# Experimentalphysik III

Vorlesung von Prof. Dr. Oliver Waldmann im Wintersemester 2018

Markus Österle
Andréz Gockel

16.10.2018

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel I

# Spezielle Relativitätstheorie

## I.1 Vorgeschichte

**1861-1867: Maxwell Gleichungen**
Vor Maxwell brauchten alle bekannten Wellen (Wasserwellen, Schall) ein Medium oder Trägerstoff. Daher stammte die Annahme, auch elektro-magnetische Wellen also Licht bräuchte ein Medium: der Äther. Somit wollte man experimentell zu zeigen, wie schnell wir uns durch den Äther bewegen und welches das Inertialsystem, das ausgezeichnete Bezugssystem des Äthers ist. Mit dem Ziel den Äther nachzuweisen wurde das Michelson-Morley Experiment durchgeführt.

### I.1.1 Experiment von Michelson-Morley

Die Idee des Experimentes war es die Bewegung der Erde relativ zum Äther zu messen.
**Anforderungen:**

- Erde 30 km/s
- Licht $3 \cdot 10^5$ km/s

$\Rightarrow$ relative Auflösung von circa $10^{-4}$ nötig

**Prinzip**:
Lichtlaufzeiten:
Arm parallel zum Ätherwind

$$t_2 = \frac{L_2}{c+v} + \frac{L_2}{c-v} = \frac{2cL_2}{(c^2 - v^2)} = \frac{2L_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}^2}$$

Arm senkrecht zum Ätherwind

$$t_1 = 2\frac{L_1'}{c}$$

Nebenrechnung:

$$L'^2 = L^2 + (vt)^2 \quad \Rightarrow \quad (ct)^2 = L^2 + (vt)^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

$$t_1 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Somit ist die Zeitdifferenz der beiden Lichtstrahlen

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2L}{c} \, \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{2L}{c} \left( \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{lV^2}{c^2}$$

Hieraus können wir nun den Phasenunterschied der beiden Strahlen berechnen

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{c\Delta t}{\lambda}$$

Abschätzung:

$$L = 2 \times 11\,\mathrm{m}\ ,\ v = 30\,\mathrm{km/s}\ ,\ \lambda = 500\,\mathrm{nm}\ \Rightarrow\ \Delta\varphi/\pi \approx 0{,}88$$

**Auflösung**

$$\frac{\Delta\varphi}{\pi} \approx \frac{1}{4}$$

**Ergebnis:**
Es gibt keine Verschiebung des Interferenzmusters.

**Konsequenz:**
⇒ Es gibt keinen Ätherwind.
⇒ Es gibt kein ausgezeichnetes Bezugssystem. Alle Bezugssysteme sind gleichwertig.

**Aber:**
Kontraktionshypothese von Fitzgerald z Lorenz
Wenn der Arm in Richtung der Äthers um Faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Arm parallel zum Ä.W.:

$$t_2 = \frac{2cL_2}{c^2 - v^2}\frac{1}{\gamma} = \frac{2L_2}{\sqrt{denc^2 - v^2}}$$

Arm senkrecht zum Ä.W.:

$$t_1 = \frac{2L_1}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

**Aber:**
Äther nicht beobachtbar

### I.1.2 Lorenz-Invarianz der Maxwell-Gleichungen

Maxwell-Gleichungen sind Lorenz-invariant und nicht Galilei-invariant.
Beispiel: Relativität der Feder.
⇒ Im Laborsystem: $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$
⇒ Im Ruhesystem: $v' = 0 \Rightarrow F_L = 0$ ↯
⇒ ein zusätzliches $E'$-Feld, $\boldsymbol{F}_q = q\boldsymbol{E}$
⇒ neue „Transformationsgleichungen“
**Transformation**

- $K$: „ruhende“ Bezugssystem
- $K'$: „sich in Bezug auf $K$ konstant entlang der $x$-Achse bewegendes“ Bezugssystem

$$\boldsymbol{E'} = (E_x, \gamma(E_y - vB_z), \gamma(E_z - vB_y))^\top$$
$$\boldsymbol{B'} = (B_x, \gamma(B_y + {}^{v}\!/\!{}_{c^2}E_z), \gamma(B_z - {}^{v}\!/\!{}_{c^2}E_y))^\top$$

### I.1.3 Einstein und die Patente

Einstein arbeitete um ... beim Patentamt in .... Zu dieser Zeit wurden häufig neue Patente zur Synchronisierung verschiedenen Uhren angemeldet, was zu Einsteins Inspiration und seinen späteren Entdeckungen führte.

