

## Versuch 70: Linsen und Linsensysteme

(durchgeführt am 28.09.2018 bei Daniel Bartle)  
Ye Joon Kim, Marouan Zouari  
6. Oktober 2018

### Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Aufbau</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung und Fehleranalyse</b>	<b>4</b>
4.1	1. Versuchsteil: Abbildungen mit Einzellinsen und Linsensystemen . . . . .	4
4.1.1	Rechenweg . . . . .	4
4.2	2. Versuchsteil: Das Bessel-Verfahren . . . . .	6
4.2.1	Rechenweg . . . . .	6
4.3	3. Versuchsteil: Das Abbe-Verfahren . . . . .	7
4.4	4. Versuchsteil: Autokollimationsverfahren und Dispersion . .	8
4.5	Bestimmung der theoretischen Brennweiten . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Diskussion der Ergebnisse</b>	<b>9</b>
5.1	Erster Versuchsteil . . . . .	9
5.2	Zweiter Versuchsteil: Das Bessel Verfahren . . . . .	9
5.3	Dritter Versuchsteil: Das Abbe-Verfahren . . . . .	10
5.4	Vierter Versuchsteil: Das Autokollimationsverfahren . . . . .	10
5.5	systematischen und statistischen Fehler . . . . .	10
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>11</b>

# 1 Einleitung

Mit einer Linse kann man durch die Brechung Licht ablenken. Jede (richtig hergestellte) Linse besitzen zwei Brennpunkte, wo alle parallelen und zur Linse senkrecht einfallenden Lichtstrahlen sich sammeln. Der Abstand von dem Mittelpunkt der Linse zu einem Brennpunkt heißt die Brennweite. Für dicke Linsen und Linsensysteme muss einen weiteren Begriff eingeführt werden. Die doppelte Brechung lassen sich durch Hauptebenen beschreiben. Zwischen den Hauptebenen können die Lichtstrahlen als parallel verlaufend gedacht. Diese Begriffe vereinfachen Berechnungen mit Lichtstrahlen.

Es existieren mehrere Verfahren, um die Brennweite von Linsen und Linsensysteme zu bestimmen. Bei einer Einzellinse kann die Brennweite  $f$  so ausgedrückt werden:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (1)$$

Wobei  $g$  und  $b$  die Gegenstandsweite bzw. Bildweite, die Abstände von jeweils dem Gegenstand und Bild zur Linsenmitte, sind. Für ein Linsensystem, das aus zwei Linsen besteht, gilt eine andere Formel, nämlich:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (2)$$

Wobei  $f_1$  und  $f_2$  die Brennweiten der einzelnen Linsen und  $d$  der Abstand dazwischen sind.

Aber wenn die Hauptebenen nicht bekannt sind, können  $g$  und  $b$  nicht direkt bestimmt werden. In diesem Fall hilft das Bessel-Verfahren, wobei die Brennweite mit:

$$f = \frac{s^2 - e^2}{4s} \quad (3)$$

bestimmt werden kann, wobei  $s$  der Abstand zwischen dem Gegenstand und Bild, und  $e$  die Differenz der Positionen, wo Abbildungen möglich sind.

Mit einem anderen Verfahren, lassen sich die Brennweite und die Hauptebenen gleichzeitig bestimmen, dieses Verfahren heißt das Abbe-Verfahren. Hier zusätzlich zu die Werte der scheinbare Gegenstandsweite und der scheinbare Bildweite wird der Abbildungsmaßstab verwendet:

$$\beta = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$

Wobei  $B$  und  $G$  jeweils die Größen des Bildes und Gegenstands sind. Mit direkten Messungen von  $B$ ,  $G$ ,  $g'$  ( die scheinbare Gegenstandsweite) und  $b'$  (die scheinbare Bildweite) kann mit den Gleichungen:

$$\begin{aligned} g' &= (1 + \frac{1}{\beta}) \cdot f_1 + h_1 \\ b' &= (1 + \beta) \cdot f_2 + h_2 \end{aligned} \quad (4)$$

die  $f$  und  $h$  bestimmt werden, da  $f$  die Steigungen, und  $h$  den Achsenabschnitte entsprechen.

