Physiklabor für Anfänger*innen
Ferienpraktikum im Sommersemester 2018

Versuch 4: Dichte und Oberflächenspannung

(durchgeführt am 07.09.2018 bei Daniel Bartle)
Ye Joon Kim, Marouan Zouari
18. September 2018

1 Einleitung

Ein Wert auf mehrere Weisen zu messen ermöglicht es, die Genauigkeit der Messwerten zu verbessern und ein besseres Ergebnis. Zwei Methode, um die Dichte eines Objekts zu bestimmen, sind beispielsweise eine Jolly'sche Federwaage anzuwenden, oder direkt das Volumen und die Masse des jeweiligen Objekts zu messen. In dem ersten Versuchsteil werden beide Methode benutzt und verglichen. In dem 2. Versuchsteil wird die Oberflächenspannung, eine Quantifizierung der Kohäsion, von mehreren Flüssigkeiten bestimmt.

2 Ziel des Versuchs

Das Ziel des ersten Teils des Versuchs ist es, die Dichte von festen Körpern und Flüssigkeiten zu bestimmen und beide Methodologien (beschrieben in Einleitung) zu vergleichen. Das Ziel des zweiten Teils ist es, die Oberflächenspannungen von Flüssigkeiten, nämlich von Wasser und Äthanol, zu bestimmen.

3 Aufbau

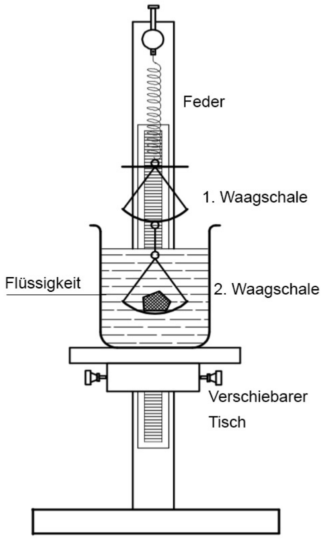

Abbildung 1: Aufbau zum 1. Versuchsteil. Eine Jollysche Federwaage. ("Versuchsanleitungen zum Physiklabor")

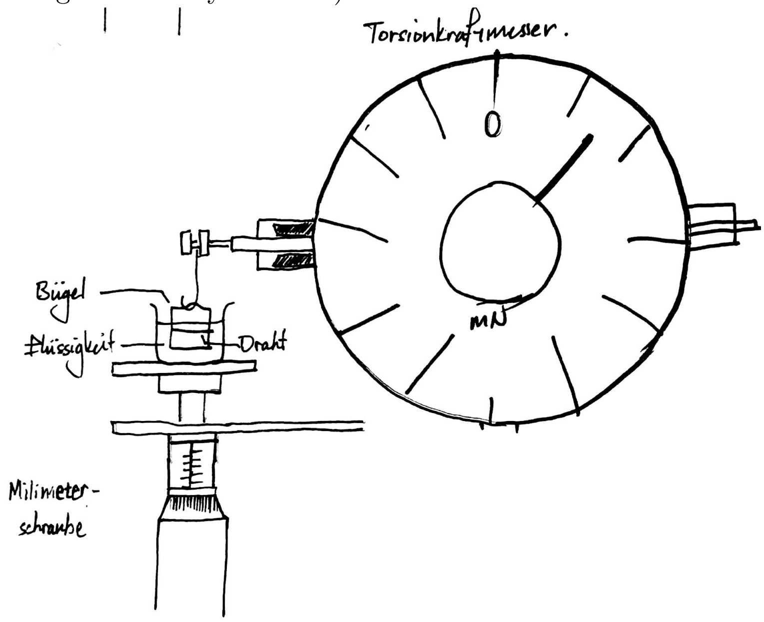

Abbildung 2: Aufbau zum 2. Versuchstail

4 Auswertung und Fehleranalyse

4.1 1. Versuchsteil : Bestimmung der Dichte eines regulären Körpers

4.1.1 Bestimmung mit einer Jolly'schen Federwaage

Zur Bestimmung der Dichte wird die folgenden Formeln verwendet:

$$\frac{\rho}{\rho_{Fl}} = \frac{F_G}{F_A} = \frac{F_G}{F_G - F_{G'}} \tag{1}$$

$$F = -k \cdot (x - x_0) \tag{2}$$

Wobei für (1):

