

# Theoretische Physik II

## Elektrodynamik

Vorlesung von Prof. Dr. Michael Thoss im Wintersemester 2018

Markus Österle   Andréz Gockel

20. November 2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
0.1	Zur Vorlesung . . . . .	3
0.2	Einführung und Überblick . . . . .	4
0.2.1	Rückblick . . . . .	4
0.2.2	Elektrodynamik . . . . .	4
0.3	Aufbau der Vorlesung . . . . .	4
<b>1</b>	<b>Elektrostatik</b>	<b>5</b>
1.1	Elektrische und Coulombsches Gesetz . . . . .	5
1.1.1	Coulombsches Gesetz . . . . .	5
1.2	Elektrisches Feld . . . . .	6
1.2.1	Feld eines Systems von Punktladungen . . . . .	6
1.2.2	Feld einer kontinuierlichen Ladungsverteilung . . . . .	7
1.2.3	Ladungsdichte einer Punktladung . . . . .	7
1.2.4	Flächenladungsdichte . . . . .	9
1.2.5	Linieladungsdichte . . . . .	10
1.3	Feldgleichungen und elektrostatische Potential . . . . .	10
1.3.1	Elektrostatisches Potential . . . . .	11
1.3.2	Feldgleichung (differentielle Form) . . . . .	11
1.3.3	Divergenz (Quellen) . . . . .	12
1.3.4	Zusammenfassung: . . . . .	14
1.3.5	Integralsätze der Vektoranalysis . . . . .	15
1.3.6	Integrale Form der Feldgleichung . . . . .	17
1.3.7	Gaußsches Gesetz . . . . .	17
1.3.8	Satz von Stokes . . . . .	18
1.3.9	Zusammenfassung: Feldgleichungen der Elektrostatik . . . . .	18
1.4	Elektrostatische Energie . . . . .	19
1.4.1	Elektrostatische Potentielle Energie . . . . .	19
1.5	Verhalten des el. Feldes an Grenzflächen mit Flächenladung . . . . .	21
1.5.1	Randbedingungen an el. Leitern . . . . .	23
1.6	Randwertprobleme (RWP) der Elektrostatik und Lösungsmethoden . . . . .	24
1.6.1	Formulierung des Randwertproblems . . . . .	24
1.6.2	Methode der Bildladung (Spiegelladung) . . . . .	25
1.6.3	Formale Lösungen des elektrostatischen Randwertproblems mit Greenschen Funktionen (GF) . . . . .	27
1.6.4	Greensche Funktion des Dirichlet Randwertproblems einer Ebene . . . . .	30
1.6.5	Separation der Variablen und Entwicklung nach orthogonalen Funktionen . . . . .	31
1.6.6	Vollständige Orthonormale Funktionensysteme (VONS) . . . . .	34
1.6.7	Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten . . . . .	35
1.7	Multipolentwicklung . . . . .	40

1.7.1	Multipolentwicklung der Energie der Ladungsverteilung im äußeren Feld .	42
-------	---	----

# Kapitel 0

## Einführung

### 0.1 Zur Vorlesung

**Dozent** Michael Thoss

**Übungen** Donnerstag/Freitag (ILIAS) beginnt 18./19.10.18

**Übungsleiter** Jakob Bätge

**Abgabe der Hausaufgaben** bis Dienstag 12:00 - Briefkasten GuMi

**Klausur** 13.02.19, 10-12 Uhr, Hörsaal Anatomie (Nachklausur: 26.19, 10-12 Uhr)

**Ankündigungen** ILIAS Pass: theophy2.thoss18

**Angaben** Vorlesung: 4 SWS, Übung: 2 SWS, ECTS: 7

**Vorkenntnisse** Mathematik: Analysis für Physiker (Vektor Rechnung), Theoretische Physik I, Experimental Physik II.

#### Hinweis zu den Übungen

- Keine Anwesenheitspflicht.
- Keine Punktzahl nötig für Klausurzulassung.
- Kann auch während Übungen abgegeben werden.

Lehrbücher:

- W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 3: Elektrodynamik* (Springer)
- D.J. Griffiths, *Elektrodynamik: Eine Einführung* (Pearson)
- T. Fließbach, *Elektrodynamik* (Spektrum Akademischer Verlag)
- J.D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik* (Walter de Gruyter) [geht dieser Vorlesung hinaus](#)

## 0.2 Einführung und Überblick

Die vier fundamentalen Wechselwirkungen (WW):

- Starke WW
- Elektromagnetische WW Wird in dieser Vorlesung betrachtet
- Schwache WW
- Gravitation

### 0.2.1 Rückblick

Theoretische Physik 1:

- Mechanik
- Punktmechanik: Bahnkurven von Körpern
- Bewegungsgleichung:  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$

### 0.2.2 Elektrodynamik

- Grundlegende Größen
- Felder
- 

$$\begin{array}{cc} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) & \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \\ \text{elektrisches Feld} & \text{Magnetfeld} \end{array}$$

→ Feldtheorie sehr wichtiges Konzept

Wie sind Elektrische Felder definiert?

Experimentelle Definition als Messgröße: Kraft auf Ladung

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t))$$

Theoretische Definition ist Mathematisch: Feldgleichungen-Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{j} \end{aligned}$$

Hierbei steht  $\rho$  für die Ladungsdichte und  $\mathbf{j}$  für die Stromdichte.

## 0.3 Aufbau der Vorlesung

1./2. Statische Phänomene:  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \underbrace{\nabla \times \mathbf{E} = 0}_{1. \text{ Elektrostatik}} & & \underbrace{\nabla \times \mathbf{B} = 0}_{2. \text{ Magnetostatik}} \end{aligned}$$

3. Zeitabhängige magnetische/elektrische Felder

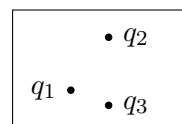
4. Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

# Kapitel 1

## Elektrostatik

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit **ruhenden Ladungen** und **zeitunabhängigen Feldern**. Das Grundproblem besteht darin, dass wir eine Ladungsverteilung haben und das Elektrische Feld und dessen Potential bestimmen wollen.

→ Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , el. Potential  $\Phi(\mathbf{r})$



### 1.1 Elektrische und Coulombsches Gesetz

Ladung: Beobachtungstatsachen:

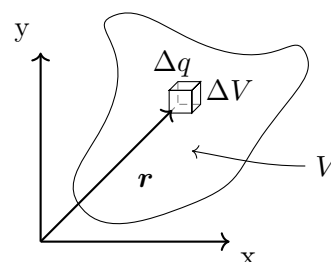
- i) Zwei Arten „+“, „-“
- ii) Abgeschlossenes System: Ladung erhalten:  $q = \sum_i q_i = \text{const.}$
- iii) Ladung ist quantisiert in Einheiten der Elementarladung:

$$q = ne, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$n = -1$ : für ein Elektron wäre ein Beispiel einer Punktladung

Kontinuierliche Ladungsverteilung Ladungsdichte  
 $\rho(\mathbf{r}) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}} = \frac{\Delta q}{\Delta V}$  Gesamtladung in  $V$ :

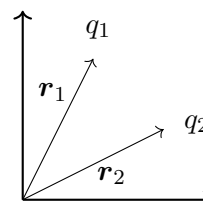
$$Q = \int_V d^3r \rho(\mathbf{r})$$



#### 1.1.1 Coulombsches Gesetz

Die Kraft, welche eine am Ort  $\mathbf{r}_2$  lokalisierte Punktladung auf eine Punktladung am Ort  $\mathbf{r}_1$  ausübt, ist gegeben durch:

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \underbrace{\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}_{\mathbf{e}_{r_{12}}}$$



1.  $\mathbf{F}_{12} \sim q_1 q_2$

2.  $\mathbf{F}_{12} \sim \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}$

3.  $\mathbf{F}_{12} \sim q_1 q_2 \mathbf{e}_{r_{12}}$

4.  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$

Es gilt das Superpositionsprinzip: Das heißt, durch vektorielle Addition der Kräfte kann die Gesamtkraft ermittelt werden.

$$\mathbf{F}_1 = k \sum_{j=2}^N \frac{q_1 q_j}{r_{1j}^2} \mathbf{e}_{r_{1j}}$$

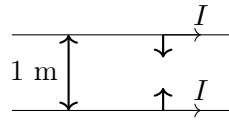
**Zur Konstanten  $k$ :**

Die Konstante ist abhängig von dem verwendeten Maßsystemen.

i) Gauß-System (cgs):  $k \equiv 1$ ,  $\text{dyn} = \frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2} = 10^{-5} \text{ N}$  1 dyn =  $\frac{(1\text{ESE})^2}{\text{cm}^2}$  1ESE =  $\frac{\sqrt{\text{g} \cdot \text{cm}^3}}{\text{s}}$

ii) SI (MKSA-System): Definition von A = Ampère

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$



$$\text{Strom} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}} \Rightarrow 1\text{A} = \frac{1\text{C}}{1\text{s}} \rightarrow e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = k \frac{2I^2}{c^2 d} \rightarrow k = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}} \frac{c^2 1\text{m}}{2(1\text{A})^2} = 10^{-7} c^2 \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

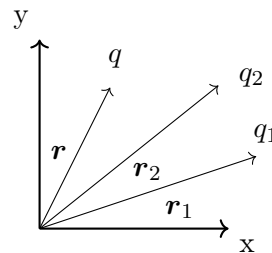
Damit erhalten wir für die Dielektrizitätskonstante des Vakuums:

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$

## 1.2 Elektrisches Feld

### 1.2.1 Feld eines Systems von Punktladungen

$N$ -Ladungen  $q_1, \dots, q_N$  ruhen an den Orten  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ . Nun bringen wir eine Testladung  $q$  am Ort  $\mathbf{r}$  mit ein.



Kraft von  $q_1, q_2$  auf  $q$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \sum_{j=1}^N q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Somit ist das elektrische Feld:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3}$$

**Bemerkung**

i) Testladung klein (formal:  $\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q}$ )

ii) math.  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  Vektorpfeil

$$\text{kartesisch: } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} E_x(\mathbf{r}) \\ E_y(\mathbf{r}) \\ E_z(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

iii) Wechselwirkungsprozess: 2 Teile

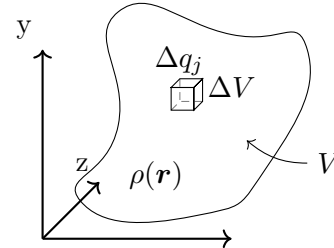
$$q_j \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

iv) Superpositionsprinzip gilt

### 1.2.2 Feld einer kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3}}_{\text{schließt alle Ladungen ein}}$$

$\rho(\mathbf{r}_j) = \frac{\Delta q_j}{\Delta V_j}$



$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= k \sum_j \Delta q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \\ &= k \sum_j \Delta V_j \rho(\mathbf{r}_j) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \\ \text{mit } \Delta V_j \rightarrow 0 &\rightarrow k \int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \end{aligned}$$

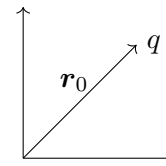
### 1.2.3 Ladungsdichte einer Punktladung

**Deltafunktion**

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

Punktladung in  $\mathbf{r}_0 \Rightarrow \rho(\mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$

Ladungsdichte divergiert in  $\mathbf{r}_0$



$$\rho(\mathbf{r}_0) = \infty$$

Modell für Punktladung:

Ladung  $q$  in Kugel mit Radius  $\epsilon$  um  $\mathbf{r}_0$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\rho_2(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{q}{v_k} & |\mathbf{r}| \leq \epsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi\epsilon^3} \underbrace{\Theta(\epsilon - |\mathbf{r}|)}_{\text{Stufenfunktion}}$$

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \rho_\epsilon(\mathbf{r}) = \begin{cases} \infty & \mathbf{r} = 0 \\ 0 & \mathbf{r} \neq 0 \end{cases}$$

Divergenz muss so sein, dass

$$\int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) = q$$

$\mathbf{r}_0 \in V$



## Definition Delta-Funktion (Diracsche Deltafunktion)

1.

