

Theoretische Physik II

Elektrodynamik

Vorlesung von Prof. Dr. Michael Thoss im Wintersemester 2018

Andréz Gockel
Patrick Munnich
Daniil Aktanka

15.10.2018

Inhaltsverzeichnis

1	Elektrostatik	2
1.1	Grundbegriffe	2
1.2	Einführung	3
1.3	Integralsätze	4
1.4	Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik	5
1.5	Incomplete/Unassigned	5

Kapitel 1

Elektrostatik

1.1 Grundbegriffe

Ladung

$$\begin{aligned}\text{diskrete Ladungsverteilung} \quad Q &= \sum_{i=1}^n q_i \\ \text{kontinuierliche Ladungsverteilung} \quad Q &= \int_V \rho(\mathbf{r}) \, d^3r \\ \text{Punktladung} \quad \rho(\mathbf{r}) &= q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ n \text{ Punktladungen} \quad \rho(\mathbf{r}') &= \sum_{j=1}^n q_j \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j)\end{aligned}$$

Coulomb'sches Gesetz

$$\begin{aligned}\text{zwei Punktladungen} \quad \mathbf{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = -\mathbf{F}_{21} \\ n \text{ Punktladungen} \quad \mathbf{F}_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \sum_{j=2}^n q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \\ \text{Beziehung zur } E\text{-Feld} \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \text{Beziehung zur Potential} \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= -\nabla q \varphi(\mathbf{r})\end{aligned}$$

Elektrisches Feld

$$\begin{aligned}\text{im bel. Raumpunkt} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \\ \text{diskrete Ladungsverteilung} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=2}^n q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \\ \text{kontinuierliche Ladungsverteilung} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \, d^3r' \\ &\quad \downarrow \begin{array}{l} \text{(Identität)} \\ \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{array} \\ \text{Beziehung zur Potential} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla \varphi(\mathbf{r}) \\ \implies \quad \nabla \times q \mathbf{E} &= 0 \quad \text{d.h., die Coulomb-Kraft ist konservativ}\end{aligned}$$

Skalare Elektrische Potential

$$\begin{aligned}
 \text{im bel. Raumpunkt kontinuierlich} \quad \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \\
 \text{im bel. Raumpunkt diskret} \quad \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \\
 \text{Spannung / Potentialdifferenz} \quad U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) &= \varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'
 \end{aligned}$$

Operator Nomenklatur

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{A} &= \nabla \cdot \mathbf{A} \\
 \operatorname{grad} \mathbf{A} &= \nabla \mathbf{A} \\
 (\text{eng. curl}) \quad \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \nabla \times \mathbf{A}
 \end{aligned}$$

1.2 Einführung

Dirac'sche Delta-Funktion

Definition

$$\begin{aligned}
 \int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) d^3r &:= \begin{cases} 1, & \mathbf{r}_0 \in V \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= 0 \quad \forall \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0
 \end{aligned}$$

Bemerkung: Die δ -Funktion ist keine Funktion im üblichen mathematischen Sinne. Man bezeichnet sie deshalb als **uneigentliche Funktion** oder als **Distribution**. Heuristisch:

$$\begin{aligned}
 \delta(x) &= \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \\
 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx &= 1
 \end{aligned}$$

Formeln

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx &= \begin{cases} f(x_0), & a < x_0 < b \\ \frac{1}{2}f(x_0), & x_0 = a \vee b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
 \text{“ } f(x) \delta'(x - x_0) &= -f'(x) \delta(x - x_0) \text{ ”} & (\text{heuristisch}) \\
 \delta(x - x_0) &= \frac{d}{dx} \Theta(x - x_0) & (\Theta \text{ sei die Stufenfunktion}) \\
 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}
 \end{aligned}$$

Mehrdimensionale Delta-Funktion

$$\text{Kartesisch } (x, y, z) \quad \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$$

$$\text{Kugel } (r, \theta, \varphi) \quad \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{r_0^2 \sin \theta_0} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$$

$$\text{Zylinder } (\rho, \phi, z) \quad \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{\rho_0} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0)$$