## I.2 Bezugsysteme und Inertialsysteme

Zur Diskussion der Relativitätstheorie ist ein bestimmtes Vokabular mit klaren Definitionen Notwendig. Hierzu soll dieser Abschnitt dienen.

### I.2.1 Was ist ein Bezugssystem (BZS)

Ein Bezugssystem ist ein Koordinatensystem bezüglich dessen man die Bewegung von Objekten beschreibt.
**Konsequenzen:**

- es gibt einen Koordinatenursprung $\boldsymbol{O}$
- Koordinatenursprünge verschiedener BZS können sich gegeneinander bewegen

$\Rightarrow$ Transformationsgesetze

ACHTUNG
Unterscheide sorgfältig zwischen Basisvektoren, Vektoren und Koordinaten

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' \qquad \begin{array}{c} \boldsymbol{v} = \sum_i x_i \boldsymbol{e}_i \\ \boldsymbol{v}' = \sum_i x_i' \boldsymbol{e}_i' \end{array} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{x}'$$

### I.2.2 Was ist ein Inertialsystem (IS)

Bezugssystem in welchem das Trägheitsgesetz gilt.

**Konsequenzen:**

$\Rightarrow$ Inertialsystem bewegen sich gradlinig - gleichförmig gegeneinander

#### Klassisches Relativitätsprinzip

Grundgesetze der Physik nicht in allen Inertialsystemen gleich (Form invariant)

### I.2.3 Galilei-Transformation

**Galilei-Trafo**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t \\ t' &= t \end{aligned}$$

$\boldsymbol{v}$: Geschwindigkeit vom $\boldsymbol{O}'$ gegenüber $\boldsymbol{O}$

**Test:**

$$k: \quad \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \quad \Leftrightarrow \quad k': \quad \boldsymbol{F}' = m\boldsymbol{a}'$$
$$\boldsymbol{a}' = \frac{d^2\boldsymbol{v}'}{dt'^2} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{a}$$

*Bemerkung*
Invarianz unter Drehungen $\Rightarrow$ Tensoren

#### Transformation der Geschwindigkeit

$$\boldsymbol{v}' = \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt'} = \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$$

$\Rightarrow$ Lichtgeschwindigkeit ist NICHT konstant !

### I.2.4 Lorenz-Transformation (LT)

**Lorenz-Trafo**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{u}{c^2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{LT}$$

Ziel der speziellen Relativitätstheorie:
Die Gesetze der Mechanik sollen Lorenz-invariant sein !

*Bemerkung*
Die Galilei-Transformation ergibt sich aus der Lorenz-Transformation für $\frac{u}{v} \to 0$ somit wird dann $\gamma \to 1$ gehen.

## I.3 Einsteins Axiome der speziellen Relativitätstheorie (SRT)

1. Relativitätsprinzip:
   Alle Naturgesetze nehmen in allen IS die gleiche Form an.

2. Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist Konstant.

*Bemerkungen*

- Punkt 1 legt die Lorenz-Trafo fest
- Das Umgekehrte gilt nicht

## I.4 Konsequanzen aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Da durch, dass die Lichtgeschwindigkeit eine Konstante sein soll ergeben sich schon bei einfachen Beispielen Schwierigkeiten. Ein solches Beispiel wäre die Addition von Geschwindigkeiten. Fährt man nun in einem Zug der die Geschwindigkeit $0{,}8c$ hat und schießt ein Geschoss mit $0{,}3c$ in Fahrtrichtung ab so sollte dieses mit $1{,}1c$ schneller als die Lichtgeschwindigkeit sein. Warum dies nicht der Fall ist und wie man damit umgeht und welche weiteren Konsequenzen aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit folgen wird im folgenden Abschnitt erläutert.

### I.4.1 Lorenz-Trafo und Lorenz-Invarianz

1) Lichtstrahlen:
   Im IS $\quad K: \quad x = ct$
   Im IS' $\quad K: \quad x = ct'$

2) Alle IS sind gleichberechtigt
   Trafo $K \to K': \quad x' = \gamma(x - ut)$
   Trafo $K' \to K: \quad x = \gamma(x' - ut)$

3) $\Rightarrow xx' = \gamma^2 xx' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

4) $t' = \gamma(t - \xi x)$
$t' = \frac{x'}{c}\gamma\frac{1}{c}(x - ut) = \gamma(t - \frac{ux}{c^2})$

5) Insgesamt:

**Lorenz-Trafo**

$$x' = \gamma(x - ut) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right)$$

Transformation der Geschwindigkeiten
NR:

$$\frac{dx'}{dt} = \gamma\left(\frac{dx}{dt} - u\right) = \gamma(v_x - u)$$
$$\frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{u}{c^2}v_x\right)$$

Daraus folgt dann für die Geschwindigkeitsadditionen in verschiedene räumliche Komponenten:

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$
$$v_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma}\frac{v_y}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$
$$v_z' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma}\frac{v_z}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

**Test:**

- $u \ll c \Rightarrow$ Galilei-Trafo
- Umkehrung

### Lorenz-Invarianz

Feststellung $x^2 - c^2t^2 = \text{const.} = x'^2 - c^2t'^2$
Raum-Zeit-Abstand: $L = \sqrt{x^2 - c^2t^2}$
$\rightarrow$ RZ-Abstand bleibt unter Lorenz-Trafo invariant.

