

Physiklabor für Anfänger*innen
Ferienpraktikum im Sommersemester 2018

Versuch 19: Gekoppelte Pendel

(durchgeführt am 19.09.2018 bei Adrian Hauber)

Ye Joon Kim, Marouan Zouari

26. September 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Ziel des Versuchs	2
3	Aufbau	3
4	Durchführung	3
5	Auswertung und Fehleranalyse	4
5.0.1	Berechnung	4
5.1	Berechnung der theoretischen Schwebungsdauer	5
5.2	Bestimmung der Kopplungsgrade	5
6	Diskussion der Ergebnisse	7
6.1	Systematische und statistische Fehler	7
6.2	Diskussion über die gefundene Werten	7
6.3	Verbesserungsvorschläge	8
7	Literatur und Bildquellen	8
8	Anhang	8

1 Einleitung

Die Bewegung gekoppelter Pendel kann dadurch beschrieben werden, indem man deren Bewegungsgleichungen aufstellt. Es wirken insgesamt zwei Kräfte auf ein Pendel, die Gravitationskraft $F_G = mg \sin(\varphi)$ (Zum Pendel senkrechte Komponente) und die Federkraft $F_D = D(x_1 - x_2)$. Mit $M = I\ddot{\varphi}$ und $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$ lauten beide Bewegungsgleichungen:

$$I\ddot{\varphi}_1 = -mg \sin(\varphi_1)L - D(x_1 - x_2)l$$

$$I\ddot{\varphi}_2 = -mg \sin(\varphi_2)L - D(x_2 - x_1)l$$

Mit $x_i = l \sin \varphi_i$ und der Kleinwinkelnäherung sind die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{cases} I\ddot{\varphi}_1 = -mg\varphi_1L - Dl^2(\varphi_1 - \varphi_2) \\ I\ddot{\varphi}_2 = -mg\varphi_2L - Dl^2(\varphi_2 - \varphi_1) \end{cases} \quad (1)$$

Diese gekoppelte Differenzialgleichungen lassen sich mit einem Variabelaustausch lösen. Nämlich mit $y_1 = \varphi_1 + \varphi_2$ und $y_2 = \varphi_1 - \varphi_2$. Das liefert:

$$\ddot{y}_1 = \frac{mgL}{I}y_1$$

$$\ddot{y}_2 = \frac{mgL - 2Dl^2}{I}y_2$$

Die Pendel wurden als Mathematische Pendel angenähert. Für eine Punktmasse ist ihr Trägheitsmoment $I = mr^2$, wobei r der Abstand von der Rotationsachse zu der Masse ist (In diesem Fall L). Eingesetzt in die obigen Formeln liefert:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = \frac{g}{L}y_1 \\ \ddot{y}_2 = (\frac{g}{L} - \frac{2Dl^2}{mL^2})y_2 \end{cases} \quad (2)$$

Beide stellen Gleichungen von Harmonischen Oszillatoren mit den Kreisfrequenzen:

$$\omega_1^2 = \frac{g}{L}$$

$$\omega_2^2 = \frac{g}{L} - \frac{2Dl^2}{mL^2}$$

dar. Diese zwei Kreisfrequenzen entsprechen gleich- und gegensinnigen Schwingungen.

2 Ziel des Versuchs

Das Ziel des Versuchs ist es, die Schwingungsdauer bei gleich- und gegensinnigen Schwingungen sowie die Schwebungsdauer bei verschiedenen Koppungsgrade zu bestimmen.

