{r}'| < |\boldsymbol{r}| \to$ Taylorentwicklung von $\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ in $\boldsymbol{r}' \to$ d.h. in x_1', x_2', x_3'

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(x_1-x_1'^2)+(x_2-x_2'^2)+(x_3-x_3'^2)}} \qquad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Taylorentwicklung:

$$f(\boldsymbol{r}') = f(x_1',x_2',x_3') = f(0,0,0) + \sum_{i=1}^{3}x_i'\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}x_i'x_j'\frac{\partial^2 f}{\partial x_i'\partial x_j'}(0) + \dots$$

Zuerst berechnen wir die einzelnen Terme:

$$f(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}:\ f(0) = \frac{1}{r} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i'} = \left.\frac{(x_i-x_i')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\right|_0 = \frac{x_i}{r^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i'\partial x_j'}(0) = \dots = \frac{3x_ix_j - r^2\delta_{ij}}{r^5}$$

Für $|\boldsymbol{r}| < |\boldsymbol{r}'|$:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r\rho(\boldsymbol{r}')\left\{\frac{1}{r} + \sum_{i=1}^{3}\frac{x_i'x_i}{r^3} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}x_i'x_j'\frac{3x_ix_j - r^2\delta_{ij}}{r^5} + \dots\right\}$$

Den letzten (mit einem Pfeil markierten) Term schauen wir uns jetzt noch einmal genauer an.

$$\sum_{i,j} x_i' x_j' r^2 \delta_{ij} = r^2 \underbrace{\sum_i x_i'^2}_{=r'^2} = r^2 r'^2 = r'^2 \sum_i x_i^2 = \sum_{i,j} r'^2 x_i x_j \delta_{ij}$$

Somit können wir den letzten Term umschreiben als:

$$\sum_{i,j} x_i' x_j' \frac{(3x_i x_j - r^2 \delta_{ij})}{r^5} = \sum_{i,j} x_i x_j \frac{(3x_i' x_j' - r'^3 \delta_{ij})}{r^5}$$

Das Potential unserer Ladungsverteilung im externen $\boldsymbol{E}$-Feld ergibt sich dann als

$$\varPhi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r' \rho(\boldsymbol{r}')}_{\substack{q \text{ Gesamtladung} \\ \text{(Monopol)}}} + \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i}{r^3} \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r' x_i' \rho(\boldsymbol{r}')}_{\substack{p_i \text{ Dipolmoment} \\ \boldsymbol{p}=(p_1,p_2,p_3)}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{x_i x_j}{r^5} \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r' \rho(\boldsymbol{r}')(3x_i' x_j' - r'^2 \delta_{ij})}_{=:\ Q_{ij} \text{ Quadrupolmoment}} + \dots \right\}$$

$$\Rightarrow \varPhi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{q}{r} + \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij} + \dots \right\}$$

Diskussion:

i) **Monopol**

$$\varPhi_M(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \qquad \propto \frac{1}{r} \text{ dominiert für } q \neq 0$$

$$\to \boldsymbol{E}_M(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\varPhi_M = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad \propto \frac{1}{r^2}$$

ii) **Dipol**

$$\varPhi_D(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}}{r^3} \qquad \propto \frac{1}{r^2}$$

Das elektrische Feld:

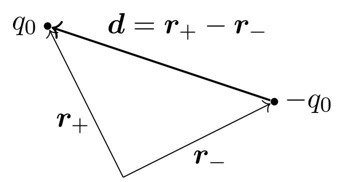
$$\boldsymbol{E}_D = -\boldsymbol{\nabla}\varPhi_D$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}} \left(\boldsymbol{p} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \right) :\ \frac{\partial}{\partial x} \left(p_x \frac{x}{r^3} + p_y \frac{y}{r^3} + p_z \frac{z}{r^3} \right) &= \left(\frac{p}{r^3} - 3p_x \frac{xx}{r^5} - 3p_y \frac{yx}{r^5} - 3p_z \frac{zx}{r^5} \right) \\
&= \frac{p_x}{r^3} - 3 \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^5} x \\
\frac{\partial}{\partial y} (\dots) &= \frac{p_y}{r^3} - 3 \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^5} y \\
\frac{\partial}{\partial z} (\dots) &= \frac{p_z}{r^3} - 3 \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^5} z
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}} \left(\boldsymbol{p} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^5} \right) = \frac{\boldsymbol{p}}{r^3} - 3 \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^5} \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{E}_D = -\boldsymbol{\nabla}\varPhi_D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^4} \right] \qquad \propto \frac{1}{r^3} \quad \boldsymbol{r} \neq 0$$

Beispiel für die Realisierung eines Dipols:
Punktladungen: $q_0, -q_0$ in $\boldsymbol{r}_+, \boldsymbol{r}_-$
Gesamtladung: $q = q_0 - q_0 = 0$



$$\to \varPhi_M(\boldsymbol{r}) \equiv 0$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_+|} - \frac{q_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}}{r^3} + \dots\right)$$

$$\rho(\boldsymbol{r}') = q_0\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_+) - q_0\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_-)$$

$$\boxed{\boldsymbol{p} = \int \mathrm{d}^3r'\rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}' = q_0\boldsymbol{r}_+ - q_0\boldsymbol{r}_- = q_0\boldsymbol{d}}$$

mehrere Punktladungen q_i in $\boldsymbol{r}_i$

$$\rightarrow \boldsymbol{p} = \sum_i q_i\boldsymbol{r}_i$$

iii) **Quadrupolmoment**

$$Q_{ij} = \int \mathrm{d}^3r'\rho(\boldsymbol{r}')(3x_i'x_j' - r'^3\delta_{ij})$$

Quadrupoltensor $Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}$

Eigenschaften

i) Spurfrei: $\mathrm{tr}(Q) = \sum_i Q_{ij} = 0 \quad \Rightarrow$ 2 unabhängige Elemente

ii) Symmetrisch: $Q_{ij} = Q_{ji} \quad \Rightarrow$ 3 unabhängige Elemente

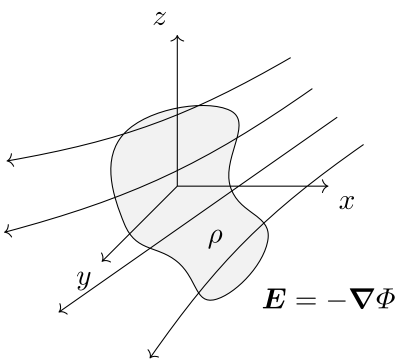
$\Rightarrow$ 5 unabhängige Elemente

Ableitung in Kugelkoordinaten
$\Rightarrow$ Sphärische Multipolmomente

1.7.1 Multipolentwicklung der Energie der Ladungsverteilung im äußeren Feld

Energie:

$$W = \int \mathrm{d}^3r\rho(\boldsymbol{r})\Phi(\boldsymbol{r}) \tag{1.1}$$



Wir stellen uns vor, das $\boldsymbol{E}$-Feld wird von sehr weit entfernten Ladungen erzeugt. Wir machen somit also die Annahme, dass sich $\Phi(\boldsymbol{r})$ in dem Gebiet,wo $\rho(\boldsymbol{r})$ sich nur wenig ändert.

$\rightarrow$ Taylorentwicklung von $\Phi(\boldsymbol{r})$ um $\boldsymbol{r} = 0$

$$\begin{aligned}\Phi(\boldsymbol{r}) &= \Phi(0) + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi(0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} x_ix_j\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}(0) + \dots \\ &= \Phi(0) - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}(0) - \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j} x_ix_j\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0)}_{} + \dots \\ &\qquad\qquad = \frac{1}{6}\sum_{i,j}(3x_ix_j - r^2\delta_{ij})\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0)\end{aligned}$$

Dies gilt, da:

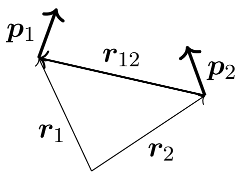
$$\sum_{i,j} r^2 \delta_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) = r^2 \underbrace{\sum_i \frac{\partial E_i}{\partial x_i}(0)}_{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(0)=0}$$

$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0$ gilt, da $\boldsymbol{E}$ ein äußeres Feld ist. Damit erhalten wir dann für die Energie mit Formel (1.1):

$$\rightarrow W = \Phi(0) \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r \rho(\boldsymbol{r})}_{=q} - \boldsymbol{E}(0) \cdot \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r \boldsymbol{r} \rho(\boldsymbol{r})}_{=\boldsymbol{p}} - \frac{1}{6} \sum_{i,j} \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r (3 x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(\boldsymbol{r})}_{=Q_{ij}} + \dots$$

$$= \underset{\substack{\nearrow \\ \text{Ladung}}}{q} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Potential}}}{\Phi(0)} \quad - \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dipol}}}{\boldsymbol{p}} \cdot \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{Feld}}}{\boldsymbol{E}(0)} \quad - \quad \frac{1}{6} \sum_{i,j} \underset{\substack{\nearrow \\ \text{Quadrupol}}}{Q_{ij}} \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{Feldgradient}}}{\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0)} + \dots$$

Wechselwirkungsenergie zweier Dipole



Betrachte 2 Punktdipole $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ in $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$
$\boldsymbol{p}_2$ erzeugt am Ort $\boldsymbol{r}_1$ das äußereFeld

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{3(\boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{r}_{12})\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^5} - \frac{\boldsymbol{p}_2}{r_{12}^3} \right]$$

$$\rightarrow W = -\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2}{r_{12}^3} - \frac{3(\boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{r}_{12})(\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{r}_{12})}{r_{15}^5} \right] \qquad \propto \frac{1}{r_{12}^3}$$

Je nach Orientierung der Dipole ist diese Wechselwirkung anziehend oder abstoßend.
z.B.: $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \perp \boldsymbol{r}_{12}$

$$\rightarrow W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2}{r_{12}^3} \begin{cases} > 0 & \uparrow\uparrow \qquad \text{abstoßend} \\ < 0 & \uparrow\downarrow \qquad \text{anziehend} \end{cases}$$

1.8 Elektrostatik in Materie-Dielektrika

Definition: Dielektrika
Nichtleitende Substanzen (Gase, Flüssigkeiten, Festkörper). Die Ladungsträger sind also fest gebunden.

äußere Felder $\Rightarrow$ Polarisation

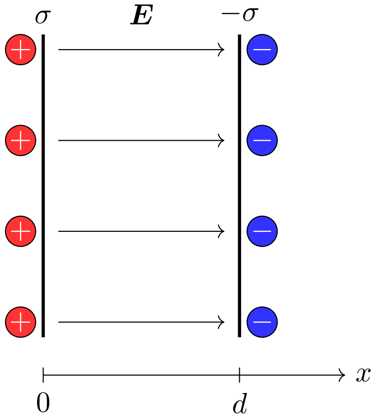
Mehanismen

i) **Verschiebungspolarisation** (Deformationspolarisation)
neutrales Atom

ii) **Orientierungspolarisation**
Molekül mit permanentem Dipolmoment z.B. Wasser

Phänomenologie: Experimentalphysik
Plattenkondensator:

ohne Medium:



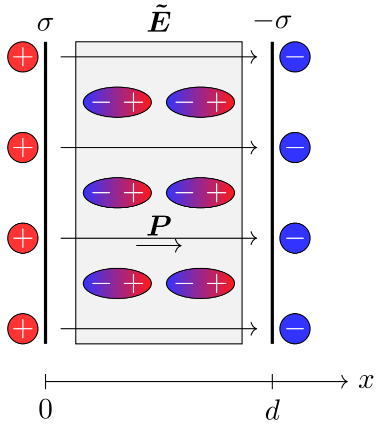
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 F}$$

$$\Phi = -\frac{\sigma x}{\varepsilon_0}$$

$$U = \frac{qd}{\varepsilon_0 F}$$

$$C = \frac{q}{U} = \varepsilon_0 \frac{F}{d}$$

mit Medium:



$$\tilde{C} > C \qquad \tilde{C} = \varepsilon \frac{F}{d} \qquad \varepsilon > \varepsilon_0$$

$$q = \text{const.}$$

$$\tilde{U} = \frac{qd}{\varepsilon F} < U$$

$$\tilde{E} = \frac{q}{\varepsilon F} = \frac{\sigma}{\varepsilon} < E$$

$$\tilde{E} = E + E_p = E - \frac{1}{\varepsilon_0} P$$

1.8.1 Makroskopische Feldgleichungen der Elektrostatik

Ausgangspunkt: allgemeine (mikroskopische) Feldgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} &= \tfrac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} &= 0 \end{aligned}\right\} \underset{\text{bekannt}}{\xrightarrow{\rho}} \quad \begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\boldsymbol{r}') \tfrac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \\ \Phi(\boldsymbol{r}) &= \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \tfrac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \end{aligned}$$

Makroskopische Messungen: $\approx 10^{23}$ Teilchen
$\rightarrow$ Mittlung über mikroskopische Details.

1.8.2 Mittelung von Funktionen

Wir haben eine physikalische Größe $A(\boldsymbol{r})$ und wollen diese Mitteln.

$$\begin{aligned} \langle A \rangle(\boldsymbol{r}) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r' f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') A(\boldsymbol{r}') \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r' f(\boldsymbol{r}') A(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \end{aligned}$$

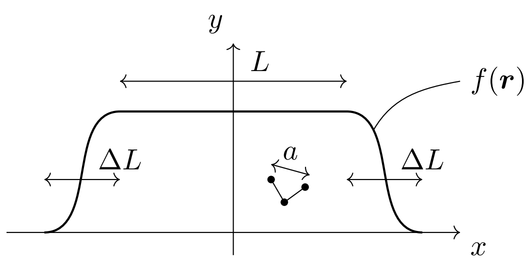
f : legt Bereich fest, über den gemittelt wird

Eigenschaften:

i) $\int \mathrm{d}^3 r' f(\boldsymbol{r}') = 1$

ii) $f(\boldsymbol{r}) \geq 0$

iii) Eine glatte Funktion, die sich auf molekularer Skala (nm) wenig ändert.



mit $L, \Delta L \gg a$

Wir schauen uns nun an wie die Ableitung einer gemittelten Funktion aussieht.

