Theoretische Physik II
Elektrodynamik

Vorlesung von Prof. Dr. Michael Thoss im Wintersemester 2018

Markus Österle   Andréz Gockel

14. November 2018

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einführung

0.1 Zur Vorlesung

Dozent Michael Thoss

Übungen Donnerstag/Freitag (ILIAS) beginnt 18./19.10.18

Übungsleiter Jakob Bätge

Abgabe der Hausaufgaben bus Dienstag 12:00 - Briefkasten GuMi

Klausur 13.02.19, 10-12 Uhr, Hörsaal Anatomie (Nachklausur: 26.19, 10-12 Uhr)

Ankündigungen ILIAS Pass: theophy2.thoss18

Angaben Vorlesung: 4 SWS, Übung: 2 SWS, ECTS: 7

Vorkenntnisse Mathematik: Analysis für Physiker (Vektor Rechnung), Theoretische Physik I, Experimental Physik II.

Hinweis zu den Übungen

- Keine Anwesenheitspflicht.
- Keine Punktzahl nötig für Klausurzulassung.
- Kann auch wehrend Übungen abgegeben werden.

Lehrbücher:

- W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 3: Elektrodynamik* (Springer)
- D.J. Griffiths, *Elektrodynamik: Eine Einführung* (Pearson)
- T. Fließbach, *Elektrodynamik* (Spektrum Akademischer Verlag)
- J.D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik* (Walter de Gruyter) geht dieser Vorlesung hinaus

0.2 Einführung und Überblick

Die vier fundamentalen Wechselwirkungen (WW):

- Starke WW
- **Elektromagnetische WW** Wird in dieser Vorlesung betrachtet
- Schwache WW
- Gravitation

0.2.1 Rückblick

Theoretische Physik 1:

- Mechanik
- Punktmechanik: Bahnkurven von Körpern
- Bewegungsgleichung: $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$

0.2.2 Elektrodynamik

- Grundlegende Größen
- Felder
- $$\begin{array}{cc} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) & \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) \\ \text{elektrisches Feld} & \text{Magnetfeld} \end{array}$$

$\rightarrow$ Feldtheorie sehr wichtiges Konzept

Wie sind Elektrische Felder definiert?
Experimentelle Definition als Messgröße: Kraft auf Ladung

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t))$$

Theoretische Definition ist Mathematisch: Feldgleichungen-Maxwellgleichungen

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0\boldsymbol{j}$$

Hierbei steht ρ für die Ladungsdichte und $\boldsymbol{j}$ für die Stromdichte.

0.3 Aufbau der Vorlesung

1./2. Statische Phänomene: $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

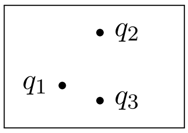
$$\underbrace{\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0}_{\text{1. Elektrostatik}} \qquad \underbrace{\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = 0}_{\text{2. Magnetostatik}}$$

3. Zeitabhängige magnetische/elektrische Felder
4. Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

Kapitel 1

Elektrostatik

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit **ruhenden Ladungen** und **zeitunabhängigen Feldern**. Das Grundproblem besteht darin, dass wir eine Ladungsverteilung haben und das Elektrische Feld und dessen Potential bestimmen wollen.



$\rightarrow$ Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$, el. Potential $\Phi(\boldsymbol{r})$

1.1 Elektrische und Coulombsches Gesetz

Ladung: Beobachtungstatsachen:

i) Zwei Arten „+“, „-“

ii) Abgeschlossenes System: Ladung erhalten: $q = \sum_i q_i = \text{const.}$

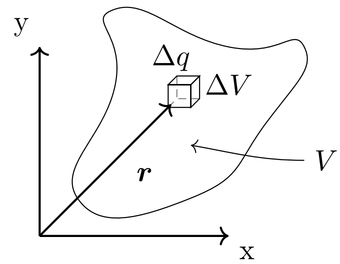
iii) Ladung ist quantisiert in Einheiten der Elementarladung:

$$q = ne,\ n \in \mathbb{Z},\ e = 1,602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

$n = -1$: für ein Elektron wäre ein Beispiel einer Punktladung

Kontinuierliche Ladungsverteilung Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}} = \frac{\Delta q}{\Delta V}$ Gesamtladung in V:

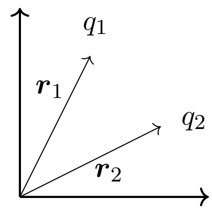
$$Q = \int_V d^3r\, \rho(\boldsymbol{r})$$



1.1.1 Coulombsches Gesetz

Die Kraft, welche eine am Ort $\boldsymbol{r}_2$ lokalisierte Punktladung auf eine Punktladung am Ort $\boldsymbol{r}_1$ ausübt, ist gegeben durch:

$$\boldsymbol{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2}\underbrace{\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}}_{\boldsymbol{e}_{r_{12}}}$$



1. $\boldsymbol{F}_{12} \sim q_1 q_2$

2. $\boldsymbol{F}_{12} \sim \frac{1}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2}$

3. $\boldsymbol{F}_{12} \sim q_1 q_2 \, \boldsymbol{e}_{r_{12}}$
4. $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$

Es gilt das Superpositionsprinzip: Das heißt, durch vektorielle Addition der Kräfte kann die Gesamtkraft ermittelt werden.

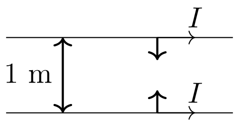
$$\boldsymbol{F}_1 = k \sum_{j=2}^{N} \frac{q_1 q_j}{r_{1j}^2} \boldsymbol{e}_{r_{1j}}$$

Zur Konstanten k:

Die Konstante ist abhängig von dem verwendeten Maßsystemen.

i) Gauß-System (cgs): $k \equiv 1$, dyn $= \frac{\text{g}\cdot\text{cm}}{\text{s}^2} = 10^{-5}\,\text{N}$ 1 dyn $= \frac{(1\text{ESE})^2}{\text{cm}^2}$ $\quad 1\text{ESE} = \frac{\sqrt{\text{g}\cdot\text{cm}^3}}{\text{s}}$

ii) SI (MKSA-System): Definition von A = Ampère



$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = 2 \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Strom $= \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}} \Rightarrow$ $1\text{A} = \frac{1\text{C}}{1\text{s}}$ $\quad \rightarrow \quad e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$ $\qquad c \approx 3 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$\frac{\Delta F}{\Delta l} = k\frac{2I^2}{c^2 d}$ $\qquad \rightarrow k = 2 \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\frac{c^2 1\text{m}}{2(1\text{A})^2} = 10^{-7} c^2\,\frac{\text{N}}{\text{A}^2}$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

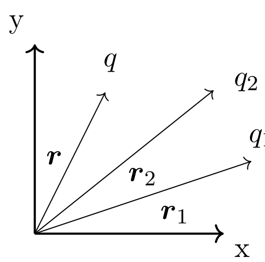
Damit erhalten wir für die Dielektrizitätskonstante des Vakuums:

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$

1.2 Elektrisches Feld

1.2.1 Feld eines Systems von Punktladungen

N-Ladungen $q_1, \ldots, q_N$ ruhen an den Orten $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N$. Nun bringen wir eine Testladung q am Ort $\boldsymbol{r}$ mit ein.



Kraft von $q_1,\ q_2$ auf q

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \sum_{j=1}^{N} q_n \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|^3} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

Somit ist das elektrisches Feld:

$$\boxed{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} q_j \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|^3}}$$

Bemerkung

i) Testladung klein (formal: $\lim_{q\to 0}\frac{\boldsymbol{F}}{q}$)

ii) math. $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ Vektorpfeil

$$\text{kartesisch:}\quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} E_x(\boldsymbol{r}) \\ E_y(\boldsymbol{r}) \\ E_z(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix}$$

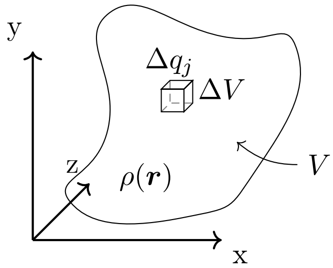
iii) Wechselwirkungsprozess: 2 Teile

$$q_j \to \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \to \boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

iv) Superpositionsprinzip gilt

1.2.2 Feld einer kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r})$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int\limits_V}_{\substack{\text{schließt alle}\\ \text{Ladungen ein}}} d^3r'\,\rho(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|^3}$$



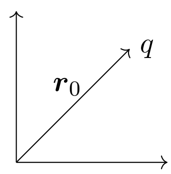
$\rho(\boldsymbol{r}_j) = \frac{\Delta q_j}{\Delta V_j}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= k\sum_j \Delta q_j \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|^3}\\ &= k\sum_j \Delta V_j\rho(\boldsymbol{r}_j)\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|^3}\\ {\scriptstyle \text{mit } \Delta V_j\to 0}\quad &\to k\int_V d^3r'\rho(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\end{aligned}$$

1.2.3 Ladungsdichte einer Punktladung

Deltafunktion

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$



Punktladung in $\boldsymbol{r}_0 \Rightarrow \rho(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}_0$
Ladungsdichte divergiert in $\boldsymbol{r}_0$

$$\rho(\boldsymbol{r}_0) = \infty$$

Modell für Punktladung:
Ladung q in Kugel mit Radius ε um $\boldsymbol{r}_0$, $\varepsilon\to 0$

$$\rho_2(\boldsymbol{r}) = \left\{\begin{matrix} \frac{q}{v_k} & |\boldsymbol{r}|\leq\varepsilon \\ 0 & \text{sonst}\end{matrix}\right\} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3}\underbrace{\Theta(\varepsilon-|\boldsymbol{r}|)}_{\text{Stufenfunktion}}$$

