

Theoretische Physik II

Elektrodynamik

Vorlesung von Prof. Dr. Michael Thoss im Wintersemester 2018

Daniil Aktanka
Patrick Munnich
Andr  z Gockel

1. Dezember 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Grundbegriffe	2
2	Elektrostatik	4
2.1	Einführung	4
2.2	Integralsätze	5
2.3	Helmholtz-Zerlegung	6
2.4	Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik	7
2.5	Elektrostatische Feldenergie	7
2.6	Einfache elektrostatische Probleme	8
2.7	Randwertprobleme der Elektrostatik	8
2.7.1	Multipolentwicklung	11
2.8	Incomplete/Unassigned	12
	Anhang	13
.1	Methode der Spiegelladungen	14
2.2	Funktionen der Kugelfläche	14

Kapitel 1

Grundbegriffe

Ladung

$$\begin{aligned}\text{diskrete Ladungsverteilung} \quad Q &= \sum_{i=1}^n q_i \\ \text{kontinuierliche Ladungsverteilung} \quad Q &= \int_V \rho(\mathbf{r}) \, d^3r \\ \text{Punktladung} \quad \rho(\mathbf{r}) &= q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ n \text{ Punktladungen} \quad \rho(\mathbf{r}') &= \sum_{j=1}^n q_j \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j)\end{aligned}$$

Coulomb'sches Gesetz

$$\begin{aligned}\text{zwei Punktladungen} \quad \mathbf{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = -\mathbf{F}_{21} \\ n \text{ Punktladungen} \quad \mathbf{F}_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \sum_{j=2}^n q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \\ \text{Beziehung zur } E\text{-Feld} \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \text{Beziehung zur Potential} \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= -\nabla q \varphi(\mathbf{r})\end{aligned}$$

Elektrisches Feld

$$\begin{aligned}\text{im bel. Raumpunkt} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \\ \text{diskret} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=2}^n q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \\ \text{kontinuierlich} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r' \\ \text{(Identität)} \quad \downarrow \quad & \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \text{wobei} \quad \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \text{Beziehung zur Potential} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla \varphi(\mathbf{r}) \\ \implies \quad \nabla \times q \mathbf{E} &= 0 \quad \text{d.h., die Coulomb-Kraft ist konservativ}\end{aligned}$$

Skalare Elektrische Potential

$$\text{im bel. Raumpunkt kontinuierlich} \quad \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'$$

$$\text{im bel. Raumpunkt diskret} \quad \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}$$

$$\text{Spannung / Potentialdifferenz} \quad U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

Operator Nomenklatur

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \nabla \cdot \mathbf{A} & \begin{cases} > 0, & \text{Quelle} \\ = 0, & \text{quellenfrei} \\ < 0, & \text{Senke} \end{cases} \\ \operatorname{grad} \mathbf{A} &= \nabla \mathbf{A} \\ \text{(eng. curl)} \quad \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \nabla \times \mathbf{A} & \text{Wirbel} \end{aligned}$$

Produktformeln

f, g sind skalare Felder, \mathbf{F}, \mathbf{G} sind Vektor Felder:

$$\begin{aligned} \nabla(fg) &= f\nabla(g) + g\nabla(f) \\ \nabla \cdot (f\mathbf{G}) &= f\nabla \cdot (\mathbf{G}) + \mathbf{G} \cdot \nabla(f) \\ \nabla(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= \mathbf{G} \cdot \nabla \times (\mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot \nabla \times (\mathbf{G}) \\ \nabla \times (f\mathbf{G}) &= f\nabla \times (\mathbf{G}) - \mathbf{G} \times \nabla \end{aligned}$$

Identitäten

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla F) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F} \\ \nabla \times (\nabla f) &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= 0 \\ \nabla \times (\mathbf{a} \times \nabla f) &= \mathbf{a}\Delta f - \nabla(\mathbf{a} \cdot \nabla f) \end{aligned}$$

Additionstheorem

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r r' \cos \theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad \text{in Kugelkoordinaten}$$

$$r_{<} = \min(r, r'), \quad r_{>} = \max(r, r')$$

Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} f(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

wobei:

$$r \in [0, \infty), \quad \Theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