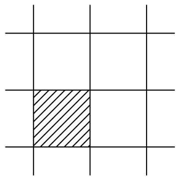
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\langle A\rangle(\boldsymbol{r}) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\int \mathrm{d}^3r' f(\boldsymbol{r}')A(\underset{\downarrow}{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r}') \\
&= \int \mathrm{d}^3r' f(\boldsymbol{r}')\frac{\partial A}{\partial x_i}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\
&= \langle\frac{\partial A}{\partial x_i}\rangle(\boldsymbol{r})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad &\Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\langle\boldsymbol{E}\rangle = \frac{1}{\varepsilon_0}\langle\rho\rangle \\
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}\times\langle\boldsymbol{E}\rangle = 0
\end{aligned}
$$

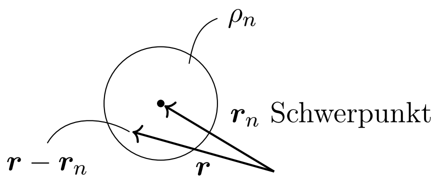
$$
\rightarrow \quad \langle\boldsymbol{E}\rangle = -\boldsymbol{\nabla}\langle\Phi\rangle
$$

1.8.3 Bestimmung von $\langle\boldsymbol{\rho}\rangle$

Aufteilung der Materie in Untereinheiten:
Festkörper:
Elementarzellen:



Gas:
Moleküle



ρ_n : Ladungsdichte des n-ten Moleküls bzgl. des Schwerpunktes $\boldsymbol{r}_n$. Die gesamte Ladungsdichte ist somit:

$$
\rho_g(\boldsymbol{r}) = \sum_n \rho_n(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n)
$$

$\rho_g(\boldsymbol{r})$ sind hierbei alle gebundenen Ladungen.
Zusätzlich gibt es möglicherweise freie Ladungsträger $\rho_f(\boldsymbol{r})$
$\Rightarrow$ gesamte Ladungsdichte

$$
\rho(\boldsymbol{r}) = \rho_f(\boldsymbol{r}) + \rho_g(\boldsymbol{r})
$$

Mittlung von ρ_g über einen makroskopisch kleinen aber mikroskopisch großen Bereich:

$$
\begin{aligned}
\langle\rho_g\rangle(\boldsymbol{r}) &= \int \mathrm{d}^3r' f(\boldsymbol{r}')\rho_g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\
&= \int \mathrm{d}^3r' f(\boldsymbol{r})\sum_n \rho_n(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_n) \\
&= \sum_n \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3r' f(\boldsymbol{r}')\rho_n(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_n)
\end{aligned}
$$

Nun Betrachten wir den letzten Term:

$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^3r' f(\boldsymbol{r}')\rho_n(\underbrace{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_n}_{=\tilde{\boldsymbol{r}}}) \\
&= \int \mathrm{d}^3r' \underbrace{f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n-\tilde{\boldsymbol{r}})}_{\substack{\text{ändert sich}\\ \text{wenig auf}\\ \text{mol. Skala}}} \qquad \underbrace{\rho_n(\tilde{\boldsymbol{r}})}_{\substack{\text{lokalisiert auf}\\ \text{molekularer Skala a}\\ \rho_n(\tilde{\boldsymbol{r}})\approx 0 \text{für} |\tilde{\boldsymbol{r}}|\gg a}}
\end{aligned}
$$

Taylorentwicklung in $\tilde{\boldsymbol{r}}$: $f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n-\tilde{\boldsymbol{r}}) = f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n) - \tilde{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n) + \dots$

$$
= f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n)\underbrace{\int \mathrm{d}^3\tilde{r}\rho_n(\tilde{\boldsymbol{r}})}_{=q_n} - \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n)\cdot \underbrace{\int \mathrm{d}^3r'\tilde{r}\tilde{\boldsymbol{r}}\rho_n(\tilde{\boldsymbol{r}})}_{=\boldsymbol{p}_m \text{Dipolmoment}} + \dots
$$

Höhere Terme werden vernachlässigen z.B. das Quadrupolmoment.

$$
\begin{aligned}
&= f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n)q_n - \underbrace{\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n)\cdot\boldsymbol{p}_m}_{=\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{p}_n f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n))} + \dots \\
&= \int \mathrm{d}^3r' q_n\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_n) f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - \boldsymbol{\nabla}\cdot\int \mathrm{d}^3r'\boldsymbol{p}_n\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_n) f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \dots \\
&= \underset{\substack{\Downarrow\\ \text{Gesamtladung im SP}}}{\langle q_n\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_n)\rangle(\boldsymbol{r})} - \boldsymbol{\nabla}\cdot \underset{\substack{\Downarrow\\ \text{Dipolmoment im SP}}}{\langle\boldsymbol{p}_n\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_n)\rangle(\boldsymbol{r})} + \dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle\rho_g\rangle &= \sum_n \int \dots \\
&= \langle\sum_n q_n\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_n)\rangle(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{\nabla}\cdot\langle\sum_n \boldsymbol{p}_n\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_n)\rangle(\boldsymbol{r}) + \dots
\end{aligned}
$$

Der **erste Term** steht für die mittlere Gesamtladung der gegebenen Ladungen = 0 für:

i) neutrale Untereinheiten

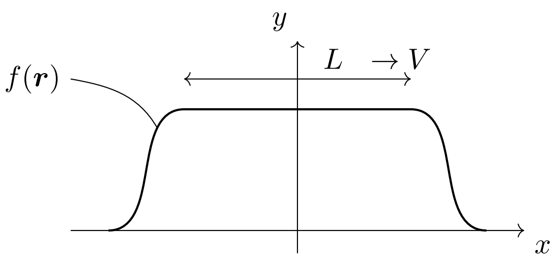
ii) makroskopisch neutraler Körper

Der **zweite Term** wird Definiert als das makroskopische Dipolmoment $=: \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \frac{\text{Dipolmoment}}{\text{Volumen}}$

$$
\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \sum_n \boldsymbol{p}_n \int \mathrm{d}^3r'\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_n) f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{1.2}
$$

$$
= \sum_n \boldsymbol{p}_n f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n) \approx \frac{1}{V}\sum_{m,\boldsymbol{r}_n\in V}\boldsymbol{p}_n \tag{1.3}
$$

$$
f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n) \approx \begin{cases} \frac{1}{V} & |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n| \le L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
$$



→ gemittelte (makroskopische) Ladungsdichte:

$$
\langle\rho\rangle(\boldsymbol{r}) = \langle\rho_f\rangle(\boldsymbol{r}) + \underbrace{\langle\sum_n q_n\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_n)\rangle(\boldsymbol{r})}_{\substack{\text{Gesamtladung}\\ \text{oft }=0}} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P} + \dots
$$

Gemittelte makroskopische Ladungsverteilung

$$\langle\rho\rangle(\boldsymbol{r}) = \langle\rho_f\rangle(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) + \dots$$

Daraus folgt:

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\langle\boldsymbol{E}\rangle(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\langle\rho\rangle(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\langle\rho_f\rangle(\boldsymbol{r}) - \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) + \dots$$

Dies können wir umformen in etwas, das der Maxwellgleichung ähnelt:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\underbrace{(\varepsilon_0\langle\boldsymbol{E}\rangle + \boldsymbol{P} + \dots)}_{:=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})} = \langle\rho_f\rangle(\boldsymbol{r})$$

$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) :=$ dielektrische Verschiebung.

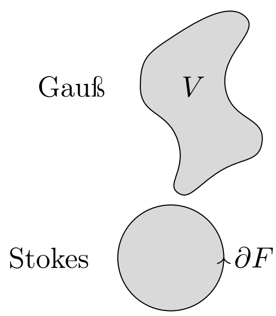
$$\rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \langle\rho_f\rangle(\boldsymbol{r})$$

1.8.4 Makroskopische Feldgleichungen der Elektrostatik (Wiederholung)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \rho_f(\boldsymbol{r})$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$$
$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} + \dots$$

Diese Gleichungen können wir nun mit dem Satz von Gauß und dem Satz von Stokes auch in Integraler Form schreiben:

$$\int_{\partial V} d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D} = \int \mathrm{d}^3 r\,\rho_f(\boldsymbol{r}) = q_{f_V}$$
$$\oint_{\partial F} d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = 0$$



Wiederholung

Makroskopische Feldgleichungen der Elektrostatik

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad \langle E\rangle(\boldsymbol{r})$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \rho_f(\boldsymbol{r})$$
$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

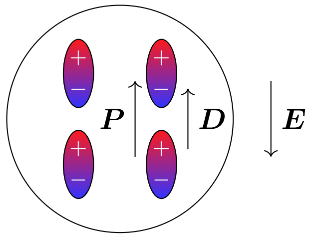
Wir haben hier jetzt zwei Feldgleichungen für zwei Vektorfelder. Dies reicht nicht aus um beide Vektorfelder eindeutig zu bestimmen. Hierfür müssen wir die Wirbel und Quellen beider Felder beschreiben. $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{D}$ sind also nicht unabhängig sondern miteinander verknüpft.

Bem: (Schlussfolgerungen aus den Feldgleichungen der Elektrostatik)

i) Es sieht so aus als ob $\boldsymbol{D}$ nur von der freien Ladungsdichte abhängt, dies ist aber nur in manchen fällen so (Plattenkondensator).

Es gilt nur wenn $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{D} = 0$

Gegenbeispiel: homogen polarisierte Kugel:



$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{P} \qquad \text{in der Kugel}$$

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \frac{2}{3}\boldsymbol{P}$$

ii)

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{P})$$

$\boldsymbol{E}$ hängt über die Polarisation direkt von dem Medium ab.

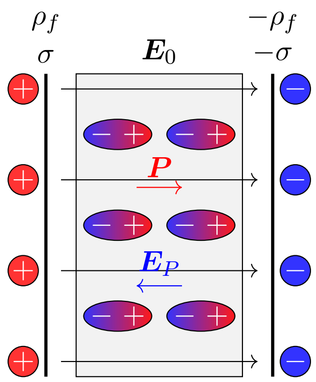
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} - \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_f - \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P} \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Polarisationsladungsdichte $\rho_p = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P}$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f + \rho_p)$$

iii) Die Polarisation wirkt wie ein inneres Zusatzfeld, das sich mit dem durch ρ_f erzeugten Feld $\boldsymbol{E}_0$ überlagert. $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_p$

Im Plattenkondensator:



$$\boldsymbol{E}_p = -\frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 - \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{P}$$

iv) Potential

$$\boldsymbol{\nabla} \times \langle \boldsymbol{E} \rangle = 0$$

$$\langle \boldsymbol{E} \rangle = -\boldsymbol{\nabla}\langle \Phi \rangle$$

Einfach aber zu viel Zeitaufwand für die Vorlesung

$$\begin{aligned} \langle \Phi \rangle &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r' \frac{\langle \rho \rangle(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r' \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\left(\rho_f(\boldsymbol{r}') - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}' + \dots\right) \end{aligned}$$

v) **Zusammenhang zwischen $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{E}$: Suszeptibilität**

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}) \qquad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{E} = 0) = 0$$

Entwicklung von $\boldsymbol{P}$ in Potenzen von $\boldsymbol{E}$:

$$P_i = \sum_{j=1}^{3} \gamma_{ij} E_j + \sum_{j,k=1}^{3} \beta_{ijk} E_j E_k + \dots$$

γ_{ij} & β_{ijk} sind Materialkonstanten
lineare Näherung:
allgemeines **anisotropes** Dielektrikum

$$P_i = \sum_j \gamma_{ij} E_j$$

isotropes Dielektrikum:

$$P_i = \gamma E_i$$

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \qquad \chi_e \varepsilon_0 = \gamma$$

χ_e ist die **Dielektrische Suszeptibilität**

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \boldsymbol{D} &= \boldsymbol{P} + \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = (\chi_e \varepsilon_0 + \varepsilon_0) \boldsymbol{E} \\ &= \underbrace{(1 + \chi_e)}_{:=\varepsilon_r} \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \\ &= \varepsilon \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E} \end{aligned}$$

ε_r ist die relative Dielektrizitätskonstante
$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ ist die Dielektrizitätskonstante

$$\boxed{\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E}}$$

Typische Werte für ε_r:

Medium	ε_r
Vakuum:	$\varepsilon_r = 1$
H_2:	1,00025
N_2:	1,00055
H_2O:	80,1

1.8.5 Feldgleichungen für lineares, isotropes Dielektrikum

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f$$

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\varepsilon \boldsymbol{E}) &= \rho_f \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} &= 0 \end{aligned}}$$

homogenes Medium $\varepsilon = \text{const.}$

$$\varepsilon \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \rho_f$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 \rho_f} = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_r}}_{\text{Medium}} \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_f$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$$

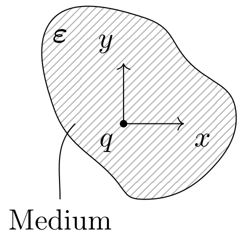
$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \rho_f \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \Delta \Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{1}{\varepsilon_r} \rho_f$$

$$\uparrow$$

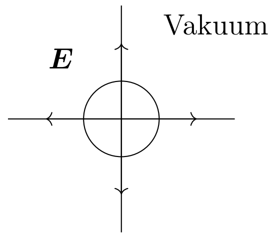
1.8.6 Punktladung in homogenem Dielektrikum (lineare Näherung)

$$\begin{aligned}
\rho_f(\boldsymbol{r}) &= q\delta(\boldsymbol{r}) \\
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{\varepsilon} q\delta(\boldsymbol{r}) \\
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= 0
\end{aligned}$$



Nun können wir das $\boldsymbol{E}$-Feld im Vakuum bestimmen:

$$\begin{aligned}
\rightarrow \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} q \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \\
&= \frac{1}{\varepsilon_r} \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}}_{=\boldsymbol{E}_{\text{vak}}} \\
&= \frac{1}{\varepsilon_r} \boldsymbol{E}_{\text{vak}}(\boldsymbol{r}) < \boldsymbol{E}_{\text{vak}}(\boldsymbol{r})
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\rightarrow \quad \boldsymbol{P} &= \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \\
&= \frac{(\varepsilon_r - 1)}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\text{vak}} - \frac{1}{\varepsilon_0} \boldsymbol{P}}$$

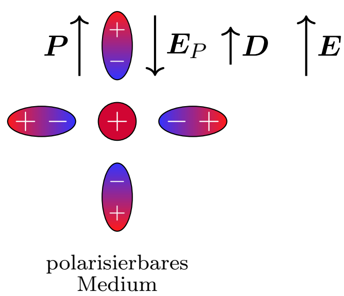
Hier erkennt man explizit, dass das Vakuum-Feld von der Polarisation vermindert wird.

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi} q \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

In diesem einfachen Fall ist $\boldsymbol{D}$ vollständig durch die freie Ladung q (in der Abbildung Positiv) bestimmt.

1.8.7 Zusammenhang zwischen atomarer/molekularer Polarisierbarkeit und Suszeptibilitäten

Verschiebungspolarisation:



$$\boldsymbol{p} = \alpha \boldsymbol{E}_{\text{lokal}}$$

$\Rightarrow$ Polarisation:

$$\boldsymbol{P} = n\boldsymbol{p} = n\alpha \boldsymbol{E}_{\text{lok}}$$

n ist die Teilchenzahldichte.
Aus den makroskopischen Gleichungen haben wir erhalten:

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \varepsilon_0 \underset{\substack{\| \\ \text{makroskopisches} \\ \text{Feld}}}{\boldsymbol{E}}$$

In einem verdünnten Gas gilt: $\boldsymbol{E}_{\text{lok}} \approx \boldsymbol{E}$

$$\Rightarrow \quad \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = n\alpha \boldsymbol{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\chi_e = \frac{n\alpha}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\varepsilon_r = 1 + \frac{n\alpha}{\varepsilon_0}}$$

1.8.8 Randwertprobleme

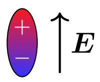
$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f$$
$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{E})$$

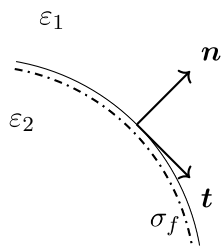
lineares homogenes Dielektrikum

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon}\rho_f \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$$
$$\Delta\Phi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho_f$$

→ **Randwertproblem:**
Gegeben: ρ_f, ε Randbedingungen
Gesucht: $\Phi, \boldsymbol{E}$

1.8.9 Randbedingungen für $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ an einer Grenzschicht mit Flächenladung





Erinnerung: mikroskopische Feldgleichungen

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$
$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t}(\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0$$

für makroskopische Feldgleichungen:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \sigma_f$$
$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0$$

speziell lineare, homogene Dielektrika ($\varepsilon_1 = \text{const.}, \varepsilon_2 = \text{const.}$):

$$\boldsymbol{D}_i = \varepsilon_i \boldsymbol{E}_i \qquad i = 1, 2$$
$$\boldsymbol{n} \cdot (\varepsilon_1 \boldsymbol{E}_1 - \varepsilon_2 \boldsymbol{E}_2) = \sigma_f$$

Falls $\sigma_f = 0$ (es gibt also **keine** Ladung an der Oberfläche);

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{n}\boldsymbol{E}_1 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\boldsymbol{n}\boldsymbol{E}_2$$

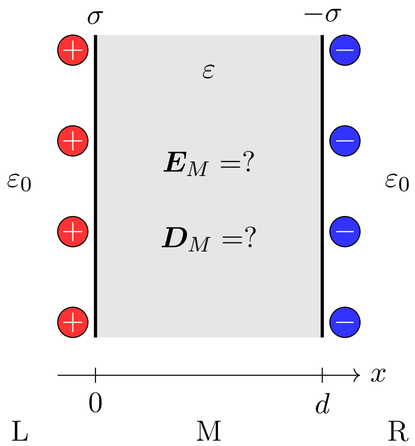
Das heißt, das $\boldsymbol{E}$-Feld ist unstetig wenn $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ (aufgrund der **Polarisationsladung**).

