# Experimentalphysik III

Vorlesung von Prof. Dr. Oliver Waldmann im Wintersemester 2018

Markus Österle  Andréz Gockel

23. November 2018

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 0

# Einführung

**Dozent** Prof. Oliver Waldmann, Zi. 202, Physik-Hochhaus

**Zeit** Di, 8-10 Uhr, Mi, 8-10 Uhr

**Ort** Großer Hörsaal Physik

## 0.1 Termine

**Vorlesungsbeginn** Di., 16.10.2018

**Erstes Übungsblatt** Mi., 17.10.2018

**Übungsbeginn** Mo., 29.10.2018 - Fr., 2.11.2018

**Letzte Vorlesung** Mi., 6.2.2019

**Klausur** Sa., 9.2.2019, 9:00 - 12 Uhr

**Wiederholungsklausur** Sa., 27.4.2019., 10:00-13 Uhr

## 0.2 Programm

1. Spezielle Relativitätstheorie
2. Fortgeschrittene Optik
3. Quantenphysik
4. Einfache atomare Systeme

## 0.3 Literatur

- alle Lehrbücher
- Demtröder, Experimentalphysik 3 (Springer)
- Tipler/Mosca, Physik (Elsevier)
- Bergmann/Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 3
- Gerthsen, Physik (Springer)
- Giancoli, Physik (Pearson)

## 0.4 Übungen und Betreuer

Übungsleiter: Krunoslav Prša, Zi. 203, Physik-Hochhaus, Tel. 7631
Gruppe 3: Mi 10-12, SR III, Tutor: Fabian Thielemann
Gruppe 7: Fr 14-16, SR GMH, Tutor: Rupert Michiels

## 0.5 Übungsblätter

- Ausgabe der Übungsblätter jeweils am ENDE der Vorlesung am Mittwoch im großen Hörsaal, oder online auf ILIAS (siehe Ordner "Übungsblätterünten)
- Rückgabe der schriftlichen Lösungen VOR der Vorlesung am Mittwoch, die Lösungen sind im Hörsaal vorne auf den Tisch zu legen
- jedes Übungsblatt umfasst typischerweise 4 - 5 Aufgaben mit insgesamt ca. 35 Punkten
- jedes Übungsblatt enthält typischerweise eine leichte und eine schwere Aufgabe

## 0.6 Übungsgruppen

- bis zu zwei (2) Studierende können ein Lösungsblatt gemeinsam bearbeiten und abgeben (sie müssen dann aber in einer Übungsgruppe sein)
- bitte DEUTLICH auf dem Lösungsblatt angeben: Namen der Studierenden, Übungsgruppe (Nr, Name des Übungsleiters, Ort, Zeit)
- Gruppenarbeit ist erwünscht, es wird aber erwartet, dass jede(r) Studierende die Aufgaben vorrechnen kann, sonst Punktabzug :-)
- Einschreibung in die Übungsgruppen über ILIAS von Di., 17.10, 20:00 Uhr bis Do., 19.10, 20:00 Uhr (siehe unten)
- Anwesenheitspflicht & Vorrechenpflicht!

## 0.7 Klausur

**Zuslassung zur Klausur** 40% der Übungspunkte

**Termin** Sa, 9. Februar 2019, 9:00 - 12 Uhr, Großer Hörsaal Physik

**Dauer** 120 Minuten

**Inhalt** Vorlesungsstoff + Übungen, Aufgaben sind ähnlich zu den Übungen gestellt

**Sprache** Die Klausuraufgaben werden in Deutsch zur Verfügung gestellt

**Erlaubt** Din-A4 Blatt mit eigenen Notizen beidseitig beliebigbeschrieben/bedruckt (spezielle Lesehilfen sind nicht erlaubt!), Stifte, Geodreieck/Lineal

**Nicht erlaubt** Es ist alles verboten was nicht erlaubt ist (Taschenrechner, Handy, Bücher, usw.) (leere geheftete Blätter werden verteilt)

**Mitzubringen** Studierendenausweis, Schreibstifte, Geodreieck/Lineal

**Anmeldung zur Klausur**

Online Anmeldung, der Ablauf und Termine werden durch die jeweiligen Prüfungsämter bekannt gegeben.

## 0.8 Prüfungsleistung

- mindestens 40% der Übungspunkte werden für die Zulassung zur Klausur benötigt
- bestandene schriftliche Klausur oder Nachklausur
- Bewertungsgrundlage ist das Ergebnis der Klausur oder Wiederholungsklausur

Täuschungsversuche: Sowohl die Übungen wie die Klausur sind Teil der Prüfungs/Studienleistung! Täuschungsversuche können zum Nicht-Bestehen führen!

# Kapitel I

# Spezielle Relativitätstheorie

## I.1 Vorgeschichte

**1861-1867: Maxwell Gleichungen**
Vor Maxwell brauchten alle bekannten Wellen (Wasserwellen, Schall) ein Medium oder Trägerstoff. Daher stammte die Annahme, auch elektro-magnetische Wellen also Licht bräuchte ein Medium: der Äther. Somit wollte man experimentell zu zeigen, wie schnell wir uns durch den Äther bewegen und welches das Inertialsystem, das ausgezeichnete Bezugssystem des Äthers ist. Mit dem Ziel den Äther nachzuweisen wurde das Michelson-Morley Experiment durchgeführt.

### I.1.1 Experiment von Michelson-Morley

Die Idee des Experimentes war es die Bewegung der Erde relativ zum Äther zu messen.
**Anforderungen:**

- Erde $30\,\mathrm{km/s}$
- Licht $3 \cdot 10^5\,\mathrm{km/s}$

$\Rightarrow$ relative Auflösung von circa $10^{-4}$ nötig

**Prinzip**:
Lichtlaufzeiten:
Arm parallel zum Ätherwind

$$t_2 = \frac{L_2}{c+v} + \frac{L_2}{c-v} = \frac{2cL_2}{(c^2-v^2)} = \frac{2L_2}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^2}$$

Arm senkrecht zum Ätherwind

$$t_1 = 2\frac{L_1'}{c}$$

Nebenrechnung:

$$L'^2 = L^2 + (vt)^2 \quad \Rightarrow \quad (ct)^2 = L^2 + (vt)^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

$$t_1 = \frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

Somit ist die Zeitdifferenz der beiden Lichtstrahlen

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2L}{c}\ \frac{1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{2L}{c}\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{lv^2}{c^2}$$

Hieraus können wir nun den Phasenunterschied der beiden Strahlen berechnen

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{c\Delta t}{\lambda}$$

Abschätzung:

$$L = 2 \times 11\,\text{m}\ ,\ v = 30\,\text{km/s}\ ,\ \lambda = 500\,\text{nm}\ \Rightarrow\ \Delta\varphi/\pi \approx 0{,}88$$

**Auflösung**

$$\frac{\Delta\varphi}{\pi} \approx \frac{1}{4}$$

**Ergebnis:**
Es gibt keine Verschiebung des Interferenzmusters.

**Konsequenz:**
⇒ Es gibt keinen Ätherwind.
⇒ Es gibt kein ausgezeichnetes Bezugssystem. Alle Bezugssysteme sind gleichwertig.

**Aber:**
Kontraktionshypothese von Fitzgerald z Lorenz
Wenn der Arm in Richtung der Äthers um Faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Arm parallel zum Ä.W.:

$$t_2 = \frac{2cL_2}{c^2 - v^2}\frac{1}{\gamma} = \frac{2L_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Arm senkrecht zum Ä.W.:

$$t_1 = \frac{2L_1}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

**Aber:**
Äther nicht beobachtbar

### I.1.2 Lorenz-Invarianz der Maxwell-Gleichungen

Maxwell-Gleichungen sind Lorenz-invariant und nicht Galilei-invariant.
Beispiel: Relativität der Feder.
⇒ Im Laborsystem: $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$
⇒ Im Ruhesystem: $v' = 0 \Rightarrow F_L = 0$ ϟ
⇒ ein zusätzliches $E'$-Feld, $\boldsymbol{F}_q = q\boldsymbol{E}$
⇒ neue „Transformationsgleichungen“
**Transformation**

- $K$: „ruhende“ Bezugssystem
- $K'$: „sich in Bezug auf $K$ konstant entlang der $x$-Achse bewegendes“ Bezugssystem

$$\boldsymbol{E'} = (E_x, \gamma(E_y - vB_z), \gamma(E_z - vB_y))^\top$$
$$\boldsymbol{B'} = (B_x, \gamma(B_y + {}^{v}\!/\!{}_{c^2}E_z), \gamma(B_z - {}^{v}\!/\!{}_{c^2}E_y))^\top$$

### I.1.3 Einstein und die Patente

Einstein arbeitete um ... beim Patentamt in .... Zu dieser Zeit wurden häufig neue Patente zur Synchronisierung verschiedenen Uhren angemeldet, was zu Einsteins Inspiration und seinen späteren Entdeckungen führte.

## I.2 Bezugsysteme und Inertialsysteme

Zur Diskussion der Relativitätstheorie ist ein bestimmtes Vokabular mit klaren Definitionen Notwendig. Hierzu soll dieser Abschnitt dienen.

### I.2.1 Was ist ein Bezugssystem (BZS)

Ein Bezugssystem ist ein Koordinatensystem bezüglich dessen man die Bewegung von Objekten beschreibt.
**Konsequenzen:**

- es gibt einen Koordinatenursprung $\boldsymbol{O}$
- Koordinatenursprünge verschiedener BZS können sich gegeneinander bewegen

$\Rightarrow$ Transformationsgesetze

ACHTUNG
Unterscheide sorgfältig zwischen Basisvektoren, Vektoren und Koordinaten

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' \qquad \begin{array}{l} \boldsymbol{v} = \sum_i x_i \boldsymbol{e}_i \\ \boldsymbol{v}' = \sum_i x_i' \boldsymbol{e}_i' \end{array} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{x}'$$

### I.2.2 Was ist ein Inertialsystem (IS)

Bezugssystem in welchem das Trägheitsgesetz gilt.

**Konsequenzen:**

$\Rightarrow$ Inertialsystem bewegen sich gradlinig - gleichförmig gegeneinander

#### Klassisches Relativitätsprinzip

Grundgesetze der Physik nicht in allen Inertialsystemen gleich (Form invariant)

### I.2.3 Galilei-Transformation

**Galilei-Trafo**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t \\ t' &= t \end{aligned}$$

$\boldsymbol{v}$: Geschwindigkeit vom $\boldsymbol{O}'$ gegenüber $\boldsymbol{O}$

**Test:**

$$k: \quad \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \quad \Leftrightarrow \quad k': \quad \boldsymbol{F}' = m\boldsymbol{a}'$$
$$\boldsymbol{a}' = \frac{d^2\boldsymbol{v}'}{dt'^2} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{a}$$

*Bemerkung*
Invarianz unter Drehungen $\Rightarrow$ Tensoren

#### Transformation der Geschwindigkeit

$$\boldsymbol{v}' = \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt'} = \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$$

$\Rightarrow$ Lichtgeschwindigkeit ist NICHT konstant !

### I.2.4 Lorenz-Transformation (LT)

**Lorenz-Trafo**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{u}{c^2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{LT}$$

Ziel der speziellen Relativitätstheorie:
Die Gesetze der Mechanik sollen Lorenz-invariant sein !

*Bemerkung*
Die Galilei-Transformation ergibt sich aus der Lorenz-Transformation für $\frac{u}{v} \to 0$ somit wird dann $\gamma \to 1$ gehen.

## I.3 Einsteins Axiome der speziellen Relativitätstheorie (SRT)

1. Relativitätsprinzip:
   Alle Naturgesetze nehmen in allen IS die gleiche Form an.

2. Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist Konstant.