### Minkiwski Raum

„Drehung“ im M-Raum $\Leftrightarrow$ Lorenz-Trafo

A)

$$\boldsymbol{x} = (x, y, z, ict)$$
$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = l^2$$

B)

$$\boldsymbol{x} = (x, y, z, ct) \quad \text{Metrik:} \quad \overline{g} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow l^2 = \boldsymbol{x}\overline{g}\boldsymbol{x} = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

$\Rightarrow$ Kovarianten und Kontravarianten Vierervektoren

**Elementare Diskussion des M-Raums**

*Frage:* Wie sieht ein anderes sich bewegendes IS (K') im eigenen IS (K) aus ?

K: Die Achsen $ct, x$ stehen rechtwinklig aufeinander.
K': wie liegen $ct', x'$ in K ?

**Für die Lage von $ct'$:** Betrachte $x' = 0 \rightarrow$ LT $\Rightarrow x = \frac{u}{c}ct$
**Für die Lage von $x'$:** Betrachte $ct' = 0 \rightarrow$ LT $\Rightarrow ct = \frac{u}{c}x$

### I.4.2 Relativität der Gleichzeitigkeit

Lichtlaufzeit und Ereignisse:
Das beobachtete Licht (z.B. von Galaxien) entspricht einem Blick in die Vergangenheit.
Was soll gleichzeitig bedeuten?

**Definition der GLeichzeitigkeit**

In einem IS sind die Ereignisse A und C gleichzeitig, wenn die von den beiden Ergebnissen ausgehenden Lichtpulse einen Beobachter B in der Mitte der beiden Punkte zur selben Zeit erreichen.

**Synchronisation von Uhren**

- man nehme zwei Uhren un einem IS, ruhend
- man sende zwei Photonen von der Mitte der Verbindungsstrecke aus

$\Rightarrow$ die beiden Photonen kommen gleichzeitig an den beiden Orten an

### I.4.3 Zeitdilatation

Uhren $\Rightarrow$ Lichtuhr
**Zeitdilatation: bewegte Uhren laufen langsamer**
Grund: Licht muss größere Wege zurücklegen.

im Eigensystem: $\Delta t' = 2\frac{L}{c}$
in „unserem" System: $\Delta t = 2\frac{L}{c}$

$$\overline{L}^2 = L^2 + \left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2$$

$$\Delta t^2 = \Delta t'^2 + \frac{u^2}{c^2}\Delta t^2$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\Delta t' = \gamma \Delta t' \qquad ; \Delta t > \Delta t'$$

**Betrachtung im Minkowski Diagramm**

Betrachtung mit Lorenz-Trafo

$$\begin{aligned} x'_0 &= 0 \qquad\qquad \Rightarrow \qquad\qquad x = ut \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}ut\right) = \gamma\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)t = \frac{1}{\gamma}t \end{aligned}$$

**Zeitdilatation**

$$t' = \frac{1}{\gamma} t$$

**Eigenzeit**

$\tau$: Tickdauer im Ruhesystem der Uhr *Beispiele:*

- Myonenzerfall - Lebensdauer $\tau = 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$
  Entstehung in Erdatmosphäre:
  gemessene Lebensdauer $\tau' = 30 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$
- Nebelkammer

**Zwillingsparadoxon** Lösung: Erdzwilling hat recht.
**Modernes Experiment**

### I.4.4 Längenkontraktion

Die Längenkontraktion besagt, dass bewegte Gegenstände in Bewegungsrichtung kürzer erscheinen.

$$l = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} l' = \frac{1}{\gamma} l'$$

**Längenkontraktion**

$$l' = \gamma l$$

Minkowski-Diagramm:

Benutze Lorenz-Invarianz
Lorenz-Trafo:
$t = 0$

$$\text{LT für Ort:} \quad x' = \gamma(x \quad - ut) = \gamma x$$
$$\Rightarrow l' = x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma l$$

