

# Experimental Physik III

Andréz Gockel  
Patrick Munnich  
Daniil Akthonka

30. Januar 2019

# Kapitel 1

## Aufgaben

### 1.1

#### 1.1.1

Rotationsmatrix:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

#### 1.1.2

Galilei Transformation

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

#### 1.1.3

$$\begin{aligned} E &= \Delta\phi \\ E &= E_0 \cos(\underbrace{kx - \omega t}_{\phi}) \\ k &= \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{c}{2\pi\lambda} \end{aligned}$$

Nichtrelativistisches Additionsgesetz der Geschwindigkeiten:

$$v_{\text{nr}} = u + v$$

Relativistisch:

$$v_{\text{r}} = \frac{u + v}{1 + \frac{vu}{c^2}}$$

Geschwindigkeitsaddition:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, & u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \\ u_y &= \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} u'_y}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, & u'_y &= \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} u_y}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \\ u_z &= \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} u'_z}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, & u'_z &= \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} u_z}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \end{aligned}$$

### 1.1.4

Math.

## 1.2

### 1.2.1

### 1.2.2

Minkowsky Diagram  $(x, ct)$ . Oben Zukunft, unten Vergangenheit, rest "woanders".

Bewegte Beobachter haben andere  $x$  und  $ct$  Achsen. Alles parallel zu  $x$  bzw  $x'$  wird gleichzeitig beobachtet.

Winkel zwischen  $x$  und  $x'$  bzw  $ct$  und  $(ct)'$ :

$$\tan \alpha = \frac{v}{c} = \beta$$

Längeneinheit  $U$ :

$$U' = U \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}}$$

### 1.2.3

Längenkontraktion:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Zeitdilatation:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Maßelos  $\Rightarrow$  Zeitdilatation/Längenkontraktion findet nicht statt.

## 1.3

### 1.3.1

Newton mechanics LUL

### 1.3.2

$$p = \frac{E}{c}$$

### 1.3.3

$$E = mc^2 = pc = hf$$

### 1.3.4

triggerreddaniil.jpeg

### 1.3.5

Harmonic oscillator solution:

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2} e^{-i\omega t}$$

$$a + ib \times \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a + b}{a^2 + b^2}$$

b) and c) ???

## 1.4

### 1.4.1

Fermat:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$$n = \frac{c}{v}$$

### 1.4.2

You can unfold boxes.

### 1.4.3

#### Common exam question

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{\text{opposite}}{\text{hypotenuse}} \\ \cos \theta &= \frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}} = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ \tan \theta &= \frac{\text{opposite}}{\text{adjacent}}\end{aligned}$$

### 1.4.4

Fermat and cosine/sine.

### 1.4.5

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi$$

## 1.5

### 1.5.1

$$\begin{aligned}F(\omega) &= FT[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(t) dt \\ f(t) &= FT^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} F(\omega) d\omega\end{aligned}$$

### 1.5.2

$$\begin{aligned}I_T &= I_0 \frac{1}{1 + f \sin^2 \left( \frac{\Delta\varphi}{2} \right)} \\ f &= \frac{4R}{(1 - R)^2}\end{aligned}$$

I'd suggest reading through the problem, since context is important here. It's the Fabry-Perot experiment.

$$\frac{\Delta\varphi}{2} = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

### 1.5.3

???

## 1.6

### 1.6.1

Einzelspalt:

$$E(kx) = E_0 \int_{-d/2}^{d/2} e^{ik_x x} dx = E_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d \frac{\sin\left(\frac{k_x d}{2}\right)}{k_x \frac{d}{2}}$$

### 1.6.2

$$I(\alpha) = I_0 \alpha^2 \frac{\sin^2(x)}{\sin^2\left(\frac{x}{N}\right)}$$

### 1.6.3

Rayleigh:

$$\delta_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$
$$2NA = 2 \sin \alpha = \frac{D}{f}$$

### 1.6.4

## 1.7

### 1.7.1

$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

### 1.7.2

Muh polarisation

### 1.7.3

$$\frac{1}{2} n_1 c \varepsilon_0 E_i + \frac{1}{2} n_1 \varepsilon_0 E_r = \frac{1}{2} n_2 \varepsilon_0 E_t$$
$$E_i = E_r + E_t$$

### 1.7.4

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$$
$$n = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

