

Experimentalphysik III

Vorlesung von Prof. Dr. Oliver Waldmann im Wintersemester 2018

Markus Österle Andréz Gockel

11. Dezember 2018

Inhaltsverzeichnis

0	Einführung	4
0.1	Termine	4
0.2	Programm	4
0.3	Literatur	4
0.4	Übungen und Betreuer	5
0.5	Übungsblätter	5
0.6	Übungsgruppen	5
0.7	Klausur	5
0.8	Prüfungsleistung	6
I	Spezielle Relativitätstheorie	7
I.1	Vorgeschichte	7
I.1.1	Experiment von Michelson-Morley	7
I.1.2	Lorenz-Invarianz der Maxwell-Gleichungen	8
I.1.3	Einstein und die Patente	8
I.2	Bezugssysteme und Inertialsysteme	9
I.2.1	Was ist ein Bezugssystem (BZS)	9
I.2.2	Was ist ein Inertialsystem (IS)	9
I.2.3	Galilei-Transformation	9
I.2.4	Lorenz-Transformation (LT)	10
I.3	Einsteins Axiome der speziellen Relativitätstheorie (SRT)	10
I.4	Konsequenzen aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit	10
I.4.1	Lorenz-Trafo und Lorenz-Invarianz	10
I.4.2	Relativität der Gleichzeitigkeit	12
I.4.3	Zeitdilatation	12
I.4.4	Längenkontraktion	13
I.4.5	Doppler Effekt	13
I.4.6	Aberration des Lichts	14
I.5	Relativistische Dynamik	14
I.5.1	Impulserhaltung und relativistischer Impuls	14
I.5.2	Energieerhaltung und relativistische Energie	15
I.5.3	Relativistische Energie-Impuls-Beziehung und Viererimpuls	15
I.5.4	Kraft und Energie-Impuls Erhaltung	16
I.5.5	Anwendungsbeispiele	16
I.6	Von der SRT zur ART	17
I.6.1	Äquivalenzprinzip (<i>die heilige Kuh der Physik</i>)	17
I.6.2	Gravitation und Raumkrümmung	18
I.6.3	Periheldrehung des Merkurs	18
I.6.4	Ablenkung von Licht durch Gravitation	19
I.6.5	Gravitationswellen	19
I.6.6	Global Positioning System (GPS)	19

II Geometrische Optik	20
II.1 Lichtstrahlen	20
II.2 Das Fermat'sche Prinzip	20
II.2.1 Fermat'sches Prinzip	20
II.2.2 Weg zwischen zwei Punkten A und B	21
II.2.3 Reflexionsgesetz	21
II.2.4 Brechungsgesetz von Snellius	21
II.3 Einfache Anwendungen	22
II.3.1 Totalreflexion	22
II.3.2 Optisches Prisma	22
II.4 Sphärische, dünne Linse	23
II.4.1 Brennpunkt und Brennebene	23
II.4.2 Berechnung des Brennpunktes bzw. der Brennweite	24
II.4.3 Abbildung (am Beispiel einer Sammellinse)	25
II.5 Abbildungsfehler	26
II.5.1 Dicke Linsen	26
II.5.2 Sphärische Abberation	26
II.5.3 Chromatische Abbreration	26
II.5.4 Astigmatismus	26
II.5.5 Absorption	26
II.5.6 Beugung	26
II.5.7 Optisches Auflösungsvermögen	26
II.6 Optische Instrumente	26
II.6.1 Vergrößerung	26
II.6.2 Das menschliche Auge	27
II.6.3 Optisches Instrument mit einer Linse: Lupe	27
II.6.4 Optische Instrumente mit zwei Linsen	28
II.7 Elektronenoptik	29
II.7.1 Beispiel: Brechungsgesetz für Elektronen	29
II.7.2 Elektrische Rohrlinse	29
II.7.3 Magnetische Linsen	29
II.7.4 Elektronenmikroskope	30
III Wellenoptik	31
III.1 Wiederholung (Schwingungen und Wellen)	31
III.1.1 Schwingungen	31
III.1.2 Wellen	31
III.1.3 Fourier-Transformation	31
III.1.4 Kohärenz	32
III.2 Intefferenz und Beugung I	33
III.2.1 Intefferenz am Doppelspalt	33
III.2.2 Beugung am Einzelspalt	33
III.2.3 Beugung am Gitter	34
III.2.4 Beugung am Raum- oder Oberflächengitter	35
III.2.5 Interferenz an planparallelen Glasplatten	36
III.2.6 Vielstahlinterferenz, Fabry-Pérot-Interferometer	37
III.3 Interferenz und Beugung II - Huygen'sches Prinzip	39
III.3.1 Huygen'sches Prinzip	39
III.3.2 Interferenz am Doppelspalt	39
III.3.3 Beugung	39
III.3.4 Allgemeine Behandlung der Beugung	39

III.3.5	Allgemeines Ergebnis für die Beugung im Fernbereich, Fraunhofer Beugung	41
III.3.6	Auflösungsvermögen optischer Instrumente	41
III.3.7	Räumliches Auflösungsvermögen	42
IV	Licht - Materie Wechselwirkung	44
IV.1	lineare und zirkulare Polarisation	44
IV.1.1	Lineare Polarisation	44
IV.1.2	Zirkuläre Polarisation	44
IV.1.3	Zusammenhang zwischen linear und zirkular polarisierten Wellen	44
IV.1.4	Polarisation beim Durchgang durch Materie	45
IV.2	Polarisation durch Brechung und Reflexion	45
IV.2.1	Maxwell Gleichungen in Materie	45
IV.2.2	Erinnerung: Polarisation bei Brechung und Reflexion	46
IV.2.3	Maxwell-Gleichungen und Stetigkeitsbedingungen	46
IV.2.4	Warum war es „erlaubt“ mit ebenen Wellen zu rechnen ?	47
IV.3	Maxwell-Gl. in Materie, komplexer Brechungsindex	48
IV.3.1	Polarisation eines Dielektrikums	48
IV.3.2	Ensemble unabhängiger induzierter Dipolmomente	48
IV.3.3	Lorenz-Lorentz-Oszillatormodell	48
IV.3.4	Wellengleichung in Materie	48
IV.3.5	Wellengleichung in Materie in komplexer Schreibweise	49
IV.3.6	Transversale Lösungen	50
IV.3.7	Komplexwertiger Brechungsindex	50
IV.3.8	Lösung für kleine imaginäre Anteile. (schwache Dämpfung bzw Absorbtion)	50
IV.3.9	Evaneszente Welle	51
IV.4	Streuung, Spektren und Verwandtes	52
IV.4.1	Grobe Einteilung	52
IV.4.2	Physikalische Prozesse: Grundgedanken	52
IV.4.3	Wirkungsquerschnitt (W.Q.S.)	53
IV.4.4	Energie und Impulserhaltung	54
IV.4.5	Spektroskopie	54
IV.	Fragerunde	56
IV.5	Ratengleichungen	56
IV.5.1	Exponentieller Zerfall	56
IV.5.2	Zwei-Niveausystem	57
IV.5.3	Zwei-Niveau System im Strahlungsfeld, Einstein Parameter	58
V	Entwicklung der Atom- und Quantenphysik	59
V.1	Quantelung von Masse und Ladung	59
V.1.1	Quantelung der Masse	59
V.1.2	Quantelung der Ladung	60
V.1.3	Bestimmung von Q/M (Ladung/Masse)	61
V.2	Struktur der Materie	63
V.2.1	Materie besteht aus Atomen/Ionen	63
V.2.2	Atome bestehen aus Elektronen und „sonst etwas“	63

Kapitel 0

Einführung

Dozent Prof. Oliver Waldmann, Zi. 202, Physik-Hochhaus

Zeit Di, 8-10 Uhr, Mi, 8-10 Uhr

Ort Großer Hörsaal Physik

0.1 Termine

Vorlesungsbeginn Di., 16.10.2018

Erstes Übungsblatt Mi., 17.10.2018

Übungsbeginn Mo., 29.10.2018 - Fr., 2.11.2018

Letzte Vorlesung Mi., 6.2.2019

Klausur Sa., 9.2.2019, 9:00 - 12 Uhr

Wiederholungsklausur Sa., 27.4.2019., 10:00-13 Uhr

0.2 Programm

1. Spezielle Relativitätstheorie
2. Fortgeschrittene Optik
3. Quantenphysik
4. Einfache atomare Systeme

0.3 Literatur

- alle Lehrbücher
- Demtröder, Experimentalphysik 3 (Springer)
- Tipler/Mosca, Physik (Elsevier)
- Bergmann/Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 3
- Gerthsen, Physik (Springer)
- Giancoli, Physik (Pearson)

0.4 Übungen und Betreuer

Übungsleiter: Krunoslav Prša, Zi. 203, Physik-Hochhaus, Tel. 7631

Gruppe 3: Mi 10-12, SR III, Tutor: Fabian Thielemann

Gruppe 7: Fr 14-16, SR GMH, Tutor: Rupert Michiels

0.5 Übungsblätter

- Ausgabe der Übungsblätter jeweils am ENDE der Vorlesung am Mittwoch im großen Hörsaal, oder online auf ILIAS (siehe Ordner "Übungsblätterünten")
- Rückgabe der schriftlichen Lösungen VOR der Vorlesung am Mittwoch, die Lösungen sind im Hörsaal vorne auf den Tisch zu legen
- jedes Übungsblatt umfasst typischerweise 4 - 5 Aufgaben mit insgesamt ca. 35 Punkten
- jedes Übungsblatt enthält typischerweise eine leichte und eine schwere Aufgabe

0.6 Übungsgruppen

- bis zu zwei (2) Studierende können ein Lösungsblatt gemeinsam bearbeiten und abgeben (sie müssen dann aber in einer Übungsgruppe sein)
- bitte DEUTLICH auf dem Lösungsblatt angeben: Namen der Studierenden, Übungsgruppe (Nr, Name des Übungsleiters, Ort, Zeit)
- Gruppenarbeit ist erwünscht, es wird aber erwartet, dass jede(r) Studierende die Aufgaben vorrechnen kann, sonst Punktabzug :-)
- Einschreibung in die Übungsgruppen über ILIAS von Di., 17.10, 20:00 Uhr bis Do., 19.10, 20:00 Uhr (siehe unten)
- Anwesenheitspflicht & Vorrechnenpflicht!

0.7 Klausur

Zusassung zur Klausur 40% der Übungspunkte

Termin Sa, 9. Februar 2019, 9:00 - 12 Uhr, Großer Hörsaal Physik

Dauer 120 Minuten

Inhalt Vorlesungsstoff + Übungen, Aufgaben sind ähnlich zu den Übungen gestellt

Sprache Die Klausuraufgaben werden in Deutsch zur Verfügung gestellt

Erlaubt Din-A4 Blatt mit eigenen Notizen beidseitig beliebigbeschrieben/bedruckt (spezielle Lesehilfen sind nicht erlaubt!), Stifte, Geodreieck/Lineal

Nicht erlaubt Es ist alles verboten was nicht erlaubt ist (Taschenrechner, Handy, Bücher, usw.) (leere geheftete Blätter werden verteilt)

Mitzubringen Studierendenausweis, Schreibstifte, Geodreieck/Lineal

Anmeldung zur Klausur

Online Anmeldung, der Ablauf und Termine werden durch die jeweiligen Prüfungsämter bekannt gegeben.

0.8 Prüfungsleistung

- mindestens 40% der Übungspunkte werden für die Zulassung zur Klausur benötigt
- bestandene schriftliche Klausur oder Nachklausur
- Bewertungsgrundlage ist das Ergebnis der Klausur oder Wiederholungsklausur

Täuschungsversuche:

Sowohl die Übungen wie die Klausur sind Teil der Prüfungs/Studienleistung! Täuschungsversuche können zum Nicht-Bestehen führen!

Kapitel I

Spezielle Relativitätstheorie

I.1 Vorgeschichte

1861-1867: Maxwell Gleichungen

Vor Maxwell brauchten alle bekannten Wellen (Wasserwellen, Schall) ein Medium oder Trägerstoff. Daher stammte die Annahme, auch elektro-magnetische Wellen also Licht bräuchte ein Medium: der Äther. Somit wollte man experimentell zu zeigen, wie schnell wir uns durch den Äther bewegen und welches das Inertialsystem, das ausgezeichnete Bezugssystem des Äthers ist. Mit dem Ziel den Äther nachzuweisen wurde das Michelson-Morley Experiment durchgeführt.

I.1.1 Experiment von Michelson-Morley

Die Idee des Experimentes war es die Bewegung der Erde relativ zum Äther zu messen.

Anforderungen:

- Erde 30 km/s
- Licht $3 \cdot 10^5$ km/s

\Rightarrow relative Auflösung von circa 10^{-4} nötig

Prinzip:

Lichtlaufzeiten:

Arm parallel zum Ätherwind

$$t_2 = \frac{L_2}{c+v} + \frac{L_2}{c-v} = \frac{2cL_2}{(c^2-v^2)} = \frac{2L_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Arm senkrecht zum Ätherwind

$$t_1 = 2 \frac{L'_1}{c}$$

Nebenrechnung:

$$L'^2 = L^2 + (vt)^2 \quad \Rightarrow \quad (ct)^2 = L^2 + (vt)^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

$$t_1 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Somit ist die Zeitdifferenz der beiden Lichtstrahlen

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2L}{c} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{2L}{c} \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{lv^2}{c^2}$$

Hieraus können wir nun den Phasenunterschied der beiden Strahlen berechnen

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{c\Delta t}{\lambda}$$

Abschätzung:

$$L = 2 \times 11 \text{ m} , \ v = 30 \text{ km/s} , \ \lambda = 500 \text{ nm} \Rightarrow \Delta\varphi/\pi \approx 0,88$$

Auflösung

$$\frac{\Delta\varphi}{\pi} \approx \frac{1}{4}$$

Ergebnis:

Es gibt keine Verschiebung des Interferenzmusters.

Konsequenz:

\Rightarrow Es gibt keinen Ätherwind.

\Rightarrow Es gibt kein ausgezeichnetes Bezugssystem. Alle Bezugssysteme sind gleichwertig.

Aber:

Kontraktionshypothese von Fitzgerald z Lorenz

Wenn der Arm in Richtung der Äthers um Faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Arm parallel zum Ä.W.:

$$t_2 = \frac{2cL_2}{c^2 - v^2} \frac{1}{\gamma} = \frac{2L_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Arm senkrecht zum Ä.W.:

$$t_1 = \frac{2L_1}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Aber:

Äther nicht beobachtbar

I.1.2 Lorenz-Invarianz der Maxwell-Gleichungen

Maxwell-Gleichungen sind Lorenz-invariant und nicht Galilei-invariant.

Beispiel: Relativität der Feder.

\Rightarrow Im Laborsystem: $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$

\Rightarrow Im Ruhesystem: $v' = 0 \Rightarrow F_L = 0 \Rightarrow$ ein zusätzliches E' -Feld, $\mathbf{F}_q = q\mathbf{E}$

\Rightarrow neue „Transformationsgleichungen“

Transformation

- K : „ruhende“ Bezugssystem
- K' : „sich in Bezug auf K konstant entlang der x -Achse bewegendes“ Bezugssystem

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= (E_x, \gamma(E_y - vB_z), \gamma(E_z - vB_y))^T \\ \mathbf{B}' &= (B_x, \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z), \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y))^T\end{aligned}$$

I.1.3 Einstein und die Patente

Einstein arbeitete um ... beim Patentamt in Zu dieser Zeit wurden häufig neue Patente zur Synchronisierung verschiedenen Uhren angemeldet, was zu Einsteins Inspiration und seinen späteren Entdeckungen führte.

I.2 Bezugssysteme und Inertialsysteme

Zur Diskussion der Relativitätstheorie ist ein bestimmtes Vokabular mit klaren Definitionen notwendig. Hierzu soll dieser Abschnitt dienen.

I.2.1 Was ist ein Bezugssystem (BZS)

Ein Bezugssystem ist ein Koordinatensystem bezüglich dessen man die Bewegung von Objekten beschreibt.

Konsequenzen:

- es gibt einen Koordinatenursprung O
- Koordinatenursprünge verschiedener BZS können sich gegeneinander bewegen

⇒ Transformationsgesetze

ACHTUNG

Unterscheide sorgfältig zwischen Basisvektoren, Vektoren und Koordinaten

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' \quad \begin{array}{l} \mathbf{v} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i \\ \mathbf{v}' = \sum_i x'_i \mathbf{e}'_i \end{array} \rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \mathbf{x}'$$

I.2.2 Was ist ein Inertialsystem (IS)

Bezugssystem in welchem das Trägheitsgesetz gilt.