## 2 Aufbau



Abbildung 1: Versuchsaufbau

Zu diesem Versuch wurden ein Schirm, ein Dia, mehrere Linsen, eine Linsenhalterung, ein Spiegel, eine Lichtquelle und eine optische Bank benutzt.

## 3 Durchführung

Damit das Licht parallel zur optischen Bank verläuft, wurde zuerst eine Kollimationslinse direkt vor der Lichtquelle eingesetzt. Der Schirm wurde auf der anderen Seite der Bank fixiert, sodass eine relativ scharfe Abbildung zu sehen war. Die Abbildung wurde dann mit den Drehknöpfen auf der Lichtquelle zentriert.

Für den ersten Versuchsteil wurde das Dia hinter der Kollimationslinse eingesetzt und durch das Verschieben der Linsenhalterung wurde das Dia seitenverkehrt und scharf auf den Schirm abgebildet. Die Positionen der Linsenhalterung, Dia und Schirm wurden mithilfe der Skala auf der optischen Bank gemessen. Dies wurde für fünf unterschiedliche Positionen des Schirms wiederholt, und der gesamte Prozess wurde für drei verschiedene Linse und Linsensysteme wiederholt.

Für den zweiten Versuchsteil wurden die in dem ersten Teil gemessenen Daten verwendet, deswegen wurde keine neuen Messungen durchgeführt.

Bei der dritten Teil wurde das Abbe-Verfahren benutzt, um die Brennweite und Lage der Hauptebenen zu bestimmen. Für diesen Teil wurde ein Linsensystem mit einer  $f = 80\text{mm}$  Sammellinse und einer  $f = -200\text{mm}$  Zerstreuungslinse benutzt. Ähnlich wie in dem ersten Teil, wurde die Linsenhalterung so verschoben, sodass eine scharfe Abbildung der Dia auf dem

Schirm entstanden war. Die Positionen des Schirms und der Linsenhalterung wurden dann gemessen. Mit einem Lineal wurde der Durchmesser von einer der auf den Schirm abgebildeten Kreise gemessen. Diese Schritte wurden dann für 10 unterschiedliche Positionen des Schirms wiederholt und der gesamte Prozess für umgekehrte Reihenfolge der Linsen wiederholt.

In dem letzten Versuchsteil wurde die Brennweite mithilfe des Autokollimationsverfahrens bestimmt. Dafür wurde der Spiegel nah hinter der Linse gesetzt und justiert, sodass das reflektierte Bild ein bisschen oben versetzt entsteht. Die Linse und Spiegel wurden zusammen verschoben, sodass das Dia auf den Diarahmen scharf abgebildet wird. Die Lage der Linse wurde dann gemessen. Dieser Prozess wurde für verschiedene Linse, Linsensysteme und Lichtfarben wiederholt.

## 4 Auswertung und Fehleranalyse

### 4.1 1. Versuchsteil: Abbildungen mit Einzellinsen und Linsensystemen

Die Werte für  $\frac{1}{b}$  wurden gegen  $\frac{1}{g}$  aufgetragen. Für jede Messreihe wurde auch lineare Regressionen durchgeführt, aber nur, um die Linearität der Zusammenhang zu veranschaulichen (Siehe Abbildung 1). Die theoretische Verläufe wurden auch mit Formel (2) und (1) berechnet (Siehe Abbildung 2).

#### 4.1.1 Rechenweg

Zuerst wurde die Unsicherheiten von  $g$  und  $b$  mit der vereinfachten gauß'schen Fehlerfortpflanzung für Summe berechnet. Zum Beispiel:

$$\Delta g = \sqrt{(\Delta x_{\text{Dia}})^2 + (\Delta x_{\text{Groß}})^2}$$

, da  $g = x_{\text{Groß}} - x_{\text{Dia}}$ , wobei  $x_{\text{Dia}}$  die Position des Dias und  $x_{\text{Groß}}$  die Position der Linse, wo eine vergrößernde Abbildung möglich ist.

Die Unsicherheiten der einzelnen Punkten auf der Graph wurde mit der vereinfachten gaußschen Fehlerfortpflanzung für Produkte und Quotienten bestimmt.

$$\Delta \left( \frac{1}{g} \right) = \frac{\Delta g}{g} \cdot \frac{1}{g}$$

ebenfalls für die  $\frac{1}{b}$  Werte.