Kapitel 2

Elektrostatik

2.1 Einführung

Dirac'sche Delta-Funktion

Definition

$$\int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) d^3r := \begin{cases} 1, & \mathbf{r}_0 \in V \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \quad \forall \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$$

Bemerkung: Die δ -Funktion ist keine Funktion im üblichen mathematischen Sinne. Man bezeichnet sie deshalb als **uneigentliche Funktion** oder als **Distribution**. Heuristisch:

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Formeln

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0), & a < x_0 < b \\ \frac{1}{2}f(x_0), & x_0 = a \vee b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$“ f(x) \delta'(x - x_0) = -f'(x) \delta(x - x_0) ” \quad (\text{heuristisch})$$
$$\delta(x - x_0) = \frac{d}{dx} \Theta(x - x_0) \quad (\Theta \text{ sei die Stufenfunktion})$$
$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Mehrdimensionale Delta-Funktion

Kartesisch (x,y,z)	$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$
Kugel (r, θ , φ)	$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{r_0^2 \sin \theta_0} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$
Zylinder (ρ , ϕ , z)	$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{\rho_0} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0)$

2.2 Integralsätze

Einleitung: Fluss

Definition Sei $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = (a_1(\mathbf{r}), a_2(\mathbf{r}), a_3(\mathbf{r}))$ ein Vektorfeld, V ein Volumen und $S(V)$ die Oberfläche. Dann heisst $\Phi_S(\mathbf{a})$ der Fluss (*eng. flux*) von $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ durch die Fläche S wenn es gilt:

$$\Phi_S(\mathbf{a}) = \int_S \mathbf{a}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{f}$$

Geschlossene Fläche Das Oberflächenintegral über eine geschlossene Fläche wird durch ein spezielles Integralzeichen symbolisiert:

$$\Phi_S(\mathbf{a}) = \oint_S \mathbf{a}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{f}$$

Satz von Stokes

Bedeutung Ganz allgemein gesagt handelt es sich um einen sehr grundlegenden Satz über die Integration von Differentialformen. Es geht darum, n -dimensionale Volumenintegrale über das Innere in $(n - 1)$ -dimensionale Randintegrale über die Oberfläche des Volumenstücks umzuwandeln. Für uns sind die Spezialfälle am wichtigsten, bei denen der Gauß'sche Satz und der Kelvin-Stokes'sche Satz (Rotationssatz).

Rotationssatz (*auch* Klassische Integralsatz von Stokes)

Seien $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ ein hinreichend oft differenzierbares Vektorfeld und F eine Fläche mit dem Rand $C(F) = \partial F$. Dann gilt:

$$\int_F \nabla \times \mathbf{a} \, d\mathbf{f} = \int_{\partial F} \mathbf{a} \, d\mathbf{r}$$

Gauß'sche Satz

(*eng. Divergence Theorem*)

Definition Der elektrische Nettofluss Φ durch eine hypothetische geschlossene Oberfläche S ist gleich $\frac{1}{\varepsilon_0}$ mal die elektrische Nettoladung Q innerhalb dieser geschlossenen Oberfläche.

Integrale Form

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{f} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Wobei Q die Gesamtladung innerhalb V ist.

Differentielle Form

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Wobei ρ die Gesamtladungsdichte (pro Einheit Volumen) ist.

Beziehung

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, d^3r = \oint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{f}$$

Greensche Sätze

Die Green'sche Sätze (Identitäten) lassen sich aus Anwendungen des Gauß'schen Satzes ableiten. Hierfür wurde die folgende Definition der Normalableitung benutzt.

Normalableitung

Sei ψ ein mindestens zweimal stetig differenzierbares, skalares Feld auf einer Fläche $S(V)$. Sei $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ eine (ortsabhängige) Flächennormale. Dann gilt:

$$\nabla\psi \cdot \mathbf{n} \equiv \frac{\partial\psi}{\partial n}$$

1. Green'sche Identität

$$\int_V (\varphi \Delta\psi + (\nabla\psi \cdot \nabla\varphi)) \, d^3r = \oint_S \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} \, df$$

Wobei φ und ψ Skalarfunktionen sind, angenommen sei φ einfach und ψ zweifach stetig differenzierbar.