Konsequenzen:

⇒ Inertialsystem bewegen sich geradlinig - gleichförmig gegeneinander

Klassisches Relativitätsprinzip

Grundgesetze der Physik nicht in allen Inertialsystemen gleich (Form invariant)

I.2.3 Galilei-Transformation

Galilei-Trafo

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{v}t \\ t' &= t \end{aligned}$$

\mathbf{v} : Geschwindigkeit vom O' gegenüber O

Test:

$$\begin{aligned} k: \quad \mathbf{F} &= m\mathbf{a} \quad \Leftrightarrow \quad k': \quad \mathbf{F}' = m\mathbf{a}' \\ \mathbf{a}' &= \frac{d^2\mathbf{v}'}{dt'^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{a} \end{aligned}$$

Bemerkung

Invarianz unter Drehungen ⇒ Tensoren

Transformation der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

⇒ Lichtgeschwindigkeit ist NICHT konstant !

I.2.4 Lorentz-Transformation (LT)

Lorentz-Trafo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{u}{c^2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \text{LT}$$

Ziel der speziellen Relativitätstheorie:

Die Gesetze der Mechanik sollen Lorentz-invariant sein !

Bemerkung

Die Galilei-Transformation ergibt sich aus der Lorentz-Transformation für $\frac{u}{v} \rightarrow 0$ somit wird dann $\gamma \rightarrow 1$ gehen.

I.3 Einsteins Axiome der speziellen Relativitätstheorie (SRT)

1. Relativitätsprinzip:
Alle Naturgesetze nehmen in allen IS die gleiche Form an.
2. Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist Konstant.

Bemerkungen

- Punkt 1 legt die Lorentz-Trafo fest
- Das Umgekehrte gilt nicht

I.4 Konsequenzen aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Da durch, dass die Lichtgeschwindigkeit eine Konstante sein soll ergeben sich schon bei einfachen Beispielen Schwierigkeiten. Ein solches Beispiel wäre die Addition von Geschwindigkeiten. Fährt man nun in einem Zug der die Geschwindigkeit $0,8c$ hat und schießt ein Geschoss mit $0,3c$ in Fahrtrichtung ab so sollte dieses mit $1,1c$ schneller als die Lichtgeschwindigkeit sein. Warum dies nicht der Fall ist und wie man damit umgeht und welche weiteren Konsequenzen aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit folgen wird im folgenden Abschnitt erläutert.

I.4.1 Lorentz-Trafo und Lorentz-Invarianz

- 1) Lichtstrahlen:

Im IS K : $x = ct$

Im IS K' : $x' = ct'$

- 2) Alle IS sind gleichberechtigt

Trafo $K \rightarrow K'$: $x' = \gamma(x - ut)$

Trafo $K' \rightarrow K$: $x = \gamma(x' - ut')$

- 3) $\Rightarrow xx' = \gamma^2 xx' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$4) \quad t' = \gamma(t - \xi x) \\ t' = \frac{x'}{c} = \gamma \frac{1}{c}(x - ut) = \gamma(t - \frac{ux}{c^2})$$

5) Insgesamt:

Lorenz-Trafo

$$x' = \gamma(x - ut) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right)$$

Transformation der Geschwindigkeiten

NR:

$$\frac{dx'}{dt} = \gamma \left(\frac{dx}{dt} - u \right) = \gamma(v_x - u) \\ \frac{dt'}{dt} = \gamma \left(1 - \frac{u}{c^2} v_x \right)$$

Daraus folgt dann für die Geschwindigkeitsadditionen in verschiedene räumliche Komponenten:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \\ v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \\ v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_z}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

Test:

- $u \ll c \Rightarrow$ Galilei-Trafo
- Umkehrung

Lorenz-Invarianz

Feststellung $x^2 - c^2 t^2 = \text{const.} = x'^2 - c^2 t'^2$

Raum-Zeit-Abstand: $L = \sqrt{x^2 - c^2 t^2}$

\rightarrow RZ-Abstand bleibt unter Lorenz-Trafo invariant.

Minkowski Raum

„Drehung“ im M-Raum \Leftrightarrow Lorenz-Trafo

A)

$$\mathbf{x} = (x, y, z, ict) \\ \mathbf{x}\mathbf{x} = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = l^2$$

B)

$$\mathbf{x} = (x, y, z, ct) \quad \text{Metrik: } \bar{g} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow l^2 = \mathbf{x}\bar{g}\mathbf{x} = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

\Rightarrow Kovarianten und Kontravarianten Vierervektoren

Elementare Diskussion des M-Raums

Frage: Wie sieht ein anderes sich bewegendes IS (K') im eigenen IS (K) aus ?

K: Die Achsen ct, x stehen rechtwinklig aufeinander.

K': wie liegen ct', x' in K ?

Für die Lage von ct' : Betrachte $x' = 0 \rightarrow$ LT $\Rightarrow x = \frac{u}{c}ct$

Für die Lage von x' : Betrachte $ct' = 0 \rightarrow$ LT $\Rightarrow ct = \frac{u}{c}x$

I.4.2 Relativität der Gleichzeitigkeit

Lichtlaufzeit und Ereignisse:

Das beobachtete Licht (z.B. von Galaxien) entspricht einem Blick in die Vergangenheit.

Was soll gleichzeitig bedeuten?

Definition der Gleichzeitigkeit

In einem IS sind die Ereignisse A und C gleichzeitig, wenn die von den beiden Ergebnissen ausgehenden Lichtpulse einen Beobachter B in der Mitte der beiden Punkte zur selben Zeit erreichen.

Synchronisation von Uhren

- man nehme zwei Uhren in einem IS, ruhend
- man sende zwei Photonen von der Mitte der Verbindungsstrecke aus

\Rightarrow die beiden Photonen kommen gleichzeitig an den beiden Orten an

I.4.3 Zeitdilatation

Uhren \Rightarrow Lichtuhr

Zeitdilatation: bewegte Uhren laufen langsamer

Grund: Licht muss größere Wege zurücklegen.

im Eigensystem: $\Delta t' = 2\frac{L}{c}$

in „unserem“ System: $\Delta t = 2\frac{\bar{L}}{c}$

$$\bar{L}^2 = L^2 + \left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2$$

$$\Delta t^2 = \Delta t'^2 + \frac{u^2}{c^2} \Delta t'^2$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \Delta t' = \gamma \Delta t' \quad ; \Delta t \geq \Delta t'$$

Betrachtung im Minkowski Diagramm

Betrachtung mit Lorenz-Trafo

$$\begin{aligned} x'_0 = 0 & \quad \Rightarrow \quad x = ut \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{u}{c^2} ut \right) = \gamma \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) t = \frac{1}{\gamma} t \end{aligned}$$

Zeitdilatation

$$t' = \frac{1}{\gamma} t$$

Eigenzeit

τ : Tickdauer im Ruhesystem der Uhr *Beispiele*:

- Myonenzerfall - Lebensdauer $\tau = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$
Entstehung in Erdatmosphäre:
gemessene Lebensdauer $\tau' = 30 \cdot 10^{-6} \text{ s}$
- Nebelkammer

Zwillingsparadoxon Lösung: [Erdszwilling hat recht](#).
Modernes Experiment

I.4.4 Längenkontraktion

Die Längenkontraktion besagt, dass bewegte Gegenstände in Bewegungsrichtung kürzer erscheinen.

$$l = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} l' = \frac{1}{\gamma} l'$$

Längenkontraktion

$$l' = \gamma l$$

Minkowski-Diagramm:

Benutze Lorenz-Invarianz

Lorenz-Trafo:

$$t = 0$$

$$\begin{aligned} \text{LT für Ort: } x' &= \gamma(x - ut) = \gamma x \\ \Rightarrow l' &= x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma l \end{aligned}$$

Ruder-Filme

Lichtlaufzeit berücksichtigen

I.4.5 Doppler Effekt

Klassischer Doppler Effekt

$$f_B = f_S \frac{c + v_B}{c - v_S}$$

- bewegter Empfänger: $v_S = 0 \Rightarrow f_B = \left(1 + \frac{v_B}{c}\right) \cdot f_S$
- bewegter Sender: $v_B = 0 \Rightarrow f_B = f_S \frac{1}{1 - \frac{v_S}{c}} \approx f_S \left(1 + \frac{v_S}{c} + \frac{v_S^2}{c^2} + \dots\right)$

Relativistischer Doppler Effekt

$$f_B = f_S \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \cos \alpha \frac{v}{c}}$$

- $\cos \alpha = \pm 1$: longitudinaler DE
- $\cos \alpha = 0$: transversaler DE

[Folie: Relativistischer DE] zum Beispiel: Michelson-Interferometer

Laufzeit des Lichtes muss bei Lorenz-kontraktion berechnet werden. In QM wird gezeigt das alles Wärme Energie abstrahlt. Jetzt betrachten wir Farben.

[Folie: Video zu Bewegte Strahlung]

I.4.6 Aberration des Lichts

[Folie: Folien zur Aberration des Lichts, Fernrohr]

I.5 Relativistische Dynamik

Wir wollen jetzt die Newton Gleichungen Lorenz-invariant hinbekommen. Wobei wir das Fundamentale und die Erhaltungssätze nicht "kaputt" machen wollen.

Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Erhaltungssätze (Energie, Impuls, Drehimpuls)

Energieerhaltung: Homogenität der Zeit

Impulserhaltung: Homogenität des Raums

$\Rightarrow E$ und p Erhaltung auch in SRT

I.5.1 Impulserhaltung und relativistischer Impuls

Gedankenexperiment

Vorher: ●●

Nacher: $\xleftarrow{v_1} \bullet \bullet \xrightarrow{v_2}$
A

Im Laborsystem gilt $\mathbf{p}_{\text{vorher}} = \mathbf{p}_{\text{nacher}}$:

$$\Rightarrow 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_0(v - v) = 0$$

Im Ruhesystem von Körper A gilt dann:

$$u = -v_1 \quad , \quad v'_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (m_1 + m_2)v_1 = m_2 v'_2$$

Klassisch gilt somit:

$$m_1 = m_2 = m_0 \quad v'_2 = v_2 + v = 2v \quad \checkmark$$

In der **SRT** gelten aber folgende Additionstheoreme für Geschwindigkeiten:

$$v'_2 = \frac{v_2 - u}{1 - v_2 \frac{u}{c^2}} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

Dies liefert jedoch einen Widerspruch mit unserem zuverigen Ergebnis.

$$\Rightarrow v'_2 < 2v \quad \nleftrightarrow \text{Impulsbilanz nicht erfüllt}$$

Relativistischer Impuls

$$\mathbf{p} = m(v) \cdot \mathbf{v} = \boxed{\gamma(v)m_0\mathbf{v}}$$

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ω ist die Geschwindigkeit der Systeme zueinander.

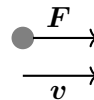
\mathbf{v} Die Geschwindigkeit des Körpers.

I.5.2 Energieerhaltung und relativistische Energie

Gedankenexperiment:

Beschleunigung eines Körpers in einem konstanten Kraftfeld.

\Rightarrow Körper gewinnt kinetische Energie.



$$E_{\text{kin}} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\begin{aligned} dE_{\text{kin}} &= F ds \stackrel{?}{=} \frac{dp}{dt} ds \\ &= m_0 d(\gamma v) \cdot v = m_0 v (v d\gamma + \gamma dv) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Trick: } 1 &= \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\ \Rightarrow 0 &= c\gamma d\gamma \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \gamma^2 \left(-\frac{2v}{c^2} dv\right) \\ \Rightarrow c^2 d\gamma &= v^2 d\gamma + \gamma v dv \\ \Rightarrow dE_{\text{kin}} &= m_0 c^2 d\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= m_0 c^2 [\gamma(v) - \gamma(0)] \\ &= \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 \end{aligned}$$

Einstein: $E = \gamma m_0 c^2 \hat{=}$ „Gesamtenergie“

$$\boxed{E = E_{\text{kin}} + m_0 c^2}$$

I.5.3 Relativistische Energie-Impuls-Beziehung und Viererimpuls

Dispersionsrelation: $E(\mathbf{p})$

Klassisch: $E(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m}$

SRT: $E = \gamma m_0 c^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E^2 &= \gamma^2 (m_0 c^2)^2 \text{ mit } \gamma^2 = 1 + \gamma^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 \\ \Rightarrow m_0 c^2 \gamma^2 &= m_0^2 c^2 + \gamma^2 m_0^2 v^2 = m_0^2 c^2 + \mathbf{p}^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow E^2 = (m_0 c^2)^2 + c^2 \mathbf{p}^2}$$

$$\boxed{E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + c^2 \mathbf{p}^2}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 = (m_0 c)^2$$

Viererimpuls

$$\hat{\mathbf{p}} = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{E}{c} \right)^2 - \mathbf{p}^2 \quad \text{ist Lorentz-invariant !}$$

\Rightarrow Die Ruhemasse m_0 ist Lorentz-invariant.

Was ist Masse?

Masse charakterisiert die Energie-Impuls-Beziehung relativistischer Teilchen $\hat{=}$ masseloser Teilchen $\hat{=} v = c \Leftrightarrow m_0 = 0$.

$$\Rightarrow E(\mathbf{p}) = c|\mathbf{p}|$$

Massebehaftete Teilchen, $m_0 > 0$, $v < c$

$$E(\mathbf{p}) = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + c^2 \mathbf{p}^2} \xrightarrow{v \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0}$$

I.5.4 Kraft und Energie-Impuls Erhaltung

klassisch gilt:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

und Impulserhaltung:

$$\mathbf{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{p} = \text{const.}, \quad E = \text{const.}$$

In der SRT gilt:

$$\hat{\mathbf{F}} = \gamma \left(m_0 c \frac{d\gamma}{dt}, F_x, F_y, F_z \right)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{p}}$$

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt$$

Relativistische Energie-Impuls Erhaltung

$$\hat{\mathbf{F}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\mathbf{p}} = \text{const.}$$

- Zeitanteil $\hat{=}$ Energieerhaltung: $E_{\text{ges}} = E(\mathbf{p}) + E_{\text{pot}} \dots = \text{const.}$
- Raumanteil $\hat{=}$ Impulserhaltung: $\mathbf{p}_{\text{nacher}} = \mathbf{p}_{\text{vorher}}$

I.5.5 Anwendungsbeispiele

Äquivalenz von Masse und Energie

$m_0 c^2$ ist eine Energie, also muss sie, rein physikalisch gesehen, frei umwandelbar sein.

Bindungsenergie: ein mehr Teilchensystem hat mehr Energie als die einzelnen Teilchen, diese zusätzliche Energie ist die Bindungsenergie und sie äußert sich als Massenänderung.

$$E = m_0 c^2$$
$$1 \text{ kg} \hat{=} m c^2 = 10^{17} \text{ J}$$

Weltenergieverbrauch ca.: $4 \cdot 10^{20} \text{ J} \hat{=} 4 \text{ T} / \text{Jahr}$

Bindungsenergie $\hat{=}$ Massenänderung

[Folie: Fusion/Kernspaltung]

$$\begin{aligned}p: \quad m_p &= 938,27 \frac{\text{MeV}}{c^2} \\n: \quad m_n &= 939,54 \frac{\text{MeV}}{c^2} \\{}^4\text{He}: \quad m_{\text{He}} &= 3727 \frac{\text{MeV}}{c^2} \\2n + 2p &= 3754 \frac{\text{MeV}}{c^2} \\ \Rightarrow \text{Bindungsenergie} &= 24 \frac{\text{MeV}}{c^2}\end{aligned}$$

[Folie: Bindungsenergie von Atomen] Kernspaltung/Kernfusion

Beispiel: Compton Effekt

Streuung eines Photons an einem (quasi-) freien, ruhenden Elektron

$$\Delta R = \lambda_c (1 - \cos \theta)$$

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Allgemeine Relativitäts Theorie: die Grundlage ist Masse in Gravitation.

I.6 Von der SRT zur ART

ART $\hat{=}$ allgemeine Relativitätstheorie

I.6.1 Äquivalenzprinzip (*die heilige Kuh der Physik*)

Träge und schwere Masse sind zwei unterschiedliche Größen aus den zwei Formeln. Fahrstuhl hat mein kein Bezug auf die Umwelt, man spürt nur eine Kraft.

Beobachtung: Träge Masse $\hat{=}$ schwere Masse $m_t = m_s$

$$\mathbf{F} = m_t \mathbf{a} \quad \text{träge Masse}$$

$$\mathbf{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|} \rightarrow \mathbf{F} = m_s \mathbf{g} \quad \text{schwere Masse}$$

[Folie: Fahrstuhl-Äquivalenzprinzip]

\Rightarrow In einem geschlossenen Raum gilt: Die Beschleunigung aufgrund einer Kraft ist nicht von der Gravitation zu unterscheiden \mathcal{O}

Experimente:

- Pendel
- Satellite: lokales Inertialsystem das Kräftefrei ist
- Freie-Fall-Experimente (Parabelflug bei Flugzeugen oder Freifall Experiment Turm)
[Folie: Freifall Experiment Turm in Bremen]

Äquivalenzprinzip war anfangs auf 1 g bestätigt aber mittlerweile sehr genau, also wollen wir es aufrecht erhalten.