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\rho_\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \left\{\begin{matrix}\infty & \boldsymbol{r}=0\\ 0 & \boldsymbol{r}\neq 0\end{matrix}\right.$$

Divergenz muss so sein, dass

$$\int\limits_{\substack{V\\ \boldsymbol{r}_0\in V}} d^3r\;\rho(\boldsymbol{r}) = q$$

Definition Delta-Funktion (Diracsche Deltafunktion)

1.
$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}_0 \\ \infty & \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 \end{cases}$$

2.
$$\int_V d^3r \; f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \begin{cases} f(\boldsymbol{r}_0) & \boldsymbol{r}_0 \in V \\ 0 & \boldsymbol{r}_0 \notin V \end{cases}$$

Mathematik

Distribution - Funktional
Funktional: Abb. Funktionen $\mapsto \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$\delta_{\boldsymbol{r}_0} : f \mapsto f(\boldsymbol{r}_0)$$

Physik

$$\int d^3r \; f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = f(\boldsymbol{r})$$

δ-Fkt. als Grenzwert einer Folge von Funktionen im Integral

$$\int d^3r \; f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \quad \int d^3 \; f(\boldsymbol{r} g_\varepsilon(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

mit

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}_0 \\ \infty & \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 \end{cases}$$

$$\int_V d^3r \; g_\varepsilon(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = 1$$

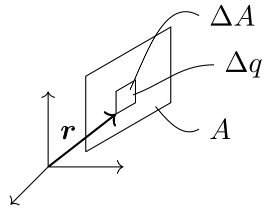
Beispiel: $g_\varepsilon(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \frac{\Theta(\varepsilon-|\boldsymbol{r}|)}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3}$
Mehrere Punktladungen q_j in $\boldsymbol{r}_j$

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_j q_j \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3r' \; \rho(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3r' \; \sum_j q_j \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j) \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_j q_j \int_V d^3r' \; \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j) \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_j q_j \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|^3} \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

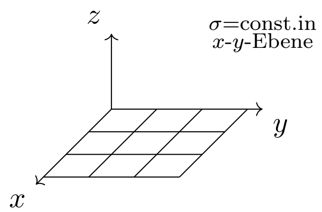
1.2.4 Flächenladungsdichte

$\sigma(\boldsymbol{r}) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}} = \frac{\Delta q}{\Delta A}$



erzeugtes elektrisches Feld:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_A \underbrace{df'}_{\text{Flächenelement}}\ \sigma(\boldsymbol{r})\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$



Beispiel: Elektrisches Feld einer homogenen Flächenladung

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dy'\ \sigma\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \qquad \boldsymbol{r}' = (x', y', 0)$$

Symmetrie: $\boldsymbol{E}$ unabhängig von x, y $\qquad \boldsymbol{r} = (0, 0, z)$

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}' = (-x', -y', z),\ \ |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3 = (x'^2+y'^2+z^2)^{3/2}$$

$$E_x \sim \sigma\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dy'\ \frac{(-x')}{(x'^2+y'^2+z^2)^{3/2}} = 0 = E_y$$

$\boldsymbol{E} = (0, 0, E_z)$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma_z\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dy'\ \frac{(x')}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}}_{\frac{1}{x'^2+z^2}\ \frac{y'}{(x'^2+y'^2+z^2)^{3/2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{x'^2+z^2}\ \frac{\mathrm{sgn}(y')}{\sqrt{1+\frac{x'^2+z^2}{y'^2}}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{x'^2+z^2}}$$

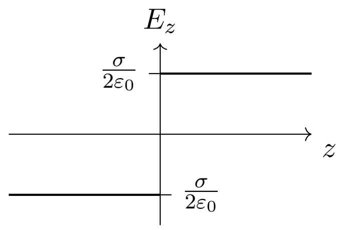
$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\sigma_z \quad \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\ \frac{1}{x'^2+z^2}}_{\frac{1}{z}\arctan\left(\frac{x'}{2}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{z}\mathrm{sgn}(z)\pi}$$

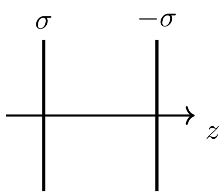
$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathrm{sgn}(z)$$

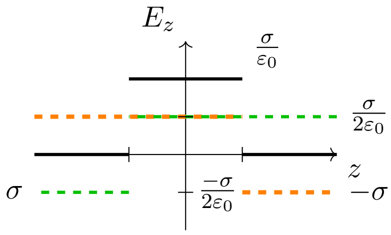
Grenzfläche: $z \to 0$

$$\boldsymbol{E} \xrightarrow[z\to 0]{} \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z & z < 0 \end{cases}$$

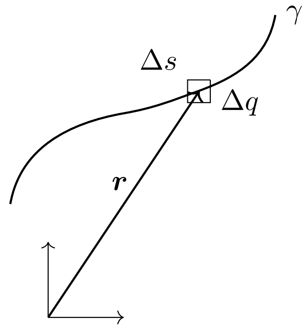
$$\boldsymbol{E}_{\perp +} - \boldsymbol{E}_{\perp -} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \qquad \boldsymbol{E}_{\parallel} = 0$$







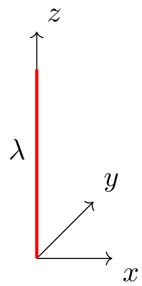
1.2.5 Linenladungsdichte



$$\lambda(\boldsymbol{r}) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Länge}} = \frac{\Delta q}{\Delta s}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\int_\gamma}_{\text{Linienintegral}} ds'\ \lambda(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

Beispiel: Elektrisches Feld einer homogenen Linienladung $\lambda = \text{const.}$



$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\gamma ds'\ \lambda \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \qquad \gamma : z' \mapsto \boldsymbol{r}'(z') = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz'\ \frac{\boldsymbol{r} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}}{(x^2+y^2+(z-z')^2)^{3/2}}$$

$\tilde{z} = z' - z$:

$$E_x = \frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz'\ \frac{1}{(x^2+y^2+(z-z')^2)^{3/2}} = \frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{z}\ \frac{1}{(x^2+y^2+\tilde{z}^2)^{3/2}}}_{\frac{2}{x^2+y^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz'\ \frac{z-z'}{(x^2+y^2+(z-z')^2)^{3/2}} = 0$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\rho} \boldsymbol{e}_\rho, \qquad \boldsymbol{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.3 Feldgleichungen und elektrostatische Potential

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

1.3.1 Elektrostatisches Potential

elektrische Feld ist ein Potentialfeld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r}) = -\left(\boldsymbol{e}_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial\phi}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$

$$\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = -\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}} = \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right) \quad 2(x-x')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} = \frac{(x-x')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \ \rho(\boldsymbol{r}')\left(-\nabla_{\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = \nabla_F \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \ \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$\to$ elektrostatisches Potential

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \ \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + c$$

übliche Konvention: $c = 0$ $(\phi(\boldsymbol{r}) \ |\boldsymbol{r}| \overset{\to}{\to} \infty \ 0)$

Potential einer Punktladung in $\boldsymbol{r}_0$:

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \ \frac{q\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}$$

(Funktional-Analysis Siegfried Großmann Springer)
(Landau-Lipschitz Buch geht weit der Vorlesung hinaus)

1.3.2 Feldgleichugn (differentielle Form)

Rotation (Wirbel)

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}\nabla\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \Rightarrow \nabla\times$$
$$\Rightarrow \nabla\times\boldsymbol{E} = -\nabla\times(\nabla\phi) = 0$$

Mathe: Es sind äquivalent

i $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$

ii $\nabla\times\boldsymbol{E} = 0$ (auf einfach zusammenhängendem Gebiet)

iii Kurvenintegral $\int_\gamma d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}$ ist Wegunabhängig

$$\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E} = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} dt \underbrace{\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\nabla\phi(\boldsymbol{r}(t))}_{\frac{d\phi}{dt}} = \underbrace{(\phi(\boldsymbol{r}_2)-\phi(\boldsymbol{r}_1))}_{\text{Potentialdifferenz}}$$

1.3.3 Divergenz (Quellen)

$$\div \boldsymbol{E} = \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \ \rho(\boldsymbol{r}') \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3r' \rho(\boldsymbol{r}') \nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}
\end{aligned}$$

x-Anteil:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \frac{x-x'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} &= \frac{1 \cdot [\ldots]^{3/2}(x-x')(x-x')^{3/2} \cdot 2[\ldots]^{1/2}}{[\ldots]^3} \\
&= \frac{[\ldots]^{1/2}((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-3(x-x')^2)}{[\ldots]^{3/2}} \\
&= \frac{(y-y')^2+(z-z')^2-2(x-x')^2}{[\ldots]^{3/2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} \frac{y-y'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} &= \frac{(x-x')^2+(z-z')^2-2(y-y')^2}{[\ldots]^{3/2}} \\
\frac{\partial}{\partial z} \frac{z-z'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} &= \frac{(x-x')^2+(y-y')^2-2(z-z')^2}{[\ldots]^{3/2}}
\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = 0 \quad \text{falls} \quad \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}'$$

$$\Rightarrow \text{falls} \quad \boldsymbol{r} \notin V, \ \text{d.h. } \boldsymbol{r} \text{ in Gebiet ohne Ladungsdichte } \rho(\boldsymbol{r}) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$$