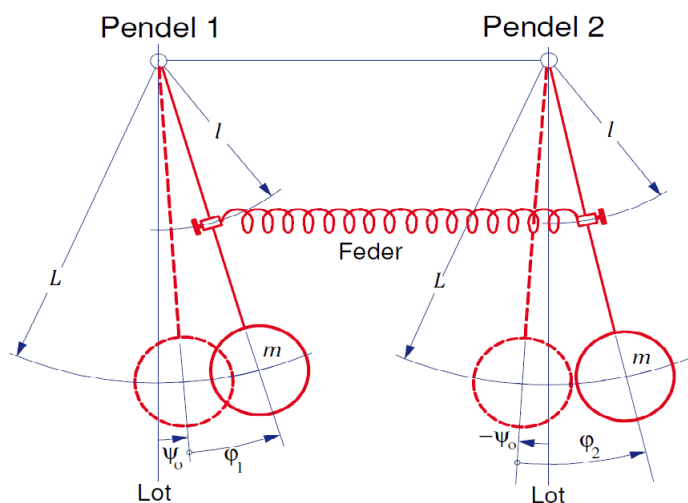


Abbildung 1: Gekoppelte Pendel. („Versuchsanleitungen“)

3 Aufbau

Für den Versuch wurden zwei mit einer Feder gebundene Pendel benutzt. Beide Seiten der Feder konnten entlang den Pendel verschoben werden, um den Kopplungsgrad zu ändern. (Siehe Abb.1)

4 Durchführung

Zuerst wurde es sichergestellt, ob die Schwingungsdauer von beiden Pendel die gleiche waren. Die Pendel wurden entkoppelt und die Dauer für vier Schwingungen für beide Pendel wurde mit der Stoppuhr gemessen. Die Positionen der Gewichte an den Pendeln wurden nicht geändert, da es gab zwischen beiden Zeitmessungen fast keinen Unterschied (0,06 Sekunde Abweichung).

Danach wurden die beiden Pendel durch die Feder gekoppelt, und in eine Richtung um 4 cm von ihren Ruhelagen mit zwei von den drei verstellbaren Füße verschoben, um die Schwingungsdauer bei gleichsinniger Schwingung zu messen. Die Pendel wurden gleichzeitig losgelassen, indem man die Füße dreht. Die Zeitmessung wurde angefangen, als einer der Pendel schon eine Schwingung gemacht und ihren Umkehrpunkt erreicht hatte. Es wurde die Zeit für 20 Schwingungen gemessen.

Die Pendel wurden dann um 4cm in andere Richtungen verschoben. Die Zeitmessungen wurden erneut wie oben durchgeführt.

Für die Messung der Schwebungsdauer wurde nur eine der Pendel um 4cm nach innen verschoben. Die Zeitmessung wurde angefangen, sobald die verschobene Pendel losgelassen wurde. Die Zeit wurde bis dem zweiten Stillstand der anderen Pendel (die ursprünglich an der Ruhelage war) gemessen. Der Prozesse wurde fünfmal wiederholt.

Die Lage der Feder an den Pendel wurde dann verschoben, um einen unterschiedlichen Kopplungsgrad einzustellen. Es wurde sichergestellt, dass beide Ende der Feder gleich hoch waren. Die Schwingungsdauer und Schwebungsdauer wurden wie in den letzten zwei Abschnitte erklärt gemessen. Das wurde für vier verschiedene Kopplungsgrade wiederholt.

5 Auswertung und Fehleranalyse

Die Mittelwerte der Schwingungsdauer bei gleichsinnigen Schwingungen, T_A , bei gegensinnigen Schwingungen T_B , und der Schwebungsdauer T_S für alle Kopplungsgrade und deren Unsicherheiten sind in Tabelle 1 zu sehen.

l m	T_A s	u_{T_A} s	T_B s	u_{T_B} s	T_S s	u_{T_S} s
0,705	1,63	0,02	1,874	0,009	25,4	0,3
0,556	1,674	0,003	1,86	0,01	33,3	0,3
0,455	1,74	0,03	1,858	0,008	56,1	0,3
0,855	1,538	0,002	1,86	0,001	18,0	0,2

Tabelle 1: Werte für T_A , T_B und T_S bei verschiedenen Kopplungsgrade und deren Unsicherheiten.

5.0.1 Berechnung

Um die mittleren Werte für T_A und T_B zu bestimmen wurden die drei Gesamt-Schwingungsdauern summiert und dann durch 60, die totale Anzahl Schwingungen, geteilt. Für deren Unsicherheiten wurde die folgende Formel benutzt:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

Wobei s_x die Streuung der Mittelwerte ist. Die Streuung der Mittelwerte wurde mit der Formel für Standardunsicherheiten bestimmt, nämlich:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Die Unsicherheiten der Längen betragen 0,001 m.