[Folie: Wie genau ist das Äquivalenzprinzip bestätigt]

[Folie: Verletzungen des Äquivalenzprinzips]

Äquivalenz Prinzip, drei Formulierungen

Inertialsysteme gelten nur in kleinen Raumbereichen da die Gravitationskraft abhängig von r^2 ist.

[Folie: Verletzung des Äquivalenzprinzips]

Die gravitation ist bis heute noch ein ungelöstes problem. Ähnlich wie Newton und Maxwell, an irgend einer stelle müssen wir was korrigieren da die Theorien der Wechselwirkungen nicht vereinbar sind. Vielleicht existiert eine fünfte fundamentale Kraft.

- 1) Ein kleines Labor, welches in einem Schwerfeld frei fällt ist äquivalent zu einem lokalen Inertialsystem, in welchem die Gesetze der SRT gelten.
- 2) Beobachte im Fahrstuhl, Raumschiff (ohne Antrieb):
⇒ Es ist nicht entscheidbar ob man sich gradlinig im freien Raum oder beschleunigt im Gravitationsfeld bewegt.
- 3) Der freie Fall ist Äquivalent zur Schwerelosigkeit

I.6.2 Gravitation und Raumkrümmung

Die Abweichung von einer geraden Bahn kann man auf zwei Arten definieren oder festlegen:

- (i) Kraft oder
- (ii) Krümmung des Raums

[Folie: zur Raumkrümmung]

Idee: Gravitation nicht mehr als Kraft, sondern als Krümmung des Raums betrachten.

Gilt nur für die Gravitationskraft!

Mathematisch: Gravitation beeinflusst die Metrik des Raums

Ein weg ist ict^2 zu verwenden damit ein minus bei dem Skalarprodukt auftaucht, eine andere option ist das Skalarprodukt anders zu definieren zum Beispiel mit einem Vektor $(1, 1, 1, -1)$. Die Feldgleichungen der ART sind tatsächlich sehr kompliziert und werden meistens nicht behandelt.

Konsequenzen:

- Raum und Zeit sind nicht statisch, sondern dynamisch
- Inertialsystem nur noch lokal, im homogenen Schwerfeld

I.6.3 Periheldrehung des Merkurs

Kepler'sche Bahngesetze [Folie: zur Periheldrehung des Merkur]

⇒ geschlossene Ellipsen mit der Sonne im Brennpunkt

Beobachtung beim Merkur:

Periheldrehung 5,74" pro Jahr

[Folie: Merkur Umlaufbahn]

Merkur ist nah an der Sonne da treten diese Periheldrehungen deutlicher auf. Was kann diese Bewegung laut Newton beeinflussen? Andere Planeten.

Rechnungen nach Newton mit Einbeziehung der Potentiale der anderen Planeten: 0,4311" pro Jahr mehr als die gemessene

ART: Überschuss von 0,4303" pro Jahr

I.6.4 Ablenkung von Licht durch Gravitation

[Folie: zur gravitativen Ablenkung von Licht][Folie: Bilder zur Ablenkung von Licht um die Sonne bei einer Sonnenfinsternis]

Durch die Sonnenfinsternis konnte ein Stern beobachtet werden dessen Position am Himmel sich durch der Lichtbeugung verändert während die Sonne sich in der Nähe bewegt. Dies hat dieses Phänomen bestätigt.

⇒ Sonnenfinsternis 1919

[Folie: Mehr Bilder zu Gravitationslinsen][Folie: Video: zu Gravitationslinsen]

I.6.5 Gravitationswellen

Indirekte Beobachtung umkreisender Neutronensterne PSR1913+16

Abstrahlung von Gravitationswellen ⇒ Energieverlust → Sterne kommen sich immer näher.
Nobel Preis 1993

Direkte Beobachtung: Detektoren durch Relativbewegung von Massen

- (i) Resonanzdetektor
- (ii) interferometrische Detektoren (Michelson-Morley)
[Folie: zu Michelson Interferometern]
11. Februar 2016: LIGO
Nobel Preis 2017

I.6.6 Global Positioning System (GPS)

gegeben: Satelliten, Atomuhren, $3,87 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ in Höhe von ca. 20000 km

SRT: ⇒ Zeitdilatation um $\approx 7 \mu\text{s}/\text{Tag}$

ART: ⇒ Zeitdilatation um $\approx 45 \mu\text{s}/\text{Tag}$

⇒ Ortsmessung um ca 11,4 km/Tag verschoben falsch

Kapitel II

Geometrische Optik

II.1 Lichtstrahlen

Licht hat eine **Ausbreitungsgeschwindigkeit** $s = ct$. Diese Geschwindigkeit ist nur im Vakuum konstant und hängt von der Materie die der Lichtstrahl durchläuft ab. Diese Geschwindigkeit im Medium ist gegeben durch den **Brechungsindex**.

$$n = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{c_{\text{Medium}}}$$

Luft: $n = 1,00027$

Wasser: $n = 1,333$

Diamant: $n = 2,417$

Warum ist das denn so? Wie interagieren die elektromagnetischen Felder des Lichtstrahls also mit der Materie?

Antwort:

Die Ladungsträger in der Materie erfahren aufgrund der elektrischen Felder eine Kraft. Die Ströme der bewegten Ladungen Wechselwirkungen mit den Magnetischen Feldern, jedoch ist dieser Effekt viel kleiner als der der \mathbf{E} -Felder.

Die Elektronen kann man sich mit einer Feder an der Atomkern gebunden Vorstellen. Mit dem \mathbf{E} -Feld des Lichtstrahls haben wir das Modell eines getriebenen gedämpften harmonischen Oszillators: Das Lorenz-Lorenz-Oszillator Modell

Genaugenommen kann man sich das auch so Vorstellen, dass die Photonen immer wieder absorbiert und nach einer Zeitverzögerung abgestrahlt werden, jedoch ist dies schwer zu berechnen.

Bemerkung:

zwei Medien $n_1 > n_2$

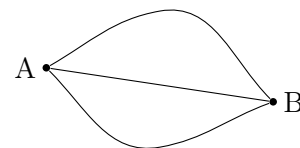
n_1 : optisch dichter

n_2 : optisch dünner

II.2 Das Fermat'sche Prinzip

II.2.1 Fermat'sches Prinzip

Die Ausbreitung des Lichts zwischen zwei Punkten erfolgt auf dem Weg, für den die benötigte Zeit extremal ist.



⇒ Konsequenz

Der Strahlengang ist umkehrbar ☺

Mathematische Handwerkzeuge

$$t = \frac{1}{c_{\text{Vakuum}}} \int_{P_1}^{P_2} n(s) ds$$

Parametrisierung des Wegs τ

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$$

$$t(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_{\text{Vakuum}}} \int_{P_1}^{P_2} n(\mathbf{x}(\tau)) \sqrt{\left(\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}\right)^2} d\tau$$

II.2.2 Weg zwischen zwei Punkten A und B

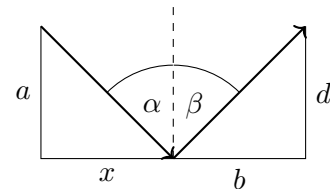
A • ————— • B

II.2.3 Reflexionsgesetz

[Folie: zu Reflexion an Oberflächen]

Berechnung der Wegstrecke

$$s(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{d^2 + (b-x)^2}$$



Extremum:

Da wir uns in einem homogenen Medium befinden und die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, ist die Strecke s proportional zur Zeit t und wir können das Extremum der Strecke berechnen.

$$\frac{ds}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}}_{\sin \alpha} = \underbrace{\frac{b-x}{\sqrt{d^2 + (b-x)^2}}}_{\sin \beta}$$

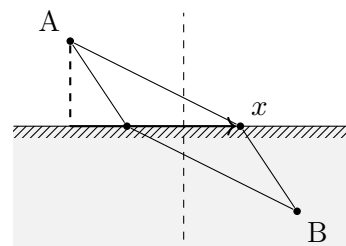
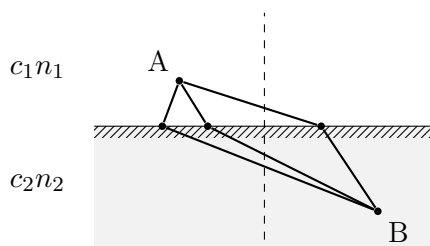
Reflexionsgesetz

$$\sin \alpha = \sin \beta$$

Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel.

II.2.4 Brechungsgesetz von Snellius

$$n_1 \neq n_2 \quad \Leftrightarrow \quad n(s) \neq \text{const.}$$



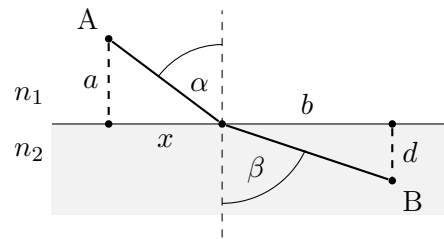
Berechnung des Laufzeit des Lichts

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(b-x)^2 + d^2}}{c_2} = \frac{1}{c} \left(n_1 \sqrt{x^2 + a^2} + n_2 \sqrt{(b-x)^2 + d^2} \right)$$

[Folie: zu Brechung] $\frac{dt}{dx} = 0$

Brechungsgesetz

$$\Rightarrow n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$$



II.3 Einfache Anwendungen

II.3.1 Totalreflexion

→ siehe Experimentalphysik II

[Folie: zur Totalreflexion z.B. unter Wasser]

$$\sin \alpha_{TV} = \frac{n_2}{n_1}$$

II.3.2 Optisches Prisma

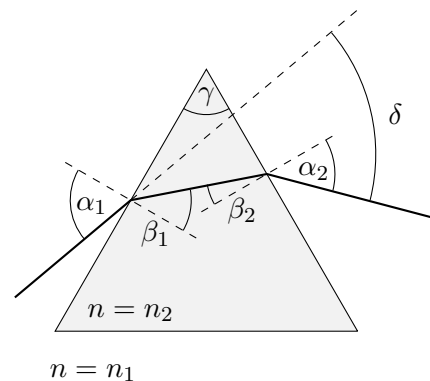
Bei Drehung des Prismas kann der Winkel δ verändert werden. Hier gibt es ein Minimum, jedoch kann er nie null werden, da das Licht nie gerade durch das Prisma hindurch kommen kann.

Beobachtung I

Die Ablenkung ist minimal für den symmetrischen Strahlengang

$$\sin \frac{\delta_{\min} + \gamma}{2} = n \sin \frac{\gamma}{2}$$

[Folie: Demtröder: Prisma]



Berechnung:

$$(i) \quad \gamma = \beta_1 + \beta_2$$

$$(ii) \quad \delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2$$

$$(iii) \quad \sin \alpha_1 = n \sin \beta_1 \quad , \quad \sin \alpha_2 = n \sin \beta_2$$

gesucht ist $\frac{d\delta}{d\alpha_1} = 0$

\Rightarrow

$$(i) \quad d\gamma = d\beta_1 + d\beta_2 = 0$$

$$(ii) \quad d\alpha_1 = d\alpha_2 \quad (\delta = \alpha + \alpha - \gamma) \quad (d\delta = 0)$$

$$(iii) \quad \cos \alpha_1 d\alpha_1 = n \cos \beta_1 d\beta_1 \\ \cos \alpha_1 d\alpha_2 = n \cos \beta_2 d\beta_2$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \alpha_1 \cancel{d\alpha_1}}{\cos \alpha_2 \cancel{d\alpha_2}} = \frac{\cos \beta_1 \cancel{d\beta_1}}{\cos \beta_2 \cancel{d\beta_2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \sin^2 \alpha_1}{1 - \sin^2 \alpha_2} = \frac{1 - \sin^2 \beta_1}{1 - \sin^2 \beta_2} = \frac{n^2 - \sin^2 \alpha_1}{n^2 - \sin^2 \alpha_2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta_1 = \beta_2 \end{array} \right\} \text{symmetrischer Strahlengang}$$

$$\Rightarrow \delta_{\min} = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma = 2\alpha - \gamma \quad \gamma = 2\beta$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = n \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \sin \frac{\delta_{\min} + \gamma}{2} = n \sin \frac{\gamma}{2}$$

□

Bemerkung:

Dieser Zusammenhang wurde früher zur Bestimmung von n genutzt ☹

Professor redet darüber, dass wir immer kompliziertere Experimente verstehen können, und diese aufgrund des Aufwands bei der Ausführung nicht mehr immer in der Vorlesung gezeigt werden können. Wir sollen lernen uns Experimente vorzustellen ohne sie direkt zu sehen und die Formeln als Handlungsanweisungen zu sehen die wir nutzen können. Abgesehen davon sollen wir uns auch im klaren darüber sein wie genau verschiedene Messmethoden sind.

Beobachtung II

optische Dispersion:

$$\frac{dn(\lambda)}{d\lambda} < 0 \quad (\text{normale Dispersion})$$

(Bei der anormalen Dispersion ist $\frac{dn(\lambda)}{d\lambda} > 0$)

[Folie: zur Dispersion: Beispiel Regenbogen]

Wieso gibt es Dispersion? Vorstellung: Die Atome mit ihren Elektronen haben Resonanzfrequenzen. Somit ist die erzwungene Schwingung die die Licht-Welle in der Materie anregt, von der Frequenz des Lichts abhängig.

Die meisten Resonanzfrequenzen liegen im Ultraviolett-Bereich. Deshalb sehen wir meist normale Dispersion. Im Bereich über Ultraviolett Licht ist auch anormale Dispersion Beobachtbar.

⇒ Experimentalphysik II

II.4 Sphärische, dünne Linse

Zunächst einmal betrachten wir sphärische Linsen speziell dünne Linsen: Wir betrachten die dünne Linse als eine unendlich-dünne Linse, da wir hierbei einige vereinfachungen machen können (Taylor-entwicklungs-Terme fallen weg).

II.4.1 Brennpunkt und Brennebene

[Folie: zur Sammel- und Streulinsen]

Wir betrachten zunächst den Strahlengang einer Linse:

Lieblingsprüfungsfrage: Parallel einfallendes Licht, das nicht parallel zur optischen Achse verläuft, in eine Sammellinse. Strahlen werden immer noch fokussiert aber Brennpunkt verschoben. Konstruktion mit Zentralstrahlengang ?

[Folie: zur der Lieblingsfrage]

3 Regeln zur Konstruktion von Strahlengängen

Nur für dünne Linsen:

- 1) Parallel einfallende Strahlen fallen durch den Brennpunkt aus
- 2) Durch Brennpunkt einfallender Strahlen fallen parallel aus
- 3) Der Zentralstrahl wird nicht abgelenkt

II.4.2 Berechnung des Brennpunktes bzw. der Brennweite

Bei der Streulinse genau dasselbe nur ein negatives Vorzeichen an der Brennweite.

[Folie: zu Strahlengängen durch Sammellinsen]

Ein Linsenstück im Abstand h von der optischen Achse betrachten wir als Prisma.

Näherungen der „dünnen“ Linse

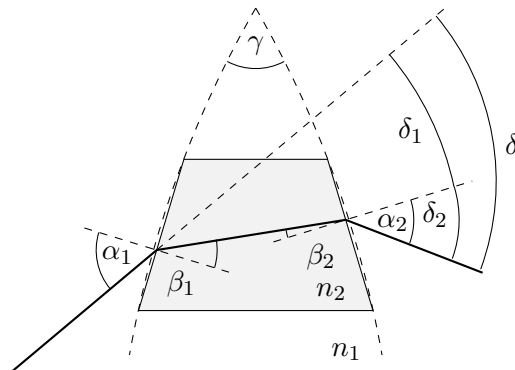
alle Winkel sind klein \rightarrow trigonometrische Näherungen

$$\sin(x) \approx x \quad \cos(x) \approx 1 \quad \tan(x) \approx x$$

Berechnung:

Ablenkung des Strahls

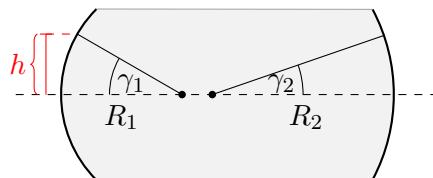
$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2 \\ \text{(ii)} \quad & \beta_1 + \beta_2 = \gamma \\ \text{(iii)} \quad & n_1 \alpha_1 \approx n_2 \beta_1 \quad n_2 \beta_2 \approx n_1 \alpha_2 \\ \Rightarrow \quad & \delta = \gamma \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \end{aligned}$$



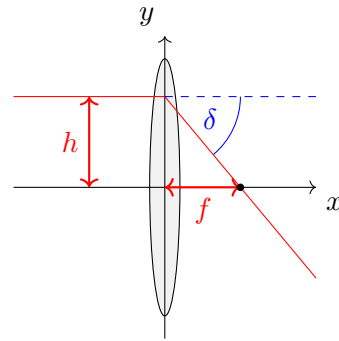
Winkel γ :

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \quad & \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \\ \text{(v)} \quad & \gamma_1 \approx \frac{h}{R_1} \quad ; \quad \gamma_2 \approx \frac{h}{R_2} \\ \Rightarrow \quad & \gamma = h \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

Winkel δ :



(vi) $\delta \approx \frac{h}{f}$



Linsenschleiferformel

$$\Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

\Rightarrow Die Brennweite f ist unabhängig von h . Hätte wir oben keine Näherungen für die Winkelfunktionen benutzt (bei allen Rundungssymbolen), dann wäre die Brennweite abhängig von der Höhe h . Hier sehen wir, dass die Gleichung für eine dünne Linse nur eine annäherung an echte Linsen ist.

