Theoretische Physik II
Elektrodynamik

Vorlesung von Prof. Dr. Michael Thoss im Wintersemester 2018

Markus Österle   Andréz Gockel   Damian Lanzenstiel   Patrick Munnich

18. Januar 2019

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einführung

0.1 Zur Vorlesung

Dozent Michael Thoss

Übungen Donnerstag/Freitag (ILIAS) beginnt 18./19.10.18

Übungsleiter Jakob Bätge

Abgabe der Hausaufgaben bis Dienstag 12:00 - Briefkasten GuMi

Klausur 13.02.19, 10-12 Uhr, Hörsaal Anatomie (Nachklausur: 26.19, 10-12 Uhr)

Ankündigungen ILIAS Pass: theophy2.thoss18

Angaben Vorlesung: 4 SWS, Übung: 2 SWS, ECTS: 7

Vorkenntnisse Mathematik: Analysis für Physiker (Vektor Rechnung), Theoretische Physik I, Experimental Physik II.

Hinweis zu den Übungen

- Keine Anwesenheitspflicht.
- Keine Punktzahl nötig für Klausurzulassung.
- Kann auch wärend Übungen abgegeben werden.

Lehrbücher:

- W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 3: Elektrodynamik* (Springer)
- D.J. Griffiths, *Elektrodynamik: Eine Einführung* (Pearson)
- T. Fließbach, *Elektrodynamik* (Spektrum Akademischer Verlag)
- J.D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik* (Walter de Gruyter) geht dieser Vorlesung hinaus

0.2 Einführung und Überblick

Die vier fundamentalen Wechselwirkungen (WW):

- Starke WW
- **Elektromagnetische WW** Wird in dieser Vorlesung betrachtet
- Schwache WW
- Gravitation

0.2.1 Rückblick

Theoretische Physik 1:

- Mechanik
- Punktmechanik: Bahnkurven von Körpern
- Bewegungsgleichung: $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$

0.2.2 Elektrodynamik

- Grundlegende Größen
- Felder
- $$\begin{array}{cc} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) & \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) \\ \text{elektrisches Feld} & \text{Magnetfeld} \end{array}$$

$\rightarrow$ Feldtheorie sehr wichtiges Konzept

Wie sind Elektrische Felder definiert?
Experimentelle Definition als Messgröße: Kraft auf Ladung

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t))$$

Theoretische Definition ist Mathematisch: Feldgleichungen-Maxwellgleichungen

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

Hierbei steht ρ für die Ladungsdichte und $\boldsymbol{j}$ für die Stromdichte.

0.3 Aufbau der Vorlesung

1./2. Statische Phänomene: $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

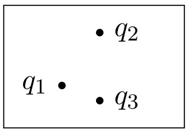
$$\underbrace{\nabla \times \boldsymbol{E} = 0}_{\text{1. Elektrostatik}} \qquad \underbrace{\nabla \times \boldsymbol{B} = 0}_{\text{2. Magnetostatik}}$$

3. Zeitabhängige magnetische/elektrische Felder
4. Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

Kapitel 1

Elektrostatik

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit **ruhenden Ladungen** und **zeitunabhängigen Feldern**. Das Grundproblem besteht darin, dass wir eine Ladungsverteilung haben und das Elektrische Feld und dessen Potential bestimmen wollen.



$\rightarrow$ Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$, el. Potential $\Phi(\boldsymbol{r})$

1.1 Elektrische Ladung und Coulomb'sches Gesetz

Ladung: Beobachtungstatsachen:

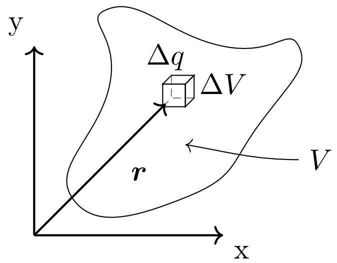
i) Zwei Arten „+“, „-“

ii) Abgeschlossenes System: Ladung erhalten: $q = \sum_i q_i = \text{const.}$

iii) Ladung ist quantisiert in Einheiten der Elementarladung:

$$q = ne,\ n \in \mathbb{Z},\ e = 1,602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

$n = -1$: für ein Elektron wäre ein Beispiel einer Punktladung

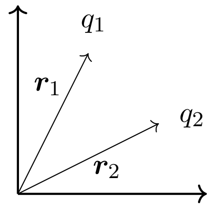


Kontinuierliche Ladungsverteilung Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}} = \frac{\Delta q}{\Delta V}$ Gesamtladung in V:

$$Q = \int_V \mathrm{d}^3r\, \rho(\boldsymbol{r})$$

1.1.1 Coulombsches Gesetz

Die Kraft, welche eine am Ort $\boldsymbol{r}_2$ lokalisierte Punktladung auf eine Punktladung am Ort $\boldsymbol{r}_1$ ausübt, ist gegeben durch:



$$\boldsymbol{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2}\underbrace{\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}}_{\boldsymbol{e}_{r_{12}}}$$

1. $\boldsymbol{F}_{12} \sim q_1 q_2$

2. $\boldsymbol{F}_{12} \sim \frac{1}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2}$

3. $\boldsymbol{F}_{12} \sim q_1 q_2\, \boldsymbol{e}_{r_{12}}$
4. $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$

Es gilt das Superpositionsprinzip: Das heißt, durch vektorielle Addition der Kräfte kann die Gesamtkraft ermittelt werden.

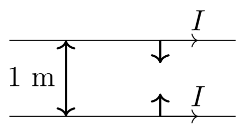
$$\boldsymbol{F}_1 = k \sum_{j=2}^{N} \frac{q_1 q_j}{r_{1j}^2} \boldsymbol{e}_{r_{1j}}$$

Zur Konstanten k:

Die Konstante ist abhängig von dem verwendeten Maßsystemen.

i) Gauß-System (cgs): $k \equiv 1$, $\mathrm{dyn} = \frac{\mathrm{g \cdot cm}}{\mathrm{s}^2} = 10^{-5}\,\mathrm{N}$
   $1\ \mathrm{dyn} = \frac{(1\mathrm{ESE})^2}{\mathrm{cm}^2} \quad 1\mathrm{ESE} = \frac{\sqrt{\mathrm{g \cdot cm}^3}}{\mathrm{s}}$

ii) SI (MKSA-System): Definition von A = Ampère



$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = 2 \cdot 10^{-7}\, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

Strom $= \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}} \Rightarrow 1\mathrm{A} = \frac{1\mathrm{C}}{1\mathrm{s}} \quad \rightarrow \quad e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \qquad c \approx 3 \cdot 10^8\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$\frac{\Delta F}{\Delta l} = k \frac{2I^2}{c^2 d} \qquad \rightarrow k = 2 \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \frac{c^2 1\mathrm{m}}{2(1\mathrm{A})^2} = 10^{-7} c^2\, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

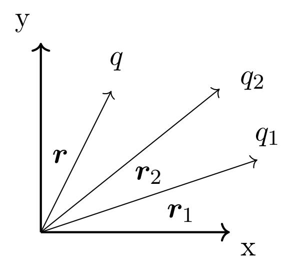
Damit erhalten wir für die Dielektrizitätskonstante des Vakuums:

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$$

1.2 Elektrisches Feld

1.2.1 Feld eines Systems von Punktladungen

N-Ladungen $q_1, \ldots, q_N$ ruhen an den Orten $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N$. Nun bringen wir eine Testladung q am Ort $\boldsymbol{r}$ mit ein.



Kraft von q_1, q_2 auf q

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \sum_{j=1}^{N} q_j \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|^3} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

Somit ist das elektrisches Feld:

$$\boxed{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} q_j \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|^3}}$$

Bemerkung

i) Testladung klein (formal: $\lim_{q\to 0} \frac{\boldsymbol{F}}{q}$)

ii) math. $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ Vektorpfeil

$$\text{kartesisch:} \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} E_x(\boldsymbol{r}) \\ E_y(\boldsymbol{r}) \\ E_z(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix}$$

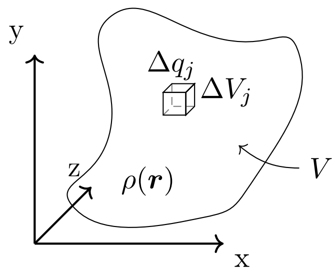
iii) Wechselwirkungsprozess: 2 Teile

$$q_j \to \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \to \boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

iv) Superpositionsprinzip gilt

1.2.2 Feld einer kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r})$

$$\boxed{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_V \mathrm{d}^3r'\, \rho(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}}$$



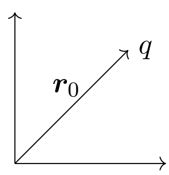
$$\underbrace{\int\limits_V \mathrm{d}^3r'}_{\text{schließt alle Ladungen ein}} \qquad \rho(\boldsymbol{r}_j) = \frac{\Delta q_j}{\Delta V_j}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= k \sum_j \Delta q_j \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|^3} \\ &= k \sum_j \Delta V_j \rho(\boldsymbol{r}_j) \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|^3} \\ \text{mit } \Delta V_j \to 0 \quad &= k \int_V \mathrm{d}^3r' \rho(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \end{aligned}$$

1.2.3 Ladungsdichte einer Punktladung

Deltafunktion

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$



Punktladung in $\boldsymbol{r}_0 \Rightarrow \rho(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}_0$
Ladungsdichte divergiert in $\boldsymbol{r}_0$

$$\rho(\boldsymbol{r}_0) = \infty$$

Modell für Punktladung:
Ladung q in Kugel mit Radius ε um $\boldsymbol{r}_0,\ \varepsilon \to 0$

$$\rho_2(\boldsymbol{r}) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{q}{v_k} & |\boldsymbol{r}| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \underbrace{\Theta(\varepsilon - |\boldsymbol{r}|)}_{\text{Stufenfunktion}}$$

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \rho_\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \left\{ \begin{array}{cc} \infty & \boldsymbol{r} = 0 \\ 0 & \boldsymbol{r} \neq 0 \end{array} \right.$$

Divergenz muss so sein, dass

$$\int\limits_{\substack{V \\ \boldsymbol{r}_0 \in V}} \mathrm{d}^3r\ \rho(\boldsymbol{r}) = q$$

Definition Delta-Funktion (Diracsche Deltafunktion)

1. $$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}_0 \\ \infty & \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 \end{cases}$$

2. $$\int_V \mathrm{d}^3 r\ f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \begin{cases} f(\boldsymbol{r}_0) & \boldsymbol{r}_0 \in V \\ 0 & \boldsymbol{r}_0 \notin V \end{cases}$$

Mathematik

Distribution - Funktional

Funktional: Abb. Funktionen $\mapsto \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$\delta_{\boldsymbol{r}_0} : f \mapsto f(\boldsymbol{r}_0)$$

Physik

$$\int \mathrm{d}^3 r\ f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = f(\boldsymbol{r})$$

δ-Fkt. als Grenzwert einer Folge von Funktionen im Integral

$$\int \mathrm{d}^3 r\ f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int \mathrm{d}^3 r\ f(\boldsymbol{r}) g_\varepsilon(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

mit

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}_0 \\ \infty & \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 \end{cases}$$

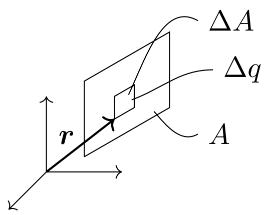
$$\int_V \mathrm{d}^3 r\ g_\varepsilon(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = 1$$

Beispiel: $g_\varepsilon(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \frac{\Theta(\varepsilon-|\boldsymbol{r}|)}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3}$
Mehrere Punktladungen q_j in $\boldsymbol{r}_j$

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_j q_j \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \mathrm{d}^3 r'\ \rho(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \mathrm{d}^3 r'\ \sum_j q_j \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j) \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_j q_j \int_V \mathrm{d}^3 r'\ \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j) \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_j q_j \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|^3} \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

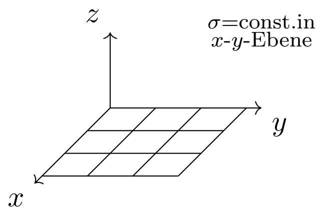
1.2.4 Flächenladungsdichte



$\sigma(\boldsymbol{r}) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}} = \frac{\Delta q}{\Delta A}$

erzeugtes elektrisches Feld:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_A \underbrace{\mathrm{d}f'}_{\substack{\text{Flächen-}\\ \text{element}}} \sigma(\boldsymbol{r}) \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$



Beispiel: Elektrisches Feld einer homogenen Flächenladung

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y' \, \sigma \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \qquad \boldsymbol{r}' = (x', y', 0)$$

Symmetrie: $\boldsymbol{E}$ unabhängig von x, y $\qquad \boldsymbol{r} = (0, 0, z)$

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}' = (-x', -y', z), \ |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3 = (x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}$$

$$E_x \sim \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y' \, \frac{(-x')}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}} = 0 = E_y$$

$\boldsymbol{E} = (0, 0, E_z)$

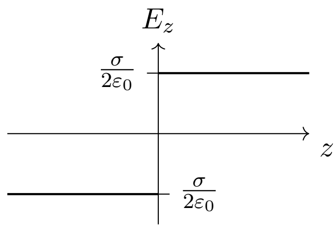
$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sigma_z \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y' \, \frac{(x')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}}$$

$$\frac{1}{x'^2+z^2} \left. \frac{y'}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}} \right|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{x'^2+z^2} \left. \frac{\operatorname{sgn}(y')}{\sqrt{1 + \frac{x'^2+z^2}{y'^2}}} \right|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{x'^2+z^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \sigma_z \quad \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \, \frac{1}{x'^2+z^2}}_{\frac{1}{z} \arctan\left(\frac{x'}{2}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{z}\operatorname{sgn}(z)\pi}$$

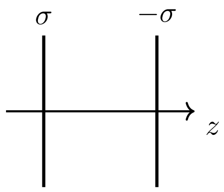
$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \operatorname{sgn}(z)$$

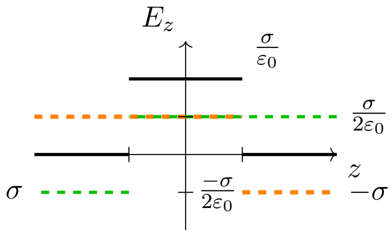
Grenzfläche: $z \to 0$



$$\boldsymbol{E} \underset{z\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \boldsymbol{e}_z & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \boldsymbol{e}_z & z < 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{E}_{\perp +} - \boldsymbol{E}_{\perp -} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \qquad \boldsymbol{E}_{\parallel} = 0$$

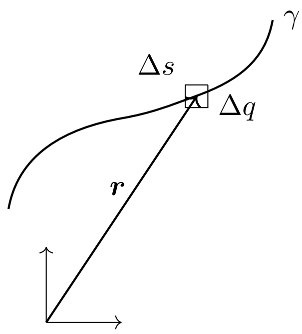




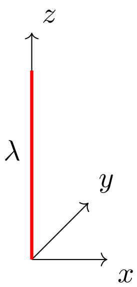
1.2.5 Linenladungsdichte

$$\lambda(\boldsymbol{r}) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Länge}} = \frac{\Delta q}{\Delta s}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\int_\gamma}_{\text{Linienintegral}} \mathrm{d}s' \; \lambda(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$



Beispiel: Elektrisches Feld einer homogenen Linienladung $\lambda = \text{const.}$



$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\gamma \mathrm{d}s' \; \lambda \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \qquad \gamma : z' \mapsto \boldsymbol{r}'(z') = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \; \frac{\boldsymbol{r} - \big(0,0,z\big)^\top}{(x^2+y^2+(z-z')^2)^{3/2}}$$

