

# Theoretische Physik II

## Elektrodynamik

Vorlesung von Prof. Dr. Michael Thoss im Wintersemester 2018

Markus Österle  
Andréz Gockel

15.10.2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einführung</b>	<b>2</b>
0.1	Zur Vorlesung . . . . .	2
0.2	Einführung und Überblick . . . . .	3
0.2.1	Rückblick . . . . .	3
0.2.2	Elektrodynamik . . . . .	3
0.3	Aufbau der Vorlesung . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Elektrostatik</b>	<b>4</b>
1.1	Elektrische und Coulombsches Gesetz . . . . .	4
1.1.1	Coulombsches Gesetz . . . . .	4
1.2	Elektrisches Feld . . . . .	5
1.2.1	Feld eines Systems von Punktladungen . . . . .	5
1.2.2	Feld einer kontinuierlichen Ladungsverteilung . . . . .	6
1.2.3	Ladungsdichte einer Punktladung . . . . .	6
1.2.4	Flächenladungsdichte . . . . .	7
1.2.5	Linenladungsdichte . . . . .	8
1.3	Feldgleichungen und elektrostatische Potential . . . . .	8
1.3.1	Elektrostatisches Potential . . . . .	9
1.3.2	Feldgleichung (differentielle Form) . . . . .	9
1.3.3	Divergenz (Quellen) . . . . .	10
1.3.4	Zusammenfassung: . . . . .	11
1.3.5	Integralsätze der Vektoranalysis . . . . .	13
1.3.6	Integrale Form der Feldgleichung . . . . .	15
1.3.7	Gaußsches Gesetz . . . . .	15
1.3.8	Satz von Stokes . . . . .	16
1.3.9	Zusammenfassung: Feldgleichungen der Elektrostatik . . . . .	16
1.4	Elektrostatische Energie . . . . .	16
1.4.1	Elektrostatische Potentielle Energie . . . . .	17
1.5	Verhalten des el. Feldes an Grenzflächen mit Flächenladung . . . . .	19
1.6	Randwertprobleme (RWP) der Elektrostatik und Lösungsmethoden . . . . .	21
1.6.1	Formulierung des Randwertproblems . . . . .	21
1.6.2	Methode der Bildladung (Spiegelladung) . . . . .	21
1.6.3	Formale Lösungen des elektrostatischen Randwertproblems mit Greenschen Funktionen . . . . .	24

# Kapitel 0

## Einführung

### 0.1 Zur Vorlesung

**Dozent** Michael Thoss

**Übungen** Donnerstag/Freitag (ILIAS) beginnt 18./19.10.18

**Übungsleiter** Jakob Bätge

**Abgabe der Hausaufgaben** bis Dienstag 12:00 - Briefkasten GuMi

**Klausur** 13.02.19, 10-12 Uhr, Hörsaal Anatomie (Nachklausur: 26.19, 10-12 Uhr)

**Ankündigungen** ILIAS Pass: theophy2.thoss18

**Angaben** Vorlesung: 4 SWS, Übung: 2 SWS, ECTS: 7

**Vorkenntnisse** Mathematik: Analysis für Physiker (Vektor Rechnung), Theoretische Physik I, Experimental Physik II.

#### Hinweis zu den Übungen

- Keine Anwesenheitspflicht.
- Keine Punktzahl nötig für Klausurzulassung.
- Kann auch während Übungen abgegeben werden.

Lehrbücher:

- W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 3: Elektrodynamik* (Springer)
- D.J. Griffiths, *Elektrodynamik: Eine Einführung* (Pearson)
- T. Fließbach, *Elektrodynamik* (Spektrum Akademischer Verlag)
- J.D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik* (Walter de Gruyter) [geht dieser Vorlesung hinaus](#)

## 0.2 Einführung und Überblick

Die vier fundamentalen Wechselwirkungen (WW):

- Starke WW
- Elektromagnetische WW Wird in dieser Vorlesung betrachtet
- Schwache WW
- Gravitation

### 0.2.1 Rückblick

Theoretische Physik 1:

- Mechanik
- Punktmechanik: Bahnkurven von Körpern
- Bewegungsgleichung:  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$

### 0.2.2 Elektrodynamik

- Grundlegende Größen
- Felder
- 

$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$	$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$
elektrisches Feld	Magnetfeld

→ Feldtheorie sehr wichtiges Konzept

Wie sind Elektrische Felder definiert?

Experimentelle Definition als Messgröße: Kraft auf Ladung

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t))$$

Theoretische Definition ist Mathematisch: Feldgleichungen-Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{j}\end{aligned}$$

Hierbei steht  $\rho$  für die Ladungsdichte und  $\mathbf{j}$  für die Stromdichte.

## 0.3 Aufbau der Vorlesung

1./2. Statische Phänomene:  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \underbrace{\nabla \times \mathbf{E} = 0}_{1. \text{ Elektrostatik}} & & \underbrace{\nabla \times \mathbf{B} = 0}_{2. \text{ Magnetostatik}}\end{aligned}$$

3. Zeitabhängige magnetische/elektrische Felder

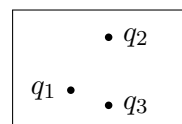
4. Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

# Kapitel 1

## Elektrostatik

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit **ruhenden Ladungen** und **zeitunabhängigen Feldern**. Das Grundproblem besteht darin, dass wir eine Ladungsverteilung haben und das Elektrische Feld und dessen Potential bestimmen wollen.

→ Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , el. Potential  $\Phi(\mathbf{r})$



### 1.1 Elektrische und Coulombsches Gesetz

Ladung: Beobachtungstatsachen:

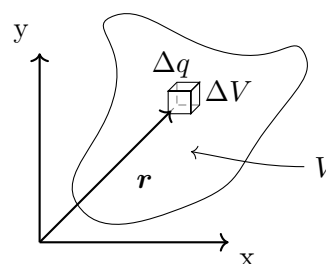
- i) Zwei Arten „+“, „-“
- ii) Abgeschlossenes System: Ladung erhalten:  $q = \sum_i q_i = \text{const.}$
- iii) Ladung ist quantisiert in Einheiten der Elementarladung:

$$q = ne, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$n = -1$ : für ein Elektron wäre ein Beispiel einer Punktladung

Kontinuierliche Ladungsverteilung Ladungsdichte  
 $\rho(\mathbf{r}) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}} = \frac{\Delta q}{\Delta V}$  Gesamtladung in  $V$ :

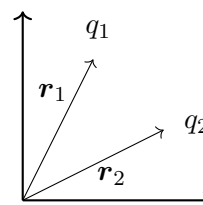
$$Q = \int_V d^3r \rho(\mathbf{r})$$



#### 1.1.1 Coulombsches Gesetz

Die Kraft, welche eine am Ort  $\mathbf{r}_2$  lokalisierte Punktladung auf eine Punktladung am Ort  $\mathbf{r}_1$  ausübt, ist gegeben durch:

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \underbrace{\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}_{\mathbf{e}_{r_{12}}}$$



1.  $\mathbf{F}_{12} \sim q_1 q_2$
2.  $\mathbf{F}_{12} \sim \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}$

3.  $\mathbf{F}_{12} \sim q_1 q_2 \mathbf{e}_{r_{12}}$

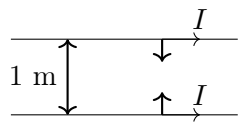
4.  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$

Es gilt das Superpositionsprinzip: Das heißt, durch vektorielle Addition der Kräfte kann die Gesamtkraft ermittelt werden.

$$\mathbf{F}_1 = k \sum_{j=2}^N \frac{q_1 q_j}{r_{1j}^2} \mathbf{e}_{r_{1j}}$$

**Zur Konstanten  $k$ :** Die Konstante ist abhängig von dem verwendeten Maßsystemen.

- i) Gauß-System (cgs):  $k \equiv 1$ ,  $\text{dyn} = \frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2} = 10^{-5} \text{ N}$  1 dyn =  $\frac{(1\text{ESE})^2}{\text{cm}^2}$  1ESE =  $\frac{\sqrt{\text{g} \cdot \text{cm}^3}}{\text{s}}$   
 ii) SI (MKSA-System): Definition von A = Ampère

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$


Strom =  $\frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}} \Rightarrow 1\text{A} = \frac{1\text{C}}{1\text{s}} \rightarrow e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = k \frac{2I^2}{c^2 d} \rightarrow k = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}} \frac{c^2 1\text{m}}{2(1\text{A})^2} = 10^{-7} c^2 \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

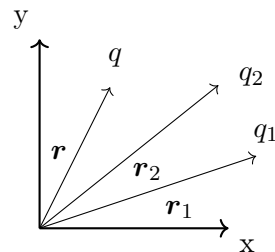
Damit erhalten wir für die Dielektrizitätskonstante des Vakuums:

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$

## 1.2 Elektrisches Feld

### 1.2.1 Feld eines Systems von Punktladungen

$N$ -Ladungen  $q_1, \dots, q_N$  ruhen an den Orten  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ . Nun bringen wir eine Testladung  $q$  am Ort  $\mathbf{r}$  mit ein.



Kraft von  $q_1, q_2$  auf  $q$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \sum_{j=1}^N q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Somit ist das elektrische Feld:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3}$$

**Bemerkung**

i) Testladung klein (formal:  $\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q}$ )

ii) math.  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  Vektorpfeil

$$\text{kartesisch: } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} E_x(\mathbf{r}) \\ E_y(\mathbf{r}) \\ E_z(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

iii) Wechselwirkungsprozess: 2 Teile

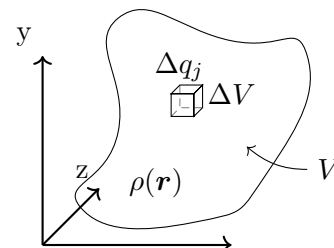
$$q_j \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

iv) Superpositionsprinzip gilt

### 1.2.2 Feld einer kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}')}_{\text{schließt alle Ladungen ein}} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3}$$

$\rho(\mathbf{r}_j) = \frac{\Delta q_j}{\Delta V_j}$



$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= k \sum_j \Delta q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \\ &= k \sum_j \Delta V_j \rho(\mathbf{r}_j) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \\ \text{mit } \Delta V_j \rightarrow 0 &\rightarrow k \int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \end{aligned}$$

### 1.2.3 Ladungsdichte einer Punktladung

**Deltafunktion**

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

Punktladung in  $\mathbf{r}_0 \Rightarrow \rho(\mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$

Ladungsdichte divergiert in  $\mathbf{r}_0$

$$\rho(\mathbf{r}_0) = \infty$$

Modell für Punktladung: Ladung  $q$  in Kugel mit Radius  $\varepsilon$  um  $\mathbf{r}_0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\rho_2(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{q}{v_k} & |\mathbf{r}| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \underbrace{\Theta(\varepsilon - |\mathbf{r}|)}_{\text{Stufenfunktion}}$$

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_\varepsilon(\mathbf{r}) = \begin{cases} \infty & \mathbf{r} = 0 \\ 0 & \mathbf{r} \neq 0 \end{cases}$$

Divergenz muss so sein, dass

$$\int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) = q$$

## Definition Delta-Funktion (Diracsche Deltafunktion)

1.