- ρ und ρ_{Fl} die Dichten des Körpers und bzw. der Flüssigkeit sind
- F_G die auf den Körper wirkende Gravitationskraft
- $F_{G'}$ die auf den in der Flüssigkeit eingetauchten Körper wirkende Gravitationskraft
- F_A die Auftriebskraft

und für (2):

- F die Federkraft
- k die Federkonstante
- x_0 die Ruhelage des Fadens und Schale

Das Einsetzen von Gleichung (2) in Gleichung (1) liefert:

$$\frac{\rho}{\rho_{Fl}} = \frac{x_1 - x_0}{(x_1 - x_0) - (x_2 - x_0)} \tag{3}$$

Für die Erleichterung der Berechnung wurden zuerst die Differenzen, die in der obigen Formel auftauchen, und deren Unsicherheiten berechnet

$x_1 - x_0$ mm	$\Delta(x_1 - x_0)$ mm	$x_2 - x_0$ mm	$\Delta(x_2 - x_0)$ mm
17	1	3	1
19	1	3	1
20	1	2	1
18	1	2	1

Tabelle 1: Die Differenzen zwischen x_1 und x_0 und zwischen x_2 und x_1 sowie deren Unsicherheiten

4.1.2 Beispielrechnungen (mit ersten Datenpunkten)

Siehe Anhang für rohe Daten

$$x_1 - x_0 =$$

$$395\text{mm} - 412\text{mm} =$$

$$17\text{mm}$$

Für die Unsicherheiten der Differenzen wurden die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung benutzt.
Sei:

$$f(x_1, x_0) = x_1 - x_0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1$$

Dann ist:

$$\Delta x_1 - x_0 = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x_0}\Delta x_0)^2 + (\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1)^2}$$

$$= \sqrt{1 \cdot (1\text{mm})^2 + 1 \cdot (1\text{mm})^2}$$

$$= \sqrt{2}\text{mm} \approx 1,414\text{mm}$$

Das wird gerundet zu:

$$\Delta x_1 - x_0 = 1\text{mm}$$

Danach werden die Mittelwerte der Differenzen sowie deren Unsicherheiten berechnet.

$\overline{x_1 - x_0}$ mm	$u_{\overline{x_1 - x_0}}$ mm	$\overline{x_2 - x_0}$ mm	$u_{\overline{x_2 - x_0}}$ mm
19	1	3	1

Tabelle 2: Die Mittelwerte der Differenzen und ihre Unsicherheiten

4.1.3 Beispielrechnungen

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\overline{x_1 - x_0} = \frac{17\text{mm} + 19\text{mm} + 20\text{mm} + 18\text{mm}}{4}$$

$$= 18,5\text{mm}$$

und für die Unsicherheiten werden die Standardunsicherheiten benutzt:

$$u_x = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}} \tag{4}$$

$$u_{\overline{x_1 - x_0}} = \sqrt{\frac{(1,5\text{mm})^2 + (0,5\text{mm})^2 + (1,5\text{mm})^2 + (0,5\text{mm})^2}{3}}$$

$$\approx 1,29\text{mm} \approx 1\text{mm}$$

Eingesetzt in Formel (3) ergibt:

$$\frac{\rho}{\rho_{Fl}} = 1.16 \pm 0,07$$

4.1.4 Beispielrechnungen

$$\frac{\rho}{\rho_{Fl}} = \frac{x_1 - x_0}{(x_1 - x_0) - (x_2 - x_0)}$$
$$= \frac{18,5\text{mm}}{18,5\text{mm} - 2,5\text{mm}}$$
$$\approx 1,16$$