$\tilde{z} = z' - z$:

$$E_x = \frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \; \frac{1}{(x^2+y^2+(z-z')^2)^{3/2}} = \frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tilde{z} \; \frac{1}{(x^2+y^2+\tilde{z}^2)^{3/2}}}_{\frac{2}{x^2+y^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{x}{x^2+y^2}$$

Wegen der Symmetrie genau so:

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \; \frac{z-z'}{(x^2+y^2+(z-z')^2)^{3/2}} = 0$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\rho} \boldsymbol{e}_\rho, \qquad \boldsymbol{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.3 Feldgleichungen und elektrostatisches Potential

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \; \rho(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

1.3.1 Elektrostatisches Potential

elektrische Feld ist ein Potentialfeld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}) = -\left(\boldsymbol{e}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$

Nebenrechnung:

$$\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = -\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

zur Überprüfung hier die x-Komponente berechnet:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}} = \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right) \quad 2(x-x')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} = \frac{(x-x')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

Somit erhalten wir für das $\boldsymbol{E}$-Feld:

$$\Rightarrow \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r' \; \rho(\boldsymbol{r}')\left(-\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = (-)\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r' \; \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$\rightarrow$ elektrostatisches Potential

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r' \; \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + c$$

übliche Konvention: $c = 0 \quad (\phi(\boldsymbol{r}) \overset{|\boldsymbol{r}|\to\infty}{\to} 0)$

Beispiel: Potential einer Punktladung in $\boldsymbol{r}_0$:

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3r' \; \frac{q\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}$$

(Funktional-Analysis Siegfried Großmann Springer)
(Landau-Lipschitz Buch geht weit der Vorlesung hinaus)

1.3.2 Feldgleichung (differentielle Form)

Rotation (Wirbel)

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\phi) = 0$$

Mathe: Sie sind äquivalent

i) $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$

ii) $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = 0$ (auf einfach zusammenhängendem Gebiet)

iii) Kurvenintegral $\int_\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}$ ist Wegunabhängig

$$\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E} = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \mathrm{d}t \underbrace{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}(t))}_{\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}} = \underbrace{(\phi(\boldsymbol{r}_2)-\phi(\boldsymbol{r}_1))}_{\text{Potentialdifferenz}}$$

Divergenz (Quellen)

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \mathrm{d}^3r'\rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\end{aligned}$$

x-Anteil:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x-x'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} &= \frac{1\cdot[\dots]^{3/2}(x-x')(x-x')^{3/2}\cdot 2[\dots]^{1/2}}{[\dots]^3}\\ &= \frac{[\dots]^{1/2}((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-3(x-x')^2)}{[\dots]^{3/2}}\\ &= \frac{(y-y')^2+(z-z')^2-2(x-x')^2}{[\dots]^{3/2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\frac{y-y'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} &= \frac{(x-x')^2+(z-z')^2-2(y-y')^2}{[\dots]^{3/2}}\\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{z-z'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} &= \frac{(x-x')^2+(y-y')^2-2(z-z')^2}{[\dots]^{3/2}}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = 0 \quad \text{falls} \quad \boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}'$$

$$\Rightarrow \text{falls} \quad \boldsymbol{r}\notin V,\ \text{d.h. } \boldsymbol{r} \text{ in Gebiet ohne Ladungsdichte } \rho(\boldsymbol{r})=0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$$

$\boldsymbol{r}\in V$: Grenzwertbetrachtung (Regularisierung des Integranden)
statt

$$\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

betrachten wir:

$$f_a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} = \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{3/2}} \qquad a\in\mathbb{R},\ a>0$$

am Ende Grenzwert $\lim\limits_{a\to 0}$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{a\to 0}\int_V \mathrm{d}^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\ \boxed{\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\cdot f_a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x-x'}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{3/2}} &= \frac{[\dots+a^2]^{3/2}-(x-x')\frac{3}{2}\cdot 2(x-x')[\dots+a^2]^{3/2}}{[\dots+a^2]^3}\\ &= \frac{(y-y')^2+(z-z')^2+a^2-2(x-x')^2}{[\dots+a^2]^{3/2}}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\cdot f_a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{3a^2}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{5/2}}$$

$$\lim_{a\to 0} f_a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}' \\ \infty & \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}' \end{cases}$$

$\Rightarrow$ zum Integral $\displaystyle\int_V \mathrm{d}^3r' \ldots$ trägt (im Limes $a\to 0$) nur der Bereich $\boldsymbol{r}'\approx\boldsymbol{r}$ bei

$$K_R(\boldsymbol{r}) = \{\boldsymbol{r}'\in\mathbb{R}^3 : |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\leq R\}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{a\to 0}\int_V \mathrm{d}^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\cdot f_a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\\ &=\lim_{a\to 0}\int_{K_R(\boldsymbol{r})}\mathrm{d}^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\frac{3a^2}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{5/2}}\\ &+\underbrace{\lim_{a\to 0}\int_{V/K_R(\boldsymbol{r})}\mathrm{d}^3r'\rho(\boldsymbol{r}')\frac{3a^2}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{5/2}}}_{=0}\end{aligned}$$

Wähle R klein genug, dass man innerhalb $K_R(\boldsymbol{r})$, $\rho(\boldsymbol{r}')$ in Taylorreihe um $\boldsymbol{r}$ entwickeln kann.

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r},\ \mathrm{d}^3r' = \mathrm{d}^3\tilde{r}$$

$$\int_{K_R(\boldsymbol{r})}\mathrm{d}^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\frac{3a^2}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{5/2}} = \int_{K_R(0)}\mathrm{d}^3\tilde{r}\ \rho(\boldsymbol{r}+\tilde{\boldsymbol{r}})\frac{3a^2}{[\tilde{\boldsymbol{r}}^2+a^2]^{5/2}}$$

Taylorentwicklung von $\rho(\boldsymbol{r}+\tilde{\boldsymbol{r}})$ um $\tilde{\boldsymbol{r}}=0$

$$\rho(\boldsymbol{r}+\tilde{\boldsymbol{r}}) = \rho(\boldsymbol{r})+\tilde{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho(\boldsymbol{r})+\ldots$$

$$=\int_{K_R(0)}\mathrm{d}^3\tilde{r}\ (\rho(\boldsymbol{r})+\tilde{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho(\boldsymbol{r})+\ldots)\frac{3a^2}{[\tilde{\boldsymbol{r}}^2+a^2]^{5/2}}$$

1. Integral:

$$\int_{K_R(0)}\mathrm{d}^3\tilde{r}\ \rho(\boldsymbol{r})\frac{3a^2}{(\tilde{r}^2+a^2)^{5/2}} = \rho(\boldsymbol{r})\underbrace{\int_0^R\mathrm{d}\tilde{r}\ \frac{3a^2}{(\tilde{r}^2+a^2)^{5/2}}}_{\left[\frac{\tilde{r}^3}{(\tilde{r}^2+a^2)^{3/2}}\right]_0^R}\underbrace{\int \underset{\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\Omega}}_{=4\pi}$$

$$=4\pi\rho(\boldsymbol{r})\frac{R^3}{(R^2+a^2)^{3/2}}\quad\underset{a\to 0}{\longrightarrow}\quad 4\pi\rho(\boldsymbol{r})$$

2. Integral:

$$\int_{K_R(0)}\mathrm{d}^3\tilde{r}\ \underset{\tilde{r}\boldsymbol{e}_{\tilde{r}}}{\tilde{\boldsymbol{r}}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\rho(\boldsymbol{r})\frac{3a^2}{(\tilde{r}^2+a^2)^{5/2}} = \underbrace{\int_0^R\mathrm{d}\tilde{r}\ \frac{3a^2\tilde{r}^3}{(\tilde{r}^2+a^2)^{3/2}}}_{\frac{2}{3}a-3a^2\left(\frac{R^2+\frac{2}{3}a^2}{(R^2+a^2)^{3/2}}\right)}\underbrace{\int\mathrm{d}\Omega\ \boldsymbol{e}_{\tilde{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho(\boldsymbol{r})}_{\text{unabh. von } a}\quad\underset{a\to 0}{\longrightarrow}\quad 0$$

Das gilt auch für alle höheren Terme. Alle höheren Terme werden im Limit $\lim_{a\to 0}= 0$.

$$\lim_{a\to 0}\int_V\mathrm{d}^3r'\rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{3/2}} = 4\pi\rho(\boldsymbol{r})$$

$$\Rightarrow\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{a\to 0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})\quad \boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^3}$$

1.3.3 Zusammenfassung:

Feldgleichungen der Elektrostatik

Mathe: partielle DGL

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \text{ inhomogene DGL}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \text{ homogene DGL}$$

DGL für Potential ϕ: $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \nabla \cdot (-\nabla\phi) &= -\nabla \cdot \begin{pmatrix}\partial_x\phi\\ \partial_y\phi\\ \partial_z\phi\end{pmatrix}\\ &= -\underbrace{\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)}_{=:\Delta\phi}\end{aligned}$$

Partielle DGL 2. Ordnung:

Poissongleichung

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

für Gebiete mit $\rho(\boldsymbol{r}) = 0$:

Laplacegleichung

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = 0$$

Darstellung der Deltafunktion:

$$\lim_{a\to 0}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\,\underbrace{\nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2 + a^2]^{3/2}}}_{\frac{3a^2}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{5/2}} =: g_a(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})} = 4\pi\rho(\boldsymbol{r})$$

$\frac{1}{4\pi}g_a$ liefert Grenzwertdarstellung der δ-funktion.

$$\lim_{a\to 0}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\frac{1}{4\pi}g_a(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})$$

$$\lim_{a\to 0} g_a(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}' \\ \infty & \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\delta(\boldsymbol{r}) &= \lim_{a\to 0}\frac{1}{4\pi}\nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{r^2}{(r^2+a^2)^{3/2}}\\ &\overset{\text{formal}}{=} \frac{1}{4\pi}\nabla \cdot \underbrace{\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}}_{=-\nabla\frac{1}{r}} = -\frac{1}{4\pi}\nabla \cdot \left(\nabla\frac{1}{r}\right) = \frac{-1}{4\pi}\Delta\frac{1}{r}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})} \qquad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}$$

z.B. Potential einer Punktladung ρ q in $\boldsymbol{r}_0$:

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$$

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \underbrace{\Delta_{\boldsymbol{r}} \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}}_{=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}_{=\rho(\boldsymbol{r})} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

Wiederholung

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \boldsymbol{E} &= -\boldsymbol{\nabla}\varPhi \\ \Rightarrow \qquad \Delta\varPhi(\boldsymbol{r}) &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \end{aligned}$$

1.3.4 Integralsätze der Vektoranalysis

1) Gaußscher Satz:

Sei $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ ein Vektorfeld im Volumen $V \subset \mathbb{R}^3$, so gilt:

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \ \cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

$$\partial V \text{ Rand von } V$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{nach außen orientierter} \\ \text{Normaleneinheitsvektor}}}{\boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}f$$

Bemerkung:

i) Analogie 1D: Fundamentalsatz der Integralrechnung:

$$\int_a^b \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f(b) - f(a)$$

ii) Geometrische / physikalische Interpretation:
Fluss des Vektorfeldes $\boldsymbol{A}$ durch ∂V

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{A}$$

Integral über die Quellen von $\boldsymbol{A}$

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A} = \text{const.} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$$

Beispiel: Geschwindigkeit einer Flüssigkeit: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$

$$\boldsymbol{v} = \text{const.} \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \quad \int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

$\Rightarrow$ Es gibt keine Quellen von $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{r} \neq 0 \quad \int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \neq 0$$

iii)

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_0^{\Delta x} \mathrm{d}x \int_0^{\Delta y} \mathrm{d}y \int_0^{\Delta z} \mathrm{d}z \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\Delta z} \mathrm{d}z \int_0^{\Delta y} \mathrm{d}y \quad \underbrace{\int_0^{\Delta x} \mathrm{d}x \frac{\partial A_x}{\partial x}}_{A_x(\Delta x, y, z) - A_x(0, y, z)} \\
&= \int_0^{\Delta z} \mathrm{d}z \int_0^{\Delta y} \mathrm{d}y A_x(\Delta x, y, z) - \int_0^{\Delta z} \mathrm{d}z \int_0^{\Delta y} \mathrm{d}y A_x(0, y, z) \\
&= \int_{F_x^+} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{A} + \int_{F_x^-} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

$$F_x^+ : \quad \mathrm{d}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \qquad F_x^- : \quad \mathrm{d}\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{e}_x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

ebenso gilt dann für die anderen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\Delta x} \mathrm{d}x \int_0^{\Delta z} \mathrm{d}z \int_0^{\Delta y} \mathrm{d}y \frac{\partial A_y}{\partial y} &= \int_{F_y^+} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{A} + \int_{F_y^-} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{A} \\
\int_0^{\Delta x} \mathrm{d}x \int_0^{\Delta y} \mathrm{d}y \int_0^{\Delta z} \mathrm{d}z \frac{\partial A_z}{\partial z} &= \int_{F_z^+} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{A} + \int_{F_z^-} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_V \mathrm{d}^3 r \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{A}$$

2) Stokescher Satz

Sei $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ ein Vektorfeld, F eine Fläche mit Randkurve ∂F, so gilt:

$$\int_{\text{Linienintegral}\rightarrow \partial F} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_{F \leftarrow \text{Oberflächenint.}} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}))$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}f$$

Richtung von $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ und Umlauf sinn von ∂F: **rechte Hand Regel**.
Beispiel:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+1 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{r}(\varphi) = R \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = R \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial F} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(\varphi)) \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi R(+\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 2\pi R^2 \end{aligned}$$

$$\int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f} \overbrace{(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})}^{2\boldsymbol{e}_z} = 2\pi R^2$$

Vektorfeld ohne Wirbel z.B. $\boldsymbol{A} = \text{const.}$
$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = 0$
Bemerkung:

1.3.5 Integrale Form der Feldgleichung

1.3.6 Gaußsches Gesetz

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\boldsymbol{r})$$

$$\begin{aligned} \int_V \mathrm{d}^3 r \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \mathrm{d}^3 r \rho(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_V \\ &= \int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_V}$$

Berechnung elektrischer Felder für hochsymmetrische Ladungsverteilungen

Beispiel:
Homogen geladene Kugel mit Radius R und Gesamtladung Q. Damit ist die Ladungsdichte innerhalb der Kugel:

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_r(r) \boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{r} = r \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$
Fluss von $\boldsymbol{E}$ durch Oberfläche einer Kugel mit Radius r

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_r r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{E} = E_r(r) r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$\begin{aligned}\int_{\partial K_r(0)} \mathrm{d}\boldsymbol{f}\ \boldsymbol{E} &= \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi E_r(r) r^2 \sin\theta \\ &= E_r(r) r^2 4\pi \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{K_r(0)} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{K_r(0)} \mathrm{d}^3 r\ \rho(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\begin{cases} Q & r > R \\ Q\frac{r^3}{R^3} & r \leq R \end{cases}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} \frac{1}{r^2} & r > R \\ \frac{r}{R^3} & r \leq R \end{cases}$$

1.3.7 Satz von Stokes

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = 0$$

Definition: $\gamma = \partial F$
$\int_\gamma$ ist dann ein Linienintegral über eine geschlossene Kurve

$$\boxed{\int_\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E} = \int_F \mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) = 0}$$

1.3.8 Zusammenfassung: Feldgleichungen der Elektrostatik

differentielle Darstellung:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi \quad \rightarrow \quad \Delta\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

