T. Fließbach Alphazerfall und Kernstruktur

Grundlegende Experimente und Begriffe

Der natürlich vorkommende α-Zerfall ist das älteste in der Kernphysik bekannte Phänomen. Der erste experimentelle Hinweis auf den a-Zerfall war zugleich die Geburtsstunde der Radioaktivität: Im Jahre 1896 entdeckte Becquerel, daß Uransalze auf einer photographischen Platte ein Abbild erzeugen. Zuerst dachte man als mögliche Erklärung an die wenige Monate zuvor entdeckten Röntgenstrahlen. Bei den nachfolgenden Untersuchungen einer Vielzahl von Elementen auf ihre Radioaktivität stellte sich jedoch heraus, daß es verschiedene Arten von ausgesandten Strahlen gibt. Diese wurden durch ihre unterschiedliche Fähigkeit, Materie zu durchdringen, charakterisiert und so in α-, β- und γ-Strahlen eingeteilt. Die α-Strahlen von denen hier die Rede sein soll, zeichneten sich durch eine kurze Reichweite von nur wenigen Zentimetern in Luft aus. Wie wir heute wissen, bestehen die α-Strahlen aus ⁴He-Kernen, β-Strahlen aus Elektronen und y-Strahlen (ebenso wie Röntgenstrahlen) aus Photonen.

Die Natur der α-Strahlen wurde um 1908 von Rutherford [1] und Mitarbeitern aufgeklärt. Der α-Strahler Radon wurde in ein dünnwändiges Glasgefäß eingeschlossen, durch das α-Strahlen nach außen dringen konnten. Durch Messung der Zahl der α-Partikel und der Ladung der eingeschlossenen Substanz ergab sich, daß jedes α-Teilchen zwei positive Ladungseinheiten mit sich führt. Zudem konnte außerhalb des Gefäßes Helium nachgewiesen werden. Daraus folgte, daß α-Strahlen aus zweifach ionisierten He-Atomen bestehen. Die Vorstellung, daß Atome aus einem sehr kleinen, positiv geladenen Kern und einer negativen, ausgedehnten Ladungsverteilung bestehen, wurde dann 1911, ebenfalls von Rutherford, aufgrund der Streuexperimente von a-Teilchen an Atomkernen entwickelt. Die zweifach ionisierten Heliumatome waren also einfach die Atomkerne von 4He. Damit war die α-Aktivität als ein Prozeß der jetzt entstehenden Kernphysik zu verstehen. Wir sprechen vom a-Zerfall, dem Zerfall eines Kerns in ein a-Teilchen und einen anderen Kern.

Um die Jahrhundertwende gab es drei Methoden für den Nachweis der α-Strahlung: die Schwärzung einer photographischen Platte, die Messung der in einem Gas erzeugten Ionisierung und die Anregung von Fluoreszenz in geeigneten Materialien.

Lebensdauer der Kerne

Mit Hilfe dieser Methoden stellte man fest, daß die Stärke der Aktivität proportional zur Menge der radioaktiven Substanz ist und daß sie im Laufe der Zeit abnimmt. Die zeitliche Abnahme wurde zum ersten Mal bei Polonium festgestellt, das Mme. Curie aus Pechblende isoliert hatte. Diese Befunde formulieren wir heute so:

Wenn wir zur Zeit t = 0 eine Anzahl n_0 von α -instabilen Kernen eines bestimmten Isotops haben, so verringert sich ihre Zahl auf n(t) zur Zeit t:

$$n(t) = n_0 \cdot \exp(-\lambda t). \tag{1}$$

Die Größe à nennen wir Zerfallskonstante. Die Lebensdauer der Kerne ist charakterisiert durch die Halbwertszeit τ1/2 = (ln 2)/λ, nach der nur noch die Hälfte der ursprünglichen Menge vorhanden ist. Für einen einzelnen Kern kann nicht vorhergesagt werden, wann er zerfällt. Die Beziehung (1) besagt nur, daß er im nächsten Zeitintervall dt mit der Wahrscheinlichkeit A. dt zerfallen wird und daß dies unabhängig von der Gesamtanzahl der Kerne so ist. Daß das Zerfallsgesetz tatsächlich diese einfache Form (1) hat, ist experimentell immer wieder bestätigt worden. Die in der Natur vorkommenden α-Strahler haben Halbwertszeiten zwischen 10-7 Sekunden und 1010 Jahren.

Reichweite und Energie der a-Teilchen

Das nächste auffällige Charakteristikum der α-Aktivität ist, daß alle α-Strahlen eines bestimmten a-Zerfalls die gleiche Reichweite haben. Dies wird eindrucksvoll mit einer Photographie eines a-Strahlers in einer Nebelkammer demonstriert (Abbildung 1). In der 1911 von Wilson erfundenen Nebelkammer wird durch Expansion kurzzeitig eine Atmosphäre mit übersättigtem Wasserdampf geschaffen. Das durchfliegende α-Teilchen erzeugt längs seiner Bahn Ionen. Diese Ionen sind dann Kondensationskeime für Wassertröpfchen, so daß die Bahn als Nebelspur sichtbar wird. In Abbildung 1 sehen wir ein ausgeblendetes Segment von α-Strahlen aus Poloniumkernen.

Die Reichweite entspricht einer bestimmten Energie E_{α} , mit der das α -Teilchen den Kern verläßt. Fliegt ein α -Teilchen durch Materie, so ionisiert es die Atome, bis es seine Energie verloren hat. Diese Energie beträgt typisch 4 bis 9 MeV, und sie kann nicht nur über die Reichweite, sondern auch direkter gemessen werden, etwa aus der Krümmung der Bahn eines α -Teilchens in einem angelegten Magnetfeld. Wir werden im folgenden die Energie E_{α} anstelle der Reichweite benutzen. Das ist vorteilhaft, weil E_{α} im Gegensatz zur Reichweite materialunabhängig ist. Die einen bestimmten Zerfall charakterisierende Energie ist auch außerordentlich scharf. Ihre theoretische Unschärfe ist nach Heisenbergs Unschärferelation $\hbar/\tau_{1/2}$ und damit um viele Größenordnungen kleiner als E_{α} .

