

Versuch 22: Kreiselpräzession

(durchgeführt am 21.09.2018 bei Adrian Hauber)

Ye Joon Kim, Marouan Zouari

23. September 2018

1 Einführung

Ein schräger Kreisel, auf den eine Gravitationskraft wirkt, führt eine Präzession aus, da das auf den Kreisel wirkenden Drehmoment verursacht eine Änderung des Drehmoments senkrecht zur Kraft und Figurenachse.

Das Drehmoment ist definiert als die Zeitliche Änderung des Drehimpulses.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (1)$$

und das Drehimpuls lässt auch sich in diesem Fall schreiben als:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{G} \quad (2)$$

Mit Geometrie kann dL in Terme von $d\varphi$ geschrieben werden (Siehe Abbildung). Da die Präzessionsgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ ist, kann ω_P geschrieben werden als:

$$\omega_P = \frac{dL}{dt \cdot L \cdot \sin \theta}$$

und deshalb:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \omega_P \vec{r} \times \vec{L}$$

und mit Gleichung (1) und (2):

$$\vec{r} \times \vec{G} = \omega_P \vec{r} \times \vec{L}$$

Angenommen, dass die Rotationsgeschwindigkeit, ω_F , viel größer ist als die Präzessionsgeschwindigkeit, ω_P ist, können \vec{L} zu $I_A \vec{\omega}_A$ und ω_A zu ω_F angenähert werden. Wobei \vec{L} die Drehmoment, I_A die Trägheitsmoment entlang der Figurenachse und ω_A der Anteil der Gesamt-Winkelgeschwindigkeit entlang der Figurenachse sind. Wenn man nur die Beträge betrachtet, kann die obige Formel zu

$$I_A = \frac{rG}{\omega_F \omega_P} \quad (3)$$

umgeformt werden.

2 Ziel des Versuchs

Das Ziel dieses Versuchs ist es, das Trägheitsmoment des Kreisels entlang der Figurenachse durch die Messung der Präzessions- und Rotationsgeschwindigkeiten zu bestimmen.

3 Aufbau

Zur Bestimmung des Trägheitsmoments wurde ein Kiesel mit einer verschiebbaren Achse benutzt sowie zwei Stoppuhren, die die Präzessions- und Rotationsgeschwindigkeiten messen.

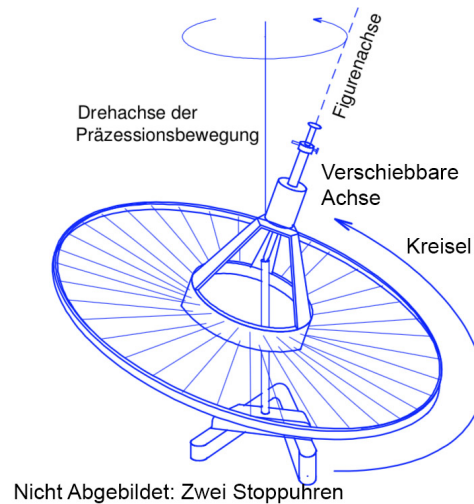


Abbildung 1: Aufbau zum Versuch ("Versuchsanleitungen")

4 Durchführung

Zur Bestimmung des Einfluss der Reibung auf die Rotationsgeschwindigkeit wurde die Zeit von 5 Drehungen je 10 Sekunden gemessen und verglichen.

Der Kiesel wurde von Hand gegen den Uhrzeigersinn gedreht und auf die Halterung gestellt. Die Achse wurde dann vorsichtig um 20 bis 30 Grad gekippt, damit keine große Nutation entsteht. Mit der Kennzeichnung konnte die Anzahl Drehungen gezählt werden. Es wurde die Zeitdauer für 29 Rotationen gemessen. Je nach dem, wie langsam die Präzession waren, wurde die Zeitdauer für entweder eine oder zwei Präzessionen. Die Achse wurde dann

um eine auf der Achse gekennzeichnete Einheit verschoben und der gesamte Prozess wurde dann wiederholt. Der Prozess wurde wiederholt für alle Einheiten auf der Achse. Zuletzt wurde dann die Länge einer Einheit mit einem Lineal gemessen.

5 Auswertung und Fehleranalyse

Zur Bestimmung des Trägheitsmoments entlang der Figurenachse wird die oben hergeleitete Formel benutzt, nämlich:

$$I_A = \frac{rG}{\omega_F \omega_P}$$

Zuerst wurden die Werte für ω_F und ω_P für die verschiedene x und Messreihen bestimmt (Siehe Anhang 1).

5.0.1 Rechenweg

Für die Bestimmung von ω wurde die folgende Formel benutzt:

$$\omega = \frac{T_{\text{Tot}}}{n} \frac{1}{2\pi}$$

Wobei T_{Tot} die gesamte Zeitdauer der Messung, und n die Anzahl Drehungen war. Für den Fehler wurde der Messfehler durch sqrtn geteilt, da es handelt sich um einen Mittelwert.

Um den Offset zwischen x , der Skala auf der Kreiselachse, und r , der Abstand zwischen den Schwerpunkt und Unterstützungspunkt zu bestimmen wurde $\frac{\omega_F \omega_P}{G}$ gegen x aufgetragen. Der x-Achsenabschnitt ist dann der Offset zwischen x und r , da nach Gleichung (3) sollen $\frac{\omega_F \omega_P}{G}$ proportional zu r sein und die Fit-Kurve den Nullpunkt schneiden. Die Steigung entspricht dann $-\frac{1}{I_A}$. Da Gleichung (3) lässt sich umformen als:

$$\frac{\omega_F \omega_P}{G} = \frac{1}{I_A} r$$

. Es ist hier zu beachten, dass die Steigung negativ ist, da die Werte für x und r in andere Richtungen gemessen werden. Die Berechnung wurde mit einem Excel-Dokument und die Darstellung mit Logger-Pro gemacht (Siehe Abbildung 2).