Def: Brechkraft

$$D = \frac{n}{f}$$

Bemerkung:

$$D = D_{\text{Vorne}} + D_{\text{Hinten}}$$

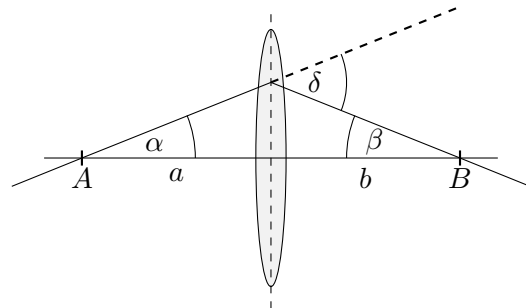
II.4.3 Abbildung (am Beispiel einer Sammellinse)

Berechnung:

i) $\delta = \alpha + \beta$

ii) $\alpha \approx \frac{h}{a} \quad \beta \approx \frac{h}{b}$

iii) $\delta \approx \frac{h}{f}$



Abbildungsgesetz

$$\Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Abbildung eines Gegenstands G :

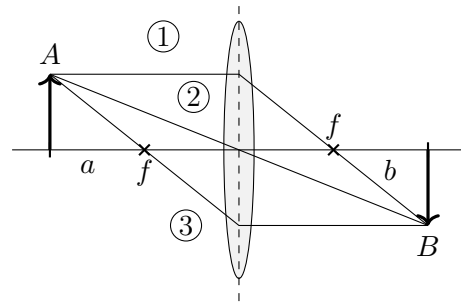
Graphisch:

- (1) parallel ein \rightarrow durch Brennpunkt aus
- (2) durch Brennpunkt ein \rightarrow parallel aus
- (3) Zentralstrahl läuft gerade

Rechnerisch

(i) $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

(ii) $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$



II.5 Abbildungsfehler

⇒ Beschränkung durch Beschreibung mit geometrischer Optik

⇒ Näherungen (dünne Linse)

II.5.1 Dicke Linsen

[Folie: Dicke Linsen]

Brechung der Lichtstrahlen an zwei Hauptebenen

II.5.2 Sphärische Abberation

[Folie: Sphärische Abberation]

II.5.3 Chromatische Abberation

[Folie: Chromatische Abberation]

optische Dispersion

II.5.4 Astigmatismus

[Folie: Astigmatismus]

II.5.5 Absorption

Bei verunreinigten Stoffen wird Licht absorbiert.

II.5.6 Beugung

Werden wir später behandeln.

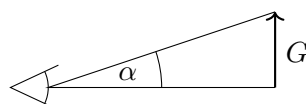
II.5.7 Optisches Auflösungsvermögen

Mit freilaufenden Wellen lassen sich keine Strukturen auflösen, die deutlich kleiner sind als die Wellenlänge λ sind.

II.6 Optische Instrumente

II.6.1 Vergrößerung

Sehwinkel:



$$\tan \alpha = \frac{\text{Größe des Objekts}}{\text{Entfernung des Objekts}}$$

Winkelvergrößerung

$$V = \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel ohne Instrument}}$$

Lateralvergrößerung oder Abbildungsmaßstab

$$L = \frac{\text{Bildgröße}}{\text{Gegenstandsgröße}}$$

II.6.2 Das menschliche Auge

[Folie: menschliches Auge]

Hornhaut & Linse. Die Hornhaut hat den größten Beitrag zur Brechung

Definition: Brennweite der deutlichen Sehweite

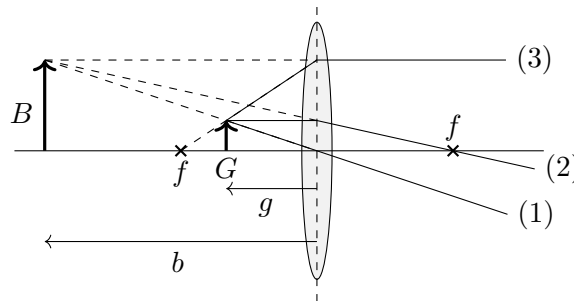
25 cm

$$\Rightarrow \tan \alpha_{\text{Auge}} = \frac{G}{25 \text{ cm}}$$

Vergrößerung

$$V = \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\alpha_{\text{Auge}}} = (\text{Sehwinkel mit Instrument}) \frac{25 \text{ cm}}{G}$$

II.6.3 Optisches Instrument mit einer Linse: Lupe



Gegenstand nahezu in Brennebenen, $g < f$

Graphisch: siehe oben

Rechnerisch: Abbildungsgesetz der Lupe $\frac{1}{g} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$

Abbildungsmaßstab

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} = \frac{f}{f - g} = \frac{f + b}{f}$$

Vergrößerung:

Sehwinkel des Instruments

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{G}{f} \quad (g \approx f)$$

$$\Rightarrow V = \frac{\alpha}{\alpha_{\text{Auge}}} = \frac{G}{f} \frac{25 \text{ cm}}{g} = \frac{25 \text{ cm}}{f}$$

II.6.4 Optische Instrumente mit zwei Linsen

zwei Linsen = drei Fälle:

Doppellinse, Fernrohr, Mikroskop

1) Doppellinse: Abstand der Linse \ll Brennweiten f_1, f_2

[Folie: zu Doppellinsen]

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ f_1 \quad f_2 \quad \hat{=} \quad \text{---} \\ \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \end{array}$$

Berechnung:

b_1 der 1ten Linse = virtuelle Gegenstandsweite $a_2 = b_1 - D$ der zweiten Linse

$$1. \text{ Linse } \frac{1}{a} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}$$

$$2. \text{ Linse } -\frac{1}{b_1 - D} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_2}$$

\Rightarrow

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

$$D_{\text{ges}} = D_1 + D_2$$

2) Fernrohr (Kepler): Abstand der Linsen = Summe der Brennweiten $f_1 + f_2$

\Rightarrow Zwischenbild in der Brennebene

Sehwinkel vor Objektiv:

$$\alpha \approx \frac{B}{f_1}$$

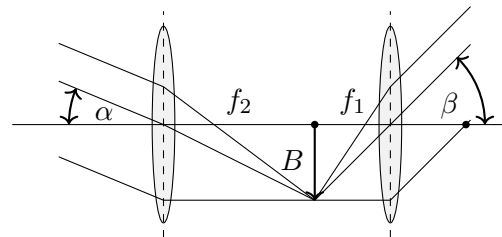
Sehwinkel nach Okular:

$$\beta \approx \frac{B}{f_2}$$

\Rightarrow Vergrößerung $V = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{B}{f_2} \frac{f_1}{B} = \frac{f_1}{f_2}$ *Bemerkung:*

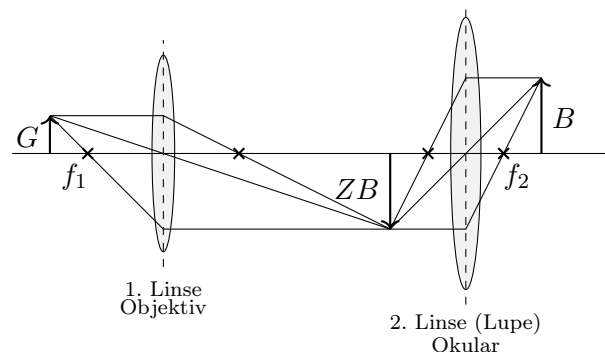
- Kepler Fernrohr: Bild wird invertiert
- Galilei Fernrohr: Sammellinse und Zerstreuungslinse
keine Invertierung und kürzere Bauweise
- Fernglas:

[Folie: Galilei Fernrohr und Fernrohr mit drei Linsen]



3) Mikroskop: Abstand der Linsen \gg Summe der Brennweiten $f_2 + f_1$

Gegenstand nah am Objektiv



[Folie: anderes Bildschema Mikroskop] Veränderung durch Änderung der Tubuslänge

Verstärkung durch Objektiv $V_1 = \frac{B}{G} = \frac{b}{f_1}$

Verstärkung durch Okular $V_2 = \frac{25 \text{ cm}}{f_2}$

⇒ Vergrößerung:

$$V = V_1 V_2 = \frac{t \cdot 25 \text{ cm}}{f_1 f_2}$$

$t \approx 28 \text{ cm}$ wurde so definiert um den Vergleich von Geräten zu vereinfachen.

II.7 Elektronenoptik

[Folie: Elektronen Strahl]

Die Idee hier ist das man einen Elektronen der von einem E -Feld abgelenkt wird als wie eine optische Beugung betrachten...

Elektronenstrahl Ablenkung durch elektrische und magnetische Felder

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

II.7.1 Beispiel: Brechungsgesetz für Elektronen

$$\sin \alpha = \frac{v_{1,x}}{v_1} \quad \sin \beta = \frac{v_{2,x}}{v_2}$$

el. Feld entlang x

$$v_{1,x} = v_{2,x}$$

$$\Rightarrow v_1 \sin \alpha = v_2 \sin \beta$$

Definition

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_2}{v_1}$$

Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + eU$$
$$v_1 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2e(U + U_0)}{m}}$$

⇒ Brechindex

$$\frac{n_2}{n_1} = \sqrt{1 + \frac{U}{U_0}}$$

II.7.2 Elektrische Rohrlinse

II.7.3 Magnetische Linsen

Lange Spule = homogenes Magnetfeld

Lorentz Kraft ⇒ Spiralbahnen der Elektronen ⇒ Bild wird gedreht

⇒ kleine Spule = inhomogene Magnetfelder ⇒ Brechkraft

[Folie: Elektronen in Magnetfeldern]

II.7.4 Elektronenmikroskope

[Folie: Elektronenmikroskop] Man kann ein Material untersuchen in dem man die Streuelekttronen analysiert die bei dem Elektronenmikroskop entstehen. Bei der SRT muss man nach Gedankenfehler suchen, bei Optik müssen die Näherungen anschauen als Fehlerquelle, Zahnmedizinerinnen würden alle Fehlerpunkte auswendig gelernt haben, während ein Physiker überlegen "ok, wir haben die geometrische Optik angewandt also alles was da schief gehen kann und so weiter."

Kapitel III

Wellenoptik

III.1 Wiederholung (Schwingungen und Wellen)

III.1.1 Schwingungen

[Folie: Harmonische Schwingungen] Zwei größen: Amplitude und Phase, und zwei komponenten: inphase, und out of phase

III.1.2 Wellen

[Folie: Harmonische ebene Welle, Polarisation, Kugelwellen]
Harmonische Ebene Welle in 1D

$$A(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) = \Re \left[\hat{A} e^{-i(\omega t - kx)} \right]$$

Das Minus in der Komplexen Schreibweise Stammt aus der Wellengleichung. Es kommt auch aus der Lorenzinvarianten.

Da EM-Wellen Transversalwellen sind und Ladungserhaltung/Eichinvarianz gilt, kann es nur zwei Polarisationsrichtungen geben.

[Folie: Wellengleichung]

III.1.3 Fourier-Transformation

Ein Thema das nie richtig behandelt wird, aber wichtig ist, vielleicht leiste ich heute ein Beitrag dazu.

Harmonische Schwingungen:

$$A(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi) = \Re[\hat{A}_0 e^{-i\omega t}]$$

Periodische Schwingungen: Fourier-Reihe

$$A(t) = A(t + T) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(m\omega_0 t + \varphi_n) = \Re \left[\sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n e^{-in\omega_0 t} \right]$$
$$\omega_m \leq n\omega_0$$

Beliebige Zeitabhängigkeit: Fourier Transformation

$$A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega = \Re \left[\int \hat{A}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right]$$

Bemerkung: Wir können zwei Fourier Transformationen machen, nach Ort und nach Zeit.

- Umkehr Transformation: Faktor 2π taucht auf
- Analog für $e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$
- Die Fourier Transformation impliziert eine "Unschärfe Relation" Eine Eigenschaft der FT

$$\Delta\omega t \approx \mathcal{O}(2\pi) \quad \Delta\mathbf{k}\Delta\mathbf{x} \approx \mathcal{O}(2\pi)$$

Beispiel: Gedämpfte Schwingung, Zerfall, Relaxation
Exponentielles Abklingverhalten

$$A(t) \propto e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \Leftrightarrow \quad = \text{Lorentz-Funktion}$$

τ : Zeitkonstante [Folie: Zeitraum/Frequenzraum]

Ein exponentieller Zerfall ist immer mit der Lorentz-Funktion verbunden. Eine ungedämpfte harmonische Schwingung: $\tau = \infty$.

Eine unendlich langer, unendlich langsamer Schwingung ist im Frequenzraum unendlich scharf. Eine ungedämpfte harmonische Schwingung ist also im Frequenzraum unendlich scharf und wird damit zu einer Dirac-Delta-Funktion mit dem Peak bei der Frequenz der Schwingung. Eine solche Welle ist im Ortsraum überall verteilt.

Beispiel: Wellenpaket ebene Welle: $E(\mathbf{x}, t) = E_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x})}$

$$\Rightarrow |E|^2 = E_0^2 = \text{const.}$$

[Folie: Wellenpakete]

Im Wellenvektorraum ist sie jedoch wieder mit einer Delta-Funktion beschrieben. Ein Wellenpaket ist im Ortsraum lokalisiert aber im Wellenvektorraum sehr unscharf verteilt.

Die Fouriertransformation einer Gauß-Verteilung (wird oft für Wellenpakete verwendet) ist wieder eine Gauß-Verteilung. Die Fouriertransformation einer Exponentiell Abfallenden Welle ist eine Lorentz-Funktion.

III.1.4 Kohärenz

Definition Zwei oder mehr Wellen sind Kohärent, wenn die Zeitabhängigkeit der Auslenkungen bis auf eine Phasendifferenz der gleiche ist^Q

Viele gründe warum Wellen nicht kohärent sind:

- spontan emittiertes Licht vieler unabhängiger Lichtemitter (heiße Atome)
- zwei Lichtquellen schwanken leicht in Frequenz Amplitude, Phase (nicht stabil)
- zu ausgedehnte Lichtquelle

Gegenbeispiele:

- stimulierte Emission: einfallendes Licht zwingt angeregte Atome synchron mit dem Lichtfeld zu Schwingen und abzustrahlen.

Kohärenzlänge:

Kohärenzlänge: Keine Lichtquelle kann unendlich kohärentes Licht erstellen. Die minimal unterschiedlichen Frequenzen sorgen dafür, dass das Licht nach einer Weile nicht mehr kohärent ist. Die Flugweite der Lichtstrahlen bis die Kohärenz nicht mehr gegeben ist, nennt man Kohärenzlänge.

Kohärenzzeit:

Die dauer in der Kohärentes Licht nicht nicht mehr kohärent wird nennt man Kohärenzzeit.

Kohärenzzeit = Kohärenzlänge/ c

Experimente:

- (i) Licht mit genügend großer Kohärenzlänge
- (ii) Licht aus **einer** Quelle aufteilen, wenn mehrere Kohärente Strahlen benötigt werden.