*Bemerkungen*

- Punkt 1 legt die Lorenz-Trafo fest
- Das Umgekehrte gilt nicht

## I.4 Konsequanzen aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Da durch, dass die Lichtgeschwindigkeit eine Konstante sein soll ergeben sich schon bei einfachen Beispielen Schwierigkeiten. Ein solches Beispiel wäre die Addition von Geschwindigkeiten. Fährt man nun in einem Zug der die Geschwindigkeit 0,8$c$ hat und schießt ein Geschoss mit 0,3$c$ in Fahrtrichtung ab so sollte dieses mit 1,1$c$ schneller als die Lichtgeschwindigkeit sein. Warum dies nicht der Fall ist und wie man damit umgeht und welche weiteren Konsequenzen aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit folgen wird im folgenden Abschnitt erläutert.

### I.4.1 Lorenz-Trafo und Lorenz-Invarianz

1) Lichtstrahlen:
   Im IS $K: \quad x = ct$
   Im IS $K': \quad x' = ct'$

2) Alle IS sind gleichberechtigt
   Trafo $K \to K': \quad x' = \gamma(x - ut)$
   Trafo $K' \to K: \quad x = \gamma(x' - ut')$

3) $\Rightarrow xx' = \gamma^2 xx' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

4) $t' = \gamma(t - \xi x)$
$t' = \frac{x'}{c} = \gamma \frac{1}{c}(x - ut) = \gamma(t - \frac{ux}{c^2})$

5) Insgesamt:

**Lorenz-Trafo**

$$x' = \gamma(x - ut) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right)$$

Transformation der Geschwindigkeiten
NR:

$$\frac{dx'}{dt} = \gamma\left(\frac{dx}{dt} - u\right) = \gamma(v_x - u)$$
$$\frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{u}{c^2}v_x\right)$$

Daraus folgt dann für die Geschwindigkeitsadditionen in verschiedene räumliche Komponenten:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$
$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma}\frac{v_y}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$
$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma}\frac{v_z}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

**Test:**

- $u \ll c \Rightarrow$ Galilei-Trafo
- Umkehrung

### Lorenz-Invarianz

Feststellung $x^2 - c^2t^2 = \text{const.} = x'^2 - c^2t'^2$

Raum-Zeit-Abstand: $L = \sqrt{x^2 - c^2t^2}$
$\rightarrow$ RZ-Abstand bleibt unter Lorenz-Trafo invariant.

### Minkiwski Raum

„Drehung“ im M-Raum $\Leftrightarrow$ Lorenz-Trafo

A)

$$\boldsymbol{x} = (x, y, z, ict)$$
$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = l^2$$

B)

$$\boldsymbol{x} = (x, y, z, ct) \quad \text{Metrik:} \quad \overline{g} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow l^2 = \boldsymbol{x}\overline{g}\boldsymbol{x} = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

$\Rightarrow$ Kovarianten und Kontravarianten Vierervektoren

**Elementare Diskussion des M-Raums**

*Frage:* Wie sieht ein anderes sich bewegendes IS (K') im eigenen IS (K) aus ?

K: Die Achsen $ct, x$ stehen rechtwinklig aufeinander.
K': wie liegen $ct', x'$ in K ?

**Für die Lage von $ct'$:** Betrachte $x' = 0 \to$ LT $\Rightarrow x = \frac{u}{c}ct$
**Für die Lage von $x'$:** Betrachte $ct' = 0 \to$ LT $\Rightarrow ct = \frac{u}{c}x$

## I.4.2 Relativität der Gleichzeitigkeit

Lichtlaufzeit und Ereignisse:
Das beobachtete Licht (z.B. von Galaxien) entspricht einem Blick in die Vergangenheit.
Was soll gleichzeitig bedeuten?

**Definition der GLeichzeitigkeit**

In einem IS sind die Ereignisse A und C gleichzeitig, wenn die von den beiden Ergebnissen ausgehenden Lichtpulse einen Beobachter B in der Mitte der beiden Punkte zur selben Zeit erreichen.

**Synchronisation von Uhren**

- man nehme zwei Uhren in einem IS, ruhend
- man sende zwei Photonen von der Mitte der Verbindungsstrecke aus

$\Rightarrow$ die beiden Photonen kommen gleichzeitig an den beiden Orten an

## I.4.3 Zeitdilatation

<u>Uhren</u> $\Rightarrow$ Lichtuhr
**Zeitdilatation: bewegte Uhren laufen langsamer**
<u>Grund:</u> Licht muss größere Wege zurücklegen.

im Eigensystem: $\Delta t' = 2\frac{L}{c}$
in „unserem“ System: $\Delta t = 2\frac{\overline{L}}{c}$

$$\overline{L}^2 = L^2 + \left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2$$

$$\Delta t^2 = \Delta t'^2 + \frac{u^2}{c^2}\Delta t^2$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\Delta t' = \gamma\Delta t' \qquad ; \Delta t \geq \Delta t'$$

**Betrachtung im Minkowski Diagramm**

Betrachtung mit Lorenz-Trafo

$$\begin{aligned} x_0' &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = ut \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}ut\right) = \gamma\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)t = \frac{1}{\gamma}t \end{aligned}$$

**Zeitdilatation**

$$t' = \frac{1}{\gamma} t$$

**Eigenzeit**
$\tau$: Tickdauer im Ruhesystem der Uhr *Beispiele:*

- Myonenzerfall - Lebensdauer $\tau = 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$
  Entstehung in Erdatmosphäre:
  gemessene Lebensdauer $\tau' = 30 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$

- Nebelkammer

**Zwillingsparadoxon** Lösung: Erdzwilling hat recht.
**Modernes Experiment**

### I.4.4 Längenkontraktion

Die Längenkontraktion besagt, dass bewegte Gegenstände in Bewegungsrichtung kürzer erscheinen.

$$l = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} l' = \frac{1}{\gamma} l'$$

**Längenkontraktion**

$$l' = \gamma l$$

Minkowski-Diagramm:

Benutze Lorenz-Invarianz
Lorenz-Trafo:
$t = 0$

$$\begin{aligned} \text{LT für Ort:} \quad x' &= \gamma(x \ - ut) = \gamma x \\ \Rightarrow l' = x_2' - x_1' &= \gamma(x_2 - x_1) = \gamma l \end{aligned}$$

**Ruder-Filme**
Lichtlaufzeit berücksichtigen

### I.4.5 Doppler Effekt

**Klassischer Doppler Effekt**

$$f_B = f_S \frac{c + v_B}{c - v_S}$$

- bewegter Empfänger: $v_S = 0 \Rightarrow f_B = \left(1 + \frac{u_B}{c}\right) \cdot f_S$

- bewegter Sender: $v_B = 0 \Rightarrow f_B = f_S \frac{1}{1 - \frac{v_S}{c}} \approx f_S \left(1 + \frac{v_S}{c} + \frac{v_S^2}{c^2} + \dots\right)$

#### Relativistischer Doppler Effekt

$$f_B = f_S \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\cos\alpha \frac{u}{c}}$$

- $\cos\alpha = \pm 1$: longitudinaler DE
- $\cos\alpha = 0$: transversaler DE

[Folie: Relativistischer DE] zum Beispiel: Michelson-Interferometer
Laufzeit des Lichtes muss bei Lorenz-kontraktion ein berechnet werden. In QM wird gezeigt das alles wärme Energie abstrahlt. Jetzt betrachten wir Farben.
[Folie: Video zu Bewegte Strahlung]

### I.4.6 Aberration des Lichts

[Folie: Folien zur Aberration des Lichts, Fernrohr]

## I.5 Relativistische Dynamik

Wir wollen jetzt die Newton Gleichungen Lorenz-invariant hinbekommen. Wobei wir das Fundamentale und die Erhaltungssätze nicht "kaputt" machen wollen.
Newton:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

Erhaltungssätze (Energie, Impuls, Drehimpuls)

Energieerhaltung: Homogenität der Zeit
Impulserhaltung: Homogenität des Raums

$\Rightarrow E$ und $p$ Erhaltung auch in SRT

### I.5.1 Impulserhaltung und relativistischer Impuls

#### Gedankenexperiment

Vorher: $\bullet\bullet$

Nacher: $\overset{v_1}{\longleftarrow}\underset{A}{\bullet} \quad \bullet\overset{v_2}{\longrightarrow}$

Im Laborsystem gilt $\boldsymbol{p}_{\text{vorher}} = \boldsymbol{p}_{\text{nacher}}$:

$$\Rightarrow 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_0(v - v) = 0$$

Im Ruhesystem von Körper $A$ gilt dann:

$$u = -v_1 \quad , \quad v_1' = 0 \quad \Rightarrow \quad (m_1 + m_2)v_1 = m_2 v_2'$$

Klassisch gilt somit:

$$m_1 = m_2 = m_0 \qquad v_2' = v_2 + v = 2v \quad \checkmark$$

In der **SRT** gelten aber folgende Additionstheoreme für Geschwindigkeiten:

$$v_2' = \frac{v_2 - u}{1 - v_2\frac{u}{c^2}} = \frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$$

Dies liefert jedoch einen Widerspruch mit unserem zuvorigen Ergebnis.

$$\Rightarrow v_2' < 2v \quad \lightning \text{ Impulsbilanz nicht erfüllt}$$

**Relativistischer Impuls**

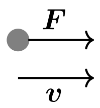
$$\boldsymbol{p} = m(v) \cdot \boldsymbol{v} = \boxed{\gamma(v) m_0 \boldsymbol{v}}$$

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$\boldsymbol{\omega}$ ist die Geschwindigkeit der Systeme zueinander.
$\boldsymbol{v}$ Die Geschwindigkeit des Körpers.

### I.5.2 Energieerhaltung und relativistische Energie

**Gedankenexperiment:**




Beschleunigung eines Körpers in einem konstanten Kraftfeld.
$\Rightarrow$ Körper gewinnt kinetische Energie.

$$E_{\text{kin}} = \int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$$

$$\begin{aligned} dE_{\text{kin}} &= F ds \overset{?}{=} \frac{dp}{dt} ds \\ &= m_0 d(\gamma v) \cdot v = m_0 v (v d\gamma + \gamma dv) \end{aligned}$$

Trick: $1 = \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$
$\Rightarrow 0 = c\gamma d\gamma \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \gamma^2 \left(-\frac{2v}{c^2} dv\right)$
$\Rightarrow c^2 d\gamma = v^2 d\gamma + \gamma v dv$
$\Rightarrow dE_{\text{kin}} = m_0 c^2 d\gamma$

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= m_0 c^2 \left[\gamma(v) - \gamma(0)\right] \\ &= \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 \end{aligned}$$

Einstein: $\quad E = \gamma m_0 c^2 \mathrel{\widehat{=}}$ „Gesamtenergie“

$$\boxed{E = E_{\text{kin}} + m_0 c^2}$$

### I.5.3 Relativistische Energie-Impuls-Beziehung und Viererimpuls

Dispersionsrelation: $E(\boldsymbol{p})$
Klassisch: $E(\boldsymbol{p}) = \frac{p^2}{2m}$
SRT: $E = \gamma m_0 c^2$
$\Rightarrow E^2 = \gamma^2 (m_0 c^2)^2$ mit $\gamma^2 = 1 + \gamma^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2$
$\Rightarrow m_0 c^2 \gamma^2 = m_0^2 c^2 + \gamma^2 m_0^2 v^2 = m_0^2 c^2 + \boldsymbol{p}^2$

$$\boxed{\Rightarrow E^2 = (m_0 c^2)^2 + c^2 \boldsymbol{p}^2}$$

$$\boxed{E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + c^2 \boldsymbol{p}^2}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \boldsymbol{p}^2 = (m_0 c)^2$$

**Viererimpuls**

$$\hat{\boldsymbol{p}} = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \boldsymbol{p}^2 \qquad \text{ist Lorenz-invariant !}$$

$\Rightarrow$ Die Ruhemasse $m_0$ ist Lorenz-invariant.