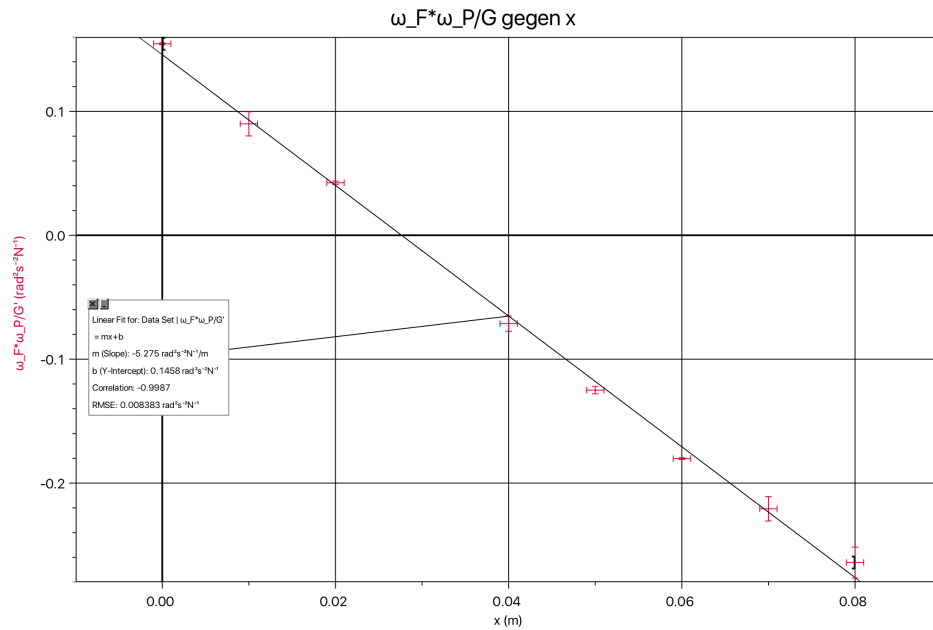


Abbildung 2: Eine Graph von $\frac{\omega_F \omega_P}{G}$ als Funktion von x

5.0.2 Rechenweg

Zuerst wurden die Werte für $\frac{\omega_F \omega_P}{G}$ für alle Messreihen berechnet. Die Fehler für $\frac{\omega_F \omega_P}{G}$ wurden mit der Formel für die Standardabweichung bestimmt, nämlich:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Das Trägheitsmoment entlang der Figurenachse ist deshalb:

$$I_A = (0,190 \pm 0,004) \text{kgm}^2$$

Die Unsicherheit wurde mit der Vereinfachten Formel für Produkte und Quotienten berechnet.

6 Diskussion der Ergebnisse

Der berechnete Wert für I_A ist:

$$I_A = (0,190 \pm 0,004) \text{kgm}^2$$

Da es keinen Literatur- oder direkt gemessenen Wert für das Trägheitsmoment des Kreisels gibt, kann keinen direkten Vergleich gemacht werden. Trotzdem kann ein Maximalwert berechnet werden, indem man den Idealfall betrachtet. Für einen idealen Hohlzylinder, ist sein Trägheitsmoment $I = mr^2$. Deswegen ist das maximale theoretische Trägheitsmoment des Kreisels $0,32 \text{ kgm}^2$, angenommen, dass der Durchmesser des Kreisels nicht größer als 0,5 Meter war. In der Realität ist das Trägheitsmoment viel kleiner als dieser Wert, da ein Kresel hat auch Masse innerhalb des Radius. Da der gemessene Wert kleiner als dieser Wert ist, kann es gesagt werden, dass der gemessene Wert vernünftig ist. Außerdem beträgt seine relative Unsicherheit ungefähr 0,02, was nicht schlecht ist für so ein grober Versuch. Das Ergebnis ist deshalb plausibel und kann als Beweis für Gleichung (3) dienen.

7 Literatur

8 Anhang

(Unsicherheiten der x sind 0,001m)

x m	Messreihe	ω_F rad s ⁻¹	u_{ω_F} rad s ⁻¹	ω_P rad s ⁻¹	u_{ω_P} rad s ⁻¹
0	1	0,46	0,06	10,8	0,2
	2	0,50	0,06	9,9	0,2
	3	0,47	0,06	10,5	0,2
0,01	1	0,56	0,06	17,3	0,3
	2	0,69	0,06	11,8	0,3
	3	0,51	0,06	15,7	0,3
0,02	1	0,48	0,06	36,0	0,3
	2	0,48	0,06	38,4	0,3
	3	0,46	0,06	40,1	0,3
0,04	1	0,50	0,06	23,1	0,3
	2	0,58	0,06	18,8	0,3
	3	0,52	0,06	18,7	0,3
0,05	1	0,47	0,06	13,2	0,2
	2	0,43	0,06	13,9	0,2
	3	0,42	0,06	14,8	0,2
0,06	1	0,44	0,06	9,7	0,2
	2	0,50	0,06	8,5	0,2
	3	0,49	0,05	9,6	0,2
0,07	1	0,43	0,06	8,3	0,3
	2	0,50	0,06	6,6	0,3
	3	0,48	0,06	7,3	0,3
0,08	1	0,47	0,06	6,2	0,3
	2	0,50	0,06	6,0	0,3
	3	0,53	0,06	5,2	0,3

Tabelle 1: Die Berechnete Winkelgeschwindigkeiten für Präzession und Rotation bei verschiedene x