III.2 Intefferenz und Beugung I

III.2.1 Intefferenz am Doppelspalt

Berechnung der Maxima und Minima

Gangunterschied $x = d \sin \alpha$

Maxima wenn x ein Vielfaches von λ ist (konstruktive intefferenz)

$$\rightarrow x = n\lambda$$

$$\Rightarrow \text{Maxima: } \sin \alpha = n \frac{\lambda}{d}$$

$$\Rightarrow \text{Minima: } \sin \alpha = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d}$$

Triviale aber Wichtige Feststellung: nicht nur d , nicht nur λ , sondern $\frac{\lambda}{d}$
Bemerkung:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Rightarrow kx = 2\pi n$$

$$\Delta f = 2\pi n = kx = \frac{2\pi}{\lambda} x$$

Feststellung: Ortsraum k -Raum reziprok

III.2.2 Beugung am Einzelspalt

Brechung der Intensitätsverteilungen $I(\alpha)$, in 6 Schritten

- (1) Strahl über Spalt wird in N Teilstrahlen zerlegt im Abstand: $\Delta b = \frac{b}{N}$
- (2) Amplitude eines Teilstrahls $= a = \frac{\sqrt{I_0}}{N}$
- (3) Gangunterschied benachbarter Strahlen: $x = \Delta b \sin \alpha$
- (4) Phasenunterschied benachbarter Strahlen: $\Delta \varphi = kx = k \Delta b \sin \alpha$
- (5) Gesamtamplitude $\hat{=}$ Summe der N Teilstrahlen

$$\Rightarrow A = a \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i(\omega t + f_n)} = a e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Delta\varphi}$$

f_n ist die Phase des n -ten Teilstrahls

$$A = e^{-i\omega t} \frac{e^{iN\Delta\varphi} - 1}{e^{i\Delta\varphi} - 1} = a e^{-i\omega t} e^{i\frac{N\Delta\varphi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\Delta\varphi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)}$$

$$\Rightarrow I(\alpha) = A^2 = a^2 \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}\Delta\varphi\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)} = a^2 \frac{\sin^2(x)}{\sin^2\left(\frac{x}{N}\right)} \quad x := \pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha$$

(6) Grenzübergang $\Delta b \rightarrow 0$ oder $N \rightarrow \infty$:

$$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{x}{N}\right) = \frac{x^2}{N^2}$$
$$\Rightarrow I(\alpha) = N^2 a^2 \frac{\sin^2(x)}{x^2}$$

Lösung:

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2(x)}{x^2} \quad x := \pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha$$

Diskussion:

Hauptmaxima: $x = 0 \rightarrow \alpha = 0$

Minima: $\sin x = 0 \rightarrow x = n\pi \Rightarrow \sin \alpha = n \frac{\lambda}{b}$

Nebenmaxima: $|\sin x| = 1 \rightarrow x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \Rightarrow \sin \alpha = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{b}$

Die Gleichungen sind unabhängig vom Abstand des Schirms. Die stammt aus der Annahme es handelt sich um Ebene Wellen, es nur die nur im Fernbereich gibt. Daher gelten unsere Gleichungen und Annahmen auch nur im Fernbereich. Ist der Abstand zum Schirm nicht Wesentlich größer als die Spaltbreite oder der Abstand der Spalten, gelten sie nicht mehr. Mehr dazu im Abschnitt Interferenz und Beugung II.

ACHTUNG:

Implizit Annahme ebener Wellen \Rightarrow Rechnung nur richtig im Fernbereich ☹

III.2.3 Beugung am Gitter

Definition:

Gitter: Regelmäßige Anordnung von „Strichen“ [Folie: Licht am optische Gitter] (wieder Annahme ebener Wellen)

Brechungs

(1) Überlagerung von N Strahlen im Abstand d

(2) Amplitude eines Strahls $a = \sqrt{I_0}$

(3) Gangunterschied von benachbarten Strahlen $x = d \sin \alpha$

Weiter wie beim Einzelspalt:

(4) Phasenunterschied $\Delta\varphi = kx = kd \sin \alpha$

(5) Gesamtamplitude $\hat{=}$ Summe der Teilstrahlen

$$\Rightarrow A = a e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Delta\varphi}$$

$$\Rightarrow A(\alpha) = A_0 \frac{\sin\left(\pi \frac{Nd}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\sin\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin \alpha\right)} \quad A_0 : \text{geeignet definiert}$$

$$I(\alpha) = A^2$$

[Folie: Interferenzmuster in Abhängigkeit der Spaltenzahl]

Diskussion:

Hauptmaxima: Nenner klein $\pi \frac{d}{\lambda} \sin \alpha = m\pi$

$$\Rightarrow \sin \alpha = m \frac{\lambda}{d}$$

Nebenmaxima: Zähler klein $\pi \frac{Nd}{\lambda} \sin \alpha = m\pi$

$$\Rightarrow \sin \alpha = m \frac{\lambda}{Nd}$$

Breite der Hauptmaxima:

Verhält sich wie der Abstand benachbarter Nebenmaxima

$$\Rightarrow B = \frac{2\lambda}{Nd}$$

Dispersion der Hauptmaxima (λ bzw. ω Abhängigkeit)

Lage: $\sin \alpha = m \frac{\lambda}{b}$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha}{d\lambda} = \frac{m}{d} \arccos \alpha \Rightarrow \frac{d\alpha}{d\lambda} > 0$$

Wenn ihr eine scharfe Linie wollt sollte euch sofort Gitter einfallen.

III.2.4 Beugung am Raum- oder Oberflächengitter

Definition:

Raumgitter: Kristall $\hat{=}$ regelmäßige Anordnung von Atomen im 3D Raum [Folie: Diamant Kristallgitter]

$$\Rightarrow 2d \sin \alpha = m\lambda \quad \text{Bragg-Bedingung}$$

d ist der Abstand von zwei Kristall-Ebenen oder Netzebenen **Versuch:** Doppelspalt

Typischer Zahlenwert:

$$d \approx 1 \text{ \AA} \Rightarrow \lambda \approx 1 \text{ \AA} \approx \text{Röntgenstrahlung oder X-Ray}$$

Versuch: Gitter

Versuch: Kristall Struktur Messung mit Röntgenstrahlung

Anwendung von Kristallen: Röntgenstrukturanalyse mittels Röntgendiffraktometer

X-Ray: Die Wechselwirkung von Röntgenstrahlung mit Materie ist die mit den Elektronen also der Lorentz-Lorenz-Oszillator $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Die Röntgenstrahlung Wechselwirkt also mit den Ladungen. Was wir beobachten ist also die Lage der Elektronen also nur indirekt die Lage der Atome.

Beispiel: Strukturanalyse von Kristallen

- X-ray: $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$
 - Streuung an der Elektronenhülle
 - Bestimmung der Elektronenladungshülle
- Neutronen n : starke WW
 - Streuung am Kern
 - Bestimmung der Kernpositionen

- Spin: magnetische Dipol-Dipol-WW
 - Streuung an Elektronenspins
 - \Rightarrow Magnetismus

Wie gut kommen Elektronen durch material durch? Überhaupt nicht gut, bei Isolatoren ist es in dem sehr kleinen 0,000... ÅBereich, bei metallen trifft das Elektron gleich auf den "Elektronen See".

Beispiel: Untersuchung von Oberflächen LEED (Low Energy Electron Diffraction)

- e^- :
 - Streuung an der Elektronenhülle
 - Eindringtiefe $\approx 100 \text{ Å} \Rightarrow$ Oberflächenanalyse

Die **Energie von Raumtemperatur** ist ungefähr $\frac{1}{40} \text{ eV}$. Sollte man Wissen.
[Folie: zu LEED]

III.2.5 Interferenz an planparallelen Glasplatten

[Folie: zu Reflexion an einer Glasplatte]

Reflexion

- (1) Länge der Wege \overline{AB} und \overline{BC}

$$x_{AB} = \frac{d}{\cos \beta} \quad x_{BC} = \frac{d}{\cos \beta}$$

- (2) Weg \overline{AD}

$$x_{AD} = \overline{AC} \sin \alpha = 2d \tan \beta \sin \alpha$$

- (3) Gangunterschied

$$x = n(x_{AB} + x_{BC}) - x_{AD}$$

n : Brechungsindex der Glasplatte
mit $\sin \alpha = n \sin \beta$ gilt:

$$x = 2dn \cos \beta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

- (4) Phasenunterschied

Phasenunterschied aufgrund des Gangunterschieds $\Delta\varphi = kx = \frac{2\pi}{\lambda}x$
 \approx senkrechter Einfall:

Phasensprung um π bei der Reflexion am optisch dichteren Medium ?

$$\Rightarrow \Delta\varphi = kx + \pi$$

- (5) Für konstruktive Interferenz (Maxima): $\Delta\varphi = m2\pi$

$$\Rightarrow 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

Transmission

- (1) Gangunterschied wie zuvor

$$x = n(x_{AB} + x_{BC}) - x_{AD} = 2d\sqrt{n^2 \sin^2 \alpha}$$

- (2) Phasenunterschied

$$\text{Gangunterschied} \Rightarrow \Delta\varphi = kx$$

$$\text{Phasensprünge} \Rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi = kx$$

- (3) Maxima:

$$\Rightarrow 2d\sqrt{n^2 \sin^2 \alpha} = m\lambda$$

Test:

Annahme: keine Absorption in der Glasplatte: Die Intensitäten der Reflexion und die der Streuung sollten sich zu Gesamtintensität aufsummieren.

$$\Rightarrow \text{zu erwarten: } I = I_{\text{reflektiert}} + I_{\text{transmittiert}}$$

Wie erwartet da wo die Transmission Maximal ist ist die Reflexion minimal und umgekehrt. Immer um $\frac{\lambda}{2}$ verschoben.

Anwendung

- **Versuch:** Interferenz mit zwei angewinkelten Spiegeln Fres'nelscher Doppelspiegel
[Folie: Fres'nelscher Doppelspiegel]
- [Folie: Newton's Ringe]
- **Versuch:** Seifenblase
die in Regenbogenfarben schillert
- **Versuch:** Interferenz an Planparalleler Folie
(mit grünem Laserlicht demonstriert)

III.2.6 Vielstrahlinterferenz, Fabry-Pérot-Interferometer

[Folie: Vielstrahlinterferenz an Planparallelen Platten]

Die Interferenz ähnelt der bei einem Gitter. Der große Unterschied liegt darin, dass die Intensität der Teilstrahlen mit zunehmenden Reflexionen abnimmt.

Reflexion (Transmission aus $I = I_{\text{ref}} + I_{\text{trans}}$)

- (1) Intensitäten der jeweiligen Teilstrahlen berücksichtigen
 \Rightarrow Reflexionskoeffizient R

$$|A_1| = \sqrt{R}|A_0|$$

$$|B_1| = \sqrt{1-R}|A_0|$$

$$|D_1| = \sqrt{1-R}|B_1| = (1-R)|A_0|$$

$$|C_1| = \sqrt{R}|B_1| = \sqrt{R}\sqrt{1-R}|A_0|$$

$$|A_2| = \sqrt{1-R}|C_1|$$

$$|B_1| = \sqrt{R}|C_1| = R\sqrt{1-R}|A_0|$$

$$\Rightarrow |A_{m+1}| = \sqrt{1-R}|C_m| = \sqrt{1-R}\sqrt{R}|B_m| = \sqrt{1-R}\sqrt{R}\sqrt{R}|C_{m-1}| = R|A_m|$$

$$\Rightarrow |A_{m+1}| = R|A_m| \quad |D_{m+1}| = R|D_m|$$

(2) Gangunterschied benachbarter Strahlen (siehe Platte)

$$x = 2d\sqrt{n^2 \sin^2 \alpha}$$

(3) Phasenunterschied

$$\Delta\varphi = kx + \text{Phasensprünge}$$

\uparrow
 Gangunterschied

Bei den Phasensprüngen folgt nach längerer Arbeit, dass nur der Phasensprung A_1 übrig bleibt.

(4) Gesamtamplitude

$$A = \pm \sum_{m=1}^N A_m e^{i(m-1)\Delta\varphi}$$

N : Anzahl der betrachteten Teilstrahlen

\pm : Berücksichtigt die Phasensprünge

(5) Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ (unendlich lange Glasplatte):

$$\Rightarrow A = \pm A_0 \sqrt{R} \frac{1 - e^{i\Delta\varphi}}{1 - R e^{i\Delta\varphi}}$$

$$\Rightarrow I_R = |A|^2 = 2I_0 R \frac{1 - \cos \Delta\varphi}{1 - 2R \cos \Delta\varphi + R^2}$$

Ergebnis

Airy-Formeln

$$I_R = I_0 \frac{F \sin^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right)}{1 + F \sin^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right)}$$

$$I_T = I_0 \frac{1}{1 + F \sin^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right)}$$

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2} \quad \frac{\Delta\varphi}{2} = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

Beispiel: senkrechter Einfall

$$\Rightarrow \alpha = 0 \quad I_T = I_0 \frac{1}{1 + F \sin^2(ndk)}$$

wobei $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ Maxima:

$$2nd = m\lambda$$

FWHM (full width at half maximum)

$$\varepsilon = 4 \arcsin \sqrt{\frac{1}{F}} \approx \frac{4}{\sqrt{F}}$$

[Folie: Maxima beim FWHM]

Anwendung: Fabry-Pérot-Interferometer

[Folie: zu Fabry-Pérot-Interferometern]

Versuch: Natrium-Dampf-Lampe Interferenz

[Folie: Interferenz mit einer Natrium-Dampf-Lampe]

Versuch: Abpumpen der Luft beim Interferenzmuster der Natrium-Dampf-Lampe

Das Muster verändert sich erheblich obwohl der Unterschied der Brechungsindizes so gering war. Also hat das Farbinferometer eine sehr hohe Auflösung.

III.3 Interferenz und Beugung II - Huygen'sches Prinzip

III.3.1 Huygen'sches Prinzip

Jeder Punkt einer Wellenfront ist Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle.

Beispiel: Brechung

Erklärung über Ausbreitung ebener Wellen [Folie: Brechung mit Ebenen Wellen]

III.3.2 Interferenz am Doppelspalt

Jeder Spalt, wenn er klein genug ist, wird als „Sender“ einer Elementarwelle angesehen.

⇒ Überlagerung von zwei Kugelwellen.

[Folie: zu Doppelspalt mit Kugelwellen]

III.3.3 Beugung

Beugung bezeichnet das Phänomen, das Licht (und andere Wellen) in Bereiche vordringt, in welche es als Strahl betrachtet nicht vordringen dürfte.

Beugung tritt immer an Stellen auf, an denen die Transmission einer Welle verhindert wird. Dies ist z.B. der Fall an Kanten bei denen an einer Seite komplette Abschattung und an der anderen komplette Transmission stattfindet.

Interferenz tritt dann auf, wenn es zwei solche Stellen gibt an denen Beugung auftritt.

Versuch: Laser mit Kante und später Loch-/Kreisblende und später Stecknadelkopf

Man sieht auch ein dieser einzelnen Kante Interferenz. Dies zu verstehen ist Ziel der heutigen Vorlesung. Das Interferenzmuster ist die Fouriertransformation einer Stufenfunktion. Bei der Lochblende einer Fouriertransformation eines „Loches“.

[Folie: Doppelspalt Beugung][Folie: Einzelspalt]

III.3.4 Allgemeine Behandlung der Beugung

Zur Verallgemeinerung Behandeln wir nun das Kirchhoff'sche Beugungsintegral

Kirchhoff'sches Beugungsintegral

In verschiedenen Büchern treten häufig andere Formel des Gleichen Integrals auf.

[Folie: Beugungsintegral]

Die Blende wird als eine Transmissionsfunktion beschrieben. Zu jedem Punkt aus dem Schirm gibt es dann ein Integral der Intensitäten aller Elementarwellen aus der Blende.

Blendenöffnung bei $z = 0$

Beobachtungsschirm bei $z = z' = z_0$

Kirchhoff'sches Beugungsintegral

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}') = \frac{ik}{2\pi} \int Q\tau(x, y) \mathbf{E}_{\text{ein}}(\mathbf{x}) \frac{e^{-ikr}}{r} d\sigma$$

Q := Neigungsfaktor

τ := Transmissionsfunktion mit $\begin{cases} \tau = 1 : & \text{vollständige Transmission} \\ \tau = 0 : & \text{undurchlässig} \end{cases}$

r := Abstand des Punkts \mathbf{x} und \mathbf{x}'

$$r^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + z'^2$$

Sketch der Herleitung

(1) Für das von der Blende bei $z = 0$ durchgelassene Licht gilt:

$$E_{\text{Blende}}(x, y) = E_{\text{ein}}(x, y, z = 0) e^{i\varphi(x, y, z=0)}$$

(2) Jeder Punkt der Öffnung erzeugt eine Elementarwelle

$$dE(x', y', z') \propto Q\tau(x, y) E_{\text{ein}}(x, y) \frac{e^{-ikr}}{r} \underbrace{dx dy}_{d\sigma}$$

$$Q \propto \frac{1}{2}(\cos \theta_1 + \cos \theta)$$

(3) Insgesamt:

$$E(x, y', z') \propto \int Q\tau(x, y) E_{\text{ein}} \frac{e^{-ikr}}{r} d\sigma$$

(4) Vektoren und Beträge „richtig“ machen.

Grenzfälle:

- Fraunhofer-Beugung:

Abstand des Schirms von der Blende sehr groß gegenüber Öffnung der Blende.

$$z' \gg x, y \quad z_0 \gg \frac{b^2}{\lambda}$$

- Fresnel Beugung:

Abstand des Schirms von Blende klein.

$$z' \ll x, y \quad z_0 \ll \frac{b^2}{\lambda}$$

- Überganszone $z_0 \approx \frac{b^2}{\lambda}$

[Folie: Folie Nah-/Übergangs-/Fernbereich]

III.3.5 Allgemeines Ergebnis für die Beugung im Fernbereich, Fraunhofer Beugung

Fernbereich: $z' \gg x, y$

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z'^2}$$

Zur Näherung: Näherungen zu machen ist nicht sehr einfach und der Prozess nicht sehr präzise zu Beschreiben. Es ist nicht leicht eine gute Näherung zu finden. Man muss dabei darauf Achten, dass man durch seine Näherung nicht interessante physikalische Zusammenhänge „Wegnähert“. In unserem Fall muss die e -Funktion genau genähert werden, das r im Nenner nur grob. präziser Nähern wir $z' \gg \frac{1}{\lambda}(x^2 + y^2)$

$$r \approx z' \left(1 - \frac{xx'}{z'^2} - \frac{yy'}{z'^2} + \frac{x'^2 + y'^2}{2z'^2} \right)$$

Im Nenner $r \approx z'$

In dieser Näherung auch $Q \approx 1$

Beugungsintegral für Fraunhofer Beugung

Nebenrechnung: $\frac{e^{-ikr}}{r} \approx \frac{e^{-ikz'}}{z'} e^{ik\frac{x'}{z'}x} e^{ik\frac{y'}{z'}y} e^{-ik\frac{1}{2z'}(x'^2 + y'^2)}$

Die ersten Beiden Faktoren hiervon landen später im Vorfaktor A .