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \\ \infty & \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \end{cases}$$

2.

$$\int_V d^3r f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{cases} f(\mathbf{r}_0) & \mathbf{r}_0 \in V \\ 0 & \mathbf{r}_0 \notin V \end{cases}$$

## Mathematik

Distribution - Funktional

Funktional: Abb. Funktionen  $\mapsto \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$\delta_{\mathbf{r}_0} : f \mapsto f(\mathbf{r}_0)$$

## Physik

$$\int d^3r f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = f(\mathbf{r}_0)$$

$\delta$ -Fkt. als Grenzwert einer Folge von Funktionen im Integral

$$\int d^3r f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int d^3r f(\mathbf{r}) g_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

mit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \\ \infty & \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \end{cases}$$

$$\int_V d^3r g_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 1$$

Beispiel:  $g_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{\Theta(\varepsilon - |\mathbf{r}|)}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3}$

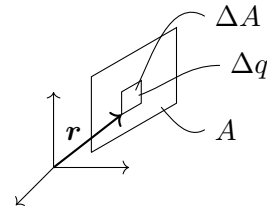
Mehrere Punktladungen  $q_j$  in  $\mathbf{r}_j$

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_j q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3r' \sum_j q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_j q_j \int_V d^3r' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_j q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \quad \checkmark \end{aligned}$$

### 1.2.4 Flächenladungsdichte

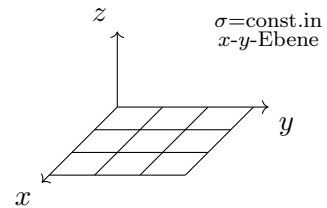
$$\sigma(\mathbf{r}) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}} = \frac{\Delta q}{\Delta A}$$



erzeugtes elektrisches Feld:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \underbrace{df'}_{\text{Flächenelement}} \sigma(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Beispiel: Elektrisches Feld einer homogenen Flächenladung



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \sigma \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad \mathbf{r}' = (x', y', 0)$$

Symmetrie:  $\mathbf{E}$  unabhängig von  $x, y$       $\mathbf{r} = (0, 0, z)$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (-x', -y', z), \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3 = (x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}$$

$$E_x \sim \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \frac{(-x')}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}} = 0 = E_y$$

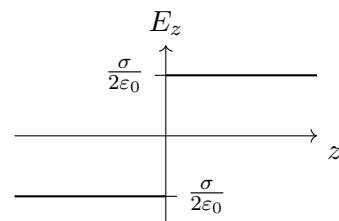
$$\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$$

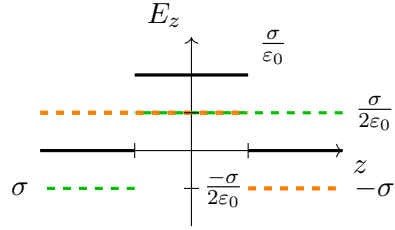
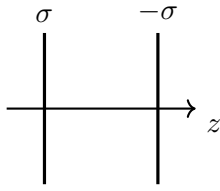
$$\begin{aligned} E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma_z \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dy' \frac{(x')}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}}}_{\frac{1}{x'^2 + z^2} \frac{y'}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{x'^2 + z^2} \frac{\text{sgn}(y')}{\sqrt{1 + \frac{x'^2 + z^2}{y'^2}}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{x'^2 + z^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sigma_z \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{1}{x'^2 + z^2}}_{\frac{1}{z} \arctan\left(\frac{x'}{z}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{z} \text{sgn}(z) \pi} \\ E_z &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sgn}(z) \end{aligned}$$

Grenzfläche:  $z \rightarrow 0$

$$\mathbf{E} \xrightarrow{z \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_z & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_z & z < 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{E}_{\perp+} - \mathbf{E}_{\perp-} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \mathbf{E}_{\parallel} = 0$$

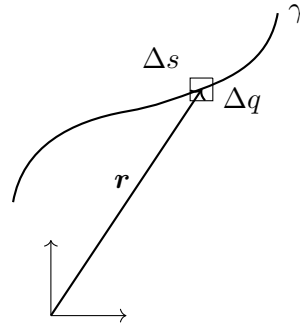




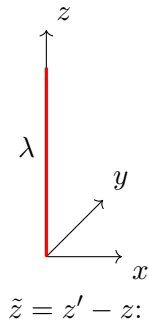
### 1.2.5 Linienladungsdichte

$$\lambda(\mathbf{r}) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Länge}} = \frac{\Delta q}{\Delta s}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_{\gamma} ds' \lambda(\mathbf{r}')}_{\text{Linienintegral}} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$



Beispiel: Elektrisches Feld einer homogenen Linienladung  $\lambda = \text{const.}$



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\gamma} ds' \lambda \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad \gamma : z' \mapsto \mathbf{r}'(z') = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\mathbf{r} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z' \end{pmatrix}}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

$$E_x = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{z} \frac{1}{(x^2 + y^2 + \tilde{z}^2)^{3/2}}}_{\frac{2}{x^2 + y^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{z - z'}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = 0$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_{\rho}, \quad \mathbf{e}_{\rho} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 1.3 Feldgleichungen und elektrostatische Potential

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

### 1.3.1 Elektrostatisches Potential

elektrische Feld ist ein Potentialfeld  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) = -\left(\mathbf{e}_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}} = \frac{-(-\frac{1}{2})}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \frac{2(x-x')}{1} = \frac{(x-x')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \left( -\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \nabla_F \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

→ elektrostatisches Potential

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + c$$

übliche Konvention:  $c = 0$  ( $\phi(\mathbf{r}) \mid |\mathbf{r}| \xrightarrow{\infty} 0$ )

Potential einer Punktladung in  $\mathbf{r}_0$ :

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}$$

(Funktional-Analysis Siegfried Großmann Springer)

(Landau-Lipschitz Buch geht weit der Vorlesung hinaus)

### 1.3.2 Feldgleichung (differentielle Form)

Rotation (Wirbel)

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{e}_x \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \Rightarrow \nabla \times \\ &\Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times (\nabla\phi) = 0 \end{aligned}$$

Mathe: Es sind äquivalent

i  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$

ii  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  (auf einfach zusammenhängendem Gebiet)

iii Kurvenintegral  $\int_{\gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$  ist Wegunabhängig

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dt \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \nabla\phi(\mathbf{r}(t))}_{\frac{d\phi}{dt}} = \underbrace{(\phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1))}_{\text{Potentialdifferenz}}$$

### 1.3.3 Divergenz (Quellen)

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \end{aligned}$$

$x$ -Anteil:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x - x'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} &= \frac{1 \cdot [\dots]^{3/2} (x - x') (x - x')^{3/2} \cdot 2 [\dots]^{1/2}}{[\dots]^3} \\ &= \frac{[\dots]^{1/2} ((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 - 3(x - x')^2)}{[\dots]^{3/2}} \\ &= \frac{(y - y')^2 + (z - z')^2 - 2(x - x')^2}{[\dots]^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{y - y'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \frac{(x - x')^2 + (z - z')^2 - 2(y - y')^2}{[\dots]^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{z - z'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2 - 2(z - z')^2}{[\dots]^{3/2}}$$

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 0 \quad \text{falls} \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$$

$\Rightarrow$  falls  $\mathbf{r} \notin V$ , d.h.  $\mathbf{r}$  in Gebiet ohne Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{r}) = 0$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

$\mathbf{r} \in V$ : Grenzwertbetrachtung (Regularisierung des Integranden)  
statt

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

betrachten wir:

$$f_a(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 + a^2]^{3/2}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + a^2]^{3/2}} \quad a \in \mathbb{R}, a > 0$$

am Ende Grenzwert  $\lim_{a \rightarrow 0}$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{a \rightarrow 0} \int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}') \quad \boxed{\nabla_{\mathbf{r}} \cdot f_a(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x - x'}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + a^2]^{3/2}} &= \frac{[\dots + a^2]^{3/2} - (x - x') \frac{3}{2} \cdot 2(x - x') [\dots + a^2]^{1/2}}{[\dots + a^2]^3} \\ &= \frac{(y - y')^2 + (z - z')^2 + a^2 - 2(x - x')^2}{[\dots + a^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot f_a(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{3a^2}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + a^2]^{5/2}}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} f_a(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \\ \infty & \mathbf{r} = \mathbf{r}' \end{cases}$$

$\Rightarrow$  zum Integral  $\int_V d^3r' \dots$  trägt (in Limes  $a \rightarrow 0$ ) nur der Bereich  $\mathbf{r}' \approx \mathbf{r}$  bei

$$K_R(\mathbf{r}) = \{\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \leq R\}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{a \rightarrow 0} \int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}} \cdot f_a(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{K_R(\mathbf{r})} d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{3a^2}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + a^2]^{5/2}} \\ &+ \underbrace{\lim_{a \rightarrow 0} \int_{V/K_R(\mathbf{r})} d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{3a^2}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + a^2]^{5/2}}}_{=0} \end{aligned}$$

Wähle  $R$  klein genug, dass man innerhalb  $K_R(\mathbf{r})$   $\rho(\mathbf{r}')$  in Taylorreihe um  $\mathbf{r}$  entwickeln kann.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}} &= \mathbf{r}' - \mathbf{r}, \quad d^3r' = d^3\tilde{\mathbf{r}} \\ \int_{K_R(\mathbf{r})} d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{3a^2}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + a^2]^{5/2}} &= \int_{K_R(0)} d^3\tilde{\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r} + \tilde{\mathbf{r}}) \frac{3a^2}{[\tilde{\mathbf{r}}^2 + a^2]^{5/2}} \end{aligned}$$

Taylorentwicklung von  $\rho(\mathbf{r} + \tilde{\mathbf{r}})$  zum  $\tilde{\mathbf{r}} = 0$

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r} + \tilde{\mathbf{r}}) &= \rho(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{r}} \cdot \nabla \rho(\mathbf{r}) + \dots \\ &= \int_{K_R(0)} d^3\tilde{\mathbf{r}} (\rho(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{r}} \cdot \nabla \rho(\mathbf{r}) + \dots) \frac{3a^2}{[\tilde{\mathbf{r}}^2 + a^2]^{5/2}} \end{aligned}$$

