Theoretische Physik II
Elektrodynamik

Vorlesung von Prof. Dr. Michael Thoss im Wintersemester 2018

Markus Österle
Andréz Gockel

15.10.2018

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einführung

0.1 Zur Vorlesung

Dozent Michael Thoss

Übungen Donnerstag/Freitag (ILIAS) beginnt 18./19.10.18

Übungsleiter Jakob Bätge

Abgabe der Hausaufgaben bus Dienstag 12:00 - Briefkasten GuMi

Klausur 13.02.19, 10-12 Uhr, Hörsaal Anatomie (Nachklausur: 26.19, 10-12 Uhr)

Ankündigungen ILIAS Pass: theophy2.thoss18

Angaben Vorlesung: 4 SWS, Übung: 2 SWS, ECTS: 7

Vorkenntnisse Mathematik: Analysis für Physiker (Vektor Rechnung), Theoretische Physik I, Experimental Physik II.

Hinweis zu den Übungen

- Keine Anwesenheitspflicht.
- Keine Punktzahl nötig für Klausurzulassung.
- Kann auch wehrend Übungen abgegeben werden.

Lehrbücher:

- W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 3: Elektrodynamik* (Springer)
- D.J. Griffiths, *Elektrodynamik: Eine Einführung* (Pearson)
- T. Fließbach, *Elektrodynamik* (Spektrum Akademischer Verlag)
- J.D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik* (Walter de Gruyter) geht dieser Vorlesung hinaus

0.2 Einführung und Überblick

Die vier fundamentalen Wechselwirkungen (WW):

- Starke WW
- **Elektromagnetische WW** Wird in dieser Vorlesung betrachtet
- Schwache WW
- Gravitation

0.2.1 Rückblick

Theoretische Physik 1:

- Mechanik
- Punktmechanik: Bahnkurven von Körpern
- Bewegungsgleichung: $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$

0.2.2 Elektrodynamik

- Grundlegende Größen
- Felder
- $$\begin{array}{cc} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) & \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) \\ \text{elektrisches Feld} & \text{Magnetfeld} \end{array}$$

$\rightarrow$ Feldtheorie sehr wichtiges Konzept

Wie sind Elektrische Felder definiert?
Experimentelle Definition als Messgröße: Kraft auf Ladung

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t))$$

Theoretische Definition ist Mathematisch: Feldgleichungen-Maxwellgleichungen

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0\boldsymbol{j}$$

Hierbei steht ρ für die Ladungsdichte und $\boldsymbol{j}$ für die Stromdichte.

0.3 Aufbau der Vorlesung

1./2. Statische Phänomene: $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

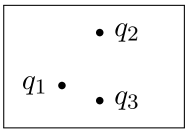
$$\underbrace{\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0}_{\text{1. Elektrostatik}} \qquad \underbrace{\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = 0}_{\text{2. Magnetostatik}}$$

3. Zeitabhängige magnetische/elektrische Felder
4. Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

Kapitel 1

Elektrostatik

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit **ruhenden Ladungen** und **zeitunabhängigen Feldern**. Das Grundproblem besteht darin, dass wir eine Ladungsverteilung haben und das Elektrische Feld und dessen Potential bestimmen wollen.



$\rightarrow$ Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$, el. Potential $\Phi(\boldsymbol{r})$

1.1 Elektrische und Coulombsches Gesetz

Ladung: Beobachtungstatsachen:

i) Zwei Arten „+“, „-“

ii) Abgeschlossenes System: Ladung erhalten: $q = \sum_i q_i = \text{const.}$

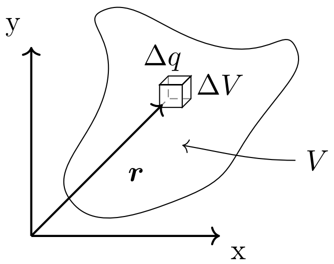
iii) Ladung ist quantisiert in Einheiten der Elementarladung:

$$q = ne,\ n \in \mathbb{Z},\ e = 1,602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

$n = -1$: für ein Elektron wäre ein Beispiel einer Punktladung

Kontinuierliche Ladungsverteilung Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}} = \frac{\Delta q}{\Delta V}$ Gesamtladung in V:

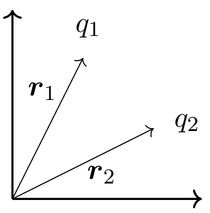
$$Q = \int_V d^3r\, \rho(\boldsymbol{r})$$