Für die theoretischen Verläufe wurde Gleichung (1) nach  $\frac{1}{b}$  umgeformt und die gesamten Brennweiten mit Gleichung (2) Berechnet.

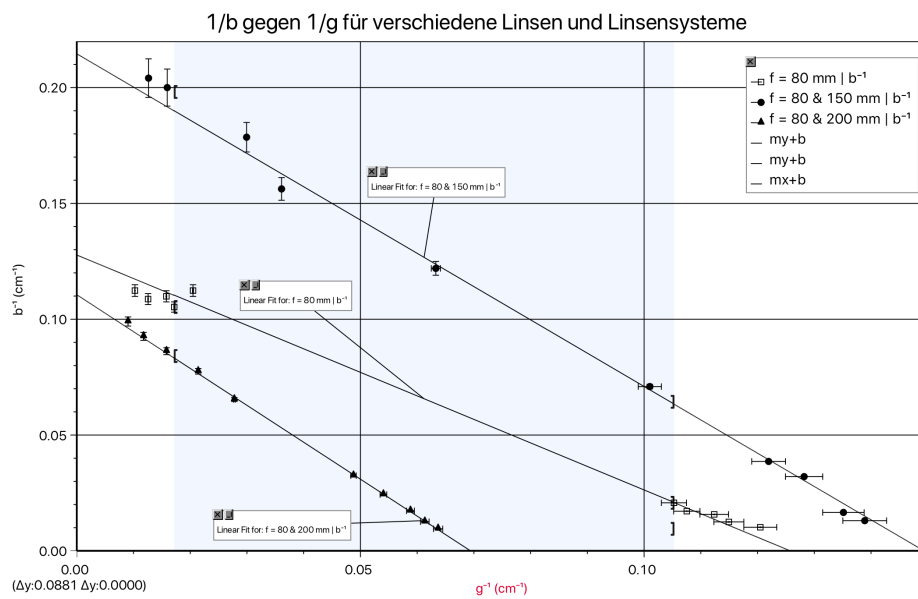


Abbildung 2:  $\frac{1}{b}$  gegen  $\frac{1}{g}$ .