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{cases} \infty & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \\ 0 & \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \end{cases}$$

2.

$$\int_V d^3r f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = f(\mathbf{r}_0)$$

**Mathematik** Distribution - Funktional

Funktional: Abb. Funktionen  $\mapsto \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$\delta_{\mathbf{r}_0} : f \mapsto f(\mathbf{r}_0)$$

**Physik**

$$\int d^3r f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = f(\mathbf{r}_0)$$

$\delta$ -Fkt. als Grenzwert einer Folge von Funktionen im Integral

$$\int d^3r f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int d^3r f(\mathbf{r}) g_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

mit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \\ \infty & \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \end{cases}$$

$$\int_V d^3r g_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 1$$

Beispiel:  $g_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{\Theta(\varepsilon - |\mathbf{r}|)}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3}$

Mehrere Punktladungen  $q_j$  in  $\mathbf{r}_j$

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_j q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3r' \sum_j q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \end{aligned}$$

### 1.2.4 Flächenladungsdichte

$$\sigma(\mathbf{r}) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}} = \frac{\Delta q}{\Delta A}$$

erzeugte elektrisches Feld:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_A \underbrace{df'}_{\text{Flächenelement}} \sigma(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Beispiel: Elektrisches Feld einer homogenen Flächenladung  $\sigma = \text{const.}$  in  $x$ - $y$ -Ebene

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \sigma \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad \mathbf{r}' = (x', y', 0)$$



Symmetrie:  $\mathbf{E}$  unabhängig von  $x, y$       $\mathbf{r} = (0, 0, z)$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (-x', -y', z), \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3 = (x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}$$

$$E_x \sim \sigma \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{(x')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} = 0 = E_y$$

$$\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma \int_{-\infty}^{\infty} dx' \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{(x')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}}_{\left. \frac{1}{x'^2 + z'^2} \frac{x'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \right|_{-\infty}^{\infty}} =$$

### 1.2.5 Linienladungsdichte

$$\lambda(\mathbf{r}) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Länge}} = \frac{\Delta q}{\Delta s}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_{\gamma} ds' \lambda(\mathbf{r}')}_{\text{Linienintegral}} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Beispiel: Elektrisches Feld einer homogenen Linienladung  $\lambda = \text{const.}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\gamma} ds' \lambda \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad \gamma : z' \mapsto \mathbf{r}'(z') = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z' \end{pmatrix} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\mathbf{r} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z' \end{pmatrix}}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\tilde{z} = z' - z$$

$$E_x = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{z} \frac{1}{(x^2 + y^2 + \tilde{z}^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{z - z'}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = 0$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{XXX}$$

### 1.3 Feldgleichungen und elektrostatische Potential

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

### 1.3.1 Elektrostatisches Potential

elektrische Feld ist ein Potentialfeld  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) = -\left(\mathbf{e}_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}} = -\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2(x-x')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} = \frac{(x-x')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \left( -\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \nabla_F \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

→ elektrostatisches Potential

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + c$$

übliche Konvention:  $c = 0$  ( $\phi(\mathbf{r}) \mid |\mathbf{r}| \rightarrow \infty \rightarrow 0$ )

Potential einer Punktladung in  $\mathbf{r}_0$ :

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

**E**

(Funktional-analysis Siegfried Großmann Springer)  
(Landau-Lipschitz Buch geht weit der Vorlesung hinaus)

### 1.3.2 Feldgleichungn (differentielle Form)

Rotation (Wirbel)

$$\text{rot } \mathbf{E} \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{e}_x \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \Rightarrow \nabla \times$$

$$\Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times (\nabla\phi) = 0$$

Mathe: Es sind äquivalent

i  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$

ii  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  (auf einfach zusammenhäng. Gebiet)

iii Kurvenintegral  $\int_{\gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$  ist wegunabhängig

$$\int_{r_1}^{r_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = - \int_{r_1}^{r_2} dt \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \nabla\phi(\mathbf{r}(t))}_{\frac{d\phi}{dt}} = \underbrace{(\phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1))}_{\text{Potentialdifferenz}}$$

### 1.3.3 Divergenz (Quellen)

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \end{aligned}$$

$x$ -Anteil:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x - x'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} &= \frac{1 \cdot [\dots]^{3/2} (x - x') (x - x')^{3/2} \cdot 2 [\dots]^{1/2}}{[\dots]^3} \\ &= \frac{[\dots]^{1/2} ((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 - 3(x - x')^2)}{[\dots]^{3/2}} \\ &= \frac{(y - y')^2 + (z - z')^2 - 2(x - x')^2}{[\dots]^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{y - y'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \frac{(x - x')^2 + (z - z')^2 - 2(y - y')^2}{[\dots]^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{z - z'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2 - 2(z - z')^2}{[\dots]^{3/2}}$$

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 0 \quad \text{falls} \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$$

$\Rightarrow$  falls  $\mathbf{r} \notin V$ , d.h.  $\mathbf{r}$  in Gebiet ohne Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{r}) = 0$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

$\mathbf{r} \in V$ : Grenzwertbetrachtung (Regularisierung des Integranden)  
statt

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

betrachten wir:

$$f_a(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + a^2]^{3/2}} \quad a \in \mathbb{R}, a > 0$$

am Ende Grenzwert  $\lim_{a \rightarrow 0}$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{a \rightarrow 0} \int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}') \quad \boxed{\nabla_{\mathbf{r}} \cdot f_a(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \quad \text{}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x - x'}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + a^2]^{3/2}} &= \frac{[\dots + a^2]^{3/2} - (x - x') \frac{3}{2} \cdot 2(x - x') [\dots + a^2]^{1/2}}{[\dots + a^2]^3} \\ &= \frac{(y - y')^2 + (z - z')^2 + a^2 - 2(x - x')^2}{[\dots + a^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot f_a(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{3a^2}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + a^2]^{5/2}}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} f_a(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \\ \infty & \mathbf{r} = \mathbf{r}' \end{cases}$$

$\Rightarrow$  zum Integral  $\int_V d^3r' \dots$  trägt (in Limes  $a \rightarrow 0$ ) nur der Bereich  $\mathbf{r}' \approx \mathbf{r}$  bei

$$K_R(\mathbf{r}) = \{\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \leq R\}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}} \cdot f_a(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{K_R(F)} d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{3a^2}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + a^2]^{5/2}} + \lim_{a \rightarrow 0}$$