Integral Darstellung:

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_V \qquad , \qquad \oint_\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E} = 0$$

1.4 Elektrostatische Energie

potentielle Energie einer Punktladung im äußeren elektrischen Feld
Kraft auf Ladung q:

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$$

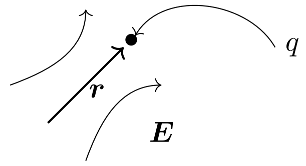
Die Arbeit bei Verschiebung der Ladung von $\boldsymbol{a}$ nach $\boldsymbol{b}$

$$\begin{aligned} W &= -\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{F} = -q\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \\ &= q\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi = q\underbrace{(\Phi(\boldsymbol{b}) - \Phi(\boldsymbol{a}))}_{\text{Potentialdifferenz}}\end{aligned}$$

Die Arbeit um q aus dem unendlichen ∞ nach $\boldsymbol{r}$ zu bringen ist dann:

$$W = q(\Phi(\boldsymbol{r}) - \Phi(\infty))$$

Zur Referenz: $\Phi(\infty) = 0$
Damit ist die Energie der Ladung q im äußeren Feld:

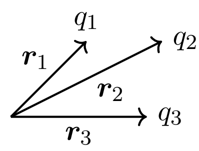


$$\Rightarrow \quad \boxed{W = q\ \Phi(\boldsymbol{r})}$$

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$$

1.4.1 Elektrostatische Potentielle Energie

Energie einer Verteilung von Punktladungen



N Ladungen q: an Orten $\boldsymbol{r}_i$
Zunächst: $\underbrace{i-1}_{\text{erzeugen am Ort } \boldsymbol{r}_i}$ Ladungen q_j bei $\boldsymbol{r}_j$

Das Potential

$$\Phi(\boldsymbol{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|}$$

Arbeit um i-te Ladung aus dem unendlichen nach $\boldsymbol{r}$ zu bringen:

$$W_i = q_i \Phi(\boldsymbol{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

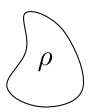
Somit ergibt sich die gesamte Arbeit für N Ladungen als:

$$\begin{aligned} W = \sum_{i=2}^{N} W_i &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \end{aligned}$$

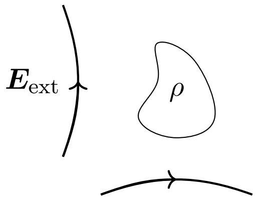
$$\Rightarrow W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \underbrace{\left(\sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} \right)}_{\Phi_{\not j}(\boldsymbol{r}_i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \Phi_{\not j}(\boldsymbol{r}_i)$$

Energie einer kontinuierlichen lokalisierten Ladungsverteilung



$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r \int \mathrm{d}^3 r' \, \frac{\rho(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|} \\ &= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \ \rho(\boldsymbol{r}) \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r' \, \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|}}_{\Phi(\boldsymbol{r})} \end{aligned}$$



$$W_{\text{ext}} = \int \mathrm{d}^3r \; \rho(\boldsymbol{r})\Phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r})$$

Energie W durch $\boldsymbol{E}$ ausdrücken:

$$\boldsymbol{\Delta}\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad \Rightarrow \quad W = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r\varepsilon_0 \; \underbrace{\boldsymbol{\Delta}\Phi(\boldsymbol{r})\Phi(\boldsymbol{r})}_{\substack{\boldsymbol{\nabla}\cdot(\Phi\boldsymbol{\nabla}\Phi)-(\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2 \\ \| \\ \boldsymbol{E}}}$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3r\boldsymbol{\nabla}\cdot(\Phi\boldsymbol{\nabla}\Phi)}_{} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3r\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r})$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{K_R(0)} \mathrm{d}^3r\boldsymbol{\nabla}\cdot(\Phi\boldsymbol{\nabla}\Phi) = \lim_{R\to\infty}\int_{\partial K_R(0)} \underbrace{\mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\underbrace{(\Phi\boldsymbol{\nabla}\Phi)}_{\overset{R\to\infty}{\sim}\frac{1}{R^3}}}_{\sim\frac{1}{R}} = 0$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3r\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r})$$

Zur Umformung oben wurde benutzt:

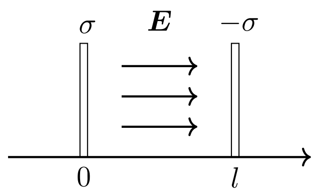
$$\Phi \overset{R\to\infty}{\sim} \frac{1}{R} \qquad \boldsymbol{\nabla}\Phi \sim \frac{1}{R^2} \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{n}\underbrace{\mathrm{d}f}_{\sim R^2}$$

Damit ergibt sich für die Energie einer Verteilung von Punktladungen

$$\Rightarrow \quad \boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3r \; \boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r})} \qquad \text{nicht für Punkladungen selbst!!!}$$

Energiedichte des elektrostatischen Feldes

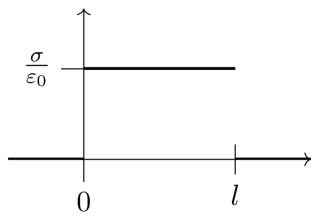
$$\boxed{w(\boldsymbol{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r})}$$



Beispiel: **Plattenkondensator**
Fläche F, Ladung $\to$ $\sigma = \frac{q}{F}$ $\to$ $\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x$

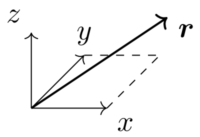
$\to$ Die Energiedichte ist: $w = \frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$ (nicht für Punktladungen)

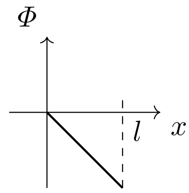
$\to$ Die Energie beträgt: $W = \int \mathrm{d}^3r w(\boldsymbol{r}) = l\cdot F\cdot\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$



Potentialdifferenz - Spannung

$$\Phi(\boldsymbol{r}) - \Phi(0) = -\int_0^{\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') = -\int_0^x \mathrm{d}x'\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x$$





Die Spannung zwischen zwei Kondensatorplatten ist dann:

$$U = \Phi(0) - \Phi(l) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} l = \frac{q}{\varepsilon_0 F} l$$

Die Kapazität ist also:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0 F}{l}$$

Was ist die Energie bei einer Verteilung von Punktladungen und bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung. Bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung haben wir herausgefunden:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \qquad \text{für Punktladungen}$$

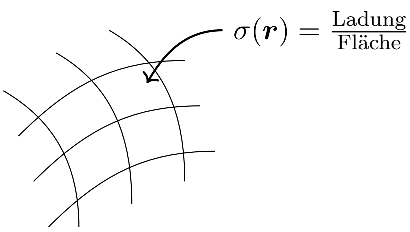
Die Energie der Punktladung selbst steckt hier nicht drinnen. Man muss dabei aufpassen, welche Gleichung man für welches Modell benutzt.

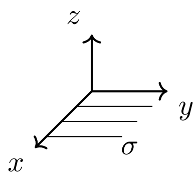
$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad \int \mathrm{d}^3 r \; \boldsymbol{E}^2 = \int \mathrm{d}^3 r \; \frac{1}{r^4} = \infty$$

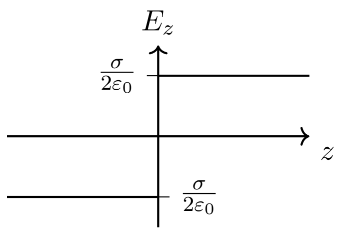
1.5 Verhalten des el. Feldes an Grenzflächen mit Flächenladung

→ Diskontinuitäten von $\boldsymbol{E}$

Beispiel: Wir betrachten eine **homogene Flächenladung**.



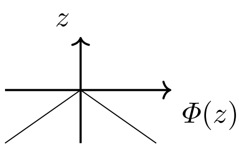


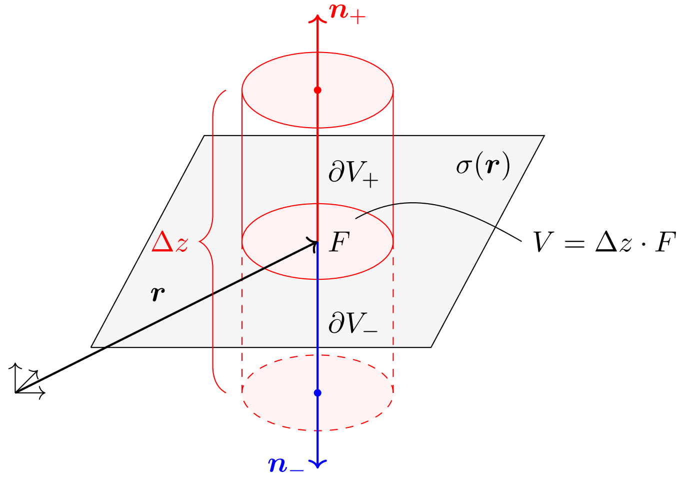


$$\Rightarrow \boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \operatorname{sgn}(z) \boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{E}_\perp = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \boldsymbol{e}_z$$
$$\boldsymbol{E}_\parallel = 0$$

Das elektrische Feld $\boldsymbol{E}_\parallel$ ist gleich der Ableitung des elektrischen Potentials:
Das elektrische Potential ist also stetig.





Normalkomponente $\boldsymbol{E}_\perp$

Gaußscher Satz für V:

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{d}^3r' \ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') &= \int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f}' \ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \\ &= \underset{\substack{\downarrow \scriptstyle \Delta z\to 0 \\ 0}}{\int_{\text{Mantel}} \mathrm{d}\boldsymbol{f}' \ \boldsymbol{E}} + \underset{\substack{\downarrow \scriptstyle \Delta z\to 0 \\ \int_F \mathrm{d}f' \ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_+}}{\int_{\partial V_+} \mathrm{d}\boldsymbol{f}' \ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})} + \underset{\substack{\downarrow \scriptstyle \Delta z\to 0 \\ -\int_F \mathrm{d}f' \ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_-}}{\int_{\partial V_-} \mathrm{d}\boldsymbol{f}' \ \boldsymbol{E}}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{E}_\pm$ ist das Feld auf beiden Seiten der Grenzfläche

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f}'\boldsymbol{E} \quad \xrightarrow{\Delta z\to 0} \quad \int_F \mathrm{d}f\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_-) \quad \xrightarrow{F\to 0} \quad F \ \boldsymbol{n}\cdot\big(\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r})\big)$$
$$\parallel$$

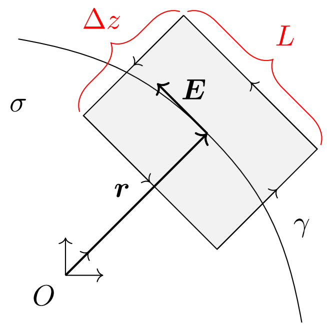
$$\int_V \mathrm{d}^3r'\underset{\substack{\parallel \\ \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}')}}{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \mathrm{d}^3r'\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_F \mathrm{d}f'\sigma(\boldsymbol{r}') \quad \xrightarrow{F\to 0} \quad \frac{1}{\varepsilon_0}F\sigma(\boldsymbol{r})$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r})) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\boldsymbol{r})$$

$$E_{\perp_\pm} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_\pm \qquad E_{\perp_+}(\boldsymbol{r}) - E_{\perp_-}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\boldsymbol{r})$$

Tangentialkomponente $E_\parallel$

Satz von Stokes:



$$0 = \oint_r \mathrm{d}\boldsymbol{r}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') = \underbrace{\int \cdots + \int \ldots}_{=0 \text{ für } \Delta z\to 0} + \underbrace{\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\boldsymbol{E} + \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\boldsymbol{E}}_{\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'(\boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_-)}$$

$$0 = \oint_\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{E} \quad \xrightarrow{\Delta z \to 0} \quad \int_{-\frac{L}{2}}^{-\frac{L}{2}} \mathrm{d}s\boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_-) \quad \xrightarrow{L \to 0} \quad L\ \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r})) = 0$$
$$\to \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r})) = 0$$

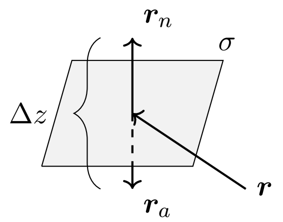
$\to$ Die Tangentialkomponente ist stetig

$$E_{\parallel +} = E_{\parallel -}$$

Insgesamt ergibt sich damit:

$$\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{n}$$

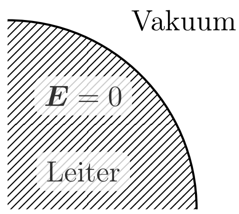
Das elektrische Potential Φ ist damit stetig.



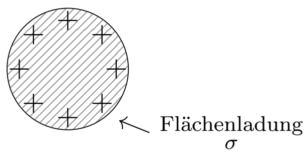
$$\underbrace{\Phi(\boldsymbol{r}_b) - \Phi(\boldsymbol{r}_a)}_{\Phi_+(\boldsymbol{r}) - \Phi_-(\boldsymbol{r})} = \int_{\boldsymbol{r}_a}^{\boldsymbol{r}_b} \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{E} \quad \xrightarrow{\Delta z \to 0} 0$$

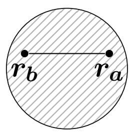
Und hiermit auch auf beiden Seiten der Flächenladung symmetrisch.

1.5.1 Randbedingungen an el. Leitern



Leiter: Material mit freibeweglichen Ladungsträgern (Metall)
Eigenschaften von $\boldsymbol{E}$ im Leiter:





i) $\boldsymbol{E} = 0$

ii) $0 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \qquad \rho(\boldsymbol{r}) = 0$

iii) Nettoladung befinden sich an Oberfläche

iv) Potential $\Phi(\boldsymbol{r}_b) - \Phi(\boldsymbol{r}_a) = 0 \quad \to \quad \Phi(\boldsymbol{r}) = \text{const.}$

Randbedingungen

$$\boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_- = \frac{\sigma^-}{\varepsilon_0}\boldsymbol{n}$$
$$\boldsymbol{E}_- = 0$$
$$\to \boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) = \frac{\sigma(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$$

[Folie: Ladung an Oberfläche eines Leiters]

1.6 Randwertprobleme (RWP) der Elektrostatik und Lösungsmethoden

1.6.1 Formulierung des Randwertproblems

Das elektrische Potential: $\Phi(\boldsymbol{r}): \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\Phi(\boldsymbol{r})$

$$\boldsymbol{\Delta}\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \qquad \text{Poisson-Gleichung}$$

Für eine gegebene lokale Ladungsverteilung ρ gilt:

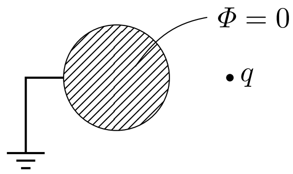
$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

$$\rightarrow \Phi(\boldsymbol{r}) \overset{|\boldsymbol{r}|\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Typische Problemstellung:
Ladungsverteilung ρ + Werte des Potentials auf Randfläche

Beispiel:

Randwertproblem: Gegeben: $\rho(\boldsymbol{r}')$ im Raumbereich V
$\Phi(\boldsymbol{r})$ oder $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ auf Randfläche ∂V
Gesucht: $\Phi(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ überall in V



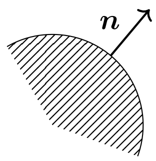
Zwei Fälle:

i) $\Phi(\boldsymbol{r})$ ist auf der Randfläche gegeben
$\rightarrow$ **Dirichlet-Randbedingung**

ii) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ ist auf der Randfläche gegeben
$\rightarrow$ **Neumannsche Randbedingung**

Gegeben sei: $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E}$ dies ist gleich der **Normalenableitung**:

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{n}\boldsymbol{\nabla}\Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial n}$$



Wir beschränken uns vorwiegend auf den ersten Fall. Zur Lösung dieser Probleme gibt es einige Methoden. Zum Einstieg und zur betrachten wir zunächst die Methode der Spiegelladung.

