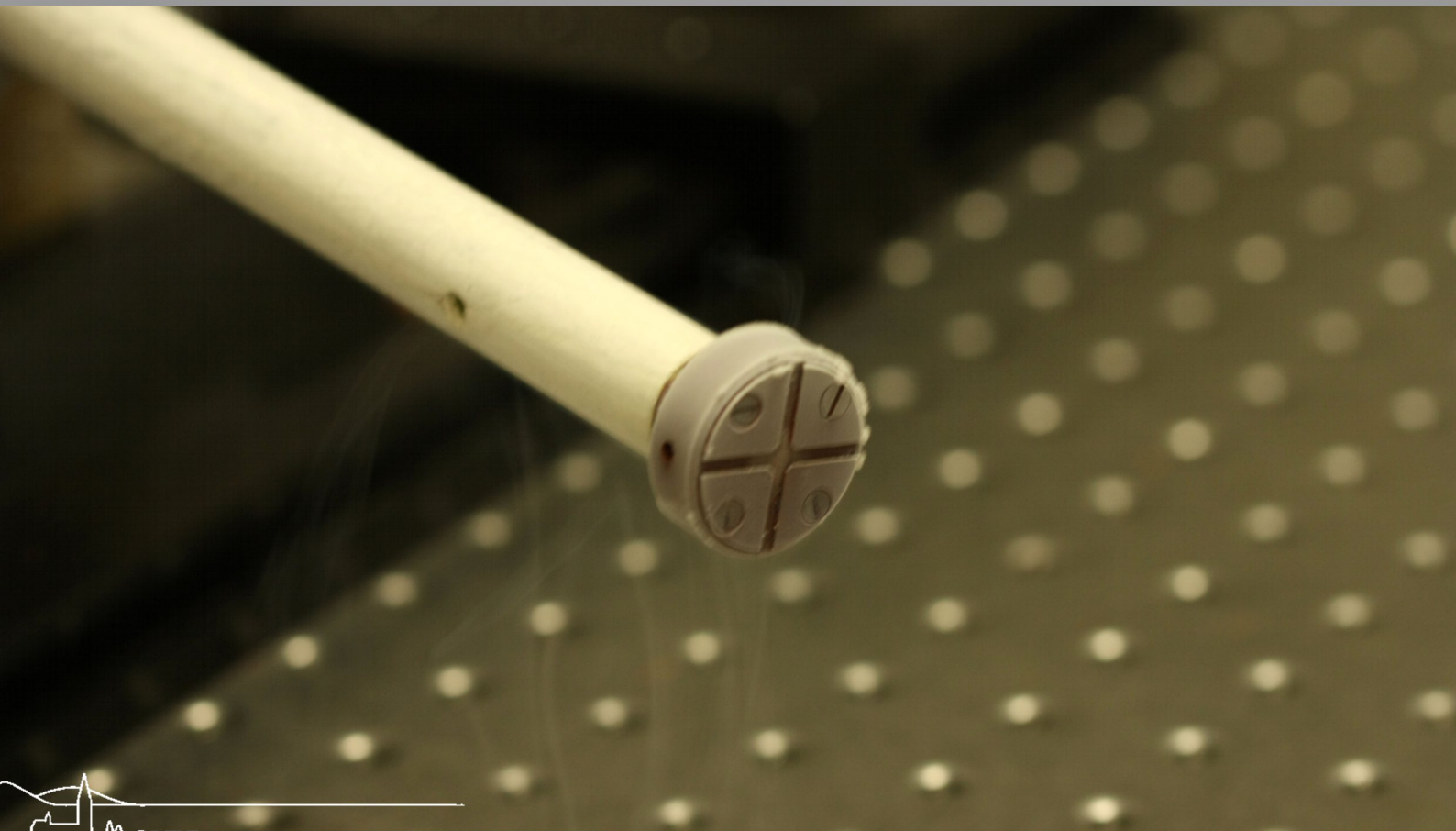




Universität Freiburg

Versuchsanleitung  
**Fortgeschrittenen  
Praktikum**  
Teil I

**Superconducting Quantum  
Interference Device**



# Superconducting Quantum Interference Device

INSTITUT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK  
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT  
FREIBURG IM BREISGAU

