Theoretische Physik II
Elektrodynamik

Vorlesung von Prof. Dr. Michael Thoss im Wintersemester 2018

Andréz Gockel
Patrick Munnich
Daniil Aktanka

15.10.2018

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Elektrostatik

1.1 Grundbegriffe

Ladung

$$\text{diskrete Ladungsverteilung} \qquad Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

$$\text{kontinuierliche Ladungsverteilung} \qquad Q = \int_V \rho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}^3 r$$

$$\text{Punktladung} \qquad \rho(\boldsymbol{r}) = q\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$$

$$n \text{ Punktladungen} \qquad \rho(\boldsymbol{r}') = \sum_{j=1}^{n} q_j\,\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_j)$$

Coulomb'sches Gesetz

$$\text{zwei Punktladungen} \qquad \boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,q_1 q_2\,\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3} = -\boldsymbol{F}_{21}$$

$$n \text{ Punktladungen} \qquad \boldsymbol{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,q_1 \sum_{j=2}^{n} q_j\,\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|^3}$$

$$\text{Beziehung zur } E\text{-Feld} \qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

$$\text{Beziehung zur Potential} \qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\,q\,\varphi(\boldsymbol{r})$$

Elektrisches Feld

$$\text{im bel. Raumpunkt} \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|^3}$$

$$\text{diskrete Ladungsverteilung} \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=2}^{n} q_j\,\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|^3}$$

$$\text{kontinuierliche Ladungsverteilung} \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\boldsymbol{r}')\,\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}\,\mathrm{d}^3 r'$$

$$\text{(Identität)} \qquad \Big\downarrow \quad \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} = -\nabla_r\,\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

$$\text{Beziehung zur Potential} \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\,\varphi(\boldsymbol{r})$$

$$\Longrightarrow \qquad \boldsymbol{\nabla}\times q\boldsymbol{E} = 0 \qquad \text{d.h., die Coulomb-Kraft ist konservativ}$$

Skalare Elektrische Potential

$$\text{im bel. Raumpunkt kontinuierlich} \qquad \varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, \mathrm{d}^3 r'$$

$$\text{im bel. Raumpunkt diskret} \qquad \varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|}$$

$$\text{Spannung / Potentialdifferenz} \qquad U(\boldsymbol{r},\, \boldsymbol{r}_0) = \varphi(\boldsymbol{r}) - \varphi(\boldsymbol{r}_0) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

Operator Nomenklatur

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} \\ \operatorname{grad} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{A} \\ \text{(\textit{eng.} curl)} \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \end{aligned}$$

1.2 Einführung

Dirac'sche Delta-Funktion

Definition

$$\int_V \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\, \mathrm{d}^3 r := \begin{cases} 1\,, & r_0 \in V \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r_0}$$

Bemerkung: Die δ-Funktion ist keine Funktion im üblichen mathematischen Sinne. Man bezeichnet sie deshalb als **uneigentliche Funktion** oder als **Distribution**. Heuristisch:

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty\,, & x = 0 \\ 0\,, & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

Formeln

$$\int_a^b f(x)\, \delta(x-x_0)\, dx = \begin{cases} f(x_0)\,, & a < x_0 < b \\ \frac{1}{2} f(x_0)\,, & x_0 = a \vee b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{“}\ f(x)\, \delta'(x-x_0) = -f'(x)\, \delta(x-x_0)\ \text{”} \qquad \text{(heuristisch)}$$

$$\delta(x-x_0) = \frac{d}{dx} \Theta(x-x_0) \qquad (\Theta \ \text{ sei die Stufenfunktion})$$

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{4\pi} \boldsymbol{\Delta} \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

Mehrdimensionale Delta-Funktion

Kartesisch (x,y,z) $\quad \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)$

Kugel (r,θ,φ) $\quad \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\dfrac{1}{r_0^2\sin\theta_0}\,\delta(r-r_0)\,\delta(\theta-\theta_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0)$

Zylinder (ρ,ϕ,z) $\quad \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\dfrac{1}{\rho_0}\,\delta(\rho-\rho_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0)\,\delta(z-z_0)$

Produktformeln

f,g sind skalare Felder, $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}$ sind vektor Felder:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}(fg) &= f\boldsymbol{\nabla}(g)+g\boldsymbol{\nabla}(f)\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\boldsymbol{G}) &= f\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{G})+\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\nabla}(f)\\
\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{F})-\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{G})\\
\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{G}) &= f\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{G})-\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{\nabla}
\end{aligned}$$