## 1.8

### 1.8.1

$$(\vec{p} = p_0 \vec{z})$$

$$(\vec{p} = q \hat{z} \sin \omega t)$$

$$\left( \frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4 (\rho_0(\omega))^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dP/d\Omega}{\langle u \rangle} \sin^2 \theta$$

$$\langle u \rangle = \frac{c \varepsilon_0 E_0^2}{2}$$

$$m_e \frac{d^2 z}{dt^2} = e E_0 \sin \omega t$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \sin^2 \theta$$

Totaler Streuquerschnitt:

$$\sigma_T = \int \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$
$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

### 1.8.2

Homo Ansatz:

$$x = A \sin \omega t$$

### 1.8.3

Spontane Emission:

$$\dot{n}_1 = -A_{1 \rightarrow 0} n_1$$

$$\dot{n}_0 = +A_{1 \rightarrow 0} n_1$$

Photon Absorption

$$\dot{n}_0 = -B_{1 \rightarrow 0} \rho(\nu) n_0$$

$$\dot{n}_1 = +B_{1 \rightarrow 0} \rho(\nu) n_0$$

Stimulierte Emission

$$\dot{n}_0 = +B_{1 \rightarrow 0} \rho(\nu) n_1$$

$$\dot{n}_1 = -B_{1 \rightarrow 0} \rho(\nu) n_1$$

Gleichgewicht  $n_1$ :

$$A_{1\rightarrow 0}n_1 - B_{0\rightarrow 1}\rho(\nu)n_0 + B_{1\rightarrow 0}\rho(\nu)n_1 = 0$$

## 1.9

### 1.9.1

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E = qU$$

$$F_{\text{El}} = qE$$

$$F_{\text{M}} = qvB$$

### 1.9.2

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\int |\vec{E}| dx = \Delta U$$

$$\text{Gaußscher Satz } |\vec{E}| 2\pi r = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

### 1.9.3

$$|\vec{k}|^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\text{Sphere } V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

### 1.9.4

$$F_{\text{Auftrieb}} = -\rho V \vec{g}$$

## 1.10

### 1.10.1

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$p_n = \frac{\exp(-\beta E_n)}{\sum_n \exp(-\beta E_n)}$$

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$E_n = nhf$$



## 1.10.2

”Literally nothing”

## 1.10.3

”~~meth~~ math”

## 1.10.4

Homework 9

## 1.11

### 1.11.1

$$qU = hf - W_A$$

### 1.11.2

Same as 1 from homework 10.

### 1.11.3

Bragg:

$$2d \sin \theta = n\lambda$$

Maxima Einzelspalt:

$$d \sin \theta = n\lambda$$

### 1.11.4

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

### 1.11.5

$$\int \psi^* \psi dx = 1$$

$$\int xp(x) dx = \text{Erwartungswert}$$

## 1.12

### 1.12.1

Same as 11’s number 5.

### 1.12.2

Erwartungswert:

$$\langle \psi | \hat{S}_z | \psi \rangle, \text{ mit } \hat{S}_z | \uparrow / \downarrow \rangle = \pm 1/2 | \uparrow / \downarrow \rangle$$

Übergangswahrscheinlichkeit

$$W = |\psi_{\text{final}}^* \psi_{\text{initial}}|^2 = \int \psi_{\text{final}}^* \psi_{\text{initial}} dV = |\langle \psi_{\text{final}} | \psi_{\text{initial}} \rangle|^2$$

$$p_+ + p_- = 0$$

### 1.12.3

zeitabh. Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = \hat{H} |\psi, t\rangle$$

zeitunabh. Schrödingergleichung

$$\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle$$

### 1.12.4

Zeitentwicklung

$$U_t \psi = e^{-i \frac{|E_n|}{\hbar} t} \psi$$

# Kapitel 2

## Themen

### 2.1 Relativitäts Theorie

#### 2.1.1 Experimente

**Fizeau-Experiment** In den beiden Rohren der Länge  $l$  fließt eine Flüssigkeit mit dem Brechungsindex  $n$  mit einer Geschwindigkeit  $v$ . Licht der Wellenlänge  $\lambda$  wird durch einen Strahlteiler (BS) aufgeteilt, und die beiden Strahlen werden von den Spiegeln M2, M3, M4 so reflektiert, dass sie vor dem Auftreffen auf die Kamera die gleiche Strecke zurücklegen; der eine Strahl im Uhrzeigersinn (BS  $\rightarrow$  M2  $\rightarrow$  M3  $\rightarrow$  M4  $\rightarrow$  BS) und der Andere gegen den Uhrzeigersinn (BS  $\rightarrow$  M4  $\rightarrow$  M3  $\rightarrow$  M2  $\rightarrow$  BS).

