Theoretische Physik II
Elektrodynamik

Vorlesung von Prof. Dr. Michael Thoss im Wintersemester 2018

Markus Österle   Andréz Gockel   Damian Lanzenstiel   Patrick Munnich

4. Februar 2019

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Relativitätstheorie und Elektrodynamik

Ziel dieses Kapitels ist es, die Maxwellgleichungen relativistisch-kovariant darstellen zu können. Hierzu benötigen wir aber zunächst eine kurze Wiederholung der Formalismen der Relativitätstheorie.

1.1 Spezielle Relativitätstheorie (Wiederholung)

Inertialsysteme:

Bezugssysteme, in denen sich ein Kräftefreier Körper geradlinig und gleichförmig bewegt.

1.1.1 Newtonsche Mechanik und Galileitransformation (Exkurs)

Newtonsche Mechanik

in der **Newtonschen Mechanik** gilt das Galileische Relativitätsprinzip:
Alle IS sind gleichwertig, d.h. physikalische Gesetze haben in allen IS die gleiche Form.

Der Übergang zwischen IS verläuft mittels der **Galileitransformation**: $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_x \qquad \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t$
Transformationskoordinaten:

$$x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t$$

Transformation von Geschwindigkeiten

$$u' := \frac{x'}{t'} = \frac{x - vt}{t} = \frac{x}{t} - v = u - v$$

$$u = u' + v$$

Geschwindigkeitsaddition ist also linear.

Exp: Lichtgeschwindigkeit c ist in allen Systemen gleich $\lightning$

Einsteinsches Relativitätsprinzip

Grundlagen:

1) Alle IS sind gleichwertig

2) Die Lichtgeschwindigkeit c ist in allen IS gleich

1.1.2 Lorentztransformation und relativistische Notation

Ereignis in S bei t, x, y, z hat in S' die Koordinaten t', x', y', z'
Der Zusammenhang ist gegeben durch die Lorentztransformation.

Lorentransformation

$$t' = \gamma\left(-\frac{\beta}{c}x + t\right) \quad x' = \gamma\,(x - vt) \quad y' = y \quad z' = z$$

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Grenzfall: $\left|\frac{v}{c}\right| \ll 1: \quad \beta \to 0, \gamma \to 1$
$\Rightarrow \quad t' = t \quad x' = c - vt \quad y' = y \quad z' = z$

relativistische Notation

t, x, y, z : Ereignis im **Minkoswki-Raum**

Vierervektor

$$(x^\mu): \quad x^\mu \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

$$x^0 = ct \quad x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z \qquad (x^\mu) = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Darstellung: Raum-Zeit-Diagramme oder auch Minkowski-Diagramme: Abstand zweier Ereignisse

$$(x_A^\mu) = (x_A^0, x_A^1, x_A^2, x_A^3) = (ct_A, x_A, y_A, z_A)$$
$$(x_B^\mu) = (x_B^0, x_B^1, x_B^2, x_B^3) = (ct_B, x_B, y_B, z_B)$$

Abstand:

$$\begin{aligned}(\Delta s)^2 &:= (x_A^0 - a_B^0)^2 - (x_A^1 - x_B^1)^2 - (x_A^2 - x_B^2)^2 - (x_A^3 - x_B^3)^2 \\ &= c^2(t_A - t_B)^2 - (x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2\end{aligned}$$

Wegelement ds:

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}s)^2 &= c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \\ &= (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2 \\ &= \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu\end{aligned}$$

mit $g_{\mu\nu}$ dem metrischen Tensor: $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Lorentztransformation: $S \to S'$

$$x^\mu \to x'^\mu \to \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{=:\Lambda^\mu{}_\nu} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Einsteinsche Summen-Konvention

$$x'^\mu = \sum_\nu \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu := \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

Bei gleichen Indices, einer oben, einer unten, wird die Summe weggelassen es wird dann über diesen Index aufsummiert.

1.1.3 Skalare, Vektoren, Matrizen, Tensoren in der vierdimansionalen Raum-Zeit

Skalare

Größen, die invariant sind unter Lorentztransformation (LT)

Beispiele:

i) Abstand: $\Delta s, \mathrm{d}s$

ii) Eigenzeit: $\mathrm{d}\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2}\mathrm{d}t$

iii) c, m_0, q

Vierervektoren

Ortsvektor: $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$

Ein Vierervektor b ist eine vierkomponentige Größe (b^μ), welche sich bei LT wie die Komponenten des Ortsvektors transformiert:

$$b'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu b^\nu$$

Beispiele:

i) Ortsvektor

ii) Vierergeschwindigkeit $u = (u^\mu)$
Wurde eingeführt, da sich die normale Geschwindigkeit nicht wie der Ortsvektor transformiert.

$$u^\mu := \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^\mu &= (\mathrm{d}x^0, \mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \mathrm{d}x^3) \\ &= (c\mathrm{d}t, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) \end{aligned}$$