$\boldsymbol{r} \in V$: Grenzwertbetrachtung (Regularisierung des Integranden)

statt

$$\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

betrachten wir:

$$\boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} = \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{3/2}} \qquad a \in \mathbb{R}, \ a > 0$$

am Ende Grenzwert $\lim\limits_{a \to 0}$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{a \to 0} \int_V d^3r' \ \rho(\boldsymbol{r}') \boxed{\nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot f_a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \frac{x-x'}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{3/2}} &= \frac{[\cdots+a^2]^{3/2}-(x-x')\frac{3}{2} \cdot 2(x-x')[\cdots+a^2]^{3/2}}{[\cdots+a^2]^3} \\
&= \frac{(y-y')^2+(z-z')^2+a^2-2(x-x')^2}{[\cdots+a^2]^{3/2}}
\end{aligned}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot f_a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{3a^2}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{5/2}}$$

$$\lim_{a\to 0} f_a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}' \\ \infty & \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}' \end{cases}$$

$\Rightarrow$ zum Integral $\int_V d^3r' \dots$ trägt (in Limes $a\to 0$) nur der Bereich $\boldsymbol{r}'\approx\boldsymbol{r}$ bei

$$K_R(\boldsymbol{r}) = \{\boldsymbol{r}'\in\mathbb{R}^3 : |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\leq R\}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{a\to 0}\int_V d^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\nabla_{\boldsymbol{r}}\cdot f_a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\
&= \lim_{a\to 0}\int_{K_R(\boldsymbol{r})} d^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\frac{3a^2}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{5/2}} \\
&+ \underbrace{\lim_{a\to 0}\int_{V/K_R(\boldsymbol{r})} d^3r'\rho(\boldsymbol{r}')\frac{3a^2}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{5/2}}}_{=0}
\end{aligned}$$

Wähle R klein genug, dass man innerhalb $K_R(\boldsymbol{r})$
$\rho(\boldsymbol{r}')$ in Taylorreihe um $\boldsymbol{r}$ entwickeln kann.

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r},\ d^3r' = d^3\tilde{r}$$

$$\int_{K_R(\boldsymbol{r})} d^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\frac{3a^2}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{5/2}} = \int_{K_R(0)} d^3\tilde{r}\ \rho(\boldsymbol{r}+\tilde{\boldsymbol{r}})\frac{3a^2}{[\tilde{\boldsymbol{r}}^2+a^2]^{5/2}}$$

Taylorentwicklung von $\rho(\boldsymbol{r}+\tilde{\boldsymbol{r}})$ zum $\tilde{\boldsymbol{r}}=0$

$$\rho(\boldsymbol{r}+\tilde{\boldsymbol{r}}) = \rho(\boldsymbol{r}) + \tilde{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho(\boldsymbol{r}) + \dots$$

$$= \int_{K_R(0)} d^3\tilde{r}\ (\rho(\boldsymbol{r}) + \tilde{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho(\boldsymbol{r}) + \dots)\frac{3a^2}{[\tilde{\boldsymbol{r}}^2+a^2]^{5/2}}$$

1. Integral:

$$\int_{K_R(0)} d^3\tilde{r}\ \rho(\boldsymbol{r})\frac{3a^2}{(\tilde{r}^2+a^2)^{5/2}} = \rho(\boldsymbol{r})\underbrace{\int_0^R d\tilde{r}\ \frac{3a^2}{(\tilde{r}^2+a^2)^{5/2}}}_{\left[\frac{\tilde{r}^3}{(\tilde{r}^2+a^2)^{3/2}}\right]_0^R}\underbrace{\int \overset{\sin\theta d\theta d\varphi}{\overset{\|}{d\Omega}}}_{=4\pi}$$

$$= 4\pi\rho(\boldsymbol{r})\frac{R^3}{(R^2+a^2)^{3/2}} \xrightarrow[a\to 0]{} 4\pi\rho(\boldsymbol{r})$$

2. Integral:

$$\int_{K_R(0)} d^3\tilde{r}\ \underset{\tilde{r}\boldsymbol{e}_{\tilde{r}}}{\underset{\|}{\tilde{\boldsymbol{r}}}}\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}}\rho(\boldsymbol{r})\frac{3a^2}{(\tilde{r}^2+a^2)^{5/2}} = \underbrace{\int_0^R d\tilde{r}\ \frac{3a^2\tilde{r}^3}{(\tilde{r}^2+a^2)^{3/2}}}_{\frac{2}{3}a-3a^2\left(\frac{R^2+\frac{2}{3}a^2}{(R^2+a^2)^{3/2}}\right)}\underbrace{\int d\Omega\ \boldsymbol{e}_{\tilde{r}}\cdot\nabla\rho(\boldsymbol{r})}_{\text{unabh. von } a} \xrightarrow[a\to 0]{} 0$$

gilt auch für alle höheren Terme

$$\lim_{a\to 0}\int_V d^3r'\rho(\boldsymbol{r})\nabla_{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{3/2}} = 4\pi\rho(\boldsymbol{r})$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\overset{''}{\lim_{a\to 0}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

$$\boxed{\nabla\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \quad \boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^3}$$

1.3.4 Zusammenfassung:

Feldgleichungen der Elektrostatik

Mathe: partielle DGL

$$\nabla\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \text{ inhomogene DGL}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \text{ homogene DGL}$$

DGL für Potential ϕ: $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \nabla\cdot(-\nabla\phi) &= -\nabla\cdot\begin{pmatrix}\partial_x\phi\\ \partial_y\phi\\ \partial_z\phi\end{pmatrix}\\ &= -\underbrace{\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)}_{=:\Delta\phi}\end{aligned}$$

Partielle DGL 2. Ordnung:

Poissongleichung

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

für Gebiete mit $\rho(\boldsymbol{r}) = 0$:

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad \text{Laplacegleichung}$$

Darstellung der Deltafunktion:

$$\lim_{a\to 0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\underbrace{\nabla_{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{3/2}}}_{\frac{3a^2}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{5/2}}=:g_a(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})} = 4\pi\rho(\boldsymbol{r})$$

$$\frac{1}{4\pi}g_a \text{ liefert Grenzwertdarstellung der } \delta\text{-funktion.}$$

$$\lim_{a\to 0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\frac{1}{4\pi}g_a(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})$$

$$\lim_{a\to 0} g_a(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}' \\ \infty & \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' \end{cases}$$

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{4\pi} \nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{r^2}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\overset{\text{formal}}{=} \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \underbrace{\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}}_{=-\nabla\frac{1}{r}} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r}\right) = \frac{-1}{4\pi} \Delta \frac{1}{r} \Rightarrow \Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

z.B. Potential einer Punktladung ρ q in $\boldsymbol{r}_0$:

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}$$

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \underbrace{\Delta_{\boldsymbol{r}} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}}_{=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{q\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)}_{=\rho(\boldsymbol{r})} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

Wiederholung

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$
$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$$
$$\Rightarrow \quad \Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

1.3.5 Integralsätze der Vektoranalysis

1) Gaußscher Satz:

Sei $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ ein Vektorfeld im Volumen $V \subset \mathbb{R}^3$, so gilt:

$$\int_V d^3r \; \nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_{\partial V} d\boldsymbol{f} \;\; \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

$$\partial V \text{ Rand von } V$$

$$\underset{\text{nach aussen orientierter Normaleneinheutsvektor}}{d\boldsymbol{f} = \underset{\downarrow}{\boldsymbol{n}}\, df}$$

Bemerkung:

i) Analogie 1D: Fundamentalsatz der Integralrechnung:

$$\int_a^b dx \frac{df}{dx} = f(b) - f(a)$$

ii) Geometrische / physikalische Integration:
Fluss des Vektorfeldes $\boldsymbol{A}$ durch ∂V

$$\int_{\partial V} d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{A}$$

Integral über die Quellen von $\boldsymbol{A}$

$$\int_V d^3r \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A} = \text{const.} \to \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$$

Beispiel: Geschwindigkeit einer Flüssigkeit: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$

$$\boldsymbol{v} = \text{const.} \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \quad \int_{\partial V} d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

$\Rightarrow$ Es gibt keine Quellen von $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{r} \neq 0 \quad \int_{\partial V} d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \neq 0$$

iii)

$$\int_V d^3r \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_0^{\Delta x} dx \int_0^{\Delta y} dy \int_0^{\Delta z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\Delta z} dz \int_0^{\Delta y} dy \underbrace{\int_0^{\Delta x} dx \frac{\partial A_x}{\partial x}}_{A_x(\Delta x, y, z) - A_x(0, y, z)} \\
&= \int_0^{\Delta z} dz \int_0^{\Delta y} A_x(\Delta x, y, z) - \int_0^{\Delta z} dz \int_0^{\Delta y} dy A_x(0, y, z) \\
&= \int_{F_A^+} d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{A} + \int_{F_A^-} d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

$$F_x^+ : \quad d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_x dydz \qquad F_x^- : \quad d\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{e}_x dydz$$

ebenso gilt dann für die anderen Koordinaten:

$$\int_0^{\Delta x} dx \int_0^{\Delta z} dz \int_0^{\Delta y} dy \frac{\partial A_y}{\partial y} = \int_{F_y^+} d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{A} + \int_{F_y^-} d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{A}$$

$$\int_0^{\Delta x} dx \int_0^{\Delta y} dy \int_0^{\Delta z} dz \frac{\partial A_z}{\partial z} = \int_{F_z^+} d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{A} + \int_{F_z^-} d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{A}$$

$$\Rightarrow \int_V d^3r \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \int_{\partial V} d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{A}$$

2) Stokescher Satz

Sei $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ ein Vektorfeld, F eine Fläche mit Randkurve ∂F, so gilt:

$$\int\limits_{\text{Linienintegral}\rightarrow\partial F} d\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int\limits_{F\leftarrow\text{Oberflächenint.}} d\boldsymbol{f}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}))$$

$$d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{n}df$$

Richtung von $d\boldsymbol{f}$ und Umlauf sinn von ∂F: rechte Hand Regel.