1. Integral:

$$\begin{aligned} \int_{K_R(0)} d^3\tilde{\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) \frac{3a^2}{(\tilde{\mathbf{r}}^2 + a^2)^{5/2}} &= \rho(\mathbf{r}) \underbrace{\int_0^R d\tilde{r} \frac{3a^2}{(\tilde{r}^2 + a^2)^{5/2}}}_{\left[ \frac{\tilde{r}^3}{(\tilde{r}^2 + a^2)^{3/2}} \right]_0^R} \underbrace{\int d\Omega}_{\overset{\sin \theta d\theta d\varphi}{=} 4\pi} \\ &= 4\pi \rho(\mathbf{r}) \frac{R^3}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 4\pi \rho(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

2. Integral:

$$\begin{aligned} \int_{K_R(0)} d^3\tilde{\mathbf{r}} \underbrace{\tilde{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r})}_{\parallel \tilde{\mathbf{r}} \mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{r}}}} \frac{3a^2}{(\tilde{\mathbf{r}}^2 + a^2)^{5/2}} &= \int_0^R d\tilde{r} \underbrace{\frac{3a^2 \tilde{r}^3}{(\tilde{r}^2 + a^2)^{3/2}}}_{\frac{2}{3}a - 3a^2 \left( \frac{R^2 + \frac{2}{3}a^2}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \right)} \underbrace{\int d\Omega \mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{r}}} \cdot \nabla \rho(\mathbf{r})}_{\text{unabh. von } a} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

gilt auch für alle höheren Terme

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_V d^3 r' \rho(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + a^2]^{3/2}} = 4\pi \rho(\mathbf{r})$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{''}{a^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r})$$

$$\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$$

### 1.3.4 Zusammenfassung:

#### Feldgleichungen der Elektrostatik

Mathe: partielle DGL

$$\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \text{ inhomogene DGL}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \text{ homogene DGL}$$

DGL für Potential  $\phi$ :  $\mathbf{E} = -\nabla \phi$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \nabla \cdot (-\nabla \phi) = -\nabla \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \phi \\ \partial_y \phi \\ \partial_z \phi \end{pmatrix} \\ &= -\underbrace{\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)}_{=:\Delta \phi} \end{aligned}$$

Partielle DGL 2. Ordnung:

#### Poissonsgleichung

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r})$$

für Gebiete mit  $\rho(\mathbf{r}) = 0$ :

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{Laplacegleichung}$$

#### Darstellung der Deltafunktion:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \underbrace{\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + a^2]^{3/2}}}_{\frac{3a^2}{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + a^2]^{5/2}} =: g_a(\mathbf{r}' - \mathbf{r})} = 4\pi \rho(\mathbf{r})$$

$\frac{1}{4\pi} g_a$  liefert Grenzwertdarstellung der  $\delta$ -funktion.

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{4\pi} g_a(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} g_a(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \\ \infty & \mathbf{r} = \mathbf{r}' \end{cases}$$

$$\delta(\mathbf{r}) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\stackrel{\text{formal}}{=} \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \underbrace{\frac{\mathbf{r}}{r^3}}_{=-\nabla \frac{1}{r}} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \left( \nabla \frac{1}{r} \right) = \frac{-1}{4\pi} \Delta \frac{1}{r} \Rightarrow \Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\mathbf{r})$$

z.B. Potential einer Punktladung  $\rho$  q in  $\mathbf{r}_0$ :

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \underbrace{\Delta_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}}_{=-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)} = -\frac{1}{\epsilon_0} \underbrace{q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}_{=\rho(\mathbf{r})} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r})$$

### Wiederholung

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla \Phi$$

$$\Rightarrow \Delta \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r})$$

### 1.3.5 Integralsätze der Vektoranalysis

#### 1) Gaußscher Satz:

Sei  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  ein Vektorfeld im Volumen  $V \subset \mathbb{R}^3$ , so gilt:

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

$\partial V$  Rand von  $V$

$$d\mathbf{f} = \mathbf{n} df$$

↓  
nach aussen orientierter Normaleneinheitsvektor

*Bemerkung:*

i) Analogie 1D: Fundamentalsatz der Integralrechnung:

$$\int_a^b dx \frac{df}{dx} = f(b) - f(a)$$



ii) Geometrische / physikalische Integration:

Fluss des Vektorfeldes  $\mathbf{A}$  durch  $\partial V$

$$\int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{A}$$

Integral über die Quellen von  $\mathbf{A}$

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \text{const.} \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

*Beispiel:* Geschwindigkeit einer Flüssigkeit:  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{v} = \text{const.} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = 0$$

$\Rightarrow$  Es gibt keine Quellen von  $\mathbf{v}$

$$\nabla \cdot \mathbf{r} \neq 0 \quad \int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \neq 0$$

iii)

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_0^{\Delta x} dx \int_0^{\Delta y} dy \int_0^{\Delta z} dz \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\Delta z} dz \int_0^{\Delta y} dy \underbrace{\int_0^{\Delta x} dx \frac{\partial A_x}{\partial x}}_{A_x(\Delta x, y, z) - A_x(0, y, z)} \\ &= \int_0^{\Delta z} dz \int_0^{\Delta y} dy A_x(\Delta x, y, z) - \int_0^{\Delta z} dz \int_0^{\Delta y} dy A_x(0, y, z) \\ &= \int_{F_A^+} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{A} + \int_{F_A^-} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{A} \end{aligned}$$

$$F_x^+ : d\mathbf{f} = \mathbf{e}_x dy dz \quad F_x^- : d\mathbf{f} = -\mathbf{e}_x dy dz$$

ebenso gilt dann für die anderen Koordinaten:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\Delta x} dx \int_0^{\Delta z} dz \int_0^{\Delta y} dy \frac{\partial A_y}{\partial y} = \int_{F_y^+} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{A} + \int_{F_y^-} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{A} \\ & \int_0^{\Delta x} dx \int_0^{\Delta y} dy \int_0^{\Delta z} dz \frac{\partial A_z}{\partial z} = \int_{F_z^+} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{A} + \int_{F_z^-} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{A} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{A} = \int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{A}$$

## 2) Stokescher Satz

Sei  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  ein Vektorfeld,  $F$  eine Fläche mit Randkurve  $\partial F$ , so gilt:

$$\int_{\text{Linienintegral} \rightarrow \partial F} d\mathbf{r} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_{F \leftarrow \text{Oberflächenint.}} d\mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}))$$

$$d\mathbf{f} = \mathbf{n} df$$

Richtung von  $d\mathbf{f}$  und Umlauf sinn von  $\partial F$ : rechte Hand Regel.

*Beispiel:*

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+1 \end{pmatrix} = 2\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{r}(\varphi) = R \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = R \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial F} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}(\varphi)) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi R(+\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = 2\pi R^2 \end{aligned}$$

$$\int_F d\mathbf{f} \cdot \overbrace{(\nabla \times \mathbf{A})}^{2\mathbf{e}_z} = 2\pi R^2$$

Vektorfeld ohne Wirbel z.B.  $\mathbf{A} = \text{const.}$

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0$$

*Bemerkung:*

### 1.3.6 Integrale Form der Feldgleichung

#### 1.3.7 Gaußsches Gesetz

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{aligned} \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_V \\ &= \int_V d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

$$\int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} Q_V$$

## Berechnung elektrischer Felder für hochsymmetrische Ladungsverteilungen

*Beispiel:*

Homogen geladene Kugel mit Radius  $R$  und Gesamtladung  $Q$ . Damit ist die Ladungsdichte innerhalb der Kugel:

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_r(r)\mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{r} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Fluss von  $\mathbf{E}$  durch Oberfläche einer Kugel mit Radius  $r$

$$d\mathbf{f} = \mathbf{e}_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \Rightarrow d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E} = E_r(r) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_r(0)} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E} &= \int_0^T d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi E_r(r) r^2 \sin \theta \\ &= E_r(r) r^2 4\pi \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{K_r(0)} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{K_r(0)} d^3r \rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{cases} Q & r > R \\ Q \frac{r^3}{R^3} & r \leq R \end{cases} \\ \Rightarrow E_r(r) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{r^2} & r > R \\ \frac{r}{R^3} & r \leq R \end{cases} \end{aligned}$$

### 1.3.8 Satz von Stokes

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

**Definition:**  $\gamma = \partial F$

$\int_\gamma$  ist dann ein Linienintegral über eine geschlossene Kurve

$$\int_\gamma d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = \int_F d\mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0$$

### 1.3.9 Zusammenfassung: Feldgleichungen der Elektrostatik

**differentielle Darstellung:**

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi \quad \rightarrow \quad \Delta \Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

**Integral Darstellung:**

$$\int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_V \quad , \quad \oint_\gamma d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = 0$$

## 1.4 Elektrostatistische Energie

potentielle Energie einer Punktladung im äußeren elektrischen Feld  
Kraft auf Ladung  $q$ :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

Die Arbeit bei Verschiebung der Ladung von  $\mathbf{a}$  nach  $\mathbf{b}$

$$\begin{aligned} W &= - \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = -q \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= q \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} d\mathbf{r} \cdot \nabla \Phi = q \underbrace{(\Phi(\mathbf{b}) - \Phi(\mathbf{a}))}_{\text{Potentialdifferenz}} \end{aligned}$$

Die Arbeit um  $q$  aus dem unendlichen  $\infty$  nach  $\mathbf{r}$  zu bringen ist dann:

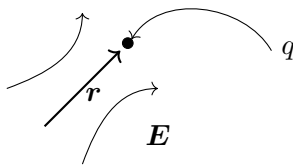
$$W = q(\Phi(\mathbf{r}) - \Phi(\infty))$$

Zur Referenz:  $\Phi(\infty) = 0$

Damit ist die Energie der Ladung  $q$  im äußeren Feld:

$$\Rightarrow W = q(\Phi(\mathbf{r}))$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi$$



### 1.4.1 Elektrostatistische Potentielle Energie

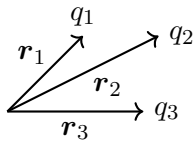
Energie einer Verteilung von Punktladungen

$N$  Ladungen  $q_i$  an Orten  $\mathbf{r}_i$

Zunächst:  $\underbrace{i-1}_{\text{erzeugen am Ort } \mathbf{r}_i}$  Ladungen  $q_j$  bei  $\mathbf{r}_j$

Das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}$$



Arbeit um  $i$ -te Ladung aus dem unendlichen nach  $\mathbf{r}$  zu bringen:

$$W_i = q_i \Phi(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Somit ergibt sich die gesamte Arbeit für  $N$  Ladungen als:

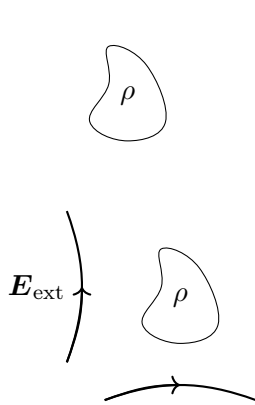
$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=2}^N W_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \underbrace{\left( \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} \right)}_{\Phi_{\neq}(\mathbf{r}_i)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi_{\neq}(\mathbf{r}_i)$$

**Energie einer kontinuierlichen lokalisierten Ladungsverteilung**



$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}}_{\Phi(\mathbf{r})}$$

$$W_{\text{ext}} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r})$$

**Energie  $W$  durch  $E$  ausdrücken:**

$$\Delta\Phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad \Rightarrow \quad W = -\frac{1}{2} \int d^3r \epsilon_0 \underbrace{\Delta\Phi(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})}_{\substack{\nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) - (\nabla \Phi)^2 \\ \parallel \\ \mathbf{E}}}$$

$$= -\frac{\epsilon_0}{2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi)} + \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R(0)} d^3r \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial K_R(0)} \underbrace{d\mathbf{f} \cdot (\Phi \nabla \Phi)}_{\substack{R \rightarrow \infty \frac{1}{R^3} \\ \sim \frac{1}{R}}} = 0$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Zur Umformung oben wurde benutzt:

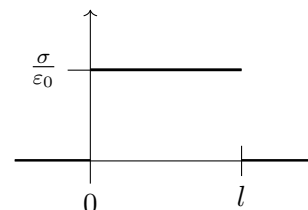
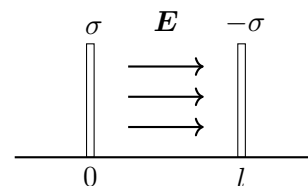
$$\Phi \stackrel{R \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{R} \quad \nabla \Phi \sim \frac{1}{R^2} \quad d\mathbf{f} = \underbrace{\mathbf{n}}_{\sim R^2} df$$

Damit ergibt sich für die Energie einer Verteilung von Punktladungen

$$\Rightarrow \quad W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \, \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \quad \text{nicht für Punktladungen}$$

Energiedichte des elektrostatischen Feldes

$$w(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2(\mathbf{r})$$



### Beispiel: Plattenkondensator

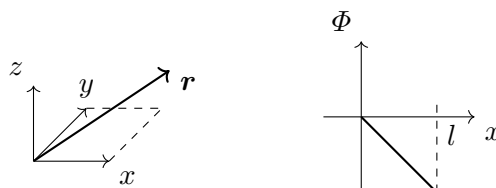
Fläche  $F$ , Ladung  $\rightarrow r = \frac{q}{F} \rightarrow \mathbf{E} = \frac{r}{\varepsilon_0} \mathbf{e}_x$

$\rightarrow$  Die Energiedichte ist:  $w = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$  (nicht für Punktladungen)

$\rightarrow$  Die Energie beträgt:  $W = \int d^3r w(\mathbf{r}) = l \cdot F \cdot \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

### Potentialdifferenz - Spannung

$$\Phi(\mathbf{r}) - \Phi(0) = - \int_0^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') = - \int_0^x dx' \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} x$$



Die Spannung zwischen zwei Kondensatorplatten ist dann:

$$U = \Phi(0) - \Phi(l) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} l = \frac{q}{\varepsilon_0 F} l$$

Die Kapazität ist also:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0 F}{l}$$

Was ist die Energie bei einer Verteilung von Punktladungen und bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung. Bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung haben wir herausgefunden:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad \text{für Punktladungen}$$

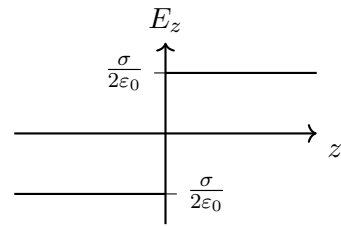
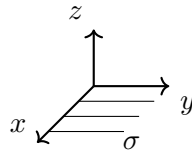
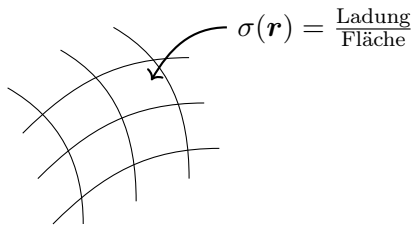
Die Energie der Punktladung selbst steckt hier nicht drinnen. Man muss dabei aufpassen, welche Gleichung man für welches Modell benutzt.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \int d^3r \, \mathbf{E}^2 = \int d^3r \, \frac{1}{r^4} = \infty$$

## 1.5 Verhalten des el. Feldes an Grenzflächen mit Flächenladung

$\rightarrow$  Diskontinuitäten von  $\mathbf{E}$

Beispiel: Wir betrachten eine homogene Flächenladung.



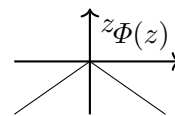
$$\Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sgn}(z) \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{E}_\perp = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{E}_\parallel = 0$$

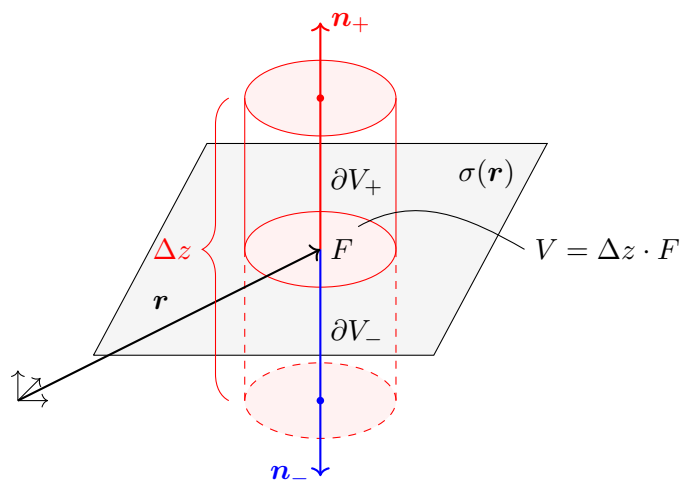
Das elektrische Feld  $\mathbf{E}_\parallel$  ist gleich der Ableitung des elektrischen Potentials:

Das elektrische Potential ist also stetig.



**Normalkomponente  $\mathbf{E}_\perp$**

Gaußscher Satz für  $V$ :



$$\begin{aligned} \int_V d^3r' \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \int_{\partial V} d\mathbf{f}' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= \int_{\text{Mantel}} d\mathbf{f}' \cdot \mathbf{E} + \int_{\partial V_+} d\mathbf{f}' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \int_{\partial V_-} d\mathbf{f}' \cdot \mathbf{E} \\ &\quad \downarrow \Delta z \rightarrow 0 \quad \downarrow \Delta z \rightarrow 0 \quad \downarrow \Delta z \rightarrow 0 \\ &\quad 0 \quad \int_F d\mathbf{f}' \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_+ \quad - \int_F d\mathbf{f}' \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_- \end{aligned}$$

$\mathbf{E}_\pm$  ist das Feld auf beiden Seiten der Grenzfläche

$$\int_{\partial V} d\mathbf{f}' \cdot \mathbf{E} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} \int_F d\mathbf{f}' \cdot \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) \xrightarrow{F \rightarrow 0} F \cdot \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_+(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_-(\mathbf{r}))$$

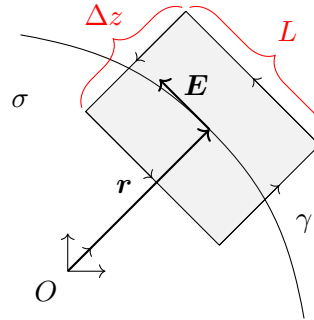
$$\int_V d^2r' \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_F d\mathbf{f}' \sigma(\mathbf{r}') \xrightarrow{F \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon_0} F \sigma(\mathbf{r})$$

$$\Rightarrow \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_+(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_-(\mathbf{r})) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\mathbf{r})$$

$$E_{\perp\pm} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_\pm \quad E_{\perp+}(\mathbf{r}) - E_{\perp-}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\mathbf{r})$$

## Tangentialkomponente $E_{\parallel}$

Satz von Stokes:



$$0 = \oint_{\gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') = \underbrace{\int \dots + \int \dots}_{=0 \text{ für } \Delta z \rightarrow 0} + \underbrace{\int d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{E}_+ + \int d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{E}_-}_{\int d\mathbf{r}' \cdot (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-)}$$

$$0 = \oint_{\gamma} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{E} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} \int_{-\frac{L}{2}}^{-\frac{L}{2}} d\mathbf{s} \cdot (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) \xrightarrow{L \rightarrow 0} L \mathbf{t} \cdot (\mathbf{E}_+(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_-(\mathbf{r})) = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{t} \cdot (\mathbf{E}_+(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_-(\mathbf{r})) = 0$$

→ Die Tangentialkomponente ist stetig

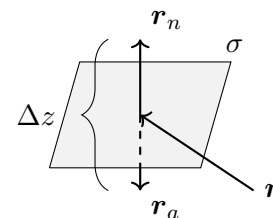
$$E_{\parallel+} = E_{\parallel-}$$

Insgesamt ergibt sich damit:

$$\mathbf{E}_+(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_-(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{n}$$

Das elektrische Potential  $\Phi$  ist damit stetig.

$$\underbrace{\Phi(\mathbf{r}_b) - \Phi(\mathbf{r}_a)}_{\Phi_+(\mathbf{r}) - \Phi_-(\mathbf{r})} = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{E} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0$$



### 1.5.1 Randbedingungen an el. Leitern

Leiter: Material mit freibeweglichen Ladungsträgern (Metall)

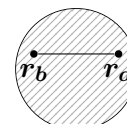
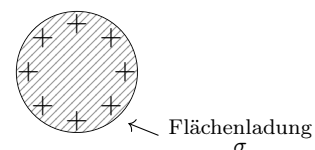
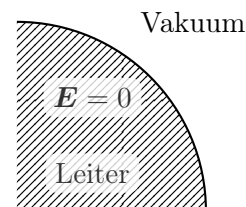
Eigenschaften von  $\mathbf{E}$  im Leiter:

i)  $\mathbf{E} = 0$

ii)  $0 = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad \rho(\mathbf{r}) = 0$

iii) Nettoladung befinden sich an Oberfläche

iv) Potential  $\Phi(\mathbf{r}_b) - \Phi(\mathbf{r}_a) = 0 \rightarrow \Phi(\mathbf{r}) = \text{const.}$





## Randbedingungen

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_- &= \frac{\sigma^-}{\varepsilon_0} \mathbf{n} \\ \mathbf{E}_- &= 0 \\ \rightarrow \mathbf{E}_+(\mathbf{r}) &= \frac{\sigma(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \mathbf{n}(\mathbf{r})\end{aligned}$$

[Folie: Ladung an Oberfläche eines Leiters]

## 1.6 Randwertprobleme (RWP) der Elektrostatik und Lösungsmethoden

### 1.6.1 Formulierung des Randwertproblems

Das elektrische Potential:  $\Phi(\mathbf{r})$  :  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}) \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

Für eine gegebene lokale Ladungsverteilung  $\rho$  gilt:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \rightarrow \Phi(\mathbf{r}) &\xrightarrow{|\mathbf{r}| \rightarrow 0} 0\end{aligned}$$

Typische Problemstellung:

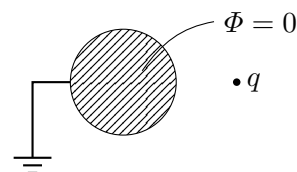
Ladungsverteilung  $\rho$  + Werte des Potentials auf Randfläche

*Beispiel:*

Randwertproblem: Gegeben:  $\rho(\mathbf{r}')$  im Raumbereich  $V$

$\Phi(\mathbf{r})$  oder  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  auf Randfläche  $\partial V$

Gesucht:  $\Phi(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  überall in  $V$

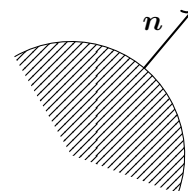


Zwei Fälle:

- i)  $\Phi(\mathbf{r})$  ist auf der Randfläche gegeben  
 $\rightarrow$  **Dirichlet-Randbedingung**
- ii)  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  ist auf der Randfläche gegeben  
 $\rightarrow$  **Neumannsche Randbedingung**

Gegeben sei:  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$  dies ist gleich der **Normalenableitung**:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial n}$$



Wir beschränken uns vorwiegend auf den ersten Fall. Zur Lösung dieser Probleme gibt es einige Methoden. Zum Einstieg und zur Wiederholung betrachten wir zunächst die Methode der Spiegelladung.

