FORTGESCHRITTENEN-PRAKTIKUM I

Lange Halbwertszeiten

8. und 9. September 2014

Moritz Bitterling Benjamin ROTTLER

Betreuer: Riccardo MORI



Institut für Mathematik und Physik Albert-Ludwigs-Universität Freiburg im Breisgau Alle Berechnungen in diesem Protokoll wurden unter Python 2.7 mit Hilfe folgender Programmbibliotheken durchgeführt:

- PyROOT (http://root.cern.ch/drupal/content/pyroot)
- NumPy (http://www.numpy.org/)

Die Graphiken wurden mit Inkscape (http://www.inkscape.org) gezeichnet.

Alle Python-Skripte, LATEX-Skripte und SVG-Graphiken können online unter https://github.com/Bigben37/FP1/tree/master/0908-LHWZ abgerufen werden.

Inhaltsverzeichnis

1.	Versuchsziel	1
2.	2.2. Absorption von radioaktiver Strahlung2.3. Funktionsweise des Zählrohrs	
3.	Versuchsaufbau	7
4.	Versuchsdurchführung 4.1. Bestimmung der Zählrohrcharakteristik mit ²³⁸ U	8
5.	Messergebnisse und Auswertung 5.1. Bestimmung der Zählrohrcharakteristik mit ²³⁸ U	9 10 15
Α.		19 19

1. Versuchsziel

Im Versuch werden radioaktive Isotope von Kalium und Samarium untersucht: Ziel ist die Bestimmung der Halbwertszeiten von $^{40}_{19}$ K (0.0118 % nat. Häufigkeit) und von $^{147}_{62}$ Sm (14.87 % nat. Häufigkeit).

Dazu wird ein Methangaszählrohr verwendet, in dem die Strahlung von Proben aus KCl und $\mathrm{Sm_2O_3}$ Ionenlawinen auslöst. Die Ladung wird dann elektronisch registriert, die Ereignisse gezählt und mit dem Computer aufgenommen.

Die Einstellung der Elektronik und eine erste Charakterisierung des Zählrohrs wird mit einem Uranpräparat durchgeführt. Anschließend werden Messungen mit verschiedenen Kalium- und Samariumproben gemacht und die Untergrundstrahlung bestimmt.

2. Physikalische Grundlagen

2.1. Radioaktiver Zerfall

2.1.1. Das Zerfallsgesetz

Für die Beschreibung des radioaktiven Zerfalls eines Isotops werden seine mittlere Lebensdauer τ und die Zerfallskonstante $\lambda = \frac{1}{\tau}$ verwendet. Das Produkt $\lambda \cdot \mathrm{d}t$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Kern in der Zeiteinheit dt zerfällt. Aus der Halbwertszeit $T_{1/2}$ des Elements wird λ so berechnet:

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}} \tag{2.1}$$

Das Produkt aus Zerfallskonstante und Zahl der vorhandenen Kerne N(t) liefert die Änderung der Kernanzahl $-\mathrm{d}N(t)/\mathrm{d}t$ und wird als Aktivität A(t) bezeichnet:

$$A(t) = \lambda N(t) = -\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2.2}$$

Als Lösung dieser Differenzialgleichung erhält man das Zerfallsgesetz (mit $N_0 = N(0)$):

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \tag{2.3}$$

Damit erhält man für die Aktivität A(t)

$$A(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \tag{2.4}$$

Für lange Halbwertszeiten sind Kernanzahl N und Aktivität A nahezu konstant und es gilt

$$A = \lambda N \tag{2.5}$$

2.1.2. α -Zerfall

Der α -Zerfall findet nach folgendem Schema statt:

$${}_{Z}^{A}X \rightarrow {}_{Z-2}^{A-4}Y + {}_{2}^{4}He$$

Der Mutterkern X mit Protonenzahl Z und Nukleonenzahl A zerfällt unter Aussendung eines Helium-Kerns in den Tochterkern Y. Der Zerfall findet statt, wenn der Helium-Kern durch den Coulomb-Wall des Mutterkerns tunnelt.

 238 Uran und 147 Samarium sind α-Strahler: 238 U zerfällt zu 234 Th, das ebenfalls nicht stabil ist. Die Energie des ausgesendeten He-Kerns beträgt ca. 4 MeV. 147 Sm zerfällt zum stabilen 143 Nd, die Energie beträgt hier ca. 2 MeV.

2.1.3. β -Zerfall

Beim β^- -Zerfall zerfällt ein Neutron im Kern zu einem Proton, einem Elektron und einem Antielektronenneutrino:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &\to \mathbf{p}^+ + \mathbf{e}^- + \bar{\nu_e} \text{ bzw.} \\ {}_Z^A \mathbf{X} &\to {}_{Z+1}^A \mathbf{Y} + \mathbf{e}^- + \bar{\nu_e} \end{aligned}$$

Da beim Zerfall der Impuls unterschiedlich zwischen Elektron und Antineutrino aufgeteilt werden kann, besitzt β -Strahlung ein kontinuierliches Energiespektrum, im Gegensatz zum diskreten Spektrum der α -Strahlung.

Der β^- -Zerfall tritt bei 40 K-Kernen auf. Sie zerfallen mit einer Wahrscheinlichkeit von 89.28% zu 40 Ca, die Energie der Elektronen beträgt hier maximal $1.3\,\mathrm{MeV}$.

Auch 234 Th, das beim α -Zerfall von 238 U entsteht, zerfällt durch β^- -Zerfall zu Protaktinium 234 Pa, mit einer Energie der Elektronen von maximal $0.2\,\mathrm{MeV}$. Protaktinium zerfällt ebenfalls durch β^- -Zerfall weiter zu 234 U.

2.1.4. Elektroneneinfang

Die andere Zerfallsmöglichkeit von 40 K (Wahrscheinlichkeit 10.72%) ist der Einfang eines inneren Schalenelektrons in den Kern und Umwandlung eines Protons in ein Neutron:

$$p^+ + e^- \rightarrow n + \nu_e$$
 bzw.
 ${}_Z^A X \rightarrow {}_{Z-1}^A Y + \nu_e$

Für $^{40}{\rm K}$ bedeutet das eine Umwandlung zu $^{40}{\rm Ar.}$

Die Zerfallskonstanten für die beiden Zerfallsprozesse von 40 K addieren sich. Da nur der β^- -Zerfall detektiert werden kann, muss dies bei der Bestimmung der Halbwertszeit berücksichtigt werden.