**Was ist Masse?**

Masse charakterisiert die Energie-Impuls-Beziehung relativistischer Teilchen $\widehat{=}$ masseloser Teilchen $\widehat{=}$ $v = c \Leftrightarrow m_0 = 0$.

$$\Rightarrow E(\boldsymbol{p}) = c|\boldsymbol{p}|$$

Massebehaftete Teilchen, $m_0 > 0$ , $v < c$

$$E(\boldsymbol{p}) = \sqrt{(m_0c^2)^2 + c^2\boldsymbol{p}^2} \xrightarrow{v \to 0} \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_0}$$

### I.5.4 Kraft und Energie-Impuls Erhaltung

klassisch gilt:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

und Impulserhaltung:

$$\boldsymbol{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{p} = \text{const.} \quad , \quad E = \text{const.}$$

In der SRT gilt:

$$\hat{\boldsymbol{F}} = \gamma(m_0 c\frac{d\gamma}{dt}, F_x, F_y, F_z)$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{F}} = \frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{p}}}$$

$$d\tau = \frac{1}{\gamma}dt$$

<u>Relativistische Energie-Impuls Erhaltung</u>

$$\hat{\boldsymbol{F}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\hat{\boldsymbol{p}} = \text{const.}}$$

- Zeitanteil $\widehat{=}$ Energieerhaltung: $E_{\text{ges}} = E(\boldsymbol{p}) + E_{\text{pot}} \cdots = \text{const.}$
- Raumanteil $\widehat{=}$ Impulserhaltung: $\boldsymbol{p}_{\text{nacher}} = \boldsymbol{p}_{\text{vorher}}$

### I.5.5 Anwendungsbeispiele

**Äquivalenz von Masse und Energie**

$m_0c^2$ ist eine Energie, also muss sie, rein physikalisch gesehen, frei umwandelbar sein.

Bindungsenergie: ein mehr Teilchensystem hat mehr Energie als die einzelnen Teilchen, diese zusätzliche Energie ist die Bindungsenergie und sie äußert sich als Massenänderung.

$$E = m_0c^2$$

$$1kg \,\widehat{=}\, mc^2 = 10^{17}\,\text{J}$$

Weltenergieverbrauch ca.: $4 \cdot 10^{20}\,\text{J} \,\widehat{=}\, 4\,\text{T}/\,\text{Jahr}$

**Bindungsenergie $\widehat{=}$ Massenänderung**

[Folie: Fusion/Kernspaltung]

$$
\begin{aligned}
p: \qquad & m_p = 938{,}27\,\frac{\text{MeV}}{c^2} \\
n: \qquad & m_n = 939{,}54\,\frac{\text{MeV}}{c^2} \\
{}^4He: \qquad & m_{He} = 3727\,\frac{\text{MeV}}{c^2} \\
& 2n + 2p = 3754\,\frac{\text{MeV}}{c^2} \\
\Rightarrow \text{ Bindungsenergie} \quad & 24\,\frac{\text{MeV}}{c^2}
\end{aligned}
$$

[Folie: Bindungsenergie von Atomen]Kernspaltung/Kernfusion

*Beispiel:* Compton Effekt
Streuung eines Photons an einem (quasi-) freien, ruhenden Elektron

$$\Delta R = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

$$\lambda_c = \frac{k}{mc} = 2{,}13 \cdot 10^{-24}\,\text{m}$$

Allgemeine Relativitäts Theorie: die Grundlage ist Masse in Gravitation.

## I.6 Von der SRT zur ART

ART $\widehat{=}$ allgemeine Relativitätstheorie

### I.6.1 Äquivalenzprinzip (*die heilige Kuh der Physik*)

Träge und schwere Masse sind zwei unterschiedliche Grössen aus den zwei Formeln. Fahrstuhl hat mein kein Bezug auf die Umwelt, man spürt nur eine Kraft.

Beobachtung: Träge Masse $\widehat{=}$ schwere Masse $\quad m_t = m_s$

$$\boldsymbol{F} = m_t\boldsymbol{a} \qquad \text{träge Masse}$$

$$\boldsymbol{F}_{12} = G\frac{m_{1S}m_{2S}}{r_{12}^2}\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{|\boldsymbol{r}_{12}|} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{F} = m_s\boldsymbol{g} \qquad \text{schwere Masse}$$

[Folie: Fahrstuhl-Äquivalenzprinzip]
⇒ In einem geschlossenen Raum gilt: Die Beschleunigung aufgrund einer Kraft ist nicht von der Gravitation zu unterscheiden ⚲
**Experimente:**

- Pendel
- Satellite: lokales Inertialsystem das Kräftefrei ist
- Freie-Fall-Experimente (Parabelflug bei Flugzeugen oder Freifall Experiment Turm)
  [Folie: Freifall Experiment Turm in Bremen]

Äquivalenzprinzip war anfangs auf 1 g bestätigt aber mittlerweile sehr genau, also wollen wir es aufrecht erhalten.

[Folie: Wie genau ist das Äquivalenzprinzip bestätigt]
[Folie: Verletzungen des Äquivalenzprinzips]

### Äquivalenz Prinzip, drei Formulierungen

Inertialsysteme gelten nur in kleinen Raumbereichen da die Gravitationskraft abhängig von $r^2$ ist.

[Folie: Verletzung des Äquivalenzprinzips]

Die gravitation ist bis heute noch ein ungelöstes problem. Ähnlich wie Newton und Maxwell, an irgend einer stelle müssen wir was korrigieren da die Theorien der Wechselwirkungen nicht vereinbar sind. Vielleicht existiert eine fünfte fundamentale Kraft.

1) Ein kleines Labor, welches in einem Schwerefeld frei fällt ist äquivalent zu einem lokalen Inertialsystem, in welchem die Gesetze der SRT gelten.

2) Beobachte im Fahrstuhl, Raumschiff (ohne Antrieb):
   $\Rightarrow$ Es ist nicht entscheidbar ob man sich gradlinig im freien Raum oder beschleunigt im Gravitationsfeld bewegt.

3) Der freie Fall ist Äquivalent zur Schwerelosigkeit

## I.6.2 Gravitation und Raumkrümmung

Die Abweichung von einer geraden Bahn kann man auf zwei Arten definieren oder festlegen:

(i) Kraft oder

(ii) Krümmung des Raums

[Folie: zur Raumkrümmung]
**Idee:** Gravitation nicht mehr als Kraft, sondern als Krümmung des Raums betrachten.
Gilt nur für die Gravitationskraft!
**Mathematisch:** Gravitation beeinflusst die Metrik des Raums

Ein weg ist $ict^2$ zu verwenden damit ein minus bei dem Skalarprodukt auftaucht, eine andere option ist das Skalarprodukt anders zu definieren zum Beispiel mit einem Vektor $(1, 1, 1, -1)$. Die Feldgleichungen der ART sind tatsächlich sehr kompliziert und werden meistens nicht behandelt.
**Konsequenzen:**

- Raum und Zeit sind nicht statisch, sondern dynamisch
- Inertialsystem nur noch lokal, im homogenen Schwerefeld

## I.6.3 Periheldrehung des Merkurs

Kepler'sche Bahngesetze [Folie: zur Periheldrehung des Merkur]
$\Rightarrow$ geschlossene Ellipsen mit der Sonne im Brennpunkt

Beobachtung beim Merkur:
Periheldrehung 5,74" pro Jahr

[Folie: Merkur Umlaufbahn]Merkur ist nah an der Sonne da treten diese Periheldrehungen deutlicher auf. Was kann diese Bewegung laut Newton beeinflussen? Andere Planeten.
Rechnungen nach Newton mit Einbeziehung der Potentiale der anderen Planeten: 0,4311" pro Jahr mehr als die gemessene

ART: Überschuss von 0,4303" pro Jahr

### I.6.4 Ablenkung von Licht durch Gravitation

[Folie: zur gravitativen Ablenkung von Licht][Folie: Bilder zur Ablenkung von Licht um die Sonne bei einer Sonnenfinsternis]
Durch die Sonnenfinsternis konnte ein Stern beobachtet werden dessen Position am Himmel sich durch der Lichtbeugung verändert wärend die Sonne sich in der nähe bewegt. Dies hat dieses Phänomen bestätigt.
$\Rightarrow$ Sonnenfinsternis 1919
[Folie: Mehr Bilder zu Gravitationslinsen][Folie: Video: zu Gravitationslinsen]

### I.6.5 Gravitationswellen

Indirekte Beobachtung umkreisender Neutronensterne PSR1913+16
Abstrahlung von Gravitationswellen $\Rightarrow$ Energieverlust $\rightarrow$ Sterne kommen sich immer näher. Nobel Preis 1993

Direkte Beobachtung: Detektoren durch Relativbewegung von Massen

(i) Resonanzdetektor

(ii) interferrometrische Detektoren (Micheson-Morley)
[Folie: zu Michelson Interferrometern]
11. Februar 2016: LIGO
Nobel Preis 2017

### I.6.6 Global Positioning System (GPS)

gegeben: Satelliten, Atomuhren, $3{,}87\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ in Höhe von ca. $20000\,\mathrm{km}$

SRT: $\Rightarrow$ Zeitdilatation um $\approx 7\,\mu\mathrm{s}/\mathrm{Tag}$
ART: $\Rightarrow$ Zeitdilatation um $\approx 45\,\mu\mathrm{s}/\mathrm{Tag}$

$\Rightarrow$ Ortsmessung um ca $11{,}4\,\mathrm{km}/\mathrm{Tag}$ verschoben falsch

# Kapitel II

# Geometrische Optik

## II.1 Lichtstrahlen

Licht hat eine **Ausbreitungsgeschwindigkeit** $s = ct$. Diese Geschwindigkeit ist nur im Vakuum konstant und hängt von der Materie die der Lichtstrahl durchläuft ab. Diese Geschwindigkeit im Medium ist gegeben durch den **Brechungsindex**.

$$\boxed{n = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{c_{\text{Medium}}}}$$

| | |
|---|---|
| Luft: | $n = 1{,}00027$ |
| Wasser: | $n = 1{,}333$ |
| Diamant: | $n = 2{,}417$ |

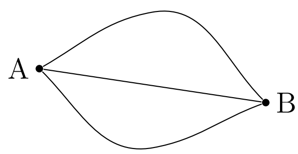
Warum ist das denn so? Wie interagieren die elektromagnetischen Felder des Lichstrahls also mit der Materie?
Antwort:
Die Ladungsträger in der Materie erfahren aufgrund der elektrischen Felder eine Kraft. Die Ströme der bewegten Ladungen Wechselwirkungen mit den Magnetischen Feldern, jedoch ist dieser Effekt viel kleiner als der der $\boldsymbol{E}$-Felder.
Die Elektronen kann man sich mit einer Feder an der Atomkern gebunden Vorstellen. Mit dem $\boldsymbol{E}$-Feld des Lichtstrahls haben wir das Modell eines getriebenen gedämpften harmonischen Oszillators: Das Lorenz-Lorenz-Oszillator Modell
Genaugenommen kann man sich das auch so Vorstellen, dass die Photonen immer wieder absorbiert und nach einer Zeitverzögerung abgestrahlt werden, jedoch ist dies schwer zu berechnen.