## 1.6.2 Methode der Bildladung (Spiegelladung)

### Punktladung vor leitender, geerdeter Metallplatte

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}) = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

$$\mathbf{r} \in V \quad \mathbf{r}_0 = (d, 0, 0) \quad V = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, x > 0\}$$

Randbedingungen:

$$\Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{r} \in \partial V, \quad \text{d.h.} \quad \mathbf{r} = (0, y, z)$$

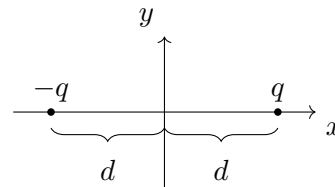
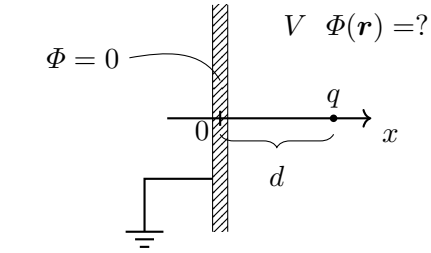
**Idee:** Ersetze ursprüngliche Problem durch "Fiktives" Problem mit zusätzlichen Ladungen außerhalb von  $V$ , welche die Randbedingungen simulieren.

Potential der Punktladungen in  $\mathbf{r}_0$ :

$$\Phi_q(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

addiere Ladung  $-q$  in  $\mathbf{r}'_0 = (-d, 0, 0) = -\mathbf{r}_0$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{q}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|} \right)$$



Schauen wir nun nach ob dies die Poisson-Gleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \underbrace{\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}}_{=-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)} - \underbrace{\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|}}_{=-4\pi\delta(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)} \right) \\ &= -\frac{q}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \frac{q}{\varepsilon_0} \underbrace{\delta(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)}_{=0 \text{ für } \mathbf{r} \neq -\mathbf{r}_0} \quad \checkmark \quad \forall \mathbf{r} \in V \end{aligned}$$

### Diskussion der Lösung

#### i) Struktur

$$\Phi(\mathbf{r}) = \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}}_{=: \Phi_s(\mathbf{r})} + \underbrace{\frac{(-q)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|}}_{=: \Phi_{\text{hom}}(\mathbf{r})}$$

$$\mathbf{r} \in V$$

$$\Delta\Phi_s(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}) \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

$$\Delta\Phi_{\text{hom}}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{Laplace-Gleichung}$$

Mathematisch: Lösung inhomogener DGL

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_s(\mathbf{r}) + \Phi_{\text{hom}}(\mathbf{r})$$

$\Phi_{\text{hom}}$  wird so gewählt, dass die Randbedingungen erfüllt werden:

$$\mathbf{r} \in \partial V : \quad \Phi_o(\mathbf{r}) = \Phi_s(\mathbf{r}) + \Phi_{\text{hom}}(\mathbf{r})$$

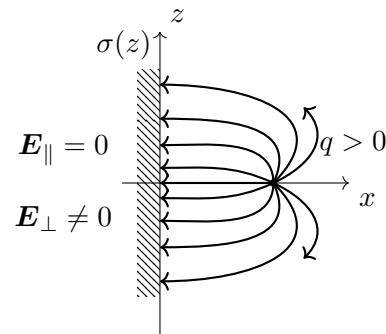
#### ii) Elektrisches Feld

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{(x-d, y, z)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{(x+d, y, z)}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|^3} \right)$$

An der Oberfläche  $x \rightarrow 0, x \geq 0$   
 $|\mathbf{r} \pm \mathbf{r}_0|^3 \rightarrow (d^2 + y^2 + z^2)$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r} \in \partial V} = -\frac{qd}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_x$$

Durch das externe elektrische Feld verschieben sich die Ladungsträger im Metall und es entsteht eine Influenzladung an der Oberfläche.



### iii) Influenzladung auf Metalloberfläche

$$\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n} \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_x$$

$$\parallel$$

$$0$$

$\mathbf{r} \in \partial V$ :

$$\sigma(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}_+(\mathbf{r}) = -\frac{qd}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

gesamte influenzierte Ladung

$$q_i = \int_{\partial V} df \sigma(\mathbf{r}) = \dots = -q$$

### iv) Kraft zwischen Punktladungen und Metallplatte

$$\mathbf{F} = q\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0) = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0(2d)^2} \mathbf{e}_x$$

## Eindeutigkeit der Lösung des Randwertproblems

Dirichlet-Randwertproblem:

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in V$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \partial V$$

Annahme:  $\Phi_1, \Phi_2$  lösen RWP

$$\text{d.h.} \quad \Delta\Phi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r}) = \Delta\Phi_2(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in V$$

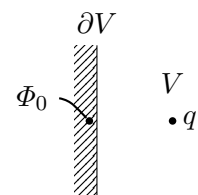
$$\Phi_1(\mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r}) = \Phi_2(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \partial V$$

Setze :

$$(\mathbf{r}) := \Phi_1(\mathbf{r}) - \Phi_2(\mathbf{r})$$

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{r} \in V$$

$$\mathbf{r} \in \partial V \quad \Psi(\mathbf{r}) = \Phi_1(\mathbf{r}) - \Phi_2(\mathbf{r}) = 0$$



### Greensche Identität:

$g, h$  Funktionen an  $V$ :

$$\begin{aligned} & \int_V d^3r [(\nabla(\mathbf{r})) \cdot (\nabla h(\mathbf{r})) + g(\mathbf{r})\Delta h(\mathbf{r})] \\ &= \int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot (g(\mathbf{r})\nabla h(\mathbf{r})) \\ &= \int_{\partial V} d\mathbf{f} g(\mathbf{r}) \underbrace{\mathbf{n} \cdot \nabla h(\mathbf{r})}_{=\frac{\partial h}{\partial n}(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

$$h = g = \Psi$$

$$\Rightarrow \int_V d^3r ((\nabla\Psi)^2 + \Psi(\mathbf{r}) \underbrace{\Delta\Psi(\mathbf{r})}_{=0}) = \int_{\partial V} d\mathbf{f} \underbrace{\Psi(\mathbf{r})}_{=0} \frac{\partial\Psi(\mathbf{r})}{\partial n}$$

$$\Rightarrow \int_V d^3r (\nabla\Psi(\mathbf{r}))^2 = 0 \Rightarrow \nabla\Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{r} \in V$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \text{const.} \quad \Psi(\mathbf{r}) = 0 \text{ in } V \Rightarrow \Phi_1(\mathbf{r}) = \Phi_2(\mathbf{r})$$

### 1.6.3 Formale Lösungen des elektrostatischen Randwertproblems mit Greenschen Funktionen (GF)

GF: generelle Methode um inhomogene DGL zu lösen

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r})$$

Greensche Funktionen der Poisson-Gleichung:  $\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  mit

#### Greensche Funktionen der Poisson-Gleichung

$$\Delta_{\mathbf{r}}\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Diese Gleichung geht von einer Punktladung mit  $q = 1$  aus, ist hier aber zunächst einmal eine Definition.

$\mathcal{G}$  bekannt

$$\rightarrow \Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')$$

$$\Delta_{\mathbf{r}}\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \underbrace{(\Delta_{\mathbf{r}}\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))}_{=\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \rho(\mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}) \quad \checkmark$$

$$\Delta_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\rightarrow \Delta_{\mathbf{r}}\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) \xrightarrow{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} 0$$

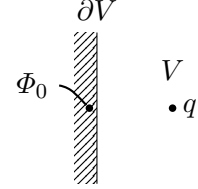
$$\rightarrow \Delta_{\mathbf{r}} \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \xrightarrow{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} 0$$

**Dirichlet-Randwertproblem**

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in V$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \partial V$$



**Green'sche Funktionen (GF):**

$$\Delta_{\mathbf{r}} \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in V$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{r} \in \partial V \quad \mathbf{r}' \in V$$

Hiermit haben wir das Grenzwertproblem auf eine Integration zurückgeführt. Dies werden wir nun beweisen:

**Beiweis:**

Die 2. Greensche Identität lautet:

$$\begin{aligned} & \int_V d^3 r' (g(\mathbf{r}') \Delta_{\mathbf{r}'} h(\mathbf{r}') - h(\mathbf{r}') \Delta_{\mathbf{r}'} g(\mathbf{r}')) \\ &= \int_{\partial V} d\mathbf{f}' \cdot (g(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} h(\mathbf{r}') - h(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} g(\mathbf{r}')) \\ & \quad g(\mathbf{r}') := \Phi(\mathbf{r}') \quad h(\mathbf{r}') := \mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \\ & \Rightarrow \int_V d^3 r' \left[ \underbrace{\Phi(\mathbf{r}') \Delta_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r})}_{= -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})} - \underbrace{\mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \Delta_{\mathbf{r}'} \Phi(\mathbf{r}')}_{= -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}')} \right] \\ &= \int_{\partial V} d\mathbf{f}' \left[ \underbrace{\Phi(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r})}_{=\Phi_0(\mathbf{r}')} - \underbrace{\mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}'} \Phi(\mathbf{r}')}_{=0} \right] \\ & \Rightarrow = -\frac{1}{\varepsilon_0} \Phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3 r' \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}) \\ &= \int_{\partial V} d\mathbf{f}' \Phi_0(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &= \int_{\partial V} d\mathbf{f}' \Phi_0(\mathbf{r}') \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ & \Rightarrow \Phi(\mathbf{r}) = \int_V d^3 r' \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') - \varepsilon_0 \int_{\partial V} d\mathbf{f}' \Phi_0(\mathbf{r}') \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{aligned}$$

Es gilt (HA):

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad \text{Reziprozität}$$

$$\rightarrow \nabla_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$$

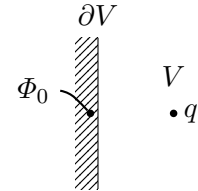
$$\Delta_{\mathbf{r}} \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Delta_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

## Potential bei Randwertproblem

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V d^3r' \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') - \varepsilon_0 \int_{\partial V} df' \Phi_0(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (1)$$

## Wiederholung

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in V \\ \Phi(\mathbf{r}) &= \Phi_0(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in \partial V \end{aligned}$$



Green'sche Funktionen:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{r}} \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') & \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in V \\ \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= 0 & \text{für } \mathbf{r} \in \partial V, \mathbf{r}' \in V \end{aligned}$$

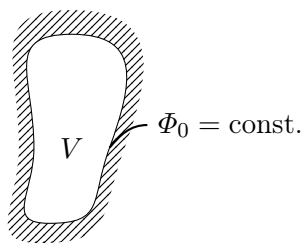
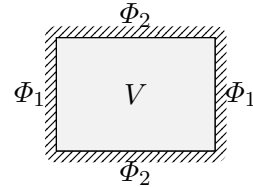
Wenn die Green'sche Funktion  $\mathcal{G}$  die Bedingungen erfüllt, können wir das Potential so schreiben wie in Gleichung (1).