1.1.1 Coulombsches Gesetz

Die Kraft, welche eine am Ort $\boldsymbol{r}_2$ lokalisierte Punktladung auf eine Punktladung am Ort $\boldsymbol{r}_1$ ausübt, ist gegeben durch:

$$\boldsymbol{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2}\underbrace{\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}}_{\boldsymbol{e}_{r_{12}}}$$



1. $\boldsymbol{F}_{12} \sim q_1 q_2$

2. $\boldsymbol{F}_{12} \sim \frac{1}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2}$

3. $\boldsymbol{F}_{12} \sim q_1 q_2 \, \boldsymbol{e}_{r_{12}}$

4. $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$

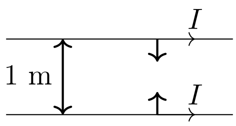
Es gilt das Superpositionsprinzip: Das heißt, durch vektorielle Addition der Kräfte kann die Gesamtkraft ermittelt werden.

$$\boldsymbol{F}_1 = k \sum_{j=2}^{N} \frac{q_1 q_j}{r_{1j}^2} \boldsymbol{e}_{r_{1j}}$$

Zur Konstanten k: Die Konstante ist abhängig von dem verwendeten Maßsystemen.

i) Gauß-System (cgs): $k \equiv 1$, $\text{dyn} = \frac{\text{g}\cdot\text{cm}}{\text{s}^2} = 10^{-5}\,\text{N}$ $1\ \text{dyn} = \frac{(1\text{ESE})^2}{\text{cm}^2}$ $\quad 1\text{ESE} = \frac{\sqrt{\text{g}\cdot\text{cm}^3}}{\text{s}}$

ii) SI (MKSA-System): Definition von A = Ampère



$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Strom $= \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}} \Rightarrow 1\text{A} = \frac{1\text{C}}{1\text{s}} \quad \rightarrow \quad e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \qquad c \approx 3 \cdot 10^8 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$\frac{\Delta F}{\Delta l} = k \frac{2I^2}{c^2 d} \qquad \rightarrow k = 2 \cdot 10^{-7} \, \frac{\text{N}}{\text{m}} \frac{c^2 1\text{m}}{2(1\text{A})^2} = 10^{-7} c^2 \, \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

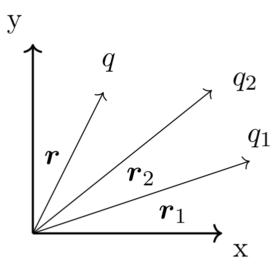
Damit erhalten wir für die Dielektrizitätskonstante des Vakuums:

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$

1.2 Elektrisches Feld

1.2.1 Feld eines Systems von Punktladungen

N-Ladungen $q_1, \ldots, q_N$ ruhen an den Orten $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N$. Nun bringen wir eine Testladung q am Ort $\boldsymbol{r}$ mit ein.



Kraft von q_1, q_2 auf q

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \sum_{j=1}^{N} q_n \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|^3} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

Somit ist das elektrisches Feld:

$$\boxed{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} q_j \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|^3}}$$

Bemerkung

i) Testladung klein (formal: $\lim_{q\to 0}\frac{\boldsymbol{F}}{q}$)

ii) math. $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ Vektorpfeil

$$\text{kartesisch:}\quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} E_x(\boldsymbol{r}) \\ E_y(\boldsymbol{r}) \\ E_z(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix}$$

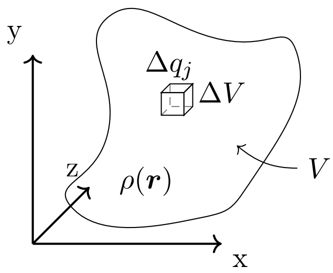
iii) Wechselwirkungsprozess: 2 Teile

$$q_j \to \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \to \boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

iv) Superpositionsprinzip gilt

1.2.2 Feld einer kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r})$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\underbrace{V}_{\substack{\text{schließt alle}\\\text{Ladungen ein}}}} d^3r'\,\rho(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|^3}$$



$\rho(\boldsymbol{r}_j) = \frac{\Delta q_j}{\Delta V_j}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= k\sum_j \Delta q_j \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|^3} \\ &= k\sum_j \Delta V_j \rho(\boldsymbol{r}_j)\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|^3} \\ {\scriptstyle \text{mit } \Delta V_j\to 0}\quad &\to k\int_V d^3r'\rho(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \end{aligned}$$

1.2.3 Ladungsdichte einer Punktladung

Deltafunktion

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

Punktladung in $\boldsymbol{r}_0 \Rightarrow \rho(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}_0$