*Bemerkung:*
zwei Medien $n_1 > n_2$
$n_1$: optisch dichter
$n_2$: optisch dünner

## II.2 Das Fermat'sche Prinzip

### II.2.1 Fermat'sches Prinzip

Die Ausbreitung des Lichts zwischen zwei Punkten erfolgt auf dem Weg, für den die benötigte Zeit extremal ist.




$\Rightarrow$ Konsequenz $\boxed{\text{Der Stahlengang ist umkehrbar ?}}$

**Mathematische Handwerkzeuge**

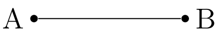
$$t = \frac{1}{c_{\text{Vakuum}}} \int_{P_1}^{P_2} n(s) ds$$

Parametrisierung des Wegs $\tau$

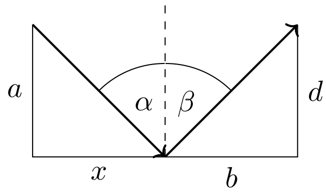
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\tau)$$

$$t(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c_{\text{Vakuum}}} \int_{P_1}^{P_2} n(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\tau}))\sqrt{\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}\right)^2} d\tau$$

## II.2.2 Weg zwischen zwei Punkten A und B




## II.2.3 Reflexionsgesetz




[Folie: zu Reflexion an Oberflächen]
Berechnung der Wegstrecke

$$s(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{d^2 + (b-x)^2}$$

Extremum:
Da wir und in einem homogenen Medium befinden und die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, ist die Strecke $s$ proportional zur Zeit $t$ und wir können das Extremum der Strecke berechnen.

$$\frac{ds}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}}_{\sin\alpha} = \underbrace{\frac{b-x}{\sqrt{d^2 + (b-x)^2}}}_{\sin\beta}$$

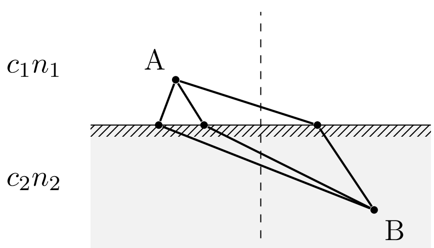
**Reflexionsgesetz**

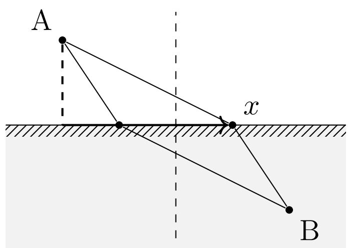
$$\sin\alpha = \sin\beta$$

Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel.

## II.2.4 Brechungsgesetz von Snellius

$$n_1 \neq n_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad n(s) \neq \text{const.}$$



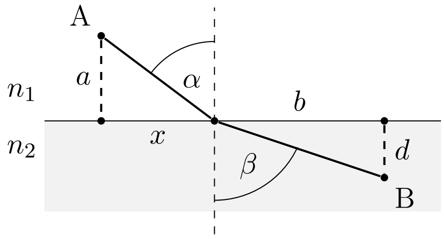

Berechnung des Laufzeit des Lichts

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(b-x)^2 + d^2}}{c_2} = \frac{1}{c}\left(n_1\sqrt{x^2 + a^2} + n_2\sqrt{(b-x)^2 + d^2}\right)$$

[Folie: zu Brechung] $\frac{dt}{dx} = 0$

**Brechungsgesetz**

$$\Rightarrow n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$$




# II.3 Einfache Anwendungen

## II.3.1 Totalreflexion

$\rightarrow$ siehe Experimentalphysik II
[Folie: zur Totalreflexion z.B. unter Wasser]

$$\sin\alpha_{\mathrm{TV}} = \frac{n_2}{n_1}$$

## II.3.2 Optisches Prisma

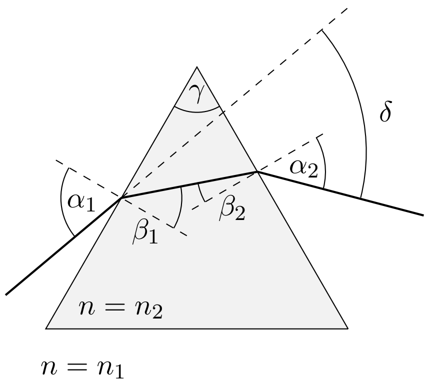
Bei Drehung des Prismas kann der Winkel $\delta$ verändert werden. Hier gibt es es ein Minimum, jedoch kann er nie null werden, da das Licht nie gerade durch das Prisma hindurch kommen kann.

### Beobachtung I

Die Ablenkung ist minimal für den symmetrischen Strahlengang

$$\sin\frac{\delta_{\min}+\gamma}{2} = n\sin\frac{\gamma}{2}$$

[Folie: Demtröder: Prisma]




**Berechnung:**

(i) $\gamma = \beta_1 + \beta_2$

(ii) $\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2$

(iii) $\sin\alpha_1 = n\sin\beta_1 \quad , \quad \sin\alpha_2 = n\sin\beta_2$

gesucht ist $\frac{d\delta}{d\alpha_1} = 0$
$\Rightarrow$

(i) $\mathrm{d}\gamma = \mathrm{d}\beta_1 + \mathrm{d}\beta_2 = 0$

(ii) $\mathrm{d}\alpha_1 = \mathrm{d}\alpha_2 \qquad (\delta = \alpha + \alpha - \gamma) \qquad (\mathrm{d}\delta = 0)$

(iii) $\cos\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_1 = n\cos\beta_1 \mathrm{d}\beta_1$
$\cos\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_2 = n\cos\beta_2 \mathrm{d}\beta_2$

$$\Rightarrow \frac{\cos\alpha_1 \cancel{d\alpha_1}}{\cos\alpha_2 \cancel{d\alpha_2}} = \frac{\cos\beta_1 \cancel{d\beta_1}}{\cos\beta_1 \cancel{d\beta_2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1-\sin^2\alpha_1}{1-\sin^2\alpha_2} = \frac{1-\sin^2\beta a_1}{1-\sin^2\beta_2} = \frac{n^2-\sin^2\alpha_1}{n^2-\sin^2\alpha_2}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha_2\\ \beta_1 &= \beta_2\end{aligned}\right\} \text{symmetrischer Strahlengang}$$

$$\Rightarrow \quad \delta_{\text{min}} = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma = 2\alpha - \gamma \qquad \gamma = 2\beta$$

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha = n\sin\beta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin\frac{\delta_{\text{min}}+\gamma}{2} = n\sin\frac{\gamma}{2}}$$

□

*Bemerkung:*
Dieser Zusammenhang wurde früher zur Bestimmung von $n$ genutzt ♀
*Professor redet darüber, dass wir immer kompliziertere Experimente verstehen können, und diese aufgrund des Aufwands bei der Ausführung nicht mehr immer in der Vorlesung gezeigt werden können. Wir sollen lernen uns Experimente vorzustellen ohne sie direkt zu sehen und die Formeln als Handlungsanweisungen zu sehen die wir nutzen können. Abgesehen davon sollen wir uns auch im klaren darüber sein wie genau verschiedene Messmethoden sind.*

**Beobachtung II**

optische Dispersion:

$$\frac{dn(\lambda)}{d\lambda} < 0 \qquad \text{(normale Dispersion)}$$

(Bei der anormalen Dispersion ist $\frac{dn(\lambda)}{d\lambda} > 0$)
[Folie: zur Dispersion: Beispiel Regenbogen]

Wieso gibt es Dispersion? Vorstellung: Die Atome mit ihren Elektronen haben Resonanzfrequenzen. Somit ist die erzwungene Schwingung die die Licht-Welle in der Materie anregt, von der Frequenz des Lichts abhängig.
Die meisten Resonanzfrequenzen liegen im Ultravioletten-Bereich. Deshalb sehen wir meist normale Dispersion. Im Bereich über Ultraviolettem Licht ist auch anormale Dispersion Beobachtbar.

⇒ Experimentalphysik II

## II.4 Sphärische, dünne Linse

Zunächst einmal betrachten wir sphärische Linsen speziell dünne Linsen: Wir betrachten die dünne Linse als eine unendlich-dünne Linse, da wir hierbei einige vereinfachungen machen können (Taylor-entwicklungs-Terme fallen weg).

### II.4.1 Brennpunkt und Brennebene

[Folie: zur Sammel- und Streulinsen]
Wir betrachten zunächst den Strahlengang einer Linse:

Lieblingsprüfungsfrage: Parallel einfallendes Licht, das nicht parallel zur optischen Achse verläuft, in eine Sammellinse. Strahlen werden immer noch fokussiert aber Brennpunkt verschoben. Konstruktion mit Zentralstrahlengang

[Folie: zur der Lieblingsfrage]

**3 Regeln zur Konstruktion von Strahlengängen**

Nur für dünne Linsen:

1) Parallel einfallende Strahlen fallen durch den Brennpunkt aus

2) Durch Brennpunkt einfallender Strahlen fallen parallel aus

3) Der Zentralstrahl wird nicht abgelenkt

### II.4.2 Berechnung des Brennpunktes bzw. der Brennweite

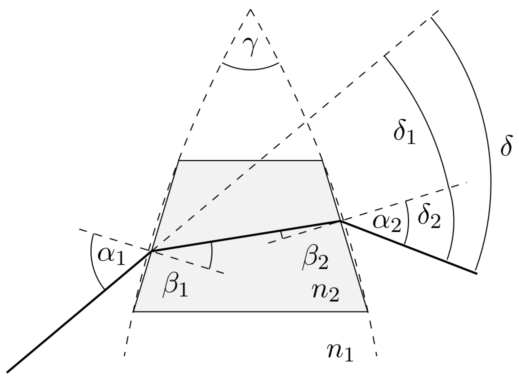
Bei der Streulinse genau dasselbe nur ein negatives Vorzeichen an der Brennweite.
[Folie: zu Strahlengängen durch Sammellinsen]

Ein Linsenstück im Abstand $h$ von der optischen Achse betrachten wir als Prisma.

Näherungen der „dünnen“ Linse

alle Winkel sind klein → trigonometrische Näherungen
$\sin(x) \approx x \qquad \cos(x) \approx 1 \qquad \tan(x) \approx x$

**Berechnung:**
Ablenkung des Strahls



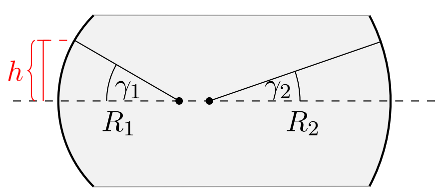

(i) $\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2$

(ii) $\beta_1 + \beta_2 = \gamma$

(iii) $n_1\alpha_1 \approx n_2\beta_1 \qquad n_2\beta_2 \approx n_1\alpha_2$

$$\Rightarrow \quad \delta = \gamma\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)$$

Winkel $\gamma$:



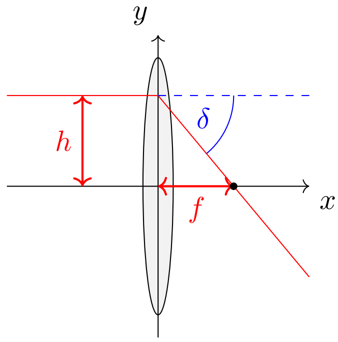

(iv) $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

(v) $\gamma_1 \approx \frac{h}{R_1} \quad ; \quad \gamma_2 \approx \frac{h}{R_2}$

$$\Rightarrow \qquad \gamma = h\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Winkel $\delta$:

(vi) $\delta \approx \frac{h}{f}$




**Linsenschleiferformel**

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$\Rightarrow$ Die Brennweite $f$ ist unabhängig von $h$. Hätte wir oben keine Näherungen für die Winkelfunktionen benutzt (bei allen Rundungssymbolen), dann wäre die Brennweite abhängig von der Höhe $h$. Hier sehen wir, dass die Gleichung für eine dünne Linse nur eine annäherung an echte Linsen ist.