Für die Fehler dieses Verhältnisses wird erneut die Gaußsche Fehlerfortpflanzung benutzt.Mit:

$$f((x_1 - x_0), (x_2 - x_0)) = \frac{x_1 - x_0}{(x_1 - x_0) - (x_2 - x_0)}$$

sind

$$\frac{\partial f}{\partial (x_1 - x_0)} = -\frac{x_2 - x_0}{((x_1 - x_0) - (x_2 - x_0))^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial (x_2 - x_0)} = \frac{x_1 - x_0}{((x_2 - x_0) - (x_1 - x_0))^2}$$

und mit

$$\Delta \frac{\rho}{\rho_{Fl}} = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial (x_1 - x_0)} u_{\overline{x_1 - x_0}})^2 + (\frac{\partial f}{\partial (x_2 - x_0)} u_{\overline{x_2 - x_0}})^2}$$

ist die Unsicherheit

$$\approx 0,0724 \approx 0,07$$

Die Dichte von Wasser bei 25°C ist 997.05 kg/m^3 ("Dichte").

Die Dichte des Körpers ist deshalb:

$$\rho = (1160 \pm 70)\text{kg/m}^3$$

Die Unsicherheit der Dichte lässt sich auch mit der Standardabweichung der von den einzelnen Messreihen gewonnenen Dichten bestimmen. Mit Gleichung (4) ist die Standardunsicherheit der Dichten:

$$u_\rho = 49,24 kg/m^3$$

4.1.5 Bestimmung durch Volumen- und Massemessungen

Die Dichte eines Objekts lässt sich auch mit seinem Volumen und Masse bestimmen.

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{5}$$

Wobei m und V die Masse bzw. Volumen des Objekts sind.

Die Volumen des Objekts V ist:

$$(4,7 \pm 0,2)\text{cm}^3 = (0,0047 \pm 0,0002)\text{m}^3$$

und der Masse $m = (5,55 \pm 0,01)$g ist die Dichte:

$$(1170 \pm 50)\text{kg/m}^3$$

4.1.6 Beispielrechnungen

Für das Volumen benutzen wir die folgende Formel:

$$V = \pi(\frac{d}{2})^2 h$$

Wobei d und h der Durchmesser bzw. die Höhe des Zylinders sind.

$$V = \pi(\frac{1,6\text{cm}}{2})^2 \cdot 2,35\text{cm}$$

$$= 4,725\text{cm}^3$$

Dadurch ist die Dichte:

$$\rho = \frac{5,55\text{g}}{4,725\text{cm}^3}$$

$$= 1,1746\text{g/cm}^3 = 1174,6\text{kg/m}^3$$

Zur Fehlerrechnung wird die Gaußsche Fehlerfortpflanzung benutzt. Mit $f(d,h) = pi(\frac{d}{2})^2 h$ ist

$$u_V = 0,2390\text{cm}^3$$

(Verfahren wie in 3.1.3) Und die Unsicherheit der Dichte lässt sich mit der vereinfachte Formel für Produkte und Quotienten bestimmen.

$$|\frac{\Delta z}{z_0}| = \sqrt{(a\frac{\Delta x}{x_0})^2 + (b\frac{\Delta y}{y_0})^2} \text{ für} z = x^a \cdot y^b \tag{6}$$

$$|\frac{\Delta \rho}{\rho}| = \sqrt{(1 \cdot \frac{0,01\text{g}}{5,55\text{g}})^2 + (-1 \cdot \frac{0,2\text{cm}^3}{4,7\text{cm}^3})^2}$$
$$= 0,426$$

Daraus folgt:

$$\Delta\rho = 50,00\text{kg/m}^3$$

4.2 2. Teil: Bestimmung der Dichte einer unbekannten Flüssigkeit

$x_1 - x_0$ mm	$\Delta(x_1 - x_0)$ mm	$x_2 - x_0$ mm	$\Delta(x_2 - x_0)$ mm
20	1	7	1
19	1	7	1
19	1	7	1
19	1	6	1

Tabelle 3: Die Differenzen zwischen x_1 und x_0 und zwischen x_2 und x_1 sowie deren Unsicherheiten

Die Mittelwerte und deren Unsicherheiten lauten:

$\overline{x_1 - x_0}$ mm	$u_{\overline{x_1 - x_0}}$ mm	$\overline{x_2 - x_0}$ mm	$u_{\overline{x_2 - x_0}}$ mm
19	1	7	1

Tabelle 4: Die Mittelwerte der Differenzen und ihre Unsicherheiten

Die Werte Eingesetzt in Formel (3) liefert:

$$\frac{\rho}{\rho_{Fl}} = 1,54 \pm 0,10$$

Die Berechnungsverfahren sind genau wie in dem 1. Teil.