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \underbrace{A(\mathbf{x}')}_{\substack{\text{alles Lästige} \\ \text{geht dort rein}}} \int \tau(x, y) \mathbf{E}_{\text{ein}}(x, y) e^{ik\frac{x'}{z'}x} e^{ik\frac{y'}{z'}y} dx dy$$

Fourier Integral:

$$\mathbf{F}(u, v) \equiv \int \tau(x, y) \mathbf{E}_{\text{ein}}(x, y) e^{iux} e^{ivy} dx dy$$

Beugungsintegral für Fraunhofer Beugung

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{x}') = A(\mathbf{x}') \mathbf{F}\left(k\frac{x'}{z'}, k\frac{y'}{z'}\right)$$

Beispiel: Einfachspalt

Ortsraum	\Leftrightarrow	Fourier Raum	
$\tau(x, y) = \begin{cases} 1 & \forall -\frac{b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$	\Leftrightarrow	$\mathbf{F}(k) = \frac{\sin x}{x} \quad x = \frac{\pi}{b} k \frac{x'}{z'}$	
$\left. \begin{array}{l} \text{breiter} \\ \text{schmäler} \end{array} \right\} \text{Spalt}$	\Leftrightarrow	$\left. \begin{array}{l} \text{schmale} \\ \text{breites} \end{array} \right\} \text{Interferenzstruktur}$	
$\Delta x \Delta h < \text{const.}$			

III.3.6 Auflösungsvermögen optischer Instrumente

Es ist Wichtig zu Wissen von welcher Art von Vergrößerung geredet wird. Welche wir hier benutzen wird später genauer erklärt.

Lochkurven

[Folie: Zu Lochkurven und Darstellung mit Lochblenden]

Versuch: Darstellung von Dia mit Lochblende

Rayleigh Kriterium

Zwei Punkte sind gerade dann noch unterscheidbar, wenn das Beugungsmaximum des einen Punktes in das 1.-te Beugungsminimum des anderen Punktes fällt.

[Folie: Auflösung: Überlagerung von Beugungsmustern]

Diese Definition ist nichts eindeutiges. Es ist nur eine Möglichkeit an einem Breiten Übergang von Scharf bis Unscharf.

Ein anderes Kriterium

Abstand der Hauptmaxima muss größer sein als deren Halbwertsbreite.

III.3.7 Räumliches Auflösungsvermögen

Beispiel: Linse

[Folie: Zu Bündelung von Licht mit einer Linse]

Versuch: Laser: Beugung an der Doppellochplatte

Je näher die Löcher in der Blende zueinander rücken, desto ausgeprägter wird das Interferenzmuster

Beugung an einer Lochblende:

1. Maximum:

$$r \sin \alpha = 0,61\lambda$$

Auflösung einer Lochblende

$$\Rightarrow \sin \alpha_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

D : Durchmesser des Lochs

Auflösung einer Linse

$$\Rightarrow \sin \alpha_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

D : Durchmesser der Linse

Auflösung eines Fernrohrs

Das durch das Objektiv erzeugte Zwischenbild ist bereits beugungsverbreitert.

$$\Rightarrow \sin \alpha_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

D : Durchmesser des Objektivs

Auflösung eines Mikroskops

Im Unterschied zu vorher ist das einfallende Licht nicht parallel. [Folie: zur Auflösung am Mikroskop]

(1)

$$d = b \alpha_{\min}$$

$$\Rightarrow \alpha_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

$$\Rightarrow d = 1,22 \frac{b\lambda}{D}$$

D : Durchmesser des Objektivs

(2) Für den Abstand δ_x **vor** dem Objektiv gilt

$$\delta_x \approx \frac{\varphi_1}{b} d = 1,22 \frac{\varphi_1 \lambda}{D}$$

(3) Öffnungswinkel φ

$$\sin \varphi \approx \frac{D}{2\varphi_1}$$

Auflösung eines Mikroskop

$$\delta_x \approx 0,61 \frac{\lambda}{n \sin \varphi}$$

$n \sin \varphi$: numerische Apertur

Der **Gültigkeitsbereich der Formel** ist der **Fernbereich** (Frauenhofer Beugung). Wir versuchen Bessere Ergebnisse zu erzielen indem wir Situationen Betrachten, die außerhalb dieses Gültigkeitsbereichs liegen. In diesem Fall nutzen wir die Nahfeld Mikroskopie, wo die Fresnel'sche Beugung auftritt und wir darüber eine höhere Auflösung erzielen können,

Verbesserungen der beugungsbegrenzten Auflösung:

- kleines λ
 - Elektronenmikroskop (1 nm)
 - Röntgen (in Entwicklung)
- Immersionsöl mit Brechungsindex von $n \approx 1,5$
- Nahfeldmikroskopie
Die obigen Überlegungen basieren auf der Frauenhofer Beugung.

Was im nächstes Kapitel nicht behandelt wird. Polarisierung, Doppelbrechung, nichtlineare optik

Kapitel IV

Licht - Materie Wechselwirkung

IV.1 lineare und zirkulare Polarisation

EM-Welle

$$\Rightarrow \mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{k}$$

Definition: Polarisation $\hat{=}$ Richtung von \mathbf{E}

transversale Wellen: $\mathbf{E} \perp \mathbf{k} \Leftrightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{k} = 0$

longitudinale Wellen: $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k} \Leftrightarrow \mathbf{E} \times \mathbf{k} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{E} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} = k^2 \mathbf{E}$

Für die Behauptung, dass EM-Wellen Transversalwellen haben wir die Annahme getroffen, dass wir uns im Vakuum befinden. In Materie ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit kleiner als c und der \mathbf{k} -Vektor hat eine Komponente parallel zur Ausbreitungsrichtung. \Rightarrow longitudinale EM-Wellen (eigentlich keine EM-Wellen sondern anderer Name).

$$\Rightarrow \mathbf{k} = (0, 0, k)$$

IV.1.1 Lineare Polarisation

[Folie: linear polarisierte EM-Welle]

$$\mathbf{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \tilde{\varphi} \\ \sin \tilde{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

IV.1.2 Zirkuläre Polarisation

[Folie: zirkular polarisierte EM-Welle]

$$\mathbf{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t - kz + \varphi) \\ \pm \sin(\omega t - kz + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

IV.1.3 Zusammenhang zwischen linear und zirkular polarisierten Wellen

Jede linear polarisierte Welle kann in zwei entgegengesetzt zirkular polarisierte Wellen halber Amplitude zerlegt werden und umgekehrt.

Beispiel: Zerlegung von linearer in zirkulare Polarisation. $\cos(x + \frac{\pi}{2}) + \cos(x - \frac{\pi}{2}) = 0$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= A \begin{pmatrix} \cos(\omega t - kz + \varphi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{A}{2} \begin{pmatrix} \cos(\omega t - kz + \varphi) \\ \cos(\omega t - kz + \varphi + \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{A}{2} \begin{pmatrix} \cos(\omega t - kz + \varphi) \\ \cos(\omega t - kz + \varphi - \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

IV.1.4 Polarisation beim Durchgang durch Materie

Doppelbrechung:

$$\begin{aligned}k_x &\neq k_y \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \begin{pmatrix} A_x \cos(\omega t - \mathbf{k}_x z + \varphi_x) \\ A_y \cos(\omega t - \mathbf{k}_y z + \varphi_y) \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

optische Aktivität

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit bzw. der Wellenvektor für rechts und links zirkulare Polarisation unterschiedlich.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{A}{2} \begin{pmatrix} \cos(\omega t - \mathbf{k}^+ z + \varphi) \\ \cos(\omega t - \mathbf{k}^+ z + \varphi + \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{A}{2} \begin{pmatrix} \cos(\omega t - \mathbf{k}^- z + \varphi) \\ \cos(\omega t - \mathbf{k}^- z + \varphi - \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= A \begin{pmatrix} \cos(\delta k z) \\ \cos(\delta k z) \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t - \bar{k} z + \varphi) \\ k^+ &= \bar{k} + \delta k \quad k^- = \bar{k} - \delta k\end{aligned}$$

IV.2 Polarisation durch Brechung und Reflexion

(siehe EX II)

IV.2.1 Maxwell Gleichungen in Materie

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho_0 & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j}_0 + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}\end{aligned}$$

plus:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{F} &= q\mathbf{E}\end{aligned}$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_{\text{pol}} = \frac{1}{\varepsilon} \rho_0 \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_{\text{mag}} = \mu \mathbf{j}_0$$

Es fehlen hier noch einige Zusammenhänge die selbstverständlich immer noch gelten z.B.:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

alle sechs Felder: **DEP MHB** jeweils vier mal 6 Gleichungen
plus:

Materialgleichungen z.B.: $\mathbf{D}(\mathbf{E})$, $\mathbf{P}(\mathbf{E})$, ...

IV.2.2 Erinnerung: Polarisation bei Brechung und Reflexion

[Folie: Brechung und Reflexion bei parallelem und orthogonalem \mathbf{E} -Feld in der Einfallsebene]

[Folie: Einfallswinkel und Reflexionswinkel (Brewsterwinkel)]

Physikalische Ursache: Stetigkeits & Randbedingungen

Gewöhnliche partielle Diff-Gleichungen

⇒ viele Lösungen

⇒ Anfangsbed., Randbed., Stetigkeitsbed.

Beispiele:

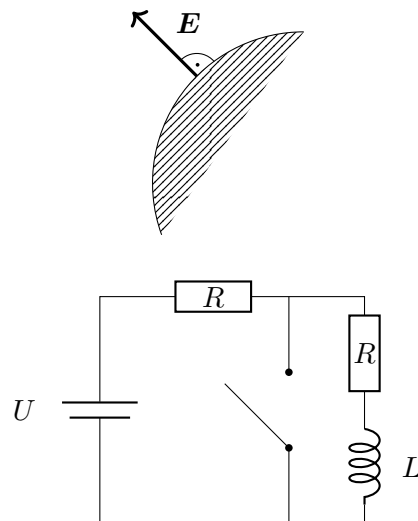
- Metall: Randbedingung aus Elektrostatik überlegt
- Ein- und Ausschaltvorgänge bei RLC Gleichungen
Anfang: Schalter offen, Spule „aufgeladen“

$$\Rightarrow I = \frac{U}{(R_i + R)}$$

Dann: Schalter schließen $\Rightarrow U = 0 \Rightarrow$ wie verhält sich aber $I, U_{\text{Spule}}, \dots$?

Energie der Spule ist stetig $E_{\text{Spule}} = \frac{1}{2} L I^2$

$\Rightarrow I_{\text{Spule}}$ stetig



IV.2.3 Maxwell-Gleichungen und Stetigkeitsbedingungen

Heute beschäftigen wir uns mit Stetigkeitsbedingungen. Diese sind sehr Wichtig für die Lösung von Differentialgleichungen zur Lösung von Randwertproblemen.

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma_{\text{Fläche}}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_0 + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \mathbf{n} = \mathbf{j}_{\text{Fläche}}$$

⇒

- Normalkomponenten von $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ ist stetig
- Tangentialkomponente von $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ ist stetig

(nahezu) senkrechten Einfall

$$\alpha, \beta \approx 0$$

	Reflexion	Transmission
\perp :	$E_{\text{ref}\perp} = -E_{\text{ein}\perp} \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$	$E_{\text{trans}\perp} = E_{\text{ein}\perp} \frac{2n_1}{n_2 + n_1}$
\parallel :	$E_{\text{ref}\parallel} = E_{\text{ein}\parallel} \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$	$E_{\text{trans}\parallel} = E_{\text{ein}\parallel} \frac{2n_1}{n_2 + n_1}$

Betrachtung für senkrechten Einfall

[Folie: Stetigkeitsbed. bei senkrechtem Einfall]

(1) \perp und \parallel sind identisch \Rightarrow wähle \perp

(2) Aus Stetigkeit der Tangentialkomponenten von E

$$E_I = E_{II}$$

$$\Rightarrow E_{\text{ein}\perp} + E_{\text{ref}\perp} = E_{\text{trans}\perp}$$

(aus Gauß Zylinder folgt die Gleichheit der E Felder auf einer Seite mit dem E Feld auf der anderen Seite)

(3) Stetigkeit des Energieflusses

[Folie: Stetigkeits an Randflächen]

$$\Rightarrow I_{\text{ein}} = I_{\text{ref}} + I_{\text{trans}}$$

(4) $I = nc_0\varepsilon_0 E^2$

$$\Rightarrow n_1(E_{\text{ein}\perp})^2 = n_1(E_{\text{ref}\perp})^2 + n_2(E_{\text{trans}\perp})^2$$

\Rightarrow Lösungen wie oben

IV.2.4 Warum war es „erlaubt“ mit ebenen Wellen zu rechnen ?

(1) Lösungen im homogenen Raum, Raum kann begrenzt sein

(2) Grenzfälle \rightarrow Lösungen in den jeweiligen Teilräumen, wurden durch Stetigkeitsbed. angeschlossen.

(3) Maxwell-Gleichungen sind linear \leftrightarrow Superpositionsprinzip.

spezielle Lösung:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} \quad \text{mit } \omega(\mathbf{k})$$

\mathbf{k} als Parameter zum „numerieren“ der Lösungen

allgemeine Lösung:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t)} d\mathbf{k} \quad (\text{IV.1})$$

\Rightarrow Allgemein:

$$\mathbf{E}_I(\mathbf{x}_{\text{grenz}}, t) = \mathbf{E}_{II}(\mathbf{x}_{\text{grenz}}, t)$$

speziell:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t, p)$$

allgemein:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{f}(p) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t, p) dp$$

IV.3 Maxwell-Gl. in Materie, komplexer Brechungsindex

Vereinfachung: $\mu = 1$ $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$

IV.3.1 Polarisation eines Dielektrikums

phänomenologisch/makroskopisch:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

allgemein gültig, bis auf: Die Einschränkung der Maxwellgleichungen in Materie sind nur Mittlungen des Mikroskopische Bildes in eine fast Makroskopischen Bereich. Daraus ergibt sich die Einschränkung: Wenn unser Beobachtungsbereich zu klein wird, sind diese Mittlungen nicht mehr gültig.

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \overset{\circ}{\chi} \mathbf{E} + \dots$$

häufig gültig

lineare, isotrope Medien

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \mathbf{E}$$

χ : dielektrische Suszeptibilität

mikroskopisch:

$$\mathbf{d} = \alpha \mathbf{E}$$

\mathbf{d} : induziertes Dipolmoment

α : Polarisierbarkeit

IV.3.2 Ensemble unabhängiger induzierter Dipolmomente

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \frac{1}{V} \sum_i \mathbf{d}_i &\rightarrow \frac{N}{V} \mathbf{d} \quad \text{da sich alle Objekte gleich verhalten} \\ &\rightarrow \chi = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{N}{V} \alpha \equiv \varepsilon - 1 \end{aligned}$$

Gilt bei Gasen gut, bei Festkörpern aufgrund von Dipol-Dipol-Wechselwirkungen nicht mehr gut.

IV.3.3 Lorenz-Lorentz-Oszillatormodell

[Folie: Lorenz-Lorentz-Oszillatormodell für die Polarisation]

$$\Rightarrow \hat{\varepsilon} = \varepsilon' + i\varepsilon''$$

IV.3.4 Wellengleichung in Materie

Materie $\Rightarrow \rho \neq 0$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{E} \neq 0$$

\Rightarrow Aus $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ folgte das eine EM-Welle im Vakuum transversal sind. Muss nicht mehr so sein.