**Ruder-Filme**

Lichtlaufzeit berücksichtigen

### I.4.5 Doppler Effekt

$$f_B = f_S \frac{c + v_B}{c - v_S}$$

- bewegter Empfänger: $v_S = 0 \Rightarrow f_B = \left(1 + \frac{u_B}{c}\right) \cdot f_S$
- bewegter Sender: $v_B = 0 \Rightarrow f_B = f_S \frac{1}{1 - \frac{v_S}{c}} \approx f_S \left(1 + \frac{v_S}{c} + \frac{v_S^2}{c^2} + \dots\right)$

**Relativistischer Dopplereffekt**

$$f_B = f_S \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \cos\alpha \frac{u}{c}}$$

- $\cos\alpha = \pm 1$: longitudinaler DE
- $\cos\alpha = 0$: transversaler DE

### I.4.6 Abberation des Lichts

[Folie: Folien wurden gezeigt]

## I.5 Relativistische Dynamik

Newton:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

Erhaltungssätze (Energie, Impuls, Drehimpuls)

Energieerhaltung: Homogenität der Zeit
Impulserhaltung: Homogenität des Raums

$\Rightarrow E$ und $p$ Erhaltung auch in SRT

### I.5.1 Impulserhaltung und relativistischer Impuls

**Gedankenexperiment**

Vorher: $\bullet\bullet$

Nacher: $\overset{v_1}{\longleftarrow}\underset{A}{\bullet} \quad \bullet\overset{v_2}{\longrightarrow}$

Im Laborsystem gilt $\boldsymbol{p}_{\text{vorher}} = \boldsymbol{p}_{\text{nacher}}$:

$$\Rightarrow 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_0(v - v) = 0$$

Im Ruhesystem von Körper $A$ gilt dann:

$$u = -v_1 \quad , \quad v_1' = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m_1 + m_2)v_1 = m_2 v_2'$$

Klassisch gilt somit:

$$m_1 = m_2 = m_0$$

$$v_2' = v_2 + v = 2v$$

In der **SRT** gelten aber folgende Additionstheoreme für Geschwindigkeiten:

$$v_2' = \frac{v_2 - u}{1 - v_2 \frac{u}{c^2}} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

Dies liefert jedoch einen Widerspruch mit unserem zuvorigen Ergebnis.

$$\Rightarrow v_2' < 2v \quad \lightning$$

**Relativistischer Impuls**

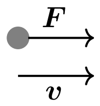
$$\boldsymbol{p} = m(v) \cdot \boldsymbol{v} = \boxed{\gamma(v) m_0 \boldsymbol{v}}$$

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$\boldsymbol{\omega}$ ist die Geschwindigkeit der Systeme zueinander.
$\boldsymbol{v}$ Die Geschwindigkeit des Körpers.

### I.5.2 Energieerhaltung und relativistische Energie

**Gedankenexperiment:**




Beschleunigung eines Körpers in einem konstanten Kraftfeld.
$\Rightarrow$ Körper gewinnt kinetische Energie.

$$E_{\text{kin}} = \int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$$

$$\begin{aligned} dE_{\text{kin}} = F ds &\stackrel{?}{=} \frac{dp}{dt} ds \\ &= m_0 d(\gamma v) \cdot v = m_0 v (v d\gamma + \gamma dv) \end{aligned}$$

Trick: $1 = \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$
$\Rightarrow 0 = c\gamma d\gamma \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \gamma^2 \left(-\frac{2v}{c^2} dv\right)$
$\Rightarrow c^2 d\gamma = v^2 d\gamma + \gamma v dv$
$\Rightarrow dE_{\text{kin}} = m_0 c^2 d\gamma$

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= m_0 c^2 \left[\gamma(v) - \gamma(0)\right] \\ &= \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 \end{aligned}$$

Einstein: $E = \gamma m_0 c^2 \mathrel{\widehat{=}}$ „Gesamtenergie“

$$\boxed{E = E_{\text{kin}} + m_0 c^2}$$

### I.5.3 Relativistische Energie-Impuls-Beziehung und Viererimpuls

Dispersionsrelation: $E(\boldsymbol{p})$
Klassisch: $E(\boldsymbol{p}) = \frac{p^2}{2m}$
SRT: $E = \gamma m_0 c^2$
$\Rightarrow E^2 = \gamma^2 (m_0 c^2)^2$ mit $\gamma^2 = 1 + \gamma^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2$
$\Rightarrow m_0 c^2 \gamma^2 = m_0^2 c^2 + \gamma^2 m_0^2 v^2 = m_0^2 c^2 + \boldsymbol{p}^2$

$$\boxed{\Rightarrow E^2 = (m_0 c^2)^2 + c^2 \boldsymbol{p}^2}$$

$$\boxed{E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + c^2 \boldsymbol{p}^2}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \boldsymbol{p}^2 = (m_0 c)^2$$

**Viererimpuls**

$$\hat{\boldsymbol{p}} = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \boldsymbol{p}^2 \qquad \text{ist Lorenz-invariant !}$$

$\Rightarrow$ Die Ruhemasse $m_0$ ist Lorenz-invariant.