2. Green'sche Identität

$$\int_V (\varphi \Delta\psi - \psi \Delta\varphi) \, d^3r = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) \, df$$

Wobei φ und ψ beide zweifach stetig differenzierbar sind.

Bemerkung: Die beiden oben genannten Green'schen Identitäten sind Spezialfällen und gelten nur unter Bedingungen.

2.3 Helmholtz-Zerlegung

Bedeutung

Zusammengefasst besagen der Satz, dass unter gewissen Voraussetzungen jedes Vektorfeld $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ eindeutig durch sein Quellenfeld $\nabla \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r})$ und sein Wirbelfeld $\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r})$ bestimmt ist. Oder anders ausgedrückt: (fast) jedes Vektorfeld lässt sich eindeutig als Summe eines wirbelfreien und eines quellenfreien Anteils darstellen.

Aussage des Theorems

Sei F ein zweifach stetig differenzierbares Vektorfeld über ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^3 und S eine Oberfläche welche dieses Gebiet umschließt. Dann kann F in eine curl-freie Komponente und eine divergenzfreie Komponente zerlegt werden:

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{A}$$

Wobei die beiden einander ergänzenden Potentiale Φ und A lassen sich durch die folgenden Integrale aus dem Feld F , über das die Felder enthaltende Volumen V , gewinnen:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV'$$

Schlussfolgerungen

- Ein wirbelfreies Feld ($\nabla \times \mathbf{a} = 0$) ist ein Gradientenfeld.
- Ein quellenfreies Feld ($\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$) ist ein Rotationsfeld.

2.4 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

Differenzielle Darstellung

$$\text{physikalischer Gau\ss'scher Satz} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

$$\text{Faraday'sche Induktionsgesetz} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Integrale Darstellung

$$\text{physikalischer Gau\ss'scher Satz} \quad \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \frac{1}{\varepsilon_0} q(V)$$

$$\text{Faraday'sche Induktionsgesetz} \quad \int_{\partial F} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Poisson Gleichung (Einführung)

Durch die Einführung des skalaren Potentials $\phi(\mathbf{r})$ lassen sich die beiden Maxwell-Gleichungen zusammenfassen zur so genannten Poisson-Gleichung.

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r})$$

Die Lösung dieser linearen, inhomogenen, partiellen Differenzialgleichung 2. Ordnung bezeichnet man als das Grundproblem der Elektrostatik. Ist der Raumbereich ladungsfrei, dann bekommt man die Laplace-Gleichung:

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = 0$$

Die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung lässt sich als Summe einer speziellen Lösung der Poisson-Gleichung und der allgemeinen Lösung der Laplace-Gleichung darstellen.

2.5 Elektrostatische Feldenergie

Definition

Die Energie einer auf einen endlichen Raumbereich beschränkten Ladungskonfiguration $\rho(\mathbf{r})$ entspricht der Arbeit, die notwendig ist, um Ladungen aus dem Unendlichen ($\phi(\infty) = 0$) zu dieser Konfiguration zusammenzuziehen.

Formeln

$$\text{diskret} \quad W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

$$\text{kontinuierlich} \quad W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int \int \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} d^3r d^3r' = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) d^3r$$

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 d^3r$$

$$\text{Energiedichte} \quad w = \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2$$

2.6 Einfache elektrostatische Probleme

Elektrisches Potential einer homogen geladenen Kugel

Zur Lösung des Problems können wir das Poisson-Integral verwenden. [1]

Methode der Spiegelladungen

(*eng.* Method of Image Charges)

Beschreibung Die Spiegelladung (oder Bildladung) ist eine gedankliche Hilfsstütze, um das Verhalten einer Ladung Q vor einem leitenden Körper im Abstand R zu veranschaulichen. Beim Fall eines Leiters wird die gesamte influenzierte Ladung dafür anschaulich zu einer Punktladung zusammengefasst. Aus Symmetriegründen wird diese Punktladung als Spiegelladung bezeichnet. (für physikalische Grundlagen siehe Anhang.1)

Punktladung und die ungeladene Metallkugel Sein r und r' die Abstände zur realen- und Spiegelladung, mit Koordinatenursprung im Zentrum des Kugels mit Radius R . Dann liegen die beide Ladungen auf einer Gerade, wobei (mittels Kreisspiegelung) gilt:

$$\begin{aligned} r' &= \frac{R^2}{r} \\ q' &= q \frac{R}{r} \end{aligned}$$

Bem. Die Platzierung elektrischer Ladungen sollte irrelevant sein.