Wiederholung

zu **Randbedingunen für $\boldsymbol{D}$ und $\boldsymbol{E}$ an Grenzflächen mit Flächenladung**

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \sigma_f$$
$$\boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0$$

Beispiel: **Plattenkondensator mit Dielektrikum**



$$\boldsymbol{E}_{L/R} = 0 \qquad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \quad \to \quad \boldsymbol{D}_{L/R} = 0$$
$$\boldsymbol{E}_M = E_x \boldsymbol{e}_x \qquad \boldsymbol{D}_M = D_x \boldsymbol{e}_x \qquad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_x$$

Für den linken Bereich gilt (analog auch rechts):

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D}_M - \underset{\underset{0}{\parallel}}{\boldsymbol{D}_L}) = \sigma = \frac{q}{F}$$

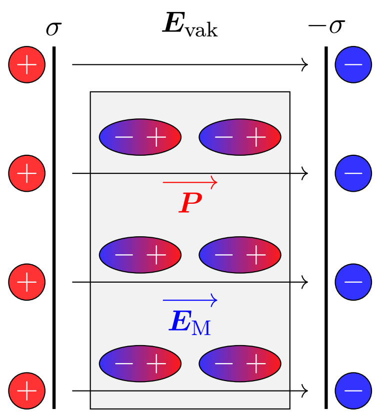
Für den mittleren Bereich:

$$\frac{\mathrm{d}D_x}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D}_m = 0$$
$$\to \boldsymbol{D}_M = \sigma \boldsymbol{e}_x$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_M &= \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{D}_M = \frac{\sigma}{\varepsilon}\boldsymbol{e}_x \\ &= \frac{1}{\varepsilon_r}\underbrace{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x}_{\boldsymbol{E}_{\text{vak}}} = \frac{1}{\varepsilon_r}\boldsymbol{E}_{M_{\text{vak}}} \leq \boldsymbol{E}_{M_{\text{vak}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} &= \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \\ &= \begin{cases} 0 & L/R \\ \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma \boldsymbol{e}_x & M \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \boldsymbol{E}_M = \boldsymbol{E}_{\text{vak}} - \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{P}}$$



Spannung und Kapazität

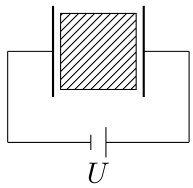
$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \Phi \qquad \Phi(x) = -\frac{\sigma}{\varepsilon}x$$

$$U = \Phi(0) - \Phi(d) = \frac{\sigma d}{\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon F}d = \frac{1}{\varepsilon_r}\underbrace{\frac{q}{\varepsilon_0 F}d}_{U_{\text{vak}}} \leq U_{\text{vak}}$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon F}{d} = \varepsilon_r \underbrace{\frac{\varepsilon_0 F}{d}}_{C_{\text{vak}}} \geq C_{\text{vak}}$$

Dies gilt für den Fall eines Kondensators mit **fester Ladung** aud den Platten.

anderes Szenario: feste Spannung



$$U = \frac{\sigma}{\varepsilon} d \overset{!}{=} U_{\text{vak}} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} d$$

$$\rightarrow \quad \sigma = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\sigma_0 \geq \sigma_0$$

$$q = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} q_0 \geq q_0$$

Hier muss deshalb Ladung in den Kondensator fließen um das $\boldsymbol{E}$-Feld konstant zu halten. Dadurch steigt die Kapazität.

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon F}{d}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\sigma_0 \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = E_{\text{vak}}$$

$$D = \varepsilon E = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \underbrace{\varepsilon_0 \overset{E_{\text{vak}} \\ \parallel}{E}}_{D_{\text{vak}}} = \varepsilon_r D_{\text{vak}}$$

1.8.10 Elektrostatische Energie in Dielektrika

im Vakuum:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \mathrm{d}^3 r \, (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}))^2$$

(Bei komplexem Feld Betragsquadrat nehmen $|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2$. Dies ist nur ein technischer Trick, das $\boldsymbol{E}$-Felder Reell sind)

makroskopisches Feld in Medien:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathrm{d}^3 r \underset{\varepsilon \boldsymbol{E}}{\underset{\parallel}{\boldsymbol{D}}} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\varepsilon}{2} \int_V \mathrm{d}^3 r \, (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}))^2$$

Plattenkondensator: $C = \frac{\varepsilon F}{d} \quad U = Ed$
Energie:

$$E = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon F}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \overbrace{\varepsilon \boldsymbol{E}}^{\boldsymbol{D}} \cdot \boldsymbol{E} \overbrace{F d}^{V} = \frac{1}{2} \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} \cdot V$$

$\rightarrow$ Energiedichte:

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{2} \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}$$

Kapitel 2

Magnetostatik

Elektrostatik:
ruhende Ladungen $\Rightarrow$ es wirken Zeitunabhängige elektrische Felder $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

Magnetostatik:
magnetische Felder entstehen aus **bewegten Ladungen**
Kraft auf bewegte Ladung:

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

Magnetfelder von Bewegten Ladungen sind zeitlich verändert und daher kompliziert zu beschreiben. Daher verwenden wir hier ersteinmal statische Ströme die konstande Magnetfelder erzeugen.

Magnetostatik:

$$\begin{array}{c}\text{stationäre}\\ \text{Ströme}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c}\text{zeitunabhängige}\\ \text{Magnetfelder}\\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\end{array}$$

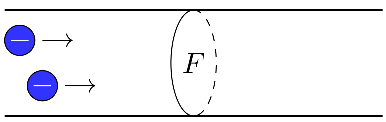
Zunächst müssen wir erst einige Dinge Definieren:

2.1 Strom, Stromdichte und Kontinuitätsgleichung

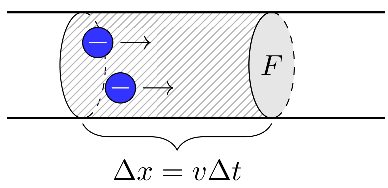
2.1.1 Strom

metallischer Leiter:

$$I = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \qquad [I] = 1\,\text{A} = \text{C s}^{-1}$$



Beispiel: **Stationärer Strom**



Ladungsträger mit:
v : Geschwindigkeit (const.)
n : homogene Dichte
q : Ladung

Leiter mit: F : Querschnittsfläche

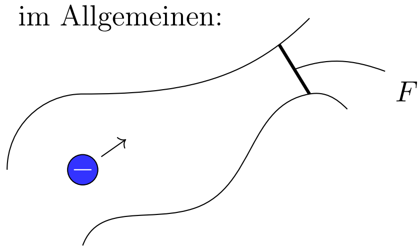
in Δt : $\quad n \cdot F \cdot v \cdot \Delta t$ Ladung durch F

Ladung: $\Delta q = qnFv\Delta t$

Strom: $I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = q \cdot n \cdot v \cdot F$

2.1.2 Stromdichte:

im Allgemeinen:



$$j = \frac{\text{Strom}}{\text{Fläche}} = \frac{I}{F}$$

Beispiel: $j = q \cdot n \cdot v$
Die Stromdichte soll eine vektorielle Größe sein um die Richtung des Stromes mit einzubeziehen.

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$$

$$I = \int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$$

Zusammenhang: $\boldsymbol{j}, \rho, \boldsymbol{r}$:

Beispiel: $j = \underbrace{q \cdot n}_{\rho} \cdot v$

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = \rho(\boldsymbol{r}, t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$$

Stromdichte von Punktladungen

Punktladungen q_i mit Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_i$ und Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i(t)$

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = \sum_i q_i \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i(t))$$

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_i q_i \boldsymbol{r}_i \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i(t))$$

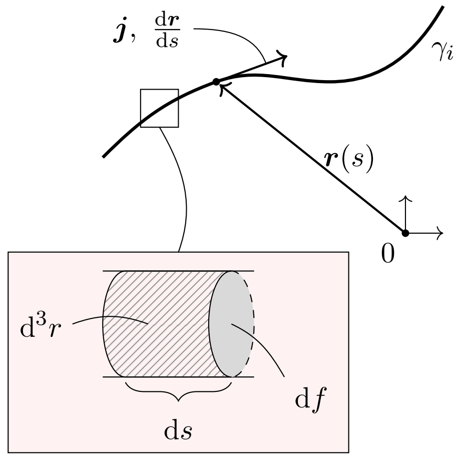
Linienströme

Ströme durch dünne Drähte

$$s \mapsto \boldsymbol{r}(s) \qquad \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{j}|}$$

beliebige Funktion $h(\boldsymbol{r})$.
Es gilt außerdem:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{j}|}\mathrm{d}f \qquad \mathrm{d}f = \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \frac{\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{j}|}$$

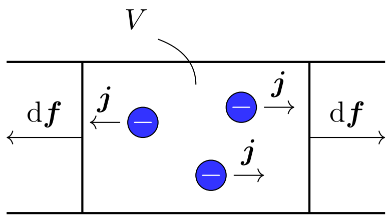


$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^3 r \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) j(\boldsymbol{r}) \\
&= \int \mathrm{d}s \mathrm{d}f \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) h(\boldsymbol{r}) \\
&= \int \mathrm{d}s \mathrm{d}\boldsymbol{f} \frac{\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{j}|} \boldsymbol{j} h \\
&= \int_x \underbrace{\mathrm{d}s \frac{\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{j}|}}_{=\mathrm{d}\boldsymbol{r}} h(\boldsymbol{r}) \underbrace{\int \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)}_{=I(\boldsymbol{r},t)} \\
&= \boxed{\int_\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{r} h(\boldsymbol{r}) I(\boldsymbol{r},t) \underset{\substack{\text{falls} \\ I=\text{const.}}}{=} I \int_\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{r} h(\boldsymbol{r})}
\end{aligned}
$$

effektiv gilt also:

$$
\text{„} \boldsymbol{j} \mathrm{d}^3 r = I \mathrm{d}\boldsymbol{r} \text{“}
$$

2.1.3 Kontinuitätsgleichung

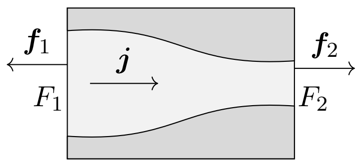


Ladungsdichte: $\rho(\boldsymbol{r},t)$
Ladung in V: $\int_V \mathrm{d}^3 r \rho(\boldsymbol{r},t)$

Strom von Ladungen aus V (durch ∂V):

$$
\int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)
$$

in abgeschlossenen Systemen gilt: Die Ladung ist konstant:



$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \mathrm{d}^3 r \rho(\boldsymbol{r},t) = - \int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) \\
\Rightarrow \quad & 0 = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \mathrm{d}^3 r \rho(\boldsymbol{r},t)}_{=\int_V \mathrm{d}^3 r \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \underbrace{\int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)}_{=\int_V \mathrm{d}^3 r \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}} \\
\Rightarrow \quad & \int_V \mathrm{d}^3 r \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} \right) = 0
\end{aligned}
$$

für beliebige V

Kontinuitätsgleichung

$$
\frac{\partial \rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = 0
$$

2.1.4 Magnetostatik

Stationärer (zeitunabhängigen) Fall

$$
\underline{\rho = \rho(\boldsymbol{F}), \quad \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})}
$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \underbrace{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})}_{\text{Stationäre Ströme}} = 0$$

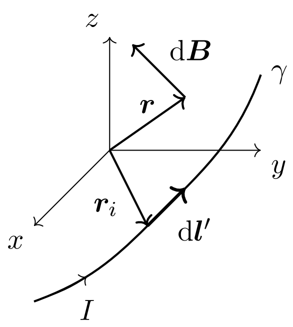
Konsequenz: Durch jeden Querschnitt eines Leiters fließt der selbe Strom.

$$0 = \int_V \mathrm{d}^3 r\, \nabla \cdot \boldsymbol{j} = \int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{j} = \int_{F_1} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{j} + \int_{F_2} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{j} = -I_i + I_2$$

$$\Rightarrow I_1 = I_2$$

2.2 Gesetz von Biot-Savart

stationärer Strom in Leiter $\rightarrow$ Magnetfeld
Das Magnetfeld $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ am Ort $\boldsymbol{r}$ verursacht durch Strom I im Linienelement $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ in $\boldsymbol{r}'$.



$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = k' I \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{B}| \propto I,\ |\mathrm{d}\boldsymbol{l}|,\ \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2}$$

$$\text{Richtung von:} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{B} \propto \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$$

Die Konstante k' im SI-Einheiten-System ist:

$$k' = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

μ_0 ist die magnetische Feldkonstante, die Permeabilität des Vakuums

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{V\ s}}{\mathrm{A\ m}}$$

Sie ist definiert über:

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \qquad c: \text{ Lichtgeschw. in Vakuum}$$

Einheit:

$$[\boldsymbol{B}] = \frac{\mathrm{V\ s}}{\mathrm{m}^2} = 1 \text{ Tesla}$$

Biot-Savart-Gesetz

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{l}' \times \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

Diese Formel gibt das Magnetfeld für einen Stromdurchflossenen dünnen Leiter an.

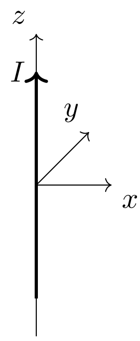
Für eine ausgedehnte Stromdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ gilt:

$$„\mathrm{d}^3 r \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = I \mathrm{d}\boldsymbol{l}“ \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

Ähnlich in der Elektrostatik:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\boldsymbol{r}) \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

Hier ist $\rho(\boldsymbol{r})$ aber ein Skalarfeld. $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ ist ein Vektorfeld! Deshalb ist die Berechnung von Magnetfeldern komplizierter.