Beispiel:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+1 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{r}(\varphi) = R\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi\in[0,2\pi]$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi} = R\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\int_{\partial F} d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) &= \int_0^{2\pi} d\varphi\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(\varphi)) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi R(+\sin^2\varphi+\cos^2\varphi) = 2\pi R^2\end{aligned}$$

$$\int_F d\boldsymbol{f}\,\overbrace{(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})}^{2\boldsymbol{e}_z} = 2\pi R^2$$

Vektorfeld ohne Wirbel z.B. $\boldsymbol{A} = \text{const.}$
$\nabla\times\boldsymbol{A} = 0$
Bemerkung:

1.3.6 Integrale Form der Feldgleichung

1.3.7 Gaußsches Gesetz

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{aligned}\int_V d^3r\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3r\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}Q_V \\ &= \int_V d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{\partial V} d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon}Q_V}$$

Berechnung elektrischer Felder für hochsymmetrische Ladungsverteilungen

Beispiel:
Homogen geladene Kugel mit Radius R und Gesamtladung Q. Damit ist die Ladungsdichte innerhalb der Kugel:

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_r(r)\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{r} = r \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$
Fluss von $\boldsymbol{E}$ durch Oberfläche einer Kugel mit Radius r

$$d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_r r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \Rightarrow d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{E} = E_r(r) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\begin{aligned}\int_{\partial K_r(0)} d\boldsymbol{f}\ \boldsymbol{E} &= \int_0^T d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi E_r(r) r^2 \sin\theta \\ &= E_r(r) r^2 4\pi \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{K_r(0)} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{K_r(0)} d^3r\ \rho(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\begin{cases} Q & r > R \\ Q\frac{r^3}{R^3} & r \leq R \end{cases}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} \frac{1}{r^2} & r > R \\ \frac{r}{R^3} & r \leq R \end{cases}$$

1.3.8 Satz von Stokes

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = 0$$

Definition: $\gamma = \partial F$
$\int_\gamma$ ist dann ein Linienintegral über eine geschlossene Kurve

$$\boxed{\int_\gamma d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E} = \int_F d\boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) = 0}$$

1.3.9 Zusammenfassung: Feldgleichungen der Elektrostatik

differentielle Darstellung:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi \quad \rightarrow \quad \Delta\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

Integral Darstellung:

$$\int_{\partial V} d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_V \quad , \quad \oint_\gamma d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E} = 0$$

1.4 Elektrostatische Energie

potentielle Energie einer Punktladung im äußeren elektrischen Feld
Kraft auf Ladung q:

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$$

Die Arbeit bei Verschiebung der Ladung von $\boldsymbol{a}$ nach $\boldsymbol{b}$

$$\begin{aligned} W &= -\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{F} = -q \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \\ &= q \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi = q \underbrace{(\Phi(\boldsymbol{b}) - \Phi(\boldsymbol{a}))}_{\text{Potentialdifferenz}} \end{aligned}$$

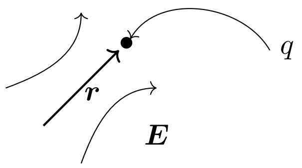
Die Arbeit um q aus dem unendlichen ∞ nach $\boldsymbol{r}$ zu bringen ist dann:

$$W = q(\Phi(\boldsymbol{r}) - \Phi(\infty))$$

Zur Referenz: $\Phi(\infty) = 0$
Damit ist die Energie der Ladung q im äußeren Feld:

$$\Rightarrow W = q(\Phi(\boldsymbol{r}))$$

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$$

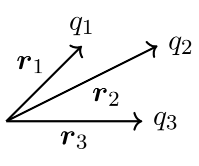


1.4.1 Elektrostatische Potentielle Energie

Energie einer Verteilung von Punktladungen

N Ladungen q: an Orten $\boldsymbol{r}_i$
Zunächst: $\underbrace{i-1}_{\text{erzeugen am Ort } \boldsymbol{r}_i}$ Ladungen q_j bei $\boldsymbol{r}_j$
Das Potential

$$\Phi(\boldsymbol{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|}$$



Arbeit um i-te Ladung aus dem unendlichen nach $\boldsymbol{r}$ zu bringen:

$$W_i = q_i\Phi(\boldsymbol{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Somit ergibt sich die gesamte Arbeit für N Ladungen als:

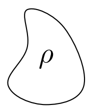
$$\begin{aligned} W = \sum_{i=2}^{N} W_i &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \underbrace{\left(\sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_{ij}} \right)}_{\Phi_{\not{i}}(\boldsymbol{r}_i)}$$

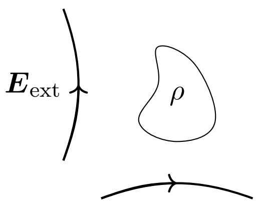
$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \Phi_{\not{i}}(\boldsymbol{r}_i)$$

Energie einer kontinuierlichen lokalisierten Ladungsverteilung



$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \, \frac{\rho(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|}$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3r \; \rho(\boldsymbol{r}) \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|}}_{\Phi(\boldsymbol{r})}$$



$$W_{\text{ext}} = \int d^3r \; \rho(\boldsymbol{r}) \Phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r})$$

Energie W durch $\boldsymbol{E}$ ausdrücken:

$$\boldsymbol{\Delta}\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad \Rightarrow \quad W = -\frac{1}{2} \int d^3r \varepsilon_0 \underbrace{\boldsymbol{\Delta}\Phi(\boldsymbol{r})\Phi(\boldsymbol{r})}_{\substack{\boldsymbol{\nabla}\cdot(\Phi\boldsymbol{\nabla}\Phi) - (\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2 \\ \| \\ \boldsymbol{E}}}$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \boldsymbol{\nabla} \cdot (\Phi \boldsymbol{\nabla} \Phi)} + \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{K_R(0)} d^3r \boldsymbol{\nabla} \cdot (\Phi \boldsymbol{\nabla} \Phi) = \lim_{R\to\infty} \int_{\partial K_R(0)} \underbrace{d\boldsymbol{f} \cdot \underbrace{(\Phi \boldsymbol{\nabla} \Phi)}_{\overset{R\to\infty}{\sim} \frac{1}{R^3}}}_{\sim \frac{1}{R}} = 0$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

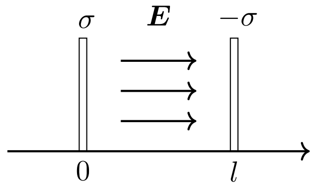
Zur Umformung oben wurde benutzt:

$$\Phi \overset{R\to\infty}{\sim} \frac{1}{R} \qquad \boldsymbol{\nabla}\Phi \sim \frac{1}{R^2} \qquad d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{n} \underbrace{df}_{\sim R^2}$$

Damit ergibt sich für die Energie einer Verteilung von Punktladungen

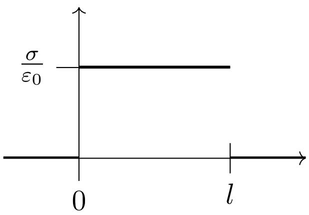
$$\Rightarrow \quad \boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \; \boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r})} \qquad \text{nicht für Punkladungen}$$

Energiedichte des elektrostatischen Feldes



$$\boxed{w(\boldsymbol{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r})}$$

Beispiel: **Plattenkondensator**
Fläche F, Ladung $\rightarrow \; r = \frac{q}{F} \; \rightarrow \; \boldsymbol{E} = \frac{r}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x$

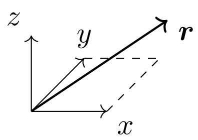


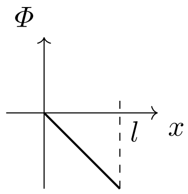
$\rightarrow$ Die Energiedichte ist: $w = \frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$ (nicht für Punktladungen)

$\rightarrow$ Die Energie beträgt: $W = \int d^3r w(\boldsymbol{r}) = l \cdot F \cdot \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

Potentialdifferenz - Spannung

$$\Phi(\boldsymbol{r}) - \Phi(0) = -\int_0^{\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') = -\int_0^x dx' \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}x$$





Die Spannung zwischen zwei Kondensatorplatten ist dann:

$$U = \Phi(0) - \Phi(l) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}l = \frac{q}{\varepsilon_0 F}l$$

Die Kapazität ist also:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0 F}{l}$$

Was ist die Energie bei einer Verteilung von Punktladungen und bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung. Bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung haben wir herausgefunden:

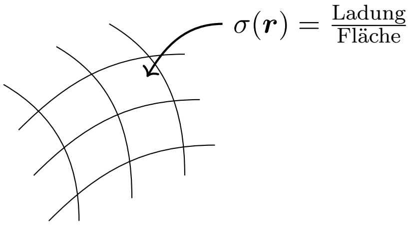
$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \qquad \text{für Punktladungen}$$

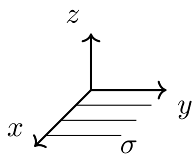
Die Energie der Punktladung selbst steckt hier nicht drinnen. Man muss dabei aufpassen, welche Gleichung man für welches Modell benutzt.