2.2. Absorption von radioaktiver Strahlung

2.2.1. α -Strahlung

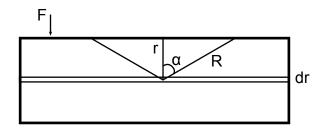


Abbildung 2.1: Kegel mit Öffnungswinkel α , innerhalb dessen ein emittiertes α Teilchen die Oberfläche erreicht

Bei der Absorption von α -Strahlung wird davon ausgegangen, dass die Strahlung im Medium die Reichweite R besitzt. Man erhält dann für eine Schicht mit der Dicke dr und der Entfernung r von der Schichtoberfläche folgenden Anteil dn der Zählrate an der Oberfläche:

$$dn = A_V \cdot F \cdot dr \cdot p_{\rm ex}(r) \tag{2.6}$$

 A_V ist die Aktivität der Probe pro Volumen, F die Oberfläche der Probe und $p_{\rm ex}$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein emittiertes α -Teilchen aus der Tiefe r die Oberfläche erreicht.

Für die Zählrate n an der Oberfläche folgt dann

$$n = \int_0^R A_V \cdot F \cdot p_{\rm ex}(r) \cdot dr \tag{2.7}$$

Da das α -Teilchen in eine zufällige Richtung abgestrahlt wird, lässt sich $p_{\rm ex}$ durch den Raumwinkel $\Omega(\alpha)$ berechnen, den der Kegel mit Öffnungswinkel α aus dem gesamten Raumwinkel 4π ausschneidet:

$$p_{\rm ex}(\alpha) = \frac{\Omega(\alpha)}{4\pi} \tag{2.8}$$

Auf Abbildung 2.1 erkennt man, dass für den Öffnungswinkel α gilt:

$$\cos \alpha = \frac{r}{R} \tag{2.9}$$

Damit folgt für den Raumwinkel

$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\alpha \sin\theta \, d\theta = 2\pi \cdot (1 - \cos(\alpha)) = 2\pi \cdot (1 - \frac{r}{R})$$
 (2.10)

Es gilt also

$$n = A_V \cdot F \cdot \int_0^R \frac{1}{4\pi} \cdot 2\pi \cdot (1 - \frac{r}{R}) \cdot dr = A_V \cdot F \cdot \frac{R}{4}$$
 (2.11)

Da sowohl R als auch A_V nicht bekannt sind, muss obige Gleichung weiter umgeformt werden. Dafür wird folgender Zusammenhang benutzt:

$$N_{^{147}\text{Sm}} = 2 \cdot h_{\text{rel}} \cdot N_A \cdot \frac{m_{\text{Sm}_2\text{O}_3}}{M_{\text{Sm}_2\text{O}_3}} = 2 \cdot h_{\text{rel}} \cdot N_A \cdot \frac{\rho_{\text{Sm}_2\text{O}_3} \cdot V}{M_{\text{Sm}_2\text{O}_3}}$$
(2.12)

 $N_{^{147}\mathrm{Sm}}$ ist die Zahl der Kerne des radioaktiven Isotops von Samarium und h_{rel} seine natürliche Häufigkeit. $m_{\mathrm{Sm_2O_3}}$ ist die Masse von $\mathrm{Sm_2O_3}$ im Zählrohr, $\rho_{\mathrm{Sm_2O_3}}$ seine Dichte und $M_{\mathrm{Sm_2O_3}}$ die molare Masse. Der Faktor 2 ist vorhanden, weil in 1 Mol $\mathrm{Sm_2O_3}$ 2 Mol Samarium vorliegen. N_A ist die Avogadrozahl. Es gilt also

$$n \stackrel{\text{(2.11)}}{=} \frac{A}{V} \cdot F \cdot \frac{R}{4} \stackrel{\text{(2.5)}}{=} \frac{\lambda \cdot N_{^{147}\text{Sm}}}{V} \cdot F \cdot \frac{R}{4}$$

$$= \frac{\lambda \cdot 2 \cdot h_{\text{rel}} \cdot N_A \cdot \frac{\rho_{\text{Sm}_2\text{O}_3} \cdot V}{M_{\text{Sm}_2\text{O}_3}}}{V} \cdot F \cdot \frac{R}{4}$$

$$\stackrel{\text{(2.1)}}{=} \frac{\ln 2}{2} \cdot \frac{\rho_{\text{Sm}_2\text{O}_3} \cdot R \cdot N_A \cdot h_{\text{rel}}}{M_{\text{Sm}_2\text{O}_2}} \cdot \frac{F}{T_{1/2}}$$

$$(2.13)$$

Das Produkt $\rho_{\text{Sm}_2\text{O}_3} \cdot R$ lässt sich mit der Näherung von Bragg und Kleeman abschätzen:

$$\rho \cdot R = c \cdot \sqrt{m_A} \tag{2.14}$$

Diese Beziehung gilt für alle Materialien. m_A ist das effektive Atomgewicht des Materials und wird folgendermaßen berechnet:

$$\sqrt{m_A} = \sum_i p_i \cdot \sqrt{m_{A_i}} \tag{2.15}$$

 $m_{{\cal A}_i}$ ist das Atomgewicht eines Elements und p_i sein relativer Anteil. Es gilt

$$\frac{\rho_{\text{Sm}_2\text{O}_3} \cdot R_{\text{Sm}_2\text{O}_3}}{\rho_{\text{Luft}} \cdot R_{\text{Luft}}} = \sqrt{\frac{m_{A,\text{Sm}_2\text{O}_3}}{m_{A,\text{Luft}}}}$$
(2.16)

Mit $m_{A, \mathrm{Sm_2O_3}} = 123.76\,\mathrm{g}, \, m_{A, \mathrm{Luft}} = 14.66\,\mathrm{g}, \, \rho_{\mathrm{Luft}} = 0.001226\,\mathrm{g/cm^3}$ und $R_{\mathrm{Luft}} = 1.13\,\mathrm{cm}$ folgt

$$\rho_{\text{Sm}_2\text{O}_3} \cdot R_{\text{Sm}_2\text{O}_3} = 4.025 \cdot 10^{-3} \,\text{g/cm}^2$$
 (2.17)

2.2.2. β -Strahlung

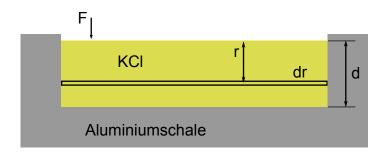


Abbildung 2.2: Selbstabsorption von β -Strahlung bei KCl

Für β -Stahlung gilt das Gesetz der exponentiellen Absorption

$$\frac{I(r)}{I_0} = e^{-\mu r} (2.18)$$

 I_0 ist die Intensität der Strahlung vor der Absorption, I(r) die Intensität nach Durchlaufen der Strecke r im Medium mit dem Absorptionskoeffizienten μ .