Bemerkungen:

i) Spezialfälle:

1)  $V$  Ladungsfrei ( $\rho(\mathbf{r}) = 0$  in  $V$ )

$$\rightarrow \Phi(\mathbf{r}) = -\varepsilon \int_{\partial V} df' \Phi_0(\mathbf{r}') \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow \Phi(\mathbf{r}) &= -\varepsilon \Phi_0 \underbrace{\int_{\partial V} df' \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}_{\int d\mathbf{f}' \cdot \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}} \\ &= -\varepsilon \Phi_0 \int d\mathbf{f}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \mathcal{G} \\ &\stackrel{\text{S.v.G.}}{=} \int_V d^3r' \underbrace{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot (\nabla_{\mathbf{r}'} \mathcal{G})}_{\Delta_{\mathbf{r}'} \mathcal{G} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow \Phi(\mathbf{r}) &= \Phi_0 \end{aligned}$$

2)  $V = \mathbb{R}^3$ , lokalisierte Ladungsverteilung  $\rho$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \int_{\partial V} \dots \rightarrow 0$$

eine spezielle Lösung für  $\mathcal{G}$

ii)  $\mathcal{G}$  ist auch die Lösung einer inhomogenen partiellen DGL

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \underbrace{\mathcal{G}_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}_{\substack{\text{spezielle} \\ \text{Lösung der} \\ \text{inhomogenen} \\ \text{DGL}}} + \underbrace{F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}_{\substack{\text{Lösung} \\ \text{zugehörigen} \\ \text{homogenen} \\ \text{DGL}}}$$

$$\Delta_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$\Delta_{\mathbf{r}'} F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$$

$$\mathcal{G}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \text{Laplace anwenden !}$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}_{\text{immer zur Lösung}} + \underbrace{F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}_{\substack{\text{so wählen, dass} \\ \text{Randbedingungen erfüllt}}}$$

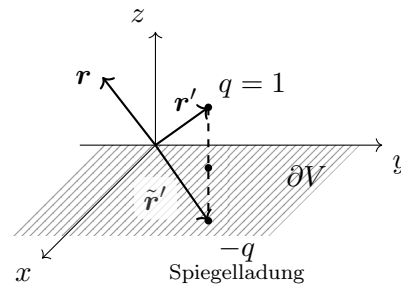
$F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  so wählen, dass die Randbedingungen erfüllt sind:  $\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad \mathbf{r} \in \partial V$ .

#### 1.6.4 Greensche Funktion des Dirichlet Randwertproblems einer Ebene

$$\Delta_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in V$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad \mathbf{r} \in \partial V \quad (z=0), \quad \mathbf{r} \in V$$

$$V = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 | z < 0\}$$



Analog: Punktladung „ $q = 1$ “ in  $\mathbf{r}'$  vor leitender Ebene mit Potential 0

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}'|} \right) \quad \tilde{\mathbf{r}}' = (x', y', -z')$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{q} \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}'|} \right)$$

*Beweis:*

$$\Delta_{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \underbrace{\Delta_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}_{-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} - \underbrace{\Delta_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}'|}}_{-4\pi\delta(\mathbf{r}-\tilde{\mathbf{r}}')=0} \right) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

1. Teil:  $\mathbf{r} \in \partial V : z = 0$ , 2. Teil = 0:  $\tilde{\mathbf{r}}' \notin V$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z')^2}} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (-z)^2}} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}'|} \end{aligned}$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad \mathbf{r} \in \partial V$$

*Bemerkung:*

$$\begin{aligned} \text{i) } \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \Delta_{\mathbf{r}} F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= 0 \end{aligned}$$

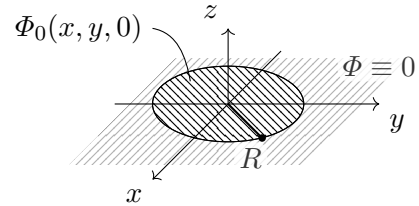
ii) Symmetrie der Greenschen Funktion (Reziprozitätsrelation):

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$$

→ formale Lösung des Randwertproblems für eine beliebige Ladungsverteilung und Randwerte  $\Phi_0(\mathbf{r})$  in der Ebene:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V d^3r' \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') - \epsilon_0 \int_{\partial V} df' \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'}$$

$$\rho \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \int_{\sqrt{x^2+y^2} \leq R} dy' dx' \Phi_0(x', y', 0) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n'}$$



### 1.6.5 Separation der Variablen und Entwicklung nach orthogonalen Funktionen

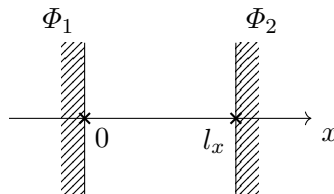
Eine allgemeine Methode zur Lösung partieller DGL.

Zur Vereinfachung: Laplace.Gl  $\Delta\Phi = 0$  + Randbedingung

Verbindung zur Poisson-Gl:  $\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r})$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_s(\mathbf{r}) + \Phi_{\text{hom}} \quad \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \Phi_{\text{hom}}$$

Motivation: 1-Dim Randwertproblem



$$\Phi(x) = ? \quad \rho = 0$$

$$\Delta\Phi(x) = \frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0$$

$$\Rightarrow \Phi(x) = c_1 + c_2 x$$

Randbedingungen:

$$\Phi(0) = c_1 = \Phi_1 \quad \Phi(l_x) = \Phi_1 + c_2 l_x = \Phi_2$$

$$\rightarrow c_2 = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l_x} \quad \rightarrow \quad \Phi(x) = \Phi_1 + \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l_x} x$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\Phi = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l_x} \mathbf{e}_x$$



## 2-Dim Randwertproblem



Wir suchen:  $\Phi = \Phi(x, y)$  mit  $\rho = 0$

$$0 = \Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$$

**Randbedingungen:**

- i)  $\Phi(\mathbf{r}) = 0$   $y = 0$
- ii)  $\Phi(\mathbf{r}) = 0$   $x = 0$
- iii)  $\Phi(\mathbf{r}) = 0$   $x = l_x$
- iv)  $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_R(x)$   $y = l_y$

**Separationsansatz:**  $\Phi(x, y) = f(x)g(y)$

$$\begin{aligned} 0 = \Delta\Phi &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x)g(y) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} g(y) + f(x) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \\ &= \Delta\Phi = \frac{d^2 f}{dx^2} g(y) + f(x) \frac{d^2 g}{dy^2} \end{aligned}$$

$$0 = \Delta\Phi = \frac{d^2 f}{dx^2} g(y) + f(x) \frac{d^2 g}{dy^2} \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{f \cdot g}$$

umformen:

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{f(x)} \frac{d^2 f}{dx^2}}_{\text{Fkt. von } x} = - \underbrace{\frac{1}{g(y)} \frac{d^2 g}{dy^2}}_{\text{Fkt. von } y} = \text{const.} = -\alpha^2$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\alpha^2 f(x) \quad \text{mit } e^{i\alpha x} \quad \frac{d^2 g}{dy^2} = \alpha^2 g(y) \quad \text{mit } e^{\alpha y}$$

$$e^{i\alpha x} \Rightarrow f(x) = a \sin(\alpha x) + b \cos(\alpha x) \quad e^{\alpha y} \Rightarrow g(y) = c \sinh(\alpha y) + d \cosh(\alpha y)$$

$$\Phi(x, y) = f(x) \cdot g(y)$$

**Randbedingungen:**

- i)  $0 = \Phi(x, 0) = f(x) \cdot d \Rightarrow d = 0$
- ii)  $0 = \Phi(0, y) = b \cdot g(y) \Rightarrow b = 0$

$$\Rightarrow \Phi(x, y) = a \sin(\alpha x) c \sinh(\alpha y) = \underset{a \cdot c}{\parallel} A \sin(\alpha x) \sinh(\alpha y)$$

$$\text{iii) } 0 = \Phi(l_x, y) = A \sin(\alpha l_x) \sinh(\alpha y) \rightarrow \sin(\alpha l_x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{n\pi}{l_x} \quad n \in \mathbb{Z} (\text{oder } n \in \mathbb{N})$$

$$\rightarrow \Phi_n(x, y) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right)$$

$$\text{iv) } \Phi(x, l_y) = \Phi_R(x)$$

$$\Rightarrow \Phi_R(x) = \underset{\uparrow}{A_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right) \sinh\left(\frac{n\pi l_y}{l_x}\right) \quad \forall x \in [0, l_y]$$

im allgemeinen ist dies nicht möglich, aber da es sich um eine lineare DGL ( $\Delta\Phi = 0$ ) handelt:

→ Linearkombinationen von Lösungen sind auch Lösungen

**Ansatz für allgemeine Lösung:**

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{l_x}\right)$$

Der Ansatz erfüllt  $\Delta\Phi = 0$  und erfüllt die Randbedingungen i), ii), iii). Um iv) zu erfüllen fordern wir:

$$\Phi_R(x) \stackrel{!}{=} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)}_{\text{Entwicklung}} \underbrace{\sinh\left(\frac{n\pi l_y}{l_x}\right)}_{\text{const.}}$$

Der erste Teil des Ausdrucks entspricht der Entwicklung von  $\Phi_R(x)$  nach Funktionen  $\sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)$  also einer Fourier-Reihe.