Produktformeln

f, g sind skalare Felder, \mathbf{F}, \mathbf{G} sind vektor Felder:

$$\begin{aligned}\nabla(fg) &= f\nabla(g) + g\nabla(f) \\ \nabla \cdot (f\mathbf{G}) &= f\nabla \cdot (\mathbf{G}) + \mathbf{G} \cdot \nabla(f) \\ \nabla(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= \mathbf{G} \cdot \nabla \times (\mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot \nabla \times (\mathbf{G}) \\ \nabla \times (f\mathbf{G}) &= f\nabla \times (\mathbf{G}) - \mathbf{G} \times \nabla\end{aligned}$$

Identitäten

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla F) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F} \\ \nabla \times (\nabla f) &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= 0 \\ \nabla \times (\mathbf{a} \times \nabla f) &= \mathbf{a} \Delta f - \nabla(\mathbf{a} \cdot \nabla f)\end{aligned}$$

Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty f(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi$$

wobei:

$$r \in [0, \infty), \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

Gradienten eines skalaren Feldes

$$\nabla g(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{1}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right|} \frac{\partial}{\partial u_i} g(\mathbf{r})$$

1.3 Integralsätze

Fluss

Definition Sei $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = (a_1(\mathbf{r}), a_2(\mathbf{r}), a_3(\mathbf{r}))$ ein Vektorfeld, V ein Volumen und $S(V)$ die Oberfläche. Dann heisst $\Phi_S(\mathbf{a})$ der Fluss (*eng. flux*) von $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ durch die Fläche S wenn es gilt:

$$\Phi_S(\mathbf{a}) = \int_S \mathbf{a}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{f}$$

Geschlossene Fläche Das Oberflächenintegral über eine geschlossene Fläche wird durch ein spezielles Integralzeichen symbolisiert:

$$\Phi_S(\mathbf{a}) = \oint_S \mathbf{a}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{f}$$

Gauß'sche Satz

Definition Der elektrische Nettofluss Φ durch eine hypothetische geschlossene Oberfläche S ist gleich $\frac{1}{\varepsilon_0}$ mal die elektrische Nettoladung Q innerhalb dieser geschlossenen Oberfläche.

Integrale Form

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{f} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Wobei Q die Gesamtladung innerhalb V ist.

Differentielle Form

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Wobei ρ die Gesamtladungsdichte (pro Einheit Volumen) ist.

Beziehung

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, d^3r = \oint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{f}$$

Stokes Satz

$$\int_F \nabla \times \mathbf{a} \, d\mathbf{f} = \int_{\partial F} \mathbf{a} \, d\mathbf{r}$$

Greensche Identitäten

$$\int_V \nabla g(\mathbf{r}) \cdot \nabla h(\mathbf{r}) + g(\mathbf{r}) \Delta h(\mathbf{r}) \, d^3r = \oint_{\partial V} g(\mathbf{r}) \nabla h(\mathbf{r}) \, d\mathbf{f}$$

$$\int_V g(\mathbf{r}) \Delta h(\mathbf{r}) - h(\mathbf{r}) \Delta g(\mathbf{r}) \, d^3r = \oint_{\partial V} g(\mathbf{r}) \nabla h(\mathbf{r}) - h(\mathbf{r}) \nabla g(\mathbf{r}) \, d\mathbf{f}$$

1.4 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

1.5 Incomplete/Unassigned

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Dirichlet Randwertproblem $\Delta_r \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{q} \Phi(\mathbf{r})$$

Poisson-Gleichung $\Delta \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r})$

$$H(x) := \int_{-\infty}^x \delta(s)ds = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

Literaturverzeichnis

- [1] OnlineMathe das mathe-forum *Elektrisches Potential einer homogen geladenen Kugel*
<https://www.onlinemathe.de/forum/Potential-einer-homogen-geladenen-Kugel>