Bei einem Material mit der Aktivität A gilt an der Oberfläche für die Zählrate dn, die von der Schicht mit dem Volumen dV und der Entfernung r von der Oberfläche verursacht wird,

$$dn = \frac{A}{V} \cdot dV \cdot e^{-\mu r} = \frac{A}{m} \cdot \rho \cdot F \cdot dr \cdot e^{-\mu r} = A_S \cdot \rho \cdot F \cdot dr \cdot e^{-\mu r}$$
(2.19)

V ist das Volumen der Probe, m die Masse, ρ ihre Dichte, F die Probenoberfläche und A_S die spezifische Aktivität. Durch Integration über die Probendicke d erhält man

$$n = A_S \cdot \rho \cdot F \cdot \int_0^d e^{-\mu r} \cdot dr = A_S \cdot \rho \cdot F \cdot \frac{1}{\mu} \cdot (1 - e^{-\mu \cdot d})$$
 (2.20)

Unter Verwendung von $m = \rho \cdot V = \rho \cdot F \cdot d$ folgt

$$n = A_S \cdot \rho \cdot F \cdot \frac{1}{\mu} \cdot (1 - e^{-\frac{\mu \cdot m}{\rho \cdot F}}) \tag{2.21}$$

Bei der Auswertung ist ein weiterer Effekt zu berücksichtigen: Elektronen, die nach unten in Richtung des Aluminiumbehälters emittiert werden, werden zum Teil zurückgestreut. Dies wird durch die Einführung des Rückstreufaktors f (f=1.29 bei Aluminium) berücksichtigt.

2.3. Funktionsweise des Zählrohrs

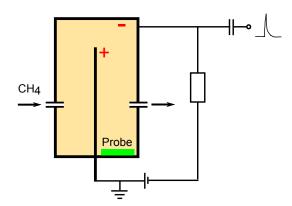


Abbildung 2.3: Methangaszählrohr zur Bestimmung der Aktivität von radioaktiven Proben

Abbildung 2.3 zeigt den Aufbau des verwendeten Zählrohrs: In einer mit Methan gefülten Kammer befindet sich ein Draht auf Massepotential. Die Außenfläche der Kammer liegt auf einem stark negativen Potential. Fliegt nun ein hochenergetisches Teilchen durch das Zählgas, werden Gasmoleküle ionisiert. Bei einer geringen Zählrohrspannung rekombinieren die Ionen wieder mit ihren Elektronen. Wird die Spannung erhöht, so gelangen positive Ionen bis zur Außenhülle und Elektronen an den Draht. Ein Spannungspuls kann dann am Koppelungskondensator gemessen werden. Eine weitere Erhöhung der Spannung führt zu einer sehr starken Beschleunigung der Elektronen im Feld nahe am Draht. Diese schnellen Elektronen können weitere Gasmoleküle ionisieren. Aufgrund dieser Gasverstärkung ist die Anzahl der erzeugten Ionen-Paare dann proportional zur Energie des einfallenden Teilchens. In diesem Spannungsbereich werden die Experimente durchgeführt.

Bei sehr hoher Spannung geht die Verstärkung in Sättigung: Die Anzahl der erzeugten Ionen ist für alle Teilchen unabhängig von ihrer Energie gleich hoch. Man spricht dann von einem Geiger-Müller-Zählrohr.

2.4. Fehlerrechnung bei Zählraten

Ist der Zerfälle N pro Zeitintervall t_n bekannt, so beträgt die Zerfallsrate n

$$n = \frac{N}{t_n} \tag{2.22}$$

Da der radioaktive Zerfall poissonverteilt ist, gilt für den Fehler s_N auf N

$$s_N = \sqrt{N} \tag{2.23}$$

Mit dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz erhält man für den Fehler der Zerfallsrate

$$s_n = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial N} \frac{N}{t_n}\right)^2 \cdot s_N^2} = \frac{s_N}{t_n} = \frac{\sqrt{N}}{t_n} = \frac{\sqrt{n \cdot t_n}}{t_n} = \sqrt{\frac{n}{t_n}}$$
 (2.24)

Für den relativen Fehler $s_{n,\text{rel}}$ erhält man damit

$$s_{n,\text{rel}} = \frac{s_n}{n} = \frac{1}{\sqrt{n \cdot t_n}} \tag{2.25}$$

bzw.

$$t_n = \frac{1}{n \cdot s_{n,\text{rel}}^2} \tag{2.26}$$

Meist ist es nicht möglich, die Zählrate n direkt zu messen, da zusätzlich noch eine Untergrundstrahlung vorhanden ist. Die gemessene Zählrate \hat{n} muss also um die Untergrundzählrate u bereinigt werden:

$$n = \hat{n} - u \tag{2.27}$$

Man erhält dann für den Fehler s_n

$$s_n = \sqrt{s_{\hat{n}}^2 + s_u^2} = \sqrt{\frac{\hat{n}}{t_{\hat{n}}} + \frac{u}{t_u}}$$
 (2.28)

3. Versuchsaufbau

Das Methandurchflusszählrohr, das im Versuch verwendet wird, ist über eine Auswerteelektronik mit einem Computer verbunden: Die Stromimpulse, die durch Ionisationen im
Zählrohr erzeugt werden, werden erst in einen Vorverstärker und dann in einen weiteren
Verstärker geleitet. Daraufhin gelangt das verstärkte Signal in einen Einkanalanalysator,
der das Signal so modifiziert, dass anschließend die Impulse gezählt werden können. Die
Auswertung erfolgt mit einem Lab View-Programm.

Das Zählrohr ist an eine Hochspannungsquelle angeschlossen und wird mit Methan aus einer Gasflasche gespült. Die Hochspannungsquelle wird mit LabView angesteuert, die Regelung des Gasdurchflusses erfolgt mit mechanischen Druckreglern.

Versuchsdurchführung

4.1. Bestimmung der Zählrohrcharakteristik mit ²³⁸U

Vor Beginn der Messung wird der Wert der Schwellenspannung des Einkanalanalysators auf 0.75 eingestellt, so dass gerade kein Rauschen mehr sichtbar ist. Ein Uranpräparat wird in das Zählrohr eingelegt und die Charakteristik des Zählrohrs bestimmt: Für

Spannungen zwischen $1000\,\mathrm{V}$ und $4000\,\mathrm{V}$ (Schrittweite $100\,\mathrm{V}$) werden jeweils $50\,\mathrm{s}$ lang die Zählereignisse detektiert. Vor jeder Messung wird eine $15\,\mathrm{s}$ lange Pause gemacht, so dass sich die Spannung stabilisieren kann. Diese Einstellung wird für alle folgenden Messungen beibehalten.

