Theoretische Physik II
Elektrodynamik

Vorlesung von Prof. Dr. Michael Thoss im Wintersemester 2018

Andréz Gockel
Patrick Munnich
Daniil Aktanka

20. November 2018

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundbegriffe

Ladung

$$\text{diskrete Ladungsverteilung} \qquad Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

$$\text{kontinuierliche Ladungsverteilung} \qquad Q = \int_V \rho(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}^3 r$$

$$\text{Punktladung} \qquad \rho(\boldsymbol{r}) = q\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$$

$$n \text{ Punktladungen} \qquad \rho(\boldsymbol{r}') = \sum_{j=1}^{n} q_j\, \delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_j)$$

Coulomb'sches Gesetz

$$\text{zwei Punktladungen} \qquad \boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, q_1 q_2\, \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3} = -\boldsymbol{F}_{21}$$

$$n \text{ Punktladungen} \qquad \boldsymbol{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, q_1 \sum_{j=2}^{n} q_j\, \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|^3}$$

$$\text{Beziehung zur } E\text{-Feld} \qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

$$\text{Beziehung zur Potential} \qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\, q\, \varphi(\boldsymbol{r})$$

Elektrisches Feld

$$\text{im bel. Raumpunkt} \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|^3}$$

$$\text{diskrete Ladungsverteilung} \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=2}^{n} q_j\, \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|^3}$$

$$\text{kontinuierliche Ladungsverteilung} \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\boldsymbol{r}')\, \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}\, \mathrm{d}^3 r'$$

$$\text{(Identität)} \qquad \Big\downarrow \quad \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} = -\nabla_r \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

$$\text{Beziehung zur Potential} \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\, \varphi(\boldsymbol{r})$$

$$\Longrightarrow \qquad \boldsymbol{\nabla} \times q\boldsymbol{E} = 0 \qquad \text{d.h., die Coulomb-Kraft ist konservativ}$$

Skalare Elektrische Potential

$$\text{im bel. Raumpunkt kontinuierlich} \qquad \varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, \mathrm{d}^3 r'$$

$$\text{im bel. Raumpunkt diskret} \qquad \varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|}$$

$$\text{Spannung / Potentialdifferenz} \qquad U(\boldsymbol{r},\, \boldsymbol{r}_0) = \varphi(\boldsymbol{r}) - \varphi(\boldsymbol{r}_0) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

Operator Nomenklatur

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} \\ \operatorname{grad} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{A} \\ (\textit{eng.}\ \text{curl}) \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \end{aligned}$$

Produktformeln

f, g sind skalare Felder, $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$ sind vektor Felder:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}(fg) &= f\boldsymbol{\nabla}(g) + g\boldsymbol{\nabla}(f) \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot (f\boldsymbol{G}) &= f\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{G}) + \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla}(f) \\ \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{G}) \\ \boldsymbol{\nabla} \times (f\boldsymbol{G}) &= f\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{G}) - \boldsymbol{G} \times \boldsymbol{\nabla} \end{aligned}$$

Identitäten

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{F}) &= \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}) - \Delta \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} f) &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) &= 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\nabla} f) &= \boldsymbol{a}\Delta f - \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nabla} f) \end{aligned}$$

Gradienten eines skalaren Feldes

$$\boldsymbol{\nabla} g(\boldsymbol{r}) = \sum_i \boldsymbol{e}_i \frac{1}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i}\right|} \frac{\partial}{\partial u_i} g(\boldsymbol{r})$$

Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(\boldsymbol{r})\ \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} f(r,\theta,\varphi) r^2 \sin\theta\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

wobei:

$r \in [0\,,\,\infty)\,, \quad \Theta \in [0\,,\,\pi]\,, \quad \varphi \in [0\,,\,2\pi)$

Kapitel 2

Elektrostatik

2.1 Einführung

Dirac'sche Delta-Funktion

Definition

$$\int_V \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\,\mathrm{d}^3 r := \begin{cases} 1\,, & r_0 \in V \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r_0}$$

Bemerkung: Die δ-Funktion ist keine Funktion im üblichen mathematischen Sinne. Man bezeichnet sie deshalb als **uneigentliche Funktion** oder als **Distribution**. Heuristisch:

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty\,, & x = 0 \\ 0\,, & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

Formeln

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = \begin{cases} f(x_0)\,, & a < x_0 < b \\ \frac{1}{2} f(x_0)\,, & x_0 = a \vee b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{“}\; f(x)\,\delta'(x-x_0) = -f'(x)\,\delta(x-x_0) \;\text{”} \qquad \text{(heuristisch)}$$

$$\delta(x-x_0) = \frac{d}{dx}\Theta(x-x_0) \qquad (\Theta \;\text{ sei die Stufenfunktion})$$

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\Delta}\,\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

Mehrdimensionale Delta-Funktion

Kartesisch (x,y,z) $\qquad \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)$

Kugel (r,θ,φ) $\qquad \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \dfrac{1}{r_0^2 \sin\theta_0}\,\delta(r-r_0)\,\delta(\theta-\theta_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0)$

Zylinder (ρ,ϕ,z) $\qquad \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \dfrac{1}{\rho_0}\,\delta(\rho-\rho_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0)\,\delta(z-z_0)$