17. APRIL 2011

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Supraleitung</b>	<b>1</b>
2.1	Phänomenologie . . . . .	1
2.2	Ströme . . . . .	2
2.3	Thermoelektrische Phänomenologie . . . . .	2
2.4	Magnetische Eigenschaften . . . . .	2
2.5	London-Gleichungen . . . . .	4
2.6	BCS-Theorie . . . . .	5
2.6.1	Ergebnisse der BCS-Theorie . . . . .	7
2.7	Ginzburg-Landau-Theorie . . . . .	8
2.8	Flussquantisierung . . . . .	8
2.9	Josephson-Effekt . . . . .	9
2.9.1	Josephson-Gleichstrom . . . . .	9
2.9.2	Josephson-Wechselstrom . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Das SQUID</b>	<b>11</b>
3.1	Aufbau des RF-SQUIDs . . . . .	11
3.2	Funktionsprinzip . . . . .	12
3.3	Arbeitspunkt des SQUIDs . . . . .	15
3.4	Lock-In Methode . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Versuchsaufbau</b>	<b>17</b>
4.1	JSQ-Magnetometer . . . . .	19
4.2	Widerstände . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Aufgabenstellung</b>	<b>20</b>
<b>6</b>	<b>Versuchsdurchführung</b>	<b>20</b>
6.1	Vorbereitung . . . . .	20
6.1.1	Das SQUID-Pattern . . . . .	20
6.2	Berechnung der Stärke des Magnetfeldes . . . . .	21
6.3	Dipolmomente . . . . .	22
6.4	Weitere Hinweise . . . . .	23
6.5	Geräteliste . . . . .	23
<b>7</b>	<b>Literatur</b>	<b>24</b>
<b>8</b>	<b>Anhang</b>	<b>25</b>
8.1	Satz von Stokes . . . . .	25
8.2	Maxwell-Gleichungen . . . . .	25
8.3	Wahrscheinlichkeitsstrom . . . . .	25
8.4	Verteilungsfunktionen . . . . .	25
8.4.1	Fermi-Statistik . . . . .	26
8.4.2	Bose-Statistik . . . . .	27
8.5	Zustandsdichte . . . . .	27
8.6	JSQ Duo Sensor Control . . . . .	29
8.7	Digitales Oszilloskop . . . . .	30

# 1 Einleitung

Die SQUID-Technologie dient zur hochpräzisen Messung von Magnetfeldstärken. Man macht sich hierbei die Tatsache zu nutze, dass bei Stoffen der Kategorie der Supraleiter unterhalb einer gewissen Temperatur der Widerstand unmessbar klein wird. Insbesondere zieht dies auch nach sich, dass entlang des Materials kein Potentialgradient existiert. In einem supraleitenden Ring kann so ein fortwährender Kreisstrom aufrechterhalten werden, der allerdings durch ein beim Eintritt in die supraleitende Phase bereits vorhandenes Magnetfeld induziert werden müsste.

In einem SQUID, wie es dieser Versuch verwendet, wird in einem mit flüssigem Stickstoff gekühlten Supraleiter in Ringform durch ein variierendes Magnetfeld ein Suprastrom induziert. Dieser Strom ist durch den Effekt der Flussquantisierung auf ganze Vielfache eines sogenannten 'Flussquants' beschränkt, so dass nur diskrete Ströme zugelassen sind. Das Wechseln des Zustandes des supraleitenden Stromes erfordert aber, dass die Supraleitung kurz 'unterbrochen' wird, so dass diese im neuen Zustand wieder einsetzen kann. Diese Änderung ist es, welche gemessen werden kann. Man bedient sich folgender Anordnung: Ein neben dem supraleitenden Ring befindlicher Schwingkreis erzeugt ein Wechselfeld, welches gerade noch keine Flussänderung hervorruft. Liegt ein zusätzliches externes Feld einer Probe an, kann ein Zustandswechsel vollzogen werden und die dazu notwendige Energie wird dem Schwingkreis entzogen, was als Dämpfung gemessen werden kann. Der dazu notwendige Aufbau, ebenso wie Auszüge aus der Theorie der Supraleitung, werden in dieser Anleitung besprochen.

Ziel des Versuches ist die Bestimmung der Dipolmomente einer Reihe unterschiedlichster Proben. Darüber hinaus können die Magnetfeldstärken der Objekte als Rundumsicht dargestellt werden.