Anschließend wird die gleiche Messung ohne das Uranpräparat erneut durchgeführt, um die Untergrundstrahlung zu bestimmen.

4.2. Bestimmung der Halbwertszeit von ¹⁴⁷Sm

In diesem Abschnitt wird die energiereiche α -Strahlung von Samariumoxid untersucht. Dazu wird eine mit $\mathrm{Sm_2O_3}$ gefüllte große Aluminiumschale in das Zählrohr gestellt und die Zählraten für Spannungen zwischen $1000\,\mathrm{V}$ und $2200\,\mathrm{V}$ (Schrittweite $100\,\mathrm{V}$) jeweils $50\,\mathrm{s}$ lang gemessen. Da durch die kurze Messzeit ein hoher Fehler auf die Einzelmessungen entsteht, wird für einen Punkt in der Mitte des Plateaus (bei $1600\,\mathrm{V}$) eine längere Messung durchgeführt. Ein Schätzwert für die Zählrate liegt mit obiger Messung bereits vor. Daher kann mit Gleichung 2.26 die Messdauer berechnet werden, die zu einem relativen Fehler von $3\,\%^1$ führt.

Die Messung des Punktes bei $1600\,\mathrm{V}$ wird anschließend mit einer mittelgroßen und einer kleinen Aluminiumschale noch einmal gemacht. Um die benötigte Messzeit abzuschätzen, wird zuerst eine $50\,\mathrm{s}$ lange Messung durchgeführt. Mit dem ungenauen Schätzwert für die Zählrate wird dann die Messzeit berechnet, die für einen relativen Fehler von $3\%^1$ bzw. $4.5\,\%^1$ auf die Zählrate notwendig ist.

Anschließend wird bei der selben Spannung mit einer leeren Aluschale 1.5 Stunden lang der Untergrund gemessen.²

4.3. Bestimmung der Halbwertszeit von ⁴⁰K

Im letzten Versuchsteil wird die β^- -Strahlung von Kalium untersucht. Dazu wird eine Aluminiumschale mit ca. 2 g KCl befüllt und in das Zählrohr eingesetzt. Die Zählrohrspannung wird in 100 V-Schritten von 2500 V auf 4000 V gesteigert. Für jede Spannungseinstellung werden 50 s lang die Zerfälle gezählt.

Dann wird eine längere Messung bei $3200\,\mathrm{V}$ Zählrohrspannung an der selben Probe durchgeführt. Wie oben lässt sich die benötigte Messzeit berechnen, um einen relativen statistischen Fehler von weniger als $2\,\%$ auf die Zählrate zu erhalten.

Anschließend wird schrittweise die Masse des KCl in der Aluminiumschale verringert. Für jede Masse wird $50\,\mathrm{s}$ lang die Anzahl der Zählereignisse registriert und dann jeweils die Messdauer bestimmt, die für den Fehler von $2\,\%$ notwendig ist.

Schließlich wird mit dem leeren Alubehälter 10 Stunden lang² der Untergrund gemessen.

¹Die im Versuch geforderte Genauigkeit von 2 % konnte nicht erreicht werden, da wegen Ausfall der Methangasversorgung nur ein Versuchstag für Experimente zur Verfügung stand und die Messzeiten deswegen verkürzt werden mussten.

²Auch hier konnte aus Zeitmangel die geforderte Genauigkeit der Untergrundmessung nicht erreicht werden.

Messergebnisse und Auswertung

5.1. Bestimmung der Zählrohrcharakteristik mit ²³⁸U

Die gemessene Abhängigkeit der Zählrate n von ²³⁸U ohne Untergrund von der Zählrohrspannung U wird in der Abbildung 5.1 gezeigt. Von der gemessenen Zählrate \hat{n} muss der Untergrund u abgezogen werden, um die echte Zählrate n zu erhalten: $n = \hat{n} - u$. Der Fehler auf die echte Zählraten n beträgt nach Gleichung 2.28

$$s_n = \sqrt{s_{\hat{n}}^2 + s_u^2} = \sqrt{\frac{\hat{n}}{t_{\hat{n}}} + \frac{u}{t_u}}$$
 (5.1)

wobei $t_{\hat{n}}$ und t_u der Messzeit pro Messpunkt der gemessenen Zählrate bzw. des Untergrunds entspricht.

Jedoch sind die Fehler der Zählrate des Urans wegen der logarithmischen Skala nicht mehr gut zu erkennen, weshalb sie in der Abbildung nicht eingezeichnet wurden.

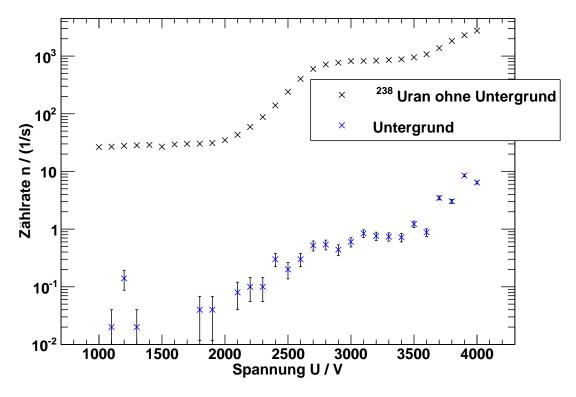


Abbildung 5.1: Zählrohrcharakteristik mit ²³⁸U und Untergrund

Man erkennt gut das α -Plateau bis ca. 2000 V und das β -Plateau von 2800 V bis 3500 V, welche durch die unterschiedlichen Energien der beiden Strahlungen verursacht werden. Des Weiteren wurde die Zählrate des Untergrundes in der gleichen Abbildung 5.1 abgebildet. Der Anstieg der Zählrate des Untergrundes, verursacht von der Zählrohrspannung,

lässt sich gut erkennen. Allerdings sieht man auch die statistischen Schwankungen in der Zählrate des Untergrundes (die Messpunkte mit n=0 lassen sich auf der logarithmischen Skala nicht darstellen), da die einzelnen Messpunkte nur in einer geringen Zeitspanne ($t=50\,\mathrm{s}$) aufgenommen wurden. Für eine glattere Kurve wäre eine längere Messzeit erforderlich gewesen.