Geiger-Nuttall-Gesetz

Man fand nun experimentell eine sehr starke Abhängigkeit der Lebensdauer von der Energie E_a. Dieser Zusammenhang wurde phänomenologisch durch das Geiger-Nuttall-Gesetz [2] beschrieben. In der heute gebräuchlichen Form lautet diese Beziehung

$$\ln \lambda = -a/E_n^{1/2} + b.$$
 (2)

Die Konstanten a und b können so bestimmt werden, daß (2) für eine Vielzahl von Zerfällen näherungsweise gültig ist. Diese Beziehung beschreibt qualitativ die starke Variation der Halbwertszeit $\tau_{1/2}=(\ln\,2)/\lambda$. Eine Variation von E $_{6}$ um 1 MeV bedeutet eine um etwa 4 Größenordnungen geänderte Halbwertszeit. Als Beispiel führen wir die Grundzustandszerfälle von zwei Poloniumisotopen (der eine Kern hat 84 Protonen und 128 Neutronen, der andere 2 Neutronen weniger) an:

$$^{212}\text{Po}.^{\tau_{1/2}=3\cdot 10^{-7}s} \propto +^{208}\text{Pb} \text{ mit } E_{\alpha} = 8.8\,\text{MeV}$$

$$^{210}\text{Po} \xrightarrow{\tau_{1/2} = 1.2 \cdot 10^{-7} \text{s}} \alpha + ^{206}\text{Pb} \, \text{mit} \, E_{tc} = 5.3 \, \text{MeV}.$$

Diese beiden Zerfälle sind der jeweils letzte Schritt der Zerfallsreihen der natürlich vorkommenden Elemente ²³²Th und ²³⁸U.

α-Zerfall in der modernen Kernphysik

Bisher haben wir nur auf historische Experimente aus der Zeit um die Jahrhundertwende hingewiesen. Wir diskutieren jetzt einige Experimente der modernen Kernphysik.

Transurane

Uran ist das natürlich vorkommende Element, dessen Atomkern am meisten Protonen hat, nämlich 92 (Ordnungszahl). Durch Kernreaktionen können nun weitere Ele-

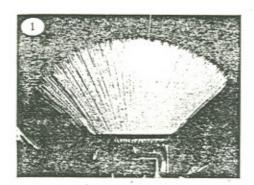
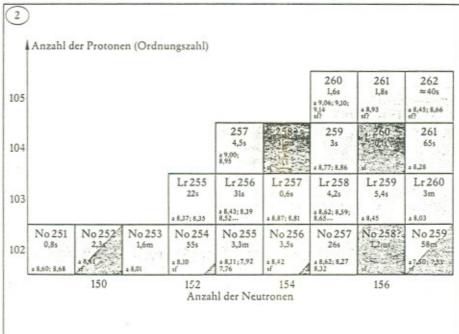


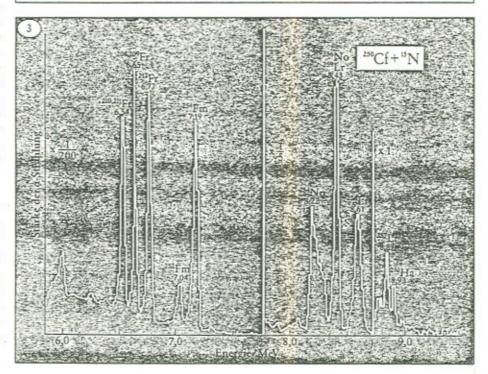
Abb. 1. Diese Nebelkammeraufnahme zeigt α -Strahlen einer ²¹⁴Po-Probe. Jeder α -Zerfall ist durch eine bestimmte, scharfe α -Teilchenenergie charakterisiert, die sich hier in der gleichen Reichweite der α -Strahlen äußert. Die tatsächliche Länge der Strahlen ist etwa 7 cm. Auffällig ist eine Spur, die länger ist als die anderen. Sie stammt von dem α -Zerfall eines ²¹⁴Po-Kerns in einem angeregten Zustand.

Abb. 2. Das Ende einer Isotopentafel, wie sie am Arbeitsplatz jedes Kernphysikers zu finden ist. Diese Kerne sind mehr oder weniger instabil, die Lebensdauer ist in der zweiten Zelle jedes Kästchens unter der Massenzahl angegeben. "Hellblau" und "α" bedeuten Instabilität gegen α-Zerfall, "Dunkelblau". und "sf" (spontaneous fission) Instabilität gegen Spaltung. Hinter "α" sind die Energien der ausgesandten α-Gruppen angegeben. Sie können zur Identifizierung dieser Kerne dienen.

Abb. 3. ¹⁵N-Kerne wurden auf ²⁵⁰Cf geschossen und die dabei entstehende α-Aktivität in Abhängigkeit von der α-Energie gemessen (von A. Ghiorso et al., Phys Rev. C4 (1970) 1850). Die Aktivität bei 8.93 MeV konnte dem Element mit der Ordnungszahl 105, hier mit Hahnium (²⁶¹Ha) bezeichnet, zugeordnet werden. Einer der Gründe für die Zuordnung war die in zeitlicher Korrelation gemessene, bekannte α-Aktivität des Tochterkerns ²⁵⁷Lr.

mente, die Transurane, künstlich erzeugt werden. Die Isotopentafel (Abbildung 2) verzeichnet heute Kerne bis zur Ordnungszahl 105. Diese, bei einer Reaktion entstehenden Kerne sind meist α -aktiv (Abbildung 2) und werden zunächst oft durch ihre α -Aktivität nachgewiesen. Mißt man α -Teilchen unbekannter Energie, so kann man versuchen, in zeitlicher Korrelation damit die bekannte α -Linie des α -Zerfalls $Y \rightarrow Z + \alpha$ vom Kern Y nachzuweisen (oder auch bekannte γ -





Linien des Kerns Y). Gelingt das, dann kann die unbekannte Aktivität dem Zerfall $X \rightarrow Y + \alpha$ zugeordnet werden, und damit ist die Existenz des Kerns X nachgewiesen. So geht man Schritt für Schritt von bekannten Kernen zu schwereren Kernen vor. Diesem Verfahren sind durch die zunehmende Instabilität, also die abnehmende Lebensdauer, jedoch Grenzen gesetzt.

Abbildung 3 zeigt die gemessene α-Aktivität

bei einem solchen Experiment. In diesem Experiment wurde das Isotop ²⁶¹Ha (Ordnungszahl 105) nachgewiesen. Hat man nur erst einmal festgestellt, durch welche Reaktionen das neue Element hergestellt werder kann, dann kann man – bei hinreichene langer Lebensdauer – versuchen, dieses Element anzureichern und chemisch zu isolie ren. So wurde etwa auch das bei diesen Experiment als Target verwendete ²⁵⁰C (Ordnungszahl 98) künstlich hergestellt.