1.6.2 Methode der Bildladung (Spiegelladung)

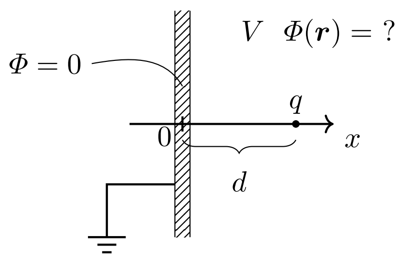
Punktladung vor leitender, geerdeter Metallplatte

$$\boldsymbol{\Delta}\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$$

$\boldsymbol{r} \in V \qquad \boldsymbol{r}_0 = (d, 0, 0) \qquad V = \{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3, x > 0\}$

Randbedingungen:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \text{für} \quad \boldsymbol{r} \in \partial V, \qquad \text{d.h. } \boldsymbol{r} = (0, y, z)$$



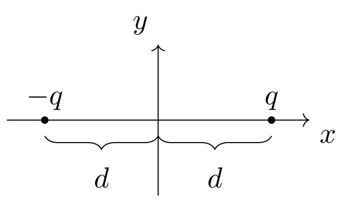
Idee: Ersetze ursprüngliche Problem durch „Fiktives“ Problem mit zusätzlichen Ladungen außerhalb von V, welche die Randbedingungen simulieren.

Potential der Punkladungen in $\boldsymbol{r}_0$:

$$\Phi_q(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}$$

addiere Ladung $-q$ in $\boldsymbol{r}_0' = (-d, 0, 0) = -\boldsymbol{r}_0$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|} - \frac{q}{|\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_0|}\right)$$



Schauen wir nun nach, ob dies die Poisson-Gleichung erfüllt:

$$\boldsymbol{\Delta}\varPhi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Bigg(\underbrace{\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}}_{=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)} - \underbrace{\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_0|}}_{=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_0)}\Bigg)$$

$$= \underset{\checkmark}{-\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)} + \frac{q}{\varepsilon_0}\underbrace{\delta(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_0)}_{=0 \text{ für } \boldsymbol{r}\neq-\boldsymbol{r}_0\ \checkmark} \quad \forall \boldsymbol{r}\in V$$

Diskussion der Lösung

i) **Struktur**

$$\varPhi(\boldsymbol{r}) = \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}}_{=:\ \varPhi_\mathrm{s}(\boldsymbol{r})} + \underbrace{\frac{(-q)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_0|}}_{=:\ \varPhi_\mathrm{hom}(\boldsymbol{r})}$$

$\boldsymbol{r} \in V$

$$\Delta\varPhi_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

$$\Delta\varPhi_\mathrm{hom}(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad \text{Laplace-Gleichung}$$

Mathematisch: Lösung inhomogener DGL

$$\varPhi(\boldsymbol{r}) = \varPhi_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}) + \varPhi_\mathrm{hom}(\boldsymbol{r})$$

$\varPhi_\mathrm{hom}$ wird so gewählt, dass die Randbedingungen erfüllt werden:

$$\boldsymbol{r} \in \partial V: \quad \varPhi_\mathrm{o}(\boldsymbol{r}) = \varPhi_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}) + \varPhi_\mathrm{hom}(\boldsymbol{r})$$

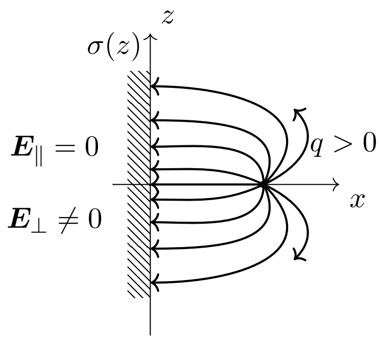
ii) **Elektrisches Feld**

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varPhi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(x-d,y,z)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} - \frac{(x+d,y,z)}{|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_0|^3}\right)$$

An der Oberfläche $x \to 0$, $x \geq 0$
$|\boldsymbol{r} \pm \boldsymbol{r}_0|^3 \to (d^2+y^2+z^2)$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\Big|_{\boldsymbol{r}\in\partial V} = -\frac{qd}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_x$$

Durch das externe elektrische Feld verschieben sich die Ladungsträger im Metall und es entsteht eine Influenzladung an der Oberfläche.



iii) **Influenzladung auf Metalloberfläche**

$$\boldsymbol{E}_+ - \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{\boldsymbol{E}_-} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{n} \qquad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_x$$

$\boldsymbol{r} \in \partial V$:

$$\sigma(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) = -\frac{qd}{2\pi(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

gesamte influenzierte Ladung

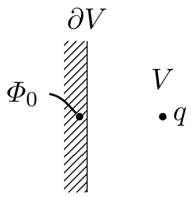
$$q_i = \int_{\partial V} \mathrm{d}f\ \sigma(\boldsymbol{r}) = \cdots = -q$$

iv) **Kraft zwischen Punktladungen und Metallplatte**

$$\boldsymbol{F} = q\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}_0) = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0(2d)^2}\boldsymbol{e}_x$$

Eindeutigkeit der Lösung des Randwertproblems

Dirichlet-Randwertproblem:



$$\begin{aligned} \Delta\Phi(\boldsymbol{r}) &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \qquad && \boldsymbol{r} \in V \\ \Phi(\boldsymbol{r}) &= \Phi_0(\boldsymbol{r}) && \boldsymbol{r} \in \partial V \end{aligned}$$

Annahme: $\Phi_1,\ \Phi_2$ lösen RWP

$$\text{d.h.} \qquad \begin{aligned} \Delta\Phi_1(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) &= \Delta\Phi_2(\boldsymbol{r}) \qquad && \boldsymbol{r} \in V \\ \Phi_1(\boldsymbol{r}) = \Phi_0(\boldsymbol{r}) &= \Phi_2(\boldsymbol{r}) && \boldsymbol{r} \in \partial V \end{aligned}$$

Setze:

$$\Psi(\boldsymbol{r}) := \Phi_1(\boldsymbol{r}) - \Phi_2(\boldsymbol{r})$$

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \boldsymbol{r} \in V$$

$$\boldsymbol{r} \in \partial V \quad \Psi(\boldsymbol{r}) = \Phi_1(\boldsymbol{r}) - \Phi_2(\boldsymbol{r}) = 0$$

Greensche Identität:

g, h Funktionen an V:

$$\begin{aligned} &\int_V \mathrm{d}^3r\, [((\boldsymbol{\nabla} g(\boldsymbol{r})) \cdot (\boldsymbol{\nabla} h(\boldsymbol{r}))) + g(\boldsymbol{r})\Delta h(\boldsymbol{r})] \\ =& \int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot (g(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\nabla} h(\boldsymbol{r})) \\ =& \int_{\partial V} \mathrm{d}f g(\boldsymbol{r})\, \underbrace{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nabla} h(\boldsymbol{r})}_{=\frac{\partial h}{\partial n}(\boldsymbol{r})} \end{aligned}$$

$h = g = \Psi$

$$\Rightarrow \quad \int_V \mathrm{d}^3r\ ((\boldsymbol{\nabla}\Psi)^2 + \Psi(\boldsymbol{r})\underbrace{\Delta\Psi(\boldsymbol{r})}_{=0}) = \int_{\partial V} \mathrm{d}f\ \underbrace{\Psi(\boldsymbol{r})}_{=0}\frac{\partial\Psi(\boldsymbol{r})}{\partial n}$$

$$\Rightarrow \int_V \mathrm{d}^3r\, (\boldsymbol{\nabla}\Psi(\boldsymbol{r}))^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}\Psi(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad \boldsymbol{r} \in V$$

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \text{const.} \qquad \Psi(\boldsymbol{r}) = 0 \text{ in } V \quad \Rightarrow \quad \Phi_1(\boldsymbol{r}) = \Phi_2(\boldsymbol{r})$$

1.6.3 Formale Lösungen des elektrostatischen Randwertproblems mit Greenschen Funktionen (GF)

GF: generelle Methode um inhomogene DGL zu lösen

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

Greensche Funktionen der Poisson-Gleichung: $\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ mit

Greensche Funktionen der Poisson-Gleichung

$$\Delta_{\boldsymbol{r}}\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

Diese Gleichung geht vor einer Punktladung mit $q = 1$ aus, ist hier aber zunächst einmal eine Definition.

$\mathcal{G}$ bekannt

$$\rightarrow \Phi(\boldsymbol{r}) = \int \mathrm{d}^3r'\; \mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')$$

$$\Delta_{\boldsymbol{r}}\Phi(\boldsymbol{r}) = \int \mathrm{d}^3r'\; \underbrace{\left(\Delta_{\boldsymbol{r}}\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right)}_{=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\rho(\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \checkmark$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta_{\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} &= -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\ \mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \\ \rightarrow \quad \Delta_{\boldsymbol{r}}\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \end{aligned}}$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) \overset{|\boldsymbol{r}|\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

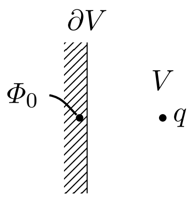
$$\rightarrow \Delta_{\boldsymbol{r}}\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \underset{|\boldsymbol{r}|\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Dirichlet-Randwertproblem

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \qquad \boldsymbol{r}\in V$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi_0(\boldsymbol{r}) \qquad \boldsymbol{r}\in\partial V$$



Green'sche Funktionen (GF):

$$\Delta_{\boldsymbol{r}}\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in V$$

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0 \qquad \text{für} \qquad \boldsymbol{r}\in\partial V \quad \boldsymbol{r}'\in V$$

Hiermit haben wir das Grenzwertproblem auf eine Integration zurückgeführt. Dies werden wir nun Beweisen:

Beiweis:

Die 2. Greensche Identität lautet:

$$\int_V \mathrm{d}^3r'\; \left(g(\boldsymbol{r}')\Delta_{\boldsymbol{r}'}h(\boldsymbol{r}') - h(\boldsymbol{r}')\Delta_{\boldsymbol{r}'}g(\boldsymbol{r}')\right)$$

$$= \int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f}'\cdot\left(g(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'}h(\boldsymbol{r}') - h(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'}g(\boldsymbol{r}')\right)$$

$$g(\boldsymbol{r}') := \Phi(\boldsymbol{r}') \qquad h(\boldsymbol{r}') := \mathcal{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \int_V \mathrm{d}^3 r' \left[\Phi(\boldsymbol{r}') \underbrace{\Delta_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})}_{= -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r})} - \mathcal{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) \underbrace{\Delta_{\boldsymbol{r}'} \Phi(\boldsymbol{r}')}_{= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}')} \right] \\
&= \int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f}' \left[\underbrace{\Phi(\boldsymbol{r}')}_{= \Phi_0(\boldsymbol{r}')} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) - \underbrace{\mathcal{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})}_{=0} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \Phi(\boldsymbol{r}') \right] \\
\Rightarrow &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \Phi(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \mathrm{d}^3 r' \ \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \rho(\boldsymbol{r}) \\
&= \int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{f}' \ \Phi_0(\boldsymbol{r}') \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \\
&= \int_{\partial V} \mathrm{d}f' \ \Phi_0(\boldsymbol{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi(\boldsymbol{r}) = \int_V \mathrm{d}^3 r' \ \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \rho(\boldsymbol{r}') - \varepsilon_0 \int_{\partial V} \mathrm{d}f' \ \Phi_0(\boldsymbol{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$$

Es gilt (HA):

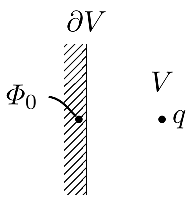
$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') &= \mathcal{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) \qquad \text{Reziprozität} \\
\to \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) \\
\Delta_{\boldsymbol{r}} \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') &= \Delta_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')
\end{aligned}$$

Potential bei Randwertproblem

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \int_V \mathrm{d}^3 r' \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \rho(\boldsymbol{r}') - \varepsilon_0 \int_{\partial V} \mathrm{d}f' \Phi_0(\boldsymbol{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \tag{1}$$

Wiederholung

$$\begin{aligned}
\Delta \Phi(\boldsymbol{r}) &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\boldsymbol{r}) \qquad & \boldsymbol{r} \in V \\
\Phi(\boldsymbol{r}) &= \Phi_0(\boldsymbol{r}) \qquad & \boldsymbol{r} \in \partial V
\end{aligned}$$



Green'sche Funktionen:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\boldsymbol{r}} \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') & & \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}' \in V \\
\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') &= 0 & \text{für} \quad & \boldsymbol{r} \in \partial V \quad \boldsymbol{r}' \in V
\end{aligned}$$

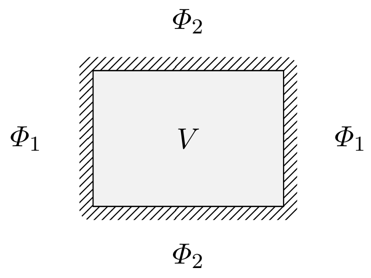
Wenn die Green'sche Funktion $\mathcal{G}$ die Bedingungen erfüllt, können wir das Potential so schreiben wie in Gleichung (1).

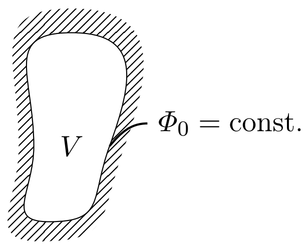
Bemerkungen:

i) Spezialfälle:

1) V Ladungsfrei ($\rho(\boldsymbol{r}) = 0$ in V)

$$\rightarrow \Phi(\boldsymbol{r}) = -\varepsilon_0 \int_{\partial V} \mathrm{d}f' \Phi_0(\boldsymbol{r}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$$





$$\Rightarrow \Phi(\boldsymbol{r}) = -\varepsilon_0 \Phi_0 \underbrace{\int_{\partial V} \mathrm{d}f' \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}_{\int \mathrm{d}f' \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G}}$$

$$= -\varepsilon_0 \Phi_0 \int \mathrm{d}\boldsymbol{f}' \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G}$$

$$\overset{\text{S.v.G.}}{=} -\varepsilon_0 \Phi_0 \int_V \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r}' \underbrace{\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \cdot (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G})}_{\Delta_{\boldsymbol{r}'} \cdot \mathcal{G} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}$$

$$= -\varepsilon_0 \Phi_0 \cdot (-\frac{1}{\varepsilon_0})$$

$$\Rightarrow \Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi_0$$

2) $V = \mathbb{R}^3$, lokalisierte Ladungsverteilung ρ

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r}' \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

$$\boxed{\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}} \qquad \int_{\partial V} \cdots \rightarrow 0$$

eine **spezielle Lösung** für $\mathcal{G}$

ii) $\mathcal{G}$ ist auch die Lösung einer inhomogenen partiellen DGL

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \underbrace{\mathcal{G}_s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}_{\substack{\text{spezielle} \\ \text{Lösung der} \\ \text{inhomogenen} \\ \text{DGL}}} + \underbrace{F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}_{\substack{\text{Lösung} \\ \text{zugehörigen} \\ \text{homogenen} \\ \text{DGL}}}$$

$$\Delta_{\boldsymbol{r}'} \mathcal{G}_s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$$

$$\Delta_{\boldsymbol{r}'} F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = 0$$

$$\mathcal{G}_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \qquad \text{Laplace anwenden !}$$

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}}_{\text{immer zur Lösung}} + \underbrace{F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}_{\substack{\text{so wählen, dass} \\ \text{Randbedingungen erfüllt}}}$$

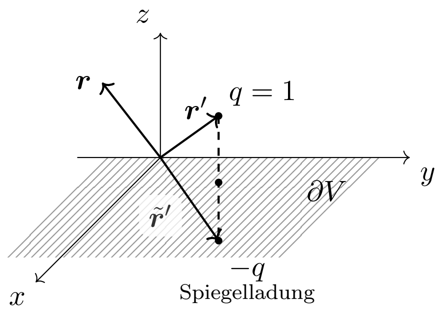
$F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ so wählen, dass die Randbedingungen erfüllt sind: $\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = 0 \quad \boldsymbol{r} \in \partial V$.