Ladungsdichte divergiert in $\boldsymbol{r}_0$

$$\rho(\boldsymbol{r}_0) = \infty$$

Modell für Punktladung: Ladung q in Kugel mit Radius ε um $\boldsymbol{r}_0$, $\varepsilon \to 0$

$$\rho_2(\boldsymbol{r}) = \left\{\begin{array}{cc} \frac{q}{v_k} & |\boldsymbol{r}| \le \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{array}\right\} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3}\underbrace{\Theta}_{\text{Stufenfunktion}}(\varepsilon - |\boldsymbol{r}|)$$

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\rho_\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \infty & \boldsymbol{r} = 0 \\ 0 & \boldsymbol{r} \neq 0 \end{cases}$$

Divergenz muss so sein, dass

$$\int_V d^3r\;\rho(\boldsymbol{r}) = q$$

Definition Delta-Funktion (Diracsche Deltafunktion)

1.
$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \begin{cases} \infty & \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}_0 \\ 0 & \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 \end{cases}$$

2.
$$\int_V d^3r\ f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}$$

Mathematik Distribution - Funktional
Funktional: Abb. Funktionen $\mapsto \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$\delta_{\boldsymbol{r}_0} : f \mapsto f(\boldsymbol{r}_0)$$

Physik

$$\int d^3r\ f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = f(\boldsymbol{r})$$

δ-Fkt. als Grenzwert einer Folge von Funktionen im Integral

$$\int d^3r\ f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \quad \int d^3\ f(\boldsymbol{r} g_\varepsilon(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

mit

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}_0 \\ \infty & \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 \end{cases}$$

$$\int_V d^3r\ g_\varepsilon(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = 1$$

Beispiel: $g_\varepsilon(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \frac{\Theta(\varepsilon-|\boldsymbol{r}|}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3}$
Mehrere Punktladungen q_j in $\boldsymbol{r}_j$

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_j q_j \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V d^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V d^3r'\ \sum_j q_j\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

1.2.4 Flächenladungsdichte

$\sigma(\boldsymbol{r}) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}} = \frac{\Delta q}{\Delta A}$
erzeugte elektrisches Feld:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_A \underbrace{df'}_{\text{Flächenelement}}\ \sigma(\boldsymbol{r})\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

Beispiel: Elektrisches Feld einer homogenen Flächenladung $\sigma = \text{const.}$ in x-y-Ebene

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy'\ \sigma\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \qquad \boldsymbol{r}' = (x', y', 0)$$

Symmetrie: $\boldsymbol{E}$ unabhängig von x, y $\qquad \boldsymbol{r} = (0,0,z)$

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = (-x', -y', z), \ |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3 = (x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}$$

$$E_x \sim \sigma \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \ \frac{(x')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} = 0 = E_y$$

$\boldsymbol{E} = (0, 0, E_z)$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma \int_{-\infty}^{\infty} dx' \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy' \ \frac{(x')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}}_{\frac{1}{x'^2+z'^2} \frac{x'}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} =}$$

1.2.5 Linenladungsdichte

$\lambda(\boldsymbol{r} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Länge}} = \frac{\Delta q}{\Delta s}$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\int_\gamma}_{\text{Linienintegral}} ds' \ \lambda(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

Beispiel: Elektrisches Feld einer homogenen Linienladung $\lambda = \text{const.}$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\gamma ds' \ \lambda \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \qquad \gamma : z' \mapsto \boldsymbol{r}'(z') = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \ \frac{\boldsymbol{r} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

$\tilde{z} = z' - z$

$$E_x = \frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \ \frac{1}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{z} \ \frac{1}{(x^2 + y^2 + \tilde{z}^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \ \frac{z - z'}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = 0$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{XXX}$$

1.3 Feldgleichungen und elektrostatische Potential

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3 r' \ \rho(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

1.3.1 Elektrostatisches Potential

elektrische Feld ist ein Potentialfeld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r}) = -\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial\phi}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$

$$\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = -\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}} = -\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2(x-x')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} = \frac{(x-x')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\left(-\nabla_{\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = \nabla_F\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\ \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$\to$ elektrostatisches Potential

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\ \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + c$$

übliche Konvention: $c = 0$ $(\phi(\boldsymbol{r})\ |\boldsymbol{r}| \overset{\to}{\to} \infty\ 0)$

Potential einer Punktladung in $\boldsymbol{r}_0$:

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\ \frac{q\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$$

$$\boldsymbol{E}$$

(Funktional-analysis Siegfried Großmann Springer)
(Landau-Lipschitz Buch geht weit der Vorlesung hinaus)

1.3.2 Feldgleichugn (differentielle Form)

Rotation (Wirbel)