Es gibt theoretische Spekulationen auf der Basis des Schalenmodells, daß es jenseits der Transurane bei der Ordnungszahl 114 oder 124 wieder stabilere Kerne, die superschweren Kerne, gibt (Fricke u. W. Greiner: Physik in unserer Zeit 1, 21 (1970)). Einige amerikanische Forscher (R. V. Gentry et al., Phys. Rev. Letters 37, 11 (1976)) glaubten nun, solche Elemente nachgewiesen zu haben, was sich aber nicht bestätigt hat.

Kleine Einschlüsse von a-Strahlern in transparenten Materialien können um sich herum Strahlungsschäden bewirken. Die Größe dieser sichtbaren kugelförmigen Struktur (nach einem aus der Optik entlehnten Begriff "Halo" genannt) entspricht der Reichweite der a-Strahlen, die hier viel kleiner ist als in Abbildung 1, da es sich um einen festen Körper handelt. Es wurden nun besonders große Halos untersucht, die einer α-Energie bis zu 14 MeV entsprechen (eine Abbildung war in "Der Spiegel" 27, 152 (1976) zu sehen). Es wurden Elektronen der eingeschlossenen Atome angeregt, und dabei wurde eine für die Ordnungszahl 126 charakteristische Röntgenstrahlung gefunden. Inzwischen haben Wissenschaftler vom MPI für Kernphysik in Heidelberg herausgefunden, daß Cer-Verunreinigungen die superschweren Elemente vorgetäuscht haben.

Isomere Zustände

Auch ein bestimmter Zustand eines Kerns kann durch seine α-Aktivität charakterisiert und nachgewiesen werden. Ein sehr schönes Beispiel (Abbildung 4) ist hierfür ein 1962 entdeckter (I. Perlman et al., Phys. Rev. 127 (1962), 917) langlebiger Zustand ("Isomer" genannt) von 212Po. Im Grundzustand von ²¹²Po paaren sich die beiden letzten Protonen und Neutronen zum energetisch günstigsten Drehimpuls 0. Die höheren möglichen Drehimpulse (2, 4, 6, ...) erfordern mehr Energie. Die völlige Parallelstellung der Drehimpulse der letzten vier Nukleonen ist jedoch energetisch wieder günstiger. Der dadurch entstehende Zustand mit dem hohen Drehimpuls J kann tiefer liegen als der (J-2)-Zustand. Das hat aufregende Konsequenzen: Der isomere Zustand (Abbildung 4) zerfällt nicht mehr durch die (schnelle) y-Emission, sondern durch α-Emission. Da diese wiederum durch den hohen Drehimpuls behindert ist, hat dieses 212Po-Isomer eine sehr lange Lebensdauer: $\tau_{1/2} = 45$ s gegenüber $\tau_{1/2} =$

3·10⁻⁷ s für den ²¹²Po-Grundzustand! Solche Zustände sind hochaktuell: Man interessiert sich in der Kernphysik in letzter Zeit sehr für Kerne mit hohem Drehimpuls. Gibt es nun solche Zustände, die relativ stabil sind, so sind sie für das Studium solcher Kerne sehr wichtig.

a-Transfer

Ein weites Feld hat sich für die Kernphysik mit den modernen Schwerionenbeschleunigern eröffnet. Damit kann man auch α-Teilchen von einem Kern zum anderen transferieren. Haben wir früher ²¹²Po→α + ²⁰⁸Pb betrachtet, so können wir jetzt auch so etwas wie den umgekehrten Prozeß untersuchen: Wir schicken einen Strahl von ¹⁶O-Kernen auf ²⁰⁸Pb und erhalten – unter anderem – ²¹²Po und ¹²C. Solche und ähnliche Experimente werden heute in mehreren Laboratorien in der Welt ausgeführt.

Vom Einteilchenmodell zur mikroskopischen Theorie

Wir wenden uns nun der Theorie des α-Zerfalls zu und geben zunächst einen kurzen Überblick.

Ein großer Erfolg auf dem Weg zum Verständnis des α-Zerfalls war die Erklärung des Geiger-Nuttall-Gesetzes durch Gamow [3] im Jahre 1928. Er stellte ein Einteilchenmodell auf, das von der Bewegung eines α-Teilchens in einem Potential ausgeht. Die in der Quantenmechanik erklärbare Penetrabilität der Coulombbarriere dieses Potentials ergibt dann die starke Abhängigkeit der Lebensdauer von der α-Energie. Dieses Modell ist Voraussetzung für ein weitergehendes Verständnis und wird daher im nächsten Abschnitt behandelt.

Gamow's Modell erlaubt ein qualitativ befriedigendes Verständnis des α-Zerfalls. Die in diesem Modell berechneten Konstanten a und b in (2) führen jedoch nicht zu quantitativ guten Ergebnissen. Bereits in der phänomenologischen Analyse der Daten mit der Beziehung (2) zeigt sich, daß der α-Zerfall verschiedener Gruppen von Kernen mit unterschiedlichen Parametersätzen, a und b, zu beschreiben ist. Der Wert dieser Konstanten hängt also von der speziellen Kernstruktur ab.

Um die Kernstruktur zu berücksichtigen, muß man wissen, wie die Kerne aufgebaut

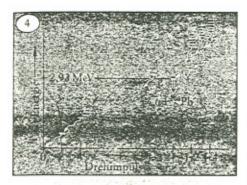
sind, und man benötigt eine quantitative Beschreibung dieser Struktur. Zur Zeit der Aufstellung von Gamow's Einteilchenmodell waren diese Voraussetzungen nicht gegeben, als elementare Teilchen waren nur das Elektron und das Proton bekannt. Chadwick entdeckte dann 1932 das Neutron. Danach lernte man, daß Protonen und Neutronen die elementaren Bausteine des Atomkerns bilden. Eine erfolgreiche Beschreibung der Struktur der Kerne hatte man erst 1949 mit den einfachen Wellenfunktionen des Schalenmodells [4]. Mit diesen Vielteilchenwellenfunktionen berechnete Mang [5] 1957 zum ersten Mal in einer mikroskopischen Theorie die Lebensdauern von α-aktiven Kernen. Damit ging man über das Einteilchenmodell von Gamow hinaus und konnte quantitativ berechnen, inwieweit im zerfallenden Kern (etwa ²¹²Pb) tatsächlich ein α-Teilchen und der Tochterkern (208Pb) vorhanden sind. Für diesen Zusammenhang zwischen der Kernstruktur und dem α-Zerfall haben sich nun in jüngster Zeit neue Entwicklungen ergeben. Es wurde gezeigt [6], daß der Zusammenhang mit der Kernstruktur anders als bisher berechnet werden muß und daß dies zu quantitativ erheblichen Konsequenzen führt. Die neu berechneten Zerfallsbreiten sind teilweise um einen Faktor von der Ordnung 100 größer als die alten. Damit wird eine seit langem bekannte Diskrepanz zwischen den theoretischen und experimentellen Werten aufgelöst. Von diesen neuen Entwicklungen soll im letzten Teil dieses Artikels die Rede sein.