5.2. Bestimmung der Halbwertszeit von ¹⁴⁷Sm

Alle Zählraten in diesem Abschnitt sind schon die echten Zählraten, also die gemessenen Zählraten vom Untergrund bereinigt. Die Werte und ihre Fehler wurden, wie in 5.1 beschrieben, berechnet.

5.2.1. α -Plateau von ¹⁴⁷Sm

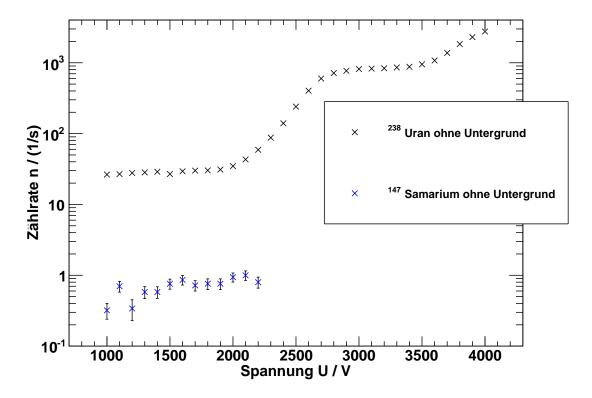


Abbildung 5.2: α -Plateau von ¹⁴⁷Sm

In Abbildung 5.2 ist das α -Plateau von $^{147}\mathrm{Sm}$ im Vergleich zur Zählrohrcharakteristik von $^{238}\mathrm{U}$ dargestellt worden. Man erkennt trotz einiger Schwankungen den Plateaucharakter des aufgenommenen Ausschnitts. Möchte man die Schwankungen verringern, so ist eine längere Dauer der Messzeit erforderlich.

5.2.2. Messung der Flächen

Die Durchmesser d der verschiedenen Flächen wurden je N=6 mal mit einer Schiebelehre (Fehler $s_d=0.005$ cm) gemessen. Der Mittelwert \bar{d} berechnet sich mit

$$\bar{d} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} d_i \tag{5.2}$$

Nun gibt es zwei Arten von Fehlern für den mittleren Durchmesser, der eine entspricht der Standardabweichung³ und der andere lässt sich aus dem Fehler der Einzelmessung berechnen.

$$s_{\bar{d},\text{stat}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N} \left(d_i - \bar{d} \right)^2} \quad \text{und} \quad s_{\bar{d}} = \frac{s_d}{\sqrt{N}}$$
 (5.3)

Wie man in Tabelle 5.1 sehen kann, ist der statistische Fehler immer größer oder gleicht dem Fehler, der durch die Einzelmessungen verursacht wird. Deshalb haben wir im Folgenden mit dem statistischen Fehler die Fehler der abhängigen Größen berechnet.

Tabelle 5.1: Mittlere Durchmesser \bar{d} mit verschiedenen Fehlern

Durchmesser \bar{d} / cm	$s_{\bar{d},\mathrm{stat}}/\mathrm{cm}$	$s_{ar{d}}/\mathrm{cm}$
0.9983	0.0068	0.002
1.6992	0.0058	0.002
2.8792	0.0020	0.002

Im Folgenden wird der mittlere Durchmesser mit d und der Fehler mit s_d bezeichnet. Die Fläche und ihr Fehler berechnen sich nun mit

$$F = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2, \qquad s_F = F \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial d} \cdot s_d\right)^2} = \frac{d}{2} \cdot \pi \cdot s_d$$
 (5.4)

In Tabelle 5.2 sind die verschiedenen Flächen mit zugehörigen Fehlern aufgelistet.

Tabelle 5.2: Verschiedene Flächen für die Samariummessung

Durchmesser d / cm	s_d / cm	Fläche F/cm^2	s_F/cm^2
0.9983	0.0068	0.7828	0.0107
1.6992	0.0058	2.2676	0.0156
2.8792	0.0020	6.5106	0.0092

 $^{^3}$ Allerdings muss hier mit dem Gewichtungsfaktor $\frac{1}{N-1}$ gerechnet werden, da aus dem gleichen Datensatz schon der Mittelwert berechnet wurde und somit ein Freiheitsgrad weniger verfügbar ist.

5.2.3. Bestimmung der Halbwertszeit von ¹⁴⁷Sm aus den einzelnen Flächen

Die Zählrate n hängt nach Gleichung 2.11 von der Fläche F folgendermaßen ab:

$$n(F) = \frac{A_V \cdot F \cdot R}{4} \Rightarrow A_V = \frac{4 \cdot n}{F \cdot R} \tag{5.5}$$

Daraus lässt sich die Halbwertszeit mit Gleichung 2.13 bestimmen:

$$T_{1/2}(^{147}\text{Sm}) = \frac{\ln 2}{2} \cdot \frac{\rho_{\text{Sm}_2\text{O}_3} \cdot R_{\text{Sm}_2\text{O}_3} \cdot N_A \cdot h_{\text{rel}}}{M_{\text{Sm}_2\text{O}_3}} \cdot \frac{F}{n} = const. \cdot \frac{F}{n}$$
 (5.6)

mit N_A Avogadrokonstante, $h_{\rm rel}=0.1487$ natürlicher Häufigkeit von Samarium und $M_{\rm Sm_2O_3}=348.717$ g/mol der molaren Masse von $\rm Sm_2O_3$. Der Faktor $\rho_{\rm Sm_2O_3}\cdot R_{\rm Sm_2O_3}$ ist eine Konstante und wurde in Gleichung 2.17 berechnet:

$$\rho_{\text{Sm}_2\text{O}_3} \cdot R_{\text{Sm}_2\text{O}_3} = 4.025 \cdot 10^{-3} \,\text{g/cm}^2 \tag{5.7}$$

In Tabelle 5.3 sind die Messdaten der Zählraten für die verschiedenen Flächen aufgelistet.