1.6.4 Greensche Funktion des Dirichlet Randwertproblems einer Ebene

$$\Delta_{\boldsymbol{r}'}\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' \in V$$

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0 \qquad \boldsymbol{r} \in \partial V \ \ {\scriptstyle (z=0)}, \quad \boldsymbol{r}' \in V$$

$$V = \{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3 | z < 0\}$$



Analog: Punktladung „$q = 1$“ in $\boldsymbol{r}'$ vor leitender Ebene mit Potential 0

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} - \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}'|}\right) \qquad \tilde{\boldsymbol{r}}' = (x', y', -z')$$

$$\boxed{\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{q}\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} - \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}'|}\right)}$$

Beweis:

$$\Delta_{\boldsymbol{r}}\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Bigg(\underbrace{\Delta_{\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}_{\substack{\| \\ -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}} - \underbrace{\Delta_{\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}'|}}_{\substack{\| \\ -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}')=0}}\Bigg) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

1. Teil: $\boldsymbol{r} \in \partial V$: $\quad z = 0$, $\qquad$ 2. Teil $=$ 0: $\quad \tilde{\boldsymbol{r}}' \notin V$!!!

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z')^2}} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(-z)^2}}$$
$$= \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}'|}$$

$\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0 \quad \boldsymbol{r} \in \partial V$

Bemerkung:

i) $\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$
   $F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}'|}$
   $\Delta_{\boldsymbol{r}}F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0 \qquad$ (da $\Delta_{\boldsymbol{r}'}F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}')$ $\quad$ und $\tilde{\boldsymbol{r}}' \notin V$!!!)

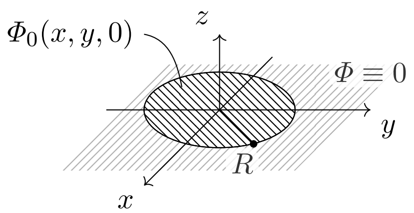
ii) Symmetrie der Greenschen Funktion (Reziprozitätsrelation):

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \mathcal{G}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$$

$\rightarrow$ formale Lösung des Randwertproblems für eine beliebige Ladungsverteilung und Randwerte $\Phi_0(\boldsymbol{r})$ in der Ebene:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \int_V \mathrm{d}^3r'\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}') - \varepsilon_0\int_{\partial V}\mathrm{d}f'\Phi_0(\boldsymbol{r}')\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial n'}$$

$$\rho \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0 \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le R} \mathrm{d}y'\mathrm{d}x'\Phi_0(x',y',0)\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial n'}$$



1.6.5 Separation der Variablen und Entwicklung nach orthogonalen Funktionen

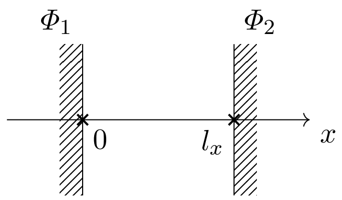
Eine allgemeine Methode zur Lösung partieller DGL.

Zur Vereinfachung: **Laplace.Gl $\boldsymbol{\Delta\Phi = 0}$ + Randbedingung**
Es soll also immer gelten $\rho = 0$

Verbindung zur Poisson-Gl: $\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi_s(\boldsymbol{r}) + \Phi_{\text{hom}} \qquad \Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r' \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + \Phi_{\text{hom}}$$

Motivation: 1-Dim Randwertproblem



$$\Phi(x) = ? \qquad \rho = 0$$

$$\Delta\Phi(x) = \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \Phi(x) = c_1 + c_2 x$$

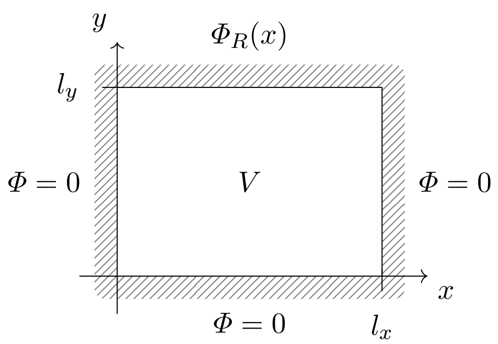
Randbedingungen:

$$\Phi(0) = c_1 = \Phi_1 \qquad \Phi(l_x) = \Phi_1 + c_2 l_x = \Phi_2$$

$$\rightarrow c_2 = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l_x} \quad \rightarrow \quad \Phi(x) = \Phi_1 + \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l_x}x$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l_x}\boldsymbol{e}_x$$

2-Dim Randwertproblem



Wir suchen: $\Phi = \Phi(x, y) \quad$ mit $\rho = 0$

$$0 = \Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$$

Randbedingungen:

i) $\Phi(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad y = 0$

ii) $\Phi(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad x = 0$

iii) $\Phi(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad x = l_x$

iv) $\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi_R(x) \qquad y = l_y$

Separationsansatz: $\Phi(x,y) = f(x)g(y)$

$$\begin{aligned} 0 = \Delta\Phi &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x)g(y) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} g(y) + f(x)\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \\ &= \Delta\Phi = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} g(y) + f(x)\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{0 = \Delta\Phi = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} g(y) + f(x)\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2}} \qquad \Big| \cdot \frac{1}{f\,g}$$

umformen:

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{f(x)}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}}_{\text{Fkt. von} x} = -\underbrace{\frac{1}{g(y)}\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2}}_{\text{Fkt. von} y} = \text{const.} = -\alpha^2$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = -\alpha^2 f(x) \quad \text{mit } e^{i\alpha x} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2} = \alpha^2 g(y) \quad \text{mit } e^{\alpha y}$$

$$e^{i\alpha x} \Rightarrow f(x) = a\sin(\alpha x) + b\cos(\alpha x) \qquad e^{\alpha y} \Rightarrow g(x) = c\sinh(\alpha y) + d\cosh(\alpha y)$$

$\Phi(x,y) = f(x)\cdot g(y)$

Randbedingungen:

i) $0 = \Phi(x,0) = f(x)\cdot d \quad \Rightarrow d = 0$

ii) $0 = \Phi(0,y) = b\cdot g(y) \quad \Rightarrow b = 0$

$$\Rightarrow \Phi(x,y) = a\sin(\alpha x)c\sinh(\alpha y) = \underset{\substack{\parallel \\ a\cdot c}}{A}\sin(\alpha x)\sinh(\alpha y)$$

iii) $0 = \Phi(l_x,y) = A\sin(\alpha l_x)\sinh(\alpha y) \to \sin(\alpha l_x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{n\pi}{l_x} \qquad n \in \mathbb{Z}(\text{oder } n \in \mathbb{N})$

$$\to \Phi_n(x,y) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{l_x}\right)$$

iv) $\Phi(x,l_y) = \Phi_R(x)$

$$\Rightarrow \Phi_R(x) \underset{\uparrow}{=} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)\sinh\left(\frac{n\pi l_y}{l_x}\right) \qquad \forall x \in [0,l_x]$$

im allgemeinen ist dies nicht möglich, aber da es sich um eine lineare DGL ($\Delta\Phi = 0$) handelt:
$\to$ Linearkombinationen von Lösungen sind auch Lösungen

Ansatz für allgemeine Lösung:

$$\boxed{\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{l_x}\right)}$$

Der Ansatz erfüllt $\Delta\Phi = 0$ und erfüllt die Randbedingungen i), ii), iii). Um iv) zu erfüllen fordern wir:

$$\boxed{\Phi_R(x) \stackrel{!}{=} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)}_{\text{Entwicklung}} \underbrace{\sinh\left(\frac{n\pi l_y}{l_x}\right)}_{\text{const.}}}$$

Der erste Teil des Ausdrucks entspricht der Entwicklung von $\Phi_R(x)$ nach Funktionen $\sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)$ also einer Fourier-Reihe.

Bestimmung von A_n: Multipliziere mit $\sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)$ $\quad m \in \mathbb{N}$ und danach Integration:

$$\int_0^{l_x} \mathrm{d}x \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right) \Phi_R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left(\frac{m\pi l_y}{l_x}\right) \int_0^{l_x} \mathrm{d}x \underbrace{\overset{\text{zueinander orthogonale Vektoren}}{\sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)}}_{=\frac{l_x}{2}\delta_{nm}}$$

$$= A_m \frac{l_x}{2} \sinh\left(\frac{n\pi l_y}{l_x}\right)$$

$$A_m = \frac{2}{l_x \sinh\left(\frac{n\pi l_y}{l_x}\right)} \int_0^{l_x} \mathrm{d}x \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right) \Phi_R(x)$$

in $\Phi(x, y)$ einsetzen

Wiederholung

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = 0 \quad + \quad \text{Randbedingungen}$$

$$\Phi = \Phi(x, y) = f(x)g(y)$$

$$\Phi_n(x, y) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{l_x}\right)$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$\Phi(x, y) = \sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{l_x}\right)$$

$$A_n = \frac{2}{l_x \sinh\left(\frac{n\pi l_y}{l_x}\right)} \int_0^{l_x} \mathrm{d}x \ \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right) \Phi_R(x)$$

Zu dem Problem gehört die Skizze aus Abschnitt 1.6.5: 2-Dim Randwertproblem.

1.6.6 Vollständige Orthonormale Funktionensysteme (VONS)

Betrachte Funktionen $g(x), h(x)$ auf $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$

$$g, h : \quad I \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$$

Skalarprodukt: $(g, h) = \int_a^b \mathrm{d}x\ g^*(x)h(x)$
$(g, h) = 0$: g und h **orthogonal**, $(g, g) = 1:$ g **normiert**
Norm: $||g|| = \sqrt{(g, g)}$

Ein abzählbarer Satz von Funktionen $\{f_n\} = \{f_1, f_2, \dots\}$
Heißt orthonormiert falls: $(f_m, f_n) = \delta_{nm} \ \rightarrow$ **Orthonormalsystem**
Vollständigkeit: Ein Satz von Funktionen heißt vollständig (VONS) falls **jede** quadratintegrable[1] Funktion $g : I \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ in der Form $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ dargestellt werden kann.
Genauer: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b \mathrm{d}x \mid g(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)| = 0$
Bestimmung der Koeffizient a_n:

$$g(x) = \sum_n a_n f_n(x) \qquad \Big| \int \mathrm{d}x \ f_m^*(x)$$

$$\int_a^b \mathrm{d}x \ f_m^*(x) g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_a^b \mathrm{d}x \ f_m^*(x) f_n(x)}_{=\delta_{nm}} = a_m$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_n a_n f_n(x) = \sum_n (f_n, g) f_n(x) \\ &= \sum_n \int_a^b \mathrm{d}x' \ f_n^*(x') g(x') f_n(x) \\ &= \int_a^b \mathrm{d}x' \ g(x') \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) f_n^*(x')}_{=\delta(x-x')} \end{aligned}$$

da $\int_a^b \mathrm{d}x' g(x') = g(x)$

Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) f_n^*(x') = \delta(x - x')$$

Beispiele:

1)

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{l}{2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad I = [0, l]$$

Bedeutung der einzelnen Terme $(f_n, f_m) = \delta_{nm}$
$g: \quad I \to \mathbb{R} \quad g(0) = 0 = g(l)$

$$g(x) = \sum_n a_n \sqrt{\frac{l}{2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

2) Fourierreihe: $\{f_n\}$:
$n = 0: \quad \frac{1}{\sqrt{l}}$

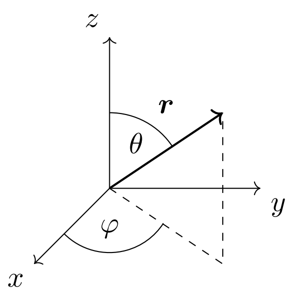
$$n \in \mathbb{N}: \qquad \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad ; \qquad \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad I = [0, l]$$

$$g(x) = a_0 \frac{1}{\sqrt{l}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + b_n \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]$$

[1]Falls $\int \mathrm{d}x \ |g(x)|^2$ existiert

Vektoren	Bezeichnung	Funktionen
$\boldsymbol{r}$	Vektor	$g(x)$
$\{\boldsymbol{e}_n\}$	Basis	$\{f_n(x)\}$
$(\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}_{n'}) = \delta_{nn'}$	Orthonormierung	$(f_n, f_{n'}) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)_{nn'}$
$\boldsymbol{r} = \sum_{n=1}^{3} a_n \boldsymbol{e}_n$	Entwicklung	$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$
$a_n = (\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{r})$	Entwicklungs-koeffizienten	$a_n = (f_n, g)$
$\boldsymbol{r} := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$	Darstellung durch Spaltenvektor	$g(x) := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$

1.6.7 Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten



$$\boldsymbol{r} = r \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi(r, \theta, \varphi)$$

$$\Delta\Phi = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)$$

Separationsansatz:

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \frac{U(r)}{r}P(\cos\theta)Q(\varphi)$$

1. Term:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\cancel{r}\frac{U(r)}{\cancel{r}}P(\cos\theta)Q(\varphi)\right) = P(\cos\theta)Q(\varphi)\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}$$

$$\Rightarrow 0 = PQ\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} + UQ\frac{1}{r^3\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right) + UP\frac{1}{r^3\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\varphi^2} \qquad \Big| \cdot \frac{r^3\sin^2\theta}{UPQ}$$

$$\Rightarrow \underbrace{-r^2\sin^2\theta\frac{1}{U}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} - \sin\theta\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right)}_{\text{unabhängig von } \varphi} = \underbrace{\frac{1}{Q}\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\varphi^2}}_{\text{unabhängig von } r,\theta} = \text{const.} := -m^2$$

für Q:

i)

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\varphi^2} + m^2Q = 0$$

Lösung:

$$Q(\varphi) = e^{im\varphi} = \cos(m\varphi) + i\sin(m\varphi)$$

$$Q(\varphi + 2\pi) = Q(\varphi) \quad \text{da} \quad e^{im(\varphi+2\pi)} = e^{im\varphi} \quad \Rightarrow \quad m = \mathbb{Z}$$

$$\frac{r^2}{U}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{P\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right) = \frac{m^2}{\sin^2\theta}$$

$$\underbrace{\frac{r^2}{U}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}}_{\text{unabh. von }\theta} = -\underbrace{\frac{1}{P\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right)}_{\text{unabh. von }V} = \text{const.} := \lambda$$

ii)

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} - \frac{\lambda}{r^2}U(r) = 0$$