**Was ist Masse?**

Masse charakterisiert die Energie-Impuls-Beziehung relativistischer Teilchen $\widehat{=}$ masseloser Teilchen $\widehat{=}\ v = c \Leftrightarrow m_0 = 0$.

$$\Rightarrow R(\boldsymbol{p}) = c|\boldsymbol{p}|$$

Massebehaftete Teilchen, $m_0 > 0\ ,\ v < c$

$$E(\boldsymbol{p}) = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + c^2 \boldsymbol{p}^2} \xrightarrow{v \to 0} \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_0}$$

### I.5.4 Kraft und Energie-Impuls Erhaltung

klassisch gilt:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

und Impulserhaltung:

$$\boldsymbol{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{p} = \text{const.} \quad , \quad E = \text{const.}$$

In der SRT gilt:

$$\hat{\boldsymbol{F}} = \gamma(m_0 c \frac{d\gamma}{dt}, F_x, F_y, F_z)$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{F}} = \frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{p}}}$$

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt$$

Relativistische Energie-Impuls Erhaltung

$$\hat{\boldsymbol{F}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\hat{\boldsymbol{p}} = \text{const.}}$$

- Zeitanteil $\widehat{=}$ Energieerhaltung $E_{\text{ges}} = E(\boldsymbol{p}) + W_{\text{pot}} \cdots = \text{const.}$
- Raumanteil $\widehat{=}$ Impulserhaltung: $\boldsymbol{p}_{\text{nacher}} = \boldsymbol{p}_{\text{vorher}}$

### I.5.5 Anwendungsbeispiele

**Äquivalenz von Masse und Energie**

$$E = m_0 c^2$$

$$1kg \widehat{=} mc^2 = 10^{17}\,\text{J}$$

Weltenergieverbrauch ca.: $4 \cdot 10^{20}\,\text{J} \widehat{=} 4\,\text{T}/\,\text{Jahr}$

**Bindungsenergie = Massenänderung**

$$p: \qquad m_p = 938{,}27\,\frac{\text{MeV}}{c^2}$$

$$n: \qquad m_n = 939{,}54\,\frac{\text{MeV}}{c^2}$$

$$^4He: \qquad m_{He} = 3727\,\frac{\text{MeV}}{c^2}$$

$$2n + 2p = 3754\,\frac{\text{MeV}}{c^2}$$

$$\Rightarrow \text{ Bindungsenergie} \quad 24\,\frac{\text{MeV}}{c^2}$$

[Folie: Bindungsenergie von Atomen]Kernspaltung/Kernfusion

*Beispiel:* Compton Effekt
Streuung eines Photons an einem (quasi-) freien, ruhenden Elektron

$$\Delta R = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

$$\lambda_c = \frac{k}{mc} = 2{,}13 \cdot 10^{-24}\,\text{m}$$

## I.6 Von der SRT zur ART

ART $\hat{=}$ allgemeine Relativitätstheorie

### I.6.1 Äquivalenzprinzip (*die heilige Kuh der Physik*)

Beobachtung: Träge Masse $\hat{=}$ schwere Masse $\quad m_t = m_s$

$$\boldsymbol{F} = m_t\boldsymbol{a} \qquad \text{träge Masse}$$

$$\boldsymbol{F}_{12} = G\frac{m_{1S}m_{2S}}{r_{12}^2}\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{|\boldsymbol{r}_{12}|} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{F} = m_s\boldsymbol{g} \qquad \text{schwere Masse}$$

⇒ In einem geschlossenen Raum gilt: Die Beschleunigung aufgrund einer Kraft ist nicht von der Gravitation zu unterscheiden $\overset{?}{}$
**Experimente:**

- Pendel
- Satellite: lokales Inertialsystem das Kräftefrei ist
- Freie-Fall-Experimente (Parabelflug bei Flugzeugen oder Freifall Experiment Turm)
  [Folie: Freifall Experiment Turm in Bremen]

[Folie: Wie genau ist das Äquivalenzprinzip bestätigt]
[Folie: Verletzungen des Äquivalenzprinzips]

#### Äquivalenz Prinzip, drei Formulierungen

1) Ein kleines Labor, welches in einem Schwerefeld frei fällt ist äquivalent zu einem lokalen Inertialsystem, in welchem die Gesetze der SRT gelten.