Die Umformung der obigen Formel liefert:

$$\rho_{Fl} = \frac{\rho}{1,54 \pm 0,10}$$

Und von Teil 1 wissen wir dass $\rho = (1160 \pm 70)\text{kg/m}^3$. ρ_{Fl}, die Dichte der unbekannten Flüssigkeit ist deshalb:

$$750 \pm 70\text{kg/m}^3$$

und die Standardabweichung (Standardunsicherheit) der einzelnen Dichtmessungen ist:

$$u_{\rho_{Fl}} = 28,78\text{kg/m}^3 \approx 30\text{kg/m}^3$$

4.2.1 Beispielrechnung

$$\rho_{Fl} = \frac{\rho}{1,54}$$
$$= \frac{1160\text{kg/m}^3}{1,54}$$
$$= 753,24\text{kg/m}^3 \approx 750\text{kg/m}^3$$

für die Unsicherheit wird die vereinfachte Formel für Produkte und Quotienten benutzt.(Formel (5))

$$|\frac{\Delta\rho_{Fl}}{\rho_{Fl}}| = \sqrt{(\frac{1,54}{0,10})^2 + (\frac{1160\text{kg/m}^3}{70\text{kg/m}^3})^2}$$
$$\frac{u_{\rho_{Fl}}}{\rho_{Fl}} = 0,0886$$
$$u_{\rho_{Fl}} = \rho_{Fl} \cdot 0,0886 = 753,24\text{kg/m}^3 \cdot 0,0886$$
$$\approx 66,74\text{kg/m}^3 \approx 70\text{kg/m}^3$$

4.3 2. Versuchsteil: Bestimmung der Oberflächenspannung

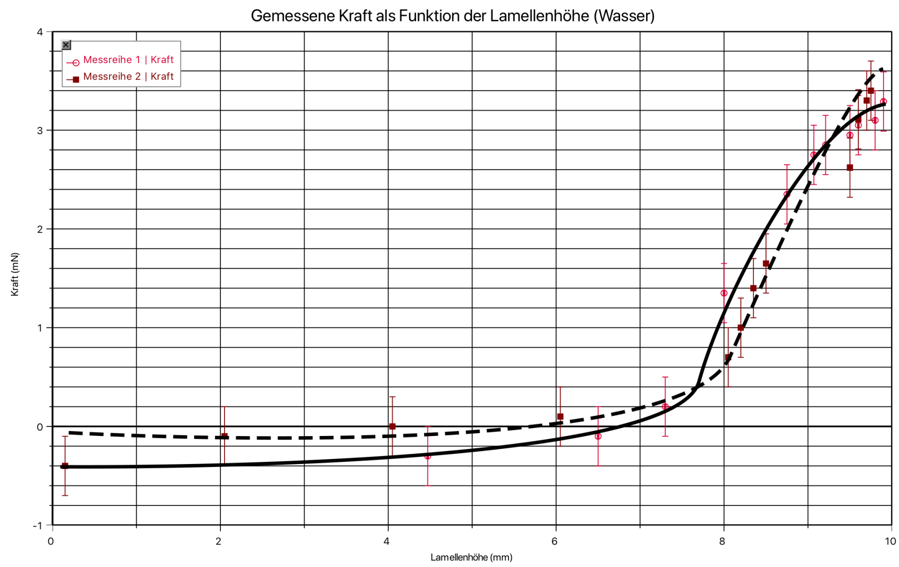

Abbildung 3: Verlauf der Kraft F als Funktion der Lamellenhöhe sowie dessen Fit-Kurven bei Wasser.(Gepunktete Linie für die 2. Messreihe)