$\to$ Lösung für $\lambda = l(l+1)$ (Warum das eine Lösung ist, wird in iii) erklärt)

$$U(r) = a_l r^{l+1} + b_l r^{-l}$$

$\to$ Spezielle Lösung für $m = 0$:

$$\Phi(r,\theta) = \frac{U(r)}{r}P_l(\cos\theta) = (a_l r^l + b_l r^{-l-1})P_l(\cos\theta)$$

allg. Lösung: $\Delta\Phi = 0$ für $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0$

$$\boxed{\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(\underset{\downarrow}{a_l} r^l + \underset{\downarrow}{b_l} r^{-l-1})P_l(\cos\theta)}$$

durch Randbedingungen festgelegt

iii)

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)P(\cos\theta) = 0$$

$$x := \cos\theta \quad P(x):\ \text{DGL für } P(x) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}P(x(\theta)) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$$

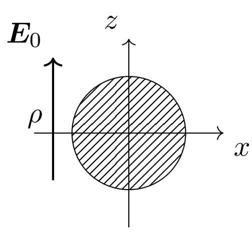
$$\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\Rightarrow -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\underset{\substack{\parallel\\ 1-x^2}}{\sin^2\theta}\,\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P(x) = 0$$

Zugeordnete Legendresche DGL

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P(x) = 0$$

Spezialfall: **Zylindersymmetrische Probleme**: Φ unabhängig von φ
$\to$ **Legendre-Polynome**



$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0, \quad Q(\varphi) = e^{im\varphi} \Rightarrow m = 0 \Rightarrow Q(\varphi) = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right)+\lambda P(x)=0$$

Legendresche DGL

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}+\lambda P(x)=0$$

Potenzreihenansatz: $P(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$

$\rightarrow$ Fließbach

$\rightarrow$ Legendre Polynome

$\rightarrow$ relevante Lösung nur für $\lambda=l(l+1)\qquad l\in\mathbb{N}_0$

Wiederholung

Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

$$\Delta\Phi=0\qquad\Phi(r,\theta,\varphi)$$

$$\Phi(r,\theta,\varphi)=\frac{U(r)}{r}P(\cos\theta)Q(\varphi)$$

i)

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\varphi^2}+m^2Q=0\qquad m\in\mathbb{Z}$$

$$\rightarrow Q(\varphi)=e^{im\varphi}$$

ii)

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}-\frac{\lambda}{r^2}U=0\qquad\lambda=l(l+1)\quad l\in\mathbb{N}_0$$

$$U(r)=a_lr^{l+1}+b_lr^{-l}$$

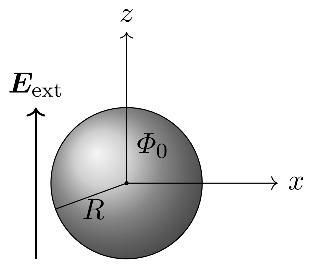
iii)

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)P(\cos\theta)=0$$

Zylindersymmetrische Probleme: $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi}=0\quad\rightarrow\quad m=0$
$\rightarrow P_l(\cos\theta)$: Legendre-Polynome
$\rightarrow$ allgemeine Lösung:

$$\boxed{\Phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(a_lr^l+b_lr^{-l-1}\right)P_l(\cos\theta)}$$

Beispiel: **Leitende Kugel im homogenen Feld**



$$\boldsymbol{E}_{\text{ext}} = E_0 \boldsymbol{e}_z$$
$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi_0 \qquad |\boldsymbol{r}| \leq R$$

Die Frage ist jetzt was ist das äußere Potential und das äußere $\boldsymbol{E}$-Feld:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) \quad \text{für} \quad |\boldsymbol{r}| > R \qquad \to \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

Lösung des Randwertproblems $\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = 0$ für $|\boldsymbol{r}| > R$ mit der **Randbedingungen**:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi_0 \text{ für } |\boldsymbol{r}| = R$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) \overset{|\boldsymbol{r}|\to\infty}{\longrightarrow} -E_0 z + \text{const.} = -E_0 r \cos\theta + \Phi_1$$

Aufgrund der Zylindersymmetrie des Problems ist Φ eine Funktion von θ und r: $\Phi(r, \theta)$

$$\to \Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + b_l r^{-l-1} \right) P_l(\cos\theta)$$

i) $r = R$

$$\Phi(R,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l R^l + b_l R^{-l-1} \right) P_l(\cos\theta)$$
$$\overset{!}{=} \Phi_0 \cdot 1 = \Phi_0 P_0(\cos\theta)$$

an Beide Seiten Multiplizieren wir $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta) P_n(\cos\theta)$ für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l R^l + \frac{b_l}{R^{l+1}} \right) \underbrace{\int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta) P_n(\cos\theta) P_l(\cos\theta)}_{\delta_{nl} \frac{2}{2n+1}} = \Phi_0 \underbrace{\int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta) P_n(\cos\theta) P_l(\cos\theta)}_{\delta_{n0} \frac{2}{2n+1} = 2\delta_{n_0}}$$

$$\Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{2l+1} \left(a_l R^l + \frac{b_l}{R^{l+1}} \right) \delta_{nl} = 2\Phi_0 \delta_{n0} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\underline{n = 0:} \qquad 2\left(a_0 R^0 + \frac{b_0}{R} \right) = 2\Phi_0 \qquad \Rightarrow b_0 = R(\Phi_0 - a_0)$$

$$\underline{n \neq 0:} \quad \frac{2}{2n+1} \left(a_n R^n + \frac{b_n}{R^{n+1}} \right) = 0 \quad \Rightarrow b_n = R^{2n+1} a_n$$

ii) $r \to \infty$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) \to -E_0 r \cos\theta + \Phi_1$$
$$= -E_0 r P_1(\cos\theta) + \Phi_1 P_0(\cos\theta) \overset{r\to\infty}{\longleftarrow} \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{R^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty}\left(a_l r^l + \frac{b_l}{R^{l+1}}\right)\delta_{nl}\frac{2}{2n+1} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 2\Phi_1\delta_{n0} - E_0 r\delta_{n1}\frac{2}{2n+1} = 2\Phi_1\delta_{n0} - \frac{2}{3}E_0 r\delta_{n1}$$

für $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
&\underline{n=0:} && \left(a_0 + \frac{b_0}{r}\right) 2 \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 2\Phi_1 && \Rightarrow && a_0 = \Phi_1 \\
&\underline{n=1:} && \left(a_1 r + \frac{b_1}{r^2}\right)\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}E_0 r && \Rightarrow && a_1 = E_0 \\
&\underline{n>1:} && \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}\right)\frac{2}{2n+1} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} && \Rightarrow && a_n = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow\quad & b_0 = R(\Phi_0 - \Phi_1) \\
& b_1 = -R^3 \qquad a_1 = E_0 R^3 \\
n>1:\quad & b_n = -R^{2n+1} \quad a_n = 0
\end{aligned}$$

$$\Phi(r,\theta) = \left[\Phi_1 + \frac{R(\Phi_0 - \Phi_1)}{r}\right]\underbrace{P_0(\cos\theta)}_{=1} + \left[-E_0 r + \frac{E_0 R^3}{r^2}\right]\underbrace{P_1(\cos\theta)}_{\cos\theta}$$

Potential einer Kugel im homogenen $\boldsymbol{E}$-Feld

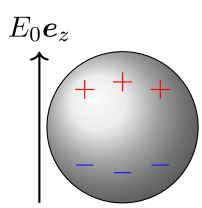
$$\rightarrow \Phi(r,\theta) = \Phi_1 + (\Phi_0 - \Phi_1)\frac{R}{r} - E_0 r\cos\theta + E_0\frac{R^3}{r^2}\cos\theta$$

Diskussion der **Bedeutung der einzelnen Terme**:

- Φ_1 ist eine Konstante die auf das Potential keine physikalische Auswirkung hat.
- $-E_0 r\cos\theta$ ist das Potential des äußeren Feldes.
- $\Phi_0 - \Phi_1$ ist das Potential einer möglichen Gesamtladung auf der Kugel.
- $E_0\frac{R^3}{r^2}\cos\theta$ ist der Beitrag der Ladungsverschiebung auf der Kugel. Also das Potential der Influenzierten Ladungen.

Eine Kugel mit Ladung Q ohne äußeres Feld ($E_0 = 0$):

$$\begin{aligned}
\rightarrow \Phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r} + \text{const.} \\
&\overset{!}{=} \Phi_1 + (\Phi_0 - \Phi_1)\frac{R}{r}
\end{aligned}$$



$$\rightarrow \text{const.} = \Phi_1 \qquad \Phi_0 - \Phi_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_1 = \Phi_0 - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Eine ungeladene Kugel: $Q = 0 \quad \rightarrow \Phi_1 = \Phi_0$

$$\rightarrow \boxed{\Phi(r,\theta) = \Phi_0 - E_0 r\cos\theta + E_0\frac{R^3}{r^2}\cos\theta}$$

Lösung für $m \neq 0$ (Potenzreihenansatz)

$\to$ Zugeordnete Legendre-Polynome

$$P_l^m(x) \qquad x = \cos\theta$$

- Allgemeine Struktur:

$$P_l^m \sim (1-x^2)^{|m|/2} \times \text{ Polynom } (l-|m|)\text{ten Grades}$$

Zusammenfassung der Funktionen:

$$P, \theta \text{ in Produkt: } P_l^m(\cos\theta) Q_m(\varphi)$$

$\Rightarrow$ **Kugelflächenfunktionen**

$$\mathcal{Y}_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

$$l = 0,1,2,\ldots \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm l \qquad \theta \in [0,\pi] \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

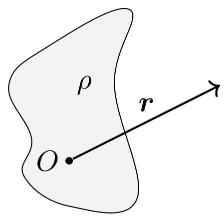
Allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten:

$$\boxed{\Phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}}\right)\mathcal{Y}_{lm}(\theta,\varphi)}$$

$\Delta\Phi = 0$

1.7 Multipolentwicklung

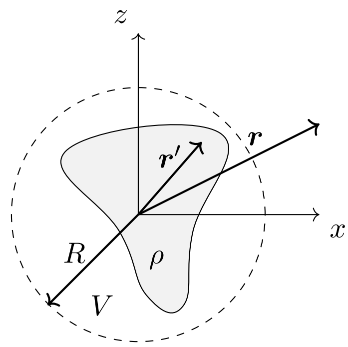
Beliebige endlich große Ladungsverteilung



$$q = \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\boldsymbol{r}')$$

$$\boldsymbol{r} \gg R \qquad \Phi(\boldsymbol{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

statische, lokalisierte Ladungsverteilung:



$$\rho(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \text{beliebig} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

Für $r > R:$ $|\boldsymbol{r}'| < |\boldsymbol{r}| \to$ Taylorentwicklung von $\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ in $\boldsymbol{r}' \to$ d.h. in x_1', x_2', x_3'

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_1'^2) + (x_2 - x_2'^2) + (x_3 - x_3'^2)}} \qquad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Taylorentwicklung:

$$f(\boldsymbol{r}') = f(x_1', x_2', x_3') = f(0,0,0) + \sum_{i=1}^{3} x_i' \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} x_i' x_j' \frac{\partial^2 f}{\partial x_i' \partial x_j'}(0) + \dots$$

Zuerst berechnen wir die einzelnen Terme:

$$f(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} : \ f(0) = \frac{1}{r} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i'} = \left.\frac{(x_i - x_i')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}\right|_0 = \frac{x_i}{r^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i' x_j'}(0) = \dots = \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5}$$

Für $|\boldsymbol{r}| < |\boldsymbol{r}'|$:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r \rho(\boldsymbol{r}') \left\{ \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i' x_i}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i' x_j' \frac{3x_i x_j - r^2 \overset{\downarrow}{\delta_{ij}}}{r^5} + \dots \right\}$$

Den letzten (mit einem Pfeil markierten) Term schauen wir uns jetzt noch einmal genauer an.

$$\sum_{i,j} x_i' x_j' r^2 \delta_{ij} = r^2 \underbrace{\sum_i x_i'^2}_{=r'^2} = r^2 r'^2 = r'^2 \sum_i x_i^2 = \sum_{i,j} r'^2 x_i x_j \delta_{ij}$$

Somit können wir den letzten Term umschreiben als:

$$\sum_{i,j} x_i' x_j' \frac{(3x_i x_j - r^2 \delta_{ij})}{r^5} = \sum_{i,j} x_i x_j \frac{(3x_i' x_j' - r'^3 \delta_{ij})}{r^5}$$

Das Potential unserer Ladungsverteilung im externen $\boldsymbol{E}$-Feld ergibt sich dann als

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r' \rho(\boldsymbol{r}')}_{\substack{q \text{ Gesamtladung} \\ \text{(Monopol)}}} + \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i}{r^3} \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r' x_i' \rho(\boldsymbol{r}')}_{\substack{p_i \text{ Dipolmoment} \\ \boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{x_i x_j}{r^5} \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r' \rho(\boldsymbol{r}')(3x_i' x_j' - r'^2 \delta_{ij})}_{=: \ Q_{ij} \text{ Quadrupolmoment}} + \dots \right\}$$

$$\Rightarrow \Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{q}{r} + \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij} + \dots \right\}$$

Diskussion:

i) **Monopol**

$$\Phi_M(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \qquad \propto \frac{1}{r} \text{ dominiert für } q \neq 0$$

$$\to \boldsymbol{E}_M(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} \Phi_M = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad \propto \frac{1}{r^2}$$

ii) **Dipol**

$$\Phi_D(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p}}{r^3} \qquad \propto \frac{1}{r^2}$$

Das elektrische Feld:

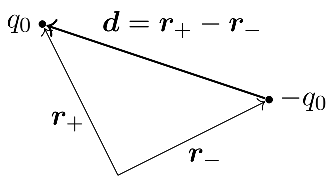
$$\boldsymbol{E}_D = -\boldsymbol{\nabla} \Phi_D$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}} \left(\boldsymbol{p} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \right) : \ \frac{\partial}{\partial x} \left(p_x \frac{x}{r^3} + p_y \frac{y}{r^3} + p_z \frac{z}{r^3} \right) &= \left(\frac{p}{r^3} - 3p_x \frac{xx}{r^5} - 3p_y \frac{yx}{r^5} - 3p_z \frac{zx}{r^5} \right) \\ &= \frac{p_x}{r^3} - 3 \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{r^5} x \\ \frac{\partial}{\partial y}(\dots) &= \frac{p_y}{r^3} - 3 \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{r^5} y \\ \frac{\partial}{\partial z}(\dots) &= \frac{p_z}{r^3} - 3 \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{r^5} z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\left(\boldsymbol{p}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^5}\right) = \frac{\boldsymbol{p}}{r^3} - 3\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^5}\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{E}_D = -\boldsymbol{\nabla}\Phi_D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^4}\right] \qquad \propto \frac{1}{r^3} \quad \boldsymbol{r} \neq 0$$

Beispiel für die Realisierung eines Dipols:
Punktladungen: $q_0, -q_0$ in $\boldsymbol{r}_+, \boldsymbol{r}_-$
Gesamtladung: $q = q_0 - q_0 = 0$



$$\rightarrow \Phi_M(\boldsymbol{r}) \equiv 0$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_+|} - \frac{q_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}}{r^3} + \dots\right)$$

$$\rho(\boldsymbol{r}') = q_0\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_+) - q_0\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_-)$$

$$\boxed{\boldsymbol{p} = \int \mathrm{d}^3r'\rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}' = q_0\boldsymbol{r}_+ - q_0\boldsymbol{r}_- = q_0\boldsymbol{d}}$$

mehrere Punktladungen q_i in $\boldsymbol{r}_i$

$$\rightarrow \boldsymbol{p} = \sum_i q_i\boldsymbol{r}_i$$

iii) **Quadrupolmoment**

$$Q_{ij} = \int \mathrm{d}^3r'\rho(\boldsymbol{r}')(3x_i'x_j' - r'^3\delta_{ij})$$

Quadrupoltensor $Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}$

Eigenschaften

i) Spurfrei: $\mathrm{tr}(Q) = \sum_i Q_{ij} = 0 \quad \Rightarrow$ 2 unabhängige Elemente
ii) Symmetrisch: $Q_{ij} = Q_{ji} \quad \Rightarrow$ 3 unabhängige Elemente

$\Rightarrow$ 5 unabhängige Elemente

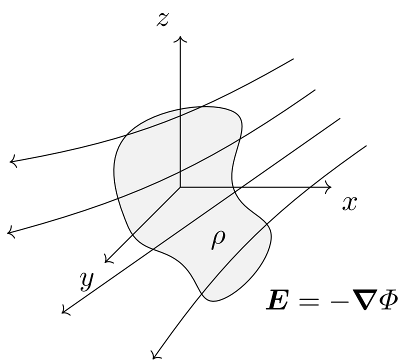
Ableitung in Kugelkoordinaten
$\Rightarrow$ Sphärische Multipolmomente

1.7.1 Multipolentwicklung der Energie der Ladungsverteilung im äußeren Feld

Energie:

$$W = \int \mathrm{d}^3r\rho(\boldsymbol{r})\Phi(\boldsymbol{r}) \qquad (1.1)$$

Wir stellen uns vor, das $\boldsymbol{E}$-Feld wird von sehr weit entfernten Ladungen erzeugt. Wir machen somit also die Annahme, dass sich $\Phi(\boldsymbol{r})$ in dem Gebiet,wo $\rho(\boldsymbol{r})$ sich nur wenig ändert.