Tabelle 5.3: Zählraten von ¹⁴⁷Sm für verschiedene Flächen mit Fehlern

Fläche F/cm^2	s_F/cm^2	Zählrate $n/(1/s)$	$s_n/(1/s)$
0.7828	0.0107	0.139	0.010
2.2676	0.0156	0.290	0.014
6.5106	0.0092	0.678	0.026

Der Fehler der Halbwertszeit kann mit

$$s_{T_{1/2}} = T_{1/2} \cdot \sqrt{\left(\frac{s_F}{F}\right)^2 + \left(\frac{s_n}{n}\right)^2} \tag{5.8}$$

bestimmt werden Daraus lassen sich folgende Halbwertszeiten berechnen:

$$T_{1/2}(F = 0.783 \text{ cm}^2) = (0.639 \pm 0.05) \cdot 10^{11} \text{ a}$$
 (5.9)

$$T_{1/2}(F = 2.268 \text{ cm}^2) = (0.888 \pm 0.04) \cdot 10^{11} \text{ a}$$
 (5.10)

$$T_{1/2}(F = 6.5106 \text{ cm}^2) = (1.09 \pm 0.04) \cdot 10^{11} \text{ a}$$
 (5.11)

Man erkennt, dass die Werte für die Halbwertszeiten mit der Fläche zunehmen, was nicht dem theoretischen Modell entspricht (die Abhängigkeit der Fläche wurde schon in der Formel berücksichtigt und es werden deshalb ungefähr gleiche Werte erwartet). Außerdem ist der Unterschied der ersten und letzten Halbwertszeit 59%. Deshalb wird im nächsten Abschnitt versucht, die Halbwertszeit mit einer anderen Methode zu bestimmen, um etwaige systematische Fehler herauszufiltern.

5.2.4. Bestimmung der Halbwertszeit von ¹⁴⁷Sm mit einer Ausgleichsgeraden

Eine Ausgleichsgerade lässt sich mit nur drei Messpunkten nicht so exakt bestimmen, jedoch wurde wegen der großen Unstimmigkeit der Fehler zueinander eine andere Methode zur Bestimmung der Halbwertszeit gesucht. Aus Gleichung 5.6 folgt

$$n = \frac{\ln 2}{2} \frac{R \cdot \rho \cdot N_A \cdot h_{\text{rel}}}{M_{\text{Sm}_2\text{O}_3} \cdot T_{1/2}(^{147}\text{Sm})} \cdot F$$
 (5.12)

Es wird ein Polynom ersten Grades angesetzt:

$$n(F) = a + b \cdot F \tag{5.13}$$

wobei man mit der Steigung b die Halbwertszeit berechnen kann

$$T_{1/2}(^{147}\text{Sm}) = \frac{\ln 2}{2} \frac{R \cdot \rho \cdot N_A \cdot h_{\text{rel}}}{M_{\text{Sm}_2\text{O}_3} \cdot b}$$
 (5.14)

Der Fehler folgt aus dem Fehler der Steigung s_h

$$s_{T_{1/2}} = T_{1/2}(^{147}\text{Sm}) \cdot \frac{s_b}{h}$$
 (5.15)

Der Achsenabschnitt a ist im theoretischen Modell nicht enthalten und sollte daher im Idealfall verschwinden.

Die Kurvenanpassung liefert

$$a = (0.068 \pm 0.012) \cdot \frac{1}{s}$$

$$b = (0.0947 \pm 0.0048) \cdot \frac{1}{s \cdot cm^2}$$
(5.16)

$$b = (0.0947 \pm 0.0048) \cdot \frac{1}{\text{s} \cdot \text{cm}^2}$$
 (5.17)

und ist in Abbildung 5.3 graphisch dargestellt.

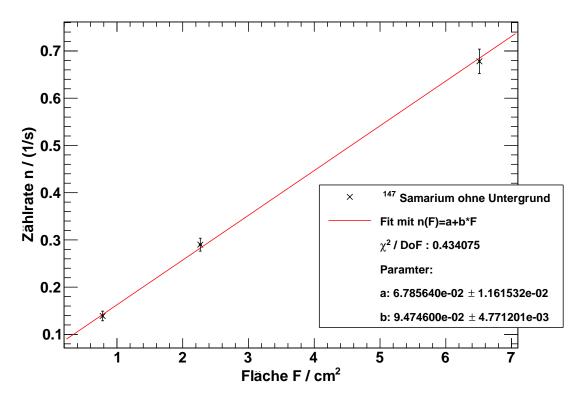


Abbildung 5.3: Flächenabhängigkeit der Zählrate n von 147 Sm bei 1600 V

Der χ^2 -Wert beträgt $\chi^2=0.43$ und die Zahl der Freiheitsgrade DoF = 1. Daraus folgt, dass das Modell mit einer Wahrscheinlichkeit von $48.8\,\%$ die Messdaten beschreibt. Die Rechnung liefert eine Halbwertszeit von

$$T_{1/2}(^{147}\text{Sm}) = (1.20 \pm 0.06) \cdot 10^{11} \text{ a}$$
 (5.18)

5.2.5. Diskussion der Ergebnisse

Der Literaturwert für die Halbwertszeit von 147 Sm ist $\tilde{T}_{1/2}(^{147}$ Sm) = $1.06 \cdot 10^{11}$ a. Wie schon in 5.2.3 erwähnt, stimmen die Halbwertszeiten für die unterschiedlichen Flächen nicht miteinander überein. Der Wert für die größte Fläche $T_{1/2}(F=6.5106~\text{cm}^2)=(1.09\pm0.04)\cdot10^{11}$ a stimmt innerhalb einer Standardabweichung mit dem Literaturwert überein, die Werte der anderen Flächen weichen jedoch stark von ihm ab. Wir vermuten einen systematischen Fehler, der mit größerer Fläche abnimmt.

Bei der Bestimmung der Halbwertszeit mit der Ausgleichsgeraden errechnet man einen Wert von $T_{1/2}(^{147}\mathrm{Sm}) = (1.20 \pm 0.06) \cdot 10^{11}\,\mathrm{a}$, welcher innerhalb von drei Standardabweichungen mit dem Literaturwert übereinstimmt. Der Achsenabschnitt sollte laut theoretischem Modell verschwinden, jedoch beträgt er $a = (0.068 \pm 0.012)\,\frac{1}{\mathrm{s}}$. Dies könnte auf einen systematischen Fehler hinweisen.

Eine Möglichkeit für einen systematischen Fehler ist die unterschiedliche Dichte der

Proben für verschiedene Flächen. Je nachdem, wie dicht das Samariumoxid in das Aluminiumschälchen gedrückt wurde, besitzen die Proben eine unterschiedliche Dichte, was zu einer anderen Zählrate und somit auch zu einer anderen Halbwertszeit führt.

Eine andere Quelle für systematische Fehler ist die Schwelle des SCAs. Stellt man die Schwelle zu gering ein, wird ein Teil des Rauschens als Strahlung interpretiert und mitgemessen. Stellt man die Schwelle zu hoch ein, so registriert man nicht diejenigen α -Teilchen, die aus den unteren Schichten der Samariumoxid-Probe kommen und ihre Energie schon teilweise durch Absorption abgegeben haben. Es ist jedoch gut, den Schwellenwert so niedrig wie möglich einzustellen, da man durch die Untergrundsmessung bei gleicher Schwelle den Fehler durch den Untergrund berücksichtigen kann.