Identitäten

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{F}) &= \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F})-\Delta\boldsymbol{F}\\
\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}f) &= \boldsymbol{0}\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}) &= 0\\
\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\nabla}f) &= \boldsymbol{a}\Delta f-\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla}f)
\end{aligned}$$

Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\sin\theta\cos\varphi\\ r\sin\theta\sin\varphi\\ r\cos\theta\end{pmatrix},\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\boldsymbol{r})\ \mathrm{d}r=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\infty} f(r,\theta,\varphi)r^2\sin\theta\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

wobei:
$r\in[0\,,\,\infty)\,,\quad \Theta\in[0\,,\,\pi]\,,\quad \varphi\in[0\,,\,2\pi)$

Gradienten eines skalaren Feldes

$$\boldsymbol{\nabla}g(\boldsymbol{r})=\sum_i \boldsymbol{e}_i\frac{1}{\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_i}\right|}\frac{\partial}{\partial u_i}g(\boldsymbol{r})$$

1.3 Integralsätze

Einleitung: Fluss

Definition Sei $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})=(a_1(\boldsymbol{r}),\,a_2(\boldsymbol{r}),\,a_3(\boldsymbol{r}))$ ein Vektorfeld, V ein Volumen und $S(V)$ die Oberfläche. Dann heisst $\Phi_S(\boldsymbol{a})$ der Fluss (*eng.* flux) von $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ durch die Fläche S wenn es gilt:

$$\Phi_S(\boldsymbol{a})\ =\ \int_S \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{f}$$

Geschlossene Fläche Das Oberflächenintegral über eine geschlossene Fläche wird durch ein spezielles Integralzeichen symbolisiert:

$$\Phi_S(\boldsymbol{a})\ =\ \oint_S \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{f}$$

Satz von Stokes

Bedeutung Ganz allgemein gesagt handelt es sich um einen sehr grundlegenden Satz über die Integration von Differentialformen. Es geht darum, n-dimensionale Volumenintegrale über das Innere in $(n-1)$-dimensionale Randintegrale über die Oberfläche des Volumenstücks umzuwandeln. Für uns sind die Spezialfälle am wichtigsten, bei denen der Gauß'sche Satz und der Kelvin-Stokes'sche Satz (Rotationssatz).

Formel

$$\int_F \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a} \, \mathrm{d}\boldsymbol{f} = \int_{\partial F} \boldsymbol{a} \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Gauß'sche Satz

(*eng.* Divergence Theorem)

Definition Der elektrische Nettofluss Φ durch eine hypothetische geschlossene Oberfläche S ist gleich $\frac{1}{\varepsilon_0}$ mal die elektrische Nettoladung Q innerhalb dieser geschlossenen Oberfläche.

Integrale Form

$$\Phi = \oint_S \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}\boldsymbol{f} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Wobei Q die Gesamtladung innerhalb V ist.

Differentielle Form

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Wobei ρ die Gesamtladungsdichte (pro Einheit Volumen) ist.

Beziehung

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}^3 r = \oint_S \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}\boldsymbol{f}$$

Greensche Identitäten

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} g(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{\nabla} h(\boldsymbol{r}) + g(\boldsymbol{r}) \Delta h(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}^3 r = \oint_{\partial V} g(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{\nabla} h(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{f}$$

$$\int_V g(\boldsymbol{r}) \Delta h(\boldsymbol{r}) g(\boldsymbol{r}) - h(\boldsymbol{r}) \Delta g(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}^3 r = \oint_{\partial V} g(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{\nabla} h(\boldsymbol{r}) - h(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{\nabla} g(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{f}$$

1.4 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

1.5 Incomplete/Unassigned

$$\boldsymbol{\nabla} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = -\boldsymbol{\nabla}' \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

$$\int_a^b u(x) v'(x) \mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) \mathrm{d}x$$

Dirichlet Randwertproblem $\quad \Delta_r \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{q} \Phi(\boldsymbol{r}$$

Poisson-Gleichung $\quad \Delta \Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\boldsymbol{r})$

$$H(x) := \int_{-\infty}^x \delta(s) \mathrm{d}s = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

Literaturverzeichnis

[1] OnlineMathe das mathe-forum *Elektrisches Potential einer homogen geladenen Kugel*
`https://www.onlinemathe.de/forum/Potential-einer-homogen-geladenen-Kugel`