$\mathrm{d}\tau' = \mathrm{d}\tau$

$$\mathrm{d}x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \mathrm{d}x^\nu \qquad u'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial \tau'} = \Lambda^\mu_\nu u^\nu$$

$$u^0 = \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} ct = \gamma c$$

$$u^1 = \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \gamma v_x$$

$$(u^\mu) = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}$$

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \qquad x'_\mu = \overline{\Lambda}_\mu{}^\nu x_\nu$$

„Skalarprodukt“ zweier Vierervektoren

$$(a^\mu), (b^\mu): \quad a \cdot b := a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

$$\to \quad (\Delta s)^2 = (x_A - x_B) \cdot (x_A - x_B)$$

Kovariante und Kontravariante Vektorkomponenten

$$(a^\mu) = (a^0, a^1, a^2, a^3)$$
$$(a_\mu) := (a^0, -a^1, -a^2, -a^3)$$

a^μ : Kontravariante Komponenten
a_μ : Kovariante Komponenten

$$a \cdot b = \sum_\mu a^\mu b_\mu = a^\mu b_\mu$$

$$g_{\mu\nu} : \qquad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \qquad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$$

Dies nennt man auch das Herauf- oder Herunterziehen der Indizes.

$$\begin{aligned} x_1 &= g_{1\nu} x^\nu \\ &= \cancel{g_{10}} x^0 + g_{11} x^2 + \cancel{g_{12}} x^2 + \cancel{g_{13}} x^3 \\ &= -x^1 \end{aligned}$$

Tensoren

Größe mit oberen und/oder unteren Indizes, wobei sich jeder obere Index Kontravariant und jeder untere Index Kovariant transformiert.

Beispiel: Tensor 3. Stufe

$$T^{\alpha\beta}{}_\gamma : \quad T'^{\alpha\beta}{}_\gamma = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \overline{\Lambda}_\gamma{}^\sigma T^{\mu\nu}{}_\sigma$$

metrischer Tensor: $g_{\mu\nu}$, Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$

Vierervektoren

$$(a^\mu) : \quad a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu \qquad \text{kontravariant}$$

$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ Boosts:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

$$(x^\mu) = (ct, x, y, z)$$

$$(a_\mu) : \quad \text{kovariant} \qquad a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu}$$

$$(x_\mu) = (ct, -x, -y, -z)$$

$$\begin{aligned} a'_\mu &= g_{\mu\nu} a'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\alpha a^\alpha \\ &= \underbrace{g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\alpha g^{\alpha\beta}}_{\overline{\Lambda}_\mu{}^\beta} a_\beta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad a'^\mu = \overline{\Lambda}_{mu}^\beta a_\beta$$

$$\overline{\Lambda} = \left(\Lambda^{-1}\right)^\top$$

Boosts: $\Lambda(\boldsymbol{v})$:

$$(\Lambda(\boldsymbol{v}))^{-1} = \Lambda(-\boldsymbol{v}) \qquad \Lambda^\top = \Lambda$$

$$\overline{\Lambda} = \Lambda(-\boldsymbol{v})$$

Beispiel: partielle Ableitung (Gradienten);

$$\partial_\mu :== \frac{\partial}{\partial x^\mu} \qquad \text{transformiert sich wie kovariante Komponente}$$

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\ \Rightarrow \quad x^\nu &= \underbrace{\left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu}_{\overline{\Lambda}_\mu{}^\nu} x'^\mu = \overline{\Lambda}_\mu{}^\nu x'^\mu \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \overline{\Lambda}_\mu{}^\nu$$

$$\begin{aligned} \partial'_\mu &= \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \sum_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \\ &= \sum_\nu \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \overline{\Lambda}_\mu{}^\nu \partial_\nu \end{aligned}$$

$$\partial^\mu := \frac{\partial}{\partial x_\mu} \qquad \partial'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu$$

1.2 Relativistisch kovariante Forulierung der Elektrodynamik

1) **Ladungs- und Stromdichte $\rho, \boldsymbol{j}$**

$$\rho, \boldsymbol{j} \to \text{ Vierervektor}: \quad (j^\mu) := (c\rho, \boldsymbol{j}) = (c\rho, j_x, j_y, j_z)$$

Ladung q: **Lorentz-Skalar**: $\quad q' = q$
Ladungserhaltung: **Kontinuitätsgleichung** gilt: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial (ct)}(c\rho)}_{= \frac{\partial}{\partial x^0} j^0} + \sum_{\mu=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\mu} j^\mu \qquad (x^\mu) = (ct, x, y, z) \\ &= \sum_{\mu=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\mu} j^\mu = \partial_\mu j^\mu \end{aligned}$$

Kontinuitätsgleichung in relativistischer Schreibweise

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0 = \partial'_\mu j'^\mu$$

es wird also über μ aufsummiert: $a_\mu b_\mu$

Lorentztransformation: $S \to S'$

$j'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} j^{\nu}$
Beispiel:

$$(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} j'^0 &= c\rho' = \gamma c\rho - \beta\gamma j_x \\ j'^1 &= j'_x = -\beta\gamma c\rho + \gamma j_x \\ j'^2 &= j'_y = j_y \\ j'^3 &= j'_z = j_z \end{aligned}$$

