

# Versuch 17: Physikalisches Pendel, Trägheitsmomente und Steinerscher Satz

(durchgeführt am 17.09.2018 bei Adrian Hauber)

Ye Joon Kim, Marouan Zouari

22. September 2018

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Ziel des Versuchs</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Aufbau und Durchführung</b>	<b>3</b>
3.0.1	Physikalisches Pendel . . . . .	3
3.0.2	Das Drehpendel . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Auswertung und Fehleranalysis</b>	<b>6</b>
4.1	Bestimmung der theoretischen Schwingungsdauer . . . . .	6
4.1.1	Beispielrechnungen . . . . .	6
4.2	Bestimmung der Schwingungsdauer eines Physikalischen Pen- dels . . . . .	7
4.2.1	Beispielrechnungen . . . . .	7
4.3	Bestimmung der Schwingungsdauer eines Drehpendels . . . .	7
<b>5</b>	<b>Diskussion der Ergebnisse</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Literatur</b>	<b>10</b>
<b>7</b>	<b>Anhang</b>	<b>10</b>

## 1 Einleitung

Mit dem Trägheitsmoment eines Physikalischen Pendels kann man seine Periode vorhersagen. Dafür wird es benötigt, die Bewegungsgleichung des

Pendels aufzustellen. Die Definition des Drehmoments ist:

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r} \quad (1)$$

Wobei  $\vec{F}$  die Kraft und  $\vec{r}$  der Ortsvektor. Das Drehmoment lässt sich auch schreiben als:

$$\vec{M} = I \cdot \ddot{\varphi} \quad (2)$$

Wobei  $I$  das Trägheitsmoment und  $\varphi$  die Drehwinkel.

Die auf dem Stab wirkende Kraft  $F_G$  (Die zur Stab senkrechte Komponente) ist:

$$F_{G\perp} = m\vec{g}\sin(\varphi) \quad (3)$$

Der Betrag der auf dem Stab wirkenden Trägheitsmoment ist deshalb:

$$M = xmg\sin(\varphi) \quad (4)$$

Wobei  $x$  der Abstand von dem Aufhängepunkt zum Schwerpunkt ist. Gleichung (2) und (4) können gleichgesetzt werden, um

$$I \cdot \ddot{\varphi} = xmg\sin(\varphi)$$

zu liefern.

Für kleine Winkel ist  $\sin(\varphi) \approx \varphi$ , und nach Umformen der Gleichung bekommt man:

$$\ddot{\varphi} - \frac{xmg}{I}\varphi = 0$$

, was eine Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators mit  $\omega^2 = \frac{xmg}{I}$  darstellt.

Der Frequenz eines Drehpendel wird ähnlich berechnet. Mit  $M = -D\varphi$  und  $M = I\ddot{\varphi}$  gilt:

$$-D\varphi = I\ddot{\varphi}$$

, was wieder eine Differenzialgleichung eines harmonischen Oszillators darstellt, mit

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{I}} \quad (5)$$

Zur Bestimmung des Trägheitsmoments eines Körpers wird die folgende Formel benutzt:

$$I = \int r_{\perp}^2 dm \quad (6)$$

Für den ersten Versuchsteil ist es notwendig das Trägheitsmoment eines Zylinderförmigen Stabes zu bestimmen. Zur Erleichterung der Rechnung

wird das Integral in Zylinderkoordinaten durchgeführt. Mit  $dm = \rho dV$  ist das Integral:

$$I = \rho \int_0^{2\pi} \int_{-L}^0 \int_0^r \sin^2(\phi) r^3 + z^2 r dr dz d\phi$$

,was

$$I_{\text{Pendel}} = \frac{1}{4} M r^2 + \frac{1}{3} M L^2 \quad (7)$$

ergibt. Wobei  $r$  der Radius und  $L$  die Länge des Stabes sind.

In dem zweiten Teil muss das Trägheitsmoment der Kreisscheibe bestimmt werden. Das Rechnen mit der Formel (6) ist einfach, da die Scheibe Zylinderförmig ist. Das Trägheitsmoment ist deshalb:

$$\begin{aligned} I_{\text{Scheibe}} &= \rho \int_0^{2\pi} \int_{-L}^0 \int_0^r r dr dz d\phi \\ &= \frac{1}{2} m r^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Wobei  $r$  der Radius der Scheibe ist.

## 2 Ziel des Versuchs

In dem ersten Versuchsteil wird die Schwingungsdauer eines physikalischen Pendels gemessen und mit dem theoretischen Wert verglichen. In dem zweiten Versuchsteil wird die Zusammenhang von dem Abstand zwischen die Kreisscheibe und den Zentrum des Drehpendels mit der Schwingungsdauer untersucht.