**Def: Brechkraft**

$$D = \frac{n}{f}$$

*Bemerkung:*
$D = D_{\text{Vorne}} + D_{\text{Hinten}}$

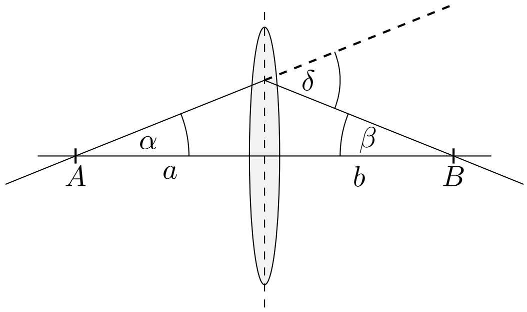
### II.4.3 Abbildung (am Beispiel einer Sammellinse)

Berechnung:

i) $\delta = \alpha + \beta$

ii) $\alpha \approx \frac{h}{a} \quad \beta \approx \frac{h}{b}$

iii) $\delta \approx \frac{h}{f}$




**Abbildungsgesetz**

$$\Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

**Abbildung eines Gegenstands $G$:**
Graphisch:

(1) parallel ein $\rightarrow$ durch Brennpunkt aus

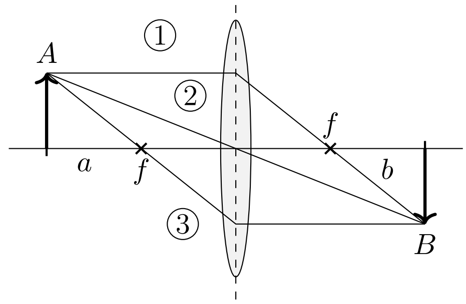
(2) durch Brennpunkt ein $\rightarrow$ parallel aus

(3) Zentralstrahl läuft gerade

**Rechnerisch**

(i) $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

(ii) $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$




## II.5 Abbildungsfehler

⇒ Beschränkung durch Beschreibung mit geometrischer Optik
⇒ Näherungen (dünne Linse)

### II.5.1 Dicke Linsen

[Folie: Dicke Linsen]
Brechung der Lichtstrahlen an zwei Hauptebenen

### II.5.2 Sphärische Abberation

[Folie: Sphärische Abberation]

### II.5.3 Chromatische Abbreration

[Folie: Chromatische Abberation]
optische Dispersion

### II.5.4 Astigmatismus

[Folie: Astigmatismus]

### II.5.5 Absorption

Bei verunreinigten Stoffen wird Licht absorbiert.

### II.5.6 Beugung

Werden wir später behandeln.

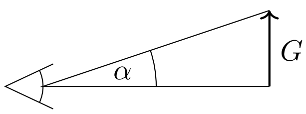
### II.5.7 Optisches Auflösungsvermögen

Mit freilaufenden Wellen lassen sich keine Strukturen auflösen, die deutlich kleiner sind als die Wellenlänge $\lambda$ sind.

## II.6 Optische Instrumente

### II.6.1 Vergrößerung

**Sehwinkel:**



$$\tan\alpha = \frac{\text{Größe des Objekts}}{\text{Entfernung des Objekts}}$$

**Winkelvergrößerung**

$$V = \frac{\text{Sehwiinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel ohne Instrument}}$$

**Lateralvergrößerung oder Abbildungsmaßstab**

$$L = \frac{\text{Bildgröße}}{\text{Gegenstandsgröße}}$$

### II.6.2 Das menschliche Auge

[Folie: menschliches Auge]
Hornhaut & Linse. Die Hornhaut hat den größten Beitrag zur Brechung

**Definition: Brennweite der deutlichen Sehweite**

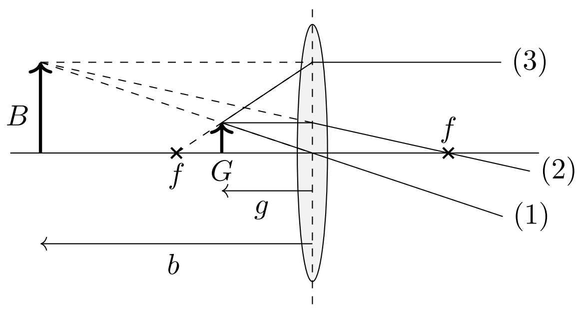
$$25\,\text{cm}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\alpha_{\text{Auge}} = \frac{G}{25\,\text{cm}}$$

Vergrößerung

$$V = \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\alpha_{\text{Auge}}} = (\text{Sehwinkel mit Instrument})\frac{25\,\text{cm}}{G}$$

### II.6.3 Optisches Instrument mit einer Linse: Lupe




Gegenstand nahezu in Brennebenen, $g < f$
Graphisch: siehe oben
Rechnerisch: Abbildungsgesetz der Lupe $\frac{1}{g} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$
Abbildungsmaßstab

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} = \frac{f}{f-g} = \frac{f+b}{f}$$

Vergrößerung:
Sehwinkel des Instruments

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{G}{f} \qquad (g \approx f)$$

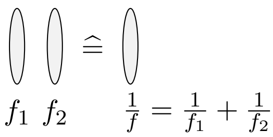
$$\Rightarrow V = \frac{\alpha}{\alpha_{\text{Auge}}} = \frac{G}{f}\frac{25\,\text{cm}}{g} = \frac{25\,\text{cm}}{f}$$

### II.6.4 Optische Instrumente mit zwei Linsen

zwei Linsen = drei Fälle:

Doppellinse, Fernrohr, Mikroskop

1) **Doppellinse: Abstand der Linse $\ll$ Brennweiten $f_1, f_2$**
[Folie: zu Doppellinsen]




$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

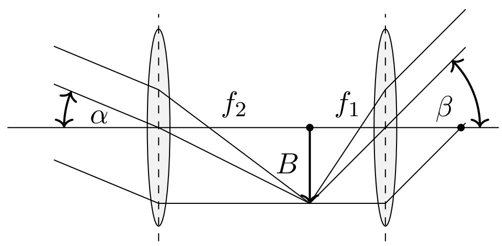
Berechnung:

$b_1$ der 1ten Linsen = virtuelle Gegenstandsweite $a_2 = b_1 - D$ der zweiten Linse

1. Linse $\frac{1}{a} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}$
2. Linse $-\frac{1}{b_1 - D} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_2}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}} \qquad \boxed{D_{\text{ges}} = D_1 + D_2}$$

2) **Fernrohr (Kepler): Abstand der Linsen = Summe der Brennweiten $f_1 + f_2$**
$\Rightarrow$ Zwischenbild in der Brennebene




Sehwinkel vor Objektiv:

$$\alpha \approx \frac{B}{f_1}$$

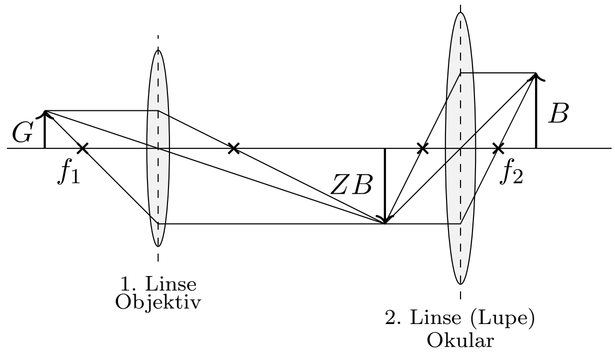
Sehwinkel nach Okular:

$$\beta \approx \frac{B}{f_2}$$

$\Rightarrow$ Vergrößerung $V = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{B}{f_2}\frac{f_1}{B} = \frac{f_1}{f_2}$ *Bemerkung:*

- Kepler Fernrohr: Bild wird invertiert
- Galilei Fernrohr: Sammellinse und Zerstreuungslinse
  keine Invertierung und kürzere Bauweise
- Fernglas:
  [Folie: Galilei Fernrohr und Fernrohr mit drei Linsen]

3) **Mikroskop: Abstand der Linsen $\gg$ Summe der Brennweiten $f_2 + f_1$**
Gegenstand nah am Objektiv



[Folie: anderes Bildschema Mikroskop]Veränderung durch Änderung der Tubuslänge
Verstärkung durch Objektiv $V_1 = \frac{B}{G} = \frac{b}{f_1}$
Verstärkung durch Okular $V_2 = \frac{25\,\mathrm{cm}}{f_2}$
$\Rightarrow$ Vergrößerung:

$$V = V_1 V_2 = \frac{t \cdot 25\,\mathrm{cm}}{f_1 f_2}$$

$t \approx 28\,\mathrm{cm}$ wurde so definiert um den Vergleich von Geräten zu vereinfachen.

## II.7 Elektronenoptik

[Folie: Elektronen Strahl]
Die Idee hier ist das man einen Elektronen der von einem $E$-Feld abgelenkt wird als wie eine optische Beugung betrachten...
Elektronenstrahl Ablenkung durch elektrische und magnetische Felder

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

### II.7.1 Beispiel: Brechungsgesetz für Elektronen

$$\sin\alpha = \frac{v_{1,x}}{v_1} \qquad \sin\beta = \frac{v_{2,x}}{v_2}$$

el. Feld entlang $x$

$$v_{1,x} = v_{2,x}$$
$$\Rightarrow v_1 \sin\alpha = v_2 \sin\beta$$

**Definition**

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_2}{v_1}$$

Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + eU$$
$$v_1 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2e(U+U_0)}{m}}$$

**$\Rightarrow$ Brechindex**

$$\frac{n_2}{n_1} = \sqrt{1 + \frac{U}{U_0}}$$

### II.7.2 Elektrische Rohrlinse

### II.7.3 Magnetische Linsen

Lange Spule = homogenes Magnetfeld
Lorentz Kraft $\Rightarrow$ Spiralbahnen der Elektronen $\Rightarrow$ Bild wird gedreht
$\Rightarrow$ kleine Spule = inhomogene Magnetfelder $\Rightarrow$ Brechkraft
[Folie: Elektronen in Magnetfeldern]

### II.7.4 Elektronenmikroskope

[Folie: Elektronmikroskop]Man kann ein Material untersuchen in dem man die Streuelektronen analysiert die bei dem Elektronenmikroskop entstehen.Bei der SRT muss man nach Gedankenfehler suchen, bei Optik müssen die Näherungen anschauen als Fehlerquelle, Zahnmedizinerinnen würden alle Fehlerpunkte auswendig gelernt haben, während ein Physiker überlegen "ok, wir haben die geometrische Optik angewandt also alles was da schief gehen kann und so weiter."

# Kapitel III

# Wellenoptik

## III.1 Wiederholung (Schwingungen und Wellen)

### III.1.1 Schwingungen

[Folie: Harmonische Schwingungen]Zwei grössen: Amplitude und Phase, und zwei komponenten: inphase, und out of phase

### III.1.2 Wellen

[Folie: Harmonische ebene Welle, Polarisation, Kugelwellen]
Harmonische Ebene Welle in 1D

$$A(x,t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) = \Re\left[\hat{A}e^{-i(\omega t - kx)}\right]$$

Das Minus in der Komplexen Schreibweise Stammt aus der Wellengleichung. Es kommt auch aus der Lorenzinvarianten.
Da EM-Wellen Transversalwellen sind und Ladungserhaltung/Eichinvarianz gilt, kann es nur zwei Polarisationsrichtungen geben.
[Folie: Wellengleichung]

### III.1.3 Fourier-Transformation

Ein Thema das nie richtig behandelt wird, aber wichtig ist, vielleicht leiste ich heute ein Beitrag dazu.
Harmonische Schwingungen:

$$A(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi) = \Re[\hat{A}_0 e^{-i\omega t}]$$

Periodische Schwingungen: Fourier-Reihe

$$A(t) = A(t+T) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(m\omega_0 t + \varphi_n) = \Re\left[\sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n e^{-in\omega_0 t}\right]$$

$$\omega_m \leq n\omega_0$$

Beliebige Zeitabhängigkeit: Fourier Transformation

$$A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))d\omega = \Re[\int \hat{A}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega]$$

Bemerkung: Wir können zwei Fourier Transformationen machen, nach Ort und nach Zeit.

