

## Versuch 6: Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus der Biegung

(durchgeführt am 24.09.2018 bei Julia Müller)

Ye Joon Kim, Marouan Zouari

29. September 2018

### Inhaltsverzeichnis

|          |                                     |          |
|----------|-------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>                   | <b>1</b> |
| <b>2</b> | <b>Aufbau</b>                       | <b>2</b> |
| <b>3</b> | <b>Versuchsdurchführung</b>         | <b>2</b> |
| <b>4</b> | <b>Auswertung und Fehleranalyse</b> | <b>3</b> |
| 4.1      | Rechenweg . . . . .                 | 3        |
| 4.2      | Rechenweg . . . . .                 | 7        |
| 4.3      | Biegsamkeit . . . . .               | 7        |
| <b>5</b> | <b>Diskussion der Ergebnisse</b>    | <b>8</b> |
| <b>6</b> | <b>Literatur</b>                    | <b>8</b> |

### 1 Einleitung

Wird ein Körper von einer äußeren Kraft belastet, ändert sich seine Länge. Die Längenänderung ist durch eine Proportionalität,  $E$ , mit der wirkende Kraft pro Fläche gekoppelt. Diese Proportionalität ist als der Elastizitätsmodul bezeichnet.

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{A} = \frac{1}{E} \sigma \quad (1)$$

Wobei  $\sigma = \frac{F}{A}$  die Zugspannung ist. Diese Gleichung ist auch als das Hook'sche Gesetz bekannt.

Wird ein Horizontaler Stab von einer Kraft nach oben belastet, biegt sich der Stab. Die obere und untere Hälfte werden jeweils gestaucht und gedehnt und

von den resultierenden inneren entgegengesetzten Spannungen entsteht ein Drehmoment. Da dieses Drehmoment von der Durchbiegung abhängt, kann die Elastizitätsmodul von der Durchbiegung, oder Biegungspfeil bestimmt werden, nämlich mit der folgenden Formel:

$$s = \frac{1}{E} \frac{l^3}{4h^3b} F \quad (2)$$

Wobei:

- $s$  der Biegungspfeil
- $l$  die Länge
- $h$  die Höhe
- $b$  die Breite des Stabes
- $F$  die auf den Stab wirkende Kraft sind.

## 2 Aufbau

## 3 Versuchsdurchführung

Zuerst wurden die Dimensionen der Stäbe (Breite und Höhe) gemessen. Jede Messung wurde fünfmal wiederholt. Danach wurden die einzelnen in dem Versuch verwendeten Gewichtsstücke gewogen und deren Massen aufgenommen.

Für jede Messreihe wurde der Stab zuerst auf die zwei Schneiden gelegt. Es wurde mit dem Maßband sichergestellt, dass die Schneiden gleich entfernt von dem Mittelpunkt waren. Die Spitze des Messgeräts wurde auf die Halterung getan und geeicht. Es wurde dann eine relative große Masse auf die Halterung aufgehängt (In diesem Fall 6 Große Gewichtsstücke). Der Abstand zwischen die Schneiden wurde dann geändert, sodass die angezeigte Durchbiegung zwischen 2 und 3mm lag. Danach wurden die Gewichtsstücke entfernt.

Für die einzelnen Messungen wurde auf die Halterung die Gewichtsstücke aufgehängt. Für jede Gewichtsänderung wurde der auf dem Messgerät angezeigte Wert aufgenommen. Die Belastung wurde von kleineren zu größeren Werten variiert und wieder in umgekehrter Reihenfolge, um zwei Messwerte für jede Gewicht aufnehmen zu können.

Dieser Prozesse wurde für unterschiedliche Materialien, Ausrichtungen des Stabs und Längen zwischen den Schneiden wiederholt.