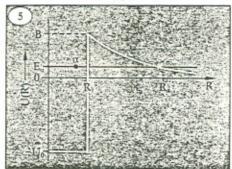
Gamow's Modell

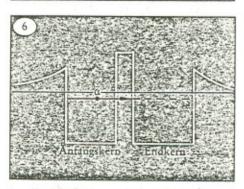
In einem Einteilchenmodell gelang es Gamow [3], eine Ableitung des Geiger-Nuttall-Gesetzes zu geben. Als Modell für den zerfallenden Kern wird ein a-Teilchen betrachtet, das sich in einem zentralsymmetrischen Potential U(R) bewegt. Hier ist R der Abstand des α-Teilchens vom Zentrum des Kerns, Das Potential soll die Wechselwirkung des α-Teilchens mit dem Rest- oder Tochterkern beschreiben, der nach dem Zerfall übrig bleibt. Für größere Abstände ist U(R) das Coulombpotential 2Ze2/4πε₀R, wobei Z die Zahl der Protonen im Tochterkern ist. Wenn das α-Teilchen und der Kern in Kontakt sind, wirken attraktive Kernkräfte. Ein einfacher Ansatz für das Potential ist daher

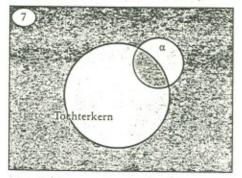
$$U(R) = \; \left\{ \begin{array}{ll} 2\,Ze^2/4\pi\epsilon_0 R & \mbox{für } R > R_i \\ -\,U_0 & \mbox{für } R < R_i \end{array} \right. \label{eq:urange}$$

Dieses Potential ist in Abbildung 5 veran-









schaulicht, wobei wir bereits andeuten, daß wir ein α -Teilchen mit der Energie E_{α} in diesem Potential betrachten wollen. Beim Radius R_i würde die klassische Bewegung eines α -Teilchens sich umkehren. Für ein von außen kommendes α -Teilchen ist der entsprechende Punkt mit R_{α} gekennzeichnet.

Das in Abbildung 5 dargestellte Potential ist in mehrfacher Hinsicht schematisch vereinfacht. Es kann so nur gültig sein für ein α-

Abb. 4. Schematische Darstellung des isomeren Zustandes von 212Po (E = 2.93 MeV): Durch kurze, dicke Striche sind die niedrigsten Zustände verschiedener Drehimpulse gekennzeichnet. Darüber gibt es viele weitere Zustände (dünne Striche, nur bei hohem Drehimpuls eingezeichnet). Die Übergänge zu niedrigeren Zuständen und schließlich zum Grundzustand erfolgt im allgemeinen innerhalb von 10-10s bis 10-12s durch y-Emission. Dabei gibt es aber eine "Falle": der isomere Zustand mit dem Drehimpuls J(=16 oder 18 h, nicht genau bekannt). Er kann nicht durch y-Emission zum (J-2)-Zustand zerfallen, da dieser eine höhere Energie hat. Er zerfällt mit der langen Lebensdauer von 45 s zu a und 208Pb.

Abb. 5. Schematische Darstellung des Gamow-Modells. Ein α -Teilchen mit der Energie E_{α} befindet sich im Potential U(R). Es muß den Potentialberg zwischen R_i und R_{α} durchtunneln. Die Energie E_{α} (isterheblich kleiner als die Barriere $B=2Ze^2/4\pi\epsilon_0R_i$. Dieses Modell erklärt die starke Abhängigkeit der Lebensdauer von der Energie E_{α} und damit das Geiger-Nuttall-Gesetz.

Abb. 6. Schematische Darstellung eine α-Transfers zwischen zwei Kernen. Die Kerne sind an sich stabil gegen α-Zerfall, während einer Reaktion kann jedoch ein α-Teilchen von einem Kern zum anderen tunneln.

Abb. 7. Die Nukleonen im α-Teilchen sitzen zum Teil in denselben Zuständen wie die des Tochterkerns. Diese Anteile der Wellenfunktion (schematisch angedeutet durch die schraffierte Fläche) fallen nach Antisymmetrisierung (Pauli Prinzip) weg. Eine konsistente Berücksichtigung dieser Effekte ist für die Theorie des α-Zerfalls sehr wichtig.

Teilchen mit dem Drehimpuls l=0, sonst müßten wir ein Zentrifugalpotential berücksichtigen. Zudem haben wir das Potential näherungsweise zentralsymmetrisch angenommen. Dies entspricht einem kugelsymmetrischen, nicht deformierten Kern. Ein realistischeres Potential wie aus der Analyse von Streuexperimenten gewonnen werden kann, würde darüber hinaus bei R_i kontinuierlich von dem Wert $B=2Ze^2/4\pi\epsilon_0R_i$ zu $-U_0$ übergehen.

Im folgenden werden wir weiter die Beispiele 212Po und 210Po betrachten. Realistische Potentiale liefern für diese Fälle einen inneren Umkehrpunkt R. zwischen 9 und 9.5 fm, der äußere ist durch Ra = $2Ze^2/4\pi\epsilon_o E_o^2$ ($\simeq 27$ fm für ^{212}Po und $\simeq 44$ fm für 210Po) bestimmt. Neuere Analysen von elastischer α-Streuung führen zu Potentialtiefen U. in der Größenordnung 100 MeV. Wenn man nun mit dem in Abbildung 5 dargestellten Modell den a-Zerfall beschreibt, so beinhaltet dies bestimmte physikalische Annahmen. Man impliziert, daß der zerfallende Kern (etwa 212Po) aus einem 208Pb Rumpf und einem vorgeformten α-Teilchen besteht und daß die Bewegung des α-Teilchens durch ein Potential U(R) beschrieben werden kann.