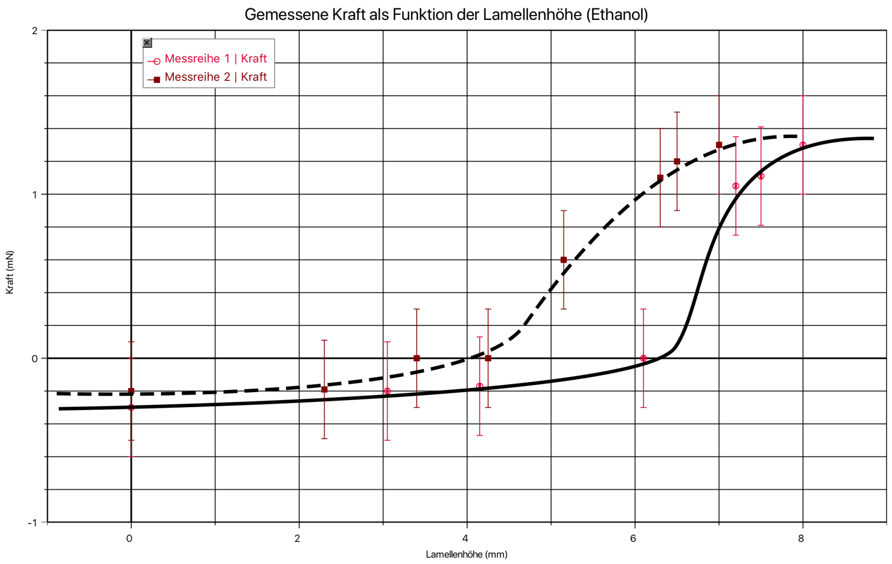

Abbildung 4: Verlauf der Kraft F als Funktion der Lamellenhöhe sowie dessen Fit-Kurven bei Ethanol.(Gepunktete Linie für die 2. Messreihe)

Die gemessene Länge des Messdrahtes war:

$$l = 2,530 \pm 0,005\text{cm}$$

Die einzelne $F(s_{\max})$ wurden direkt von den Diagrammen mit dem Fit-Kurven abgelesen, und deren Unsicherheiten als 0,3 mN genommen. Dadurch lassen sich die jeweilige Oberflächenspannungen bestimmen.

$F(s_{\max})$ mN	$\Delta F(s_{\max})$ mN	σ mN/cm	$\Delta\sigma$ mN/cm
3,3	0,3	1,3	0,1
3,4	0,3	1,3	0,1

Tabelle 5: Kraft $F(s_{\max})$ bei der maximalen Lamellenhöhe und die entsprechenden Oberflächenspannungen in Wasser

$F(s_{\max})$ mN	$\Delta F(s_{\max})$ mN	σ mN/cm	$\Delta\sigma$ mN/cm
1,3	0,3	0,27	0,06
1,3	0,3	0,27	0,06

Tabelle 6: Kraft $F(s_{\max})$ bei der maximalen Lamellenhöhe und die entsprechenden Oberflächenspannungen in Ethanol

Für die Berechnung der Unsicherheiten wird die vereinfachte Formel für Produkte und Quotienten benutzt. Das Berechnungsverfahren ist genau wie in dem 1. Teil dargestellt. Die Mittelwerte und ihre Unsicherheiten lauten:

$\overline{\sigma}_{\text{Wasser}}$ mN	$u_{\overline{\sigma}\text{Wasser}}$ mN	$\overline{\sigma}_{\text{Ethanol}}$ mN/cm	$\Delta\overline{\sigma}_{\text{Ethanol}}$* mN/cm
1,32	0,03	0,26	0,04

Tabelle 7: Die Mittelwerte der berechneten Oberflächenspannungen in Wasser und Ethanol und ihre Unsicherheiten.

*Da die gemessene Oberflächenspannungen für beide Messreihen dieselben Werte hatten, wurde die statistische Unsicherheit der Einzelmessung mit einer Skalierung für Mehrfachmessungen (nämlich $\frac{1}{\sqrt{2}}$) benutzt.