2) Beobachte im Fahrstuhl, Raumschiff (ohne Antrieb):
   ⇒ Es ist nicht entscheidbar ob man sich gradlinig im freien Raum oder beschleunigt im Gravitationsfeld bewegt.

3) Der freie Fall ist Äquivalent zur Schwerelosigkeit

### I.6.2 Gravitation und Raumkrümmung

Die Abweichung von einer geraden Bahn kann man auf zwei Arten definieren oder festlegen:

(i) Kraft $\qquad$ oder

(ii) Krümmung des Raums

[Folie: zur Raumkrümmung]
**Idee:** Gravitation nicht mehr als Kraft, sondern als Krümmung des Raums betrachten.
**Mathematisch:** Gravitation beeinflusst die Metrik des Raums

**Konsequenzen:**

- Raum und Zeit sind nicht statisch, sondern dynamisch
- Inertialsystem nur noch lokal, im homogenen Schwerefeld

### I.6.3 Periheldrehung des Merkurs

Kepler'sche Bahngesetze [Folie: zur Periheldrehung des Merkur]
$\Rightarrow$ geschlossene Ellipsen mit der Sonne im Brennpunkt

Beobachtung beim Merkur:
Periheldrehung 5,74" pro Jahr

Rechnungen nach Newton mit Einbeziehung der Potentiale der anderen Planeten: 0,4311" pro Jahr mehr als die gemessene

ART: Überschuss von 0,4303" pro Jahr

### I.6.4 Ablenkung von Licht durch Gravitation

[Folie: zur gravitativen Ablenkung von Licht][Folie: Bilder zur Ablenkung von Licht um die Sonne bei einer Sonnenfinsternis]
$\Rightarrow$ Sonnenfinsternis 1919
[Folie: Mehr Bilder zu Gravitationslinsen][Folie: Video: zu Gravitationslinsen]

### I.6.5 Gravitationswellen

Indirekte Beobachtung umkreisender Neutronensterne PSR1913+16
Abstrahlung von Gravitationswellen $\Rightarrow$ Energieverlust $\rightarrow$ Sterne kommen sich immer näher. Nobel Preis 1993

Direkte Beobachtung: Detektoren durch Relativbewegung von Massen

(i) Resonanzdetektor

(ii) interferrometrische Detektoren (Micheson-Morley)
[Folie: zu Michelson Interferrometern]
11. Februar 2016: LIGO
Nobel Preis 2017

### I.6.6 Global Positioning System (GPS)

gegeben: Satelliten, Atomuhren, 3,87 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ in Höhe von ca. 20000 km

SRT: $\Rightarrow$ Zeitdilatation um $\approx 7\,\mu\text{s/Tag}$
ART: $\Rightarrow$ Zeitdilatation um $\approx 45\,\mu\text{s/Tag}$

$\Rightarrow$ Ortsmessung um ca 11,4 km verschoben

# Kapitel II

# Geometrische Optik

## II.1 Lichtstrahlen

Licht hat eine **Ausbreitungsgeschwindigkeit** $s = ct$. Diese Geschwindigkeit ist nur im Vakuum konstant und hängt von der Materie die der Lichtstrahl durchläuft ab. Diese Geschwindigkeit im Medium ist gegeben durch den **Brechungsindex**.

$$\boxed{n = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{c_{\text{Medium}}}}$$

| | |
|---|---|
| Luft: | $n = 1{,}00027$ |
| Wasser: | $n = 1{,}333$ |
| Diamant: | $n = 2{,}417$ |

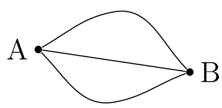
Warum ist das denn so? Wie interagieren die elektomagnetischen Felder des Lichstrahls also mit der Materie?
Antwort:
Die Ladungsträger in der Materie erfahren aufgrund der elektrischen Felder eine Kraft. Die Ströme der bewegten Ladungen Wechselwirkungen mit den Magnetischen Feldern, jedoch ist dieser Effekt viel kleiner als der der $\boldsymbol{E}$-Felder.
Die Elektronen kann man sich mit einer Feder an der Atomkern gebunden Vorstellen. Mit dem $\boldsymbol{E}$-Feld des Lichtstrahls haben wir das Modell eines getriebenen gedämpften harmonischen Oszillators: Das Lorenz-Lorenz-Oszillator Modell
Genaugenommen kann man sich das auch so Vorstellen, dass die Photonen immer wieder absorbiert und nach einer Zeitverzögerung abgestrahlt werden, jedoch ist dies schwer zu berechnen.