Wir ziehen jetzt die Schlußfolgerungen, die sich aus dem Modell ergeben. Zunächst halte sich das α-Teilchen im Bereich R < R₁ auf. In der klassischen Mechanik kann es diesen Bereich niemals verlassen. Quantenmechanisch wird ein Teilchen, das auf den Potentialberg (Potential zwischen R₁ und R₂) zuläuft, ihn jedoch mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit P durchtunneln. Die Größe P, auch Penetrabilität genannt, ist in guter Näherung durch den Ausdruck

$$P = \exp \left[-2 \int_{R}^{R \hat{q}} \! dR \left\{ \frac{2M}{\hbar^2} \left(U(R) \! - \! E_a \right) \right\}^{1/2} \right]$$

gegeben. Hier ist M die Masse des α-Teilchens. Eigentlich müßten wir die Wellenfunktionen bestimmen, die Lösung einer Schrödingergleichung mit dem Potential U(R) ist. Die Wellenfunktion fällt im klassisch unzugänglichen Bereich zwischen R_i und R_a exponentiell ab. Unter einfachen Näherungen folgt daraus der obige Ausdruck für die Penetrabilität.

Vereinfacht dargestellt wird das α -Teilchen jeweils nach der Zeit $2R_I/v_\alpha$ an den Potentialberg anlaufen (oder "anklopfen") und ihn dann mit der Wahrscheinlichkeit P durchtunneln. Dabei ist $v_\alpha = (2(U_o + E_\alpha)/M)^{1/2}$ die Geschwindigkeit des α -Teilchens im Inneren. Die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeit ist dann

$$\lambda_G = v_a \cdot P/2R_i \qquad (3)$$

Diese Zerfallskonstante hat dieselbe Bedeutung wie in (1), der Index G bezieht sich auf das vorliegende Gamow'sche Modell.

Die Penetrabilität P und damit λ_G hängen

sehr stark von E_{α} ab, da E_{α} den Wert des Exponenten bestimmt. Wenden wir (3) mit einem realistischen Potential U(R) auf unsere Beispiele an, so erhalten wir

$$\frac{\lambda_G(^{212}Po)}{\lambda_G(^{210}Po)} = \frac{\tau_{1/2}(^{210}Po)}{\tau_{1/2}(^{212}Po)} = 0.7 \cdot 10^{13}$$

verglichen mit dem experimentellen Wert

$$\frac{\tau_{1/2}(^{210}Po)}{\tau_{1/2}(^{212}Po)} = 4 \cdot 10^{13}.$$

Damit haben wir qualitativ die starke Variation der Lebensdauer mit der α -Energie verstanden, wie sie phänomenologisch durch das Geiger-Nuttall-Gesetz [2] beschrieben wird. Wir können auch direkt einen Ausdruck von der Form (2) herleiten: Für unser Modellpotential können wir das Integral für P elementar berechnen. Wenn wir das Ergebnis in eine Taylorreihe nach der Größe $(\mathbb{E}_{\alpha}/B)^{1/2}$ entwickeln und nur die ersten zwei Terme berücksichtigen, so ist das Ergebnis von der Form $\ln \lambda_G = -a/\mathbb{E}_{\alpha}^{1/2} + b$, wobei die Konstanten a und b theoretisch bestimmt werden müssen.

Experimentelle Analyse mit Gamows Modell

Das Geiger-Nuttall-Gesetz bedeutet die Analyse der experimentellen Daten in einem ersten, einfacheren Stadium. Nachdem wir die dadurch beschriebene Physik verstanden haben, können wir die Analyse auf einem höheren Niveau fortsetzen. Voraussetzung des Gamow'schen Modells war, wie oben gesagt, die Annahme, daß der Elternkern (etwa 212Po) aus dem Tochterkern (208Pb) und einem a-Teilchen besteht. Dies ist keineswegs selbstverständlich und wird, wie sich im folgenden zeigt, nur mit einer geringen Wahrscheinlichkeit der Fall sein. Daher führen wir eine realistischere Modellannahme ein: In dem Elternkern finden wir die Struktur "a-Teilchen plus Tochterkern" nur mit der Wahrscheinlichkeit S vor. Soweit diese Struktur vorliegt, können wir das Gamowsche Einteilchenmodell anwenden. Dies bedeutet, daß wir die experimentellen Daten mit der Beziehung

$$\lambda = \lambda_0 \cdot S$$

analysieren. Die Größe S wird auch spektroskopischer Faktor genannt. Die Bestimmung von S über diese Beziehung bedeutet eine Aussage über die Kernstruktur. An dieser Stelle wird die Beziehung zwischen dem α-Zerfall und den eingangs erwähnten α-Transferreaktionen deutlich. Wenn zwei Kerne aufeinander geschossen werden und wenn dabei zwei Protonen und zwei Neutronen von dem einen (Anfangs-)Kern auf den anderen (End-)Kern übertragen werden, so kann diese Reaktion unter gewissen Annahmen als Transfer eines α-Teilchens analysiert werden. Die hierzu gebräuchlichste Reaktionstheorie ist die Distorted Wave Born Approximation (DWBA). Sie geht ähnlich wie Gamow's Modell von einem Einteilchenmodell für das α-Teilchen aus. Die Wellenfunktion des α-Teilchens wird sowohl im Anfangskern wie auch im Endkern mit Hilfe eines mittleren Potentials beschrieben. Wir stellen dies in Abbildung 6 schematisch dar. Unter dieser Annahme wird ein Wirkungsquerschnitt odwa berechnet. Der experimentelle Wirkungsquerschnitt σ soll sich dann durch Multiplikation mit zwei spektroskopischen Faktoren S1 und S2 ergeben:

$$\sigma = \sigma_{DWBA} \cdot S_1 \cdot S_2$$

Die Faktoren S₁ und S₂ geben wieder an, bis zu welchem Grad die in Abbildung 6 angedeutete α-Struktur tatsächlich vorliegt. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß solche Reaktionen komplizierte Prozesse sind und daß nicht endgültig geklärt ist, in welchen Fällen der Einfluß der Kernstruktur in so einfacher Weise adäquat berücksichtigt werden kann.

Schalenmodell und Pauli Prinzip

Um theoretische Aussagen über den spektroskopischen Faktor machen zu können, benötigen wir eine Beschreibung der Kernstruktur. Hierfür haben sich die einfachen Wellenfunktionen des Schalenmodells als geeignet erwiesen. In diesem Abschnitt führen wir solche Wellenfunktionen in einfachster Form ein. Dabei diskutieren wir die Antisymmetrie der Wellenfunktion und das dadurch beschriebene Pauli Prinzip. Es sind diese Effekte, deren sorgfältige Behandlung zu den neueren Entwicklungen [6] in der α-Zerfallstheorie führt.