## 3 Aufbau und Durchführung

(Siehe Abbildung auf nächster Seite.)

### 3.0.1 Physikalisches Pendel

Zur Messung der Periode eines Physikalischen Pendel wurde einen Zeitmesser benutzt. Mit einem Bandmaß wurde die Länge des Stabes und mit einem Messschieber wurde den Durchmesser des Stabes gemessen.

Der Stab wurde dann leicht aufgehoben und losgelassen. Die Zeitmessung wurde angefangen, als der Stab an dem roten senkrechten Stab im Mitte vorbeiging, und geendet, am dritten Mal, dass der Stab an dem roten Stab vorbeiging (Da das zweite Mal entspricht eine halbe Periode). Die einzelne Zeitdauer wurden aufgenommen. Der Prozesse wurde dreißig mal wiederholt.

Für die alternative Methode wurde der Stab aufgehoben und losgelassen, und die Zeitmessung wurde wie vorher angefangen. Es wurde dreißig Schwingungen gewartet, bis die Uhr gestoppt wurde. Die gesamte Zeitdauer wurde dann aufgenommen.

### **3.0.2 Das Drehpendel**

Der Durchmesser der Kreisscheibe wurde mit einem Messschieber gemessen. Der Drehtisch wurde dann ohne die Kreisscheibe gedreht und losgelassen. Ähnlich wie in dem ersten Teil wurde die Zeitmessung gestartet, als die Kennzeichnung auf dem Drehtisch an der ursprünglichen Position vorbeigegangen war. Die Uhr wurde gestoppt als die Kennzeichnung dreimal an der ursprünglichen Position vorbeigegangen war. Der Prozesse zehn mal wiederholt. Dann wurde die Schwingungsdauer mit der Kreisscheibe auf dem Drehtisch gemessen.

Danach wurde die Kreisscheibe von dem Zentrum des Drehtisches versetzt, und die Schwingungsdauer des Drehpendels gemessen. Der Abstand zwischen das Zentrum des Drehtisches und der Kreisscheibe wurde dadurch gemessen, indem man mit einem Messschieber die Abstände zwischen die Löcher auf dem Drehtisch misst.

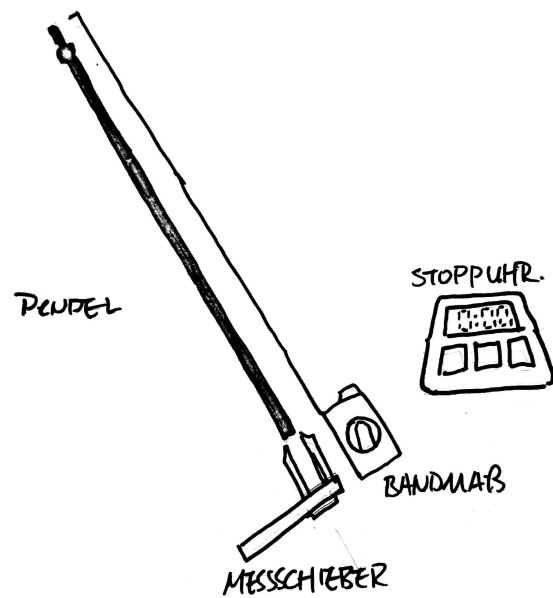


Abbildung 1: Aufbau zur Messung der Schwingungsdauer eines physikalischen Pendels

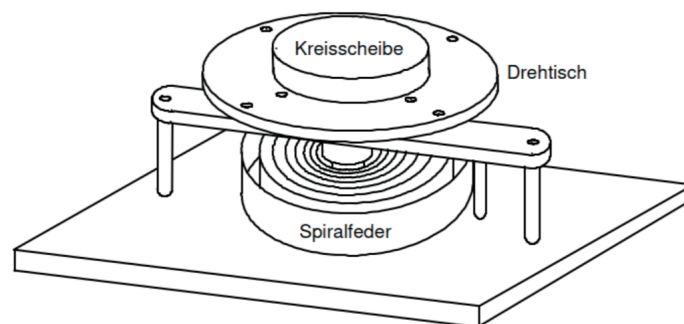


Abbildung 2: Aufbau zur Messung der Schwingungsdauer eines Drehpendels

## 4 Auswertung und Fehleranalyse

### 4.1 Bestimmung der theoretischen Schwingungsdauer

Wie in der Einleitung erwähnt, ist der Kreisfrequenz eines physikalischen Pendels  $\omega = \sqrt{\frac{xmg}{I}}$ . Das Einsetzen von Gleichung (6) in diesen Ausdruck liefert:

$$\omega = \sqrt{\frac{xg}{\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{3}L^2}}$$

