2. Auswerteverfahren

a) Anpassung mit der Methode der kleinsten Quadrate

Die theoretische Verteilung ist durch (2) gegeben. Sie ist im allgemeinen diskret, da P (t) nicht als analytischer Ausdruck vorliegt, sondern experimentell und somit punktweise bestimmt wird.

Bei den gemessenen, verzögerten Verteilungen seien E (ti) die Zählraten zum Zeitpunkt ti. In F (ti) werden mit der gemessenen prompten Verteilung P (ti) dann die Parameter so bestimmt, daß die Größe

$$\chi^2 = \sum_i \frac{\{F(t_i) - E(t_i)\}^2}{\sigma(t_i)^2} \tag{3}$$

ein Minimum annimmt, wobei σ (ti) der Fehler der gemessenen Werte, also im allgemeinen der statistische Fehler der Zählrate ist.

b) Newton'sches Auswerteverfahren

Newton [2] betrachtet den durch (2) beschriebenen Ausdruck nur für den Fall β = o. Aus diesem Grund sollen hier seine Überlegungen auf den allgemeineren Fall $\beta \neq 0$ übertragen werden.

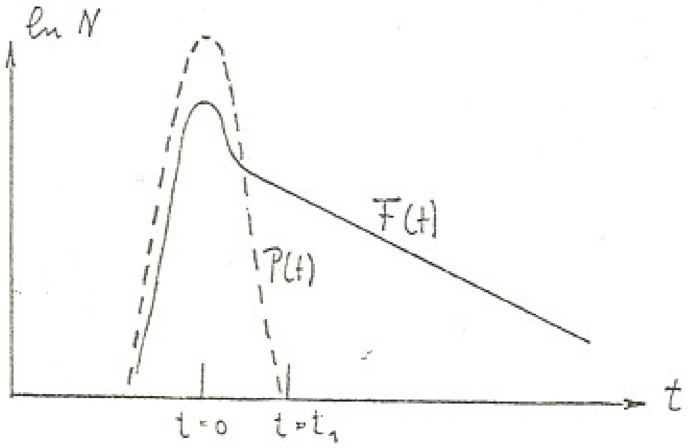

Fig. 1: Graphen für P (t) und F (t) $= \beta P(t) + (1-\beta)\lambda \int^{\infty} P(t-t')e^{-\lambda t'}dt'$ für den Fall β = 0,5. Beide Verteilungen sind auf gleiche Fläche normiert.

Durch die Substitution $y = t - t'$ geht (2) in folgenden Ausdruck über:

$$F(t) = \beta P(t) + (1-\beta)\lambda \cdot e^{-\lambda t} \int_0^t P(y) \cdot e^{-\lambda y} dy$$

Differentiation nach t liefert:

$$(4) \qquad \frac{dF}{dt} = \beta P'(t) - \lambda \left\{ F(t) - P(t) \right\}$$

oder:

$$(5) \qquad \frac{d \ln F(t)}{dt} = \beta \frac{P'(t)}{F(t)} - \lambda \left\{ 1 - \frac{P(t)}{F(t)} \right\}$$

Aus (5) und Fig.1 folgt, daß für Zeiten $t > t_1$, für die $P(t) \approx o$ (hier ist t_1 der Zeitpunkt, von dem an praktisch nur noch verzögerte Ereignisse auftreten), unabhängig von der prompten Beimischung zur Zeit $t = o$ und unabhängig von der Gestalt der Verteilung P (t), die Größe λ aus der Steigung der halblogarithmisch aufgetragenen Verteilung F (t) bestimmt werden kann.

Bei sehr kurzen Lebensdauern ist dies jedoch nicht mehr möglich, weil dann die Halbwertsbreiten von verzögerter und prompter Verteilung etwa gleich groß werden und zu Zeiten $t > t_1$ kaum noch verzögerte Ereignisse gemessen werden (siehe Fig.2).

Die prompte Beimischung β läßt sich nach (4) am Schnittpunkt der beiden Verteilungen F (t) und P (t) aus deren Steigung bestimmen. Wird nämlich $F(t) \doteq P(t)$, so gilt für β :

$$(6) \qquad \beta = \frac{F'(t)}{P'(t)}$$

Da nun die Verteilungen nicht durch analytische Funktionen gegeben sind, sondern nur diskret, ist die Bestimmung der Steigung nicht sehr genau.

Für den Fall sehr kurzer Lebensdauern läßt sich, wie schon erwähnt, λ nicht mehr aus der Steigung der verzögerten Verteilung bestimmen. Unter diesen Umständen führt die Integration der Gleichung (4) zwischen zwei beliebigen Zeitpunkten

A und B zu folgender Bestimmungsgleichung für λ :

$$\lambda_{AB} = \frac{F(A) - F(B) - \beta\{P(A) - P(B)\}}{\int_A^B \{F(t) - P(t)\}\, dt}$$

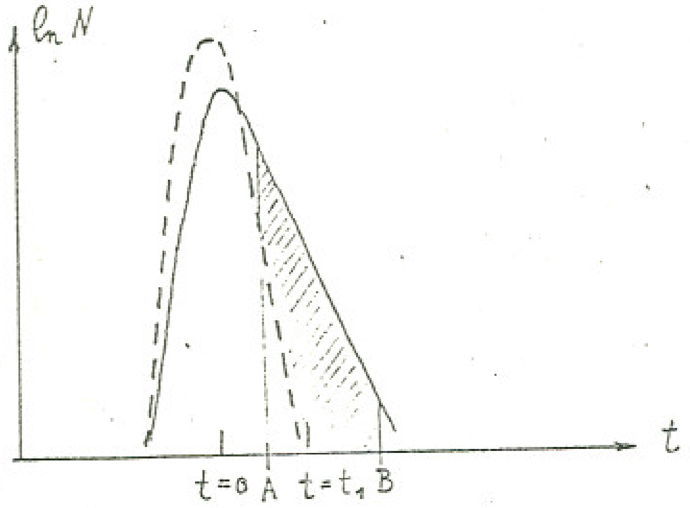

Fig. 2: λ wird nach Gleichung (7) aus Zählratendifferenzen und der Fläche zwischen den Verteilungen bestimmt.

Gleichung (7) enthält die unbekannten Größen λ und β
Die Zeitpunkte A und B sind in gewissen Grenzen, die noch zu diskutieren sind, beliebig wählbar. Da das Problem überbestimmt ist, lassen sich mehrere λ- und β -Werte ermitteln.

Aus diesem Grund kann man aus den verschiedenen λ und β -Werten auch deren Streuung ermitteln und hat so ein direktes Maß für den Fehler von λ und β .

Die Zeitpunkte A und B wird man am zweckmäßigsten so wählen, daß der Fehler von λ und β möglichst klein wird. Dies ist zunächst für eine möglichst große Fläche erfüllt. Weiter wählt man A so, daß F (A) einen möglichst kleinen relativen statistischen Fehler hat, also in der Nähe des Maximums. Um dies mit der Forderung nach möglichst großer Fläche in Einklang zu bringen, wird man also B $\rightarrow$ oo rücken lassen.