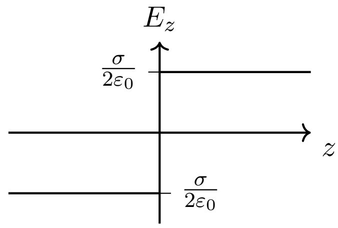
$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad \int d^3r \; \boldsymbol{E}^2 = \int d^3r \; \frac{1}{r^4} = \infty$$

1.5 Verhalten des el. Feldes an Grenzflächen mit Flächenladung

$\rightarrow$ Diskontinuitäten von $\boldsymbol{E}$
Beispiel: Wir betrachten eine homogene Flächenladung.



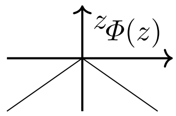




$$\Rightarrow \boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\operatorname{sgn}(z)\boldsymbol{e}_z$$

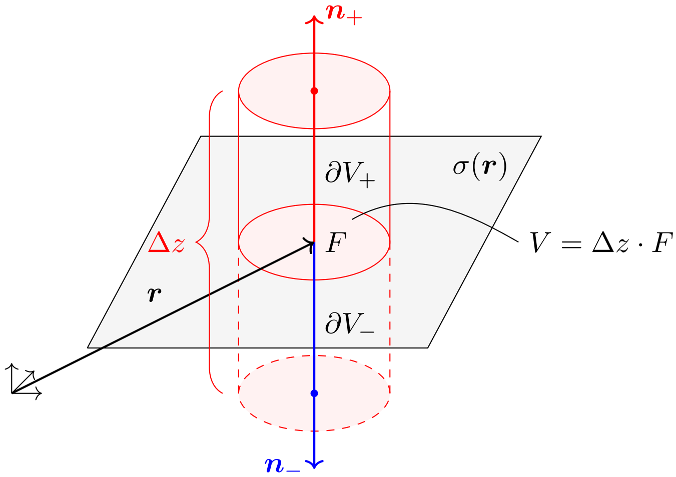
$$\boldsymbol{E}_\perp = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z$$
$$\boldsymbol{E}_\parallel = 0$$

Das elektrische Feld $\boldsymbol{E}_\parallel$ ist gleich der Ableitung des elektrischen Potentials:
Das elektrische Potential ist also stetig.



Normalkomponente $\boldsymbol{E}_\perp$

Gaußscher Satz für V:



$$\begin{aligned}\int_V d^3r'\; \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \int_{\partial V} d\boldsymbol{f}'\;\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \\ &= \underset{\substack{\downarrow\,\Delta z\to 0\\ 0}}{\int_{\text{Mantel}} d\boldsymbol{f}'\;\boldsymbol{E}} + \underset{\substack{\downarrow\,\Delta z\to 0\\ \int_F df'\;\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_+}}{\int_{\partial V_+} d\boldsymbol{f}'\;\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})} + \underset{\substack{\downarrow\,\Delta z\to 0\\ -\int_F df'\;\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_-}}{\int_{\partial V_-} d\boldsymbol{f}'\;\boldsymbol{E}}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{E}_\pm$ ist das Feld auf beiden Seiten der Grenzfläche

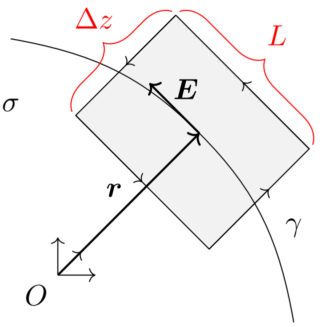
$$\int_{\partial V} d\boldsymbol{f}'\boldsymbol{E} \xrightarrow{\Delta z\to 0} \int_F df\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_-) \xrightarrow{F\to 0} F\;\boldsymbol{n}\cdot\big(\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r})\big)$$
$$\parallel$$
$$\int_V d^2r'\underset{\substack{\parallel\\ \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}')}}{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3r'\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_F df'\sigma(\boldsymbol{r}') \xrightarrow{F\to 0} \frac{1}{\varepsilon_0}F\sigma(\boldsymbol{r})$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r})) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\boldsymbol{r})$$

$$E_{\perp_\pm} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_\pm \qquad E_{\perp_+}(\boldsymbol{r}) - E_{\perp_-}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\boldsymbol{r})$$

Tangentialkomponente $E \parallel$

Satz von Stokes:



$$0 = \oint_r d\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') = \underbrace{\int \cdots + \int \ldots}_{=0 \text{ für } \Delta z \to 0} + \underbrace{\int d\boldsymbol{r}'\boldsymbol{E} + \int d\boldsymbol{r}'\boldsymbol{E}}_{\int d\boldsymbol{r}'(\boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_-)}$$

$$0 = \oint_\gamma d\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{E} \xrightarrow{\Delta z \to 0} \int_{-\frac{L}{2}}^{-\frac{L}{2}} ds\boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_-) \xrightarrow{L \to 0} L\boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r})) = 0$$

$$\to \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r}) = 0$$

$\to$ Die Tangentialkomponente ist stetig

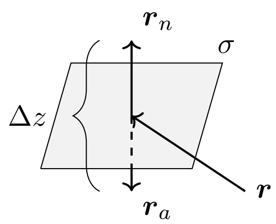
$$E_{\parallel +} = E_{\parallel -}$$

Insgesamt ergibt sich damit:

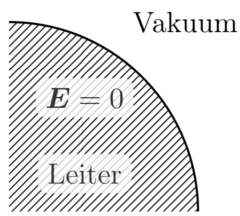
$$\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{n}$$

Das elektrische Potential Φ ist damit stetig.

$$\underbrace{\Phi(\boldsymbol{r}_b) - \Phi(\boldsymbol{r}_a)}_{\Phi_+(\boldsymbol{r}) - \Phi_-(\boldsymbol{r})} = \int_{\boldsymbol{r}_a}^{\boldsymbol{r}_b} d\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{E} \quad \xrightarrow{\Delta z \to 0} 0$$



1.5.1 Randbedingungen an el. Leitern



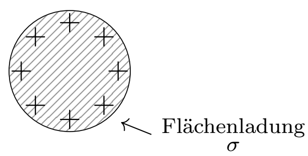
Leiter: Material mit freibeweglichen Ladungsträgern (Metall)
Eigenschaften von $\boldsymbol{E}$ im Leiter:

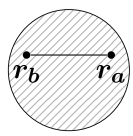
i) $\boldsymbol{E} = 0$

ii) $0 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \qquad \rho(\boldsymbol{r}) = 0$

iii) Nettoladung befinden sich an Oberfläche

iv) Potential $\Phi(\boldsymbol{r}_b) - \Phi(\boldsymbol{r}_a) = 0 \quad \to \quad \Phi(\boldsymbol{r}) = \text{const.}$





Randbedingungen

$$\boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_- = \frac{\sigma^-}{\varepsilon_0}\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{E}_- = 0$$

$$\rightarrow \boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) = \frac{\sigma(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$$

[Folie: Ladung an Oberfläche eines Leiters]

1.6 Randwertprobleme (RWP) der Elektrostatik und Lösungsmethoden

1.6.1 Formulierung des Randwertproblems

Das elektrische Potential: $\Phi(\boldsymbol{r})$: $\quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\Phi(\boldsymbol{r})$

$$\boldsymbol{\Delta}\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \qquad \text{Poisson-Gleichung}$$

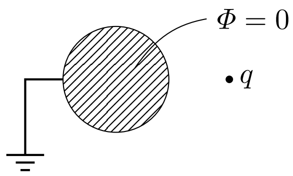
Für eine gegebene lokale Ladungsverteilung ρ gilt:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

$$\rightarrow \Phi(\boldsymbol{r}) \xrightarrow{|\boldsymbol{r}|\to 0} 0$$

Typische Problemstellung:
Ladungsverteilung ρ + Werte des Potentials auf Randfläche

Beispiel:

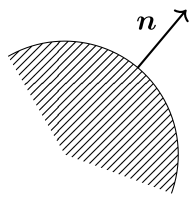


Randwertproblem: Gegeben: $\rho(\boldsymbol{r}')$ im Raumbereich V
$\Phi(\boldsymbol{r})$ oder $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ auf Randfläche ∂V
Gesucht: $\Phi(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ überall in V

Zwei Fälle:

i) $\Phi(\boldsymbol{r})$ ist auf der Randfläche gegeben
$\rightarrow$ **Dirichlet-Randbedingung**

ii) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ ist auf der Randfläche gegeben
$\rightarrow$ **Neumannsche Randbedingung**



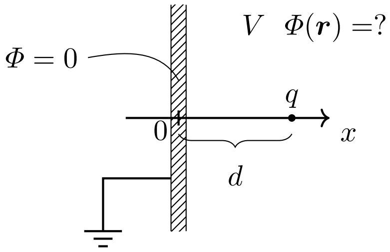
Gegeben sei: $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E}$ dies ist gleich der **Normalenableitung**:

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{n}\boldsymbol{\nabla}\Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

Wir beschränken uns vorwiegend auf den ersten Fall. Zur Lösung dieser Probleme gibt es einige Methoden. Zum Einstieg und zur Wiederholung betrachten wir zunächst die Methode der Spiegelladung.