Und da  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  ist die theoretische Schwingungsdauer:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{3}L^2}{xg}}$$

Die Theoretische Schwingungsdauer von dem Pendel ist deshalb:

$$(1,63 \pm 0,03) \text{ s}$$

#### 4.1.1 Beispielrechnungen

Zur Berechnung der Unsicherheit von der theoretischen Schwingungsdauer wurde die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung benutzt. Mit

$$f(x, r, L) = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{3}L^2}{xg}}$$

sind:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{3}L^2}{2g \sqrt{\frac{\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{3}L^2}{xg}} x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\frac{1}{4xg}r}{\sqrt{\frac{\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{3}L^2}{xg}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial L} = \frac{\frac{1}{3xg}L}{\sqrt{\frac{\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{3}L^2}{xg}}}$$

Aber da die Beträge von  $\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x$  und  $\frac{\partial f}{\partial L} \Delta L$  mehr als 100-Mal größer sind als der andere Betrag, wurde der  $\frac{\partial f}{\partial r} \Delta r$  vernachlässigt. Deshalb ist die Unsicherheit der Schwingungsdauer:

$$\Delta T = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial L} \Delta L\right)^2}$$

Das Einsetzen der Abmessungen in die Formel (8) liefert das Trägheitsmoment der Kreisscheibe.

$$I = 0,00202 \pm 0,00001$$

Seine Unsicherheit wurde mit der vereinfachten Formel für Produkte und Quotienten berechnet, nämlich:

$$\left| \frac{\Delta I}{I} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{\Delta m}{m} \right)^2 + \left( 2 \frac{\Delta r}{r} \right)^2}$$

## 4.2 Bestimmung der Schwingungsdauer eines Physikalischen Pendels

In dem ersten Teil wurden 30 Einzelmessungen durchgeführt. Der Mittelwert und seine Standardunsicherheit lauten:

$$(1,553 \pm 0,002) \text{ s}$$

Danach wurde die Zeitdauer für 30 Schwingungsdurchgänge gemessen. Die mittlere Dauer einer einzelnen Schwingung und ihre Unsicherheit sind:

$$(1,60 \pm 0,05) \text{ s}$$

### 4.2.1 Beispielrechnungen

Die Mittelwerte lassen sich mit der folgenden Formel berechnen:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

und die Standardunsicherheit:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Bei der zweiten Messung gab es keine Standardunsicherheit, deswegen wurde der Messfehler durch einen Faktor  $\sqrt{n}$  geteilt, wobei  $n$  die Anzahl Schwingungen ist.

## 4.3 Bestimmung der Schwingungsdauer eines Drehpendels

Die Durchschnittliche Schwingungsdauer des Drehpendels ohne die Kreisscheibe ist:

$$T = (2,163 \pm 0,02) \text{ s}$$

Mit demselben Prozesse lassen sich die Schwingungsdauer des Drehpendels mit verschiedenen Abstände von der Kreisscheibe bestimmen.

Abstand ( $d$ ) m	$\bar{T}$ s	$u_{\bar{T}}$ s
0,0000	2,39	0,01
0,0150	2,42	0,01
0,0300	2,57	0,02
0,0600	2,98	0,01
0,0900	3,56	0,01

Tabelle 1: Die Werte für die durchschnittlichen Schwingungsdauer für verschiedene Abstände und deren Unsicherheiten

Die Unsicherheiten der Abstände sind  $1 \cdot 10^{-4}$  m.

Das Rechnungsverfahren ist genau wie im ersten Teil erläutert.

Die Werte für  $d^2$  und  $\bar{T}^2$  wurden in einer Graph eingetragen. Eine lineare Regression wurde auch durchgeführt. Die Berechnung der linearen Regression wurde mit einem Excel-Dokument und die Graph mit dem Programm Logger-Pro gemacht. Die berechnete lineare Regression ist:

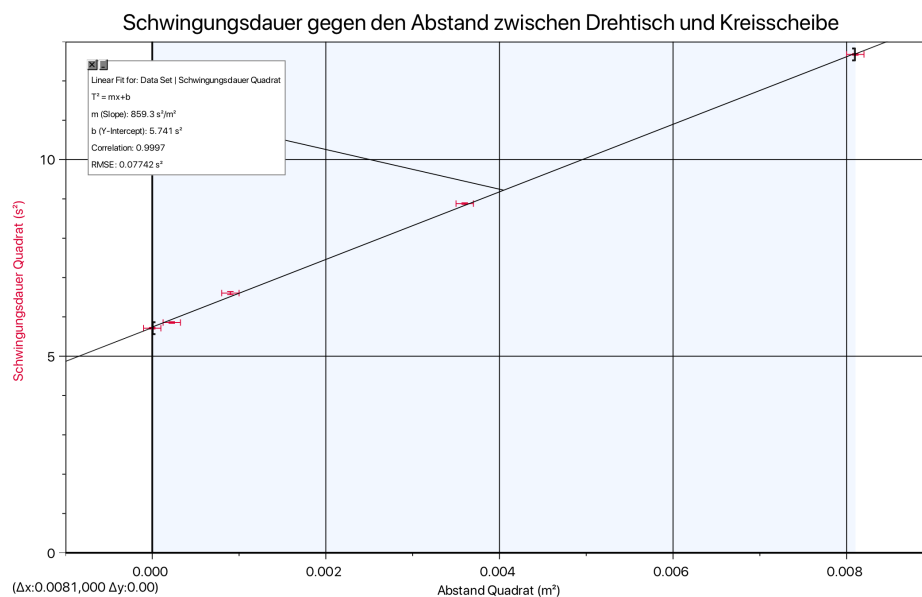


Abbildung 3: Graph von  $T^2$  als Funktion von  $d^2$

$$a + bx = 5,71 + 859x$$

mit den Unsicherheiten  $u_a = 0,05s^2$  und  $u_b = 11s^2m^{-2}$

Aus der Steigung und dem Steiner'schen Satz kann das Gesamt-Trägheitsmoment bestimmt werden. Der Steiner'sche Satz lautet:

$$I = I_{cm} + md^2$$



Mit dem Umformen der Gleichung (5) und das Einsetzen in der obigen Formel liefert:

$$T^2 = \frac{I_0}{D} + \frac{m}{D}d^2$$

Die Steigung ist deshalb  $\frac{m}{D}$ , und dadurch lässt sich der Wert von  $D$  berechnen.

$$D = (0,00135 \pm 0,00002)$$

Und mit dem Achsenabschnitt  $\frac{I_{cm}}{D}$  das Trägheitsmoment der gesamten Anordnung.

$$I_{cm} = 0,0077 \pm 0,0001$$

Für beide Unsicherheiten wurde die vereinfachte Formel für Produkte und Quotienten angewendet.

Jetzt kann das Drehmoment des Drehtisches bestimmt werden, indem man das Trägheitsmoment der Kreisscheibe von dem Gesamt-Trägheitsmoment subtrahiert.

$$I_{\text{Tisch}} = 0,0057 \pm 0,001$$

Die Unsicherheit des Trägheitsmoments der Kreisscheibe wurde vernachlässigt, da es ein Zehntel von der von dem Drehtisches war.

## 5 Diskussion der Ergebnisse

Die Schwingungsdauer des physikalischen Pendels für beide Messmethoden waren:

$$(1,553 \pm 0,002)\text{s}$$

$$(1,60 \pm 0,05)\text{s}$$

Deren Differenz, 0,047 s, ist mehr als 20-mal der Standardunsicherheit des ersten Ergebnisses, deshalb stimmen beide Werte nicht überein und sind nicht verträglich. Das erste Ergebnis liegt innerhalb des Fehlers von dem zweiten Wert, aber das ist von keiner großen Bedeutung, da die relative Unsicherheit von dem zweiten Messwert ungefähr 20-mal größer ist als die des ersten Werts. Ein möglicher Grund dafür wird später diskutiert.

Im Vergleich mit dem theoretischen Wert,  $1,63 \pm 0,03$  s, sind beide Werte niedrig. Nur der zweite Messwert stimmt mit dem theoretischen Wert überein, da beide Werte innerhalb eine Standardunsicherheit voneinander liegen, und die relative Unsicherheit beträgt 0,03, deshalb ist dieses Ergebnis auch Bedeutungsvoll. Auf der anderen Seite liegt die theoretische Wert außerhalb mehr als 30 Standardabweichungen von dem ersten Wert, aber das impliziert nicht, dass der Bedeutungslos ist oder dass der Wert nicht zu vertrauen

ist. Obwohl die theoretische und gemessene Werte weit auseinander liegen, ist die Streuung des gemessenen Wert sehr klein. Die relative Unsicherheit des ersten Werts ist 0,0012, und das impliziert, dass es einen systematischen Fehler gab, der alle Messwerte nach unten verschoben hatten.

## **6 Literatur**

## **7 Anhang**