$\rightarrow$ Taylorentwicklung von $\Phi(\boldsymbol{r})$ um $\boldsymbol{r} = 0$

$$\begin{aligned}\Phi(\boldsymbol{r}) &= \Phi(0) + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi(0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j}(0) + \dots \\ &= \Phi(0) - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}(0) - \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0)}{} + \dots \\ &\qquad\qquad = \frac{1}{6}\sum_{i,j}(3x_i x_j - r^2\delta_{ij})\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0)\end{aligned}$$

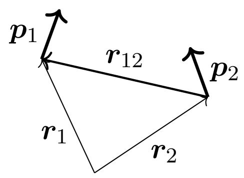
Dies gilt, da:

$$\sum_{i,j} r^2 \delta_{ij}\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) = r^2 \underbrace{\sum_i \frac{\partial E_i}{\partial x_i}(0)}_{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(0)=0}$$

$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = 0$ gilt, da $\boldsymbol{E}$ ein äußeres Feld ist. Damit erhalten wir dann für die Energie mit Formel (1.1):

$$\begin{aligned}\to W &= \Phi(0)\underbrace{\int \mathrm{d}^3 r \rho(\boldsymbol{r})}_{=q} - \boldsymbol{E}(0)\cdot\underbrace{\int \mathrm{d}^3 r \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})}_{=\boldsymbol{p}} - \frac{1}{6}\sum_{i,j}\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0)\underbrace{\int \mathrm{d}^3 r (3x_i x_j - r^2\delta_{ij})\rho(\boldsymbol{r})}_{=Q_{ij}} + \dots \\ &= \underset{\text{Ladung}}{q}\ \underset{\text{Potential}}{\Phi(0)} - \underset{\text{Dipol}}{\boldsymbol{p}} \cdot \underset{\text{Feld}}{\boldsymbol{E}(0)} - \frac{1}{6}\sum_{i,j} \underset{\text{Quadrupol}}{Q_{ij}}\ \underset{\text{Feldgradient}}{\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0)} + \dots\end{aligned}$$

Wechselwirkungsenergie zweier Dipole



Betrachte 2 Punktdipole $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ in $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$
$\boldsymbol{p}_2$ erzeugt am Ort $\boldsymbol{r}_1$ das äußereFeld

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{r}_{12})\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^5} - \frac{\boldsymbol{p}_2}{r_{12}^3}\right]$$

$$\to W = -\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2}{r_{12}^3} - \frac{3(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{r}_{12})(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{r}_{12})}{r_{15}^5}\right] \qquad \propto \frac{1}{r_{12}^3}$$

Je nach Orientierung der Dipole ist diese Wechselwirkung anziehend oder abstoßend.
z.B.: $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \perp \boldsymbol{r}_{12}$

$$\to W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2}{r_{12}^3}\begin{cases} > 0 & \uparrow\uparrow \qquad \text{abstoßend} \\ < 0 & \uparrow\downarrow \qquad \text{anziehend}\end{cases}$$

1.8 Elektrostatik in Materie - Dielektrika

Definition: Dielektrika
Nichtleitende Substanzen (Gase, Flüssigkeiten, Festkörper). Die Ladungsträger sind also fest gebunden.

äußere Felder $\Rightarrow$ Polarisation

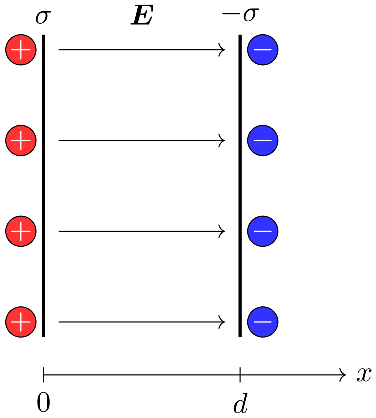
Mehanismen

i) **Verschiebungspolarisation** (Deformationspolarisation)
neutrales Atom

ii) **Orientierungspolarisation**
Molekül mit permanentem Dipolmoment z.B. Wasser

Phänomenologie: Experimentalphysik
Plattenkondensator:

ohne Medium:



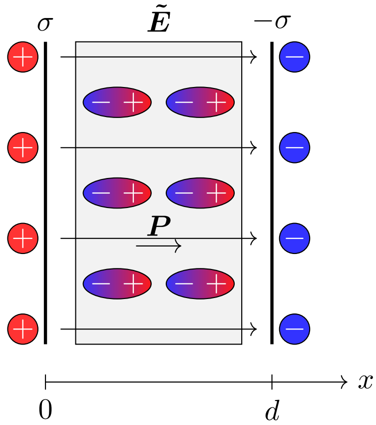
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 F}$$

$$\varPhi = -\frac{\sigma x}{\varepsilon_0}$$

$$U = \frac{qd}{\varepsilon_0 F}$$

$$C = \frac{q}{U} = \varepsilon_0 \frac{F}{d}$$

mit Medium:



$$\tilde{C} > C \qquad \tilde{C} = \varepsilon \frac{F}{d} \qquad \varepsilon > \varepsilon_0$$

$$q = \text{const.}$$

$$\tilde{U} = \frac{qd}{\varepsilon F} < U$$

$$\tilde{E} = \frac{q}{\varepsilon F} = \frac{\sigma}{\varepsilon} < E$$

$$\tilde{E} = E + E_p = E - \frac{1}{\varepsilon_0} P$$

1.8.1 Makroskopische Feldgleichungen der Elektrostatik

Ausgangspunkt: allgemeine (mikroskopische) Feldgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} &= \tfrac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} &= 0 \end{aligned}\right\} \underset{\text{bekannt}}{\xrightarrow{\rho}} \quad \begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\boldsymbol{r}') \tfrac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \\ \varPhi(\boldsymbol{r}) &= \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \tfrac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \end{aligned}$$

Makroskopische Messungen: $\approx 10^{23}$ Teilchen
$\rightarrow$ Mittlung über mikroskopische Details.

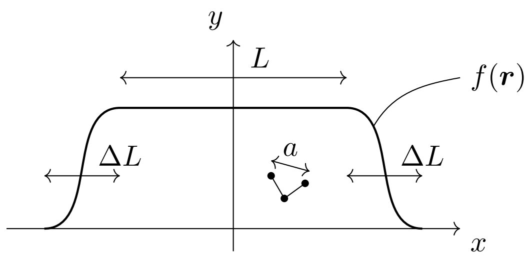
1.8.2 Mittelung von Funktionen

Wir haben eine physikalische Größe $A(\boldsymbol{r})$ und wollen diese Mitteln.

$$\begin{aligned} \langle A \rangle(\boldsymbol{r}) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r' f(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') A(\boldsymbol{r}') \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r' f(\boldsymbol{r}') A(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \end{aligned}$$

f : legt Bereich fest, über den gemittelt wird

Eigenschaften:



i) $\int \mathrm{d}^3r' f(\boldsymbol{r}') = 1$

ii) $f(\boldsymbol{r}) \geq 0$

iii) Eine glatte Funktion, die sich auf molekularer Skala (nm) wenig ändert.

mit $L, \Delta L \gg a$

Wir schauen uns nun an wie die Ableitung einer gemittelten Funktion aussieht.

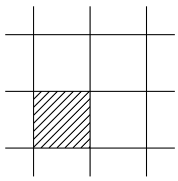
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}\langle A\rangle(\boldsymbol{r}) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\int \mathrm{d}^3r' f(\boldsymbol{r}')A(\underset{\downarrow}{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}')\\ &= \int \mathrm{d}^3r' f(\boldsymbol{r}')\frac{\partial A}{\partial x_i}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\\ &= \langle\frac{\partial A}{\partial x_i}\rangle(\boldsymbol{r})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad &\Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\langle\boldsymbol{E}\rangle = \frac{1}{\varepsilon_0}\langle\rho\rangle\\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}\times\langle\boldsymbol{E}\rangle = 0\end{aligned}$$

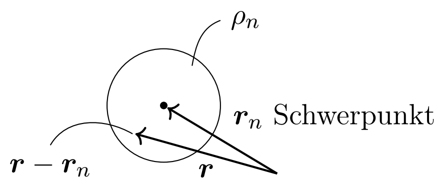
$$\rightarrow \quad \langle\boldsymbol{E}\rangle = -\boldsymbol{\nabla}\langle\Phi\rangle$$

1.8.3 Bestimmung von $\langle\boldsymbol{\rho}\rangle$

Aufteilung der Materie in Untereinheiten:
Festkörper:
Elementarzellen:



Gas:
Moleküle



ρ_n : Ladungsdichte des n-ten Moleküls bzgl. des Schwerpunktes $\boldsymbol{r}_n$. Die gesamte Ladungsdichte ist somit:

$$\rho_g(\boldsymbol{r}) = \sum_n \rho_n(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n)$$

$\rho_g(\boldsymbol{r})$ sind hierbei alle gebundenen Ladungen.
Zusätzlich gibt es möglicherweise freie Ladungsträger $\rho_f(\boldsymbol{r})$
$\Rightarrow$ gesamte Ladungsdichte

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \rho_f(\boldsymbol{r}) + \rho_g(\boldsymbol{r})$$

Mittlung von ρ_g über einen makroskopisch kleinen aber mikroskopisch großen Bereich:

$$\begin{aligned}\langle\rho_g\rangle(\boldsymbol{r}) &= \int \mathrm{d}^3r' f(\boldsymbol{r}')\rho_g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\\ &= \int \mathrm{d}^3r' f(\boldsymbol{r})\sum_n \rho_n(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_n)\\ &= \sum_n \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3r' f(\boldsymbol{r}')\rho_n(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_n)\end{aligned}$$

Nun Betrachten wir den letzten Term:

$$\int \mathrm{d}^3r' f(\boldsymbol{r}')\rho_n(\underbrace{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_n}_{=\tilde{\boldsymbol{r}}})$$

$$= \int \mathrm{d}^3r' \underbrace{f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n-\tilde{\boldsymbol{r}})}_{\substack{\text{ändert sich}\\ \text{wenig auf}\\ \text{mol. Skala}}} \qquad \underbrace{\rho_n(\tilde{\boldsymbol{r}})}_{\substack{\text{lokalisiert auf}\\ \text{molekularer Skala a}\\ \rho_n(\tilde{\boldsymbol{r}})\approx 0 \text{für} |\tilde{\boldsymbol{r}}|\gg a}}$$

Taylorentwicklung in $\tilde{\boldsymbol{r}}$: $\quad f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n-\tilde{\boldsymbol{r}}) = f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n) - \tilde{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n) + \dots$

$$= f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n)\underbrace{\int \mathrm{d}^3\tilde{r}\rho_n(\tilde{\boldsymbol{r}})}_{=q_n} - \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n)\cdot\underbrace{\int \mathrm{d}^3r'\tilde{r}\tilde{\boldsymbol{r}}\rho_n(\tilde{\boldsymbol{r}})}_{=\boldsymbol{p}_m\text{Dipolmoment}} + \dots$$

Höhere Terme werden vernachlässigen z.B. das Quadrupolmoment.

$$= f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n)q_n - \underbrace{\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n)\cdot\boldsymbol{p}_m}_{=\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{p}_n f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n))} + \dots$$

$$= \int \mathrm{d}^3r' q_n\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_n)f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - \boldsymbol{\nabla}\cdot\int \mathrm{d}^3r'\boldsymbol{p}_n\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_n)f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \dots$$

$$= \underset{\substack{\Downarrow\\ \text{Gesamtladung im SP}}}{\langle q_n\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_n)\rangle(\boldsymbol{r})} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\underset{\substack{\Downarrow\\ \text{Dipolmoment im SP}}}{\langle\boldsymbol{p}_n\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_n)\rangle(\boldsymbol{r})} + \dots$$

$$\begin{aligned}\langle\rho_g\rangle &= \sum_n \int \dots\\ &= \langle\sum_n q_n\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_n)\rangle(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{\nabla}\cdot\langle\sum_n \boldsymbol{p}_n\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_n)\rangle(\boldsymbol{r}) + \dots\end{aligned}$$

Der **erste Term** steht für die mittlere Gesamtladung der gegebenen Ladungen = 0 für:

i) neutrale Untereinheiten

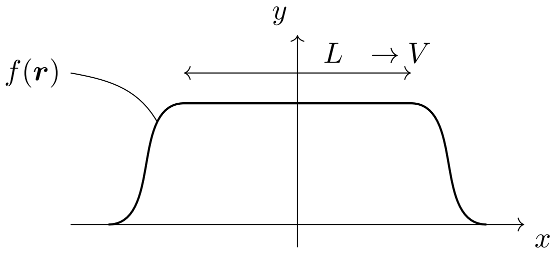
ii) makroskopisch neutraler Körper

Der **zweite Term** wird Definiert als das makroskopische Dipolmoment =: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \frac{\text{Dipolmoment}}{\text{Volumen}}$

$$\boldsymbol{P}(r) = \sum_n \boldsymbol{p}_n \int \mathrm{d}^3r'\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_n)f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{1.2}$$

$$= \sum_n \boldsymbol{p}_n f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n) \approx \frac{1}{V}\sum_{m,\boldsymbol{r}_n\in V}\boldsymbol{p}_n \tag{1.3}$$

$$f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n) \approx \begin{cases} \frac{1}{V} & |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n| \leq L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$\rightarrow$ gemittelte (makroskopische) Ladungsdichte:

$$\langle\rho\rangle(\boldsymbol{r}) = \langle\rho_f\rangle(\boldsymbol{r}) + \underbrace{\langle\sum_n q_n \delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_n)\rangle(\boldsymbol{r})}_{\substack{\text{Gesamtladung} \\ \text{oft } =0}} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P} + \dots$$

Gemittelte makroskopische Ladungsverteilung

$$\langle\rho\rangle(\boldsymbol{r}) = \langle\rho_f\rangle(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) + \dots$$

Daraus folgt:

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\langle\boldsymbol{E}\rangle(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\langle\rho\rangle(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\langle\rho_f\rangle(\boldsymbol{r}) - \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) + \dots$$

Dies können wir umformen in etwas, das der Maxwellgleichung ähnelt:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\underbrace{(\varepsilon_0\langle\boldsymbol{E}\rangle + \boldsymbol{P} + \dots)}_{:=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})} = \langle\rho_f\rangle(\boldsymbol{r})$$

$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) :=$ dielektrische Verschiebung.