Beispiel: Magnetfeld eines langen Drahtes:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = I\delta(x)\delta(y)\boldsymbol{e}_z$$

Setzen wir dies nun ins Biot-Savart-Gesetz ein erhalten wir das $\boldsymbol{B}$-Feld dieses Leiters:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r' I\delta(x')\delta(y')\boldsymbol{e}_z \times \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \\
&\overset{\boldsymbol{r}'=(0,0,z')}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \boldsymbol{e}_z \times \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}
\end{aligned}$$

Nebenrechnung:
$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ hängt nicht von z ab $\rightarrow \boldsymbol{r} = (x, y, 0) \quad \rightarrow \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = (x, y, -z')$
$\boldsymbol{e}_z \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$

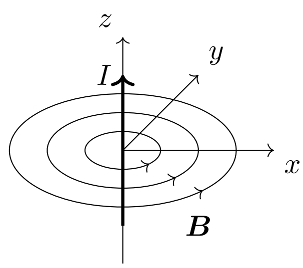
$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \frac{1}{[x^2+y^2+z'^2]^{3/2}} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

In Zylinderkoordinaten:

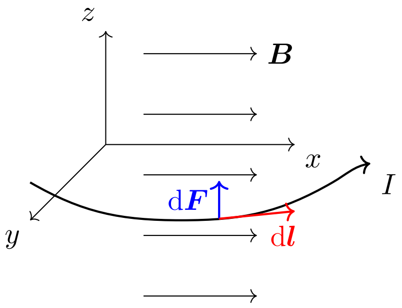
$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad \rho^2 = x^2 + y^2$$

$$\boldsymbol{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\varphi}}{|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\varphi}|} = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_\varphi$$



2.3 Kraft eines äußeren Magnetfeldes auf einen Stromdurchflossenen Leiter

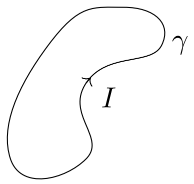


$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$$

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{F}| \propto I,\ |\mathrm{d}\boldsymbol{l}|,\ |\boldsymbol{B}|$$

$$\text{Richtung von:} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{F} \propto \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$$

Damit ist die Kraft auf eine beliebige Leiterschleife:



$$\boldsymbol{F} = I \int_\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$$

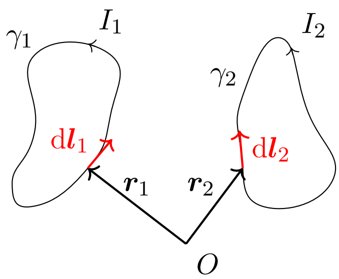
Für eine ausgedehnte Stromverteilung gilt dann:

$$\boldsymbol{F} = \int \mathrm{d}^3r \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$$

2.3.1 Kraft zwischen zwei Stromdurchflossenen Leitern

I_2 erzeugt am Ort $\boldsymbol{r}_1$ das Magnetfeld:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \int_\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \times \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3}$$



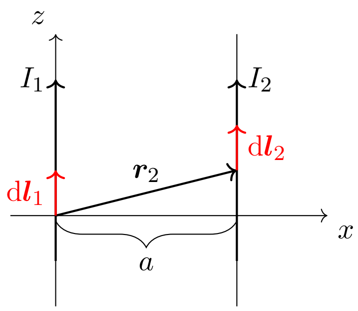
→ Kraft auf Linienelement $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ in $\boldsymbol{r}_1$:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12} &= I_1 \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_1) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \times \int_{\gamma_2} \times \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3}\end{aligned}$$

Die Kraft auf Leiterschleife 1 ist dann:

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \times \left(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \times \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3} \right)$$

Beispiel: **Kraft zwischen zwei parallelen Drähten**



$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I2\, \underset{\substack{\| \\ \boldsymbol{e}_z \mathrm{d}l_1}}{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1} \times \int_\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \times \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3}$$

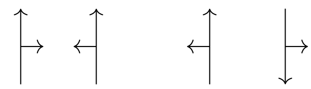
Aus der Skizze gilt:
$\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 = \mathrm{d}z_2 \boldsymbol{e}_z \qquad \boldsymbol{r}_1 = (0, 0, 0) \qquad \boldsymbol{r}_2 = (a, 0, z_2)$

Nebenrechnung:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \times (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = \mathrm{d}z_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -z_2 \end{pmatrix} = \mathrm{d}z_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \quad \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \mathrm{d}l_1 \underbrace{\boldsymbol{e}_z \times \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}}_{=a\boldsymbol{e}_x} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z_2 \frac{1}{\left(a^2 + z_2^2\right)^{3/2}}}_{=\frac{2}{a^2}}$$

Richtung:



Kraft pro Länge:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12}}{\mathrm{d}l_1} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{a} \boldsymbol{e}_x$$

2.4 Feldgleichungen der Magnetostatik und Vektorpotential

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \times \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

2.4.1 Vektorpotential

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \, \underbrace{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times \underbrace{\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}}_{-\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}} \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}}_{\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}} \times \left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)}$$

Mit einer Identität des ersten Übungsblattes:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (f\boldsymbol{G}) = f \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{G} - \boldsymbol{G} \times \boldsymbol{\nabla} f$$

(Die Rotation von $\boldsymbol{G}$ fällt weg, da $\boldsymbol{j}$ nur von $\boldsymbol{r}'$ abhängt.)

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = \boldsymbol{\nabla} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Vektorpotential}}}{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \qquad \leftarrow \boldsymbol{A} \text{ nicht eindeutig festgelegt}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{G} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{G} = 0 \quad \to \quad \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla}\Lambda(\boldsymbol{r}) \\ &\to \quad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{G} = \boldsymbol{B} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} + \boldsymbol{\nabla}\Lambda(\boldsymbol{r}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$$

Transformation: Eichtransformation

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\Lambda$$

Magnetostatik: übliche Wahl: $\Lambda \equiv 0$ ß

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

Eine andere Eichung ist die **Coulomb-Eichung:**

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$$

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r'\, &\underbrace{\nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot \left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)} \\
&= \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \cdot \underbrace{\nabla_{\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}_{-\nabla_{\boldsymbol{r}'}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}} \\
&= -\nabla_{\boldsymbol{r}'} \cdot \left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) + \overbrace{\left(\nabla_{\boldsymbol{r}'} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\right)}^{=0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \\
= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3r' \nabla_{\boldsymbol{r}'} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)& \\
= -\frac{\mu_0}{4\pi}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{K_R(0)} \mathrm{d}^3r' \nabla_{\boldsymbol{r}'} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)& \\
= \frac{\mu_0}{4\pi}\underbrace{\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\partial K_R(0)} \mathrm{d}\boldsymbol{f}' \cdot \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}_{=0} = 0&
\end{aligned}
$$

Beispiel: homogenes Magnetfeld

$$
\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 \qquad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}
$$

$$
\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}
$$

Mit der Identität:

$$
\nabla \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}(\nabla \cdot \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b}
$$

$$
\to \quad \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\nabla \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{r}}_{=3} - \frac{1}{2}\underbrace{(\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{r}}_{=\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{B}
$$

Mit der Identität:

$$
\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{b})
$$

$$
\Rightarrow \quad \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\nabla \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{B} \cdot \underbrace{(\nabla \times \boldsymbol{r})}_{=0} = 0
$$

andere mögliche Wahl:

$$
\boldsymbol{A}' = \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r} + \underbrace{\nabla\frac{r^2}{2}}_{=\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{r}
$$

$$
\nabla \times \boldsymbol{A}' = \underbrace{\nabla \times \boldsymbol{A}}_{=\boldsymbol{B}} + \underbrace{\nabla \times \boldsymbol{r}}_{=0} = \boldsymbol{B}
$$

$$
\boxed{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r' \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})}
$$

2.4.2 Feldgleichungen der Magnetostatik

Divergenz (Quellen)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})) = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0}$$

In der Elektrostatik gilt:

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\boldsymbol{r})}$$

Es gibt also keine „magnetischen Ladungen“ wie beim elektrischen Feld.

integrale Formulierung:

$$0 = \int_V \mathrm{d}^3 r \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{B} = \int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{B}$$

Rotation (Wirbel)

$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} + \boldsymbol{\nabla}\Lambda$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \\ &= \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) - \Delta \boldsymbol{A} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \underbrace{\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right)}_{=0} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\Lambda) = \Delta\Lambda$$

$$\Delta \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \underbrace{\Delta \frac{\Lambda}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}}_{=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} + \Delta \boldsymbol{\nabla} \Lambda = -\mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) + \Delta(\boldsymbol{\nabla}\Lambda)$$

mit: $\Delta \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$

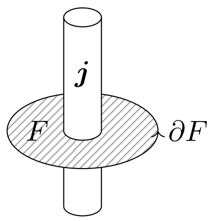
$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \cancel{\boldsymbol{\nabla}(\Delta\Lambda)} + \mu_0 \boldsymbol{j} - \cancel{\Delta(\boldsymbol{\nabla}\Lambda)} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

Kürzbar, da partielle Ableitungen vertauschbar sind.

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}}$$

integrale Formulierung:

$$\int_{\partial F} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) = \mu_0 \underbrace{\int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})}_{I_F} = \mu_0 I_F$$

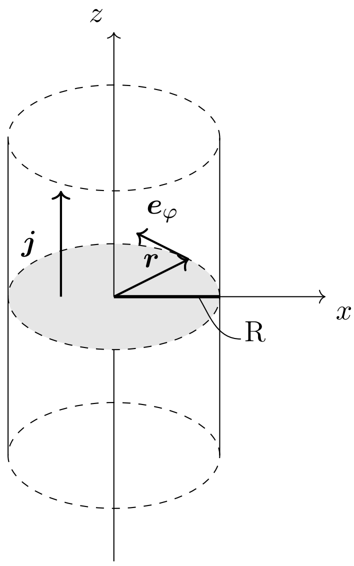


Amperèsches Durchflutungsgesetz

$$\Rightarrow \quad \oint_{\partial F} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 I_F$$

Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters mit homogener Stromdichte

Aufgrund der Symmetrie verwenden wir Zylinderkoordinaten:



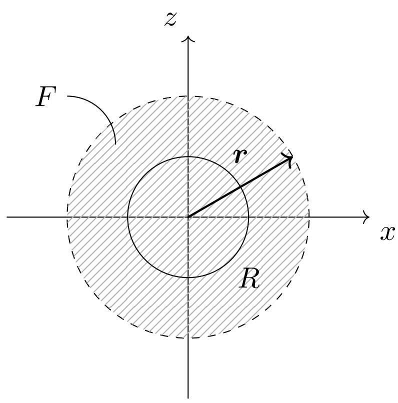
$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Die Stromdichte ist dann:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{j} &= \boldsymbol{e}_z \begin{cases} \frac{I}{\pi R^2} & \rho \le R \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\ &= \boldsymbol{e}_z \frac{I}{\pi R^2}\theta(R-\rho) \end{aligned}$$

Symmetrie:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = B_\varphi(\rho)\boldsymbol{e}_\varphi \qquad \boldsymbol{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$



F ist ein Kreis mit Radius ρ (kleiner oder größer als R)
Hierauf wenden wir das Ampèresche Durchflutungsgesetz an:
Unter Verwendung von:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{e}_z \mathrm{d}f = \boldsymbol{e}_z = \rho' \mathrm{d}\rho' \mathrm{d}\varphi'$$

$$\begin{aligned} \mu_0 \int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f}' \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') = \int_{\partial F} \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}') \\ &= \mu_0 \int_0^\rho \mathrm{d}\rho' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varpi' \rho' \frac{I}{\pi R^2}\theta(R-\rho) \\ &= \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} 2\pi \underbrace{\int_0^\rho \mathrm{d}\rho' \rho' \theta(R-\rho)}_{} \\ &= \begin{cases} \int_0^R \dots = \frac{1}{2}R^2 & \rho > R \\ \int_0^\rho \dots = \frac{1}{2}\rho^2 & \rho \le R \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mu_0 \int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f}' \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') = \mu_0 \begin{cases} I & \rho > R \\ \frac{\rho^2}{R^2} I & \rho \le R \end{cases}$$

$$\int_{\partial F} \mathrm{d}r' \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}') = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}\varphi} \cdot \boldsymbol{B} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \rho B_\varphi(\rho) = 2\pi\rho B_\varphi(\rho)$$

mit:

$$\boldsymbol{r}(\rho) = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}\varphi} = \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \rho\boldsymbol{e}_\varphi$$

Damit erhalten wir:

$$\mu_0 \int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f}' \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') = 2\pi\rho B_\varphi(\rho)$$

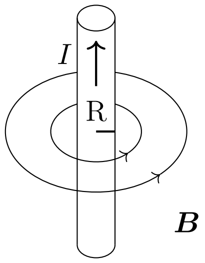
Daraus folgt:

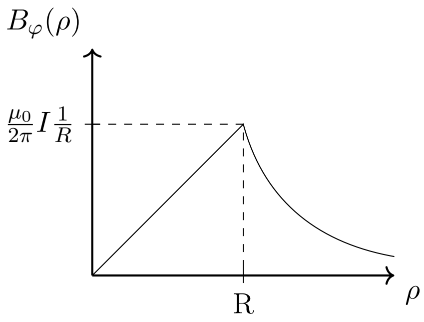
$$\Rightarrow \quad \mu_0 I_F = \rho B_\varphi(\rho) 2\pi$$

Dies können wir umstellen in:

$$\Rightarrow \quad B_\varphi(\rho) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_F}{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} I \boldsymbol{e}_\varphi \begin{cases} \frac{1}{\rho} & \rho > R \\ \frac{\rho}{R^2} & \rho \leq R \end{cases}$$





Differentialgleichung für das Vektorpotential

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

$$\begin{aligned} \mu_0 \boldsymbol{j} &= \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \\ &= \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) - \Delta \boldsymbol{A} \end{aligned}$$

falls $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$ (Coulomb-Gleichung)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{j}}$$

Wichtig: Die Komponenten sind nicht unabhängig voneinander aufgrund unserer Annahme $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$ analog:$\Delta\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

2.4.3 Feldgleichungen der Magnetostatik

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \quad \text{(Ampère)} \qquad \int_{\partial F} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B} = \mu_0 I_F$$

Und für das Vektorpotential:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \qquad \Rightarrow \Delta \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{j}$$

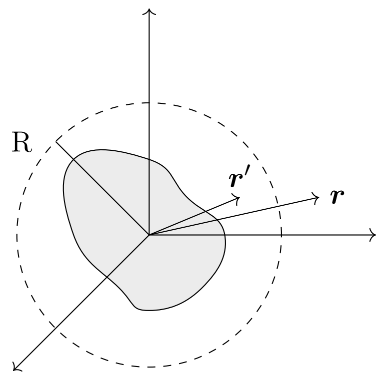
2.5 Multipolentwicklung - Magnetisches Moment

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

mit $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$

Wir betrachten eine lokalisierte Ladungsverteilung:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \text{beliebig} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$



Für $r > R > r'$ machen wir eine Taylorentwicklung:

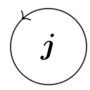
$$\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \cdot \boldsymbol{r}' + \dots$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r} \int \mathrm{d}^3 r' \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') + \frac{1}{r^3} \int \mathrm{d}^3 r' (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}') \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') + \dots \right\}$$

Es gilt: in der Magnetostatik $\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$

i) Das Integral über die Stromdichte verschwindet:

$$\int \mathrm{d}^3 r' \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') = 0$$



ii)

$$\int \mathrm{d}^3 r' (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}') \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{r} \times \underbrace{\frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r' (\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}'))}_{\substack{:=\boldsymbol{m} \\ \text{magnetisches} \\ \text{Dipolmoment}}}$$

Die Entwicklung des Vektorpotentials wird dann zu:

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\frac{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}}{r^3}}_{\propto \frac{1}{r^2}}$$

Für das Magnetfeld gilt:

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\boldsymbol{m} \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \right)$$

Mit der Identität: $\nabla \times (f\boldsymbol{F}) = f \nabla \times \boldsymbol{G} - \boldsymbol{G} \times \nabla f$

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{1}{r^3} (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}) \right) &= \frac{1}{r^3} \underbrace{\nabla \times (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r})}_{=2\boldsymbol{m}} - (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}) \times \underbrace{\nabla \frac{1}{r^3}}_{=-\frac{3\boldsymbol{r}}{r^5}} \\ &= \frac{1}{r^3} 2\boldsymbol{m} + \frac{3}{r^5} \underbrace{(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{r}}_{(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{m}} \\ &= \frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{m}\boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{r^3} \end{aligned}$$

Beim $\boldsymbol{B}$-Feld erhalten wir für den ersten nicht verschwindenden Term den Dipolterm:

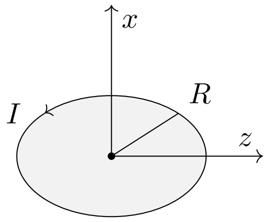
Multipolentwicklung des Magnetfeldes (1. Term)

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{r^3}\right] \qquad r > R$$

Der große Unterschied zum $\boldsymbol{E}$-Feld ist, dass der führende Term ein Dipol ist. Das $\boldsymbol{B}$-Feld hat also keinen Monopol.