Unter Verwendung von

(1)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} \stackrel{\text{MW}}{\downarrow} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B} \stackrel{\mu=1}{\downarrow} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H} \stackrel{\text{MW}}{\downarrow} = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D}$$

(2)

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} + \text{grad div } \mathbf{E}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D} - \text{grad div } \mathbf{E} = 0$$

grad div \mathbf{E} ist wegen $\text{div } \mathbf{E} \neq 0$

IV.3.5 Wellengleichung in Materie in komplexer Schreibweise

$$\begin{aligned} \hat{D} &= \varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \hat{E} & \hat{\varepsilon} &= \varepsilon' + i\varepsilon'' \\ \Rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c_0^2} \hat{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} - \text{grad div } \mathbf{E} &= 0 \end{aligned}$$

(1) Einsetzen:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{E}}_0 \exp \left[i(\hat{\mathbf{k}} \mathbf{x} - \omega t) \right] \quad \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$$

(2) Ausführen der Differentiale

$$\text{div } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \hat{\mathbf{E}}_0 e^{i(\hat{\mathbf{k}} \mathbf{x} - \omega t)} = \begin{pmatrix} i\hat{k}_x \\ i\hat{k}_y \\ i\hat{k}_z \end{pmatrix} \cdot \hat{\mathbf{E}}_0 e^{i(\hat{\mathbf{k}} \mathbf{x} - \omega t)}$$

und kürzen des Phasenfaktors

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E} &\rightarrow i\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_0 \\ \text{rot } \mathbf{E} &\rightarrow i\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{E}}_0 \\ \nabla^2 \mathbf{E} &\rightarrow -(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \hat{\mathbf{E}}_0 \\ \text{grad}(\text{div } \mathbf{E}) &\rightarrow -(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_0) \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} &\rightarrow -\omega^2 \hat{\mathbf{E}}_0 \end{aligned}$$

(3) Lösung

$$\Rightarrow \quad -(\hat{\mathbf{k}}^2) \hat{\mathbf{E}}_0 + \frac{\omega^2}{c_0^2} \hat{\varepsilon} \hat{\mathbf{E}}_0 + (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_0) \hat{\mathbf{k}} = 0$$

Beachte:

$\hat{\mathbf{k}}^2$ ist **nicht** das Betragsquadrat

$$\hat{\mathbf{k}}^2 = \mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}''^2 + 2i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}''$$

Was bedeutet $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$?

$$e^{i(\hat{\mathbf{k}} \mathbf{x} - \omega t)} = e^{i\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x}} e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

Teil mit \mathbf{k}'' : Dämpfung, Absorption der Welle $I(x) = I_0 e^{-2|\mathbf{k}'|x}$

Teil mit \mathbf{k}' : Ausbreitung der Welle mit $\lambda = \frac{2\pi}{f}$

Bemerkung:

harmonischer Oszillator: $\hat{\omega} = \omega - i\delta$

$$e^{i\hat{\omega}t} = e^{-\delta t} e^{-i\omega t}$$

δ ist die Dämpfung

IV.3.6 Transversale Lösungen

$$\text{transversal} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{k}} \perp \hat{\mathbf{E}}_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_0 = 0}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{k}}^2 \hat{\mathbf{E}}_0 + \frac{\omega^2}{c_0^2} \hat{\mathbf{E}}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\mathbf{k}}^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \hat{\epsilon}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega(\hat{\mathbf{k}}) = c_0 \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{k}}^2}{\hat{\epsilon}}}}$$

Real- und Imaginärteil von $\hat{\mathbf{k}}$ sind verknüpft mit Real- und Imaginärteil von $\hat{\epsilon}$

IV.3.7 Komplexwertiger Brechungsindex

$$\hat{n} = n + iK = \sqrt{\hat{\epsilon}}$$

n : Brechungsindex

K : Extinktionskoeffizient

$$\Rightarrow \begin{aligned} 2n^2 &= \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} + \epsilon' \\ 2K^2 &= \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} - \epsilon' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{\hat{\mathbf{k}}^2} = \frac{\omega}{c_0} \hat{n}}$$

IV.3.8 Lösung für kleine imaginäre Anteile. (schwache Dämpfung bzw Absorption)

Im allgemeinen ist die Lösung nicht einfach, da hier die Wurzeln aus komplexen Zahlen gezogen werden. Deshalb betrachten wir hier die Lösung für kleine imaginäre Anteile.

$$k'' \ll k' \quad K \ll n \quad \epsilon'' \ll \epsilon'$$

$$\begin{aligned} 2n^2 &= \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} + \epsilon' \cong \epsilon' \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon''^2}{\epsilon'^2} \right) + \epsilon' \approx 2\epsilon' \\ 2K^2 &= \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} - \epsilon' \cong \epsilon' \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon''^2}{\epsilon'^2} \right) - \epsilon' \approx \frac{1}{2} \frac{\epsilon''^2}{\epsilon'} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon''^2}{n^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{n = \sqrt{\epsilon'} \quad K = \frac{\epsilon''}{2n}}$$

Was den Wellenvektor angeht erhalten wir:

$$\sqrt{\hat{\mathbf{k}}^2} = \sqrt{\mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}''^2 + 2i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}''} \approx |\mathbf{k}'| + i \frac{\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}''}{|\mathbf{k}'|}$$

$$\Rightarrow |\mathbf{k}'| + i \frac{\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}''}{|\mathbf{k}'|} = \frac{\omega}{c_0} (n + iK)$$

Physikalische Interpretation

Der Realteil von ε' führt zu einer Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon'}}$

Der Imaginärteil von ε' führt zu einer Dämpfung/Absorption der Welle.

→ In Materie gibt es transversale EM-Wellen mit $c = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon'}}$ (falls $c \leq c_0$)

IV.3.9 Evaneszente Welle

Totalreflektion

[Folie: Evaneszente Welle]

$\alpha \geq \alpha_T \Rightarrow$ keine Wellenausbreitung im optisch dünneren Medium

Das bedeutet nicht, dass keine el.-mag.-Felder in diesen Bereich eindringen.

[Folie: Felder treten in Medium ein.]

Die Felder sind jedoch so schwach, dass sie nach großem Abstand nicht mehr messbar sind. Sie klingen mit der Einhüllenden $e^{ik''}$ ab. k' ist null, da es sich nur um EM-Felder handelt und nicht um eine sich ausbreitende Welle.

Versuch: Übertragung von Evaneszenten Wellen durch zwei Prismen mit geringem Abstand.

Beobachtung:

Die Evaneszente Welle kann ins zweite Prisma eindringen und sich dort ausbreiten.

Theorie:

Prisma: $\hat{\varepsilon} = \varepsilon' + i\varepsilon'' \quad \varepsilon' \gg \varepsilon''$

Das Licht im Prisma wird nur schwach gedämpft. Es ist für Mikrowellen transparent so wie Glas für sichtbares Licht.

Vereinfachung:

$$\varepsilon'' = 0$$

Beachte: I.A. nicht $k'' = 0$

Frage: Kann es ein $\hat{\mathbf{k}}$ geben, der komplex bzw. imaginär ist?

$$\hat{\mathbf{k}}^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \varepsilon' = \mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}''^2 + 2i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}''$$

Für sichtbares Licht im Vakuum gilt:

$$\varepsilon' > 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}''^2 + 2i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' > 0$$

Lösung 1: Der Normalfall der Wellenausbreitung

$$\mathbf{k}'' = 0$$

Lösung 2: Evaneszente Welle

$$\mathbf{k}'' > 0 \text{ aber } \mathbf{k}' \perp \mathbf{k}''$$

$$\Rightarrow \mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}''^2 > 0$$

Beispiel: Totalreflexion mit $\beta = 90^\circ$

Die \mathbf{k}' Komponente ist bei der Totalreflexion parallel zur Oberfläche des Mediums.

einfallende Welle:

normale Ausbreitung

$$\hat{\mathbf{k}}_1 = \mathbf{k}_1 + i0$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{\omega^2}{c_0^2} n_1^2 \quad (k_1 : \text{Betrag von } \hat{\mathbf{k}}_1)$$

aus der Geometrie folgt:

$$k_{1,x} = k_1 \sin \alpha$$

$$\Rightarrow k_{1,x}^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} n_1^2 \sin^2 \alpha$$

ausfallende Welle:

$$\hat{\mathbf{k}}_2 = \begin{pmatrix} k_{2,x} \\ 0 \\ ik_{2,z} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mathbf{k}' = (k_{2,x}, 0, 0) \\ \mathbf{k}'' = (0, 0, k_{2,z}) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \hat{k}_2^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} n_2^2 = \mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}''^2 = k_{2,x}^2 - k_{2,z}^2 > 0$$

$$\frac{\omega^2}{c_0^2} n_2^2 = k_{2,x}^2 - k_{2,z}^2 > 0$$

Brechungsgesetz: $n_1 \sin \alpha = n_2$

$$\Rightarrow k_{1,x}^2 = k_{2,x}^2 - k_{2,z}^2 > 0$$

\uparrow
 > 0

Q.E.D.

\Rightarrow Im Falle der Totalreflexion existiert eine evaneszente Welle \mathcal{O}

IV.4 Streuung, Spektren und Verwandtes

IV.4.1 Grobe Einteilung

Materiewelle

- **reflektierend** = Licht wird **gerichtet** zurückgestrahlt
- **streuend** = Licht wird **ungerichtet** zurückgestrahlt

Materie ist

- **absorbierend** = Licht wird **verschluckt**
- **durchsichtig** = Licht wird **Durchgelassen**
- **transparent** = Licht wird **teilweise Durchgelassen**, teils absorbiert und/oder teil gestreut

IV.4.2 Physikalische Prozesse: Grundgedanken

A) elastischer/inelastischer Stoß \rightarrow Streuung

[Folie: zur Streuung an Teilchen]

wie beim Billard

Beispiel: Lichtstreuung, Streuung am Photon

- Raylight-Streuung: elastische Streuung von Photonen an gebundenen Elektronen
- Thomson-Streuung: elastische Streuung an „quasi freien“ Elektronen „quasi frei“: **eventuell gebunden aber winzige Bindungsenergie im Vergleich zur Energie der einfallenden Strahlung.**

- Compton-Streuung: inelastische Streuung an „quasi freien“ Elektronen relativistisches Billard
- Raman-Streuung: inelastische Streuung aufgrund eines inelastischen Stoßes
- Mie-Streuung, Brillouin-Streuung, ...

Beispiel: andere Teilchen

- Elektronenstreuung
- Neutronenstreuung
- geladene Teilchen: Rutherford-Streuung, Mott-Streuung

B) Anregung/Abregung

Genereller Ablauf:

Anregung des Systems durch Licht, Stöße oder Wärme → **Lebensdauer oder Anregung** → **Abregung** des Systems als Licht, aussenden eines Teilchens, Wärme ...

Beispiel:

- Absorption: ein Photon wird absorbiert

$$\hbar\omega \rightarrow \Delta E_{\text{System}}$$

- spontane Emission, Luminanz

$$\Delta E_{\text{System}} \rightarrow \hbar\omega$$

Fluoreszenz: Lebensdauer Kurz ps bis ns

Phosphoreszenz: Lebensdauer deutlich länger als ns

- Stimulierte Emission:

$$\hbar\omega + \Delta E_{\text{System}} \rightarrow 2\hbar\omega$$

Aus einem Angeregten System und einem einfallenden Photon entstehen zwei kohärente Photonen.

- Photoeffekt:

$$\hbar\omega \rightarrow E_{e^-}$$

IV.4.3 Wirkungsquerschnitt (W.Q.S.)

Üblicherweise als differentieller W.Q.S. (entspricht geometrisch einer Streuung)

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE}$$

Der W.Q.S. ist ein Maß dafür wie sehr ein System Streut.

[Folie: Streuung und Wirkungsquerschnitt]

Hierbei wird die Kugel an der Gestreut wird in kleine Flächenelemente geteilt: Raumwinkel-Einheiten.

[Folie: Streuung von Teilchen an Materie (Atomen)]

IV.4.4 Energie und Impulserhaltung

⇒ Betrachtung im Energiediagramm

häufig: System durch diskrete Energieniveaus Beschrieben.

[Folie: Energiediagramme Absorption und „dips“ im Frequenz-Intensität Diagramm]

[Folie: Energiediagramme bei elastischer Streuung]

[Folie: Energiediagramme bei inelastischen Streuung]

[Folie: inelastische Streuung Vergleich von verschiedene Streuungen]

Streuung über Virtuelle Zustände (ein nicht diskretes Energieniveau)

[Folie: Spontane Emission, Lumineszenz]

[Folie: nochmal aber nicht Diskutiert]

[Folie: Quanten dots]

[Folie: Stimmulierte Emmission]

[Folie: Photo Effekt] hier wird das Elektron in einen nicht-diskreten Zustand gehoben.

[Folie: Up-Conversion (nicht-linearer Effekt)]

[Folie: Grüner Laserpointer (eigentlich IR Laser und Kristall der mit Up-Conversion grünes Licht erzeugt)]

IV.4.5 Spektroskopie

Spektroskopie = Intensität vs. Frequenz

Ein Energiespektrum und ein gemessenes Intensitätsspektrum sind nicht das selbe! Ein Energiespektrum zeigt absolute Energieniveaus an, ein Intensitätsspektrum Energiedifferenzen.

Typischer Aufbau:

Quelle → Probe → Analysator, Detektor

Die Quelle kann monochromatisch sein oder weißes Licht ausstrahlen (breites Spektrum von Frequenzen).

Die Energieanalyse „Richtung“ $\frac{d^2\sigma}{dE d\Omega}$ (σ = Wirkungsquerschnitt)

[Folie: einfaches Prismen-Spektrometer]

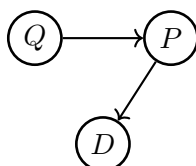
[Folie: ESR (Elektronen-Spin-Resonanz) Spektrometer] Beim ESP Spektrometer wird das Energiespektrum der Probe verändert (durch angelegte Magnetfelder). Der Messstrahl wird zuerst aufgeteilt in einen Vergleichsstrahl und einen Messstrahl, die vor dem Detektor wieder zusammengeführt werden um dort wie beim Michelson-Interferometer zu interferieren.

[Folie: ein kommerzielles Spektrometer]

Typische Messkonfiguration

- Reflektionsspektrum
- Transmissionsspektrum
- Emissionsspektrum
- Absorptionsspektrum

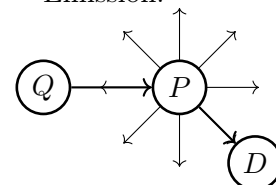
Reflektion:



Transmission:



Emission:



[Folie: Schematisch: Spektrometer]

Versuch: Natrium-Dampf-Lampe

Das Licht aus der Natrium-Dampf-Lampe geht durch eine Glasröhre mit aufgedampftem Natrium. Diese Röhre wird nun erhitzt, sodass das Natrium verdampft. Aufgrund der Erhitzung wird das nun Gasförmige Natrium von der Lampe angeregt und Emittiert selbst auch Licht derselben Farbe. Da dieses Licht nicht mehr gerichtet ist sondern in alle Richtungen strahlt wird die Intensität des transmittierten Lichts geringer.

Bei sehr hoher Temperatur ist die Absorption so stark, dass nach dem Anfangsbereich der Röhre schon das ganze Licht absorbiert und ausgestrahlt wird.

Versuch: Weißes Licht auf Salz (Natriumchlorid)

Sichtbares Spektrum: Rot|Grün.

Emissionsspektrum über Erhitzung ohne Weißlicht-Beleuchtung mit Gasbrenner (farbige Flamme)

Bei Erhitzung und Beleuchtung: Absorptionsspektrum: Rot - Gelb - Grün.

Versuch: Rayleigh Strahlung

Eine Lampe strahlt unpolarisiertes Weißes Licht aus.

Das an den Wassermolekülen (und Dreckrückständen im Wasser) gestreute Licht hat eine lineare Polarisation. Von den Molekülen geht eine Herz'sche Dipolstrahlung aus (Polarisation in Richtung der Antenne, Ausbreitung der Welle in der Ebene orthogonal dazu). Dies kommt daher, dass das Weiße Licht nur transversal polarisierte Anteile hat keine longitudinalen. Daraus ergibt sich, welche Dipole angeregt werden, und dass die Polarisation nur orthogonal zur Ausbreitung des Lichts stattfindet.

Die Rayleighs-Streuung ist mit ω^4 Frequenzabhängig, es wird also blau wesentlich stärker reflektiert als rotes Licht. Dies erklärt den Blauen Schimmer um die Weiße Kreisscheibe auf dem Schirm.

beim hinzugeben von winzigen Kügelchen die im Wasser schwimmen wird mehr Licht gestreut. Die Kreisscheibe wird immer rötter und rötter zunächst gelb dann dunkel orange wie die Abendsonne. Die blauen Frequenzen sind eher am Rand zu sehen und konzentrierter als zuvor. (Beim blauen Himmel sehen wir den Emissionsanteil hier den Transmissionsanteil).

Typen von Spektren

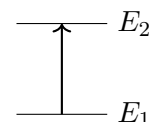
Linienpektrum kontinuierliches Spektren

[Folie: verschiedene Spektren]

Zugängliche Infos im Linienpektrum (Prüfungsrelevant!)

- 1) Die Lage des Peaks oder die Frequenz des Peaks gibt die **Übergangsenergie** an die nur eine Energiedifferenz angibt.

$$E_2 - E_1 = h\nu$$



- 2) **Intensität:** Diese hängt von der Übergangswahrscheinlichkeit und damit auch der Teilchendichte zusammen.