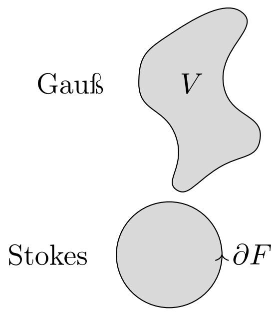
$$\rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \langle\rho_f\rangle(\boldsymbol{r})$$

1.8.4 Makroskopische Feldgleichungen der Elektrostatik (Wiederholung)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \rho_f(\boldsymbol{r})$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$$
$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} + \dots$$

Diese Gleichungen können wir nun mit dem Satz von Gauß und dem Satz von Stokes auch in Integraler Form schreiben:

$$\int_{\partial V} d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D} = \int \mathrm{d}^3 r \rho_f(\boldsymbol{r}) = q_{f_V}$$
$$\oint_{\partial F} d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = 0$$



Wiederholung

Makroskopische Feldgleichungen der Elektrostatik

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad \langle E \rangle(\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \rho_f(\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

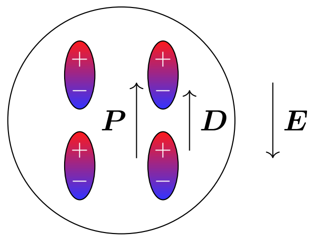
Wir haben hier jetzt zwei Feldgleichungen für zwei Vektorfelder. Dies reicht nicht aus um beide Vektorfelder eindeutig zu bestimmen. Hierfür müssen wir die Wirbel und Quellen beider Felder beschreiben. $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{D}$ sind also nicht unabhängig sondern miteinander verknüpft.

Bem: (Schlussfolgerungen aus den Feldgleichungen der Elektrostatik)

i) Es sieht so aus als ob $\boldsymbol{D}$ nur von der freien Ladungsdichte abhängt, dies ist aber nur in manchen fällen so (Plattenkondensator).
Es gilt nur wenn $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{D} = 0$
Gegenbeispiel: homogen polarisierte Kugel:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{P} \qquad \text{in der Kugel}$$

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \frac{2}{3}\boldsymbol{P}$$



ii)

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{P})$$

$\boldsymbol{E}$ hängt über die Polarisation direkt von dem Medium ab.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} - \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_f - \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P}\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Polarisationsladungsdichte $\rho_p = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P}$

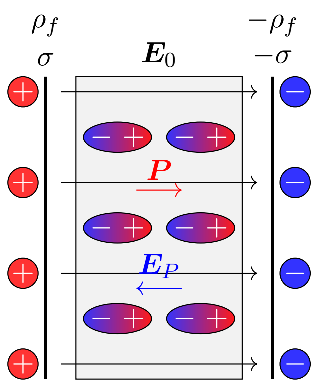
$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f + \rho_p)$$

iii) Die Polarisation wirkt wie ein inneres Zusatzfeld, das sich mit dem durch ρ_f erzeugten Feld $\boldsymbol{E}_0$ überlagert. $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_p$

Im Plattenkondensator:

$$\boldsymbol{E}_p = -\frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 - \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{P}$$



iv) Potential

$$\nabla \times \langle \boldsymbol{E} \rangle = 0$$

$$\langle \boldsymbol{E} \rangle = -\nabla \langle \Phi \rangle$$

Einfach aber zu viel Zeitaufwand für die Vorlesung

$$\begin{aligned}
\langle \Phi \rangle &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\langle \rho \rangle (\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \left(\rho_f(\boldsymbol{r}') - \nabla \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}' + \dots \right)
\end{aligned}$$

v) **Zusammenhang zwischen $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{E}$: Suszeptibilität**

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}) \qquad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{E} = 0) = 0$$

Entwicklung von $\boldsymbol{P}$ in Potenzen von $\boldsymbol{E}$:

$$P_i = \sum_{j=1}^{3} \gamma_{ij} E_j + \sum_{j,k=1}^{3} \beta_{ijk} E_j E_k + \dots$$

γ_{ij} & β_{ijk} sind Materialkonstanten
lineare Näherung:
allgemeines **anisotropes** Dielektrikum

$$P_i = \sum_j \gamma_{ij} E_j$$

isotropes Dielektrikum:

$$P_i = \gamma E_i$$

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \qquad \chi_e \varepsilon_0 = \gamma$$

χ_e ist die **Dielektrische Suszeptibilität**

$$\begin{aligned}
\rightarrow \quad \boldsymbol{D} &= \boldsymbol{P} + \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = (\chi_e \varepsilon_0 + \varepsilon_0) \boldsymbol{E} \\
&= \underbrace{(1 + \chi_e)}_{:=\varepsilon_r} \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \\
&= \varepsilon \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E}
\end{aligned}$$

ε_r ist die relative Dielektrizitätskonstante
$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ ist die Dielektrizitätskonstante

$$\boxed{\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E}}$$

Typische Werte für ε_r:

Medium	ε_r
Vakuum:	$\varepsilon_r = 1$
H_2:	1,00025
N_2:	1,00055
H_2O:	80,1

1.8.5 Feldgleichungen für lineares, isotropes Dielektrikum

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f$$

$$\boxed{\begin{gathered} \nabla \cdot (\varepsilon \boldsymbol{E}) = \rho_f \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \end{gathered}}$$

homogenes Medium $\varepsilon = \text{const.}$

$$\varepsilon \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \rho_f$$

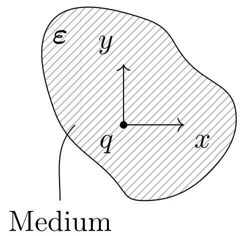
$$\rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 \rho_f} = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_r}}_{\text{Medium}} \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_f$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \rho_f \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \Delta \Phi = -\underset{\uparrow}{\frac{1}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\varepsilon_r} \rho_f$$

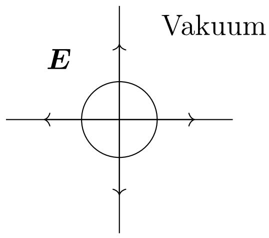
1.8.6 Punktladung in homogenem Dielektrikum (lineare Näherung)



$$\begin{aligned} \rho_f(\boldsymbol{r}) &= q \delta(\boldsymbol{r}) \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{\varepsilon} q \delta(\boldsymbol{r}) \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= 0 \end{aligned}$$

Nun können wir das $\boldsymbol{E}$-Feld im Vakuum bestimmen:

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} q \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_r} \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}}_{=\boldsymbol{E}_{\text{vak}}} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_r} \boldsymbol{E}_{\text{vak}}(\boldsymbol{r}) < \boldsymbol{E}_{\text{vak}}(\boldsymbol{r}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \rightarrow \qquad \boldsymbol{P} &= \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \\ &= \frac{(\varepsilon_r - 1)}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \end{aligned}$$

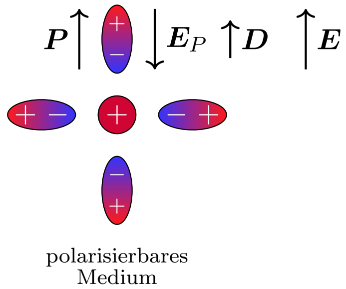
$$\boxed{\Rightarrow \quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\text{vak}} - \frac{1}{\varepsilon_0} \boldsymbol{P}}$$

Hier erkennt man explizit, dass das Vakuum-Feld von der Polarisation vermindert wird.

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi} q \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

In diesem einfachen Fall ist $\boldsymbol{D}$ vollständig durch die freie Ladung q (in der Abbildung Positiv) bestimmt.

1.8.7 Zusammenhang zwischen atomarer/molekularer Polarisierbarkeit und Suszeptibilitäten



Verschiebungspolarisation:

$$\boldsymbol{p} = \alpha \boldsymbol{E}_{\text{lokal}}$$

$\Rightarrow$ Polarisation:

$$\boldsymbol{P} = n\boldsymbol{p} = n\alpha \boldsymbol{E}_{\text{lok}}$$

n ist die Teilchenzahldichte.
Aus den makroskopischen Gleichungen haben wir erhalten:

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \varepsilon_0 \underset{\substack{\parallel \\ \text{makroskopisches} \\ \text{Feld}}}{\boldsymbol{E}}$$

In einem verdünnten Gas gilt: $\boldsymbol{E}_{\text{lok}} \approx \boldsymbol{E}$

$$\Rightarrow \quad \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = n\alpha \boldsymbol{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\chi_e = \frac{n\alpha}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\varepsilon_r = 1 + \frac{n\alpha}{\varepsilon_0}}$$

1.8.8 Randwertprobleme

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{E})$$

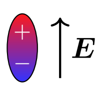
lineares homogenes Dielektrikum

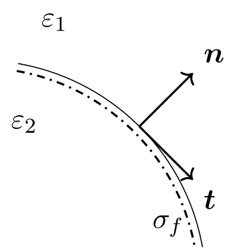
$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon}\rho_f \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$$

$$\Delta \Phi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho_f$$

$\rightarrow$ **Randwertproblem:**
Gegeben: ρ_f, ε Randbedingungen
Gesucht: $\Phi, \boldsymbol{E}$

1.8.9 Randbedingungen für $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ an einer Grenzschicht mit Flächenladung





Erinnerung: mikroskopische Feldgleichungen

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t}(\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0$$

für makroskopische Feldgleichungen:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \sigma_f$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0$$

speziell lineare, homogene Dielektrika ($\varepsilon_1 = \text{const.}, \varepsilon_2 = \text{const.}$):

$$\boldsymbol{D}_i = \varepsilon_i \boldsymbol{E}_i \qquad i = 1, 2$$

$$\boldsymbol{n} \cdot (\varepsilon_1 \boldsymbol{E}_1 - \varepsilon_2 \boldsymbol{E}_2) = \sigma_f$$

Falls $\sigma_f = 0$ (es gibt also **keine** Ladung an der Oberfläche);

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{n}\boldsymbol{E}_1 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\boldsymbol{n}\boldsymbol{E}_2$$

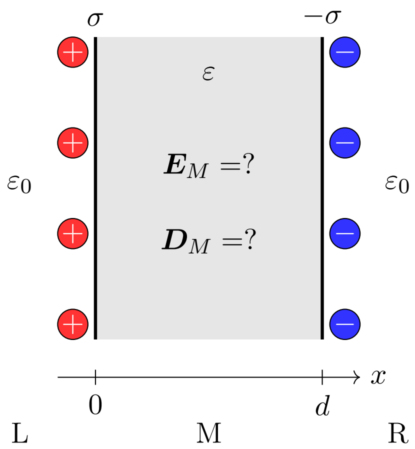
Das heißt, das $\boldsymbol{E}$-Feld ist unstetig wenn $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ (aufgrund der **Polarisationsladung**).

Wiederholung

zu **Randbedingunen für $\boldsymbol{D}$ und $\boldsymbol{E}$ an Grenzflächen mit Flächenladung**

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \sigma_f$$
$$\boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0$$

Beispiel: **Plattenkondensator mit Dielektrikum**



$$\boldsymbol{E}_{L/R} = 0 \qquad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{D}_{L/R} = 0$$

$$\boldsymbol{E}_M = E_x \boldsymbol{e}_x \qquad \boldsymbol{D}_M = D_x \boldsymbol{e}_x \qquad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_x$$

Für den linken Bereich gilt (analog auch rechts):

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D}_M - \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\boldsymbol{D}_L}) = \sigma = \frac{q}{F}$$

Für den mittleren Bereich:

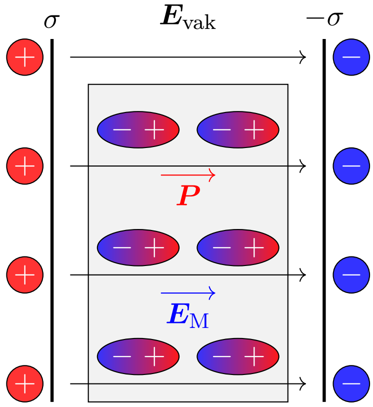
$$\frac{\mathrm{d}D_x}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D}_m = 0$$

$$\rightarrow \boldsymbol{D}_M = \sigma \boldsymbol{e}_x$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_M &= \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{D}_M = \frac{\sigma}{\varepsilon}\boldsymbol{e}_x \\ &= \frac{1}{\varepsilon_r}\underbrace{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x}_{\boldsymbol{E}_\text{vak}} = \frac{1}{\varepsilon_r}\boldsymbol{E}_{M_\text{vak}} \leq \boldsymbol{E}_{M_\text{vak}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} &= \chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\boldsymbol{E} \\ &= \begin{cases} 0 & L/R \\ \frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\sigma\boldsymbol{e}_x & M\end{cases}\end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \boldsymbol{E}_M = \boldsymbol{E}_\text{vak} - \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{P}}$$



Spannung und Kapazität

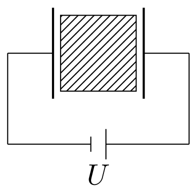
$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\Phi \qquad \Phi(x) = -\frac{\sigma}{\varepsilon}x$$

$$U = \Phi(0) - \Phi(d) = \frac{\sigma d}{\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon F}d = \frac{1}{\varepsilon_r}\underbrace{\frac{q}{\varepsilon_0 F}d}_{U_\text{vak}} \leq U_\text{vak}$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon F}{d} = \varepsilon_r\underbrace{\frac{\varepsilon_0 F}{d}}_{C_\text{vak}} \geq C_\text{vak}$$

Dies gilt für den Fall eines Kondensators mit **fester Ladung** aud den Platten.

anderes Szenario: feste Spannung



$$U = \frac{\sigma}{\varepsilon}d \stackrel{!}{=} U_\text{vak} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}d$$

$$\rightarrow \quad \sigma = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\sigma_0 \geq \sigma_0$$

$$q = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}q_0 \geq q_0$$

Hier muss deshalb Ladung in den Kondensator fließen um das $\boldsymbol{E}$-Feld konstant zu halten. Dadurch steigt die Kapazität.

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon F}{d}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\sigma_0\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = E_\text{vak}$$

$$D = \varepsilon E = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\underbrace{\varepsilon_0 \overset{E_\text{vak}}{\overset{||}{E}}}_{D_\text{vak}} = \varepsilon_r D_\text{vak}$$

1.8.10 Elektrostatische Energie in Dielektrika

im Vakuum:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \mathrm{d}^3r\,(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}))^2$$

(Bei komplexem Feld Betragsquadrat nehmen $|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2$. Dies ist nur ein technischer Trick, das $\boldsymbol{E}$-Felder Reell sind)

makroskopisches Feld in Medien:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3 r \underset{\varepsilon \boldsymbol{E}}{\underset{\parallel}{\boldsymbol{D}}} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\varepsilon}{2}\int_V \mathrm{d}^3 r\, (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}))^2$$

Plattenkondensator: $C = \frac{\varepsilon F}{d} \quad U = Ed$
Energie:

$$E = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon F}{d}E^2 d^2 = \frac{1}{2}\overbrace{\varepsilon \boldsymbol{E}}^{\boldsymbol{D}} \cdot \boldsymbol{E}\overbrace{Fd}^{V} = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\cdot V$$

→ Energiedichte:

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}$$