**Bestimmung von  $A_n$ :** Multipliziere mit  $\sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)$   $m \in \mathbb{N}$  und danach Integration:

$$\begin{aligned} \int_0^{l_x} dx \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \Phi_R(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left(\frac{n\pi l_y}{l_x}\right) \int_0^{l_x} dx \underbrace{\sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)}_{\substack{\text{zueinander orthogonale Vektoren} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ = \frac{l_x}{2} \delta_{nm}}} \\ &= A_m \frac{l_x}{2} \sinh\left(\frac{n\pi l_y}{l_x}\right) \end{aligned}$$

$$A_m = \frac{2}{l_x \sinh\left(\frac{n\pi l_y}{l_x}\right)} \int_0^{l_x} dx \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right) \Phi_R(x)$$

in  $\Phi(x, y)$  einsetzen

## Wiederholung

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0 + \text{Randbedingungen}$$

$$\Phi = \Phi(x, y) = f(x)g(y)$$

$$\Phi_n(x, y) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{l_x}\right)$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$\Phi(x, y) = \sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{l_x}\right)$$

$$A_n = \frac{2}{l_x \sinh\left(\frac{n\pi l_y}{l_x}\right)} \int_0^{l_x} dx \sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right) \Phi_R(x)$$

Zu dem Problem gehört die Skizze aus Abschnitt 1.6.5: 2-Dim Randwertproblem.

### 1.6.6 Vollständige Orthonormale Funktionensysteme (VONS)

Betrachte Funktionen  $g(x), h(x)$  auf  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$

$$h, g : I \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$$

Skalarprodukt:  $(g, h) = \int_a^b dx g^*(x)h(x)$

$(g, h) = 0$ :  $g$  und  $h$  orthogonal,  $(g, g) = 1$ :  $g$  normiert

Norm:  $\|g\| = \sqrt{(g, g)}$

Ein abzählbarer Satz von Funktionen  $\{f_n\} = \{f_1, f_2, \dots\}$

Heißt orthonormiert falls:  $(f_m, f_n) = \delta_{nm} \rightarrow$  Orthonormalsystem

Vollständigkeit: Ein Satz von Funktionen heißt vollständig (VONS) falls jede quadratintegrierbare<sup>1</sup> Funktion  $g : I \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  in der Form  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$  dargestellt werden kann.

Genauer:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b dx |g(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)| = 0$

Bestimmung der Koeffizient  $a_n$ :

$$g(x) = \sum_n a_n f_n(x) \quad \left| \int dx f_m^*(x) \right.$$

$$\int_a^b dx f_m^*(x)g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_a^b dx f_m^*(x)f_n(x)}_{=\delta_{nm}} = a_m$$

$$g(x) = \sum_n a_n f_n(x) = \sum_n (f_n, g) f_n(x)$$

$$= \sum_n \int_a^b dx' f_n^*(x')g(x')f_n(x)$$

$$= \int_a^b dx' g(x') \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)f_n^*(x')}_{=\delta(x-x')}$$

---

<sup>1</sup>Falls  $\int dx |g(x)|^2$  existiert

da  $\int_a^b dx' g(x') = g(x)$

### Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) f_n^*(x') = \delta(x - x')$$

Beispiele:

1)

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{l}{2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad I = [0, l]$$

Bedeutung der einzelnen Terme  $(f_n, f_m) = \delta_{nm}$

$$g: I \rightarrow \mathbb{R} \quad g(0) = 0 = g(l)$$

$$g(x) = \sum_n a_n \sqrt{\frac{l}{2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

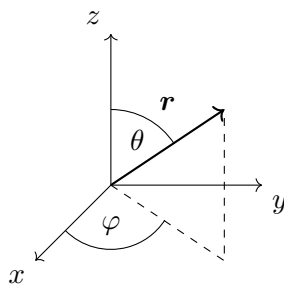
2) Fourierreihe:  $\{f_n\}$ :

$$n = 0: \quad \frac{1}{\sqrt{l}}$$

$$n \in \mathbb{N}: \quad \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad ; \quad \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad I = [0, l]$$

$$g(x) = a_0 \frac{1}{\sqrt{l}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]$$

### 1.6.7 Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten



$$\mathbf{r} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(r, \theta, \varphi)$$

$$\Delta \Phi = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)$$

Separationsansatz:

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \frac{U(r)}{r} P(\cos \theta) Q(\varphi)$$

1. Term:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( r \frac{U(r)}{r} P(\cos \theta) Q(\varphi) \right) = P(\cos \theta) Q(\varphi) \frac{1}{r} \frac{d^2 U}{dr^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= PQ \frac{1}{r} \frac{d^2 U}{dr^2} + UQ \frac{1}{r^3 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + UP \frac{1}{r^3 \sin^2 \theta} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} \quad \left| \cdot \frac{r^3 \sin^2 \theta}{UPQ} \right. \\ &\Rightarrow \underbrace{-r^2 \sin^2 \theta \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} - \sin \theta \frac{1}{P} \frac{d^2}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right)}_{\text{unabhängig von } \varphi} = \underbrace{\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2}}_{\text{unabhängig von } r, \theta} = \text{const.} := -m^2 \end{aligned}$$

für  $Q$ :

i)

$$\frac{d^2 Q}{d\varphi^2} + m^2 Q = 0$$

Lösung:

$$\begin{aligned} Q(\varphi) &= e^{im\varphi} = \cos(m\varphi) + i \sin(m\varphi) \\ Q(\varphi + 2\pi) &= Q(\varphi) \quad e^{im(\varphi+2\pi)} = e^{im\varphi} \quad \Rightarrow \quad m = \mathbb{Z} \\ \frac{r^2}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) &= \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \\ \underbrace{\frac{r^2}{U} \frac{d^2 U}{dr^2}}_{\text{unabh. von } \theta} &= - \underbrace{\frac{1}{P \sin \theta} \frac{dP}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right)}_{\text{unabh. von } V} = \text{const.} := \lambda \end{aligned}$$

ii)

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{\lambda}{r^2} U(r) = 0$$

→ Lösung für  $\lambda = l(l+1)$  (Warum das eine Lösung ist, wird in iii) erklärt)

$$U(r) = a_l r^{l+1} + b_l r^{-l}$$

→ Spezielle Lösung für  $m = 0$ :

$$\Phi(r, \theta) = \frac{U(r)}{r} P_l(\cos \theta) = (a_l r^l + b_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta)$$

allg. Lösung:  $\Delta \Phi = 0$  für  $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0$

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (a_l r^l + b_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta)$$

↓                      ↓  
durch Randbedingungen festgelegt

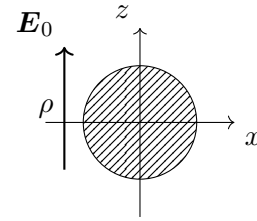
iii)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) P(\cos \theta) &= 0 \\ x := \cos \theta \quad P(x) : \text{DGL für } P(x) \quad \frac{d}{d\theta} P(x(\theta)) &= \frac{dP}{dx} \frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta \frac{dP}{dx} \\ dx &= -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \\ \Rightarrow -\frac{d}{dx} \left( -\sin^2 \theta \frac{dP}{dx} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P(x) &= 0 \\ &\quad \parallel \\ &\quad 1-x^2 \end{aligned}$$

### Zugeordnete Legendresche DGL

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P(x) = 0$$

Spezialfall: **Zylindersymmetrische Probleme:**  $\Phi$  unabhängig von  $\varphi$   
→ **Legendre-Polynome**



$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0, \quad Q(\varphi) = e^{im\varphi} \Rightarrow m = 0 \Rightarrow Q(\varphi) = 1$$

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \lambda P(x) = 0$$

### Legendresche DGL

$$(1-x^2) \frac{d^2 P}{dx^2} - 2x \frac{dP}{dx} + \lambda P(x) = 0$$

Potenzreihenansatz:  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

→ Fließbach

→ Legendre Polynome

→ relevante Lösung nur für  $\lambda = l(l+1) \quad l \in \mathbb{N}_0$

## Wiederholung

### Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

$$\Delta\Phi = 0 \quad \Phi(r, \theta, \varphi)$$

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \frac{U(r)}{r} P(\cos\theta) Q(\varphi)$$

i)

$$\frac{d^2 Q}{d\varphi^2} + m^2 Q = 0 \quad m \in \mathbb{Z}$$
$$\rightarrow Q(\varphi) = e^{im\varphi}$$

ii)

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{\lambda}{r^2} U = 0 \quad \lambda = l(l+1) \quad l \in \mathbb{N}_0$$
$$U(r) = a_l r^{l+1} + b_l r^{-l}$$

iii)

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right) P(\cos\theta) = 0$$

**Zylindersymmetrische Probleme:**  $\frac{d\Phi}{d\varphi} = 0 \rightarrow m = 0$

$\rightarrow P_l(\cos\theta)$  : Legendre-Polynome

$\rightarrow$  allgemeine Lösung:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( a_l r^l + b_l r^{-l-1} \right) P_l(\cos\theta)$$

### Beispiel: Leitende Kugel im homogenen Feld

$$\mathbf{E}_{\text{ext}} = E_0 \mathbf{e}_z$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0 \quad |\mathbf{r}| \leq R$$

Die Frage ist jetzt was ist das äußere Potential und das äußere  $\mathbf{E}$ -Feld:

$$\Phi(\mathbf{r}) \quad \text{für} \quad |\mathbf{r}| > R \quad \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Lösung des Randwertproblems  $\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0$  für  $|\mathbf{r}| > R$  mit der **Randbedingungen**:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0 \quad \text{für} \quad |\mathbf{r}| = R$$

$$\Phi(\mathbf{r}) \xrightarrow{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} -E_0 z + \text{const.} = -E_0 r \cos\theta + \Phi_1$$

Aufgrund der Zylindersymmetrie des Problems ist  $\Phi$  eine Funktion von  $\theta$  und  $r$ :  $\Phi(r, \theta)$

$$\rightarrow \Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( a_l r^l + b_l r^{-l-1} \right) P_l(\cos\theta)$$

i)  $r = R$

$$\begin{aligned}\Phi(R, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left( a_l R^l + b_l R^{-l-1} \right) P_l(\cos \theta) \\ &\stackrel{!}{=} \Phi_0 \cdot 1 = \Phi_0 P_0(\cos \theta)\end{aligned}$$

an Beide Seiten Multiplizieren wir  $\int_{-1}^1 d(\cos \theta) P_n(\cos \theta)$  für  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left( a_l R^l + \frac{b_l}{R^{l+1}} \right) \underbrace{\int_{-1}^1 d(\cos \theta) P_n(\cos \theta) P_l(\cos \theta)}_{\delta_{nl} \frac{2}{2n+1}} = \Phi_0 \underbrace{\int_{-1}^1 d(\cos \theta) P_n(\cos \theta) P_l(\cos \theta)}_{\delta_{n0} \frac{2}{2n+1} = 2\delta_{n0}}$$

ii)  $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &\rightarrow -E_0 r \cos \theta + \Phi_1 \\ &= -E_0 r P_1(\cos \theta) + \Phi_1 P_0(\cos \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left( a_l r^l + \frac{b_l}{R^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \\ \Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} \left( a_l r^l + \frac{b_l}{R^{l+1}} \right) \delta_{nl} \frac{2}{2n+1} &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 2\Phi_1 \delta_{n0} - E_0 r \delta_{n1} \frac{2}{2n+1} = 2\Phi_1 \delta_{n0} - \frac{2}{3} E_0 r \delta_{n1} \quad n = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{n=0}: \quad &\left( a_0 + \frac{b_0}{r} \right) 2 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 2\Phi_1 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \Phi_1 \\ \underline{n=1}: \quad &\left( a_1 r + \frac{b_1}{r^2} \right) \frac{2}{3} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\frac{2}{3} E_0 r \quad \Rightarrow \quad a_1 = E_0 \\ \underline{n>1}: \quad &\left( a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) \frac{2}{2n+1} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \quad \Rightarrow \quad a_n = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow \quad &b_0 = R(\Phi_0 - \Phi_1) \\ &b_1 = -R^3 \quad a_1 = E_0 R^3 \\ n > 1: \quad &b_n = -R^{2n+1} \quad a_n = 0\end{aligned}$$

$$\Phi(r, \theta) = \left[ \Phi_1 + \frac{R(\Phi_0 - \Phi_1)}{r} \right] \underbrace{P_0(\cos \theta)}_{=1} + \left[ -E_0 r + \frac{E_0 R^3}{r^2} \right] \underbrace{P_1(\cos \theta)}_{\cos \theta}$$