2.2 Integralsätze

Einleitung: Fluss

Definition Sei $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = (a_1(\boldsymbol{r}), a_2(\boldsymbol{r}), a_3(\boldsymbol{r}))$ ein Vektorfeld, V ein Volumen und $S(V)$ die Oberfläche. Dann heisst $\Phi_S(\boldsymbol{a})$ der Fluss (*eng.* flux) von $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ durch die Fläche S wenn es gilt:

$$\Phi_S(\boldsymbol{a}) = \int_S \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{f}$$

Geschlossene Fläche Das Oberflächenintegral über eine geschlossene Fläche wird durch ein spezielles Integralzeichen symbolisiert:

$$\Phi_S(\boldsymbol{a}) = \oint_S \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{f}$$

Satz von Stokes

Bedeutung Ganz allgemein gesagt handelt es sich um einen sehr grundlegenden Satz über die Integration von Differentialformen. Es geht darum, n-dimensionale Volumenintegrale über das Innere in $(n-1)$-dimensionale Randintegrale über die Oberfläche des Volumenstücks umzuwandeln. Für uns sind die Spezialfälle am wichtigsten, bei denen der Gauß'sche Satz und der Kelvin-Stokes'sche Satz (Rotationssatz).

Rotationssatz (*auch* Klassische Integralsatz von Stokes)

Seien $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ ein hinreichend oft differenzierbares Vektorfeld und F eine Fläche mit dem Rand $C(F) = \delta F$. Dann gilt:

$$\int_F \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \int_{\partial F} \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Gauß'sche Satz

(*eng.* Divergence Theorem)

Definition Der elektrische Nettofluss Φ durch eine hypothetische geschlossene Oberfläche S ist gleich $\frac{1}{\varepsilon_0}$ mal die elektrische Nettoladung Q innerhalb dieser geschlossenen Oberfläche.

Integrale Form

$$\Phi = \oint_S \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Wobei Q die Gesamtladung innerhalb V ist.

Differentielle Form

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Wobei ρ die Gesamtladungsdichte (pro Einheit Volumen) ist.

Beziehung

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}^3 r = \oint_S \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{f}$$

Greensche Sätze

Die Green'sche Sätze (Identitäten) lassen sich aus Anwendungen des Gauß'schen Satzes ableiten. Hierfür wurde die folgende Definition der Normalableitung benutzt.

Normalableitung
Sei ψ ein mindestens zweimal stetig differenzierbares, skalares Feld auf einer Fläche $S(V)$. Sei $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ eine (ortsabhängige) Flächennormale. Dann gilt:

$$\boldsymbol{\nabla}\psi \cdot \boldsymbol{n} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

1. Green'sche Identität

$$\int_V (\varphi \boldsymbol{\Delta}\psi + (\boldsymbol{\nabla}\psi \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi))\, \mathrm{d}^3 r = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\, \mathrm{d}f$$

Wobei φ und ψ Skalarfunktionnen sind, angennomen sei φ einfach und ψ zweifach stetig differenzierbar.

2. Green'sche Identität

$$\int_V (\varphi \boldsymbol{\Delta}\psi - \psi \boldsymbol{\Delta}\varphi)\, \mathrm{d}^3 r = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) \mathrm{d}^3 f$$

Wobei φ und ψ beide zweifach stetig differenzierbar sind.

Bemerkung: Die beiden obengenannent Green'schen Identitäten sind Speziallfällen und gelten nur unter Bedinungen.

2.3 Helmholtz-Zerlegung

Bedeutung

Zusammengefasst besagen der Satz, dass unter gewissen Voraussetzungen jedes Vektorfeld $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ eindeutig durch sein Quellenfeld $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ und sein Wirbelfeld $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ bestimmt ist. Oder anders ausgedrückt: (fast) jedes Vektorfeld lässt sich eindeutig als Summe eines wirbelfreien und eines quellenfreien Anteils darstellen.

Aussage des Theorems

Sei F ein zweifach stetig differenzierbares Vektorfeld über ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^3$ und S eine Oberfläche welche dieses Gebiet umschliesst. Dann kann F in eine curl-freie Komponente und eine divergenzfreie Komponente zerlegt werden:

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

Wobei die beiden einander ergänzenden Potentiale Φ und A lassen sich durch die folgenden Integrale aus dem Feld F, über das die Felder enthaltende Volumen V, gewinnen:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{\nabla}' \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\, \mathrm{d}V' \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{\nabla}' \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\, \mathrm{d}V'$$

2.4 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

2.5 Incomplete/Unassigned

$$\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = -\boldsymbol{\nabla}'\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

$$\text{Dirichlet Randwertproblem} \qquad \Delta_r\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{q}\Phi(\boldsymbol{r}$$

$$\text{Poisson-Gleichung} \qquad \Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

$$H(x) \coloneqq \int_{-\infty}^{x}\delta(s)\mathrm{d}s = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

Literaturverzeichnis

[1] OnlineMathe das mathe-forum *Elektrisches Potential einer homogen geladenen Kugel* https://www.onlinemathe.de/forum/Potential-einer-homogen-geladenen-Kugel