5 Diskussion der Ergebnisse

5.1 1. Versuchsteil

Die mit der Jolly'schen Federwaage gemessenen Dichte des Zylinders ist:

$$(1160 \pm 70)\mathrm{kg/m^3}$$

und die durch Gewicht- und Volumenmessungen bestimmten Dichte:

$$(1170 \pm 50)\mathrm{kg/m^3}$$

Da beide Werte innerhalb ihrer Unsicherheiten liegen, stimmen beide Werte überein.

Die berechnete Dichte der unbekannten Flüssigkeit ist:

$$(750 \pm 70)\mathrm{kg/m^3}$$

Ein möglicher Systematischer Fehler könnte sein, dass die Messungen mit einem nicht idealen Feder durchgeführt wurden. Deshalb könnte es Abweichungen von der linearen Beziehung zwischen Kraft und Abstand geben. In diesem Fall sind die benutzten Formeln von schlechten Modellen und liefern falsche Ergebnisse. Der Schutz der Feder vor äußeren Faktoren wie grosse Temperaturwechsel, Luftfeuchtigkeit und extreme mechanische Kräfte sind mögliche Lösungen. Die Herstellung der Feder aus widerstandsfähigen Materiellen, die von diesen Faktoren nicht leicht beeinträchtigt werden, ist auch eine Lösung.

Eine statistische Unsicherheit ist die Dicke der horizontalen Komponente der Waage, mit der die Höhe der Schalen abgelesen werden kann. Die Dicke könnte zu einer Ungenauigkeit von dem Ablesen von den Auslenkungen x_0, x_1 usw. auf der Skala führen. Dieses Problem lässt sich dadurch lösen, indem man diese Komponente dünner macht.

In dem 2. Teil ist auch ein Systematischer Fehler zu berücksichtigen. Aufgrund der Unsicherheit der Dichtmessung in dem 1. Versuchsteil können die berechneten Werten zu hoch oder zu klein abgeschätzt worden sein.

5.2 2. Versuchsteil

Es wurde berechnet, dass die Oberflächenspannung von Wasser ist:

$$(1,32 \pm 0,03)\mathrm{mN/cm}$$

und die von Ethanol:

$$(0,257 \pm 0,04)\mathrm{mN/cm}$$

Eine große Systematische Unsicherheit war es, dass $F(s_{\max})$ nicht direkt bestimmt werden konnte. Die letzten Messwerte sind die Werte, die gemessen wurden, bevor die Lamelle gerissen war. Das heißt, die letzten Datenpunkte liegen alle unter dem wirklichen $F(s_{\max})$. Zusätzlich ist ein statistischer Fehler, dass die Werte für $F(s_{\max})$ von einer selbst gezeichneten Kurve abgeschätzt werden mussten. Es können mehrere Kurven geben, die mit den Datenmessungen passen, und je nach dem, wie man die Kurven zeichnen, können die abgelesenen Werte für $F(s_{\max})$ anders sein. Beide Probleme lassen sich dadurch verbessern, indem man die Mikrometerschraube langsamer dreht und Messungen häufiger macht.

6 Anhang: Rohe Daten

6.1 1. Versuchsteil

x_1 mm	x_2 mm	x_0 mm
395	409	412
441	457	460
412	430	432
402	418	420

Tabelle 8: Gemessene Werte für x_1, x_2 und x_0 (1. Teil)

x_1 mm	x_2 mm	x_0 mm
391	404	411
384	396	403
413	425	432
440	453	459

Tabelle 9: Gemessene Werte für x_1, x_2 und x_0 (2. Teil)

Alle Unsicherheiten sind $\pm$ 1mm.

6.2 2. Versuchsteil

Da die Tabellen zu lang sind, bitte siehe Zusatzblätter für die rohen Daten zum 2. Versuchsteil.

7 Literatur

"Dichte." Wikipedia

"Versuchseinleitungen zum Physiklabor für Anfänger*innen, Teil 1." Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, 2018.