Annahme: in S ruhende Ladung q im Volumen ΔV : $\rho = \frac{q}{\Delta V}, \boldsymbol{j} = 0$
in S':

$$\rho' = \gamma\rho = \gamma\frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{\frac{\Delta V}{\gamma}} = \frac{q}{\Delta V'} \geq \rho$$

Das Volumen $\Delta V'$ ist kleiner (Längenkontraktion), daher ist die Ladungsdichte in S' größer als in S.
Längenkontraktion: $\Delta V' = \frac{\Delta V}{\gamma}$

$$\begin{aligned} j'_x &= -\beta\gamma c\rho = -\beta c\rho' \\ &= -v\rho' \end{aligned}$$

Die y- und z-Komponenten sind gleich null, da sich S' nur in x-Richtung von S wegbewegt.

2) **Viererpotential**

$$\Phi, \boldsymbol{A} \to (A^{\mu}) = (\frac{1}{c}\Phi, A_x, A_y, A_z)$$

Das $\frac{1}{c}$ kommt aus dem SI-Einheitensystem, sodass die Einheiten der Vektorkomponenten übereinstimmen. (Im CGS-System gibt es diesen Faktor nicht)

Lorenzeichung: $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$

$$\to \quad 0 = \frac{\partial}{\partial(ct)}\left(\frac{1}{c}\Phi\right) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} A^{\mu} = \partial_{\mu} A^{\mu}$$

$$0 = \partial_{\mu} A_{\mu}$$

Da Skalarprodukte in der Relativitätstheorie Lorentzinvariant sind, sieht man hier, dass auch die Lorenzeichugn in der Relativitätstheorie Lorentzinvariant ist.
Dies gilt nicht für die Coulomb-Eichung.

Coulomb-Eichung: $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$

Die Maxwell-Geichungen führen aus den Potential-Gleichungen auf:

$$\Rightarrow \quad \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} = -\mu\boldsymbol{j}$$

Viererlaplaceoperator:

$$\partial_\nu \partial^\nu = \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} =: \Box \quad \textbf{d' Alambert Operator}$$

$$\Box A^\nu = \mu_0 j^\nu \qquad \nu = 0, 1, 2, 3$$

$\nu = 0$: $A^0 = \frac{1}{c}\Phi \quad j^0 = c\rho$

$$\Box \frac{1}{c} \Phi = \mu_0 c \rho$$

$$\Box \Phi = \mu_0 c^2 \rho = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

Beispiel: Potentiale einer gleichförmig bewegten Ladung q q ruhe um Ursprung von S'

Potentiale in S':

$$\Phi'(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\boldsymbol{r}|} \qquad \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}') = 0$$

$$\Rightarrow \quad (A'^\nu(x')) = \left(\frac{1}{c}\Phi', \boldsymbol{A}'\right) = \left(\frac{1}{c} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\boldsymbol{r}'|}, 0, 0, 0\right)$$

Transformation von S' ins Laborsystem S (LT mit $-\boldsymbol{v}$):

LT: $\boldsymbol{v} = -v\boldsymbol{e}_x$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^\nu(x) = \Lambda^\nu{}_\alpha A'^\alpha(x')$$

$$\begin{aligned} A^0 &= \gamma A'^0 + \beta\gamma A'^1 = \frac{\gamma}{c} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\boldsymbol{r}'} \\ &= \frac{1}{c}\Phi \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{\gamma q}{4\pi\varepsilon_0 r'}}$$

$$\begin{aligned} A^1 &= \beta\gamma A'^0 + \gamma A'^1 \\ &= \frac{\beta\gamma}{c} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'} = A_x \\ A_x &= \frac{\beta\gamma}{c} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'} \end{aligned}$$

$$A^2 = A'^2 = 0 \tag{1.1}$$

$$A^3 = A'^3 = 0 \tag{1.2}$$

mit $\beta = \frac{v}{c}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{v\gamma q}{r'} \boldsymbol{e}x}$$

Umrechnung: $x' \to x$

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x'^{\nu}) = (ct', x', y', z') = (\gamma x^0 - \beta\gamma x^1, -\beta\gamma x^0 + \gamma x^1, x^2, x^3)$$

$$\begin{aligned} r'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ &= (\gamma x - \beta\gamma ct)^2 + y^2 + z^2 \\ &= \gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathit{\Phi}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{(x-vt)^2 + (1 - \frac{v^2}{c^2})(y^2+z^2)}} \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{vq}{\sqrt{(x-vt)^2 + (1 - \frac{v^2}{c^2})(y^2+z^2)}} \end{aligned}$$

Zuvor: gleiches Ergebnis in anderer Schreibweise:

$$\mathit{\Phi}(\boldsymbol{r}) == \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}(t)| \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \alpha}}$$