Beispiel: **Magnetisches Dipolmoment einer Drahtschleife**

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \boldsymbol{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\boldsymbol{j} = I\delta(\rho - R)\delta(z)\boldsymbol{e}_\varphi$$

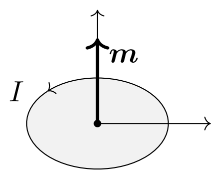
$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r\ \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{e}_\varphi &= \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -z\cos\varphi \\ -z\sin\varphi \\ \rho \end{pmatrix} \\
&= \rho\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - z\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \rho\boldsymbol{e}_z - z\boldsymbol{e}_\varphi
\end{aligned}$$

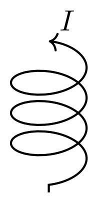
$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \boldsymbol{m} &= \frac{1}{2}I\int_0^\infty \rho\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}z\delta(\rho - R)\delta(z)(\rho\boldsymbol{e}_z - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{z\boldsymbol{e}_\varphi}) \\
&= \frac{I}{2}R^2 2\pi\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{m} = \underbrace{\pi R^2}_{F} I\boldsymbol{e}_z = FI\boldsymbol{e}_z$$



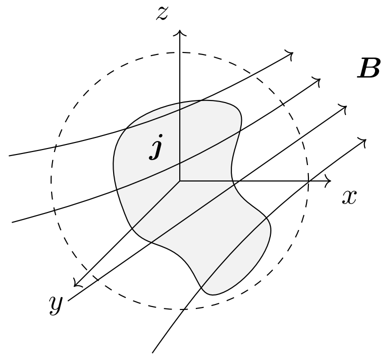
Das Magnetische Moment einer Spule:

$$\boldsymbol{m} = NI\cdot F\boldsymbol{e}_z$$



[Folie: Vergleich idealer Dipol und Leiterschleife]
[Folie: Vergleich $\boldsymbol{E}$-Feld einer elektrischer Dipol und Magnetfeld um Leiterschleife]

2.5.1 Kraft auf eine lokalisierte Stromverteilung in einem äußeren Magnetfeld $\boldsymbol{B}$

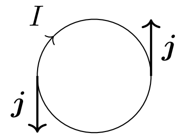


$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = 0 \quad |\boldsymbol{r}| > 0$ Taylorentwicklung von $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ um $\boldsymbol{r} = 0$:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}(0) + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\Big|_{\boldsymbol{r}=0} + \dots$$

$$\longrightarrow \quad \boldsymbol{F} = \int \mathrm{d}^3r\,(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}))$$

$$\boldsymbol{F} = \underbrace{\int \mathrm{d}^3r\,(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B}(0))}_{=\left(\underbrace{\int \mathrm{d}^3r\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})}_{=0}\right)\times\boldsymbol{B}(0)} + \int \mathrm{d}^3r\,[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \times (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}(0)] + \dots$$



Der verschwindende Teil ist ein homogenes $\boldsymbol{B}$-Feld ($\boldsymbol{B}$ = const.), und übt daher keine Kraft auf Stromverteilung aus.

Die Komponenten des Kraftvektors sind:

$$\boldsymbol{F}_i = \int \mathrm{d}^3r\,[\boldsymbol{j} \times (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}]_i$$

Nun nutzen wie die folgende Identität:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i = \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl}\; a_k b_l$$

ε_{ikl} ist das Levi-Civita Symbol.
Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{j} \times (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B})_i &= \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl}\; j_k \underbrace{[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}]_l}_{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla})B_l=(\boldsymbol{\nabla}B_l)\cdot\boldsymbol{r}} \\ &= \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl}\; j_k(\boldsymbol{\nabla}B_l\cdot\boldsymbol{r})\end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad F_i = \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl} \underbrace{\int \mathrm{d}^3r\,[(\boldsymbol{\nabla}B_l)\cdot\boldsymbol{r}]\,j_k}_{=\int \mathrm{d}^3r\,([(\boldsymbol{\nabla}B_l)\cdot\boldsymbol{r}]\,\boldsymbol{j})_k \overset{\text{Identität}}{=} -\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\nabla}B_l \times \int \mathrm{d}^3r\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}\right]}$$

Hier die benutzte Identität (aus den Hausaufgaben):

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{a} \times \int \mathrm{d}^3r(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})) = -\int \mathrm{d}^3r(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \qquad (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = 0)$$

Damit ergibt sich für die Kraft:

$$\begin{aligned}
F_i &= -\frac{1}{2}\sum_{k,l}\varepsilon_{ikl}\left[\boldsymbol{\nabla}B_l \times \underbrace{\int \mathrm{d}^3r\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})}_{=2\boldsymbol{m}}\right]_k \\
&= -\sum_{k,l}\varepsilon_{ikl}\underbrace{(\boldsymbol{\nabla}B_l\times\boldsymbol{m})}_{-[\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{\nabla}B_l]_k=-(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{\nabla})_k B_l} \\
&= \sum_{k,l}\varepsilon_{ikl}\,(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{\nabla})_k B_l \\
&= [(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{\nabla})\times\boldsymbol{B}]_i
\end{aligned}$$

$$\boxed{F_i = [(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{\nabla})\times\boldsymbol{B}]_i}$$

Wir können nun mit der Identität umschreiben:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

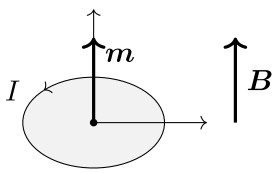
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= (\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{\nabla})\times\boldsymbol{B}(0) \\
&= \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{m}(\underbrace{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}}_{=0})
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}(0))}$$

Also: $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{F}=0$

$\rightarrow$ **potentielle Energie:**

$$W = -\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}(0)$$



Drehmoment:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}(0)$$

$$\boldsymbol{N} = \int \mathrm{d}^3r\;\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})$$

2.6 Magnetostatik in Materie

mikroskopische Feldgleichungen:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j}$$

2.6.1 Makroskopische Feldgleichungen

Definition Mittlung:

$$\langle\boldsymbol{B}\rangle(\boldsymbol{r}) = \int \mathrm{d}^3r' f(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

Es muss weiterhin gelten:

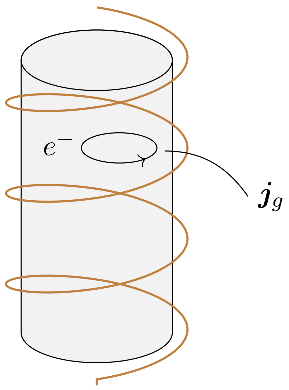
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\langle\boldsymbol{B}\rangle(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\langle\boldsymbol{B}\rangle(\boldsymbol{r}) = \mu_0\langle\boldsymbol{j}\rangle(\boldsymbol{r})$$

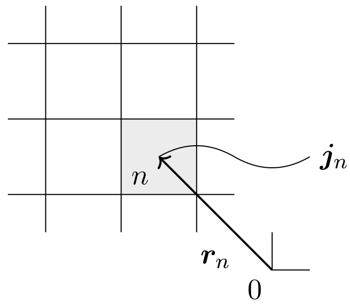
Aus Zeitgründen werden wir hier nichts weiter genau herleiten wie in der Elektrostatik, sondern im wesentlichen die Ergebnisse Besprechen.

Aufteilung der Stromdichte:

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_g + \boldsymbol{j}_f$$

$\langle j_g \rangle$





Mittlung:

$$\to \quad \langle \boldsymbol{j}_g \rangle = \boldsymbol{\nabla} \times \underbrace{\langle \sum_n \boldsymbol{m} \delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_n) \rangle}_{:= \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})} (\boldsymbol{r}) + \dots$$

$$= \frac{\text{magnetisches Dipolmoment}}{\text{Volumen}} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$$

Mit

$$\boldsymbol{m}_n = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r' \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{j}_n(\boldsymbol{r}')$$

Und $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$: makroskopische Magnetisierung

$$[\boldsymbol{M}] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\mathrm{m} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = \frac{\text{magnetisches Dipolmoment}}{\text{Volumen}}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \times \langle \boldsymbol{B} \rangle(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \langle \boldsymbol{j} \rangle(\boldsymbol{r}) + \mu_0 \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) + \dots$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \times \underbrace{\left(\frac{1}{\mu_0} \langle \boldsymbol{B} \rangle(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) - \dots \right)}_{:= \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})} = \langle \boldsymbol{j}_f \rangle(\boldsymbol{r})$$

$$[\boldsymbol{H}] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

2.6.2 Makroskopische Feldgleichunge der Magnetostatik

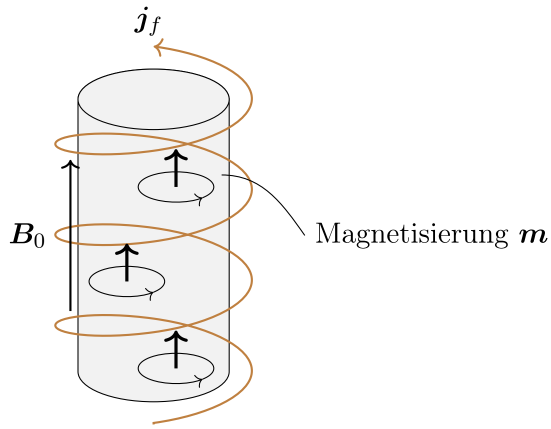
$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_f$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B} - \boldsymbol{M} - \dots$$

Integrale Form:

$$\oint_F \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\int_{\partial F} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{H} = \int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{j}_f = I_F$$



Magnetisierung $\rightarrow$ Zusatzfeld $\boldsymbol{B}_M$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_M$$

2.6.3 Vektorpotential

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \quad \rightarrow \quad \langle \boldsymbol{B} \rangle = \boldsymbol{\nabla} \times \langle \boldsymbol{A} \rangle$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \qquad (\Lambda = 0 \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \langle \boldsymbol{A} \rangle(\boldsymbol{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\langle \boldsymbol{j} \rangle(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\langle \boldsymbol{j} \rangle(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}} \\
&\qquad\qquad = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}') \times \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}
\end{aligned}$$

Erklärung der letzten Umformung:

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}') &= \int \mathrm{d}^3 r' \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \times \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \boldsymbol{M} \right) - \underbrace{\left(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right)}_{= \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}} \times \boldsymbol{M} \\
&= \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r' \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \times \left(\frac{\boldsymbol{M}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right)} + \int \mathrm{d}^3 r' \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \\
&= \lim_{R \to \infty} \int_{K_R(0)} \mathrm{d}^3 r' \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \times \left(\frac{\boldsymbol{M}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right)
\end{aligned}$$

2.6.4 Magnetisierung und Suszeptibilität

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{H})$$

lineare Näherung, isotrope Medien:

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H}$$

χ_m : magnetische Suszeptibilität

$$\begin{aligned}
\rightarrow \quad \boldsymbol{B} &= \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \chi_m \boldsymbol{H}) \\
&= \underbrace{(1 + \chi_m)}_{= \mu_r} \mu_0 \boldsymbol{H} \\
&= \mu \boldsymbol{H}
\end{aligned}$$

μ_r : relative Permeabilität
$\mu = \mu_0 \mu_r$: Permeabilität

Kapitel 3

Zeitabhängige elektromagnetische Felder - Elektrodynamik

bisher Zeitunabhängige Felder:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0 \qquad \text{Elektrostatik}$$
$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} \qquad \text{Magnetostatik}$$

Zeitabhängige Felder:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) \leftrightarrow \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$$

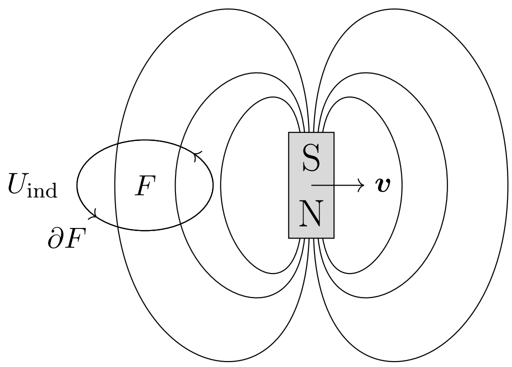
3.1 Maxwell-Gleichungen

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$
$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ ist die Induktion
$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ ist der Verschiebungsstrom

3.1.1 Faraday'sches Induktionsgesetz

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$



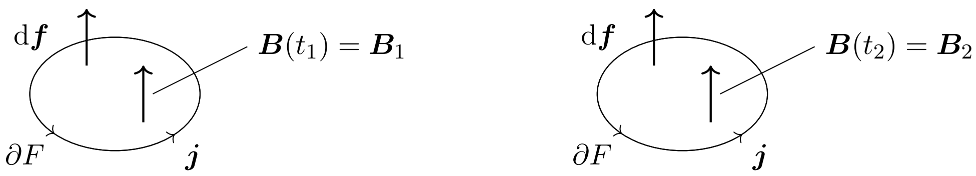
$$\begin{aligned}\int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) &= -\int \mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\\ &= \underbrace{\int_{\partial F}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}}_{U_{\text{ind}}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{B}}_{\Phi_m(t)}\end{aligned}$$

$\Phi_m(t)$ ist der Fluss des $\boldsymbol{B}$-Feldes durch F

$$U_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{B}$$

Bemerkung:

i) Vorzeichen-Strom



$$t_2 > t_1 \qquad \boldsymbol{B}(t_1) > \boldsymbol{B}(t_2)$$

$$\Phi_m(t_1) = \int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f}\boldsymbol{B}_1 > \Phi_m(t_2) = \int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f}\boldsymbol{B}_2$$

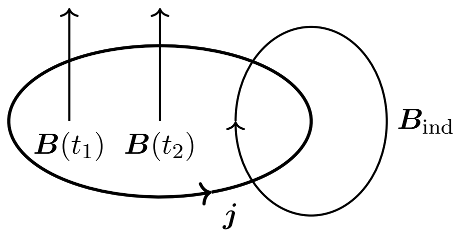
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_m(t) \leq 0$$

$$\rightarrow \quad U_{\text{ind}} = \int_{\partial F}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_m > 0$$

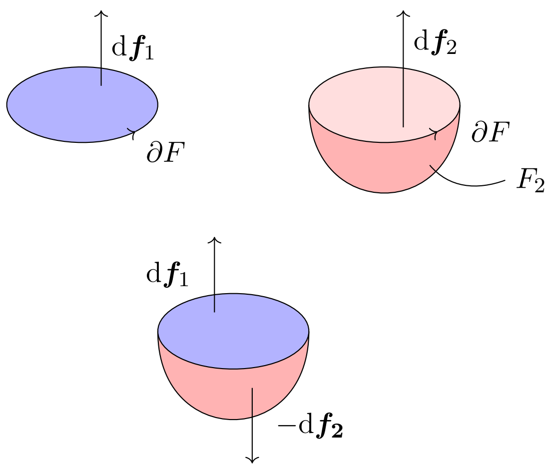
Mit $\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$, wobei σ die Leitfähigkeit des Leiters ist erhalten wir:

$$\rightarrow \quad \int_{\partial F}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{j} > 0 \qquad \rightarrow \quad \boldsymbol{j} \parallel \partial F$$

⇒ **Lenz'sche Regel:**
Der induzierte Strom und das damit verbundene Magnetfeld sind so gerichtet, dass sie der Ursache ihrer Entstehung entgegenwirken.



ii) Φ_m hängt nicht von der speziellen Form der Fläche F ab, sondern nur vom Rand ∂F.



$$\Phi_1 = \Phi_2$$

Aus der Skizze und mit Satz von Gauß. (Der Fluss durch eine geschlossene Fläche ist gleich 0):

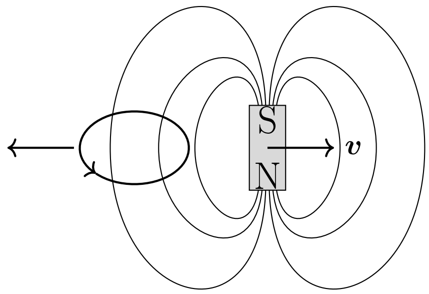
$$\varPhi = \int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\varPhi_{\mathrm{m}_1} = \varPhi_{\mathrm{m}_2}$$

$$0 = \int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{B} = \underbrace{\int_{F_1} \mathrm{d}\boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{B}}_{\varPhi_{\mathrm{m}_1}} - \underbrace{\int_{F_2} \mathrm{d}\boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{B}}_{\varPhi_{\mathrm{m}_2}}$$

iii) Eine Flussänderung kann auf verschiedene Weise zustandekommen:

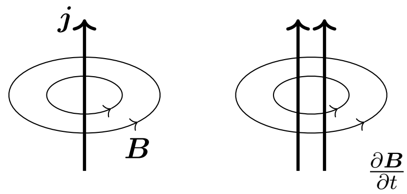
- Veränderung des Magnetfeldes $\boldsymbol{B}(t)$
- Bewegung der Leiterschleife im äußeren Feld



$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

Ein zeitlich verändertes $\boldsymbol{B}$-Feld erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld analog zu:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$