- Umkehr Transformation: Faktor $2\pi$ taucht auf
- Analog für $e^{i\boldsymbol{kx}}$
- Die Fourier Transformation impliziert eine "Unschärfe Relation" Eine Eigenschaft der FT

$$\Delta\omega t \approx \mathcal{O}(2\pi) \qquad \Delta\boldsymbol{k}\Delta\boldsymbol{x} \approx \mathcal{O}(2\pi)$$

Beispiel: Gedämpfte Schwingung, Zerfall, Relaxation
Exponentielles Abklingverhalten

$$A(t) \propto e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \Leftrightarrow \quad = \text{Lorentz-Funktion}$$

$\tau$: Zeitkonstante [Folie: Zeitraum/Frequenzraum]
Ein exponentieller Zerfall ist immer mit der Lorentz-Funktion verbunden. Eine ungedämpfte harmonische Schwingung: $\tau = \infty$.
Eine unendlich langer, unendlich langsamer Schwingung ist im Frequenzraum unendlich scharf. Eine ungedämpfte harmonische Schwingung ist also im Frequenzraum unendlich scharf und wird damit zu einer Dirac-Delta-Funktion mit dem Peak bei der Frequenz der Schwingung. Eine solche Welle ist im Ortsraum überall verteilt.
Beispiel: Wellenpaket ebene Welle: $E(\boldsymbol{x}, t) = E_0 e^{-i(\omega t - \boldsymbol{kx})}$

$$\Rightarrow |E|^2 = E_0^2 = \text{const.}$$

[Folie: Wellenpakete]

Im Wellenvektorraum ist sie jedoch wieder mit einer Delta-Funktion beschrieben. Ein Wellenpaket ist im Ortsraum lokalisiert aber im Wellenvektorraum sehr unscharf verteilt.
Die Fouriertransformation einer Gauß-Verteilung (wird oft für Wellenpakete verwendet) ist wieder eine Gauß-Verteilung. Die Fouriertransformation einer Exponentiell Abfallenden Welle ist eine Lorenz-Funktion.

### III.1.4 Kohärenz

**Definition** Zwei oder mehr Wellen sind Kohärent, wenn die Zeitabhängigkeit der Auslenkungen bis auf eine Phasendifferenz der gleiche ist?

Viele gründe warum Wellen nicht kohärent sind:

- spontan emittiertes Licht vieler unabhängiger Lichtemmiter (heiße Atome)
- zwei Lichtquellen schwanken leicht in Frequenz Amplitude, Phase (nicht stabil)
- zu ausgedehnte Lichtquelle

Gegenbeispiele:

- stimulierte Emission: einfallendes Licht zwingt angeregte Atome synchron mit dem Lichtfeld zu Schwingen und abzustrahlen.

Kohärenzlänge:
Kohärenzlänge: Keine Lichtquelle kann unendlich kohärentes Licht erstellen. Die minimal unterschiedlichen Frequenzen sorgen dafür, dass das Licht nach einer Weile nicht mehr kohärent ist. Die Flugweite der Lichtstrahlen bis die Kohärenz nicht mehr gegeben ist, nennt man Kohärenzlänge.
Kohärenzzeit:
Die dauer in der Kohärentes Licht nicht nicht mehr kohärent wird nennt man Kohärenszzeit.
Kohärenzzeit = Kohärenzlänge/$c$
Experimente:

(i) Licht mit genügend großer Kohärenzlänge

(ii) Licht aus **einer** Quelle aufteilen, wenn mehrere Kohärente Strahlen benötigt werden.

## III.2 Inteferenz und Beugung I

### III.2.1 Inteferenz am Doppelspalt

Berechnung der Maxima und Minima

**Gangunterschied** $x = d \sin \alpha$

Maxima wenn $x$ ein Vielfaches von $\lambda$ ist (konstruktive inteferenz)

$\rightarrow$ $x = n\lambda$

$\Rightarrow$ Maxima: $\sin \alpha = n\frac{\lambda}{d}$

$\Rightarrow$ Minima: $\sin \alpha = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d}$

Triviale aber Wichtige Feststellung: nicht nur $d$, nicht nur $\lambda$, sondern $\frac{\lambda}{d}$
*Bemerkung:*

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$
$$\Rightarrow \quad kx = 2\pi n$$
$$\Delta f = 2\pi n = kx = \frac{2\pi}{\lambda} x$$

Feststellung: Ortsraum $k$-Raum reziprok

### III.2.2 Beugung am Einzelspalt

Brechung der Intensitätsverteilungen $I(\alpha)$, in 6 Schritten

(1) Strahl über Spalt wird in $N$ Teilstrahlen zerlegt im Abstand: $\Delta b = \frac{b}{N}$

(2) Amplitude eines Teilstrahls $= a = \frac{\sqrt{I_0}}{N}$

(3) Gangunterschied benachbarter Strahlen: $x = \Delta b \sin \alpha$

(4) Phasenunterschied benachbarter Strahlen: $\Delta\varphi = kx = k\Delta b \sin \alpha$

(5) Gesamtamplitude $\widehat{=}$ Summe der $N$ Teilstrahlen

$$\Rightarrow \quad A = a \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i(\omega t + f_n)} = a e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Delta\varphi}$$

$f_n$ ist die Phase des $n$-ten Teilstrahls

$$A = e^{-i\omega t} \frac{e^{iN\Delta\varphi} - 1}{e^{i\Delta\varphi} - 1} = a e^{-i\omega t} e^{i\frac{N\Delta\varphi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\Delta\varphi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)}$$

$$\Rightarrow \quad I(\alpha) = A^2 = a^2 \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}\Delta\varphi\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)} = a^2 \frac{\sin^2(x)}{\sin^2\left(\frac{x}{N}\right)} \qquad x := \pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha$$

(6) Grenzübergang $\Delta b \to 0$ oder $N \to \infty$:

$$\Rightarrow \quad \sin^2(\frac{x}{N}) = \frac{x^2}{N^2}$$

$$\Rightarrow \quad I(\alpha) = N^2 a^2 \frac{\sin^2(x)}{x^2}$$

**Lösung:**

$$\boxed{I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2(x)}{x^2}} \qquad x := \pi \frac{b}{\lambda} \sin\alpha$$

**Diskussion:**

Hauptmaxima: $x = 0 \quad \to \quad \alpha = 0$
Minima: $\sin x = 0 \quad \to \quad x = n\pi \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = n\frac{\lambda}{b}$
Nebenmaxima: $|\sin x| = 1 \quad \to \quad x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{b}$

Die Gleichungen sind unabhängig vom Abstand des Schirms. Die stammt aus der Annahme es handelt sich um Ebene Wellen, es nur die nur im Fernbereich gibt. Daher gelten unsere Gleichungen und Annahmen auch nur im Fernbereich. Ist der Abstand zum Schirm nicht Wesentlich größer als die Spaltbreite oder der Abstand der Spalten, gelten sie nicht mehr. Mehr dazu im Abschnitt Interferenz und Beugung II.

ACHTUNG:
Implizit Annahme ebener Wellen $\Rightarrow$ Rechnung nur richtig im Fernbereich ⚠

### III.2.3 Beugung am Gitter

**Definition:**
Gitter: Regelmäßige Anordnung von „Strichen“ [Folie: Licht am optische Gitter](wieder Annahme ebener Wellen)
Brechungs

(1) Überlagerung von $N$ Strahlen im Abstand $d$

(2) Amplitude eines Strahls $a = \sqrt{I_0}$

(3) Gangunterschied von benachbarten Strahlen $x = d\sin\alpha$

Weiter wie beim Einzelspalt:

(4) Phasenunterschied $\Delta\varphi = kx = kd\sin\alpha$

(5) Gesamtamplitude $\widehat{=}$ Summe der Teilstrahlen

$$\Rightarrow \quad A = ae^{-i\omega t}\sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Delta\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad A(\alpha) = A_0 \frac{\sin\left(\pi\frac{Nd}{\lambda}\sin\alpha\right)}{\sin\left(\pi\frac{d}{\lambda}\sin\alpha\right)} \qquad A_0: \text{ geeignet definiert}$$

$$I(\alpha) = A^2$$

[Folie: Interferenzmuster in Abhängigkeit der Spaltenzahl]

**Diskussion:**
Hauptmaxima: Nenner klein $\pi\frac{d}{\lambda}\sin\alpha = m\pi$

$$\Rightarrow \qquad \sin\alpha = m\frac{\lambda}{d}$$

Nebenmaxima: Zähler klein $\Rightarrow \pi\frac{Nd}{\lambda}\sin\alpha = m\pi$

$$\Rightarrow \qquad \sin\alpha = m\frac{\lambda}{Nd}$$

Breite der Hauptmaxima:
Verhält sich wie der Abstand benachbarter Nebenmaxima

$$\Rightarrow \qquad B = \frac{2\lambda}{Nd}$$

Dispersion der Hauptmaxima ($\lambda$ bzw. $\omega$ Abhängigkeit)
Lage: $\sin\alpha = m\frac{\lambda}{b}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{m}{d}\arccos\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\lambda} > 0$$

Wenn ihr eine scharfe Linie wollt sollte euch sofort Gitter einfallen.

### III.2.4 Beugung am Raum- oder Oberflächengitter

**Definition:**
Raumgitter: Kristall $\widehat{=}$ regelmäßige Anordnung von Atomen im 3D Raum [Folie: Diamant Kristallgitter]

$$\Rightarrow \quad 2d\sin\alpha = m\lambda \qquad \text{Bragg-Bedingung}$$

$d$ ist der Abstand von zwei Kristall-Ebenen oder Netzebenen **Versuch:** Doppelspalt

Typischer Zahlenwert:

$$d \approx 1\,\text{Å} \quad \Rightarrow \quad \lambda \approx 1\,\text{Å} \quad \approx \quad \text{Röntgenstrahlung oder X-Ray}$$

**Versuch:** Gitter
**Versuch:** Kristall Struktur Messung it Röntgenstrahlung

Anwendung von Kristallen: Röntgenstrukturanalyse mittels Röntgendefraktometer
X-Ray: Die Wechselwirkung von Röntgenstrahlung mit Materie ist die mit den Elektronen also der Lorentz-Lorenz-Oszillator $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$. Die Röntgenstrahlung Wechselwirkt also mit den Ladungen. Was wir beobachten ist also die Lage der Elektronen also nur indirekt die Lage der Atome.

***Beispiel:*** **Srukturanalyse von Kristallen**

- X-ray: $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$
  - Streuung an der Elektronenhülle
  - Bestimmung der Elektronenladungshülle
- Neutronen $n$: starke WW
  - Streuung am Kern
  - Bestimmung der Kernpositionen

- Spin: magnetische Dipol-Dipol-WW
  - Streuung an Elektronenspins
  - $\Rightarrow$ Magnetismus

Wie gut kommen Elektronen durch material durch? Überhaupt nicht gut, bei Isolatoren ist es in dem sehr kleinen 0,000... ÅBereich, bei metallen trifft das Elektron gleich auf den "Elektronen See".