Die Beschreibung eines Kerns mit A Nukleonen erfolgt in der Quantenmechanik durch eine Vielteilchenwellenfunktion, die von den A Nukleonenkoordinaten abhängt. Wir wollen in dieser Arbeit von einer expliziten Behandlung des Spins (Eigendrehimpuls der Nukleonen) und Isospins (gibt an, ob das Nukleon ein Neutron oder Proton ist) absehen, da dies für unsere Diskussion nicht wichtig ist. Für das volle Verständnis des Schalenmodells ist eine explizite Behandlung, insbesondere der Kopplung zwischen dem Nukleonenspin und dem Bahndrehimpuls, von entscheidender Bedeutung.

Das Schalenmodell geht davon aus, daß sich jedes Nukleon in einem attraktiven Potential $V(\vec{r})$ bewegt. Es kann dies als das mittlere, durch die anderen Nukleonen hervorgerufene Potential interpretiert werden. Seine Reichweite ist etwa gleich dem Kernradius. Die Einteilchen-Schrödingergleichung mit diesem Potential $V(\vec{r})$ ergibt Lösungen $\phi_i(\vec{r})$, i=1,2...,zu Energieeigenwerten $\epsilon_1(\epsilon_1 \leqslant \epsilon_2 \leqslant ...)$. Die Lösungen sind im Bereich des Potentials lokalisiert und orthonormiert:

$$\int\! d^3r\, \phi_i {}^{*}(\overrightarrow{r})\, \phi_j(\overrightarrow{r}) = \delta_{ij}.$$

Ein Nukleon kann sich in einem bestimmten Zustand i mit der Energie ϵ_i befinden, seine Wellenfunktion ist dann $\phi_i(\vec{r})$. Haben wir nun A Nukleonen, so ist eine mögliche Vielteilchenwellenfunktion

$$\Psi(\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{r_2},...\overrightarrow{r_A}) = \underset{i=1}{\overset{k}{\pi}} \phi_1(\overrightarrow{r_i}).$$

Dies wäre eine Lösung der Schalenmodell-Schrödingergleichung zur niedrigsten Gesamtenergie $E = A \cdot \epsilon_1$. Tatsächlich zeigt aber die Erfahrung, daß alle Teilchen mit halbzahligem Spin (Fermionen) und damit auch die Nukleonen einem von Pauli aufgestellten Prinzip genügen. Dieses besagt, daß in jedem Zustand höchstens ein Nukleon sein darf. (Wenn wir den Spin und Isospin berücksichtigen, dann gibt es zu jedem Ortsniveau φi(r) genau 4 besetzbare Zustände. Dies ändert nichts Grundsätzliches an den folgenden Ausführungen.) Danach ergibt sich der Grundzustand, wenn die Nukleonen nacheinander die niedrigsten Niveaus φ1, φ2, ... auffüllen:

$$\Psi_{o}(\overrightarrow{r}_{1},\overrightarrow{r}_{2},...,\overrightarrow{r}_{A}) = \overset{A}{\underset{i=1}{\pi}} \phi_{i}(\overrightarrow{r}_{i})$$

Dies ist eine Lösung zur Energie $E_o = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i$. Eine solche Lösung ist jedoch nicht eindeutig. Betrachten wir einmal zwei Nukleonen mit den Koordinaten r_1 und r_2 in den Zuständen i und j. Dann ist $\phi_i(\vec{r_1})\,\phi_j(\vec{r_2})$ oder aber auch $\phi_i(\vec{r_2})\,\phi_j(\vec{r_1})$ eine Lösung zur Energie $\epsilon_i + \epsilon_j$. Auch eine beliebige Kombination ist eine solche Lösung. Das oben beschriebene Pauli Prinzip wird nun durch die Forderung gewährleistet, daß die Wellenfunktion antisymmetrisch ist, das heißt wir

wählen
$$\varphi_i(\vec{r_1})\varphi_i(\vec{r_2}) = \varphi_i(\vec{r_2})\varphi_i(\vec{r_1})$$

als Lösung. Bei Vertauschung der zwei Nukleonenkoordinaten erhalten wir denselben Ausdruck, jedoch mit einem Minuszeichen. Die antisymmetrische Wellenfunktion genügt automatisch dem Pauli Prinzip: Sitzen die beiden Nukleonen im selben Zustand (i=j), so ist die Wellenfunktion identisch gleich null, das heißt eine solche Konfiguration ist nicht möglich.

Die Verallgemeinerung dieser Überlegungen auf die Wellenfunktion Ψ(r₁,...,r_A) für A Nukleonen ist einfach. Wir konstruieren Ψ so, daß bei Vertauschung zweier beliebiger Koordinaten Ψ in –Ψ übergeht. Eine Vertauschung beliebig vieler Koordinaten nennen wir eine Permutation und den Operator, der sie ausführt, bezeichnen wir mit P. Damit können wir den Antisymmetrisierungsoperator

$$A = (A!)^{-1/2} \sum_{P} (-1)^{P} \hat{P}$$

einführen, der eine Summe über alle Permutationen P von A Objekten (hier Nukleonenkoordinaten) ist. Für eine gerade Permutation ist (-)^P = +1, für eine ungerade = -1. Die Konstante (A!)^{-1/2} ist so gewählt, daß unsere antisymmetrisierte Wellenfunktion

$$\Phi_0(\overrightarrow{r}_1, ... \overrightarrow{r}_A) = A \int_{i=1}^{A} \varphi_i(\overrightarrow{r}_i)$$
 (4)

wieder richtig normiert ist:

$$\int \cdots \int d^3r_1 ... d^3r_A |\Phi_0|^2 = 1$$

Es ist nun nicht mehr festgelegt, welches Nukleon in welchem Niveau sitzt; wir sagen, die Nukleonen sind unterscheidbar. Es ist jedoch festgelegt, daß alle Niveaus j (j = 1, 2, ..., A) mit genau einem Nukleon besetzt sind.

Spektroskopischer Faktor

Wir betrachten nun (4) als unsere Beschreibung für den Elternkern (A Nukleonen). Es ist dies jedoch eine gebundene stationäre Wellenfunktion, die nicht α-Teilchen beschreibt, die den Kern verlassen. Daß wir sie trotzdem als Ausgangspunkt wählen dürfen, liegt daran, daß die Halbwertszeit τ_{1/2} um viele Größenordnungen länger ist als eine typische Kernzeit (etwa 2R₁/v_a≈3·10⁻²²s in (3)). Deshalb haben wir es in der Tat zunächst mit einem praktisch stationären Zustand zu tun, der eine gültige Beschreibung ist, solange das α-Teilchen noch im Kern ist.