1.6.2 Methode der Bildladung (Spiegelladung)

Punktladung vor leitender, geerdeter Metallplatte



$$\boldsymbol{\Delta}\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

$\boldsymbol{r} \in V \qquad \boldsymbol{r}_0 = (d,0,0) \qquad V = \{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3, x > 0\}$

Randbedingungen:

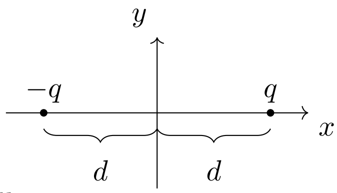
$$\Phi(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \text{für} \quad \boldsymbol{r} \in \partial V, \qquad \text{d.h. } \boldsymbol{r} = (0,y,z)$$

Idee: Ersetze ursprüngliche Problem durch "Fiktives" Problem mit zusätzlichen Ladungen außerhalb von V, welche die Randbedingungen simulieren.

Potential der Punkladungen in $\boldsymbol{r}_0$:

$$\Phi_q(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$$

addiere Ladung $-q$ in $\boldsymbol{r}_0' = (-d,0,0) = -\boldsymbol{r}_0$



$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} - \frac{q}{|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_0|}\right)$$

Schauen wir nun nach ob dies die Poisson-GLeichung erfüllt:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Delta}\Phi &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\underbrace{\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}}_{=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)} - -\underbrace{\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_0|}}_{=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_0)}\right) \\
&= -\underset{\checkmark}{\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)} + \frac{q}{\varepsilon_0}\underbrace{\delta(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_0)}_{=0 \text{ für } \boldsymbol{r}\neq-\boldsymbol{r}_0 \ \checkmark \quad \forall \boldsymbol{r}\in V}
\end{aligned}$$

Diskussion der Lösung

i) **Struktur**

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}}_{=:\ \Phi_\mathrm{s}(\boldsymbol{r})} + \underbrace{\frac{(-q)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_0|}}_{=:\ \Phi_\mathrm{hom}(\boldsymbol{r})}$$

$\boldsymbol{r} \in V$

$$\Delta\Phi_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

$$\Delta\Phi_\mathrm{hom}(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad \text{Laplace-Gleichung}$$

Mathematisch: Lösung inhomogener DGL

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}) + \Phi_\mathrm{hom}(\boldsymbol{r})$$

Φ_hom wird so gewählt, dass die Randbedingungen erfüllt werden:

$$\boldsymbol{r} \in \partial V: \quad \Phi_\mathrm{o}(\boldsymbol{r}) = \Phi_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}) + \Phi_\mathrm{hom}(\boldsymbol{r})$$

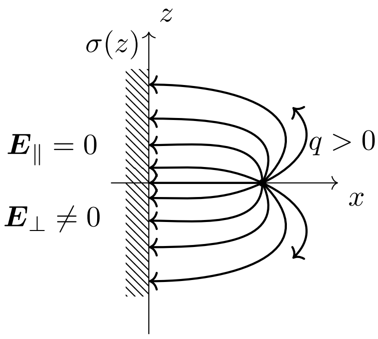
ii) **Elektrisches Feld**

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(x-d,y,z)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} - \frac{(x+d,y,z)}{|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_0|^3}\right)$$

An der Oberfläche $x \to 0,\, x \geq 0$
$|\boldsymbol{r} \pm \boldsymbol{r}_0|^3 \to (d^2 + y^2 + z^2)$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\Big|_{\boldsymbol{r}\in\partial V} = -\frac{qd}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_x$$

Durch das externe elektrische Feld verschieben sich die Ladungsträger im Metall und es entsteht eine Influenzladung an der Oberfläche.



iii) **Influenzladung auf Metalloberfläche**

$$\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_-} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{n} \qquad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_x$$

$\boldsymbol{r} \in \partial V$:

$$\sigma(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) = -\frac{qd}{2\pi(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

gesamte influenzierte Ladung

$$q_i = \int_{\partial V} df\ \sigma(\boldsymbol{r}) = \cdots = -q$$

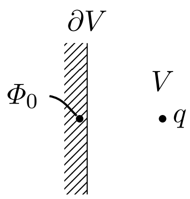
iv) **Kraft zwischen Punktladungen und Metallplatte**

$$\boldsymbol{F} = q\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}_0) = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0(2d)^2}\boldsymbol{e}_x$$

Eindeutigkeit der Lösung des Randwertproblems

Dirichlet-Randwertproblem:

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \qquad \boldsymbol{r} \in V$$
$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi_0(\boldsymbol{r}) \qquad \boldsymbol{r} \in \partial V$$



Annahme: $\Phi_1,\ \Phi_2$ lösen RWP

$$\text{d.h.} \qquad \Delta\Phi_1(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) = \Delta\Phi_2(\boldsymbol{r}) \qquad \boldsymbol{r} \in V$$
$$\Phi_1(\boldsymbol{r}) = \Phi_0(\boldsymbol{r}) = \Phi_2(\boldsymbol{r}) \qquad \boldsymbol{r} \in \partial V$$

Setze :

$$\psi(\boldsymbol{r}) := \Phi_1(\boldsymbol{r}) - \Phi_2(\boldsymbol{r})$$
$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \boldsymbol{r} \in V$$
$$\boldsymbol{r} \in \partial V \quad \psi(\boldsymbol{r}) = \Phi_1(\boldsymbol{r}) - \Phi_2(\boldsymbol{r}) = 0$$

Greensche Identität:

g, h Funktionen an V:

$$\begin{aligned}
&\int_V d^3r\,[(\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{r}))\cdot(\boldsymbol{\nabla}h(\boldsymbol{r})) + g(\boldsymbol{r})\Delta h(\boldsymbol{r})]\\
&= \int_{\partial V} d\boldsymbol{f}\cdot(g(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\nabla}h(\boldsymbol{r})\\
&= \int_{\partial V} d\boldsymbol{f}\,g(\boldsymbol{r})\,\underbrace{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}h(\boldsymbol{r})}_{=\frac{\partial h}{\partial n}(\boldsymbol{r})}
\end{aligned}$$

$h = g = \psi$

$$\Rightarrow \quad \int_V d^3r\;((\boldsymbol{\nabla}\psi)^2 + \psi(\boldsymbol{r})\underbrace{\Delta\psi(\boldsymbol{r})}_{=0}) = \int_{\partial V} df\;\underbrace{\psi(\boldsymbol{r})}_{=0}\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r})}{\partial n}$$

$$\Rightarrow \int_V d^3r\,(\boldsymbol{\nabla}\psi(\boldsymbol{r}))^2 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\psi(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad \boldsymbol{r}\in V$$

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \text{const.} \qquad \psi(\boldsymbol{r}) = 0 \text{ in } V \quad\Rightarrow\quad \Phi_1(\boldsymbol{r}) = \Phi_2(\boldsymbol{r})$$

1.6.3 Formale Lösungen des elektrostatischen Randwertproblems mit Greenschen Funktionen

GF: generelle Methode um inhomogene DGL zu lösen

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

Greensche Funktionen der Poisson-Gleichung: $\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ mit

Greensche Funktionen der Poisson-Gleichung

$$\Delta_{\boldsymbol{r}}\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

Diese Gleichung geht vor einer Punktladung mit $q = 1$ aus, ist hier aber zunächst einmal eine Definition.

$\mathcal{G}$ bekannt

$$\rightarrow \Phi(\boldsymbol{r}) = \int d^3r'\;\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')$$

$$\Delta_{\boldsymbol{r}}\Phi(\boldsymbol{r}) = \int d^3r'\;\underbrace{(\Delta_{\boldsymbol{r}}\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'))}_{=\frac{1}{\varepsilon_0\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}\rho(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \checkmark$$

$$\Delta_{\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = 4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$$\rightarrow \Delta_{\boldsymbol{r}}\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) \overset{|\boldsymbol{r}|\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\rightarrow \quad \Delta_{\boldsymbol{r}} \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \underset{|\boldsymbol{r}|\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Dirichlet-Randwertproblem

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \quad \boldsymbol{r} \in V$$
$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi_0(\boldsymbol{r}) \quad \boldsymbol{r} \in \partial V$$

GF:

$$\Delta_{\boldsymbol{r}} \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \quad \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}' \in V$$
$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = 0 \text{ für } {}^{\boldsymbol{r}\in\partial V}_{\boldsymbol{r}'\in V}$$

Hiermit haben wir das Grenzwertproblem auf eine Integration zurückgeführt. Dies werden wir nun Beweisen:

Die 2. Greensche Identität lautet:

$$\int_V d^3r' \left(g(\boldsymbol{r}')\Delta_{\boldsymbol{r}'} h(\boldsymbol{r}') - h(\boldsymbol{r}')\Delta_{\boldsymbol{r}'} g(\boldsymbol{r}')\right)$$
$$= \int_{\partial V} d\boldsymbol{f}' \cdot \left(g(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} h(\boldsymbol{r}') - h(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} g(\boldsymbol{r}')\right)$$
$$g(\boldsymbol{r}') := \Phi(\boldsymbol{r}') \qquad h(\boldsymbol{r}') := \mathcal{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$$

$$\Rightarrow \quad \int_V d^3r' \left[\Phi(\boldsymbol{r}') \underbrace{\Delta_{\boldsymbol{r}'}\mathcal{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})}_{=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})} - \mathcal{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) \underbrace{\Delta_{\boldsymbol{r}'}\Phi(\boldsymbol{r}')}_{=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}')}\right]$$
$$= \int_{\partial V} d\boldsymbol{f}' \left[\underbrace{\Phi(\boldsymbol{r}')}_{=\Phi_0(\boldsymbol{r}')} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'}\mathcal{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) - \underbrace{\mathcal{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})}_{=0} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'}\Phi(\boldsymbol{r}')\right]$$
$$\Rightarrow = -\frac{1}{\varepsilon_0}\Phi(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3r' \ \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})$$
$$= \int_{\partial V} d\boldsymbol{f}' \ \Phi_0(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'}\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$$
$$= \int_{\partial V} d\boldsymbol{f}' \ \Phi_0(\boldsymbol{r}')\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$$
$$\Rightarrow \Phi(\boldsymbol{r}) = \int_V d^3r' \ \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}') - \varepsilon_0 \int_{\partial V} df' \ \Phi_0(\boldsymbol{r}')\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$$