## 4 Auswertung und Fehleranalyse

Die Durchschnittlichen Abmessungen der drei Stäbe und deren Unsicherheiten sind:

| Material  | Seite 1<br>mm | $u_{\text{Seite 1}}$<br>mm | Seite 2<br>mm | $u_{\text{Seite 2}}$<br>mm |
|-----------|---------------|----------------------------|---------------|----------------------------|
| Stahl     | 5,916         | 0,005                      | 9,910         | 0,007                      |
| Aluminium | 5,948         | 0,007                      | 9,914         | 0,008                      |
| Messing   | 5,914         | 0,005                      | 9,902         | 0,004                      |

Tabelle 1: Die Durchschnittlichen Abmessungen der Stäbe

### 4.1 Rechenweg

Zur Berechnung der Mittelwerte wurde die folgende Formel verwendet:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Für die Unsicherheiten wurden die Standardabweichung benutzt, nämlich:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Für jede Messreihe wurden die jeweiligen Mittelwerte in einer Graph aufgetragen (Siehe Abbildungen 1 bis 3).

Durchbiegung des Stabes als Funktion des aufgehängten Gewichts für verschiedene Materialien

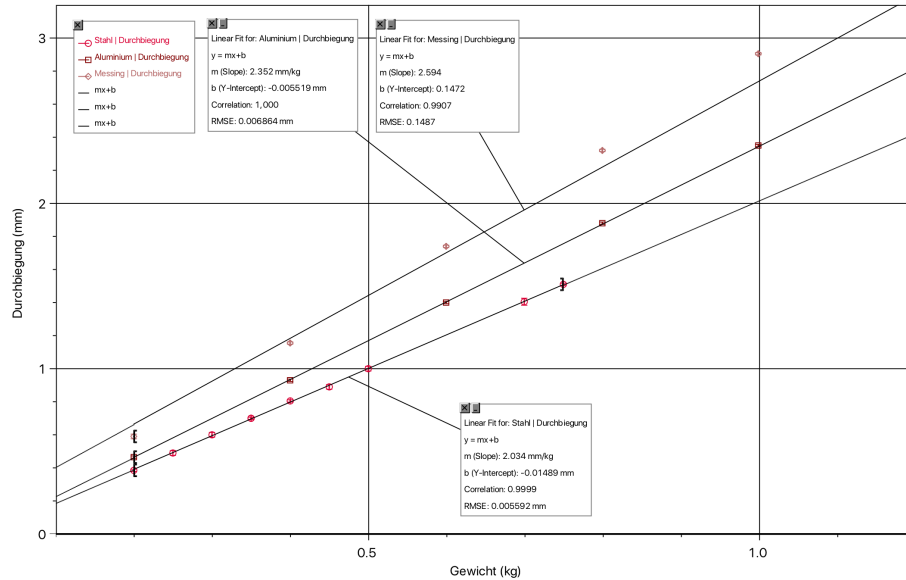


Abbildung 1: Datenpunkte und Ausgleichsgeraden für verschiedene Materialien

Durchbiegung als Funktion des Gewichts für Verschiedene Ausrichtungen des Stabprofils

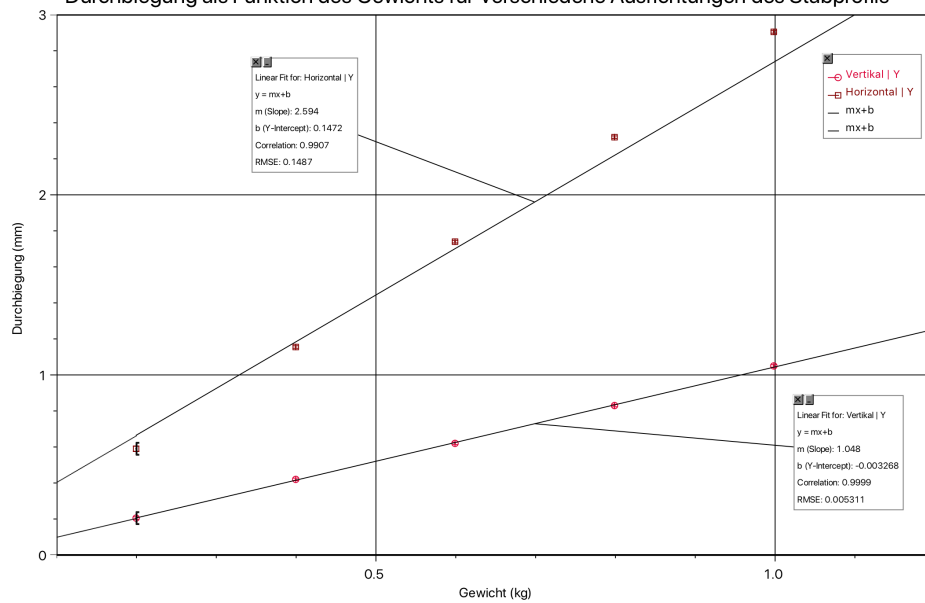


Abbildung 2: Datenpunkte und Ausgleichsgeraden für unterschiedliche Ausrichtungen des Stabprofils