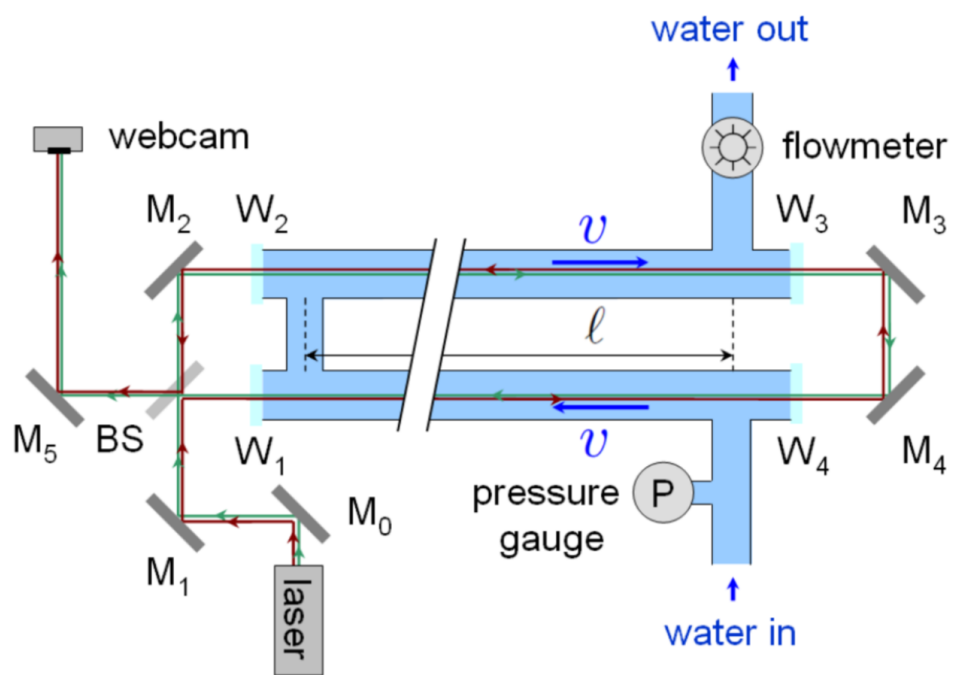


Abbildung 2.1: Fizeau-Experiment

# Kapitel 3

## Skript

### 3.1 Spezielle Relativitätstheorie

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Lorenz-Trafo:

$$x' = \gamma(x - ut), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right)$$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

$$v'_y = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{1 - \frac{uv_z}{c^2}}$$

$$v'_z = \frac{1}{\gamma} \frac{v_z}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

Zeitdilatation:

$$t' = \frac{1}{\gamma} t$$

Längenkontraktion:

$$l' = \gamma l$$

Doppler: Klassisch:

$$f_B = f_s \frac{c + v_B}{c - v_S}$$

Relativistisch:

$$f_B = f_s \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \cos \alpha \frac{u}{c}}$$

Relativistischer Impuls:

$$\vec{p} = m(v)\vec{v} = \gamma(v)m_0\vec{v}$$

Relativistische Energie-Impuls-Beziehung und Viererimpuls

$$E^2 = (m_0 c^2)^2 + c^2 \vec{p}^2$$

## 3.2 Geometrische Optik

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Lieblingsprüfungsfrage: Parallel einfallendes Licht, das nicht parallel zur optischen Achse verläuft, in eine Sammellinse. Strahlen werden immer noch fokussiert aber Brennpunkt verschoben. Konstruktion mit Zentralstrahlengang!

Berechnung Brennpunkt bzw Brennweite

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Brechkraft:

$$D = \frac{n}{f}$$

Abbildung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{GrödesObjkts}}{\text{EntfernungdesObjekts}}$$

$$V = \frac{\text{SehwinkelmitInstrment}}{\text{SehwinkelohneInstrument}}$$

$$L = \frac{\text{Bildgröße}}{\text{Gegenstandsgröße}}$$

Zwei Linsen:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

$$D_{\text{ges}} = D_1 + D_2$$

Elektronenoptik:

Brechindex

$$\frac{n_2}{n_1} = \sqrt{1 + \frac{U}{U_0}}$$

## 3.3 Wellenoptik

Harmonische Ebene 1D Welle:

$$A(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

FOURIER TRANSFORMATION

Kohärenz = Wellen dessen Zeitabhängigkeiten bis auf Phasendifferenz gleich sind.