Es gilt (HA):

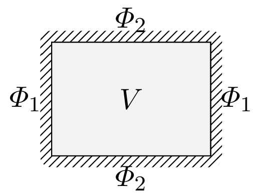
$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \mathcal{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) \qquad \text{Reziprozität}$$
$$\rightarrow \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'}\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'}\mathcal{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$$
$$\Delta_{\boldsymbol{r}}\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \Delta_{\boldsymbol{r}'}\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$$

$$\boxed{\Phi(\boldsymbol{r}) = \int_V \mathrm{d}^3r' \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}') - \varepsilon_0 \int_{\partial V} \mathrm{d}f' \Phi_0(\boldsymbol{r}')\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}$$

Bemerkungen:

i) Spezialfälle:

1) V Ladungsfrei ($\rho(\boldsymbol{r}) = 0$ in V)



$$\rightarrow \Phi(\boldsymbol{r}) = -\varepsilon \int_{\partial V} \mathrm{d}f' \Phi_0(\boldsymbol{r}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Phi(\boldsymbol{r}) &= -\varepsilon \Phi_0 \underbrace{\int_{\partial V} \mathrm{d}f' \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}_{\int \mathrm{d}f' \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G}} \\
&= -\varepsilon \Phi_0 \int \mathrm{d}\boldsymbol{f}' \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G} \\
&\overset{\text{S.v.G.}}{=} \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \underbrace{\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \cdot (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G})}_{\Delta_{\boldsymbol{r}'} \cdot \mathcal{G} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')} \\
&= -\frac{1}{\varepsilon_0} \\
\Rightarrow \Phi(\boldsymbol{r}) &= \Phi_0
\end{aligned}$$

2) $V = \mathbb{R}^3$, lokalisierte Ladungsverteilung ρ

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \qquad \int_{\partial V} \cdots \rightarrow 0$$

eine spezielle Lösung für $\mathcal{G}$

ii) $\mathcal{G}$ ist auch die Lösung einer inhomogenen partiellen DGL

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \underbrace{\mathcal{G}_s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}_{\substack{\text{spezielle} \\ \text{Lösung der} \\ \text{inhomogenen} \\ \text{DGL}}} + \underbrace{F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}_{\substack{\text{Lösung} \\ \text{zugehörigen} \\ \text{homogenen} \\ \text{DGL}}}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G}_s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \\
\Delta_{\boldsymbol{r}'} F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') &= 0
\end{aligned}$$

$$\mathcal{G}_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \qquad \text{Laplace anwenden !}$$

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}}_{\text{immer zur Lösung}} + \underbrace{F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}_{\substack{\text{so wählen, dass} \\ \text{Randbedingungen erfüllt}}}$$

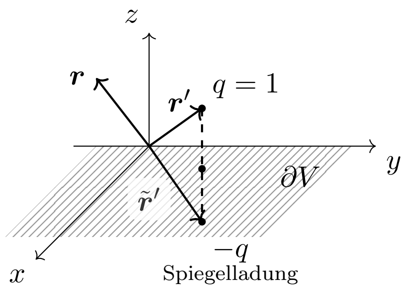
$F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ so wählen, dass die Randbedingungen erfüllt sind: $\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = 0 \quad \boldsymbol{r} \in \partial V$.

1.6.4 Greensche Funktion des Dirichlet Randwertproblems einer Ebene

$$\Delta_{\boldsymbol{r}'}\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' \in V$$

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0 \qquad \boldsymbol{r} \in \partial V \ \ \text{(z=0)}, \quad \boldsymbol{r} \in V$$

$$V = \{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3 | z < 0\}$$



Analog: Punktladung „$q = 1$" in $\boldsymbol{r}'$ vor leitender Ebene mit Potential 0

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} - \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}'|}\right) \qquad \tilde{\boldsymbol{r}}' = (x', y', -z')$$

$$\boxed{\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{q}\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} - \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}'|}\right)}$$

Beweis:

$$\Delta_{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Bigg(\underbrace{\Delta_{\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}_{=\,-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} - \underbrace{\Delta_{\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}'|}}_{=\,-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}')=0}\Bigg) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

1. Teil: $\boldsymbol{r} \in \partial V \;:\quad z = 0\ ,$ 2. Teil $= 0$: $\tilde{\boldsymbol{r}}' \notin V$.

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z')^2}} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(-z)^2}}$$
$$= \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}'|}$$

$\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0 \quad \boldsymbol{r} \in \partial V$

Bemerkung:

i) $\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$
 $F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}'|}$
 $\Delta_{\boldsymbol{r}}F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0$

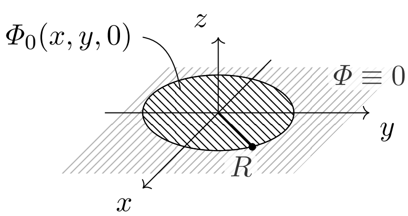
ii) Symmetrie der Greenschen Funktion (Reziprozitätsrelation):

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \mathcal{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$$

→ formale Lösung des Randwertproblems für eine beliebige Ladungsverteilung und Randwerte $\Phi_0(\boldsymbol{r})$ in der Ebene:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \int_V \mathrm{d}^3r'\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}') - \varepsilon_0\int_{\partial V}\mathrm{d}f'\Phi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial n'}$$

$$\rho \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0 \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\leq R} \mathrm{d}y'\mathrm{d}x'\Phi_0(x',y',0)\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial n'}$$



1.6.5 Separation der Variablen und Entwicklung nach orthogonalen Funktionen

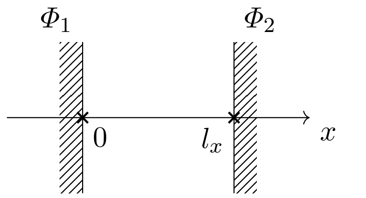
Eine allgemeine Methode zur Lösung partieller DGL.

Zur Vereinfachung: **Laplace.Gl $\boldsymbol{\Delta\Phi = 0}$ + Randbedingung**

Verbindung zur Poisson-Gl: $\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi_s(\boldsymbol{r}) + \Phi_{\text{hom}} \qquad \Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r' \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + \Phi_{\text{hom}}$$

Motivation: 1-Dim Randwertproblem



$$\Phi(x) = ? \qquad \rho = 0$$

$$\Delta\Phi(x) = \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \Phi(x) = c_1 + c_2 x$$

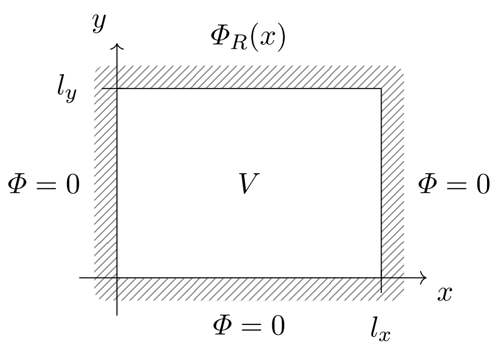
Randbedingungen:

$$\Phi(0) = c_1 = \Phi_1 \qquad \Phi(l_x) = \Phi_1 + c_2 l_x = \Phi_2$$

$$\rightarrow c_2 = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l_x} \qquad \rightarrow \qquad \Phi(x) = \Phi_1 + \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l_x}x$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l_x}\boldsymbol{e}_x$$

2-Dim Randwertproblem



Wir suchen: $\Phi = \Phi(x,y) \quad$ mit $\rho = 0$

$$0 = \Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$$

Randbedingungen:

i) $\Phi(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad y = 0$

ii) $\Phi(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad x = 0$

iii) $\Phi(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad x = l_x$

iv) $\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi_R(x) \qquad y = l_y$

Separationsansatz: $\Phi(x,y) = f(x)g(y)$

$$\begin{aligned} 0 = \Delta\Phi &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x)g(y) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} g(y) + f(x)\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \\ &= \Delta\Phi = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} g(y) + f(x)\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{0 = \Delta\Phi = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} g(y) + f(x)\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2}} \qquad \Big| \cdot \frac{1}{f\,g}$$

umformen:

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{f(x)}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}}_{\text{Fkt. von} x} = -\underbrace{\frac{1}{g(y)}\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2}}_{\text{Fkt. von} y} = \text{const.} = -\alpha^2$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = -\alpha^2 f(x) \quad \text{mit } e^{i\alpha x} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2} = \alpha^2 g(y) \quad \text{mit } e^{\alpha y}$$

$$e^{i\alpha x} \Rightarrow f(x) = a\sin(\alpha x) + bcos(\alpha x) \qquad e^{\alpha y} \Rightarrow g(x) = c\sinh(\alpha y) + d\cosh(\alpha y)$$