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}\nabla\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \Rightarrow \nabla\times$$

$$\Rightarrow \nabla\times\boldsymbol{E} = -\nabla\times(\nabla\phi) = 0$$

Mathe: Es sind äquivalent

- i $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$
- ii $\nabla\times\boldsymbol{E} = 0$ (auf einfach zusammenhäng. Gebiet)
- iii Kurvenintegral $\int_\gamma d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}$ ist wegunabhängig

$$\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E} = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} dt\,\underbrace{\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\nabla\phi(\boldsymbol{r}(t))}_{\frac{d\phi}{dt}} = \underbrace{(\phi(\boldsymbol{r}_2)-\phi(\boldsymbol{r}_1))}_{\text{Potentialdifferenz}}$$

1.3.3 Divergenz (Quellen)

$$\div \boldsymbol{E} = \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \ \rho(\boldsymbol{r}') \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3r' \rho(\boldsymbol{r}') \nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\end{aligned}$$

x-Anteil:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \frac{x-x'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} &= \frac{1 \cdot [\dots]^{3/2}(x-x')(x-x')^{3/2} \cdot 2[\dots]^{1/2}}{[\dots]^3} \\ &= \frac{[\dots]^{1/2}((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-3(x-x')^2)}{[\dots]^{3/2}} \\ &= \frac{(y-y')^2+(z-z')^2-2(x-x')^2}{[\dots]^{3/2}}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{y-y'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} = \frac{(x-x')^2+(z-z')^2-2(y-y')^2}{[\dots]^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{z-z'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} = \frac{(x-x')^2+(y-y')^2-2(z-z')^2}{[\dots]^{3/2}}$$

$$\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = 0 \quad \text{falls} \quad \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}'$$

$$\Rightarrow \text{falls} \quad \boldsymbol{r} \notin V, \ \text{d.h. } \boldsymbol{r} \text{ in Gebiet ohne Ladungsdichte } \rho(\boldsymbol{r}) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$$

$\boldsymbol{r} \in V$: Grenzwertbetrachtung (Regularisierung des Integranden)
statt

$$\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

betrachten wir:

$$\boldsymbol{f}_a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} = \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{3/2}} \quad a \in \mathbb{R}, \ a > 0$$

am Ende Grenzwert $\lim\limits_{a \to 0}$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{a\to 0} \int_V d^3r' \ \rho(\boldsymbol{r}') \boxed{\nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot f_a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \frac{x-x'}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{3/2}} &= \frac{[\dots+a^2]^{3/2}-(x-x')\frac{3}{2}\cdot 2(x-x')[\dots+a^2]^{3/2}}{[\dots+a^2]^3} \\ &= \frac{(y-y')^2+(z-z')^2+a^2-2(x-x')^2}{[\dots+a^2]^{3/2}}\end{aligned}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot f_a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{3a^2}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{5/2}}$$

$$\lim_{a\to 0} f_a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}' \\ \infty & \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}' \end{cases}$$

$\Rightarrow$ zum Integral $\int_V d^3r' \ldots$ trägt (in Limes $a\to 0$) nur der Bereich $\boldsymbol{r}'\approx\boldsymbol{r}$ bei

$$K_R(\boldsymbol{r}) = \{\boldsymbol{r}'\in\mathbb{R}^3 : |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\leq R\}$$

$$\lim_{a\to 0}\int_V d^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\nabla_{\boldsymbol{r}}\cdot f_a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \lim_{a\to 0}\int_{K_R(F)} d^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}')\frac{3a^2}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{5/2}} + \lim_{a\to 0}$$

1. Integral:

$$\int_{K_R(0)} d^3\tilde{r}\ \rho(\boldsymbol{r})\frac{3a^2}{(\tilde{r}^2+a^2)^{5/2}} = \rho(\boldsymbol{r})\underbrace{\int_0^R d\tilde{r}\ \frac{3a^2}{(\tilde{r}^2+a^2)^{5/2}}}_{\left[\frac{\tilde{r}^3}{(\tilde{r}^2+a^2)^{3/2}}\right]_0^R}\underbrace{\int \overset{\sin\theta d\theta d\varphi}{\overset{||}{d\Omega}}}_{=4\pi}$$

$$= 4\pi\rho(\boldsymbol{r})\frac{R^3}{(R^2+a^2)^{3/2}} \xrightarrow[a\to 0]{} 4\pi\rho(\boldsymbol{r})$$