Die Intensität hat auch mit der **stärke der Wechselwirkung** von dem Eingestrahnten (**Sonde**) mit dem Bestrahlten (**Probe**) zu tun.

- 3) **Linienbreite/Linienform** Bei der Lorenzverteilung ist die Breite der Verteilung verknüpft

mit der Lebensdauer der Teilchen.

$$e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \text{Lorenzlinie} \Rightarrow \text{Lebensdauer}$$

[Folie: Gaußverteilung als Summe der Wahrscheinlichkeitsverteilungen einzelner Moleküle]

$$\text{statistische Verteilung} \Rightarrow \text{Gaußverteilung}$$

Fragerunde

Dispersionsrelation bei getriebener Schwingung:

(harmonischer Oszillator oder Dispersion bei Schwingungen)

Gleichschwingung bei geringer Antriebsfrequenz

Phasenverschiebung bei zu schnellem Antrieb und geringe Amplitude des Schwingers

quasi ein Tiefpass

Dieses Problem ist mit komplexen Größen lösbar. Zur physikalischen Betrachtung der Lösung: Leistungsaufnahme des schwingenden Systems. Diese Leistung ist mit dem Imaginärteil verknüpft.

Bei unserem Beispiel eines dielektrischen Materials geht es um Absorption. Diese stammt aus dem Leistungsverlust aus dem Imaginärteil der Dielektrizitätskonstante. Der Realteil ist hier mit dem Brechungsindex verknüpft.

Angeregte Emissionen:

Das anregende und das angeregte Photon können aber müssen nicht in Phase sein. Allgemein ist dies nicht so.

Das Angeregte Atom bleibt mit einer gewissen statistisch verteilten Lebensdauer in dem Zustand. Wie die Anregung erfolgt ist (Stöße oder Absorption von Strahlung) ist egal. Daraus resultiert spontane Emission.

Die **stimulierte oder induzierte Emission** (erzeugt durch ein Strahlungsfeld) erzeugt die Abstrahlung von Photonen in Phase mit den eingestrahlt Photonen. Die Begründung ist recht kompliziert und kann nur über Quantenmechanik erfolgen.

Evaneszente Welle:

Undurchdringbarkeit ist nur eine Näherung. Kein Welches des Mediums ist eine echte Stufenfunktion (im mikroskopischen Bereich).

IV.5 Ratengleichungen

IV.5.1 Exponentieller Zerfall

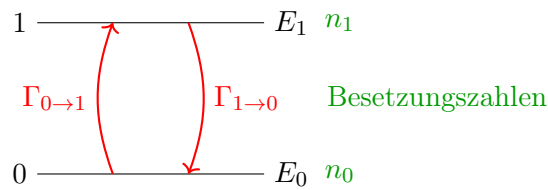
$$\frac{d}{dt}n(t) = -\frac{1}{\tau}[n(t) - n_{eq}]$$

Statistisch unabhängige Prozesse. Egal wie viele Objekte es gibt nach der Halbwertszeit ist nur noch die Hälfte da. Die einzelnen Objekte verhalten sich also unabhängig voneinander so. τ : Radiationszeit, Zerfallszeit, Lebensdauer, Halbwertszeit, ...

Lösung:

$$n(t) = [n(o) - n_{eq}]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + n_{eq}$$

IV.5.2 Zwei-Niveausystem



Bemerkung:

- oft gibt es eine **Zwangsbedingung** $\sum_k n_k = N$ N : Gesamtzahl der Zustände
- Prinzip des detaillierten Gleichgewichts

$$\Gamma_{k \rightarrow l} = \Gamma_{l \rightarrow k}$$

Ratengleichung:

$$\dot{n}_0 = -\Gamma_{0 \rightarrow 1} n_0 + \Gamma_{1 \rightarrow 0} n_1$$

$$\dot{n}_1 = -\Gamma_{1 \rightarrow 0} n_1 + \Gamma_{0 \rightarrow 1} n_0$$

Definition Gleichgewicht

$$\Rightarrow \dot{n}_0 = -\Gamma(n_0 - n_1)$$

$$\dot{n}_1 = -\Gamma(n_1 - n_0)$$

konstante Gesamtbesetzung

$$n_0 + n_1 = N$$

Lösung:

$$\delta N \equiv n_1 - n_0 \quad \rightarrow \quad n_0 = \frac{1}{2}(N - \delta N)$$

$$n_1 = \frac{1}{2}(N + \delta N)$$

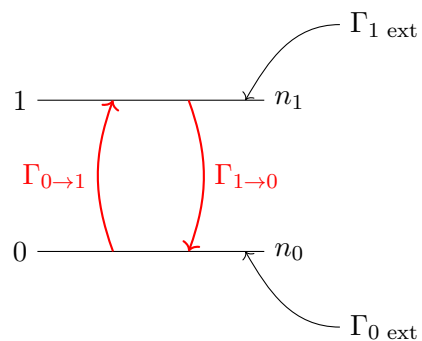
$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\delta\dot{N} = \Gamma\delta N$$

$$\delta N(t) = \delta N(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Ratengleichung mit externen Stimuli

$$\Rightarrow \dot{n}_0 = -\Gamma_{n_0} + \Gamma_{n_1} + \Gamma_{0\text{ext}}$$

$$\dot{n}_1 = -\Gamma_{n_1} + \Gamma_{n_0} + \Gamma_{1\text{ext}}$$



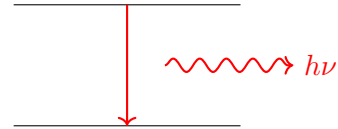
IV.5.3 Zwei-Niveau System im Strahlungsfeld, Einstein Parameter

Im Folgenden Betrachten wir stets ein Zwei-Niveau-System wie hier in der Abbildung zu sehen ist:



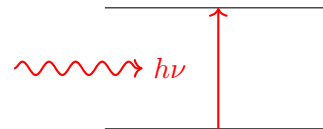
spontane Emission:

$$\Rightarrow \begin{aligned} \dot{n}_1 &= -A_{1 \rightarrow 0} n_1 \\ \dot{n}_0 &= +A_{1 \rightarrow 0} n_1 \end{aligned}$$



Photon Absorption:

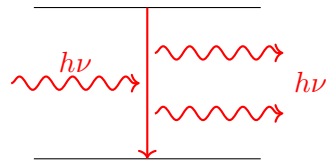
$$\Rightarrow \begin{aligned} \dot{n}_0 &= -B_{0 \rightarrow 1} \rho(\nu) n_0 \\ \dot{n}_1 &= +B_{0 \rightarrow 1} \rho(\nu) n_0 \end{aligned}$$



$\rho(\nu)$: Dichte des Strahlungsfeldes
 ν : Frequenz

stimulierte Emission:

$$\Rightarrow \begin{aligned} \dot{n}_0 &= +B_{1 \rightarrow 0} \rho(\nu) n_1 \\ \dot{n}_1 &= -B_{1 \rightarrow 0} \rho(\nu) n_1 \end{aligned}$$



Definition Gleichgewicht n_0 :

$$A_{1 \rightarrow 0} n_1 - B_{0 \rightarrow 1} \rho(\nu) n_0 + B_{1 \rightarrow 0} \rho(\nu) n_1 = 0$$

Thermodynamik, Quantenstatistik:

$$\frac{n_k}{N} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_k}{k_B T}}$$

$$\rho(\nu) = \frac{s \pi k \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

$$Z = \sum_k e^{-\frac{E_k}{k_B T}}$$

\Rightarrow Planck'sches Strahlungsgesetz

Kapitel V

Entwicklung der Atom- und Quantenphysik

V.1 Quantelung von Masse und Ladung

V.1.1 Quantelung der Masse

Chemie:

Dalton'sches Gesetz der multiples Proportionen

Satz von Avogadro

⇒ Dalton'sche Atomhypothese

⇒ Periodensystem der Elemente

Periodizität festgestellt durch Atomvolumen. Erst später Ionisationsenergie (Abspaltung des am schwächsten gebundenen Elektron).

Physik:

kinetische Gastheorie (vor allem Maxwell)

Gas = Teilchen mit nur kinetischer Energie, W.W. mit einem Gefäß

$$\Rightarrow P = \frac{N}{V} m \frac{\bar{v}^2}{3}$$

Äquipartitionstheorem

$$\overline{E_{\text{kin}}} = \frac{3}{2} k_B T \quad (\text{eiatomiges Gas, } f = 3)$$

$$\Rightarrow \boxed{PV = N_A k_B T} \quad \text{ideale Gas Gleichung}$$

V : Molvolumen

⇒ Größe der Atome

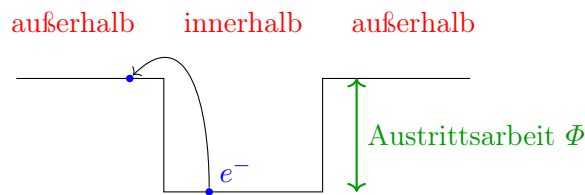
Beispiel: Messung der Gaskonstanten R über Schallgeschwindigkeit

$$c^2 = \frac{f+2}{f} R \frac{T}{M}$$

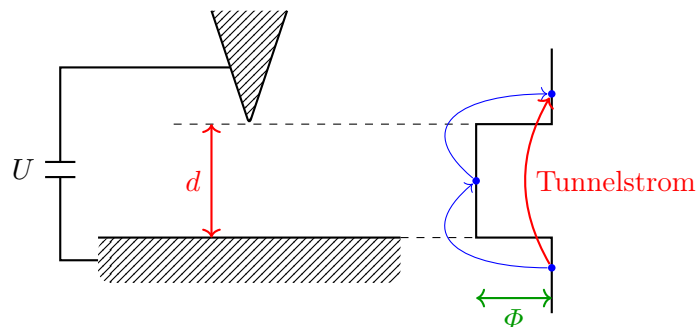
[Folie: Versuchsaufbau zur Messung der Gaskonstante R]

Direkter Nachweis über die Rastertunnelmikroskopie

Ein Elektron, das von einem in den anderen Energiezustand springt:



Schematische Skizze eines Rastertunnelmikroskops:



Der Tunnelstrom ist hierbei exponentiell zur Spannung proportional:

$$I_T \propto U_T \exp \left(-2 \sqrt{\frac{2m\Phi}{\hbar^2}} d \right)$$

typische Zahlenwerte:

I_T ca. 1 – 10 nA

U_T ca. 100 mV

d ca. 1.10 nm

[Folie: Rastertunnelmikroskop]

Manövrieren mittels Piezokristallen um Präzisionen feiner als Atomare Skala zu erreichen.

[Folie: Rasterkraftmikroskop (AFM)]

V.1.2 Quantelung der Ladung

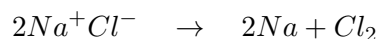
Elektrolyse

[Folie: zu Elektrolyse]

Prinzip \Rightarrow elektrische Ströme \Rightarrow Redox-Reaktion
 \Rightarrow Stoffumsatz verknüpft mit Ladungsmenge

$$F = eN_A = 96485, \dots \frac{\text{C}}{\text{mol}}$$

Beispiel: NaCl



Um 1 mol Na abzuscheiden, oder $\frac{1}{2}$ mol Cl_2 Gas zu erzeugen werden $Q = 96486 \text{ C}$ benötigt.

$$\Rightarrow F = N_A e \Rightarrow e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Millikan Versuch

[Folie: Millikan Versuch]

Prinzip: geladenes Tröpfchen + angelegtes \mathbf{E} -Feld.

$$\Rightarrow m\mathbf{a} = q\mathbf{E} + m\mathbf{g} - \rho V\mathbf{g} + 6\pi\eta R\mathbf{v}$$

Schwebefeld-Methode

Idee: \mathbf{E} -Feld so einstellen, dass Tröpfchen schwebt.

Problem: R ist unbekannt.

$$\Rightarrow R \text{ ungenau} \Rightarrow q \text{ ungenau}$$

Versuch: Milikan Versuch

Kondensator aus Gitterplatten und Seifenblasen als Tröpfchen.

Gleichfeld-Methode

Idee: Am selben Tröpfchen zwei Messungen mit unterschiedlichen \mathbf{E} -Feldern.

Realisierung: \mathbf{E} -Feld Umpolen

Messung 1: Tröpfchen sinkt

Messung 2: Tröpfchen steigt

\Rightarrow wird eliminiert

v messen \Rightarrow das geht ganz gut

[Folie: Millikan Ergebnisse]

V.1.3 Bestimmung von Q/M (Ladung/Masse)

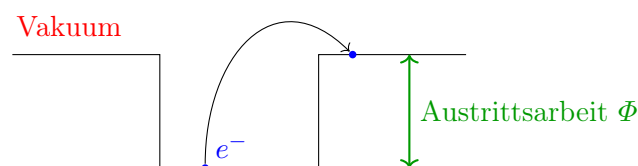
Prinzip:

- 1) Teilchenstrahlquelle: geladene Teilchen werden durch \mathbf{E} -Feld beschleunigt
- 2) Massentrennung: Teilchenstrahl durch \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder
- 3) Teilchenstrahl detektieren

Teilchenstrahlquelle

Glühkathode: [Folie: Glühkathoden] Eine Drahtwindel wird in einem Vakuum stark erhitzt.

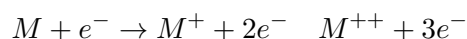
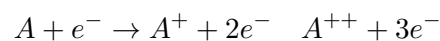
\Rightarrow Elektronen treten aus (überwinden Austrittsarbeit)



\Rightarrow Elektronenstrahl durch Beschleunigungsspannung.

Elektronenstoßionenquelle

Atome/Moleküle werden mit Elektronen beschossen:



Beispiel: $H_2O + e^- \rightarrow H_2O^+, OH^+, O^+ \dots$

[Folie: Elektronenstoßquelle]

Elektrospray Ionenquelle (ESI)

Prinzip: zu untersuchende Substanz wird in Flüssigkeit gebracht und mit dieser durch eine Düse aufgespritzt. Dabei wird außerdem eine hohe Spannung angelegt um die Tröpfchen zu beschleunigen.

⇒ Tröpfchen (1 - 10 nm)

→ Coulomb Explosion

→ Verdampfung der Flüssigkeit

[Folie: Elektronenspray-Ionenquelle]

Detektion

Faraday Becher

Gauß'scher Satz ⇒ Innerhalb um Metallkörper befinden sich keine Ladungen. Ladungen werden auf Außenseite gesammelt.

Nachweisgrenze: $10^{-14} \text{ A} \hat{=} 10^5 \frac{\text{Ionen}}{\text{s}}$

[Folie: Faraday-Becher]

Sekundärelektronenvervielfacher (SEV)

Ein auf Metall/Halbleiter auftrefendes Elektron erzeugt bei genügend Energie mehrere Sekundärelektronen.

Nachweisgrenze: einzelnes Ion

[Folie: SEV]

[Folie: Mikrokanalplatte (für Ortsauflösung)]

Massentrennung

Teilchenstrahl durch **E**- und **B**-Felder

Magnetisches Feld:

$$R = \frac{m}{q} \frac{v}{B}$$

Impulsfilter

Elektrisches Feld:

$$y(x) = \frac{qE}{2mv_x^2} x^2$$

Energiefilter

[Folie: Magnetisches und elektrisches Feld]

Thomson'sche Röhre

[Folie: Thomson'sche Röhre]

[Folie: Massen-Spektren]

Beschleunigung:

$$\frac{1}{2}mv^2 = qU$$

Ablenkung:

$$m \frac{v^2}{R} = qvB$$

Für das Ladungs-Masse-Verhältnis ergibt sich dann.

$$\Rightarrow \frac{q}{m} = \frac{2v}{(RB)^2}$$

Versuch: Glühkathode im Vakuum

Der Elektronenstrahl wird sichtbar, da Argon-Moleküle im nicht perfekten Vakuums angeregt werden und blau leuchten. Durch das homogene Magnetfeld der Helmholtzspulen wird aus dem Elektronenstrahl eine gekrümmte oder kreisförmige Bahn. Bei Drehung des Glaskörpers ergibt sich eine Spirale.

Versuch: Thomson'sche Röhre

Wien'scher Filter mit gekreuzten E - und B -Feldern.

V.2 Struktur der Materie

V.2.1 Materie besteht aus Atomen/Ionen

Dalton's Atomhypothese

V.2.2 Atome bestehen aus Elektronen und „sonst etwas“

⇒ e^- müssen gebunden sein

⇒ Bindungsenergie für e^-

⇒ Ionisationsenergie: Bindungsenergie für „erstes“ Elektron e^-

Franck-Hertz-Versuch

Idee:

- 1) e^- werden im Atomgas beschleunigt, gewinnen kinetische Energie. Je nach Wechselwirkung der e^- mit den Atomen tritt ein Energieverlust auf.
- 2) Nach einer gewissen Strecke erreichte kinetische Energie wird gemessen

Aufbau: [Folie: Franck-Hertz-Versuch]

- Quecksilberdampf, ca. 10 mbar
- Glühkathode mit Beschleunigungsspannung