1. Integral:

$$\begin{aligned} \int_{K_R(0)} d^3\tilde{r} \rho(\mathbf{r}) \frac{3a^2}{(\tilde{r}^2 + a^2)^{5/2}} &= \rho(\mathbf{r}) \underbrace{\int_0^R d\tilde{r} \frac{3a^2}{(\tilde{r}^2 + a^2)^{5/2}}}_{\left[ \frac{\tilde{r}^3}{(\tilde{r}^2 + a^2)^{3/2}} \right]_0^R} \underbrace{\int d\Omega}_{\substack{\sin \theta d\theta d\varphi \\ = 4\pi}} \\ &= 4\pi \rho(\mathbf{r}) \frac{R^3}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 4\pi \rho(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

2. Integral:

$$\begin{aligned} \int_{K_R(0)} d^3\tilde{r} \underbrace{\tilde{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r})}_{\parallel \tilde{\mathbf{r}} \mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{r}}}} \frac{3a^2}{(\tilde{r}^2 + a^2)^{5/2}} &= \underbrace{\int_0^R d\tilde{r} \frac{3a^2 \tilde{r}^3}{(\tilde{r}^2 + a^2)^{3/2}}}_{\frac{2}{3}a - 3a^2 \left( \frac{R^2 + \frac{2}{3}a^2}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \right)} \underbrace{\int d\Omega \mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{r}}} \cdot \nabla \rho(\mathbf{r})}_{\text{unabh. von } a} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

gilt auch für alle höheren Terme

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + a^2]^{3/2}} = 4\pi \rho(\mathbf{r})$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{''}{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r})$$

$$\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$$

### 1.3.4 Zusammenfassung:

Feldgleichungen der Elektrostatik Mathe: partielle DGL

$$\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \text{ inhomogene DGL}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \text{ homogene DGL}$$

DGL für Potential  $\phi$ :  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \nabla \cdot (-\nabla\phi) = -\nabla \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \phi \\ \partial_y \phi \\ \partial_z \phi \end{pmatrix} \\ &= -\underbrace{\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)}_{=:\Delta\phi}\end{aligned}$$

Partielle DGL 2. Ordnung:

### Poissonsgleichung

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r})$$

für Gebiete mit  $\rho(\mathbf{r}) = 0$ :

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{Laplacegleichung}$$

Darstellung der Deltafunktion:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \rho(\mathbf{r}') \underbrace{\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + a^2]^{3/2}}}_{\frac{3a^2}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + a^2]^{5/2}} =: g_a(\mathbf{r}' - \mathbf{r})} = 4\pi\rho(\mathbf{r})$$

$\frac{1}{4\pi}g_a$  liefert Grenzwertdarstellung der  $\delta$ -funktion.

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{4\pi} g_a(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} g_a(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \\ \infty & \mathbf{r} = \mathbf{r}' \end{cases}$$

$$\delta(\mathbf{r}) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{r}^2}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\stackrel{\text{formal}}{=} \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \underbrace{\frac{\mathbf{r}}{r^3}}_{=-\nabla \frac{1}{r}} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \left( \nabla \frac{1}{r} \right) = \frac{-1}{4\pi} \Delta \frac{1}{r} \Rightarrow \Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$$

z.B. Potential einer Punktladung  $\rho$  q in  $\mathbf{r}_0$ :

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \underbrace{\Delta_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}}_{=-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}_{=\rho(\mathbf{r})} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r})$$

## Wiederholung

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla \Phi$$

$$\Rightarrow \Delta \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r})$$

### 1.3.5 Integralsätze der Vektoranalysis

1) **Gaußscher Satz:** Sei  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  ein Vektorfeld im Volumen  $V \subset \mathbb{R}^3$ , so gilt:

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

$\partial V$  Rand von  $V$

$$d\mathbf{f} = \mathbf{n} df$$

↓  
nach aussen orientierter Normaleneinheitsvektor

*Bemerkung:*

i) Analogie 1D: Fundamentalsatz der Integralrechnung:

$$\int_a^b dx \frac{df}{dx} = f(b) - f(a)$$

ii) Geometrische / physikalische Integration:

Fluss des Vektorfeldes  $\mathbf{A}$  durch  $\partial V$

$$\int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{A}$$

Integral über die Quellen von  $\mathbf{A}$

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \text{const.} \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

*Beispiel:* Geschwindigkeit einer Flüssigkeit:  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{v} = \text{const.} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = 0$$

$\Rightarrow$  Es gibt keine Quellen von  $\mathbf{v}$

$$\nabla \cdot \mathbf{r} \neq 0 \quad \int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \neq 0$$

iii)

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_0^{\Delta x} dx \int_0^{\Delta y} dy \int_0^{\Delta z} dz \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\Delta z} dz \int_0^{\Delta y} dy \underbrace{\int_0^{\Delta x} dx \frac{\partial A_x}{\partial x}}_{A_x(\Delta x, y, z) - A_x(0, y, z)} \\ &= \int_0^{\Delta z} dz \int_0^{\Delta y} dy A_x(\Delta x, y, z) - \int_0^{\Delta z} dz \int_0^{\Delta y} dy A_x(0, y, z) \\ &= \int_{F_A^+} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{A} + \int_{F_A^-} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{A} \end{aligned}$$

$$F_x^+ : d\mathbf{f} = \mathbf{e}_x dy dz \quad F_x^- : d\mathbf{f} = -\mathbf{e}_x dy dz$$

ebenso gilt dann für die anderen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta x} dx \int_0^{\Delta z} dz \int_0^{\Delta y} dy \frac{\partial A_y}{\partial y} &= \int_{F_y^+} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{A} + \int_{F_y^-} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{A} \\ \int_0^{\Delta x} dx \int_0^{\Delta y} dy \int_0^{\Delta z} dz \frac{\partial A_z}{\partial z} &= \int_{F_z^+} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{A} + \int_{F_z^-} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{A} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{A} = \int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{A}$$

**2) Stokescher Satz** Sei  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  ein Vektorfeld,  $F$  eine Fläche mit Randkurve  $\partial F$ , so gilt:

$$\int_{\text{Linienintegral} \rightarrow \partial F} d\mathbf{r} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_{\text{F} \leftarrow \text{Oberflächenint.}} d\mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}))$$

$$d\mathbf{f} = \mathbf{n} df$$

Richtung von  $d\mathbf{f}$  und Umlauf sinn von  $\partial F$ : rechte Hand Regel.