2. Integral:

$$\int_{K_R(0)} d^3\tilde{r}\ \underset{\tilde{r}\boldsymbol{e}_{\tilde{r}}}{\underset{||}{\tilde{\boldsymbol{r}}}}\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}}\rho(\boldsymbol{r})\frac{3a^2}{(\tilde{r}^2+a^2)^{5/2}} = \underbrace{\int_0^R d\tilde{r}\ \frac{3a^2\tilde{r}^3}{(\tilde{r}^2+a^2)^{3/2}}}_{\frac{2}{3}a-3a^2\left(\frac{R^2+\frac{2}{3}a^2}{(R^2+a^2)^{3/2}}\right)}\underbrace{\int d\Omega\ \boldsymbol{e}_{\tilde{r}}\cdot\nabla\rho(\boldsymbol{r})}_{\text{unabh. von } a} \xrightarrow[a\to 0]{} 0$$

gilt auch für alle höheren Terme

$$\lim_{a\to 0}\int_V d^3r'\rho(\boldsymbol{r})\nabla_{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{3/2}} = 4\pi\rho(\boldsymbol{r})$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\overset{''}{\lim_{a\to 0}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

$$\boxed{\nabla\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \quad \boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^3}$$

1.3.4 Zusammenfassung:

Feldgleichungen der Elektrostatik Mathe: partielle DGL

$$\boxed{\begin{gathered}\nabla\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \text{ inhomogene DGL} \\ \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \text{ homogene DGL}\end{gathered}}$$

DGL für Potential ϕ: $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \nabla \cdot (-\nabla\phi) = -\nabla \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \phi \\ \partial_y \phi \\ \partial_z \phi \end{pmatrix}$$
$$= -\underbrace{\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)}_{=:\Delta\phi}$$

Partielle DGL 2. Ordnung:

Poissongleichung

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

für Gebiete mit $\rho(\boldsymbol{r}) = 0$:

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad \text{Laplacegleichung}$$

Darstellung der Deltafunktion:

$$\lim_{a\to 0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \ \rho(\boldsymbol{r}') \underbrace{\nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2 + a^2]^{3/2}}}_{\frac{3a^2}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2+a^2]^{5/2}} =: g_a(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})} = 4\pi\rho(\boldsymbol{r})$$

$\frac{1}{4\pi} g_a$ liefert Grenzwertdarstellung der δ-funktion.

$$\lim_{a\to 0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \ \rho(\boldsymbol{r}') \frac{1}{4\pi} g_a(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})$$

$$\lim_{a\to 0} g_a(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}' \\ \infty & \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' \end{cases}$$

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{4\pi} \nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{r^2}{(r^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\overset{\text{formal}}{=} \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \underbrace{\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}}_{=-\nabla\frac{1}{r}} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r}\right) = \frac{-1}{4\pi} \Delta \frac{1}{r} \Rightarrow \Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

z.B. Potential einer Punktladung ρ q in $\boldsymbol{r}_0$:

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$$

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \underbrace{\Delta_{\boldsymbol{r}} \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}}_{=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}_{=\rho(\boldsymbol{r})} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

Wiederholung

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

1.3.5 Integralsätze der Vektoranalysis

1) Gaußscher Satz: Sei $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ ein Vektorfeld im Volumen $V \subset \mathbb{R}^3$, so gilt:

$$\int_V d^3r \ \nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_{\partial V} d\boldsymbol{f} \ \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

$$\partial V \text{ Rand von } V$$

$$d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{n} \ df$$

$$\downarrow$$

nach aussen orientierter Normaleneinheutsvektor

Bemerkung:

i) Analogie 1D: Fundamentalsatz der Integralrechnung:

$$\int_a^b dx \frac{df}{dx} = f(b) - f(a)$$

ii) Geometrische / physikalische Integration:
Fluss des Vektorfeldes $\boldsymbol{A}$ durch ∂V

$$\int_{\partial V} d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{A}$$

Integral über die Quellen von $\boldsymbol{A}$

$$\int_V d^3r \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A} = \text{const.} \rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$$

Beispiel: Geschwindigkeit einer Flüssigkeit: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$

$$\boldsymbol{v} = \text{const.} \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \quad \int_{\partial V} d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