5.3. Bestimmung der Halbwertszeit von ⁴⁰K

Auch in diesem Abschnitt sind alle Zählraten bereits die echten Zählraten und nach dem Verfahren, das in 5.1 beschrieben wurde, berechnet.

5.3.1. β -Plateau von 40 K

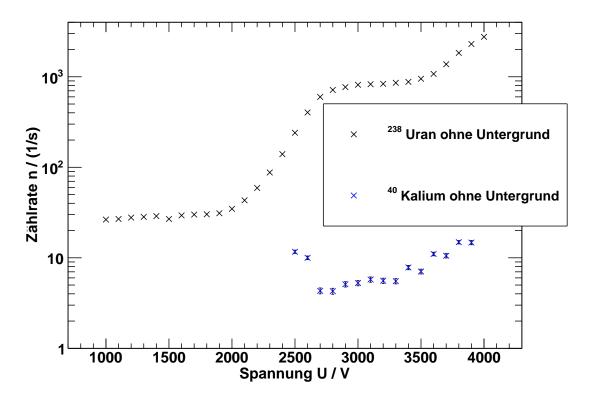


Abbildung 5.4: β -Plateau von 40 K

In Abbildung 5.4 ist das β -Plateau der Zählrate n von 40 K ohne Untergrund gegen die Zählrohrspannung U aufgetragen und in Vergleich mit der Zählrate von 238 U gesetzt worden. Man erkennt das β -Plateau von 2700 V bis ca. 3300 V. Danach steigt die Zählrate an, da die Spannung zu hoch für ein Proportionalzählrohr ist und man in den Bereich begrenzter Proportionalität gelangt. Die hohen Werte am Anfang sind durch kurzzeitige Schwankungen in der Zählrate zu erklären. Um eine Kurve mit weniger Schwankungen zu erhalten, müsste man bei den einzelnen Spannungen längere Messungen durchführen.

5.3.2. Massenabhängigkeit der Zählrate

Für die Bestimmung der Massenabhängigkeit der Zählrate wurde der Untergrund bei $U=3200\,\mathrm{V}$ über die Nacht $(t=10\,\mathrm{h})$ aufgenommen. Es wurde eine Untergrundszählrate von $u=7.227\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ gemessen. Dieser Wert ist höchst unrealistisch, da bei den Messungen mit der Probe maximal eine Zählrate von $6.186\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ erreicht wurde und somit bei Abzug des Untergrundes nur negative Zählraten berechnet werden. Außerdem geht aus der allgemeinen Untergrundsmessung in 5.1 bei $U=3200\,\mathrm{V}$ eine Untergrundszählrate von $u'=0.760\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ hervor.

Diese Messung kann durch unterschiedliche Fehler hervorgerufen worden sein. Zum einen könnte durch eine oder mehrere kurze, sehr starke Störungen eine große Anzahl von Ereignissen registriert worden sein, wodurch die Anzahl aller Ereignisse natürlich stark verfälscht werden kann. Des Weiteren kann es sein, dass das Rauschen über eine kurze Zeitspanne über den Schwellenwert des SCA gelangt ist und somit das Rauschen als viele Ereignisse gezählt wurde. Vergleicht man u mit u', so sieht man, dass die beiden Werte sich ungefähr um einen Faktor 10 unterscheiden. Es kann daher auch nicht ausgeschlossen werden, dass das verwendete LabView-Programm bei zu großen Zeiten $(t=10\,\mathrm{h}=36000\,\mathrm{s})$ einen Kommafehler verursacht.

Um die Berechnungen trotzdem ohne Untergrund durchzuführen, werden wir u' als Untergrundszählrate benutzen. Daraus ergibt sich ein größerer Fehler auf den Untergrund und letztendlich, mit den Gleichungen aus 5.1, auch ein größerer Fehler auf die echte Zählrate.

Nach Gleichung 2.21 hängt die Zählrate folgendermaßen von der Masse der Probe ab, verziert mit dem Faktor $\frac{f}{2}$, welcher den Rückstreuungskoeffizienten f von Aluminium und den gemessenen Raumwinkel $\Omega = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$ berücksichtigt:

$$n(m) = \frac{f}{2} \cdot \frac{A_S \cdot F \cdot \rho}{\mu} \left(1 - e^{-\frac{\mu \cdot m}{F \cdot \rho}} \right) = a(1 - e^{-b \cdot m})$$

$$(5.19)$$

mit

$$a = \frac{f}{2} \cdot \frac{A_S \cdot F \cdot \rho}{\mu} \quad \text{und} \quad b = \frac{\mu}{F \cdot \rho}$$
 (5.20)

Die beiden Parameter a und b lassen sich mit einer Kurvenanpassung (siehe Abbildung 5.5) bestimmen.

Die Werte dafür sind in Tabelle 5.4 aufgelistet.

Tabelle 5.4: Zählraten von ${}^{40}{
m K}$ für verschiedene Massen mit Fehlern

Masse m/g	s_m/g	Zählrate $n/(1/s)$	$s_n/(1/s)$
2.012	0.001	5.426	0.173
2.012	0.001	5.088	0.171
1.905	0.001	5.192	0.171
1.681	0.001	5.297	0.172
1.483	0.001	4.773	0.168
1.295	0.001	4.961	0.165
1.099	0.001	4.525	0.162
0.809	0.001	4.344	0.157
0.695	0.001	3.803	0.154
0.501	0.001	3.251	0.146
0.303	0.001	2.280	0.138

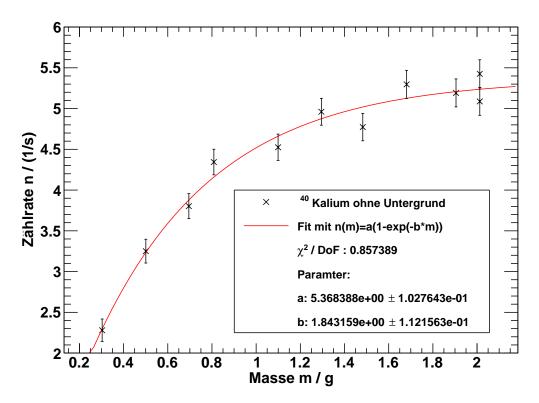


Abbildung 5.5: Massenabhängigkeit der Zählrate von $^{40}\mathrm{K}\,$ bei 3200 V

Die Werte lauten:

$$a = (5.37 \pm 0.10) \frac{1}{s} \tag{5.21}$$

$$b = (1.84 \pm 0.11) \frac{1}{g} \tag{5.22}$$

Außerdem ergibt sich ein Korrelationskoeffizient von

$$\rho = \frac{\text{cov}(a,b)}{s_a \cdot s_b} = -0.82 \tag{5.23}$$

Der χ^2 -Wert beträgt $\chi^2 = 7.72$ und die Zahl der Freiheitsgrade DoF = 9. Daraus folgt, dass das Modell mit einer Wahrscheinlichkeit von 43.7% die Messdaten beschreibt.

