

Theoretische Physik II

Elektrodynamik

Vorlesung von Prof. Dr. Michael Thoss im Wintersemester 2018

Andréz Gockel
Patrick Munnich
Daniil Aktanka

15.10.2018

Inhaltsverzeichnis

1	Grundbegriffe	2
2	Elektrostatik	4
2.1	Einführung	4
2.2	Integralsätze	5
2.3	Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik	7
2.4	Incomplete/Unassigned	8

Kapitel 1

Grundbegriffe

Ladung

$$\begin{array}{ll} \text{diskrete Ladungsverteilung} & Q = \sum_{i=1}^n q_i \\ \text{kontinuierliche Ladungsverteilung} & Q = \int_V \rho(\mathbf{r}) \, d^3r \\ \text{Punktladung} & \rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ n \text{ Punktladungen} & \rho(\mathbf{r}') = \sum_{j=1}^n q_j \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) \end{array}$$

Coulomb'sches Gesetz

$$\begin{array}{ll} \text{zwei Punktladungen} & \mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = -\mathbf{F}_{21} \\ n \text{ Punktladungen} & \mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \sum_{j=2}^n q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \\ \text{Beziehung zur } E\text{-Feld} & \mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \text{Beziehung zur Potential} & \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla q\varphi(\mathbf{r}) \end{array}$$

Elektrisches Feld

$$\begin{array}{ll} \text{im bel. Raumpunkt} & \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \\ \text{diskrete Ladungsverteilung} & \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=2}^n q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \\ \text{kontinuierliche Ladungsverteilung} & \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \, d^3r' \\ \text{(Identität)} & \downarrow \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \text{Beziehung zur Potential} & \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi(\mathbf{r}) \\ \implies & \nabla \times q\mathbf{E} = 0 \quad \text{d.h., die Coulomb-Kraft ist konservativ} \end{array}$$

Skalare Elektrische Potential

$$\text{im bel. Raumpunkt kontinuierlich} \quad \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'$$

$$\text{im bel. Raumpunkt diskret} \quad \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}$$

$$\text{Spannung / Potentialdifferenz} \quad U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

Operator Nomenklatur

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\text{grad } \mathbf{A} = \nabla \mathbf{A}$$

$$(\text{eng. curl}) \quad \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Produktformeln

f, g sind skalare Felder, \mathbf{F}, \mathbf{G} sind vektor Felder:

$$\nabla(fg) = f\nabla(g) + g\nabla(f)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{G}) = f\nabla \cdot (\mathbf{G}) + \mathbf{G} \cdot \nabla(f)$$

$$\nabla(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla \times (\mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot \nabla \times (\mathbf{G})$$

$$\nabla \times (f\mathbf{G}) = f\nabla \times (\mathbf{G}) - \mathbf{G} \times \nabla f$$

Identitäten

$$\nabla \times (\nabla F) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F}$$

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \nabla f) = \mathbf{a} \Delta f - \nabla(\mathbf{a} \cdot \nabla f)$$

Gradienten eines skalaren Feldes

$$\nabla g(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{1}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right|} \frac{\partial}{\partial u_i} g(\mathbf{r})$$

Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} f(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

wobei:

$$r \in [0, \infty), \quad \Theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

Kapitel 2

Elektrostatik

2.1 Einführung

Dirac'sche Delta-Funktion

Definition

$$\int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) d^3r := \begin{cases} 1, & \mathbf{r}_0 \in V \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \quad \forall \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$$

Bemerkung: Die δ -Funktion ist keine Funktion im üblichen mathematischen Sinne. Man bezeichnet sie deshalb als **uneigentliche Funktion** oder als **Distribution**. Heuristisch:

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Formeln

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0), & a < x_0 < b \\ \frac{1}{2}f(x_0), & x_0 = a \vee b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

“ $f(x) \delta'(x - x_0) = -f'(x) \delta(x - x_0)$ ” (heuristisch)

$$\delta(x - x_0) = \frac{d}{dx} \Theta(x - x_0) \quad (\Theta \text{ sei die Stufenfunktion})$$
$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Mehrdimensionale Delta-Funktion

Kartesisch (x, y, z)	$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$
Kugel (r, θ, φ)	$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{r_0^2 \sin \theta_0} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$
Zylinder (ρ, ϕ, z)	$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{\rho_0} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0)$

2.2 Integralsätze

Einleitung: Fluss

Definition Sei $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = (a_1(\mathbf{r}), a_2(\mathbf{r}), a_3(\mathbf{r}))$ ein Vektorfeld, V ein Volumen und $S(V)$ die Oberfläche. Dann heisst $\Phi_S(\mathbf{a})$ der Fluss (*eng. flux*) von $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ durch die Fläche S wenn es gilt:

$$\Phi_S(\mathbf{a}) = \int_S \mathbf{a}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{f}$$

Geschlossene Fläche Das Oberflächenintegral über eine geschlossene Fläche wird durch ein spezielles Integralzeichen symbolisiert:

$$\Phi_S(\mathbf{a}) = \oint_S \mathbf{a}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{f}$$

Satz von Stokes

Bedeutung Ganz allgemein gesagt handelt es sich um einen sehr grundlegenden Satz über die Integration von Differentialformen. Es geht darum, n -dimensionale Volumenintegrale über das Innere in $(n-1)$ -dimensionale Randintegrale über die Oberfläche des Volumenstücks umzuwandeln. Für uns sind die Spezialfälle am wichtigsten, bei denen der Gauß'sche Satz und der Kelvin-Stokes'sche Satz (Rotationssatz).

Formel

$$\int_F \nabla \times \mathbf{a} \, d\mathbf{f} = \int_{\partial F} \mathbf{a} \, d\mathbf{r}$$

Gauß'sche Satz

(*eng. Divergence Theorem*)

Definition Der elektrische Nettofluss Φ durch eine hypothetische geschlossene Oberfläche S ist gleich $\frac{1}{\varepsilon_0}$ mal die elektrische Nettoladung Q innerhalb dieser geschlossenen Oberfläche.

Integrale Form

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{f} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Wobei Q die Gesamtladung innerhalb V ist.

Differentielle Form

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Wobei ρ die Gesamtladungsdichte (pro Einheit Volumen) ist.

Beziehung

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, d^3r = \oint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{f}$$

Greensche Identitäten

$$\int_V \nabla g(\mathbf{r}) \cdot \nabla h(\mathbf{r}) + g(\mathbf{r}) \Delta h(\mathbf{r}) \, d^3r = \oint_{\partial V} g(\mathbf{r}) \nabla h(\mathbf{r}) \, d\mathbf{f}$$

$$\int_V g(\mathbf{r}) \Delta h(\mathbf{r}) - h(\mathbf{r}) \Delta g(\mathbf{r}) \, d^3r = \oint_{\partial V} g(\mathbf{r}) \nabla h(\mathbf{r}) - h(\mathbf{r}) \nabla g(\mathbf{r}) \, d\mathbf{f}$$

2.3 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

2.4 Incomplete/Unassigned

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Dirichlet Randwertproblem $\Delta_{\mathbf{r}} \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{q} \Phi(\mathbf{r})$$

Poisson-Gleichung $\Delta \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r})$

$$H(x) := \int_{-\infty}^x \delta(s)ds = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

Literaturverzeichnis

- [1] OnlineMathe das mathe-forum *Elektrisches Potential einer homogen geladenen Kugel*
<https://www.onlinemathe.de/forum/Potential-einer-homogen-geladenen-Kugel>