$\Phi(x,y) = f(x)\cdot g(y)$

Randbedingungen:

i) $0 = \Phi(x,0) = f(x)\cdot d \quad \Rightarrow d = 0$

ii) $0 = \Phi(0,y) = b\cdot g(y) \quad \Rightarrow b = 0$

$$\Rightarrow \Phi(x,y) = a\sin(\alpha x)c\sinh(\alpha y) = \underset{a\cdot c}{\underset{\|}{A}}\,\sin(\alpha x)\sinh(\alpha y)$$

iii) $0 = \Phi(l_x, y) = A\sin(\alpha l_x)\sinh(\alpha y) \rightarrow \sin(\alpha l_x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{n\pi}{l_x} \qquad n \in \mathbb{Z}(\text{oder } n \in \mathbb{N})$

$$\rightarrow \Phi_n(x,y) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right)$$

iv) $\Phi(x, l_y) = \Phi_R(x)$

$$\Rightarrow \Phi_R(x) \underset{\uparrow}{=} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)\sinh\left(\frac{n\pi l_y}{l_x}\right) \qquad \forall x \in [0, l_y]$$

im allgemeinen ist dies nicht möglich, aber da es sich um eine lineare DGL ($\Delta\Phi = 0$) handelt:
$\rightarrow$ Linearkombinationen von Lösungen sind auch Lösungen

Ansatz für allgemeine Lösung:

$$\boxed{\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{l_x}\right)}$$

Der Ansatz erfüllt $\Delta\Phi = 0$ und erfüllt die Randbedingungen i), ii), iii). Um iv) zu erfüllen fordern wir:

$$\boxed{\Phi_R(x) \stackrel{!}{=} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)}_{\text{Entwicklung}} \underbrace{\sinh\left(\frac{n\pi l_y}{l_x}\right)}_{\text{const.}}}$$

Der erste Teil des Ausdrucks entspricht der Entwicklung von $\Phi_R(x)$ nach Funktionen $\sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)$ also einer Fourier-Reihe.

Bestimmung von A_n: Multipliziere mit $\sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right) \quad m \in \mathbb{N}$ und danach Integration:

zueinander orthogonale Vektoren

$$\int_0^{l_x} \mathrm{d}x \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \Phi_R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left(\frac{m\pi l_y}{l_x}\right) \int_0^{l_x} \mathrm{d}x \underbrace{\sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)}_{=\frac{l_x}{2}\delta_{nm}}$$

$$= A_m \frac{l_x}{2} \sinh\left(\frac{n\pi l_y}{l_x}\right)$$

$$A_m = \frac{2}{l_x \sinh\left(\frac{n\pi l_y}{l_x}\right)} \int_0^{l_x} \mathrm{d}x \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right) \Phi_R(x)$$

in $\Phi(x, y)$ einsetzen

Wiederholung

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = 0 + \text{Randbedingungen}$$

$$\Phi = \Phi(x, y) = f(x)g(y)$$

$$\Phi_n(x, y) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{l_x}\right)$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$\Phi(x, y) = \sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{l_x}\right)$$

$$A_n = \frac{2}{l_x \sinh\left(\frac{n\pi l_y}{l_x}\right)} \int_0^{l_x} \mathrm{d}x \;\; \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right) \Phi_R(x)$$

1.6.6 Vollständige Orthonormale Funktionensysteme (VONS)

Betrachte Funktionen $g(x), h(x)$ auf $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$

$$h, g : \quad I \to \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$$

Skalarprodukt: $(g, h) = \int_a^b \mathrm{d}x \ g^*(x)h(x)$
$(g, h) = 0$: g und h orthogonal, $(g, g) = 1 :$ g normiert
Norm: $||g|| = \sqrt{(g, g)}$

Ein abzählbarer Satz von Funktionen $\{f_n\} = \{f_1, f_2, \dots\}$
Heißt orthonormiert falls: $(f_m, f_n) = \delta_{nm}$ $\rightarrow$ Orthonormalsystem
Vollständigkeit: Ein Satz von Funktionen heißt vollständig (VONS) falls jede quadratintegrable[1] Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ in der Form $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ dargestellt werden kann.
Genauer: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b \mathrm{d}x \mid g(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)| = 0$

Bestimmung der Koeffizient a_n:

$$g(x) = \sum_n a_n f_n(x) \qquad \Big| \int \mathrm{d}x \; f_m^*(x)$$

$$\int_a^b \mathrm{d}x \; f_m^*(x) g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_a^b \mathrm{d}x \; f_m^*(x) f_n(x)}_{=\delta_{nm}} = a_m$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_n a_n f_n(x) = \sum_n (f_n, g) f_n(x) \\ &= \sum_n \int_a^b \mathrm{d}x' \; f_n^*(x') g(x') f_n(x) \\ &= \int_a^b \mathrm{d}x' \; g(x') \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) f_n^*(x')}_{=\delta(x-x')} \end{aligned}$$

da $\int_a^b \mathrm{d}x' g(x') = g(x)$

Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) f_n^*(x') = \delta(x - x')$$

Beispiele:

1)

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{l}{2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad I = [0, l]$$

$(f_n, f_m) = \delta_{nm}$
$g : \quad I \rightarrow \mathbb{R} \quad g(0))0 = g(l)$

$$g(x) = \sum_n a_n \sqrt{\frac{l}{2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

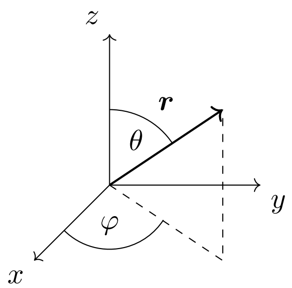
2) Fourierreihe: $\{f_n\}$:
$n = 0 : \quad \frac{1}{\sqrt{l}}$

$$n \in \mathbb{N} : \qquad \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad ; \qquad \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad I = [0, l]$$

$$g(x) = a_0 \frac{1}{\sqrt{l}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + b_n \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]$$

[1] Falls $\int \mathrm{d}x \; |g(x)|^2$ existiert

1.6.7 Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten



$$\boldsymbol{r} = r \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\varPhi(\boldsymbol{r}) = \varPhi(r,\theta,\varphi)$$
$$\Delta\varPhi = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varPhi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varPhi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varPhi}{\partial\varphi^2} = 0$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varPhi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varPhi}{\partial r}\right)$$

Separationsansatz:

$$\varPhi(r,\theta,\varphi) = \frac{U(r)}{r}P(\cos\theta)Q(\varphi)$$

1. Term:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\cancel{r}\frac{U(r)}{\cancel{r}}P(\cos\theta)Q(\varphi)\right) = P(\cos\theta)Q(\varphi)\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}$$

$$\Rightarrow 0 = PQ\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} + UQ\frac{1}{r^3\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right) + UP\frac{1}{r^3\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\varphi^2} \qquad \Big|\cdot\frac{r^3\sin^2\theta}{UPQ}$$

$$\Rightarrow \underbrace{-r^2\sin^2\theta\frac{1}{U}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} - \sin\theta\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right)}_{\text{unabhängig von }\varphi} = \underbrace{\frac{1}{Q}\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\varphi^2}}_{\text{unabhängig von }r,\theta} = \text{const.} := -m^2$$

für Q:

i)

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\varphi^2} + m^2Q = 0$$

Lösung:

$$Q(\varphi) = e^{im\varphi} = \cos(m\varphi) + i\sin(m\varphi)$$
$$Q(\varphi+2\pi) = Q(\varphi) \quad e^{im(\varphi+2\pi)} = e^{im\varphi} \quad \Rightarrow \quad m = \mathbb{Z}$$
$$\frac{r^2}{U}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{P\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right) = \frac{m^2}{\sin^2\theta}$$
$$\underbrace{\frac{r^2}{U}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}}_{\text{unabh. von }\theta} = -\underbrace{\frac{1}{P\sin\theta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right)}_{\text{unabh. von }V} = \text{const..} := \lambda$$

ii)

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} - \frac{\lambda}{r^2}U(r) = 0$$

$\rightarrow$ Lösung für $\lambda = l(l+1)$ (Warum das so ist, ist in iii) erklärt)

$$U(r) = a_l r^{l+1} + b_l r^{-l}$$

$\rightarrow$ Spezielle Lösung für $m = 0$:

$$\Phi(r,\theta) = \frac{U(r)}{r} P_l(\cos\theta) = (a_l r^l + b_l r^{-l-1}) P_l(\cos\theta)$$

allg. Lösung: $\Delta\Phi = 0$ für $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0$

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (\underset{\downarrow}{a_l} r^l + \underset{\downarrow}{b_l} r^{-l-1}) P_l(\cos\theta)$$

durch Randbedingungen festgelegt

iii)

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right) P(\cos\theta) = 0$$

$$x := \cos\theta \quad P(x):\ \text{DGL für } P(x) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} P(x(\theta)) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$$

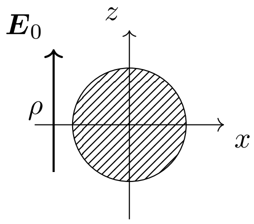
$$\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\Rightarrow -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\underset{\underset{1-x^2}{\|}}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right) P(x) = 0$$

Zugeordnete Legendresche DGL

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right) P(x) = 0$$

Spezialfall: **Zylindersymmetrische Probleme**: Φ unabhängig von φ
$\rightarrow$ **Legendre-Polynome**



$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0, \quad Q(\varphi) = e^{im\varphi} \Rightarrow m = 0 \Rightarrow Q(\varphi) = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right) + \lambda P(x) = 0$$

Legendresche DGL

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \lambda P(x) = 0$$

Potenzreihenansatz: $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

$\rightarrow$ Fließbach

$\rightarrow$ Legendre Polynome

$\rightarrow$ relevante Lösung nur für $\lambda = l(l+1) \qquad l \in \mathbb{N}_0$