Diese Anleitung fasst zu Beginn die wichtigsten Elemente des Themenschwerpunktes 'Supraleitung' zusammen. Für ein tieferes Verständnis, welches insbesondere ohne die dem Curriculum entfallene Vorlesung der Festkörperphysik nicht vorausgesetzt werden kann, wird auf die angegebene Literatur verwiesen.

## 2 Supraleitung

### 2.1 Phänomenologie

Grob lassen sich die Eigenschaften eines Supraleiters durch folgende Punkte charakterisieren:

- Der elektrische Widerstand eines Supraleiters sinkt unterhalb einer bestimmten materialabhängigen Temperatur  $T_c$  auf einen Wert nicht messbarer Größe.
- Ein Supraleiter verhält sich wie ein idealer Diamagnet. Die induzierten Ströme erzeugen ein Magnetfeld, welches ein von außen angelegtes exakt zu kompensieren vermag (Meissner-Ochsenfeld-Effekt).
- In der Bandstruktur findet sich eine temperaturabhängige Energielücke von  $E_F \pm \Delta E$  für die Einteilchenelektronenzustände (siehe BCS-Theorie). Dissoziation oder Einbringen von Elektronen mit einer Energie unterhalb dieser Schranke ist nicht möglich.
- Die Elektronen eines Supraleiters gehen unterhalb der kritischen Temperatur  $T_c$  in einen makroskopischen Quantenzustand über. In diesen sogenannten Cooper-Paaren bilden zwei Elektronen über hunderte Angström hinweg gebundene Zustände.

Supraleiter müssen dabei weder aus der Menge der Metalle stammen, noch kristalline Struktur im engeren Sinne aufweisen. Es existieren auch einige supraleitende Polymere und organische Verbindungen.

## 2.2 Ströme

Oberhalb der kritischen Temperatur verhält sich der Widerstand eines Supraleiters gemäß dem eines Leiters, er lässt sich allgemein beschreiben durch

$$\rho(T) = \rho_0 + k \cdot T^5$$

$\rho_0$  resultiert aus der Streuung an Verunreinigungen und Defekten im Material. Der zweite Summand lässt sich aus der Phononenstreuung herleiten.

Die Temperatur ist nicht der einzige Parameter, welcher den supraleitenden vom normalen Zustand trennt. Neben Größen wie Materialordnung und Druck spielen vor allem eine Rolle:

- Ein hinreichend starkes äußeres Magnetfeld sorgt für das Nichtzustandekommen oder Unterbrechen der Supraleitung.
- Große Ströme führen zu dem gleichen Effekt, da diese wiederum ein Magnetfeld erzeugen, welches die Supraleitung zerstört, sobald dieses den zuvor genannten kritischen Fluss übersteigt.
- Durch Einfluss eines äußeren elektromagnetischen Wechselfeldes der Größenordnung  $\omega \approx \frac{\Delta E}{\hbar}$  können Elektronen über die 'Bandlücke' hinweg angeregt werden. Die Fähigkeit zur Supraleitung geht dann ebenfalls verloren.

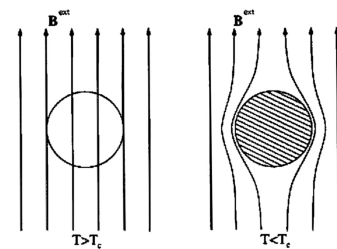
## 2.3 Thermoelektrische Phänomenologie

Leitfähigkeit hängt mit der Menge an vorhandenen Ladungsträgern zusammen (Drude-Sommerfeld-Modell), welche ebenso für den 'Transport' von Entropie verantwortlich sind. Aus diesem Grund ist festzustellen, dass gute Leiter auch gute Wärmeleiter sind.

Supraleiter sind dagegen schlechte Wärmeleiter. Einerseits befindet sich der Körper natürlich schon in einem Zustand hoher Ordnung, welcher kaum Unordnung - Wärme - zulässt, andererseits kann nur ein Bruchteil der vorhandenen Elektronen Entropie tragen. Auch ist ein elektrischer Strom nicht verknüpft mit einem Wärmestrom (Fehlen des Peltiereffektes).

## 2.4 Magnetische Eigenschaften

Unterhalb der kritischen Temperatur findet eine spontane Verdrängung des Magnetfeldes innerhalb des Supraleiters statt. Dieses Verhalten entspricht nur teilweise einer perfekten Leitfähigkeit, da das Magnetfeld nicht nur konstant, sondern konstant Null wird. Eine perfekte Leitfähigkeit würde im Gegensatz dazu den Erhalt eines Magnetfeldes implizieren, sofern dies anliegt und abgeschaltet wird.