Wir können also mit Φ_0 bestimmen, in welchem Maße die Struktur "Tochterkern plus α -Teilchen" vorliegt. Hierzu beschreiben wir den Tochterkern ebenfalls durch eine Schalenmodellwellenfunktion

$$\Phi_{T}(\vec{r}_{1},...\vec{r}_{A-4}) = A \pi \phi \hat{i}(\vec{r}_{i})$$
. (5)

Wir brauchen nun noch eine α -Teilchenwellenfunktion, die von den restlichen Nukleonenkoordinaten \overrightarrow{r}_{A-3} , \overrightarrow{r}_{A-2} , \overrightarrow{r}_{A-1} und \overrightarrow{r}_A abhängt. Hier führen wir zunächst eine Koordinatentransformation zu den inneren Koordinaten \overrightarrow{x}_1 , \overrightarrow{x}_2 und \overrightarrow{x}_3 und zu der Schwerpunktskoordinate

$$\vec{R}_u = \sum_{A=3}^{A} \vec{r}_i / 4$$

durch. Die Schalenmodellwellenfunktion des α -Teilchens Φ_{α} $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ hängt dann immer noch von den inneren Koordinaten ab und ist mit

$$\iiint d^3x_1d^3x_2d^3x_3 |\Phi_{\alpha}|^2 = 1$$

nominiert. Eine solche Abseparation der Schwerpunktskoordinate (hier R_a) müßte im Prinzip auch für den schweren Eltern- und Tochterkern durchgeführt werden, ist dort aber schwierig und ergäbe nur geringe Korrekturen.

Wir denken uns die Bewegung des α -Teilchens im Elternkern durch eine Funktion $u(\vec{R}_{\alpha})$ beschrieben. Man könnte nun vermuten, daß wir einfach ausrechnen müssen, inwieweit die letzten 4 Nukleonen (ϕ_{A-3} , ϕ_{A-2} , ϕ_{A-1} und ϕ_A) in der Struktur eines α -Teilchens $u(\vec{R}_{\alpha})\cdot\Phi_{\alpha}$ vorliegen. Es muß jedoch erst berücksichtigt werden, daß die Nukleonen im α -Teilchen zum Teil denselben Platz besetzen wie die Nukleonen des Tochterkerns (5). Das heißt, das α -Teilchen $u(\vec{R}_{\alpha})\cdot\Phi_{\alpha}$ kann als solches wegen des Pauli Prinzips gar nicht da sein. Wir berücksichtigen das Pauli Prinzip, indem wir eine α -Teilchen-Tochterkern-Wellenfunktion in der Form

$$\Psi_{\alpha}(\overrightarrow{r}_1, ..., \overrightarrow{r}_A) = A[u(\overrightarrow{R}_{\alpha}) \cdot \Phi_{\alpha}(\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{x}_3) \Phi_{T}(\overrightarrow{r}_1, ..., \overrightarrow{r}_{A-4})]$$
 (6)

ansetzen. Der Operator A garantiert die Einhaltung des Pauli Prinzips. Dabei spielt es keine Rolle, daß Φ_{α} und Φ_{T} schon antisymmetrisiert sind; die nochmalige Anwendung von A bewirkt nichts Neues.

Die Frage, inwieweit der Elternkern aus dem

Tochterkern und einem α -Teilchen besteht, reduziert sich jetzt auf die Frage, inwieweit oder mit welcher Wahrscheinlichkeit in $\Phi_0(\vec{r}_1,...,\vec{r}_A)$ die Struktur $\Psi_\alpha(\vec{r}_1,...,\vec{r}_A)$ vorliegt.

In der Quantenmechanik wird eine Wahrscheinlichkeitsamplitude durch den Überlapp von Wellenfunktionen definiert. Die Amplitude, das durch $\Phi_0(\vec{r_1},...,\vec{r_A})$ beschriebene System in einem Zustand zu finden, der durch $\Psi_1(\vec{r_1},...,\vec{r_A})$ dargestellt wird, ist

$$<\Psi_{i}|\Phi_{0}> = \int \cdots \int d^{3}r_{1}...d^{3}r_{A} \Psi_{i}^{\circ}(\vec{r}_{1},...,\vec{r}_{A}) \Phi_{0}(\vec{r}_{1},...,\vec{r}_{A})$$

Die linke Seite dieser Gleichung können wir als abkürzende Schreibweise für die rechte Seite betrachten. Das Betragsquadrat von $<\Psi_i|\Phi_0>$ ist dann die gesuchte Wahrscheinlichkeit: $|<\Psi_i|\Phi_0>|^2$. Voraussetzung dafür sind folgende (triviale) Bedingungen:

$$\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle = 1$$
 und $\langle \Psi_i | \Psi_i \rangle = 1$.

Nun können wir unsere Frage beantworten: Die Wahrscheinlichkeit, in Φ_0 (4) die durch (6) gegebene Struktur, " α -Teilchen plus Tochterkern", vorzufinden, ist

$$S=|\langle \Psi_{\alpha}|\Phi_{0}\rangle|^{2}. \qquad (7)$$

Dies ist die für $\lambda = \lambda_G \cdot S$ gesuchte Wahrscheinlichkeit. Voraussetzung ist

$$\langle \Psi_{\alpha} | \Psi_{\alpha} \rangle = 1$$
 (8)

und auch $<\Phi_0|\Phi_0>=1$, was nach Konstruktion von Φ_0 der Fall ist. Es ist diese letzte, in unserer Darstellung triviale Bedingung (8), die bei der Berechnung von α -Zerfallsbreiten und α -spektroskopischen Faktoren in den letzten zwanzig Jahren nicht richtig beachtet wurde. Implizit oder explizit wurde immer $u(\vec{R}_u)$ in (6) als eine Wellenfunktion betrachtet und daher normiert:

$$\int d^{3}R_{t_{i}}|u(\vec{R}_{t_{i}})|^{2}=1.$$
 (9)

Für den Fall unterscheidbarer Teilchen, das heißt ohne den Operator A ist diese Interpretation als Wellenfunktion auch richtig, und (8) und (9) sind dann äquivalent (Φ_a und Φ_T waren ja als normiert vorausgesetzt). Mit dem Operator in (6) gilt jedoch

$$\int d^{3}R_{\alpha}|u(\overline{R}_{\alpha})|^{2} = 1 \rightarrow \langle \Psi_{\alpha}|\Psi_{\alpha} \rangle \ll 1 \qquad (10)$$

Damit führt die konventionelle, auf (9) be-

ruhende Berechnung von spektroskopischen Faktoren (7) zu im allgemeinen viel zu kleinen Ergebnissen (S \sim < $\Psi_{\!\!\!\!/}$ $|\Psi_{\!\!\!\!/}$ >). So ist für die einfachsten Schalenmodellzustände der spektroskopische Faktor für $^{212}\text{Po}{\rightarrow}\alpha+^{208}\text{Pb}$

$$S = \begin{cases} 1.2 \ 10^{-5} \text{ nach der alten Theorie} & (9) \\ 4.4 \ 10^{-3} \text{ nach der neuen Theorie} & (8). \end{cases}$$

Wir merken dabei an, daß selbst nach der neuen Theorie die Wahrscheinlichkeit, die Struktur " α + ²⁰⁸ Pb" vorzufinden, viel kleiner als 1 ist.