3.1.2 Maxwellscher Verschiebungsstrom

Magnetostatik:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} \qquad \text{Ampere}$$

Dies kann in der Elektrodynamik nicht gelten, dies zeigen wir indem wir auf beiden Seiten die Divergenz bilden.

$$\underbrace{\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H})}_{=0} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0 \quad \text{bei stationären Strömen}$$

im Allgemeinen haben wir zeitlich abhängige Ströme:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) \overset{\text{i.A.}}{\neq} 0$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0$$

Ergänzung:

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H})}_{=0} = \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{j}}_{=-\frac{\partial\rho}{\partial t}} + \nabla \cdot \boldsymbol{j}_0$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot \boldsymbol{j}_0 = \frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)$$

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{j}_0 = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

Damit erhalten wir für die die Stromdichte:

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

Beispiel: **Plattenkondensator**

$$\boldsymbol{D} = \begin{cases} \sigma \boldsymbol{e}_x & \text{innen} \\ 0 & \text{außen} \end{cases}$$

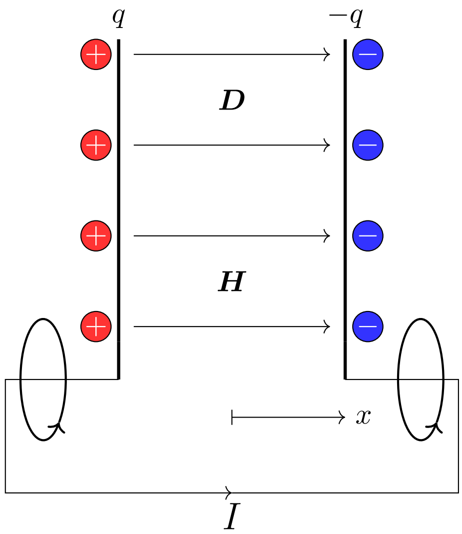
$\sigma = \frac{1}{F}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{\boldsymbol{e}_x}{F} \underbrace{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}_{= I} = \frac{I}{F} \boldsymbol{e}_x$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

innen: $\boldsymbol{j} = 0$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{I}{F} \boldsymbol{e}_x$$



3.1.3 Lösung der Differentialgleichungen

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

Zwei homogene und zwei inhomogene Differentialgleichungen. Zur Lösung benötigt man also zusätzliche Materialgleichungen:

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \qquad \boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

bei linearen Medien:

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \qquad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

Die Kraft ist:

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

Intagrale Form der Maxwell-Gleichungen

$$\oint_F \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \int_{\partial F} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{D} = \int_V \mathrm{d}^3 r \rho(\boldsymbol{r}) \qquad \int_{\partial F} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{H} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{D} = \int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{j}$$

Mikroskopische Maxwell-Gleichungen:
formal:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} &= 0 & \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &= 0 \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho & \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} &= \mu_0 \boldsymbol{j} \end{aligned}$$

3.2 Potentiale der Elektrodynamik - Eichtransformation

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad 0 &= \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} \\ &= \boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$$

Φ ist ein skalares Potential

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\boldsymbol{\nabla}\Phi(\boldsymbol{r},t) - \frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$$

Damit haben wir die beiden homogenen Gleichungen gelöst. Wir können $\boldsymbol{E}$- und $\boldsymbol{B}$-Felder nun durch die Potentiale Φ und $\boldsymbol{A}$ ausdrücken.

3.2.1 Bestimmungsgleichung für $\Phi, \boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} &= \frac{1}{\varepsilon}\rho \\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} - \varepsilon\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} &= \mu\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\rho = \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(-\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = -\Delta\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \Delta\Phi + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = -\frac{1}{\varepsilon}\rho}$$

$$\mu\boldsymbol{j} = \underbrace{\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})}_{=\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-\Delta\boldsymbol{A}} - \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(-\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \Delta\boldsymbol{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = -\mu\boldsymbol{j}}$$

3.2.2 Eichtransformation

Φ, $\boldsymbol{A}$ sind durch:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

nicht eindeutig festgelegt.

Eichtransformation:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r},t) &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{\nabla}\Lambda(\boldsymbol{r},t)\\ \Phi'(\boldsymbol{r},t) &= \Phi(\boldsymbol{r},t) - \frac{\partial \Lambda(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} + \underbrace{\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\Lambda)}_{=0} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \quad \checkmark$$

$$-\boldsymbol{\nabla}\Phi' - \frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi + \cancel{\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}} - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\Lambda} = \boldsymbol{E} \quad \checkmark$$

$\rightarrow$ verschiedene Eichungen.

1) **Coulomb-Eichung**

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = 0$$

$$\boxed{\rightarrow \quad \Delta\Phi(\boldsymbol{r},t) = -\frac{1}{\varepsilon}\rho(\boldsymbol{r},t)}$$

$$\Phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \mathrm{d}^3r' \frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$$\boxed{\rightarrow \quad \Delta\boldsymbol{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \mu\boldsymbol{j} + \varepsilon\mu\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial \Phi}{\partial t}}$$

Typische Anwendung:
Bei statischen Problemen und bei nicht relativistischen Geschwindigkeiten.
Die Coulomb-Eichung ist nicht Lorenz-invariant.

2) **Lorenz-Eichung**

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

Im Vakuum: $\varepsilon\mu = \varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$

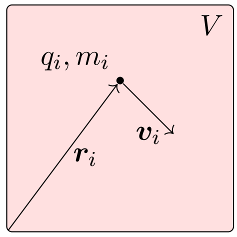
$$\rightarrow \quad \Delta\Phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\varepsilon\mu\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = 0$$

$$\boxed{\rightarrow \quad \Delta\Phi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0 \;/\; -\frac{1}{\varepsilon}\rho}$$

$$\boxed{\rightarrow \quad \Delta\boldsymbol{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0 \;/\; \mu_0\boldsymbol{j}}$$

3.3 Energie und Impuls elektromagnetischer Felder

3.3.1 Energie des EM-Feldes



System von Punktladungen $q_i, m_i, \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_i$ im Volumen V:
Kraft auf Ladungen im elektromagnetischen Feld:

$$\boldsymbol{F}_i = q_i \left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_i, t) + \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_i, t) \right)$$

Zeitliche Änderung der Energie der Punktladungen durch die elektromagnetischen Felder:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_{\mathrm{mat}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i \frac{m_i}{2} \boldsymbol{v}_i^2 = \sum_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{F}_i \\
&= \sum_i q_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_i, t) + \sum_i q_i \underbrace{\boldsymbol{v}_i \cdot (\boldsymbol{v}_i) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_i, t)}_{=0} \\
&= \sum_i q_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_i, t)
\end{aligned}$$

formale Kontinuierliche Beschreibung: $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_i q_i \boldsymbol{r}_i \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i(t))$

$$\rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_{\mathrm{mat}} = \int_V \mathrm{d}^3 r \; \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$$

Energiedichte w_{mat}: $W_{\mathrm{mat}} = \int_V \mathrm{d}^3 r \; w_{\mathrm{mat}}(\boldsymbol{r})$

$$\Rightarrow \quad \int_V \mathrm{d}^3 r \; \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \mathrm{d}^3 r \; w_{\mathrm{mat}} = \int_V \mathrm{d}^3 r \; \frac{\partial}{\partial t} w_{\mathrm{mat}}$$

$$\Rightarrow \quad \int_V \mathrm{d}^3 r \left(\frac{\partial w_{\mathrm{mat}}}{\partial t} - \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} \right) = 0 \qquad \forall \; V$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial w_{\mathrm{mat}}}{\partial t} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} \quad \widehat{=} \quad \text{Leistungsdichte}$$

$$[\boldsymbol{j}][\boldsymbol{E}] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

Die gesamte Änderung der Energie der Materie im Volumen V ist dann:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_{\mathrm{mat}_V} = \int_V \mathrm{d}^3 r \; \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}$$

Außerdem gilt auch:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_{\mathrm{mat}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_{\mathrm{feld}}$$

Wir wollen nun $\boldsymbol{j}$ ersetzen und nutzen:

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}) - \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$\boldsymbol{E}$ mal der Rotation von $\boldsymbol{H}$ können wir umformen als:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot \underbrace{(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E})}_{-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H})$$

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = \frac{\partial}{\partial t} w_{\mathrm{mat}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_{\mathrm{mat}_V} = -\int_V \mathrm{d}^3 r \, \left(\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) - \int_V \mathrm{d}^3 r \, \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_{\mathrm{feld}}$$

Zur Vereinfachung und Interpretation: $\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \quad \varepsilon, \mu \mathrm{const.}$

$$\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})$$

$$\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_{\mathrm{mat}_V} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3 r \, (\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}) - \int_V \mathrm{d}^3 r \, \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$$

Elektrostatik:

$$w_{\mathrm{el}} = \frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 \quad \text{(Vakuum)} \qquad w_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} \quad \text{(Medium)}$$

Magnetostatik:

$$w_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2 \quad \text{(Vakuum)} \qquad w_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B} \quad \text{(Medium)}$$

Energie des elektromagnetischen Feldes:

$$\frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3 r \, (\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}) = W_{\mathrm{em}_V}$$

Energiedichte:

$$w_{\mathrm{em}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_{\mathrm{mat}_V} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_{\mathrm{em}_V} - \underbrace{\int_V \mathrm{d}^3 r \, \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})}_{\substack{\text{Energie, die aus } V \\ \text{abfließt (Strahlung)}}}$$

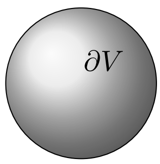
$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \qquad \textbf{Pointing-Vektor}$$

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{S} = \int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{S}$$

$$[\boldsymbol{S}] = [\boldsymbol{E}][\boldsymbol{H}] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2\mathrm{s}} = \frac{\text{Energie}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}}$$

$\boldsymbol{S}$: **Energiestromdichte**

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{S}$$



Energiestrom des EM-Feldes durch die Fläche ∂V.

Energiebilanz

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_{\mathrm{mat}_V}}_{\substack{\text{an Ladungen} \\ \text{in } V \text{ verrichtete} \\ \text{Arbeit}}} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_{\mathrm{em}_V}}_{\substack{\text{Änderung der} \\ \text{EM Feldenergie} \\ \text{in } V}} = \underbrace{-\int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{S}}_{\substack{\text{Fluss der EM} \\ \text{Feldenergie aus } V}}$$

Bemerkung:

i) abgeschlossenes System (ohne Energiestromdichte ach außen) z.B. $\mathbb{R}^3$

$$\int_V \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{S} \to 0$$

ii) Gebiet ohne Ladungen und Ströme $\rho = \boldsymbol{j} = 0$ in$V$. $w_{\text{mat}} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} = 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_{\text{mat}_V} = -\int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{S}$$

iii) differentielle Form:

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \left[\frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S} + \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} \right] = 0$$

Poyntigsches Theorem

$$\to \quad \frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t} + \frac{\partial w_{\text{mat}}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S} = 0$$

oder auch: **Kontinuitätsgleichung für Energie**

$$\frac{\partial}{\partial t} w + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S} = 0$$

Analogie:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0$$

iv) **Poynting-Vektor**

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \quad \text{Energiestromdichte}$$

Beachte: Nur $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S}$ oder $\int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{S}$ haben physikalische Bedeutung.

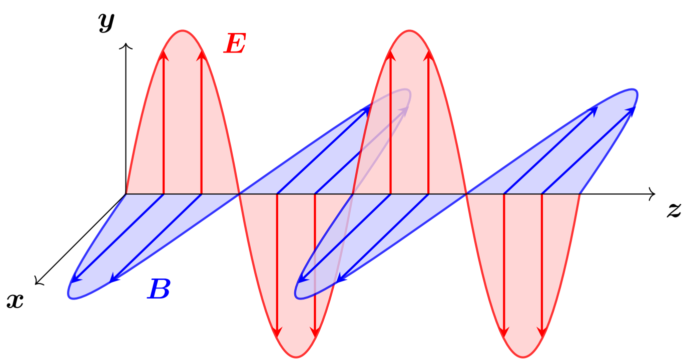
$\boldsymbol{S} \to \boldsymbol{S} + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{G}$
$\boldsymbol{S} \neq 0$, aber kein Energiestrom:

$$\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_x \quad \boldsymbol{H} = H\boldsymbol{e}_y \qquad E, H \text{const.}$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = EH\boldsymbol{e}_z \neq 0$$

aber: $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S} = 0 \quad \to$ **kein Beitrag !**

Beispiel: **Energietransport in el./mag. Wellen im Vakuum**

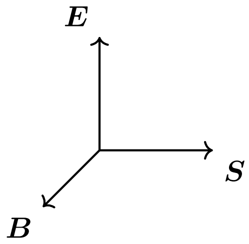


ebene Welle:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= E_0 \cos(kz - \omega t)\boldsymbol{e}_x \\
\boldsymbol{B} &= \frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t)\boldsymbol{e}_y
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\omega}{k} = c \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k}
$$

mit $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$



$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} &= \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu_0}\frac{E_0^2}{c}\cos^2(kz - \omega t)\boldsymbol{e}_z \\
&= c\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}
$$

explizite Energiebilanz:

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\underset{\substack{\| \\ 0}}{w_{\text{mat}}} + w_{\text{em}}) = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S}
$$

$$
\begin{aligned}
w_{\text{em}} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}) = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2) \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}(\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{c^2}\boldsymbol{B}^2) = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} w_{\text{em}}) 2\omega\varepsilon_0 E_0^2 \cos(\dots)\sin(\dots) \\
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S} = \frac{\partial S}{\partial z} = -2\underbrace{kc}_{=\omega}\varepsilon_0 E_0^2 \cos(\dots)\sin(\dots)
\end{aligned}
$$

3.3.2 Impuls des EM-Feldes - Maxwellscher Spannungstensor

Wir betrachten ein System von Punktladungen: $q_i, m_i, \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_i$ Impuls: $\boldsymbol{p_i} = m_i \boldsymbol{v}_i$

$$
\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}
$$

Die zeitliche Änderung des gesamten Impulses der Teilchen durch EM-Felder:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}_{\text{mat}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \boldsymbol{p_i} = \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{p}_i \\
&= \sum_i \boldsymbol{F}_i = \sum_i q_i \left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_i, t) + \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_i, t)\right)
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ Kontinuierliche Beschreibung:

$$
\begin{aligned}
\rho(\boldsymbol{r}, t) &= \sum_i q_i \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i(t)) \\
\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) &= \sum_i q_i \boldsymbol{v}_i \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i(t))
\end{aligned}
$$

$$
\rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}_{\text{mat}} = \int_V \mathrm{d}^3 r \; \underbrace{(\rho \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t))}_{\text{Kraftdichte}}
$$

$\rho = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} \quad \boldsymbol{j} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \quad \rho \boldsymbol{E} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B}) + \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \boldsymbol{e}_i$$

Maxwellscher Spannungstensor:
Symmetrischer Tensor 2. Stufe:

$$T_{ik} = \varepsilon E_i E_k - \frac{1}{\mu} B_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (\varepsilon \boldsymbol{E}^2 - \frac{1}{\mu} \boldsymbol{B}^2)$$

physikalisch: **Impulsstromdichte**

Impulsbilanz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{P}_{\mathrm{mat}_V} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \mathrm{d}^3 r \ (\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B}) = \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\left(\int_V \mathrm{d}^3 r \overbrace{\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}}^{= \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{T}_i} \boldsymbol{e}_i \right)}_{= \int_{\partial V} \mathrm{d} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{T}_i}$$

Die i-te Zeile dieser 3×3-Matrix wäre als Vektor: $\boldsymbol{T}_i = (T_{i1}, T_{i2}, T_{i3})$

