Практика 7

$$x(t) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x_0}-1\right)e^{-r(t-t_0)}}$$

Есть решение $\frac{dx}{dt} = rx(1-x)$

Т.е. ур-я лог. роста

при начальном x_0

$x_1^* = 0$ неустойчивая точка равновес.

$x_2^* = 1$ устойчивая асимптотически точка равновеси

$\frac{dx}{dt} = x_{n+1} - x_n$; $x = x_n$

$$x_{n+1} - x_n = r x_n (1 - x_n)$$

$$x_{n+1} = r x_n - r x_n^2 + x_n$$

$$x_{n+1} = x_n(1+r) - r x_n^2$$

$\cancel{x_n(1+r) - r x_n^2 = x}$ $\cancel{(1+r) - r x_n = 0}$

$\cancel{x_{n1}^* = 0}$ $\cancel{x_{n2}^* =}$

Найдем точки:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow x_{n+1} - x_n = 0 \Rightarrow x_{n+1} = x_n \Rightarrow$$

$$x_n(1+r) - r x_n^2 = x_n \qquad x_{n1}^* = 0$$

$$(1+r) - r x_n = 1 \Rightarrow -r x_n = -r \Rightarrow x_{n2}^* = 1$$

Найдем устойчивость

$$f(x_n) = (1+r)x_n - r x_n^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + r - 2rx$$

1. $r = 1,92$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_1^* = 0) \right| = |2,92| > 1 \Rightarrow \text{неуст.}$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_2^* = 1) \right| = |-0,92| < 1 \Rightarrow \text{уст.}$$

2. $r = 2,35$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_1^* = 0) \right| = |3,35| > 1 \Rightarrow \text{неуст}$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_2^* = 1) \right| = |-1,35| > 1 \Rightarrow \text{неуст}$$

Исследуем r на обл. устойчивости

1) $x_1^* = 0$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_1^*)\right| < 1$$

при $-2 < r < 0$

(рассм. только действ.)

при $r = -1$ сверхустойчива

2) $x_2^* = 1$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_2^*)\right| < 1$$

при $0 < r < 2$

при $r = 1$ сверхустойчива

Найдем особые точки типа циклов

$$x_{n+1} = f(f(x_{n-1})) = x_{n-1} + 2r x_{n-1} + r^2 x_{n-1} -$$

$$- 2r x_{n-1}^2 - 3r^2 x_{n-1}^2 - r^3 x_{n-1}^2 + 2r^2 x_{n-1}^3 +$$

$$+ 2r^3 x_{n-1}^3 - r^3 x_{n-1}^4$$

Дальнейший анализ в Wolfram Mathematica