*Beispiel:*

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+1 \end{pmatrix} = 2\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{r}(\varphi) = R \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = R \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\int_{\partial F} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}(\varphi)) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi R(+\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = 2\pi R^2\end{aligned}$$

$$\int_F d\mathbf{f} \cdot \overbrace{(\nabla \times \mathbf{A})}^{2\mathbf{e}_z} = 2\pi R^2$$

Vektorfeld ohne Wirbel z.B.  $\mathbf{A} = \text{const.}$

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0$$

*Bemerkung:*

### 1.3.6 Integrale Form der Feldgleichung

### 1.3.7 Gaußsches Gesetz

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{aligned}\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_V \\ &= \int_V d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} Q_V}$$

### Berechnung elektrischer Felder für hochsymmetrische Ladungsverteilungen

*Beispiel:*

Homogen geladene Kugel mit Radius  $R$  und Gesamtladung  $Q$ . Damit ist die Ladungsdichte innerhalb der Kugel:

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_r(r) \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{r} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Fluss von  $\mathbf{E}$  durch Oberfläche einer Kugel mit Radius  $r$

$$d\mathbf{f} = \mathbf{e}_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \Rightarrow d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E} = E_r(r) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\begin{aligned}\int_{\partial K_r(0)} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E} &= \int_0^T d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi E_r(r) r^2 \sin \theta \\ &= E_r(r) r^2 4\pi \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{K_r(0)} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{K_r(0)} d^3r \rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{cases} Q & r > R \\ Q \frac{r^3}{R^3} & r \leq R \end{cases} \\ \Rightarrow E_r(r) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{r^2} & r > R \\ \frac{r}{R^3} & r \leq R \end{cases}\end{aligned}$$



### 1.3.8 Satz von Stokes

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

**Definition:**  $\gamma = \partial F$

$\int_{\gamma}$  ist dann ein Linienintegral über eine geschlossene Kurve

$$\int_{\gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = \int_F d\mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0$$

### 1.3.9 Zusammenfassung: Feldgleichungen der Elektrostatik

differentielle Darstellung:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi \quad \rightarrow \quad \Delta \Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

Integral Darstellung:

$$\int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_V \quad , \quad \oint_{\gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = 0$$

## 1.4 Elektrostatische Energie

potentielle Energie einer Punktladung im äußeren elektrischen Feld

Kraft auf Ladung  $q$ :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

Die Arbeit bei Verschiebung der Ladung von  $\mathbf{a}$  nach  $\mathbf{b}$

$$\begin{aligned} W &= - \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = -q \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= q \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} d\mathbf{r} \cdot \nabla \Phi = q \underbrace{(\Phi(\mathbf{b}) - \Phi(\mathbf{a}))}_{\text{Potentialdifferenz}} \end{aligned}$$

Die Arbeit um  $q$  aus dem unendlichen  $\infty$  nach  $\mathbf{r}$  zu bringen ist dann:

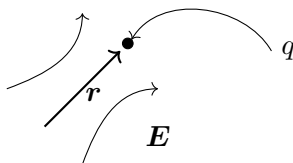
$$W = q(\Phi(\mathbf{r}) - \Phi(\infty))$$

Zur Referenz:  $\Phi(\infty) = 0$

Damit ist die Energie der Ladung  $q$  im äußeren Feld:

$$\Rightarrow W = q(\Phi(\mathbf{r}))$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi$$



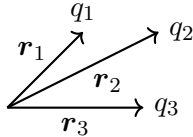
### 1.4.1 Elektrostatistische Potentielle Energie

**Energie einer Verteilung von Punktladungen**  $N$  Ladungen  $q$ : an Orten  $\mathbf{r}_i$

Zunächst:  $\underbrace{i-1}_{\text{erzeugen am Ort } \mathbf{r}_i}$  Ladungen  $q_j$  bei  $\mathbf{r}_j$

Das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}$$



Arbeit um  $i$ -te Ladung aus dem unendlichen nach  $\mathbf{r}$  zu bringen:

$$W_i = q_i \Phi(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Somit ergibt sich die gesamte Arbeit für  $N$  Ladungen als:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=2}^N W_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \end{aligned}$$

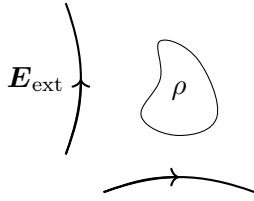
$$\Rightarrow W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left( \underbrace{\sum_{\substack{j \\ j \neq i}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}}}_{\Phi_i(\mathbf{r}_i)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i(\mathbf{r}_i) \end{aligned}$$

**Energie einer kontinuierlichen lokalisierten Ladungsverteilung**



$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}_{\Phi(\mathbf{r})} \end{aligned}$$



$$W_{\text{ext}} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r})$$

Energie  $W$  durch  $\mathbf{E}$  ausdrücken:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad \Rightarrow \quad W = -\frac{1}{2} \int d^3r \varepsilon_0 \underbrace{\Delta\Phi(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})}_{\substack{\nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) - (\nabla \Phi)^2 \\ \parallel \\ \mathbf{E}}} \\ &= -\frac{\varepsilon_0}{2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi)}_{\substack{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R(0)} d^3r \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial K_R(0)} d\mathbf{f} \cdot \underbrace{(\Phi \nabla \Phi)}_{\substack{R \rightarrow \infty \frac{1}{R^3} \\ \sim \frac{1}{R}}} = 0}} + \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Zur Umformung oben wurde benutzt:

$$\Phi \stackrel{R \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{R} \quad \nabla \Phi \sim \frac{1}{R^2} \quad d\mathbf{f} = \underbrace{\mathbf{n}}_{\sim R^2} df$$