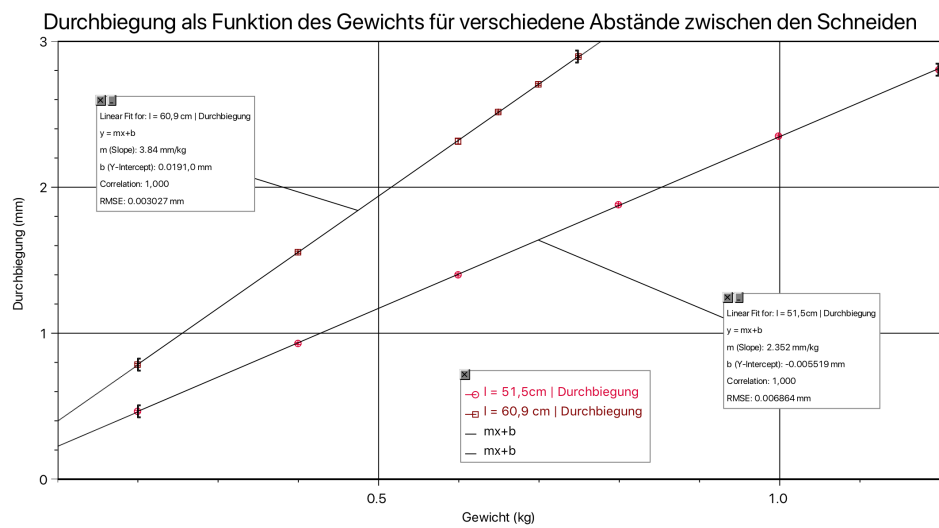


Abbildung 3: Datenpunkte und Ausgleichsgeraden für verschiedene Abstände zwischen den Schneiden

Für die Unsicherheiten der einzelnen Punkte wurde die Standardunsicherheit wie oben benutzt, aber wenn es keine Abweichungen zwischen beiden Messwerten gab, wurde der Messfehler durch einen Faktor  $\sqrt{n}$  geteilt.

Mit einem Excel-Dokument wurde die lineare Regressionen und deren Unsicherheit berechnet. Die lineare Zusammenhänge lassen sich in der Form:

$$s = a + bm$$

schreiben. Die einzelne Werte für  $a$  und  $b$  für jede Messreihe sind in Tabelle 1 bis 3 zu sehen (Achtung, dass in diesem Kontext  $b$  nicht die Breite des Stabes ist).

| Material  | $a$<br>mm | $u_a$<br>mm | $b$<br>mm kg <sup>-1</sup> | $u_b$<br>mmkg <sup>-1</sup> |
|-----------|-----------|-------------|----------------------------|-----------------------------|
| Stahl     | -0,013    | 0,004       | 2,033                      | 0,009                       |
| Aluminium | -0,006    | 0,006       | 2,352                      | 0,008                       |
| Messing   | 0,1       | 0,1         | 2,6                        | 0,2                         |

Tabelle 2: Werte für  $a$  und  $b$  und deren Unsicherheit für verschiedene Materialien

| Ausrichtung | $a$<br>mm | $u_a$<br>mm | $b$<br>mm kg <sup>-1</sup> | $u_b$<br>mmkg <sup>-1</sup> |
|-------------|-----------|-------------|----------------------------|-----------------------------|
| Horizontal  | -0,006    | 0,006       | 2,352                      | 0,008                       |
| Vertikal    | -0,003    | 0,005       | 1,048                      | 0,006                       |

Tabelle 3: Werte für  $a$  und  $b$  und deren Unsicherheiten für unterschiedliche Ausrichtungen des Stabprofils (Messing)

| Abstand<br>cm | $a$<br>mm | $u_a$<br>mm | $b$<br>mm kg <sup>-1</sup> | $u_b$<br>mmkg <sup>-1</sup> |
|---------------|-----------|-------------|----------------------------|-----------------------------|
| 51,5          | -0,006    | 0,006       | 2,352                      | 0,008                       |
| 60,9          | 0,019     | 0,004       | 3,840                      | 0,006                       |