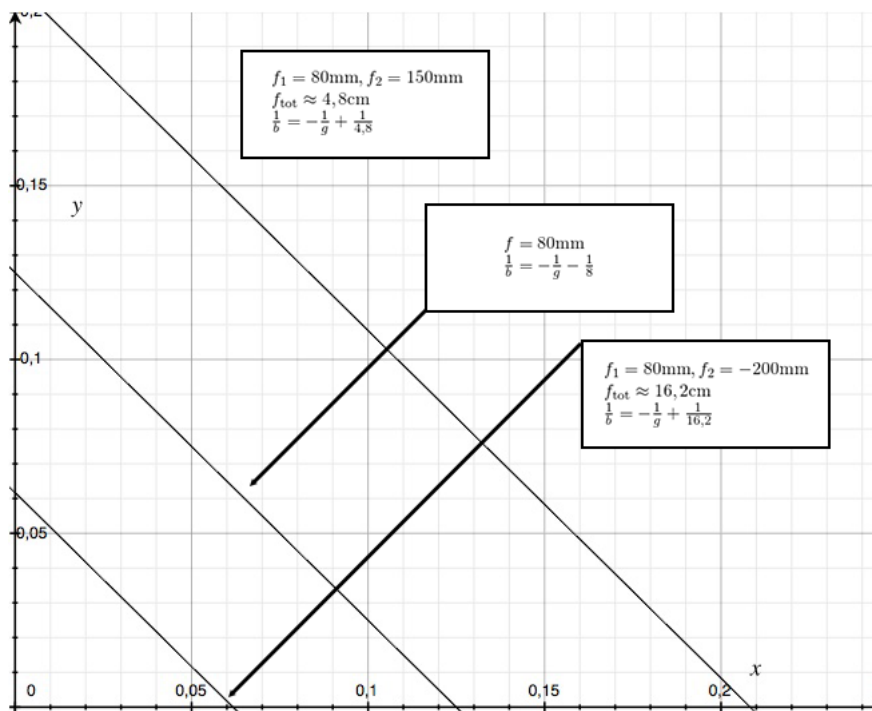


Abbildung 3: Die aus der Abbildungsgleichung Erwarteten Linearen Verläufe

## 4.2 2. Versuchsteil: Das Bessel-Verfahren

Gemäß Gleichung (3) wurden die Werte für  $s$  und  $e$  und deren Unsicherheiten berechnet (Siehe Anhang 1). Die Unsicherheiten wurde wie in dem ersten Versuchsteil mit der gauß'sche Fehlerfortpflanzung für Summe berechnet. Danach wurden die einzelne Werte für  $f$  für jede Messreihe berechnet (Siehe Anhang 2).

Die Unsicherheiten der  $f$  Werte wurden mit der gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet. Mit

$$f = \frac{s^2 - e^2}{4s}$$

sind:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{s^2 + e^2}{4s^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial e} = -\frac{e}{2s}$$

Die Unsicherheit von  $f$  ist deshalb:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial s} \Delta s\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial e} \Delta e\right)^2}$$

Die Mittelwerte der  $f$  für jede Linse/Linsensystem und deren Standardunsicherheiten sind dann:

Brennweite mm	$f$ cm	$u_f$ cm
80	7,93	0,06
80 & 150	5,63	0,03
80 & -200	11,59	0,02

Tabelle 1: Die Berechneten  $f$  für die Linsen und Linsensysteme

### 4.2.1 Rechenweg

Zur Bestimmung der Standardunsicherheiten wurden zuerst die Standardabweichung berechnet mit der folgenden Formel:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Da die  $f$  Werte Mittelwerte sind wurde diese Standardabweichung mit einem Faktor  $\sqrt{n}$  geteilt. Die Unsicherheit ist deshalb:

$$u_x = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

### 4.3 3. Versuchsteil: Das Abbe-Verfahren

Zuerst wurden die Werte für  $\beta$  ausgerechnet (Siehe Tabelle 1).

$g'$	$b'$	$\beta$	$\Delta\beta$
cm	cm		
18,5	47,9	3,33	0,05
20,8	28,6	1,71	0,05
19,7	25,0	2,19	0,05
17,8	47,2	3,71	0,05
15,3	74,7	4,71	0,14
16,1	90,3	6,71	0,14
16,0	101,8	7,86	0,14
17,3	54,6	3,79	0,07
18,3	41,7	2,71	0,07
18,4	39,0	2,57	0,14

Tabelle 2: Die gemessenen Werte für  $g'$ ,  $b'$  und  $\beta$  für ein Linsensystem mit  $f_1 = 80mm$  und  $f_2 = -200mm$

$g'$	$b'$	$\beta$	$\Delta\beta$
cm	cm		
13,5	58,6	2,86	0,14
13,9	51,5	3,21	0,07
14,6	44,3	2,64	0,07
21,4	25,3	1,00	0,07
12,4	93,6	6,86	0,14
12,4	84,5	6,14	0,14
12,0	108,6	8,14	0,14
12,9	76,0	8,00	0,14
12,8	68,6	4,64	0,07
14,3	48,6	3,00	0,07

Tabelle 3: Die gemessenen Werte für  $g'$ ,  $b'$  und  $\beta$  für ein Linsensystem mit  $f_1 = -200mm$  und  $f_2 = 80mm$

Danach wurden  $g'$  und  $b'$  jeweils gegen  $(1 + \frac{1}{\beta})$  und  $(1 + \beta)$  aufgetragen (Siehe Anhang 3, 4). Dadurch lassen sich die Werte für  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $h_1$  und  $h_2$  für beide Linsensysteme bestimmen. Das System mit zuerst einer Linse mit  $f = 80mm$  und danach einer mit  $f = -200mm$  hat die folgenden Werte:

$$f_1 = 11cm \quad f_2 = 12cm$$

$$h_1 = 3cm \quad h_2 = -8cm$$

Und für das System mit umgekehrter Reihenfolge der Linsen:

$$\begin{aligned}f_1 &= 3\text{cm} & f_2 &= 10\text{cm} \\h_1 &= 10\text{cm} & h_2 &= 18\text{cm}\end{aligned}$$

#### 4.4 4. Versuchsteil: Autokollimationsverfahren und Dispersion

Der Abstand zwischen der Linse und dem Objekt, wobei eine Scharfe Abbildung möglich war, wurde für verschiedene Linsen und Linsensysteme und danach mit einer Linse mit verschiedenen Lichtfarben berechnet. Dieser Abstand entspricht dann der Brennweite.