$\Rightarrow$ Es gibt keine Quellen von $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{r} \neq 0 \quad \int_{\partial V} d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \neq 0$$

iii)

$$\int_V d^3r \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_0^{\Delta x} dx \int_0^{\Delta y} dy \int_0^{\Delta z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\Delta z} dz \int_0^{\Delta y} dy \quad \underbrace{\int_0^{\Delta x} dx \frac{\partial A_x}{\partial x}}_{A_x(\Delta x,y,z)-A_x(0,y,z)} \\
&= \int_0^{\Delta z} dz \int_0^{\Delta y} A_x(\Delta x, y, z) - \int_0^{\Delta z} dz \int_0^{\Delta y} dy A_x(0,y,z) \\
&= \int_{F_A^+} d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{A} + \int_{F_A^-} d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

$$F_x^+ : \quad d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_x dydz \qquad F_x^- : \quad d\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{e}_x dydz$$

ebenso gilt dann für die anderen Koordinaten:

$$\int_0^{\Delta x} dx \int_0^{\Delta z} dz \int_0^{\Delta y} dy \frac{\partial A_y}{\partial y} = \int_{F_y^+} d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{A} + \int_{F_y^-} d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\int_0^{\Delta x} dx \int_0^{\Delta y} dy \int_0^{\Delta z} dz \frac{\partial A_z}{\partial z} = \int_{F_z^+} d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{A} + \int_{F_z^-} d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\Rightarrow \int_V d^3r \nabla\cdot\boldsymbol{A} = \int_{\partial V} d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{A}$$

2) Stokescher Satz Sei $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ ein Vektorfeld, F eine Fläche mit Randkurve ∂F, so gilt:

$$\int_{\text{Linienintegral}\rightarrow \partial F} d\boldsymbol{r}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_{F \leftarrow \text{Oberflächenint.}} d\boldsymbol{f}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}))$$

$$d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{n}df$$

Richtung von $d\boldsymbol{f}$ und Umlauf sinn von ∂F: rechte Hand Regel.

Beispiel:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+1 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{r}(\varphi) = R\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi\in[0,2\pi]$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi} = R\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\partial F} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(\varphi))$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi R(+\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 2\pi R^2$$
$$\int_F d\boldsymbol{f} \overbrace{(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})}^{2\boldsymbol{e}_z} = 2\pi R^2$$

Vektorfeld ohne Wirbel z.B. $\boldsymbol{A} = \text{const.}$
$\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$
Bemerkung:

1.3.6 Integrale Form der Feldgleichung

1.3.7 Gaußsches Gesetz

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$\int_V d^3r \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r \rho(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_V$$
$$= \int_V d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

$$\boxed{\int_{\partial V} d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon} Q_V}$$

Berechnung elektrischer Felder für hochsymmetrische Ladungsverteilungen

Beispiel:
Homogen geladene Kugel mit Radius R und Gesamtladung Q. Damit ist die Ladungsdichte innerhalb der Kugel:

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_r(r) \boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{r} = r \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$
Fluss von $\boldsymbol{E}$ durch Oberfläche einer Kugel mit Radius r

$$d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}_r r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \Rightarrow d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{E} = E_r(r) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\int_{\partial K_r(0)} d\boldsymbol{f}\ \boldsymbol{E} = \int_0^T d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi E_r(r) r^2 \sin\theta$$
$$= E_r(r) r^2 4\pi$$
$$= \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{K_r(0)} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{K_r(0)} d^3r\ \rho(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{cases} Q & r > R \\ Q\frac{r^3}{R^3} & r \leq R \end{cases}$$
$$\Rightarrow E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{r^2} & r > R \\ \frac{r}{R^3} & r \leq R \end{cases}$$

1.3.8 Satz von Stokes

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$$

Definition: $\gamma = \partial F$
$\int_\gamma$ ist dann ein Linienintegral über eine geschlossene Kurve

$$\boxed{\int_\gamma d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E} = \int_F d\boldsymbol{f} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) = 0}$$

1.3.9 Zusammenfassung: Feldgleichungen der Elektrostatik

differentielle Darstellung:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi \quad \rightarrow \quad \Delta\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

Integral Darstellung:

$$\int_{\partial V} d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_V \qquad , \qquad \oint_\gamma d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

1.4 Elektrostatische Energie

potentielle Energie einer Punktladung im äußeren elektrischen Feld
Kraft auf Ladung q:

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$$

Die Arbeit bei Verschiebung der Ladung von $\boldsymbol{a}$ nach $\boldsymbol{b}$

$$\begin{aligned} W &= -\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{F} = -q \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \\ &= q \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi = q \underbrace{(\Phi(\boldsymbol{b}) - \Phi(\boldsymbol{a}))}_{\text{Potentialdifferenz}} \end{aligned}$$

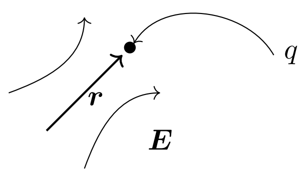
Die Arbeit um q aus dem unendlichen ∞ nach $\boldsymbol{r}$ zu bringen ist dann:

$$W = q(\Phi(\boldsymbol{r}) - \Phi(\infty))$$

Zur Referenz: $\Phi(\infty) = 0$
Damit ist die Energie der Ladung q im äußeren Feld:

$$\Rightarrow W = q(\Phi(\boldsymbol{r}))$$

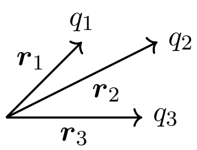
$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$$