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{P}_{\mathrm{mat}_V}}_{\substack{\text{Änderung des} \\ \text{Impulses} \\ \text{der Teilchen}}} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \mathrm{d}^3 r (\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B})}_{\substack{\text{Änderug des} \\ \text{Impulses des} \\ \text{EM-Feldes} \\ \text{in } V}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \int_{\partial V} \mathrm{d} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{T}_i}_{\substack{\text{Impulsfluss} \\ \text{des EM-Feldes} \\ \text{aus } V}}$$

differentiell:

$$\rho \boldsymbol{E} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} + \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B}) = \sum_i (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{T}_i) \boldsymbol{e}_i$$

i) **Impuls des EM-Feldes**

$$P_{\mathrm{em}_V} = \int_V \mathrm{d}^3 r \underbrace{(\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B})}_{= \boldsymbol{g}}$$

$\boldsymbol{g}$:= Impulsdichte $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{g} = \varepsilon \mu \underbrace{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}}_{= \boldsymbol{S}} = \varepsilon_r \mu_r \underbrace{\varepsilon_0 \mu_0}_{= \frac{1}{c^2}} \boldsymbol{S} = \varepsilon_r \mu_r \frac{1}{c^2} \boldsymbol{S}$$

$\left[\frac{1}{c^2} \boldsymbol{S} \right] = \frac{\text{Impuls}}{\text{Volumen}}$

Impulsdichte einer ebenen Wellen:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= E_0 \cos{(kz - \omega t)} \, \boldsymbol{e}_x \\
\boldsymbol{B} &= \frac{E_0}{c} \cos{(kz - \omega t)} \, \boldsymbol{e}_y \\
\boldsymbol{S} &= \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = x \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) \boldsymbol{e}_z \\
\boldsymbol{g} &= \frac{\varepsilon_0}{c} E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) \boldsymbol{e}_z
\end{aligned}$$

ii) **Maxwellscher Spannungstensor - Impulsdichte**

$$T_{ik} = \varepsilon E_i E - k + \frac{1}{\mu} B_i B_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}\left(\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B^2}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{P}_{\mathrm{mat}_V} + \boldsymbol{P}_{\mathrm{em}_V}\right) = \sum_i \left(\int_V \mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{T}_i\right)\boldsymbol{e}_i$$

Analogie: Energiebilanz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(W_{\mathrm{mat}_V} + W_{\mathrm{em}_V}\right) = -\int_{\partial V}\mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{S}$$

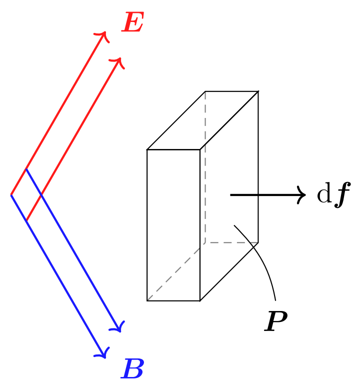
$\Rightarrow -\boldsymbol{T}_i$ Impulsstromstärke zu P_i
$[T_{ik}] = \frac{\text{Impuls}}{\text{Fläche}\cdot\text{Zeit}}$

T_{ik} : Berechnung von Kräften auf geladene materielle Körper im EM-Feld.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P} = \sum_i \int_{\partial V}\mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{T}_i\boldsymbol{e}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_i\right)}_{\text{Kraft }\boldsymbol{K},K_i}\boldsymbol{e}_i$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}K_i = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}_i)\mathrm{d}f$$

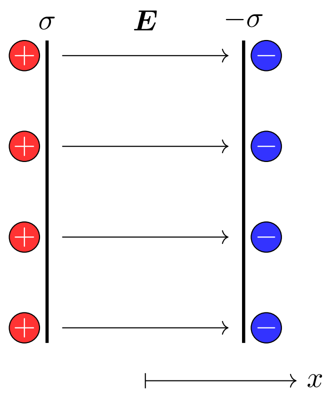


$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}f$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{\mathrm{d}K_i}{\mathrm{d}f}\right] = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} = \text{Druck}$$

Beispiel: **Plattenkondensator**

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} E\boldsymbol{e}_x & \text{innen} \\ 0 & \text{außen} \end{cases} \qquad \boldsymbol{B} = 0$$



Krafttensor innen:

$$T_{ik} = \underbrace{\varepsilon E_i E_k}_{=\varepsilon_0 E^2\delta_{ix}\delta_{kx}} + \underbrace{\frac{1}{\mu}B_iB_k}_{=0} - \frac{1}{2}\delta_{ik}\left(\underbrace{\varepsilon\boldsymbol{E}^2}_{\varepsilon_0E^2} + \underbrace{\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B^2}}_{=0}\right)$$

Krafttensor außen:

$$T_{ik} = 0$$

$$T_{xx} = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 \qquad T_{yy} = T_{zz} = -\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 \qquad \text{sonst} \quad = 0$$

$$T_{ik} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Kraft in x-Richtung:

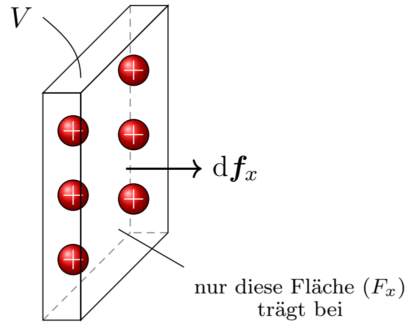
$$K_x = \int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \underbrace{\boldsymbol{T}_x}_{=(T_{xx},T_{xy},T_{xz})=\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\boldsymbol{e}_x} = \int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \boldsymbol{e}_x$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_x$

$$K_x = \int_{F_x} \mathrm{d}f \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 F_x$$

$\rightarrow \quad \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} : \quad \frac{K_x}{F_x} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

$$\boldsymbol{K} = (K_x, 0, 0)$$



3.4 Elektromagnetische Wellen

3.4.1 Maxwell-Gleichungen in einem Isolator - Homogene Wellengleichung

$$\rho_f = 0 = \boldsymbol{j}_f$$

$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \varepsilon\mu \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0$$

$$0 = \underbrace{\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E})}_{\boldsymbol{\nabla}\underbrace{(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E})}_{=0} - \Delta \boldsymbol{E}} + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}}_{=\varepsilon\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}} = -\Delta \boldsymbol{E} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta \boldsymbol{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

$\varepsilon\mu = \varepsilon_r \mu_r \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{\varepsilon_r \mu_r}{c^2} \qquad n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$

n ist der Brechungsindex des betrachteten Materials $v = \frac{c}{n}$ die Geschwindigkeit der EM-Welle in diesem Material.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta \boldsymbol{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0}$$

außerdem gilt:

$$0 = \underbrace{\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B})}_{\boldsymbol{\nabla}\underbrace{(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B})}_{=0} - \Delta \boldsymbol{B}} - \varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}}_{=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta \boldsymbol{B} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0}$$

homogene Wellengleichung ($\Psi(\boldsymbol{r}, t)$)

$$\Delta\Psi - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$$

$$\Psi = E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$$

Wiederholung

Maxwell-Gl für Isolator: $\rho_f = 0 = \boldsymbol{j}_f \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0$$

$\varepsilon\mu = \varepsilon_r\mu_r\varepsilon_0\mu_0 = \frac{\varepsilon_r\mu_r}{c^2} = \boxed{\frac{n^2}{c^2} = \frac{1}{v^2}}$ $\quad n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$ homogene Wellengleichungen:

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\boldsymbol{E} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0} \qquad \Rightarrow \boxed{\Delta\boldsymbol{B} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0}$$

für jede Komponente von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ gilt:

$$\Delta\Psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$$

Aus den Maxwell-Gleichungen ist aber zu sehen, dass $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$-Felder **nicht** unabhängig voneinander sind.

3.4.2 Homogene Wellengleichung für skalare Funktion in einer Raumdimension

$$\Psi(x,t) \qquad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$$

Funktionen der Form $\Psi_\pm(x,t) = f(x \pm vt)$ erfüllen die Wellengleichung.

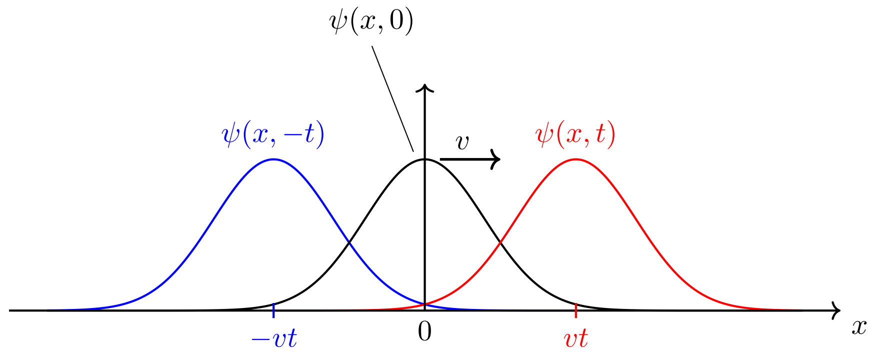
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x \pm vt) = f''(x \pm vt)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} f'(x \pm vt) \cdot (\pm v) = v^2 f''(x \pm vt)$$

Wie sehen diese Lösungen nun aus?

$$\Psi_-(x,t) = f(x - vt)$$

$\Psi_-(x, 0) = f(x) \;\leftarrow t = 0$

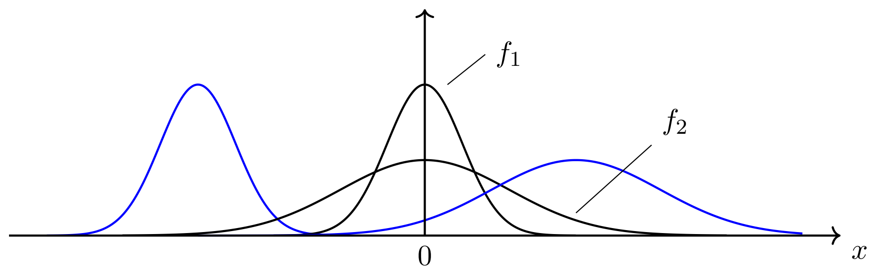


$t > 0: \quad \Psi_-(x,t) = f(x - vt)$
$\Psi_+(x,t) = f(x + vt)$

Wellengleichungen sind linear $\Rightarrow$ Linearkombinationen von Lösungen sind wieder Lösungen.

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &= a_1\Psi_1(x,t) + a_2\Psi_2(x,t)\\ &= a_1 f_1(x+vt) + a_2 f_2(x-vt)\end{aligned}$$

Im allgemeinen muss es aber nicht sein, dass eine Welle bei Zeittransformationen ihre Form beibehält!



Man kann zeigen, dass die allgemeine Lösung der Wellengleichung in einer Dimension geschrieben werden kann als:

$$\Psi(x,t) = f(x+vt) + g(x-vt)$$

Besonders Wichtig:
Ebene Wellen (1D)

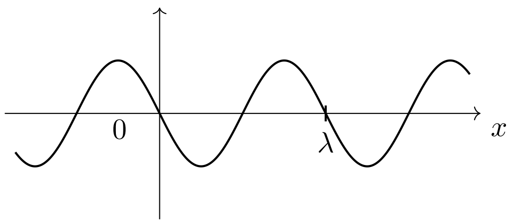
$$\begin{aligned}\Psi_\pm(x,t) &= a\cos(kx \pm \omega t)\\ &= a\cos(k(x \pm \frac{\omega}{k}t))\end{aligned}$$

$a \in \mathbb{R} \quad \omega, k \in \mathbb{R} \quad \omega, k > 0$
$\Psi_\pm$ löst die Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$$

falls $\frac{\omega}{k} = v$

Dispersionsrelation:
$\omega = kv = \omega(k)$
Wellenzahl k, Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

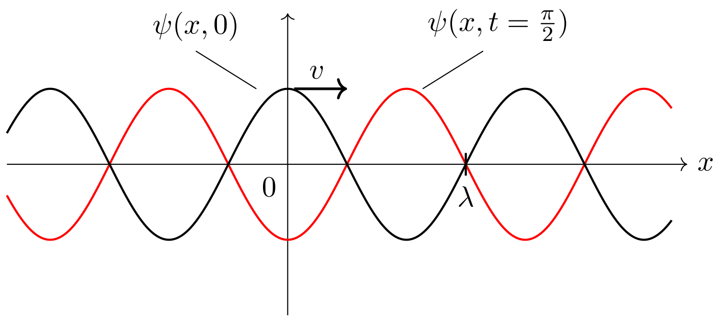


$$\begin{aligned}\Psi_\pm(x + n\lambda t) &= a\cos(k(x+n\lambda) \pm \omega t)\\ &= a\cos(kx \pm \omega t + kn\lambda)\\ &= a\cos(kx \pm \omega t)\\ &= \Psi_\pm(x,t)\end{aligned}$$

Die Kreisfrequenz ω, Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$, Schwingungsdauer $\tau = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\Psi_\pm(x, t+n\tau) = a\cos(kx \pm \omega(t+n\tau)) = a\cos(kx \pm \omega t \pm n\underbrace{\omega\tau}_{=2\pi}) \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$= a\cos(kx \pm \omega t) = \Psi_\pm(x,t)$$



Die Phasengeschwindigkeit v:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{2\pi}\omega = \lambda\nu = \frac{\lambda}{\tau}$$

Ebenso wird die Wellengleichung mit einem Sinus gelöst:

$$\Psi_\pm(x,t) = a\sin(kx \pm \omega t)$$

Beide Lösungen sind also enthalten in:

$$\Psi(x,t) = ae^{i\overbrace{(kx - \omega t)}^{\varphi \text{ Phase}}}$$

$a \in \mathbb{C} \quad k \in \mathbb{R}$
$\omega = v|k|$
Für Physikalische Felder gilt:

$$\Psi(x,t) = \Re\left(ae^{i(kx-\omega t)}\right)$$

3.4.3 Ebene Wellen in 3 Raumdimensionen

$$\Delta\Psi(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$$

eben Welle:

$$\Psi(\boldsymbol{r},t) = ae^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}$$

Mit dem Wellenvektor:
$\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)^\top$

und der Frequenz
$\omega \geq 0$

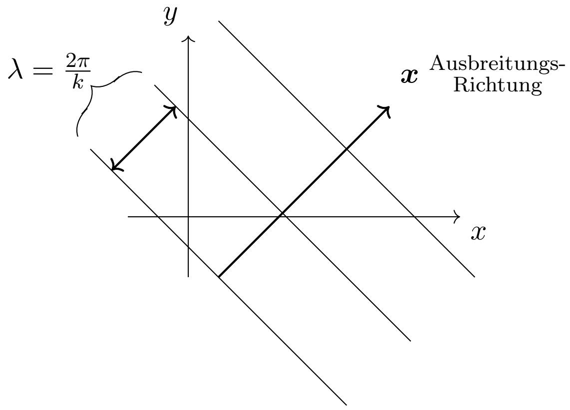
$$\begin{aligned}\Delta\Psi &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) a e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \\ &= i^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) a e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \\ &= -k^2\Psi\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\omega^2\Psi$$

$$\Delta\Psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \overbrace{\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{v^2}\right)}^{=0}\Psi = 0$$

$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$ $\qquad \omega = v|\boldsymbol{k}|$

Bemerkung:



i) ebene Welle:
$\Psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t})$ konstant falls Phase konstant.
$\varphi(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t = \text{const.}$
Für festes t: $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = \text{const.}$

ii) Phasengeschwindigkeit

$$v = \frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|}$$

iii) Wellengleichung linear
$\Rightarrow$ Linearkombinationen von Lösungen sind wieder Lösungen.

$$\Psi(\boldsymbol{r}, t) = a_1 e^{i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega_1 t)} + a_2 e^{i(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega_2 t)}$$

Allgemeine Lösung der Wellengleichung

$$\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \int \mathrm{d}^3 k\, a(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$
$$\omega(\boldsymbol{k}) = v|\boldsymbol{k}|$$

3.4.4 Ebene elektromagnetische Wellen

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta\boldsymbol{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0} \qquad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\boldsymbol{B} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0}$$

Lösungen:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 e^{i(\tilde{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}-\tilde{\omega} t)}$$