Damit ergibt sich für die Energie einer Verteilung von Punktladungen

$$\Rightarrow \quad \boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \mathbf{E}^2(\mathbf{r})} \quad \text{nicht für Punktladungen}$$

Energiedichte des elektrostatischen Feldes

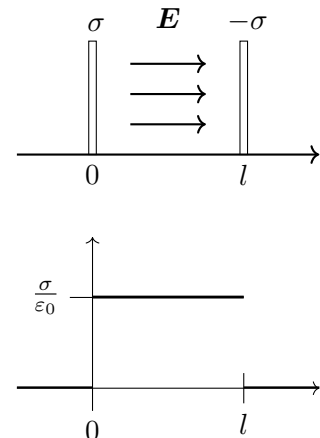
$$\boxed{w(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2(\mathbf{r})}$$

### Beispiel: Plattenkondensator

Fläche  $F$ , Ladung  $\rightarrow r = \frac{q}{F} \rightarrow \mathbf{E} = \frac{r}{\varepsilon_0} \mathbf{e}_x$

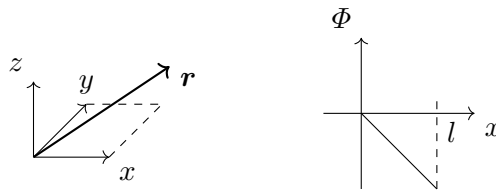
$\rightarrow$  Die Energiedichte ist:  $w = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$  (nicht für Punktladungen)

$\rightarrow$  Die Energie beträgt:  $W = \int d^3r w(\mathbf{r}) = l \cdot F \cdot \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$



## Potentialdifferenz - Spannung

$$\Phi(\mathbf{r}) - \Phi(0) = - \int_0^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') = - \int_0^x dx' \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = - \frac{\sigma}{\varepsilon} x$$



Die Spannung zwischen zwei Kondensatorplatten ist dann:

$$U = \Phi(0) - \Phi(l) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} l = \frac{q}{\varepsilon_0 F} l$$

Die Kapazität ist also:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0 F}{l}$$

Was ist die Energie bei einer Verteilung von Punktladungen und bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung. Bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung haben wir herausgefunden:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad \text{für Punktladungen}$$

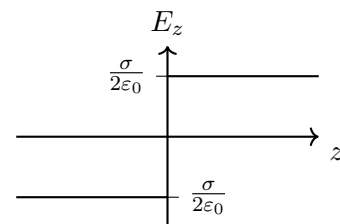
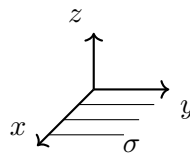
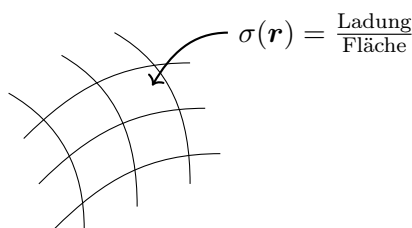
Die Energie der Punktladung selbst steckt hier nicht drinnen. Man muss dabei aufpassen, welche Gleichung man für welches Modell benutzt.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \int d^3r \mathbf{E}^2 = \int d^3r \frac{1}{r^4} = \infty$$

## 1.5 Verhalten des el. Feldes an Grenzflächen mit Flächenladung

→ Diskontinuitäten von  $\mathbf{E}$

*Beispiel:* Wir betrachten eine homogene Flächenladung.



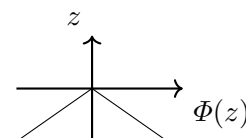
$$\Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{sgn}(z) \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{E}_\perp = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{E}_\parallel = 0$$

Das elektrische Feld  $\mathbf{E}_\parallel$  ist gleich der Ableitung des elektrischen Potentials:

Das elektrische Potential ist also stetig.



**Normalkomponente  $\mathbf{E}_\perp$**  Gaußscher Satz für  $V$ :

$$\begin{aligned}\int_V d^3r' \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \int_{\partial V} d\mathbf{f}' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= \int_{\text{Mantel}} d\mathbf{f}' \cdot \mathbf{E} + \int_{\partial V_+} d\mathbf{f}' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \int_{\partial V_-} d\mathbf{f}' \cdot \mathbf{E} \\ &\quad \downarrow \Delta z \rightarrow 0 \quad \downarrow \Delta z \rightarrow 0 \quad \downarrow \Delta z \rightarrow 0 \\ &\quad 0 \quad \int_F df' \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_+ \quad - \int_F df' \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_-\end{aligned}$$

$\mathbf{E}_\pm$  ist das Feld auf beiden Seiten der Grenzfläche

$$\int_{\partial V} d\mathbf{f}' \cdot \mathbf{E} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} \int_F df' \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) \xrightarrow{F \rightarrow 0} F \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_+(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_-(\mathbf{r}))$$

$$\int_V d^3r' \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_F df' \sigma(\mathbf{r}') \xrightarrow{F \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon_0} F \sigma(\mathbf{r})$$

$$\Rightarrow \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_+(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_-(\mathbf{r})) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma(\mathbf{r})$$

$$E_{\perp\pm} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_\pm \quad E_{\perp+}(\mathbf{r}) - E_{\perp-}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma(\mathbf{r})$$

$$\begin{aligned}0 &= \oint_\gamma d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{E} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} \int_{-\frac{L}{2}}^{-\frac{L}{2}} ds \mathbf{t} \cdot (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) \xrightarrow{L \rightarrow 0} L \mathbf{t} \cdot (\mathbf{E}_+(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_-(\mathbf{r})) = 0 \\ &\rightarrow \mathbf{t} \cdot (\mathbf{E}_+(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_-(\mathbf{r})) = 0\end{aligned}$$