1.4.1 Elektrostatische Potentielle Energie

Energie einer Verteilung von Punktladungen N Ladungen q: an Orten $\boldsymbol{r}_i$
Zunächst: $\underbrace{i-1}_{\text{erzeugen am Ort } \boldsymbol{r}_i}$ Ladungen q_j bei $\boldsymbol{r}_j$
Das Potential

$$\Phi(\boldsymbol{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|}$$



Arbeit um i-te Ladung aus dem unendlichen nach $\boldsymbol{r}$ zu bringen:

$$W_i = q_i \Phi(\boldsymbol{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

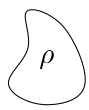
Somit ergibt sich die gesamte Arbeit für N Ladungen als:

$$\begin{aligned} W = \sum_{i=2}^{N} W_i &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \end{aligned}$$

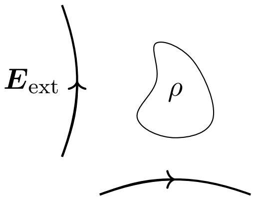
$$\Rightarrow W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \underbrace{\left(\sum_{\substack{j \\ j \neq i}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_{ij}} \right)}_{\Phi_{\not{j}}(\boldsymbol{r}_i)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \Phi_{\not{j}}(\boldsymbol{r}_i) \end{aligned}$$

Energie einer kontinuierlichen lokalisierten Ladungsverteilung



$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r\, \rho(\boldsymbol{r}) \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|}}_{\Phi(\boldsymbol{r})} \end{aligned}$$



$$W_{\text{ext}} = \int d^3r\ \rho(\boldsymbol{r})\Phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r})$$

Energie W durch $\boldsymbol{E}$ ausdrücken:

$$\boldsymbol{\Delta}\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad \Rightarrow \quad W = -\frac{1}{2}\int d^3r\varepsilon_0 \ \underbrace{\boldsymbol{\Delta}\Phi(\boldsymbol{r})\Phi(\boldsymbol{r})}_{\substack{\boldsymbol{\nabla}\cdot(\Phi\boldsymbol{\nabla}\Phi)-(\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2 \\ \| \\ \boldsymbol{E}}}$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r\boldsymbol{\nabla}\cdot(\Phi\boldsymbol{\nabla}\Phi)} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{K_R(0)} d^3r\boldsymbol{\nabla}\cdot(\Phi\boldsymbol{\nabla}\Phi) = \lim_{R\to\infty}\int_{\partial K_R(0)} \underbrace{d\boldsymbol{f}\cdot\underbrace{(\Phi\boldsymbol{\nabla}\Phi)}_{\overset{R\to\infty}{\sim}\frac{1}{R^3}}}_{\sim\frac{1}{R}} = 0$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

Zur Umformung oben wurde benutzt:

$$\Phi \overset{R\to\infty}{\sim} \frac{1}{R} \qquad \boldsymbol{\nabla}\Phi \sim \frac{1}{R^2} \qquad d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{n}\underbrace{df}_{\sim R^2}$$

Damit ergibt sich für die Energie einer Verteilung von Punktladungen

$$\Rightarrow \quad \boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\ \boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r})} \qquad \text{nicht für Punkladungen}$$

Energiedichte des elektrostatischen Feldes

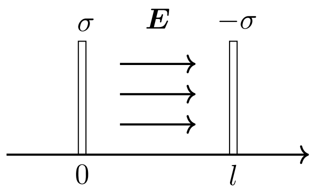
$$\boxed{w(\boldsymbol{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r})}$$

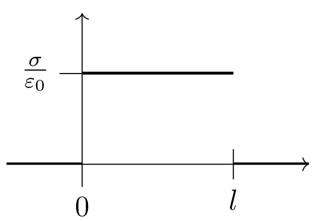
Beispiel: Plattenkondensator

Fläche F, Ladung $\to r = \frac{q}{F} \to \boldsymbol{E} = \frac{r}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x$

$\to$ Die Energiedichte ist: $w = \frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$ (nicht für Punktladungen)

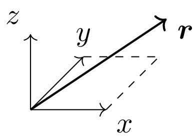
$\to$ Die Energie beträgt: $W = \int d^3rw(\boldsymbol{r}) = l\cdot F\cdot\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