Tabelle 4: Werte für  $a$  und  $b$  und deren Unsicherheiten für unterschiedliche Abstände zwischen den Schneiden

Mit Formel (2) und  $F = mg$  kann man leicht sehen, dass die Steigung  $b$  dem Wert  $\frac{1}{E} \frac{gl^3}{4h^3b}$  Entspricht. Dadurch lässt sich der Wert von  $E$  berechnen:

$$E = \frac{gl^3}{4h^3bS}$$

In dieser Formel ist  $S$  die Steigung, um Verwechslung mit dem Buchstabe für Breite zu vermeiden. Die Berechnete Werte von  $E$  und deren Unsicherheiten

für Messreihe 1 sind:

$$E_{\text{Stahl}} = (21000 \pm 1000) \text{N/mm}^2$$

$$E_{\text{Al}} = (68300 \pm 500) \text{N/mm}^2$$

$$E_{\text{Messing}} = (104000 \pm 8000) \text{N/mm}^2$$

Für Messreihe 2:

$$E_{\text{Messing-Vert}} = (91600 \pm 700) \text{N/mm}^2$$

und Für Messreihe 3:

$$E'_{\text{Al}} = (69000 \pm 1000) \text{N/mm}^2$$

## 4.2 Rechenweg

Zur Berechnung der Unsicherheiten wurde die vereinfachte gauß'sche Fehlerfortpflanzung für Produkte und Quotienten benutzt:

$$\left| \frac{u_E}{E} \right| = \sqrt{\left( 3 \frac{u_l}{l} \right)^2 + \left( \frac{u_h}{h} \right)^2 + \left( 3 \frac{u_b}{b} \right)^2 + \left( \frac{u_S}{S} \right)^2}$$

## 4.3 Biegsamkeit

Die Einzelergebnisse für die Biegsamkeit,  $\frac{ds}{dm} = S$ , und deren Unsicherheiten sind in Abbildung (5) zu sehen:

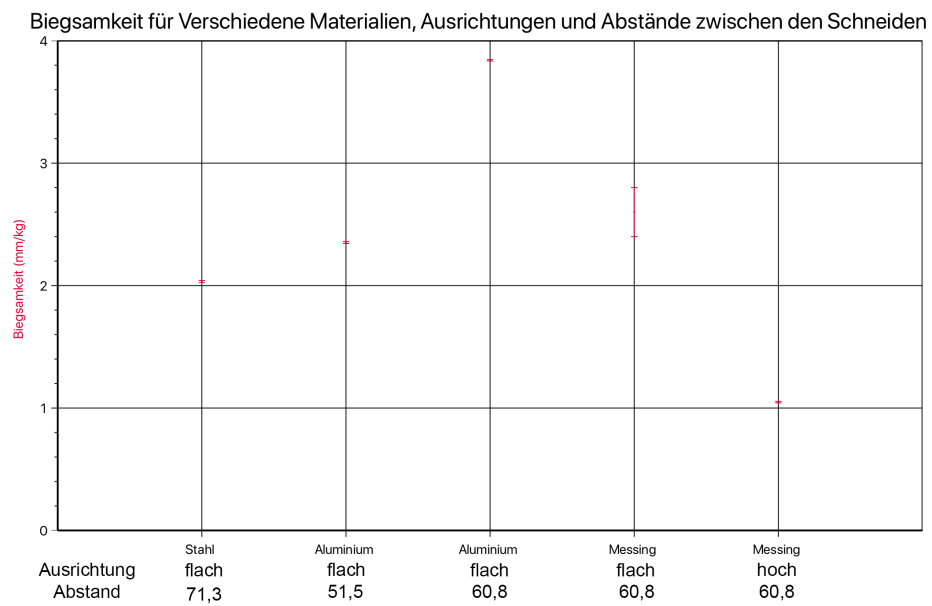


Abbildung 4: Die gemessenen Biegsamkeit für jede Messreihe

## 5 Diskussion der Ergebnisse

## 6 Literatur