$\omega = v|\boldsymbol{k}| \quad \tilde{\omega} = v|\tilde{\boldsymbol{k}}| \quad \boldsymbol{k}, \tilde{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{R}^3$

i) $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$

$$i(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0)e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} = i\tilde{\omega}\boldsymbol{B}_0 e^{i(\tilde{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}-\tilde{\omega} t)} \qquad \forall \boldsymbol{r}, t$$

$\Rightarrow \tilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k} \quad \tilde{\omega} = \omega$
$\Rightarrow \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0 = \omega \boldsymbol{B}_0 \;\rightarrow\; \boldsymbol{B}_0 = \frac{1}{\omega}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0$

$$\boldsymbol{B} \perp \boldsymbol{k}, \boldsymbol{E}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B} = \frac{1}{\omega}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}$$

ii) $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$

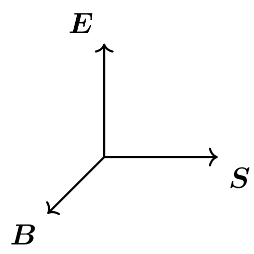
$$\begin{aligned} 0 &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \\ &= i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_0)e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_0 \;\rightarrow\; \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_0 = 0$

$$\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{E}$$

iii) $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$
$\Rightarrow \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{B}_0 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{B} = 0$

iv) $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$
$\Rightarrow i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}_0 = -i\frac{1}{v^2}\omega \boldsymbol{E}_0$
$\Rightarrow \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}_0 = -\frac{\omega}{v^2}\boldsymbol{E}_0$
$\Rightarrow \boldsymbol{E} = -\frac{v^2}{\omega}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}$



$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{k}$ orthogonal zueinander
$\Rightarrow$ transversale Welle
Beziehung zwischen der Amplitude von $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{E}$:

$$|\boldsymbol{B}| = \frac{1}{\omega}|\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}| = \frac{|\boldsymbol{k}|}{\omega}|\boldsymbol{E}| = \frac{1}{v}|\boldsymbol{E}|$$

o.B.d.A. $\quad \boldsymbol{k} = k\boldsymbol{e}_z$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= (E_{0_x}\boldsymbol{e}_x + E_{0_y}\boldsymbol{e}_y)e^{i(k\cdot r-\omega t)} \\ \boldsymbol{B} &= \frac{1}{\omega}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = \frac{k}{\omega}\boldsymbol{e}_z \times (E_{0_x}\boldsymbol{e}_x + E_{0_y}\boldsymbol{e}_y)e^{i(k\cdot r-\omega t)} \\ &= \frac{1}{v}(-E_{0_y}\boldsymbol{e}_x + E_{0_x}\boldsymbol{e}_y)e^{i(k\cdot r-\omega t)} \end{aligned}$$

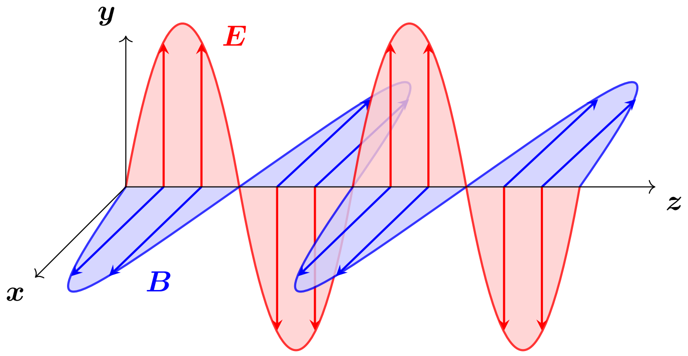
i.A. $E_{0_x}, E_{0_y} \in \mathbb{C}$

$$\boldsymbol{E} = \Re\left(\boldsymbol{E}_0 e^{i(k\cdot r-\omega t)}\right)$$

Beispiel: $E_{0_y} = 0 \quad E_{0_x} \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{E} = E_{0_x}\cos(kz - \omega t)\boldsymbol{e}_x \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{E_{0_x}}{v}\cos(kz - \omega t)\boldsymbol{e}_y \tag{3.2}$$



3.4.5 Polarisation ebener EM-Wellen

Charakterisierung der Schwingungsrichtung $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{e}_z$

$$\boldsymbol{E} = (E_{0_x}\boldsymbol{e}_x + E_{0_y}\boldsymbol{e}_y)e^{i(kx-\omega t)}$$

$$E_{0_x} = |E_{0_x}e^{i\varphi} \qquad E_{0_y} = |E_{0_y}e^{i(\varphi+\delta)}$$

Physikalisches Feld:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \Re\left[(E_{0_x}\boldsymbol{e}_x + E_{0_y}\boldsymbol{e}_y)e^{i(k\cdot r-\omega t)}\right]\\ &= |E_{0_x}|\cos(kz-\omega t+\varphi)\boldsymbol{e}_x + |E_{0_y}|\cos(kz-\omega t+\varphi+\delta)\boldsymbol{e}_y\end{aligned}$$

Fälle:

i) $\delta = 0$ oder $\delta = \pm\pi$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{E} = \underbrace{(|E_{0_x}\boldsymbol{e}_x \pm |E_{0_y}\boldsymbol{e}_y)}_{\text{orts- und Zeitunabh.}}\cos(kz-\omega t)$$

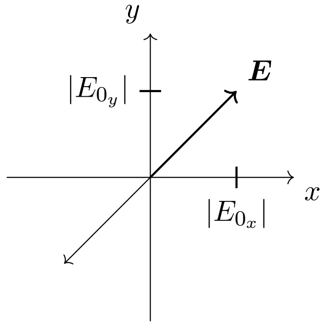
$\rightarrow$ $\boldsymbol{E}$ schwingt in fester Richtung! Die **Polarisationsrichtung** $\rightarrow$ **linear Polarisiert**

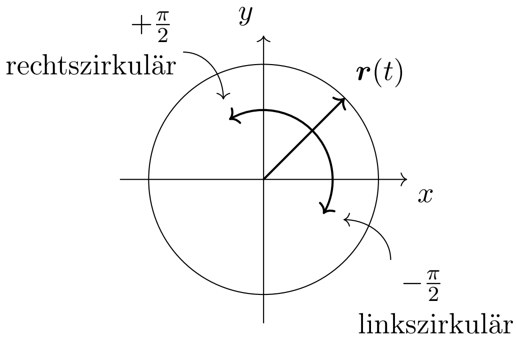
ii) $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ $\quad |E_{0_x}| = |E_{0_y}| = E$ **Zirkulär Polarisiert**

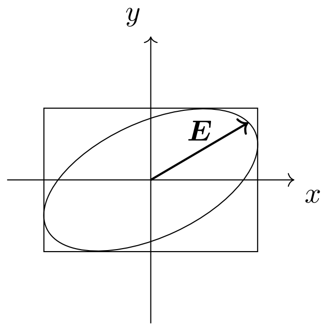
$$\boldsymbol{E} = E\underbrace{(\boldsymbol{e}_x\cos(kz-\omega t+\varphi)) \mp \boldsymbol{e}_y\sin(kz-\omega t+\varphi))}_{=\boldsymbol{r}(t)}$$

$|\boldsymbol{r}| = 1$ und $\boldsymbol{r}$ läuft mit ω um

iii) $\delta, |E_{0_x}|, |E_{0_y}|$ beliebig: **elliptisch Polarisiert**







Wiederholung

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \qquad \omega = |\boldsymbol{k}|v$$
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 e^{i(\tilde{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}-\tilde{\omega} t)} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}$$

andere Formen der EM-Wellen

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \int \mathrm{d}^3k\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega(k)t)}$$

Wellenpakete:
Kugelwellen

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0\frac{e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}}{r}$$

Flächen gleicher Phase:
eine Kugelwelle hat Amplitude $\rho \propto \frac{1}{r}$

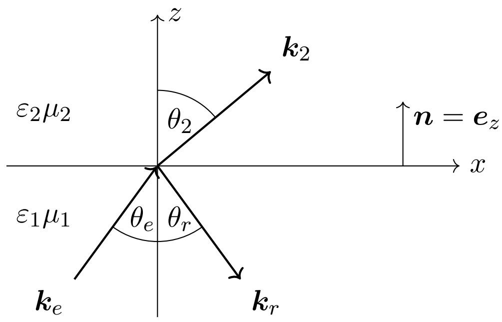
3.5 Reflexion und Brechung von EM-Wellen an Grenzflächen

Wir betrachten eine ebene Grenzfläche (x-y-Ebene) zwischen zwei ungeladenen, nicht leitenden Medien.
Aus der Skizze:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}},\ \omega_e = v_1 k_e$$

und $\boldsymbol{k}_e$ ohne y-Komponente

$$\boldsymbol{k}_e = \begin{pmatrix} k_{e_y} \\ 0 \\ k_{e_z} \end{pmatrix}$$



Die **einfallende Welle** sieht folgendermaßen aus:

$$\boldsymbol{E}_e = \boldsymbol{E}_{e_0} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$
$$\boldsymbol{B}_e = \frac{1}{\omega_e}\boldsymbol{k}_e\times\boldsymbol{E}_e = \frac{1}{v_1}\frac{\boldsymbol{k}_e}{k_e}\times\boldsymbol{E}_e$$

reflektierte Welle

$$\boldsymbol{E}_r = \boldsymbol{E}_{r_0} e^{i(\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{r}-\omega_r t)}$$
$$\boldsymbol{B}_r = \frac{1}{v_1}\frac{\boldsymbol{k}_r}{k_r}\times\boldsymbol{E}_r$$

gesamtes Feld in Medium 1:

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_e + \boldsymbol{E}_r$$

transmittierte Welle

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_{2_0} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$
$$\boldsymbol{B}_2 = \frac{1}{v_2}\frac{\boldsymbol{k}_2}{k_2}\times\boldsymbol{E}_2$$

3.5.1 Stetigkeitsbedingunen an Grenzflächen

Hier: ungeladene, nicht leitende Medien: $\rho_f = 0 = \boldsymbol{j}_f$

Maxwell-Gl. $\Rightarrow$ Stetigkeitsbedingungen für $\boldsymbol{r} = (x, y, 0)$

i) mit $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = 0$

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E}_1 - \varepsilon_2 \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E}_2 = 0$$

ii) mit $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ und $\boldsymbol{t} \sim \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$

$$\boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0$$

iii) mit $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = 0$$

iv) mit $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \cancel{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$

$$\boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu_1} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{B}_1 - \frac{1}{\mu_2} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{B}_2 = 0$$

Erläuterung zu Punkt ii) und iv):

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad \to \quad \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0$$

$$\int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) = -\int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \underbrace{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f} \boldsymbol{B}}_{\overset{\Delta x \to 0}{\to} 0}$$

$$= \int_{\partial F} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E} \qquad \to \qquad \int \mathrm{d}s \; \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0$$

Aus den vier Stetigkeitsbedingungen ergeben sich folgende Schlussfolgerungen:

ii)

$$\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{E}_e + \boldsymbol{E}_r)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{E}_{2_0} e^{i(\boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{r} - \omega_2 t)} = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{E}_{e_0} e^{i(\boldsymbol{k}_e \cdot \boldsymbol{r} - \omega_e t)} + \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{E}_{r_0} e^{i(\boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r} - \omega_r t)}$$

$\forall \boldsymbol{r} = (x, y, 0), \forall t \to$ Die Orts- und Zeitabhängigkeit im Exponenten muss gleich sein!

$$\boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{r} - \omega_2 t = \boldsymbol{k}_e \cdot \boldsymbol{r} - \omega_e t = \boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r} - \omega_r t$$

$\boldsymbol{r} = 0 : \Rightarrow \;\; \omega_2 = \omega_e = \omega_r := \omega$

Die gleiche Schlussfolgerung geht für die Wellenvektoren nicht, da wir hier die z-Komponente gar nicht beachten und damit keine Aussagen über die Gleichheit der Vektoren machen können.

Für die einfallende und reflektierte Welle im Medium 1 gilt:
$v_1 = \frac{\omega_e}{|\boldsymbol{k}_e|} = \frac{\omega_r}{|\boldsymbol{k}_r|}$

$$\to \quad |\boldsymbol{k}_e| = |\boldsymbol{k}_r| := k_1$$

Somit sind auch beide Wellenlängen λ_1 gleich!

Für die Welle im Medium 2 gilt:

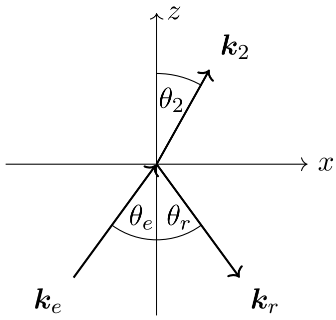
$$
\begin{aligned}
k_2 &= \frac{\omega_2}{v_2} = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2} \\
&= \omega\sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}}\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} = \underbrace{\frac{\omega}{v_1}}_{k_1}\sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}} = k_1\sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}} = k_1\cdot\frac{n_2}{n_1}
\end{aligned}
$$

weiterhin: $t = 0 : \Rightarrow \quad \boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_e\cdot\boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{r}$

$k_{2_x}x + k_{2_y}y = k_{e_x}x + \underbrace{k_{e_y}y}_{=0} = k_{r_x}x + k_{r_y}y =$

$k_{e_y} = 0 \quad \Rightarrow k_{2_y} = 0 = k_{r_y} \Rightarrow \boldsymbol{k}_e, \boldsymbol{k}_r, \boldsymbol{k}_2$ liegen in einer Ebene (hier: x-y-Ebene), der Einfallsebene.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{k}_e &= k_e(\sin\theta_e\boldsymbol{e}_x + \cos\theta_e\boldsymbol{e}_z) \\
\boldsymbol{k}_r &= k_r(\sin\theta_r\boldsymbol{e}_x - \cos\theta_r\boldsymbol{e}_z) \\
\boldsymbol{k}_2 &= k_2(\sin\theta_2\boldsymbol{e}_x + \cos\theta_2\boldsymbol{e}_z)
\end{aligned}
$$



$k_e = k_r := k_1$

Reflexionsgesetz

$\boldsymbol{r} = (x, 0, 0): \quad \boldsymbol{k}_e\cdot\boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{r}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{k}_e\cdot\boldsymbol{r} &= xk_1\sin\theta_e \\
\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{r} &= xk_1\sin\theta_r
\end{aligned}
$$

Reflexionsgesetz

$$\theta_e = \theta_r$$

Brechungsgesetz

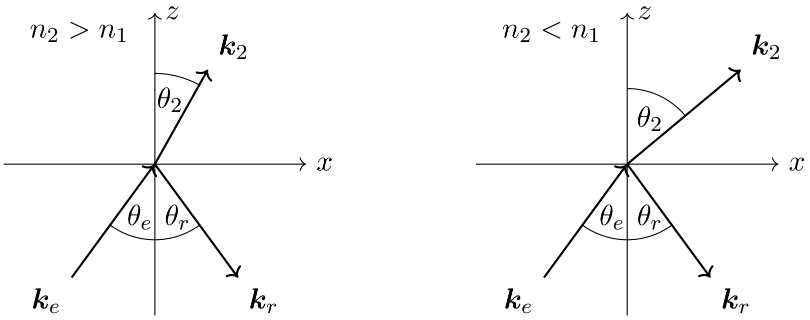
$\boldsymbol{r} = (x, 0, 0): \quad \boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_e\cdot\boldsymbol{r}$

$$
\begin{aligned}
k_2\sin\theta_2 &= k_1\sin\theta_1 \\
=& k_1\sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}} = k_1\frac{n_2}{n_1}
\end{aligned}
$$

n : Brechungsindex

Snellius'sches Brechungsgesetz

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$



Für $n_2 > n_1$: Grenzfall $\theta_1 \coloneqq \theta_g$ bei dem Totalreflexion auftritt (d.h. $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$)

$$\sin\theta_g = \frac{n_2}{n_1}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{n_2}{n_1}$$

z.B. Wasser $n_1 \approx 1{,}33$, Luft $n_2 \approx 1 \Rightarrow \theta_g \approx 49°$