Brennweite der einzelnen Linsen	$f$	$\Delta f$
mm	cm	cm
80	7,6	0,3
150	24,6	0,3
80 & 150	4,6	0,3
80 & -200	12,2	0,3
-200 & 80	8,0	0,3

Tabelle 4: Die mit dem Autokollimationsverfahren bestimmten  $f$  für verschiedene Linsen und Linsensysteme.

Lichtfarbe	$f$	$\Delta f$
	cm	cm
Weiß	33,6	0,3
Rot	33,5	0,3
Blau	32,8	0,3

Tabelle 5: Die mit dem Autokollimationsverfahren bestimmten  $f$  für verschiedene Lichtfarben

Zur Bestimmung der Unsicherheiten wurde die vereinfachte Fehlerfortpflanzung für Summe verwendet. Deswegen ist  $\Delta f$ :

$$\sqrt{2 \cdot (0,2\text{cm})^2} \approx 0,28$$

#### 4.5 Bestimmung der theoretischen Brennweiten

Zur Bestimmung der theoretische Brennweiten der Verschiedene Linsensysteme wurde die folgende Formel benutzt (Formel 2):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$



Wobei  $d$  der Abstand zwischen den Linsen ist.

Dadurch lassen sich die Gesamt-Brennweiten der Linsensysteme bestimmen.

Brennweite der einzelnen Linsen	$f_{\text{tot}}$
mm	mm
80 & 150	48
80 & -200	162
-200 & 80	162

Tabelle 6: Die theoretische Gesamt-Brennweiten der in dem Versuch verwendeten Linsensysteme

## 5 Diskussion der Ergebnisse

### 5.1 Erster Versuchsteil

(Siehe Abbildung 2) Es kann leicht von den Gleichungen gesehen werden, dass die linearen Regressionen theoretisch dieselbe Steigung haben müssen. Die lineare Regression für  $f = 80\text{mm}$  hat aber eine bemerkbare schwächere Steigung als die anderen zwei Kurven.

Der Achsenschnitt von zwei linearen Regressionen stimmen mit den theoretischen Verläufe überein. Für das Linsensystem mit der Zerstreuungslinse gab es eine Abweichung von  $0,05\text{ cm}$  zwischen den extrapolierten und theoretischen Achsenabschnitte, was fast 50% des Wertes selbst beträgt. Möglicher Fehlerquellen werden später diskutiert.

### 5.2 Zweiter Versuchsteil: Das Bessel Verfahren

Die mit dem Bessel-Verfahren bestimmte Brennweiten der Linsen und Linsensysteme sind:

Brennweite mm	$f$ cm	$u_f$ cm
80	7,93	0,06
80 & 150	5,63	0,03
80 & -200	11,59	0,02

Tabelle 7: Die mit dem Bessel-Verfahren berechneten  $f$  für verschiedene Linsen und Linsensysteme

Um zu sehen, ob die gemessenen Werte und die theoretischen Werte miteinander verträglich sind wurde ihre Differenzen in Einheiten der Standardunsicherheit berechnet. Mit der folgenden Formel:

$$t = \frac{f - f_{\text{theo}}}{u_f}$$

sind:

$$t_{80 \text{ mm}} = 1,17$$

$$t_{80 \text{ \& } 150 \text{ mm}} = 11,86$$

$$t_{80 \text{ \& } 200 \text{ mm}} = 92,20$$

Da die Werte für  $t_{80 \text{ \& } 150 \text{ mm}}$  und  $t_{80 \text{ \& } 200 \text{ mm}}$  viel größer als 2 sind, sind diese Ergebnisse mit den theoretischen Werten nicht verträglich. Aber das impliziert nicht, dass diese Werte nicht plausibel sind. Die theoretischen Werte wurden gemäß den gegebenen Abmessungen der Linsenhalterung berechnet. Es gab aber auch eine andere Berechnung von einer anderen Person, die besagt, dass die theoretischen Brennweiten  $f_{80 \text{ \& } 150 \text{ mm}}$  und  $f_{80 \text{ \& } -200 \text{ mm}}$  jeweils ungefähr 5,2 cm und 11 cm sind. Diese theoretischen Werte sind viel näher an den gemessenen Werten (aber sie sind jedoch miteinander nicht verträglich).