→ Die Tangentialkomponente ist stetig

$$E_{\parallel+} = E_{\parallel-}$$

Insgesamt ergibt sich damit:

$$\mathbf{E}_+(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_-(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{n}$$

Das elektrische Potential  $\Phi$  ist damit stetig.

$$\underbrace{\Phi(\mathbf{r}_b) - \Phi(\mathbf{r}_a)}_{\Phi_+(\mathbf{r}) - \Phi_-(\mathbf{r})} = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{E} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0$$

**Randbedingungen an el. Leitern** Leiter: Material mit freibeweglichen Ladungsträgern (Metall)

Eigenschaften von  $\mathbf{E}$  im Leiter:

i)  $\mathbf{E} = 0$

ii)  $0 = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad \rho(\mathbf{r}) = 0$

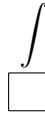
iii) Nettoladung befinden sich an Oberfläche

iv) Potential  $\Phi(\mathbf{r}_b) - \Phi(\mathbf{r}_a) = 0 \rightarrow \Phi(\mathbf{r}) = \text{const.}$

## Randbedingungen

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_- &= \frac{\sigma^-}{\varepsilon_0} \mathbf{n} \\ \mathbf{E}_- &= 0 \\ \rightarrow \mathbf{E}_+(\mathbf{r}) &= \frac{\sigma(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \mathbf{n}(\mathbf{r})\end{aligned}$$

[Folie: Ladung an Oberfläche eines Leiters]



## 1.6 Randwertprobleme (RWP) der Elektrostatik und Lösungsmethoden

### 1.6.1 Formulierung des Randwertproblems

Das elektrische Potential:  $\Phi(\mathbf{r})$  :  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}) \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

Für eine gegebene lokale Ladungsverteilung  $\rho$  gilt:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \rightarrow \Phi(\mathbf{r}) &\xrightarrow{|\mathbf{r}| \rightarrow 0} 0\end{aligned}$$

Typische Problemstellung:

Ladungsverteilung  $\rho$  + Werte des Potentials auf Randfläche

*Beispiel:*

Randwertproblem: Gegeben:  $\rho(\mathbf{r}')$  im Raumbereich  $V$

$\Phi(\mathbf{r})$  oder  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  auf Randfläche  $\partial V$

Gesucht:  $\Phi(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  überall in  $V$

Zwei Fälle:

- i)  $\Phi(\mathbf{r})$  ist auf der Randfläche gegeben  
 $\rightarrow$  **Dirichlet-Randbedingung**
- ii)  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  ist auf der Randfläche gegeben  
 $\rightarrow$  **Neumannsche Randbedingung**

Wir beschränken uns vorwiegend auf den ersten Fall. Zur Lösung dieser Probleme gibt es einige Methoden. Zum Einstieg und zur Wiederholung betrachten wir zunächst die Methode der Spiegelladung.

### 1.6.2 Methode der Bildladung (Spiegelladung)

Punktladung vor leitender, geerdeter Metallplatte

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}) = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

$$\mathbf{r} \in V \quad \mathbf{r}_0 = (d, 0, 0) \quad V = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, x > 0\}$$

Randbedingungen:

$$\Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{r} \in \partial V, \quad \text{d.h.} \quad \mathbf{r} = (0, y, z)$$

**Idee:** Ersetze ursprüngliche Problem durch "Fiktives" Problem mit zusätzlichen Ladungen außerhalb von  $V$ , welche die Randbedingungen simulieren.

Potential der Punktladungen in  $\mathbf{r}_0$ :

$$\Phi_q(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

addiere Ladung  $-q$  in  $\mathbf{r}'_0 = (-d, 0, 0) = -\mathbf{r}_0$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{q}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|} \right)$$

Schauen wir nun nach ob dies die Poisson-Gleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \underbrace{\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}}_{=-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)} - \underbrace{\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|}}_{=-4\pi\delta(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)} \right) \\ &= -\frac{q}{\epsilon_0} \underbrace{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}_{\checkmark} + \frac{q}{\epsilon_0} \underbrace{\delta(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)}_{\substack{=0 \text{ für } \mathbf{r} \neq -\mathbf{r}_0 \\ \checkmark}} \quad \forall \mathbf{r} \in V \end{aligned}$$

## Diskussion der Lösung

### i) Struktur

$$\Phi(\mathbf{r}) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}}_{=: \Phi_s(\mathbf{r})} + \underbrace{\frac{(-q)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}}_{=: \Phi_{\text{hom}}(\mathbf{r})}$$

$$\mathbf{r} \in V$$

$$\Delta\Phi_s(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r}) \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

$$\Delta\Phi_{\text{hom}}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{Laplace-Gleichung}$$

Mathematisch: Lösung inhomogener DGL

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_s(\mathbf{r}) + \Phi_{\text{hom}}(\mathbf{r})$$

$\Phi_{\text{hom}}$  wird so gewählt, dass die Randbedingungen erfüllt werden:

$$\mathbf{r} \in \partial V : \quad \Phi_o(\mathbf{r}) = \Phi_s(\mathbf{r}) + \Phi_{\text{hom}}(\mathbf{r})$$

### ii) Elektrisches Feld

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{(x-d, y, z)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{(x+d, y, z)}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|^3} \right)$$

An der Oberfläche  $x \rightarrow 0, x \geq 0$

$$|\mathbf{r} \pm \mathbf{r}_0|^3 \rightarrow (d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r} \in \partial V} = -\frac{qd}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_x$$

Durch das externe elektrische Feld verschieben sich die Ladungsträger im Metall und es entsteht eine Influenzladung an der Oberfläche.

iii) **Influenzladung auf Metalloberfläche**

$$\begin{array}{c} \mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{n} \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_x \\ \parallel \\ 0 \end{array}$$