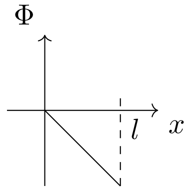




Potentialdifferenz - Spannung

$$\Phi(\boldsymbol{r}) - \Phi(0) = -\int_0^{\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') = -\int_0^x dx' \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} x$$





Die Spannung zwischen zwei Kondensatorplatten ist dann:

$$U = \Phi(0) - \Phi(l) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} l = \frac{q}{\varepsilon_0 F} l$$

Die Kapazität ist also:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0 F}{l}$$

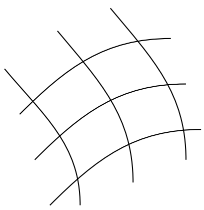
Was ist die Energie bei einer Verteilung von Punktladungen und bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung. Bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung haben wir herausgefunden:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \qquad \text{für Punktladungen}$$

Die Energie der Punktladung selbst steckt hier nicht drinnen. Man muss dabei aufpassen, welche Gleichung man für welches Modell benutzt.

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad \int d^3r\ \boldsymbol{E}^2 = \int d^3r\ \frac{1}{r^4} = \infty$$

1.5 Verhalten des el. Feldes an Grenzflächen mit Flächenladung



Normalkomponente $\boldsymbol{E}_\perp$ Gaußscher Satz für V:

$$\begin{aligned}\int_V d^3r'\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \int_{\partial V} d\boldsymbol{f}'\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \\ &= \underset{\substack{\downarrow\, \Delta z\to 0 \\ 0}}{\int_{\text{Mantel}} d\boldsymbol{f}'\ \boldsymbol{E}} + \underset{\substack{\downarrow\, \Delta z\to 0 \\ \int_F df'\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_+}}{\int_{\partial V_+} d\boldsymbol{f}'\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})} + \underset{\substack{\downarrow\, \Delta z\to 0 \\ -\int_F df'\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_-}}{\int_{\partial V_-} d\boldsymbol{f}'\ \boldsymbol{E}}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{E}_\pm$ ist das Feld auf beiden Seiten der Grenzfläche

$$\int_{\partial V} d\boldsymbol{f}' \boldsymbol{E} \overset{\Delta z\to 0}{\longrightarrow} \int_F df \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_-) \overset{F\to 0}{\longrightarrow} F\ \boldsymbol{n} \cdot \big(\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) - \underset{\shortparallel}{\boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r})}\big)$$

$$\int_V d^2r' \underset{\substack{\| \\ \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}')}}{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3r'\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_F df'\sigma(\boldsymbol{r}') \overset{F\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{\varepsilon_0}F\sigma(\boldsymbol{r})$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r})) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\boldsymbol{r})$$

$$E_{\perp\pm} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_\pm \qquad E_{\perp+}(\boldsymbol{r}) - E_{\perp-}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\boldsymbol{r})$$

$$0 = \oint_\gamma d\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{E} \overset{\Delta z\to 0}{\longrightarrow} \int_{-\frac{L}{2}}^{-\frac{L}{2}} ds\boldsymbol{t}\cdot(\boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_-) \overset{L\to 0}{\longrightarrow} L\boldsymbol{t}\cdot(\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r})) = 0$$

$$\to \boldsymbol{t}\cdot(\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r}) = 0$$

$\to$ Die Tangentialkomponente ist stetig

$$E_{\|+} = E_{\|-}$$

Insgesamt ergibt sich damit:

$$\boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{n}$$

Das elektrische Potential Φ ist damit stetig.

$$\underbrace{\Phi(\boldsymbol{r}_b) - \Phi(\boldsymbol{r}_a)}_{\Phi_+(\boldsymbol{r})-\Phi_-(\boldsymbol{r})} = \int_{\boldsymbol{r}_a}^{\boldsymbol{r}_b} d\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{E} \quad \overset{\Delta z\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Randbedingungen an el. Leitern Leiter: Material mit freibeweglichen Ladungsträgern (Metall)
Eigenschaften von $\boldsymbol{E}$ im Leiter:

i) $\boldsymbol{E} = 0$

ii) $0 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \qquad \rho(\boldsymbol{r}) = 0$

iii) Nettoladung befinden sich an Oberfläche

iv) Potential $\Phi(\boldsymbol{r}_b) - \Phi(\boldsymbol{r}_a) = 0 \quad \to \quad \Phi(\boldsymbol{r}) = \text{const.}$

Randbedingungen

$$\boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_- = \frac{\sigma^-}{\varepsilon_0}\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{E}_- = 0$$

$$\to \boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) = \frac{\sigma(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$$

[Folie: Ladung an Oberfläche eines Leiters]

$$\int$$

$$\square$$