***Beispiel:*** **Untersuchung von Oberflächen LEED (Low Energy Electron Diffraction)**

- $e^-$:
  - Streuung an der Elektronenhülle
  - Eindringtiefe $\approx 100$ Å $\Rightarrow$ Oberflächenanalyse

Die **Energie von Raumtemperatur** ist ungefähr $\frac{1}{40}$ eV. Sollte man Wissen.
[Folie: zu LEED]

### III.2.5 Interferenz an planparallelen Glasplatten

[Folie: zu Reflexion an einer Glasplatte]

**Reflexion**

(1) Länge der Wege $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$

$$x_{AB} = \frac{d}{\cos\beta} \quad x_{BC} = \frac{d}{\cos\beta}$$

(2) Weg $\overline{AD}$

$$x_{AD} = \overline{AC}\sin\alpha = 2d\tan\beta\sin\alpha$$

(3) Gangunterschied

$$x = n\left(x_{AB} + x_{BC}\right) - x_{AB}$$

$n$: Brechungsindex der Glasplatte
mit $\sin\alpha = n\sin\beta$ gilt:

$$x = 2dn\cos\beta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}$$

(4) Phasenunterschied
Phasenunterschied aufgrund des Gangunterschieds $\Delta\varphi = kx = \frac{2\pi}{\lambda}x$
$\approx$ senkrechter Einfall:
Phasensprung um $\pi$ bei der Reflexion am optisch dichteren Medium

$$\Rightarrow \Delta\varphi = kx + \pi$$

(5) Für konstruktive Interferenz (Maxima): $\Delta\varphi = m2\pi$

$$\Rightarrow \qquad 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

**Transmission**

(1) Gangunterschied wie zuvor

$$x = n(x_{AB} + x_{BC}) - x_{AD} = 2d\sqrt{n^2 \sin^2 \alpha}$$

(2) Phasenunterschied
Gangunterschied $\Rightarrow \Delta\varphi = kx$
Phasensprünge $\Rightarrow 0$

$$\Rightarrow \qquad \Delta\varphi = kx$$

(3) Maxima:

$$\Rightarrow \qquad 2d\sqrt{n^2 \sin^2 \alpha} = m\lambda$$

**Test:**
Annahme: keine Absorption in der Glasplatte: Die Intensitäten der Reflexion und die der Streuung sollten sich zu Gesamtintensität aufsummieren.

$$\Rightarrow \text{ zu erwarten:} \quad I = I_{\text{reflektiert}} + I_{\text{transmittiert}}$$

Wie erwartet da wo die Transmission Maximal ist ist die Reflexion minimal und umgekehrt. Immer um $\frac{\lambda}{2}$ verschoben.

**Anwendung**

- **Versuch:** Interferenz mit zwei angewinkelten Spiegeln Fres'nelscher Doppelspiegel
  [Folie: Fres'nelscher Doppelspiegel]
- [Folie: Newton's Ringe]
- **Versuch:** Seifenblase
  die in Regenbogenfarben schillert
- **Versuch:** Interferenz an Planparalleler Folie
  (mit grünem Laserlicht demonstriert)

### III.2.6 Vielstahlinterferenz, Fabry-Pérot-Interferometer

[Folie: Vielstrahlinterferenz an Planparallelen Platten]
Die Interferenz ähnelt der bei einem Gitter. Der große Unterschied liegt darin, dass die Intensität der Teilstrahlen mit zunehmenden Reflexionen abnimmt.
Reflexion (Transmission aus $I = I_{\text{ref}} + I_{\text{trans}}$)

(1) Intensitäten der jeweiligen Teilstrahlen berücksichtigen
$\Rightarrow$ Reflexionskoeffizient $R$

$$\begin{aligned}
|A_1| &= \sqrt{R}|A_0| \\
|B_1| &= \sqrt{1-R}|A_0| \\
|D_1| &= \sqrt{1-R}|B_1| = (1-R)|A_0| \\
|C_1| &= \sqrt{R}|B_1| = \sqrt{R}\sqrt{1-R}|A_0| \\
|A_2| &= \sqrt{1-R}|C_1| \\
|B_1| &= \sqrt{R}|C_1| = R\sqrt{1-R}|A_0|
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad |A_{m+1}| = \sqrt{1-R}|C_m| = \sqrt{1-R}\sqrt{R}|B_m| = \sqrt{1-R}\sqrt{R}\sqrt{R}|C_{m-1}| = R|A_m|$$

$$\Rightarrow \qquad |A_{m+1}| = R|A_m| \qquad |D_{m+1}| = R|D_m|$$

(2) Gangunterschied benachbarter Strahlen (siehe Platte)

$$x = 2d\sqrt{n^2 \sin^2\alpha}$$

(3) Phasenunterschied

$$\Delta\varphi = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gangunterschied}}}{kx} + \text{Phasensprünge}$$

Bei den Phasensprüngen folgt nach längerer Arbeit, dass nur der Phasensprung $A_1$ übrig bleibt.

(4) Gesamtamplitude

$$A = \pm \sum_{m=1}^{N} A_m e^{i(m-1)\Delta\varphi}$$

$N$: Anzahl der betrachteten Teilstrahlen
$\pm$: Berücksichtigt die Phasensprünge

(5) Grenzübergang $N \to \infty$ (unendlich lange Glasplatte):

$$\Rightarrow \qquad A = \pm A_0\sqrt{R}\frac{1-e^{i\Delta\varphi}}{1-Re^{i\Delta\varphi}}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_R = |A^2| = 2I_0R\frac{1-\cos\Delta\varphi}{1-2R\cos\Delta\varphi + R^2}}$$

**Ergebnis**

**Airy-Formeln**

$$I_R = I_0\frac{F\sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{1+F\sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

$$I_T = I_0\frac{1}{1+F\sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2} \qquad \frac{\Delta\varphi}{2} = 2\pi\frac{d}{2}\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}$$

*Beispiel:* senkrechter Einfall

$$\Rightarrow \alpha = 0 \qquad I_T = I_0\frac{1}{1+F\sin^2(ndk)}$$

wobei $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ Maxima:

$$2nd = m\lambda$$

FWHM (full width at half maximum)

$$\varepsilon = 4 \arcsin \sqrt{\frac{1}{F}} \approx \frac{4}{\sqrt{F}}$$

[Folie: Maxima beim FWHM]

**Anwendung: Fabry-Pérot-Interferometer**

[Folie: zu Fabry-Pérot-Interferometern]
**Versuch:** Natrium-Dampf-Lampe Interferenz
[Folie: Interferenz mit einer Natrium-Dampf-Lampe]
**Versuch:** Abpumpen der Luft beim Interferenzmuster der Natrium-Dampf-Lampe
Das Muster verändert sich erheblich obwohl der Unterschied der Brechungsindizes so gering war. Also hat das Farbinterferometer eine sehr hohe Auflösung.

## III.3 Interferenz und Beugung II - Huygen'sches Prinzip

### III.3.1 Huygen'sches Prinzip

Jeder Punkt einer Wellenfront ist Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle.

*Beispiel:* Brechung
Erklärung über Ausbreitung ebener Wellen [Folie: Brechung mit Ebenen Wellen]

### III.3.2 Interferenz am Doppelspalt

Jeder Spalt, wenn er klein genug ist, wird als „Sender“ einer Elementarwelle angesehen.
$\Rightarrow$ Überlagerung von zwei Kugelwellen.
[Folie: zu Doppelspalt mit Kugelwellen]

### III.3.3 Beugung

Beugung bezeichnet das Phänomen, das Licht (und andere Wellen) in Bereiche vordringt, in welche es als Strahl betrachtet nicht vordringen dürfte.
Beugung tritt immer an Stellen auf, an denen die Transmission einer Welle verhindert wird. Dies ist z.B. der Fall an Kanten bei denen an einer Seite komplette Abschattung und an der anderen komplette Transmission stattfindet.
Interferenz tritt dann auf, wenn es zwei solche Stellen gibt an denen Beugung auftritt.
**Versuch:** Laser mit Kante und später Loch-/Kreisblende und später Stecknadelkopf
Man sieht auch ein dieser einzelnen Kante Interferenz. Dies zu verstehen ist Ziel der heutigen Vorlesung. Das Interferenzmuster ist die Fouriertransformation einer Stufenfunktion. Bei der Lochblende einer Fouriertransformation eines „Loches“.
[Folie: Doppelspalt Beugung][Folie: Einzelspalt]

### III.3.4 Allgemeine Behandlung der Beugung

Zur Verallgemeinerung Behandeln wir nun das Kirchhoff'sche Beugungsintegral

#### Kirchhoff'sches Beugungsintegral

In verschiedenen Büchern treten häufig andere Formel des Gleichen Integrals auf.
[Folie: Beugungsintegral]

Die Blende wird als eine Transmissionsfunktion beschrieben. Zu jedem Punkt aus dem Schirm gibt es dann ein Integral der Intensitäten aller Elementarwellen aus der Blende.
Blendenöffnung bei $z = 0$
Beobachtungsschirm bei $z = z' = z_0$

**Kirchhoff'sches Beugungsintegral**

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}') = \frac{ik}{2\pi}\int Q\tau(x,y)\boldsymbol{E}_{\text{ein}}(\boldsymbol{x})\frac{e^{-ikr}}{r}\mathrm{d}\sigma$$

$Q :=$ Neigungsfaktor

$\tau :=$ Transmissionsfunktion mit $\begin{cases} \tau = 1: & \text{vollständige Transmission} \\ \tau = 0: & \text{undürchlässig} \end{cases}$

$r :=$ Abstand des Punkts $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{x}'$

$$r^2 = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + z'^2$$

**Sketch der Herleitung**

(1) Für das von der Blende bei $z = 0$ durchgelassene Licht gilt:

$$E_{\text{Blende}}(x,y) = E_{\text{ein}}(x,y,z=0)e^{i\varphi(x,y,z=0)}$$

(2) Jeder Punkt der Öffnung erzeugt eine Elementarwelle

$$\mathrm{d}E(x',y',z') \propto Q\tau(x,y)E_{\text{ein}}(x,y)\frac{e^{-ikr}}{r}\underbrace{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}_{d\sigma}$$

$$Q \propto \frac{1}{2}(\cos\theta_1 + \cos\theta)$$

(3) Insgesamt:

$$E(x,y',z') \propto \int Q\tau(x,y)E_{\text{ein}}\frac{e^{-ikr}}{r}\mathrm{d}\sigma$$

(4) Vektoren und Beträge „richtig“‘machen.