*Bemerkung:*
zwei Medien $n_1 > n_2$
$n_1$: optisch dichter
$n_2$: optisch dünner

## II.2 Das Fermat'sche Prinzip

### II.2.1 Fermat'sches Prinzip

Die Ausbreitung des Lichts zwischen zwei Punkten erfolgt auf dem Weg, für den die benötigte Zeit extremal ist.




$\Rightarrow$ Konsequenz $\boxed{\text{Der Stahlengang ist umkehrbar ?}}$

**Mathematische Handwerkzeuge**

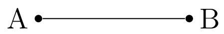
$$t = \frac{1}{c_{\text{Vakuum}}} \int_{P_1}^{P_2} n(s) ds$$

Parametrisierung des Wegs $\tau$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\tau)$$

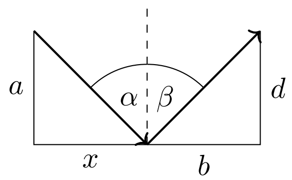
$$t(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c_{\text{Vakuum}}} \int_{P_1}^{P_2} n(\boldsymbol{x(\tau)}) \sqrt{\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}\right)^2} d\tau$$

### II.2.2 Weg zwischen zwei Punkten A und B




### II.2.3 Reflexionsgesetz

[Folie: zu Reflexion an Oberflächen]
Berechnung der Wegstrecke




$$s(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{d^2 + (b - x)^2}$$

Extremum:
Da wir und in einem homogenen Medium befinden und die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, ist die Strecke $s$ proportional zur Zeit $t$ und wir können das Extremum der Strecke berechnen.

$$\frac{ds}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}}_{\sin\alpha} = \underbrace{\frac{b - x}{\sqrt{d^2 + (b - x)^2}}}_{\sin\beta}$$

**Reflexionsgesetz**

$$\sin\alpha = \sin\beta$$

Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel.

### II.2.4 Brechungsgesetz von Snellius

$$n_1 \neq n_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad n(s) \neq \text{const.}$$

Berechnung des Laufzeit des Lichts

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(b - x)^2 + d^2}}{c_2} = \frac{1}{c}\left(n_1\sqrt{x^2 + a^2} + n_2\sqrt{(b - x)^2 + d^2}\right)$$

[Folie: zu Brechung]
$\frac{dt}{dx} = 0$

**Brechungsgesetz**

$$\Rightarrow n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$$

## II.3 Einfache Anwendungen

### II.3.1 Totalreflexion

$\rightarrow$ siehe Experimentalphysik II
[Folie: zur Totalreflexion z.B. unter Wasser]

$$\sin \alpha_{\mathrm{TV}} = \frac{n_2}{n_1}$$

### II.3.2 Optisches Prisma

Bei Drehung des Prismas kann der Winkel $\delta$ verändert werden. Hier gibt es es ein Minimum, jedoch kann er nie null werden, da das Licht nie gerade durch das Prisma hindurch kommen kann.

#### Beobachtung I

Die Ablenkung ist minimal für den symmetrischen Strahlengang

$$\sin \frac{\delta_{\min} + \gamma}{2} = n \sin \frac{\gamma}{2}$$

[Folie: Demtröder: Prisma]
**Berechnung:**

(i) $\gamma = \beta_1 + \beta_2$

(ii) $\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2$

(iii) $\sin \alpha_1 = n \sin \beta_1 \quad , \quad \sin \alpha_2 = n \sin \beta_2$

gesucht ist $\frac{d\delta}{d\alpha_1} = 0$
$\Rightarrow$

(i) $\mathrm{d}\gamma = \mathrm{d}\beta_1 + \mathrm{d}\beta_2 = 0$

(ii) $\mathrm{d}\alpha_1 = \mathrm{d}\alpha_2 \qquad (\delta = \alpha + \alpha - \gamma) \qquad (\mathrm{d}\delta = 0)$

(iii) $\cos \alpha_1 \mathrm{d}\alpha_1 = n \cos \beta_1 \mathrm{d}\beta_1$
$\cos \alpha_1 \mathrm{d}\alpha_2 = n \cos \beta_2 \mathrm{d}\beta_2$

$$\Rightarrow \frac{\cos \alpha_1 \cancel{\mathrm{d}\alpha_1}}{\cos \alpha_2 \cancel{\mathrm{d}\alpha_2}} = \frac{\cos \beta_1 \cancel{\mathrm{d}\beta_1}}{\cos \beta_1 \cancel{\mathrm{d}\beta_2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \sin^2 \alpha_1}{1 - \sin^2 \alpha_2} = \frac{1 - \sin^2 \beta a_1}{1 - \sin^2 \beta_2} = \frac{n^2 - \sin^2 \alpha_1}{n^2 - \sin^2 \alpha_2}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 \\ \beta_1 &= \beta_2 \end{aligned}\right\} \text{symmetrischer Strahlengang}$$