2.7 Randwertprobleme der Elektrostatik

Formulierung des Problems

Das Ziel ist Lösung der Poisson-Gleichung zu finden, was man als das Grundproblem der Elektrostatik bezeichnet. Falls die das Potential $\varphi(\mathbf{r})$ erzeugende Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}')$ bekannt ist und keine spezielle Randbedingungen auf Grenzflächen im Endlichen zu erfüllen sind, dann reicht die folgende allgemeine Lösung völlig aus:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad \text{Poisson-Integral}$$

Ist ρ räumlich begrenzt, so gilt insbesondere

$$\varphi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0; \quad \nabla \varphi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

Dies ist jedoch bei vielen praktischen Problemen nicht der eigentliche Ausgangspunkt.

Definition

Gegeben: $\rho(\mathbf{r}')$ in einem gewissen Raumbereich V , φ oder $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$

Gesucht: Das skalare Potential $\varphi(\mathbf{r})$ in allen Punkten \mathbf{r} des interessierenden Raumbereichs V

Klassifikation der Randbedingungen

Dirichlet-Randbedingungen	φ auf $S(V)$ gegeben
Neumann-Randbedingungen	$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$ auf $S(V)$ gegeben

Von gemischten Randbedingungen spricht man, wenn diese auf $S(V)$ stückweise Dirichlet- und stückweise Neumann-Charakter haben.

Green'sche Funktion

Mathematische Definition Die Green'sche Funktion $G(x, x_0)$ eines linearen Differentialoperators $L = L(x)$, der auf Verteilungen über einer Teilmenge des euklidischen Raums an einem Punkt x_0 wirkt, ist eine Lösung von:

$$LG(x, x_0) = \delta(x - x_0)$$

wobei δ die Deltafunktion ist.

Lösung der Poisson-Gleichung für eine Punktladung $q = 1$ Es gilt:

$$\Delta_r G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Wobei die Funktion in \mathbf{r} und \mathbf{r}' symmetrisch ist; d.h., wir können den Laplace-Operator auf die Variable \mathbf{r}' wirken lassen. Die δ -Umformung liefert:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') , \quad \nabla_r f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad \text{Bedingung}$$

Für $\mathbf{r} \in V$ allgemeine Lösung gilt:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r' - \varepsilon_0 \int_{S(V)} \left(\underbrace{\varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial G}{\partial n'}}_{=0 \text{ Neumann}} - \underbrace{G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi}{\partial n'}}_{=0 \text{ Dirichlet}} \right) df'$$

Wobei je nach Bindungstyp wird ein Teil des Integrals zu null.

Green'sche Funktion für die Kugel

$$\begin{aligned} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{\left| \frac{r'}{R} \mathbf{r} - \frac{R}{r'} \mathbf{r}' \right|} \right) = \frac{1}{q} \Phi(\mathbf{r}) \quad \text{mit } \Phi \text{ Potential hom. gel. Kugel} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[(r^2 + r'^2 - 2r r' \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_{r'})^{-1/2} + \left(\frac{r^2 r'^2}{R^2} + R^2 - 2r r' \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_{r'} \right)^{-1/2} \right] \end{aligned}$$

Separation der Variablen

Wir suchen nach weiteren Lösungsmethoden für die Poisson-Gleichung,

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r})$$

die eine lineare, partielle, inhomogene Differenzialgleichung zweiter Ordnung für ein Gebiet darstellt, auf dessen Rand gewisse Bedingungen vorgeschrieben sind. Benutze:

$$\text{Separationsansatz} \quad \varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x, y, z) = f(x) g(y) h(z)$$

Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

Exkurs: Funktionen der Kugelfläche Siehe Anhang 2.2

Methode Wir suchen eine Lösung der Laplace-Gleichung $\Phi(r, \theta, \varphi)$ in Kugelkoordinaten. Wir benutzen den Entwicklungssatz, um das Potential Φ durch diese Funktionen auszudrücken:

gesucht ist die Lösung von: $\Delta\Phi(r, \theta, \varphi) = 0$

$$\text{benutze: } \Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} R_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Wir wenden darauf den Laplace-Operator an. Dies führt zu der so genannten Radialgleichung:

$$\frac{1}{r^2} \frac{dR}{dr} \left[r^2 \frac{dR}{dr} \right] - \frac{l(l+1)}{r^2} R = 0$$

Mit einem Ansatz gelöst hat das Potential Φ damit die allgemeine Gestalt:

$$\text{allgemeine Gestalt} \quad \Delta\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$\text{azimutaler Symmetrie} \quad \Delta\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left[A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos \theta)$$

Potential einer Punktladung

Es gibt eine alternative Multipolentwicklung, wenn man den $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ Term nach Kugelflächenfunktionen entwickelt. Wir denken uns eine Kugel mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt und dem Radius r_0 . Es gilt für das Potential der Punktladung:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \frac{q}{\epsilon_0 r_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{l}{2l+1} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^l Y_{lm}^*(\theta_0, \varphi_0) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

wobei die folgende Notation eingeführt wurde:

$$\begin{aligned} \text{innerhalb } (r < r_0) : & \quad r = r_{<} , \quad r_0 = r_{>} \\ \text{außerhalb } (r > r_0) : & \quad r = r_{>} , \quad r_0 = r_{<} \end{aligned}$$

2.7.1 Multipolentwicklung

Eine Multipolentwicklung ist eine mathematische Reihe einer winkelabhängigen Funktion. In Physik ist es normalerweise die Reihenentwicklung eines Potentials, bei der verschiedene Multipol-Momente auftreten. Man unterscheidet zwischen kartesischer und sphärischer Multipolentwicklung.

Definition

Multipol - eine beliebige räumliche Anordnung von (elektrischen oder anderen) diskreten Ladungen oder, im magnetischen Fall, Dipolen. Durch eine Multipolentwicklung kann ein Potentialfeld durch Punktladungen angenähert werden.

Methode

Wir betrachten eine statische, lokalisierte Ladungsverteilung:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} \text{beliebig,} & r < R_0 \\ 0, & r > R_0 \end{cases}$$

Im Bereich $r > R_0$ kann das elektrostatische Potenzial Φ nach Potenzen von R_0/r entwickelt werden. Diese Multipolentwicklung wird im Folgenden auf zwei Arten abgeleitet.

Sphärische Darstellung

Unter Verwendung von Kugelflächenfunktionen gilt für den Potential:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= \frac{q_{00}}{r} + \frac{q_{10}}{r^2} \cos \theta \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{q_{1,\pm 1}}{r^2} \sin \theta \exp(\pm i\varphi) \pm \dots \end{aligned}$$

sphärische Multipolmomente:

$$q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

Kartesische Darstellung

Sei $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = [(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2]^{1/2}$. Dann gilt:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \quad (r > R_0)$$

kartesische Multipolmomente:

$$\begin{aligned} q &= \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') && \text{Ladung} \\ p_i &= \int d^3r' x'_i \rho(\mathbf{r}') && \text{Dipolmoment} \\ Q_{ij} &= \int d^3r' (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}') && \text{Quadrupolmoment} \end{aligned}$$

Unter orthogonalen Transformationen ist q ein Skalar, p_i ein Vektor und Q_{ij} ein Tensor zweiter Stufe.

2.8 Incomplete/Unassigned

Still Missing

- multipole cartesian

Anhang

.1 Methode der Spiegelladungen

Wird ein leitender Körper in ein äußeres elektrisches Feld gebracht, so stehen meistens zu Beginn die Feldlinien noch nicht senkrecht auf der Oberfläche. Dies führt zu Potentialunterschieden entlang der Oberfläche, welche die frei beweglichen Elektronen dazu bringen sich so zu verschieben, dass die Feldlinien senkrecht auf die Oberfläche treffen (äußere elektrische Felder nehmen innerhalb leitender Körper exponentiell mit der Zeit ab). Da das äußere elektrische Feld auch Potentialunterschiede im Körper verursacht, bewegen sich die Elektronen innerhalb des Körpers so, dass dort überall das gleiche Potential herrscht. Theoretisch führt das demzufolge zu Oberflächenladungsdichten. Mikroskopisch nah betrachtet halten die Elektronen zueinander einen Abstand und deshalb befinden sich die Influenzladungen immer nur sehr nahe an der Oberfläche, sind aber keine echten Oberflächenladungen.