5.1 Berechnung der theoretischen Schwebungsdauer

Mit den Werten für T_A und T_B kann der theoretische Wert für T_S berechnet werden, nämlich:

$$\omega_S = \frac{1}{2}(\omega_A - \omega_B)$$

Mit der Substitution $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und einer Umformung lässt sich T_S in Terme von T_A und T_B schreiben:

$$T_S = 2 \frac{T_A T_B}{T_B - T_A} \quad (3)$$

Die berechneten T_S sind:

l	T_S	u_{T_S}
m	s	s
0,705	24,6	2,5
0,556	33,4	1,7
0,455	56	14,9
0,855	17,86	0,14

Tabelle 2: Die mit der Formel berechnete Schwebungsdauer für verschiedene Kopplungsgrade

Die Unsicherheiten der Werte lassen sich mit der gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnen. Mit:

$$f(T_A, T_B) = 2 \frac{T_A T_B}{T_B - T_A}$$

sind

$$\frac{\partial f}{\partial T_A} = 2 \frac{T_B^2}{(T_A - T_B)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial T_B} = -2 \frac{T_A^2}{(T_B - T_A)^2}$$

Die Unsicherheiten von T_S sind deshalb:

$$u_{T_S} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial T_A} u_{T_A}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial T_B} u_{T_B}\right)^2}$$

5.2 Bestimmung der Kopplungsgrade

Der Kopplungsgrad lässt sich mit der folgenden Formel berechnen:

$$K = \frac{T_B^2 - T_A^2}{T_B^2 + T_A^2} \quad (4)$$

l m	K	u_K
0,705	0,14	0,01
0,556	0,105	0,005
0,455	0,06	0,01
0,855	0,187	0,007

Tabelle 3: Die mit der Formel berechnete Schwebungsdauer für verschiedene Kopplungsgrade

Die berechnete Werte dafür für jede Messreihe und deren Unsicherheiten sind:

Die Unsicherheiten lassen sich wiederum mit der gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnen. Mit:

$$f(T_A, T_B) = \frac{T_B^2 - T_A^2}{T_B^2 + T_A^2}$$

sind

$$\frac{\partial f}{\partial T_A} = -\frac{4T_A T_B^2}{(T_A^2 + T_B^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial T_B} = \frac{4T_A^2 T_B}{(T_B^2 + T_A^2)^2}$$

Die Unsicherheiten von K sind deshalb:

$$u_K = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial T_A} u_{T_A}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial T_B} u_{T_B}\right)^2}$$

Eine lineare Regression wurde dann mit einem Excel-Dokument gemacht, um zu sehen, ob es eine lineare Zusammenhang zwischen l^2 und K gibt. Die lineare Gleichung lautet:

$$K = a \cdot l^2 + b = 0,2327l^2 + 0,02$$

Mit den Unsicherheiten: $u_a = 0,01$ und $u_b = 0,03$ (Siehe Abbildung 1).