Die in (10) beschriebene Konsequenz ist in Abbildung 7 schematisch veranschaulicht und läßt sich so verstehen: Die Nukleonenzustände in dem durch u(Ra) Pa beschriebenen α-Teilchen sind im allgemeinen nicht orthogonal zu den im Tochterkern besetzten Zuständen (wären sie orthogonal, so wären (8) und (9) wieder äquivalent). Durch die Antisymmetrisierung, und das heißt wegen des Pauli Prinzips, fällt dann dieser nichtorthogonale Teil (schematisch die schraffierte Fläche in Abbildung 7) weg und damit ist \U. nicht mehr normiert (10). Formal können wir u(R

α)Φα nach Produkten aus 4 Einteilchenzustände qi entwickeln. Soweit diese Zustände im Tochterkern (5) schon besetzt sind, fallen sie, wie im letzten Abschnitt gezeigt, nach Antisymmetrisierung weg.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß wir hier natürlich eine vereinfachte Darstellung gegeben haben. Die tatsächlich verwendeten Reaktionstheorien sind komplexer, so daß eine darin enthaltene Verletzung des Pauli Prinzips nicht so klar auf der Hand liegt.

Vergleich zwischen Theorie und Experiment

Anhand eines Beispiels wollen wir zum Abschluß demonstrieren, was die α -Zerfallstheorie nach ihrem heutigen Stand zu leisten vermag. Wir wählen den Zerfall des Grundzustandes von 211 Po (Spin j=9/2):

$$^{211}Po(9/2) \rightarrow \alpha + ^{207}Pb(i)$$
.

Mit dem Index i deuten wir an, daß der Zerfall zu verschiedenen Endzuständen führt, die in Tabelle 1 durch den Spin des Zustands und die zugehörige α-Energie E^(a)_α charakterisiert sind. Die Zerfallskonstante für ²¹¹Po ergibt sich aus der Summe der

Zerfallskonstanten λ_i zu den einzelnen Endzuständen von ^{207}Pb :

$$\lambda\!=\!\Sigma\,\lambda_i$$

wobei

$$\lambda_i = \lambda_G(\mathbb{E}_{\alpha}^{(i)}) \cdot S_i$$

Die Einteilchenzerfallskonstante λ_G hängt von der Energie $E_\alpha^{(i)}$, der spektroskopische Faktor S von der Struktur des Tochterkerns 207 Pb(i) ab.

Für die Rechnung haben wir einfache Oszillator-Schalenmodellzustände verwendet. Zunächst geben wir in Tabelle 1 die Verzweigungsverhältnisse λ₁/λ an.

Die Verzweigungsverhältnisse werden befriedigend wiedergegeben. Auch die alte Theorie (mit dem in (10) beschriebenen Fehler) liefert vergleichbar gute Resultate. Das heißt, daß sich im Verhältnis λ_i/λ der Normierungsfehler näherungsweise heraushebt. Bisher war jedoch einerseits der Erfolg der alten Theorie für die Verzweigungsverhältnisse und andererseits das Versagen der Theorie für die absoluten Werte (Tabelle 2) rätselhaft. Die Tabelle 2 zeigt, daß die neue Theorie, die (8) berücksichtigt, auch die absoluten Werte erklären kann. Es sei darauf hingewiesen, daß die theoretischen Werte

Tabelle 1. Verzweigungsverhältnisse für ²¹¹Po — α + ²⁰⁷Pb(i).

Valuation 1 /2 in 01

Tochter!		V ernaltnisse V) Experiment	
1/2	7.44	99.0	97.8
5/2	6.88	0.53	1.7
3/2	6.56	0.50	0.5

Tabelle 2. Halbwertszeit von 211Po.

T (i)

Spin dos

Zerfallender Alte		Neue	Experi-
Kern	Theorie	Theorie	ment
²¹¹ Po	51 s	0.38 s	0.52 s

in Tabelle 2 (alte und neue Theorie) bis auf etwa einen Faktor 3 unsicher sind. Dies beruht zum Großteil darauf, daß die Penetrabilität P sensitiv auf Feinheiten des Potentials U(R) ist, die nicht so gut bekannt sind. Die alte Theorie kann jedoch auf keinen Fall, auch nicht unter Berücksichtigung dieser Unsicherheiten, die experimentelle Halbwertszeit T1/2 erklären.

Der α -Zerfall kann also quantitativ in einem einfachen mikroskopischen Modell, dem Schalenmodell, und in einer einfachen Reaktionstheorie (charakterisiert durch $\lambda = \lambda_G \cdot S$) verstanden werden.

Literatur

[1] E. Rutherford und H. Geiger: Proc. Roy. Soc. A81 (1908) 141, 162.

[2] H. Geiger und J. M. Nuttall: Phil. Mag. 22 (1911) 613.

[3] G. Gamow: Z. Physik 51 (1928) 204.

[4] O. Haxel, J. H. D. Jensen und H. E. Suess: Phys. Rev. 75 (1949) 1766; M. G. Mayer: Phys. Rev. 75 (1949) 1969.

[5] H. J. Mang: Z. Physik 148 (1957) 582; Phys. Rev. 119 (1960) 1063.

[6] T. Fliessbach und H. J. Mang: Nucl. Phys. A263 (1976) 75.

Dr. T. Fließbach, geb. 1944, Studium der Physik an der Technischen Universität München, dort 1969–71 wiss. Mitarbeiter am Mathematischen Institut und seit 1971 wiss. Assistent am Physikdepartment. Forschungsaufenthalt 1974/5 in Berkeley/Kalifornien. Forschungsgebiet: Kernreaktionen und Kernstruktur.