5.3.3. Berechnung der Halbwertszeit

Aus dem Produkt der beiden Parameter lässt sich die spezifische Aktivität $A_S = \frac{A}{m}$ bestimmen:

$$A_S = \frac{2 \cdot a \cdot b}{f} \quad \Rightarrow \quad A = m \cdot \frac{2 \cdot a \cdot b}{f} \tag{5.24}$$

Es wird bei der Messung nur die β^- -Strahlung gemessen, allerdings tritt bei dem Zerfall von 40 K auch noch Elektroneneinfang auf. Das Verhältnis zwischen der Häufigkeit von Elektroneneinfang und β^- -Zerfall beträgt 12 %. Daher gilt für die Zerfallskonstante

$$\lambda = \lambda_{\beta^{-}} + \lambda_{EC} = 1.12\lambda_{\beta^{-}} \tag{5.25}$$

Nun berechnet sich die Halbwertszeit von ⁴⁰K mit Gleichung 2.1

$$T_{1/2}(^{40}K) = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{1.12} \frac{1}{\lambda_{\beta^{-}}} = \frac{\ln 2}{1.12} \frac{N}{A}$$
 (5.26)

Die Anzahl N der Kaliumkerne in Kaliumchlorid ist:

$$N = \frac{m \cdot N_A}{M_{\text{KCl}}} h_{\text{rel}} \tag{5.27}$$

wobei N_A die Avogadrokonstante, $M_{\rm KCl} = 74.5483\,{\rm g/mol}$ die molare Masse von Kaliumchlorid und $h_{\rm rel} = 0.0118\,\%$ die relative Häufigkeit von $^{40}{\rm K}$ in natürlichem Kalium ist. Daraus berechnet sich die Halbwertszeit von $^{40}{\rm K}$ mit:

$$T_{1/2} \left({}^{40}K \right) = \frac{\ln 2}{1.12} \frac{N_A \cdot h_{\text{rel}}}{M_{KCL}} \frac{f}{2} \frac{1}{a \cdot b} = const. \cdot \frac{1}{a \cdot b}$$
 (5.28)

Der Fehler ergibt sich aus den relativen Fehlern von a und b und der Berücksichtigung des Korrelationskoeffizienten ρ :

$$s_{T_{1/2}} = T_{1/2} \left({}^{40}K \right) \cdot \sqrt{\left(\frac{s_a}{a} \right)^2 + \left(\frac{s_b}{b} \right)^2 + 2 \cdot \frac{s_a}{a} \cdot \frac{s_b}{b} \cdot \rho}$$
 (5.29)

Man erhält folgendes Ergebnis:

$$T_{1/2}(^{40}K) = (1.22 \pm 0.06) \cdot 10^9 \,\mathrm{a}$$
 (5.30)

5.3.4. Diskussion des Ergebnisses

Der Literaturwert für die Halbwertszeit von 40 K ist $\tilde{T}_{1/2}(^{40}$ K) = $1.28 \cdot 10^9$ a. Der gemessene Wert $T_{1/2}(^{40}K) = (1.22 \pm 0.06) \cdot 10^9$ a stimmt innerhalb einer Standardabweichung mit dem Literaturwert überein. Allerdings ist dabei zu beachten, dass der Fehler aufgrund des hohen Fehlers des Untergrundes auch relativ groß ausfällt.

Wie schon in 5.2.5 erwähnt, ist die Einstellung der Schwelle des SCAs eine Möglichkeit für einen systematischen Fehler.

Eine weiter Quelle für einen systematischen Fehler könnten Verunreinigungen im KCl sein.

A. Anhang

A.1. Messprotokoll

Ber an 2 Rottly Mont & Bit Laling Mess probable CHUZ 03.05.74 SCA Cour Cource: 0.75 Viccordo - mori @ Physik uLi-Um - 238 freibno. de ~ 10:00 che Zieherch Undberishie U: [7000: 200: 4000) 1t=50s 70:00 au Un & sorund U= { 2000: 200: 100: 1000) E=505 get. Sanarcin 77.15 - Gropte Flace U: 5 1000: 100: 22007 L Chaustaistile t= sos J = 1600V 11.30 t=1200s Astivitut - Weine Flenche V = { 1000 : 100 · 2200 } V 12,00 (horastristin += 505 U= 1600V 12,30 + = 1200s Detivitat -43.00 (1=1600V + = 54005 Untergrund

13.00 ganz große Prote Charlets, sike V= 3 1000: 100: 2200 } V +=505 13.15 V= 1600V Ast instat t= 1200s 14.00 U= 1600V t= 3600s Untryvend und le! Alo schale Kalium Musse Schuleden: 1,178 4 g ± 1mg mg = 2,0123g V = {2500; 100:4000 } V 15.30 B-Platean: +=505 16.00 t= 420 s mg m 8 = my = 1,6812 g ngo = 5,95

estimation tesses n/5-1 2,01232 6,0 5,98 1,4827 5,5 Ea 5,7 5,3 420 1,2952 1,0993 480 Wait out 30s 0,8986 540 5,2 540 0,6954 660 0,5007 0,3030 780

Messon	Dirchmers Alvskyla	
	Messon	Develonessa/con
klein	7	2/1000 1,000
	2	0,990
	3	0,990
	4	1,005
	5	1,000
	G	1,005
mitte (1	1,700
	2	1690 (000
3	3	1,695
	4	1,700
	5	1,705
	6	7,205
greß	1	2,880
	2	2,880
	3	2,875
	6	2,880
	5	2,880
	6	2,880 2,875 2,880 2,880 2,880
	Fehls Einzelmesun;	0,003 cm

Fehler Einzelmessung: 0,005 cm

Sumarium 2 1900 klene Shale vandroll V=1600V +-50un 5 => == 0,16 => t= 24 / 1/2 3 y. herie rit -> +=50min 2000 Kintin Untergand U=3200 V E= 36000 S Mittmal 900: Samari (2. nol) mitthe Schule u= 7600 V => == 0,06 => t = 40 min fix 300