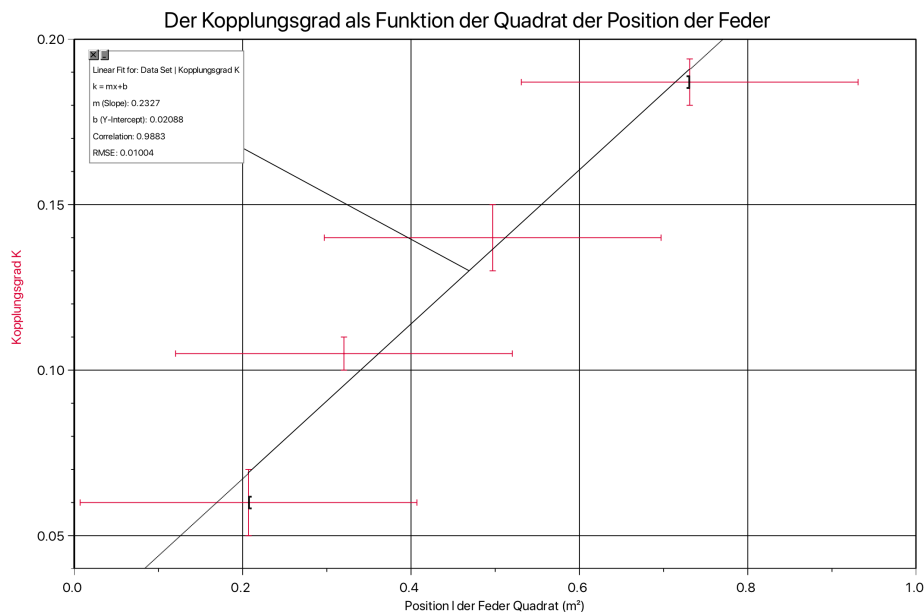


Abbildung 2: Eine Graph von K als Funktion von l^2

6 Diskussion der Ergebnisse

6.1 Systematische und statistische Fehler

Ein systematischer Fehler entsteht dadurch, dass die Feder eine nicht ideale Feder ist. Dann würde es Abweichungen von der linearen Beziehung zwischen Kraft und Abstand geben. Daher wird die verwendete Gleichung eine schlechte Annäherung sein bzw. ein schlechtes Modell für diesen Fall darstellen.

Außerdem würde das gleiche Problem entstehen, wenn die Feder zwischen den beiden Pendel nicht perfekt horizontal ist, oder wenn die anfangs gewählte Amplitude sehr groß ist.

Für dieses Experiment können verschiedene statistische Fehlerquellen vorliegen.

Zum Beispiel, die Anzahl der Oszillationen mit bloßem Auge zu messen, und die Tatsache, dass die Zeitmessung vom menschlichen Reflex sehr abhängig ist sind auch wichtige Fehlerquellen.

6.2 Diskussion über die gefundene Werten

Die Werte von T_S für verschiedene l , die durch das Experiment bestimmt wurden, stimmen mit den berechneten Theoretische Werten überein, weil

sie innerhalb ihrer Unsicherheiten liegen.

Aber die Unsicherheiten der Theoretischen Werten, außer für $l = 0,855m$ und $l = 0,556$, sind hoch, da sie sind ungefähr 10 Prozent der entsprechenden Werte. Deshalb sind diese Werte nicht von großer Bedeutung.

Es wurde bestimmt, dass es eine lineare Zusammenhang zwischen k und l^2 gibt, mit :

$$K = a \cdot l^2 + b = 0,2327l^2 + 0,02$$

Die Korrelation, die von dem Programm Logger Pro berechnet wurde, war 0,9883, was sehr nah an 1 liegt. Deswegen gibt es einen klaren linearen Zusammenhang, jedoch sind die Werte für die Steigung und Achsenabschnitt relativ unsicher, da die horizontalen Fehlerbalken der einzelnen Punkte wegen der Fehlerfortpflanzung sehr groß geworden sind. Es können deshalb mehrere lineare Regressionen gezeichnet werden, die alle durch die Fehlerbalken gehen. Insgesamt kann es sichergestellt werden, dass es einen linearen Zusammenhang zwischen k und l^2 gibt, aber die Steigungen und Achsenabschnitte der jeweiligen Gleichungen sind nicht genau bestimmt.

6.3 Verbesserungsvorschläge

Die Statistischen Fehler könnten dadurch reduziert werden, dass man ein System benutzt, das automatisch die Anzahl der Schwingungen bzw. der Schwebungen zählt und deren Dauer misst.

Der Schutz der Feder vor äußerem Einfluss (wie z.B extreme Temperaturen und Kräfte...) und angemessene Wahl der Amplitude sind Methoden, um systematische Fehler zu vermeiden und verringern.

7 Literatur und Bildquellen

„Versuchsanleitungen zum Physiklabor für Anfänger*innen, Teil 1.“ Albert-Ludwigs-Universität Freiburg: 2018.

8 Anhang

Siehe Zusatzblatt