### 5.3 Dritter Versuchsteil: Das Abbe-Verfahren

Der für diesen Versuchsteil ausgewählte Referenzpunkt war die linke Seite der Linsenhalterung.  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $h_1$  und  $h_2$  sind die Lagen der Brennpunkte und Hauptebenen relativ zu diesem Punkt. Die Brennweite und Abstand zwischen den Hauptebenen muss deshalb zweimal von jeweils  $f_1 - f_2$  und  $h_1 - h_2$  sein. Diese Werte müssen für beide Messreihen übereinstimmen. Die gemessenen Brennweite und Abstände zwischen den Hauptebenen sind:

$$f = 0,5 \text{ cm und } 3,5 \text{ cm}$$

$$h = 5,5 \text{ cm und } 4 \text{ cm}$$

Die Werte stimmen miteinander und mit der theoretischen Brennweite nicht überein. Es kann auch graphisch gesehen werden (Anhang 3,4) dass die Streuung der Punkte auch sehr groß ist. Diese Ergebnisse sind deshalb von keiner großen Bedeutung.

### 5.4 Vierter Versuchsteil: Das Autokollimationsverfahren

Die mit dem Autokollimationsverfahren bestimmten Brennweiten sind in Tabelle 8 zu sehen.

Brennweite der einzelnen Linsen	$f$	$\Delta f$
mm	cm	cm
80	7,6	0,3
150	24,6	0,3
80 & 150	4,6	0,3
80 & -200	12,2	0,3
-200 & 80	8,0	0,3

Tabelle 8: Die mit dem Autokollimationsverfahren bestimmten  $f$  für verschiedene Linsen und Linsensysteme.

Die Differenzen zwischen den gemessenen Werten und den theoretischen Werten wurden erneut berechnet:

$$t_{80 \text{ mm}} = 1,33$$

$$t_{150 \text{ mm}} = 32$$

$$t_{80 \text{ \& } 150 \text{ mm}} = 3,33$$

$$t_{80 \text{ \& } -200 \text{ mm}} = 13,33$$

$$t_{-200 \text{ \& } 80 \text{ mm}} = 27,33$$

Nur für  $f = 80 \text{ mm}$  waren die gemessenen und theoretischen Werte miteinander verträglich. Die anderen Ergebnisse sind absurd.

## 5.5 systematischen und statistischen Fehler

## 6 Anhang

Brennweite mm	Messreihe	$s$ cm	$e$ cm
80	1	57,7	39,3
	2	72,4	54,4
	3	88,7	70,8
	4	106,4	89,2
	5	67,7	48,9
80 & 150	1	67,7	55,3
	2	83,9	71,8
	3	34,1	19,5
	4	24,0	5,9
	5	39,0	25,6
80 & -200	1	95,7	68,6
	2	74,8	46,2
	3	120,7	94,9
	4	59,6	28,2
	5	51,3	15,5

Tabelle 9: Die Werte für  $s$  und  $e$  für alle Messreihen

Brennweite mm	Messreihe	$s$ cm	$e$ cm
80	1	7,73	0,14
	2	7,88	0,15
	3	8,05	0,16
	4	7,90	0,17
	5	8,09	0,15
80 & 150	1	5,63	0,17
	2	5,61	0,17
	3	5,73	0,12
	4	5,64	0,08
	5	5,55	0,14
80 & -200	1	11,63	0,15
	2	11,56	0,13
	3	11,52	0,16
	4	11,56	0,11
	5	51,3	0,09