**Grenzfälle:**

- Frauenhofer-Beugung:
  Abstand des Schirms von der Blende sehr groß gegenüber Öffnung der Blende.

$$z' \gg x,y \qquad z_0 \gg \frac{b^2}{\lambda}$$

- Fresnel Beugung:
  Abstand des Schirms von Blende klein.

$$z' \ll x,y \qquad z_0 \ll \frac{b^2}{\lambda}$$

- Überganszone $z_0 \approx \frac{b^2}{\lambda}$

[Folie: Folie Nah-/Übergangs-/Fernbereich]

### III.3.5 Allgemeines Ergebnis für die Beugung im Fernbereich, Frauenhofer Beugung

Fernbereich: $z' \gg x, y$

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2}$$

Zur Näherung: Näherungen zu machen ist nicht sehr einfach und der Prozess nicht sehr präzise zu Beschreiben. Es ist nicht leicht eine gute Näherung zu finden. Man muss dabei darauf Achten, dass man durch seine Näherung nicht interessante physikalische Zusammenhänge „Wegnähert“. In unserem Fall muss die $e$-Funktion genau genähert werden, das r im Nenner nur grob.
präziser Nähern wir $z' \gg \frac{1}{\lambda}(x^2 + y^2)$

$$r \approx z' \left(1 - \frac{xx'}{z'^2} - \frac{yy'}{z'^2} + \frac{x'^2 + y'^2}{2z'^2}\right)$$

Im Nenner $r \approx z'$
In dieser Näherung auch $Q \approx 1$

#### Beugungsintegral für Frauenhofer Beugung

Nebenrechnung: $\frac{e^{-ikr}}{r} \approx \frac{e^{-ikz'}}{z'} e^{ik\frac{x'}{z'}x} e^{ik\frac{y'}{z'}y} e^{-ik\frac{1}{2z'}(x'^2+y'^2)}$
Die ersten Beiden Faktoren hiervon landen später im Vorfaktor $A$.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \underbrace{A(\boldsymbol{x}')}_{\substack{\text{alles Lästige} \\ \text{geht dort rein}}} \int \tau(x,y) \boldsymbol{E}_{\text{ein}}(x,y) e^{ik\frac{x'}{z'}x} e^{ik\frac{y'}{z'}y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Fourier Integral:

$$\boldsymbol{F}(u,v) \equiv \int \tau(x,y) \boldsymbol{E}_{\text{ein}}(x,y) e^{iux} e^{ivy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

**Beugungsintegral für Frauenhofer Beugung**

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}') = A(\boldsymbol{x}') \boldsymbol{F}\left(k\frac{x'}{z'}, k\frac{y'}{z'}\right)$$

*Beispiel:* Einfachspalt

$$\begin{array}{ccc} \text{Ortsraum} & \Leftrightarrow & \text{Fourier Raum} \\ \tau(x,y) = \begin{cases} 1 & \forall \frac{-b}{2} \le x \le \frac{b}{2} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} & \Leftrightarrow & \boldsymbol{F}(k) = \frac{\sin x}{x} \qquad x = \frac{\pi}{b} k \frac{x'}{z'} \\ \left.\begin{array}{c} \text{breiter} \\ \text{schmaler} \end{array}\right\} \text{Spalt} & \Leftrightarrow & \left.\begin{array}{c} \text{schmale} \\ \text{breites} \end{array}\right\} \text{Interferenzstrukur} \end{array}$$

$$\Delta x \Delta h < \text{const.}$$

### III.3.6 Auflösungsvermögen optischer Instrumente

Es ist Wichtig zu Wissen von welcher Art von Vergrößerung geredet wird. Welche wir hier benutzen wird später genauer erklärt.

#### Lochkurven

[Folie: Zu Lochkurven und Darstellung mit Lochblenden]
**Versuch:** Darstellung von Dia mit Lochblende

### Rayleight Kriterium

Zwei Punkte sind gerade dann noch unterscheidbar, wenn das Beugungsmaximum des einen Punktes in das 1.-te Beugungsminimum des anderen Punktes fällt.

[Folie: Auflösung: Überlagerung von Beugungsmustern]
Diese Definition ist nichts eindeutiges. Es ist nur eine Möglichkeit an einem Breiten Übergang von Scharf bis Unscharf.

### Ein anderes Kriterium

Abstand der Hauptmaxima muss größer sein als deren Halbwertsbreite.

## III.3.7 Räumlichhes Auflösungsvermögen

*Beispiel:* Linse
[Folie: Zu Bündelung von Licht mit einer Linse]

**Versuch:** Laser: Beugung an der Doppellochplatte
Je näher die Löcher in der Blende zueinander rücken, desto ausgeprägter wird das Interferenzmuster
Beugung an einer Lochblende:
1. Maximum:

$$r \sin\alpha = 0{,}61\lambda$$

**Auflösung einer Lochblende**

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha_{\text{min}} = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$$

$D$ : Durchmesser des Lochs
**Auflösung einer Linse**

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha_{\text{min}} = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$$

$D$ : Durchmesser der Linse
**Auflösung eines Fernrohrs**
Das durch das Objektiv erzeugte Zwischenbild ist bereits beugungsverbreitert.

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha_{\text{min}} = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$$

$D$ : Durchmesser des Objektivs
**Auflösung eines Mikroskops**
Im Unterschied zu vorher ist das einfallende Licht nicht parallel. [Folie: zur Auflösung am Mikroskop]

(1)

$$d = b\alpha_{\text{min}}$$

$$\Rightarrow \alpha_{\text{min}} = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$$
$$\Rightarrow \quad d = 1{,}22\frac{b\lambda}{D}$$

$D$ : Durchmesser des Objektivs

(2) Für den Abstand $\delta_x$ **vor** dem Objektiv gilt

$$\delta_x \approx \frac{\varphi_1}{b} d = 1{,}22 \frac{\varphi_1 \lambda}{D}$$

(3) Öffnungswinkel $\varphi$

$$\sin\varphi \approx \frac{D}{2\varphi_1}$$

**Auflösung eines Mikroskop**

$$\delta_x \approx 0{,}61\,\frac{\lambda}{n\sin\varphi}$$

$n\sin\varphi$ : numerische Apertur
Der **Gültigkeitsbereich der Formel** ist der **Fernbereich** (Frauenhofer Beugung). Wir versuchen Bessere Ergebnisse zu erzielen indem wir Situationen Betrachten, die außerhalb dieses Gültigkeitsbereichs liegen. In diesem Fall nutzen wir die Nahfeld Mikroskopie, wo die Fresnel'sche Beugung auftritt und wir darüber eine höhere Auflösung erzielen können,

**Verbesserungen** der beugungsbegrenzten Auflösung:

- kleines $\lambda$
  - $\rightarrow$ Elektronenmikroskop (1 nm)
  - $\rightarrow$ Röntgen (in Entwicklung)
- Immersionsöl mit Brechungsindex von $n \approx 1{,}5$
- Nahfeldmikroskopie
  Die obigen Überlegungen basieren auf der Frauenhofer Beugung.

Was im nächtes Kapitel nicht behandelt wird. Polarisation,Doppelbrechung ,nichtlineare optik

# Kapitel IV

# Licht - Materie Wechselwirkung

## IV.1 lineare und zirkulare Polarisation

EM-Welle

$$\Rightarrow \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{k}$$

**Definition:** Polarisation $\widehat{=}$ Richtung von $\boldsymbol{E}$
transversale Wellen: $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{k} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{k} = 0$
longitudinale Wellen: $\boldsymbol{E} \parallel \boldsymbol{k} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{k})\, \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}^2 \boldsymbol{E}$
Für die Behauptung, dass EM-Wellen Transversalwellen haben wir die Annahme getroffen, dass wir uns im Vakuum befinden. In Materie ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit kleiner als $c$ und der $\boldsymbol{k}$-Vektor hat eine Komponente parallel zur Ausbreitungsrichtung. $\Rightarrow$ longitudinale EM-Wellen (eigentlich keine EM-Wellen sondern anderer Name).
$\Rightarrow \boldsymbol{k} = (0, 0, k)$

### IV.1.1 Lineare Polarisation

[Folie: linear polarisierte EM-Welle]

$$\boldsymbol{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \tilde{\varphi} \\ \sin \tilde{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

### IV.1.2 Zirklulare Polarisation

[Folie: zirkular polarisierte EM-Welle]

$$\boldsymbol{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t - kz + \varphi) \\ \pm \sin(\omega t - kz + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

### IV.1.3 Zusammenhang zwischen linear und zirkular polarisierten Wellen

Jede linear polarisierte Welle kann in zwei entgegengesetzt zirkular polarisierte Wellen halber Amplitude zerlegt werden und umgekehrt.

*Beispiel:* Zerlegung von linearer in zirkulare Polarisation. $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) &= A\begin{pmatrix}\cos(\omega t-kz+\varphi)\\0\\0\end{pmatrix}\\
&= \frac{A}{2}\begin{pmatrix}\cos(\omega t-kz+\varphi)\\ \cos\left(\omega t-kz+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\\0\end{pmatrix}+\frac{A}{2}\begin{pmatrix}\cos(\omega t-kz+\varphi)\\ \cos\left(\omega t-kz+\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

### IV.1.4 Polarisation beim Durchgang durch Materie

**Doppelbrechung:**

$$l_x \neq l_y$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\begin{pmatrix}A_x\cos(\omega t-k_x z+\varphi_x)\\A_y\cos(\omega t-k_y z+\varphi_y)\\0\end{pmatrix}$$

**optische Aktivität**

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit bzw. der Wellenvektor für rechts und links zirkulare Polarisation unterschiedlich.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) &= \frac{A}{2}\begin{pmatrix}\cos(\omega t-k^+z+\varphi)\\ \cos\left(\omega t-k^+z+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\\0\end{pmatrix}+\frac{A}{2}\begin{pmatrix}\cos(\omega t-k^-z+\varphi)\\ \cos\left(\omega t-k^-z+\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\\0\end{pmatrix}\\
&= A\begin{pmatrix}\cos(\delta kz)\\ \cos(\delta kz)\\0\end{pmatrix}\cos\left(\omega t-\overline{k}z+\varphi\right)
\end{aligned}
$$

$$k^+=\overline{k}+\delta k \qquad k^-=\overline{k}-\delta k$$

## IV.2 Polarisation durch Brechung und Reflexion

(siehe EX II)

### IV.2.1 Maxwell Gleichungen in Materie

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D}=\rho_0 \qquad \mathrm{div}\boldsymbol{B}=0$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} \qquad \mathrm{rot}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_0+\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}$$

plus:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= q\left(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)\\
\boldsymbol{F} &= q\boldsymbol{E}
\end{aligned}
$$

$$\rho=\rho_0+\rho_{\mathrm{pol}}=\frac{1}{\varepsilon}\rho_0 \qquad \boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}_0\boldsymbol{j}_{\mathrm{mag}}=\mu\boldsymbol{j}_0$$

Es fehlen hier noch einige Zusammenhänge die selbstverständlich immer noch gelten z.B.:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \mathrm{rot}\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \qquad \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}\right)$$

alle sechs Felder: $\boldsymbol{DEP} \;\; \boldsymbol{MHB}$ jeweils vier mal 6 Gleichungen
plus:

$$\text{Materialgleichungen z.B.:} \quad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{E}) \;,\; \boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}) \;,\ldots$$

### IV.2.2 Erinnerung: Polarisation bei Brechung und Reflexion

[Folie: Brechung und Reflexion bei parallelem und orthogonalem $\boldsymbol{E}$-Feld in der Einfallsebene]
[Folie: Einfallswinkel und Reflexionswinkel (Brewsterwinkel)]

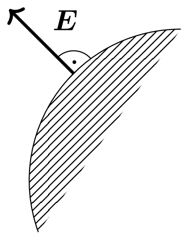
#### Physikalische Ursache: Stetigkeits & Randbedingungen

Gewöhnliche partielle Diff-Gleichungen

$\Rightarrow$ viele Lösungen

$\Rightarrow$ Anfangsbed, Randbed., Stetigkeitsbed.

*Beispiele:*




- Metall: Randbedingung aus Elektrostatik überlegt
- Ein- und Ausschaltvorgänge bei RLC Gleichungen
  Anfang: Schalter offen, Spule „aufgeladen“

  $$\Rightarrow I = \frac{U}{(R_i + R)}$$

  Dann: Schalter schließen $\Rightarrow U = 0 \Rightarrow$ wie verhält sich aber $I, U_{\text{Spule}}, \ldots$ ?
  Energie der Spule ist stetig $\quad E_{\text{Spule}} = \frac{1}{2} L I^2$

  $$\Rightarrow I_{\text{Spule}} \text{ stetig}$$