### Potential einer Kugel im homogenen $E$ -Feld

$$\rightarrow \Phi(r, \theta) = \Phi_1 + (\Phi_0 - \Phi_1) \frac{R}{r} - E_0 r \cos \theta + E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta$$

Diskussion der **Bedeutung der einzelnen Terme**:

- $\Phi_1$  ist eine Konstante die auf das Potential keine physikalische Auswirkung hat.
- $-E_0 r \cos \theta$  ist das Potential des äußeren Feldes.
- $\Phi_0 - \Phi_1$  ist das Potential einer möglichen Gesamtladung auf der Kugel.



- $E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta$  ist der Beitrag der Ladungsverschiebung auf der Kugel. Also das Potential der Influenzierten Ladungen.

Eine Kugel mit Ladung  $Q$  ohne äußeres Feld ( $E_0 = 0$ ):

$$\begin{aligned} \rightarrow \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r} + \text{const.} \\ &\stackrel{!}{=} \Phi_1 + (\Phi_0 - \Phi_1) \frac{R}{r} \\ \rightarrow \text{const.} &= \Phi_1 \quad \Phi_0 - \Phi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \\ \Rightarrow \Phi_1 &= \Phi_0 - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

Eine ungeladene Kugel:  $Q = 0 \rightarrow \Phi_1 = \Phi_0$

$$\rightarrow \Phi(r, \theta) = \Phi_0 - E_0 r \cos \theta + E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta$$

**Lösung für  $m \neq 0$  (Potenzreihenansatz)**

**Allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten:**

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left( a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}} \right) \mathcal{Y}_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$\Delta \Phi = 0$$

## 1.7 Multipolentwicklung

$$\begin{aligned} q &= \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \\ \mathbf{r} \gg R \quad \Phi(\mathbf{r}) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \end{aligned}$$

statische, lokalisierte Ladungsverteilung

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= \begin{cases} \text{beliebig} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases} \\ \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned}$$

Für  $r > R$ :  $|\mathbf{r}'| < |\mathbf{r}| \rightarrow$  Taylorentwicklung von  $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  in  $\mathbf{r}' \rightarrow$  d.h. in  $x'_1, x'_2, x'_3$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2}} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Taylorentwicklung:

$$f(\mathbf{r}') = f(x'_1, x'_2, x'_3) = f(0, 0, 0) + \sum_{i=1}^3 x'_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 x'_i x'_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) + \dots$$

Zuerst berechnen wir die einzelnen Terme:

$$f(\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} : f(0) = \frac{1}{r} \quad \frac{\partial f}{\partial x'_i} = \frac{(x_i - x'_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \Big|_0 = \frac{x_i}{r^3} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x'_i \partial x'_j}(0) = \dots = \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5}$$

Für  $|\mathbf{r}| < |\mathbf{r}'|$ :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \left\{ \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^3 \frac{x'_i x_i}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} + \dots \right\}$$

Den letzten (mit einem Pfeil markierten) Term schauen wir uns jetzt noch einmal genauer an.

$$\sum_{i,j} x'_i x'_j r^2 \delta_{ij} = r^2 \underbrace{\sum_i x_i'^2}_{=r'^2} = r^2 r'^2 = r'^2 \sum_i x_i^2 = \sum_{i,j} r'^2 x_i x_j \delta_{ij}$$

Somit können wir den letzten Term umschreiben als:

$$\sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{(3x_i x_j - r^2 \delta_{ij})}{r^5} = \sum_{i,j} x_i x_j \frac{(3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij})}{r^5}$$

Das Potential unserer Ladungsverteilung im externen  $\mathbf{E}$ -Feld ergibt sich dann als:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \underbrace{\frac{1}{r} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}')}_{q \text{ Gesamtladung (Monopol)}} + \sum_{i=1}^3 \underbrace{\frac{x_i}{r^3} \int d^3r' x'_i \rho(\mathbf{r}')}_{p_i \text{ Dipolmoment } \mathbf{p}=(p_1, p_2, p_3)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \underbrace{\frac{x_i x_j}{r^5} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij})}_{=: Q_{ij} \text{ Quadrupolmoment}} + \dots \right\}$$

$$\Rightarrow \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij} + \dots \right\}$$

**Diskussion:**

i) **Monopol**

$$\Phi_M(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad \propto \frac{1}{r} \text{ dominiert für } q \neq 0$$

$$\rightarrow \mathbf{E}_M(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi_M = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \propto \frac{1}{r^2}$$

ii) **Dipol**

$$\Phi_D(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} \quad \propto \frac{1}{r^2}$$

Das elektrische Feld:

$$\mathbf{E}_D = -\nabla \Phi_D$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \left( \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) : \frac{\partial}{\partial x} \left( p_x \frac{x}{r^3} + p_y \frac{y}{r^3} + p_z \frac{z}{r^3} \right) = \left( \frac{p_x}{r^3} - 3p_x \frac{xx}{r^5} - 3p_y \frac{yx}{r^5} - 3p_z \frac{zx}{r^5} \right)$$

$$= \frac{p_x}{r^3} - 3 \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\dots) = \frac{p_y}{r^3} - 3 \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} y$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\dots) = \frac{p_z}{r^3} - 3 \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} z$$

$$\Rightarrow \nabla_{\mathbf{r}} \left( \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^5} \right) = \frac{\mathbf{p}}{r^3} - 3 \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r}$$

$$\mathbf{E}_D = -\nabla \Phi_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^4} \right] \propto \frac{1}{r^3} \quad \mathbf{r} \neq 0$$

Beispiel für die Realisierung eines Dipols:

**Punktladungen:**  $q_0, -q_0$  in  $\mathbf{r}_+, \mathbf{r}_-$

Gesamtladung:  $q = q_0 - q_0 = 0$

$$\rightarrow \Phi_M(\mathbf{r}) \equiv 0$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|} - \frac{q_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} + \dots \right)$$

$$\rho(\mathbf{r}') = q_0 \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_+) - q_0 \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_-)$$

$$\mathbf{p} = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' = q_0 \mathbf{r}_+ - q_0 \mathbf{r}_- = q_0 \mathbf{d}$$

mehrere Punktladungen  $q_i$  in  $\mathbf{r}_i$

$$\rightarrow \mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i$$

iii) **Quadrupolmoment**

$$Q_{ij} = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij})$$

$$\text{Quadrupoltensor } Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}$$

**Eigenschaften**

i) Spurfrei:  $\text{tr}(Q) = \sum_i Q_{ii} = 0 \Rightarrow$  mindestens 2 unabhängige Elemente

ii) Symmetrisch:  $Q_{ij} = Q_{ji} \Rightarrow$  3 unabhängige Elemente

$\Rightarrow$  5 unabhängige Elemente

Ableitung in Kugelkoordinaten

$\Rightarrow$  Sphärische Multipolmomente

### 1.7.1 Multipolentwicklung der Energie der Ladungsverteilung im äußeren Feld

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi$$

Energie:

$$W = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) \quad (1.1)$$

Wir stellen uns vor, das  $\mathbf{E}$ -Feld wird von sehr weit entfernten Ladungen erzeugt. Wir machen somit also die Annahme, dass sich  $\Phi(\mathbf{r})$  in dem Gebiet, wo  $\rho(\mathbf{r})$  sich nur wenig ändert.

→ Taylorentwicklung von  $\Phi(\mathbf{r})$  um  $\mathbf{r} = 0$

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \Phi(0) + \mathbf{r} \cdot \nabla \Phi(0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(0) + \dots \\ &= \Phi(0) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(0) - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0)}_{=0} + \dots \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i,j} (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0)\end{aligned}$$

Dies gilt, da:

$$\sum_{i,j} r^2 \delta_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) = r^2 \underbrace{\sum_i \frac{\partial E_i}{\partial x_i}(0)}_{\nabla \cdot \mathbf{E}(0)=0}$$

$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  gilt, da  $\mathbf{E}$  ein äußeres Feld ist. Damit erhalten wir dann für die Energie mit Formel (1.1):

$$\begin{aligned}\rightarrow W &= \underbrace{\Phi(0) \int d^3 r \rho(\mathbf{r})}_{=q} - \underbrace{\mathbf{E}(0) \cdot \int d^3 r \mathbf{r} \rho(\mathbf{r})}_{=\mathbf{p}} - \frac{1}{6} \sum_{i,j} \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) \underbrace{\int d^3 r (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r})}_{=Q_{ij}} + \dots \\ &= \underbrace{q}_{\substack{\nearrow \\ \text{Ladung}}} \underbrace{\Phi(0)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Potential}}} - \underbrace{\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(0)}_{\substack{\uparrow \quad \nwarrow \\ \text{Dipol} \quad \text{Feld}}} - \frac{1}{6} \sum_{i,j} \underbrace{Q_{ij}}_{\substack{\nearrow \\ \text{Quadrupol}}} \underbrace{\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0)}_{\substack{\nwarrow \\ \text{Feldgradient}}} + \dots\end{aligned}$$

## Wechselwirkungsenergie zweier Dipole

Betrachte 2 Punktdipole  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  in  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$

$\mathbf{p}_2$  erzeugt am Ort  $\mathbf{r}_1$  das äußere Feld

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^5} - \frac{\mathbf{p}_2}{r_{12}^3} \right] \\ \rightarrow W &= -\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r_{12}^3} - \frac{3(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^5} \right] \propto \frac{1}{r_{12}^3}\end{aligned}$$

Je nach Orientierung der Dipole ist diese Wechselwirkung anziehend oder abstoßend.

z.B.:  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \perp \mathbf{r}_{12}$

$$\rightarrow W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r_{12}^3} \begin{cases} > 0 & \uparrow\uparrow & \text{abstoßend} \\ < 0 & \uparrow\downarrow & \text{anziehend} \end{cases}$$