Tabelle 10: Berechnete Werte für  $f$  und deren Unsicherheiten

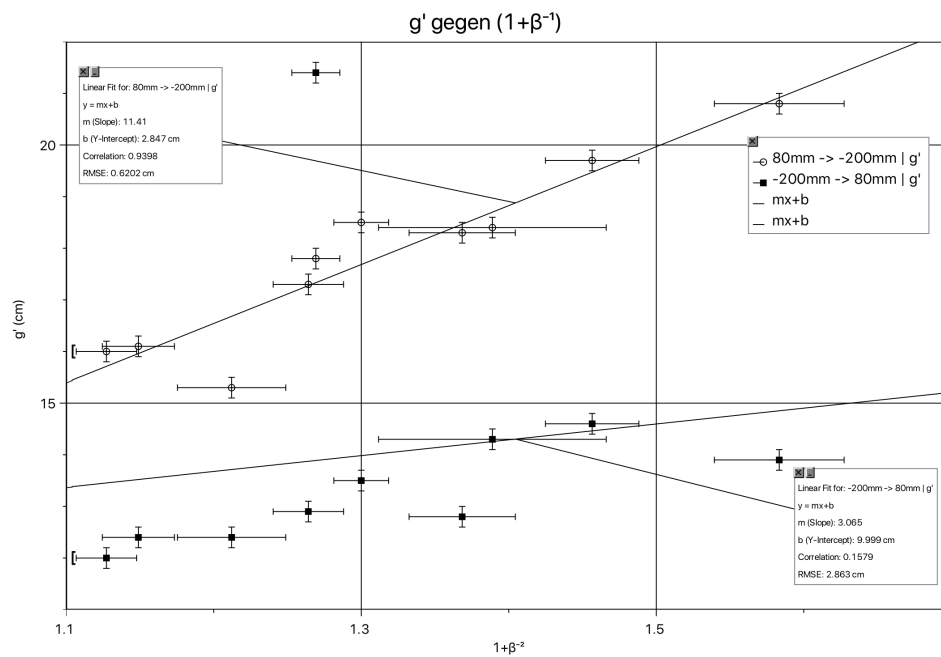


Abbildung 4: Graph von  $g'$  gegen  $1 + \frac{1}{\beta}$  für beide Linsensysteme

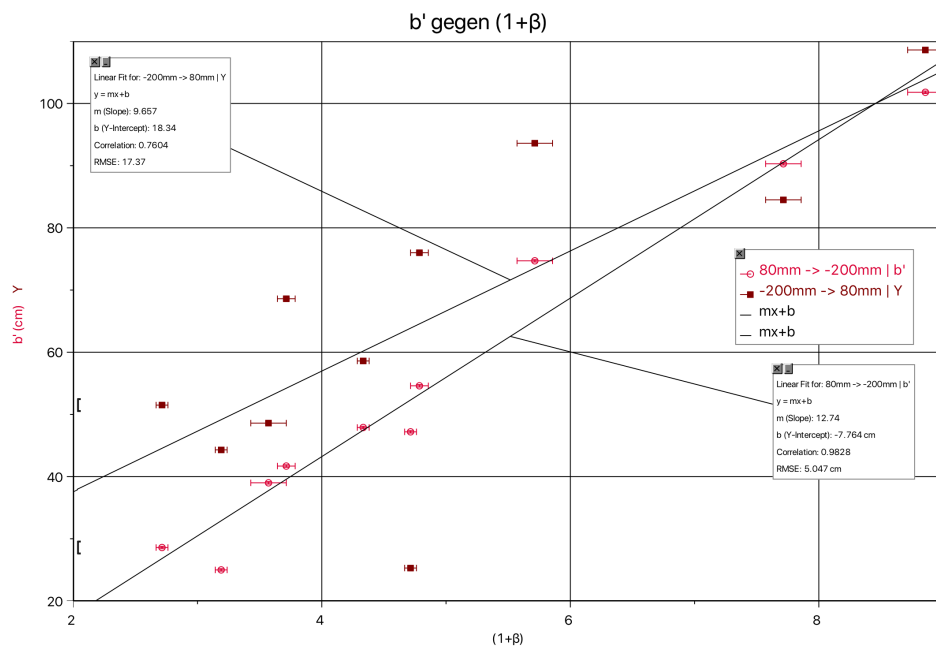


Abbildung 5: Graph von  $b'$  gegen  $1 + \beta$  für beide Linsensysteme