$$\Rightarrow \delta_{\min} = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma = 2\alpha - \gamma$$

$$\sin \alpha = n \sin \beta \Rightarrow \boxed{\sin \frac{\delta_{\min} + \gamma}{2} = n \sin \frac{\gamma}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \delta_{\min} = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma = 2\alpha - \gamma \qquad \gamma = 2\beta$$

$$\Rightarrow \quad \sin \alpha = n \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin \frac{\delta_{\min} + \gamma}{2} = n \sin \frac{\gamma}{2}}$$

□

*Bemerkung:*
Dieser Zusammenhang wurde früher zur Bestimmung von $n$ genutzt ?
*Professor redet darüber, dass wir immer kompliziertere Experimente verstehen können, und diese aufgrund des Aufwands bei der Ausführung nicht mehr immer in der Vorlesung gezeigt werden können. Wir sollen lernen uns Experimente vorzustellen ohne sie direkt zu sehen und die Formeln als Handlungsanweisungen zu sehen die wir nutzen können. Abgesehen davon sollen wir uns auch im klaren darüber sein wie genau verschiedene Messmethoden sind.*

**Beobachtung II**

optische Dispersion:

$$\frac{dn(\lambda)}{d\lambda} < 0 \qquad \text{(normale Dispersion)}$$

(Bei der anormalen Dispersion ist $\frac{dn(\lambda)}{d\lambda} > 0$)
[Folie: zur Dispersion: Beispiel Regenbogen]

Wieso gibt es Dispersion? Vorstellung: Die Atome mit ihren Elektronen haben Resonanzfrequenzen. Somit ist die erzwungene Schwingung die die Licht-Welle in der Materie anregt, von der Frequenz des Lichts abhängig.
Die meisten Resonanzfrequenzen liegen im Ultravioletten-Bereich. Deshalb sehen wir meist normale Dispersion. Im Bereich über Ultraviolettem Licht ist auch anormale Dispersion Beobachtbar.

⇒ Experimentalphysik II

## II.4 Sphärische, dünne Linse

Zunächst einmal betrachten wir sphärische Linsen speziell dünne Linsen: Wir betrachten die dünne Linse als eine unendlich-dünne Linse, da wir hierbei einige vereinfachungen machen können (Taylor-entwicklungs-Terme fallen weg).

### II.4.1 Brennpunkt und Brennebene

[Folie: zur Sammel- und Streulinsen]
Wir betrachten zunächst den Strahlengang einer Linse:

Lieblingsprüfungsfrage: Parallel einfallendes Licht, das nicht parallel zur optischen Achse verläuft, in eine Sammellinse. Strahlen werden immer noch fokussiert aber Brennpunkt verschoben. Konstruktion mit Zentralstrahlengang ?
[Folie: zur der Lieblingsfrage]

**3 Regeln zur Konstruktion von Strahlengängen**

Nur für dünne Linsen:

1) Parallel einfallende Strahlen fallen durch den Brennpunkt aus

2) Durch Brennpunkt einfallender Strahlen fallen parallel aus

3) Der Zentralstrahl wird nicht abgelenkt

### II.4.2 Berechnung des Brennpunktes bzw. der Brennweite

Bei der Streulinse genau dasselbe nur ein negatives Vorzeichen an der Brennweite.
[Folie: zu Strahlengängen durch Sammellinsen]

Ein Linsenstück im Abstand $h$ von der optischen Achse betrachten wir als Prisma.

Näherungen der „dünnen" Linse

alle Winkel sind klein → trigonometrische Näherungen
$\sin(x) \approx x \qquad \cos(x) \approx 1 \qquad \tan(x) \approx x$

**Berechnung:**
Ablenkung des Strahls

(i) $\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2$

(ii) $\beta_1 + \beta_2 = \gamma$

(iii) $n_1\alpha_1 \approx n_2\beta_1 \qquad n_2\beta_2 \approx n_1\alpha_2$

$$\Rightarrow \qquad \delta = \gamma\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)$$

Winkel $\gamma$:

(iv) $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

(v) $\gamma_1 \approx \frac{h}{R_1} \quad ; \quad \gamma_2 \approx \frac{h}{R_2}$

$$\Rightarrow \qquad \gamma = h\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Winkel $\delta$:

(vi) $\delta = \frac{h}{f}$