$\mathbf{r} \in \partial V$ :

$$\sigma(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}_+(\mathbf{r}) = -\frac{qd}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

gesamte influenzierte Ladung

$$q_i = \int_{\partial V} df \sigma(\mathbf{r}) = \dots = -q$$

iv) **Kraft zwischen Punktladungen und Metallplatte**

$$\mathbf{F} = q\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0) = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0(2d)^2} \mathbf{e}_x$$

**Eindeutigkeit der Lösung des Randwertproblems**

Dirichlet-Randwertproblem:

$$\begin{array}{ll} \Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in V \\ \Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in \partial V \end{array}$$

Annahme:  $\Phi_1, \Phi_2$  lösen RWP

$$\begin{array}{ll} \text{d.h.} \quad \Delta\Phi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}) = \Delta\Phi_2(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in V \\ \Phi_1(\mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r}) = \Phi_2(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in \partial V \end{array}$$

Setze :

$$\begin{array}{l} \psi(\mathbf{r}) := \Phi_1(\mathbf{r}) - \Phi_2(\mathbf{r}) \\ \Delta\psi(\mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{r} \in V \\ \mathbf{r} \in \partial V \quad \psi(\mathbf{r}) = \Phi_1(\mathbf{r}) - \Phi_2(\mathbf{r}) = 0 \end{array}$$

**Greensche Identität:**

$g, h$  Funktionen an  $V$ :

$$\begin{aligned} & \int_V d^3r [(\nabla(\mathbf{r})) \cdot (\nabla h(\mathbf{r})) + g(\mathbf{r})\Delta h(\mathbf{r})] \\ &= \int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot (g(\mathbf{r})\nabla h(\mathbf{r})) \\ &= \int_{\partial V} d\mathbf{f} g(\mathbf{r}) \underbrace{\mathbf{n} \cdot \nabla h(\mathbf{r})}_{=\frac{\partial h}{\partial n}(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

$$h = g = \psi$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_V d^3r ((\nabla\psi)^2 + \psi(\mathbf{r}) \underbrace{\Delta\psi(\mathbf{r})}_{=0}) &= \int_{\partial V} d\mathbf{f} \underbrace{\psi(\mathbf{r})}_{=0} \frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n} \\ \Rightarrow \int_V d^3r (\nabla\psi(\mathbf{r}))^2 &= 0 \Rightarrow \nabla\psi(\mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{r} \in V \\ \psi(\mathbf{r}) &= \text{const.} \quad \psi(\mathbf{r}) = 0 \text{ in } V \Rightarrow \Phi_1(\mathbf{r}) = \Phi_2(\mathbf{r}) \end{aligned}$$



### 1.6.3 Formale Lösungen des elektrostatischen Randwertproblems mit Greenschen Funktionen

GF: generelle Methode um inhomogene DGL zu lösen

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r})$$

Greensche Funktionen der Poisson-Gleichung:  $\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  mit

**Greensche Funktionen der Poisson-Gleichung**

$$\Delta_{\mathbf{r}}\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Diese Gleichung geht von einer Punktladung mit  $q = 1$  aus, ist hier aber zunächst einmal eine Definition.

$\mathcal{G}$  bekannt

$$\rightarrow \Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')$$

$$\Delta_{\mathbf{r}}\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \underbrace{(\Delta_{\mathbf{r}}\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))}_{=\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \rho(\mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}) \quad \checkmark$$

$$\Delta_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\rightarrow \Delta_{\mathbf{r}}\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) \xrightarrow{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} 0$$

$$\rightarrow \Delta_{\mathbf{r}}\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \xrightarrow{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} 0$$

#### Dirichlet-Randwertproblem

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in V$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \partial V$$

GF:

$$\Delta_{\mathbf{r}}\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in V$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad \text{für } \mathbf{r} \in \partial V, \mathbf{r}' \in V$$

Hiermit haben wir das Grenzwertproblem auf eine Integration zurückgeführt. Dies werden wir nun Beweisen:

Die 2. Greensche Identität lautet:

$$\begin{aligned}
& \int_V d^3r' (g(\mathbf{r}') \Delta_{\mathbf{r}'} h(\mathbf{r}') - h(\mathbf{r}') \Delta_{\mathbf{r}'} g(\mathbf{r}')) \\
&= \int_{\partial V} d\mathbf{f}' \cdot (g(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} h(\mathbf{r}') - h(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} g(\mathbf{r}')) \\
& \quad g(\mathbf{r}') := \Phi(\mathbf{r}') \quad h(\mathbf{r}') := \mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \\
&\Rightarrow \int_V d^3r' \left[ \underbrace{\Phi(\mathbf{r}') \Delta_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r})}_{=-\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})} - \underbrace{\mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \Delta_{\mathbf{r}'} \Phi(\mathbf{r}')}_{=-\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}')} \right] \\
&= \int_{\partial V} d\mathbf{f}' \left[ \underbrace{\Phi(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r})}_{=\Phi_0(\mathbf{r}')} - \underbrace{\mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}'} \Phi(\mathbf{r}')}_{=0} \right] \\
&\Rightarrow = -\frac{1}{\varepsilon_0} \Phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r' \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \\
&= \int_{\partial V} d\mathbf{f}' \Phi_0(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
&= \int_{\partial V} d\mathbf{f}' \Phi_0(\mathbf{r}') \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
&\Rightarrow \Phi(\mathbf{r}) = \int_V d^3r' \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') - \varepsilon_0 \int_{\partial V} d\mathbf{f}' \Phi_0(\mathbf{r}') \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')
\end{aligned}$$

Es gilt (HA):

$$\begin{aligned}
& \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad \text{Reziprozität} \\
& \rightarrow \nabla_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \\
& \Delta_{\mathbf{r}} \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Delta_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{r}) &= \int_V d^3r' \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \\
&\quad - \varepsilon_0 \int_{\partial V} d\mathbf{f}' \Phi_0(\mathbf{r}') \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')
\end{aligned}$$