Doppelspalt

Maxima:

$$\sin \alpha = n \frac{\lambda}{d}$$

Minima:

$$\sin \alpha = \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{d}$$

Einzelspalt:

Intensität:

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2(x)}{x^2}$$

Minima:

$$\sin \alpha = n \frac{\lambda}{b}$$

Nebenmaxima:

$$\sin \alpha = \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{b}$$

Gitter:

Intensität:

$$I(\alpha) = A^2$$

Hauptmaxima:

$$\sin \alpha = m \frac{\lambda}{d}$$

Nebenmaxima:

$$\sin \alpha = m \frac{\lambda}{Nd}$$

Breite Hauptmaxima:

$$B = \frac{2\lambda}{Nd}$$

$\Rightarrow$  scharfe Linien

Bragg:

Kristall kann als regelmäßige Anordnung von Atomen als Raumgitter betrachtet werden:

$$2d \sin \alpha = m\lambda$$

Interferenz an planparallelen Glasplatten: Just look at the script.

Airy-Formeln:

$$\begin{aligned} I_R &= I_0 \frac{F \sin^2 \left( \frac{\Delta\varphi}{2} \right)}{1 + F \sin^2 \left( \frac{\Delta\varphi}{2} \right)} \\ I_T &= I_0 \frac{1}{1 + F \sin^2 \left( \frac{\Delta\varphi}{2} \right)} F &= \frac{4R}{(1 - R)^2} \\ \frac{\Delta\varphi}{2} &= 2\pi \frac{d}{\lambda} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

Kirchhoffsches Beugungsintegral

$$\vec{E}(\vec{x}') = \frac{ik}{2\pi} \int Q\tau(x, y) \vec{E}_{\text{ein}}(\vec{x}) \frac{e^{-ikr}}{r} d\sigma$$

$Q$  Neigungsfaktor,  $\tau$  Transmissionsfunktion (0 oder 1),  $r$  Abstand  $|\vec{x} - \vec{x}'|$   
 Beugungsintegral Fraunhofer Beugung:

$$\vec{E}(\vec{x}') = A(\vec{x}') \vec{F} \left( k \frac{x'}{z'}, k \frac{y'}{z'} \right)$$

Auflösung Lochblende/Linse:

$$\sin \alpha_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

Auflösung Mikroskop:

$$\delta_x \approx 0.61 \frac{\lambda}{n \sin \varphi}$$

### 3.4 Licht-Materie Wechselwirkung

Transversale welle:

$$\vec{E} \cdot \vec{k} = 0$$

Longitudinale Welle:

$$\vec{E} \times \vec{k} = 0$$

Lineare Polarisation:

$$\vec{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \tilde{\varphi} \\ \sin \tilde{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

Zirkulare Polarisation:

$$\vec{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t - kz + \varphi) \\ \pm \sin(\omega t - kz + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jede linear polarisierte Welle kann in zwei entgegengesetzte zirkular polarisierte Wellen mit halber Amplitude zerlegt werden und umgekehrt.

Elliptische Polarisation:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \cos(\omega t - kz + \varphi) \\ E_y \cos(\omega t - kz + \varphi \pm \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Brechung durch Materie:

$$k_x \neq k_y$$

Stetigkeitsbedingungen:

??



Polarisation eines Dielektrikums:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

mikroskopisch ( $d$  induziertes Dipolmoment,  $\alpha$  Polarisierbarkeit:

$$\vec{d} = \alpha \vec{E}$$

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{d}_i$$

Wellengleichung in Materie:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} - \text{grad div } \vec{E} = 0$$

Komplex:

$$-(k^2) \hat{\vec{E}}_0 + \frac{\omega^2}{c_0^2} \hat{\varepsilon} \hat{\vec{E}}_0 + (\hat{\vec{k}} \cdot \hat{\vec{E}}_0) \hat{\vec{k}} = 0$$

mit:

$$\hat{\vec{k}}^2 = \vec{k}'^2 - \vec{k}''^2 + 2i \vec{k}' \cdot \vec{k}''$$

Transversal ( $\vec{k} \propto \vec{E}_0$ ):

$$\hat{\vec{k}}^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \hat{\varepsilon}$$

$$\omega(\hat{\vec{k}}) = c_0 \sqrt{\frac{\hat{\vec{k}}^2}{\hat{\varepsilon}}}$$

Komplexer Brechungsindex ( $K$  Extinktionskoeffizient:

$$\hat{n} = n + iK = \sqrt{\hat{\varepsilon}}$$

$$\sqrt{\hat{\vec{k}}^2} = \frac{\omega}{c_0} \hat{n}$$

Imaginärer Teil klein  $\Rightarrow n = \sqrt{\varepsilon'}$ ,  $K = \frac{\varepsilon''}{2n}$

Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d^2 \sigma}{d\Omega dE}$$

Rayleigh-Streuung ist  $\omega^4$ -abhängig, also werden niedrige Frequenzen (blau) stärker reflektiert als hohe Frequenzen (rot).

Zugängliche Infos im Linienspektrum

1. Lage/Frequenz von Peaks gibt Energiedifferenz (Übergangsenergie) an:

$$E_2 - E_1 = h\nu$$

2. Intensität hängt von Übergangswahrscheinlichkeit, Teilchendichte, und Stärke der Wechselwirkungen von Eingestrahlen mit Bestrahlen ab.
3. Linienbreite/-form ist bei Lorenzverteilung mit Lebensdauer verknüpft:

$$e^{-t/\tau}$$

Ratengleichungen  
Exponentieller Zerfall:

$$\frac{d}{dt}n(t) = -\frac{1}{\tau}[n(t) - n_{eq}]$$

Lösung:

$$n(t) = [n(0) - n_{eq}]e^{i\frac{t-t_0}{\tau}} + n_{eq}$$

Zwei-Niveausystem ( $\Gamma$  Wahrscheinlichkeit,  $n$  Besetzungszahl):

$$\dot{n}_0 = -\Gamma_{0 \rightarrow 1}n_0 + \Gamma_{1 \rightarrow 0}n_1$$

$$\dot{n}_1 = -\Gamma_{1 \rightarrow 0}n_1 + \Gamma_{0 \rightarrow 1}n_0$$

Gleichgewicht:

$$\dot{n}_0 = -\Gamma(n_0 - n_1)$$

$$\dot{n}_1 = -\Gamma(n_1 - n_0)$$

Konstante Gesamtbesetzung:

$$n_0 + n_1 = N$$

Einstein Parameter:  
Spontane Emission:

$$\dot{n}_1 = -A_{1 \rightarrow 0}n_1$$

$$\dot{n}_0 = +A_{0 \rightarrow 1}n_1$$

Photon Absorption:

$$\dot{n}_0 = -B_{0 \rightarrow 1}\rho(\nu)n_0$$

$$\dot{n}_1 = +B_{0 \rightarrow 1}\rho(\nu)n_0$$

Stimulierte Emission:

$$\dot{n}_0 = +B_{1 \rightarrow 0}\rho(\nu)n_1$$

$$\dot{n}_1 = -B_{1 \rightarrow 0}\rho(\nu)n_1$$

Gleichgewicht  $n_0$ :

$$A_{1 \rightarrow 0}n_1 - B_{0 \rightarrow 1}\rho(\nu)n_0 + B_{1 \rightarrow 0}\rho(\nu)n_1 = 0$$

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

## 3.5 Quantenphysik

Ideale Gas Gleichung:

$$PV = N_A k_B T$$

Millikan Versuch:

$$m\vec{A} = q\vec{E} + m\vec{g} - \rho V\vec{g} + 6\pi n R \vec{v}$$

Rayleigh-Jeans:

$$w(f, T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} kT$$

Besetzungszahldichte im thermodynamischen GGW:

$$p_n = \frac{e^{-\frac{nhf}{k_B T}}}{\sum_n e^{-\frac{nhf}{k_B T}}}$$

Plank'sches Strahlungsgesetz:

$$w(f) = \frac{8\pi h f^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1}$$

Photoeffekt:  
Gegenspannung

$$U_0 = \text{const.} \times f - \frac{W_A}{e}$$
$$eU = hf - W_A$$

Dispersionsrelation (Compton-Effekt):

$$E(\vec{p}) = cp$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$|\vec{E}_0| = \sqrt{\frac{\hbar \omega \rho}{\varepsilon_0}}$$

QM: Teilchenzahl-Phasen-Unschärferelation:

$$\Delta N \Delta f \geq \Pi$$