Da die elektrischen Feldlinien senkrecht auf der Oberfläche stehen, verändert der leitende Körper das elektrische Feld so, dass seine Oberfläche mit einer Äquipotentialfläche übereinstimmt. Zur mathematischen Behandlung wird demzufolge zu dem vorhandenen äußeren elektrischen Feld ein zweites elektrisches Feld eingeführt mit der Randbedingung, dass das superponierte Feld senkrecht auf der Oberfläche steht. Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass das elektrische Potential an der Oberfläche überall konstant, der Einfachheit halber gleich 0 ist.

2.2 Funktionen der Kugelfläche

Die Kugelflächenfunktionen sind ein vollständiger und orthonormaler Satz von Eigenfunktionen des Winkelanteils des Laplace-Operators. Dieser Winkelanteil zeigt sich, wenn der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten geschrieben wird. Die Kugelflächenfunktionen haben eine große Bedeutung für die Lösung partieller Differentialgleichungen. Sie treten zum Beispiel bei der Berechnung von Atomorbitalen auf, da die beschreibende zeitunabhängige Schrödingergleichung den Laplace-Operator enthält und sich das Problem am besten in Kugelkoordinaten lösen lässt.

In Kugelkoordinaten (r, θ, φ) lässt sich der Laplace-Operator wie folgt schreiben:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi}$$

$$\Delta_{\theta, \varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Die Eigenfunktionen der Operatoren $\Delta_{\theta, \varphi}$ und $i \frac{\partial}{\partial \varphi}$,

$$\Delta_{\theta, \varphi} Y_{lm}(\theta, \varphi) = -l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$i \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{lm}(\theta, \varphi) = -m Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

heißen **Kugelflächenfunktionen** $Y_{lm}(\theta, \varphi)$:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi); \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$$

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) \exp(im\varphi)$$

$$Y_{l-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \varphi)$$

$P_l^m(z)$ sind **zugeordnete Legendre-Polynome**

$$P_l^m(z) = (-1)^m (1-z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} P_l(z)$$

$$P_l^{-m}(z) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(z)$$

welche die Lösungen der **verallgemeinerten Legendre-Gleichung** sind:

$$\frac{d}{dz} \left[(1-z^2) \frac{dP}{dz} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right] P(z) = 0$$

$P_l(z)$ sind **Legendre-Polynome**

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1)^l$$

welche die Lösungen der **gewöhnlichen Legendre-Gleichung** sind:

$$\frac{d}{dz} \left[(1-z^2) \frac{dP}{dz} \right] + l(l+1)P(z) = 0$$

$$P_l(\pm 1) = (\pm 1)^l \quad \text{nicht auf 1 normiert}$$

Orthogonalitätsrelationen:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} dz P_l(z) P_k(z) &= \frac{2}{2l+1} \delta_{lk} \\ \int_{-1}^{+1} dz P_l^m(z) P_k^m(z) &= \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{lk} \\ \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(m-m')\varphi} &= 2\pi \delta_{mm'} \\ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) &= \delta_{ll'} \delta_{mm'} \end{aligned}$$

Vollständigkeitsrelationen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(z') P_l(z) &= \delta(z - z') \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) &= \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos\theta - \cos\theta') \end{aligned}$$

Entwicklungssatz:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}) = f(r, \theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} R_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ R_{lm}(r) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta f(r, \theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

Additionstheorem:

$$\sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\gamma) \quad , \quad \gamma = \angle(\theta' \varphi', \theta \varphi)$$

Spezielle Funktionen:

$$P_0(z) = 1$$

$$P_1(z) = z$$

$$P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1)$$

$$P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z), \dots;$$

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi}$$

$$Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right), \dots;$$

Literaturverzeichnis

- [1] OnlineMathe das mathe-forum *Elektrisches Potential einer homogen geladenen Kugel*
<https://www.onlinemathe.de/forum/Potential-einer-homogen-geladenen-Kugel>