Bezüglich diesem Verhalten unterscheidet man:

**Supraleiter Typ I:** Die Kategorie der ursprünglich zuerst entdeckten Materialien. Die höchste erreichbare kritische Temperatur liegt bei 23,2 K ( $\text{Nb}_3\text{Ge}$ ). Unterhalb der kritischen äußeren Magnetfeldstärke  $H_c$  sinkt B abrupt auf 0 T. Nur innerhalb einer dünnen Schicht von wenigen Nanometern Dicke (sogenannte London'sche Eindringtiefe) dringt das Magnetfeld in den Supraleiter ein.

**Hochtemperatursupraleiter Typ II:** Bei diesem Typus kann Supraleitung trotz eines Magnetfeldes im Innern des Leiters stattfinden. Es existieren zwei kritische Feldstärken  $H_{c2}$ , bei welcher das Magnetfeld noch teilweise, und  $H_{c1}$ , bei welcher es ganz verdrängt wird. Der Mechanismus, welcher für diese Charakteristik verantwortlich ist, ist ein anderer als bei Typ I. Zwischen  $H_{c1}$  und  $H_{c2}$  bilden sich im Supraleiter 'Flussfäden' aus, in welchen das Magnetfeld von Null verschieden ist und das Material normalleitend

**Abbildung 1:** Querschnitt: Supraleiter im Magnetfeld

(Jeder Flussfaden wird auch von einem Wirbelstrom umschlossen). Der Rest ist im supraleitenden Zustand.

Die höchste erreichte Temperatur liegt bei 138 K ( $\text{Hg}_{12}\text{Tl}_3\text{Ba}_{30}\text{Ca}_{30}\text{Cu}_{45}\text{O}_{125}$ ).

Gruppe	I A	II A	III B	IV B	V B	VI B	VII B	VIII B	VIII B	VIII B	I B	II B	III A	IV A	V A	VI A	VII A	VIII A		Schale
Periode																				
1	1 H																	2 He	K	
2	3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne	L	
3	11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar	M	
4	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr	N	
5	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe	O	
6	55 Cs	56 Ba	*	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn	P	
7	87 Fr	88 Ra	**	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110 Ds	111 Rg	112 Uub	113 Uut	114 Uuq	115 Uup	116 Uuh	117 Uus	118 Uuo	Q	

**Abbildung 2:** Ausschnitt aus dem Periodensystem der Elemente, gekennzeichnet sind bisher bekannte Elemente, welche Supraleitung zeigen

## 2.5 London-Gleichungen <sup>1</sup>

Zur Berechnung der Eindringtiefe des Magnetfeldes in den Supraleiter wird vorausgesetzt, dass Beschleunigung von Ladungen  $e$  nur durch ein statisches elektrisches Feld  $\vec{E}$  stattfindet, beziehungsweise dass darüber hinaus keine bremsenden Effekte auftreten, das heißt  $m\vec{v}_e = -e\vec{E}$ . Diese Prämisse, zusammen mit der Definition der Stromdichte  $\vec{j} = n_e e \vec{v}_e$  einer Ladungsdichte  $n_e$ , eingesetzt in die beiden Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\delta \vec{B}}{\delta t} \quad \text{und} \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

ergibt, indem man die Stromdichte nach der Zeit ableitet und diesen Ausdruck für  $\vec{E}$  in die erste obige Maxwell-Gleichung einsetzt:

$$\frac{\delta}{\delta t} \left( \nabla \times \vec{j} + \frac{n_e e^2}{mc} \vec{B} \right) = 0$$

Die Gleichung fordert zeitliche Invarianz des Magnetfeldes, da jede beliebige zeitunabhängige Form für  $\vec{B}$  gewählt werden kann, solange der durch die zweite obige Maxwell-Gleichung definierte Zusammenhang zwischen Strom und Magnetfeld eingehalten wird. Da im supraleitenden Zustand im Inneren des Leiters aber gilt, dass  $\vec{B} = 0$ , sind mögliche Lösungen dadurch bestimmt, dass der Ausdruck in Klammern nicht nur zeitlich invariant, sondern auch absolut Null ergibt. So folgt die London-Gleichung

$$\nabla \times \vec{j} = -\frac{n_e e^2}{mc} \vec{B}$$

Ableiten lassen sich daraus die folgenden beiden Gleichungen:

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{4\pi n_e e^2}{mc^2} \vec{B}, \quad \nabla^2 \vec{j} = \frac{4\pi n_e e^2}{mc^2} \vec{j}$$

Lösungen sind exponentiell abfallende Funktionen mit einer Reichweite von  $\Lambda = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_e e^2}}$ . Dies bedeutet, dass sowohl ein Magnetfeld über eine gewisse Länge in den Supraleiter eindringen kann, als auch dass in dieser Schicht eine Abschirmstromdichte  $\vec{j}$  senkrecht zum Magnetfeld fließt. Letzteres wird bei der Funktionsweise des SQUIDS wieder aufgegriffen werden.

---

<sup>1</sup>nach Fritz und Heinz London (Deutschland), 1935

## 2.6 BCS-Theorie <sup>2</sup>

In einem Supraleiter wird der Strom nicht durch einzelne freie Elektronen getragen, wie es in einem metallischen Leiter der Fall ist, sondern es existiert ein schwach gebundener Paarzustand (Cooper-Paar), welcher für die typischen Eigenschaften verantwortlich ist.

Die effektive Anziehung zwischen zwei Elektronen rührt von der Deformation des Atomgitters her. Dadurch dass die Trägheit der positiven Ionenrümpfe wesentlich größer ist als die der Elektronen der Schale, bildet sich in der Trajektorie unmittelbar hinter einem geladenen Teilchen eine schwache positive Polarisierung aus, da die Atomkerne eine gewisse Zeit, in Größenordnung des Inversen der Debye-Frequenz<sup>3</sup>  $\omega_D$  (typische Werte liegen bei  $T \approx 10^{-13}$  s), benötigen, um in ihre Ausgangsposition zurückzukehren. Über Entfernungen mehrerer Gitterkonstanten hinweg ist diese Kraft in der Summe anziehend, da die negative Ladung des Elektrons durch die Umgebung abgeschirmt wird - es wird sogar der Fall der sogenannten 'Überabschirmung' eintreten, das heißt, dass die Wechselwirkung zu einer schwachen Nettoanziehungskraft wird.

In der theoretischen Festkörperphysik wird dies als Phononen-vermittelte Wechselwirkung beschrieben, in welcher das Phonon die Polarisierung durch eine lokale 'Gitterschwingung' repräsentiert. Die Phononen allerdings sind als virtuelle Teilchen anzusehen, sie vermitteln nur die Wechselwirkung - würde eine reale Gitterschwingung angeregt werden, so führte dies zu einem Energieverlust und damit einem tatsächlichen Widerstand für den Strom [Beispielsweise wird die elektromagnetische Wechselwirkung durch virtuelle Photonen vermittelt, welche ebenfalls keine sichtbaren Lichtquanten darstellen]. Darstellen lässt sich dieser Prozess als modifizierte Coulomb-ähnliche Wechselwirkung zweier Elektronen mit Wellenvektoren  $\vec{k}$ ,  $\vec{k}'$  und Energiedifferenz  $\hbar\omega$ :

$$V_{\vec{k},\vec{k}'} = 4\pi \frac{e^2}{q^2 - k_0^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_D^2}$$

Das Mediatorphonon besitzt den Wellenvektor  $\vec{q}$  und die Energie  $\hbar\omega_D$ . Außerdem wird die Größe  $\vec{k}_0$ , genannt Thomas-Fermi Vektor, definiert durch  $k_0^2 = 4\pi e^2 \frac{\delta n_0}{\delta \mu}$ , wobei eine Ladungsträgerverteilung der Dichte  $n_0$  und des chemischen Potentials  $\mu$  angenommen wird.

Wenn die Differenzenergie der Elektronen, repräsentiert durch die phononische Wechselwirkung, sich in der Größenordnung von  $\hbar\omega_D$  befindet, so kann sich eine (relativ gesehen starke) Anziehung ergeben.

Dass sich Paare dieser geringen Energiedifferenz (d.h. des Wellenvektors) finden, ist möglich, da es sich bei Elektronen um Fermionen handelt. Diese unterliegen der Fermi-Statistik, was bedeutet, dass jeder quantenmechanischer Zustand (z.B. Ort, Impuls, Drehimpuls, Spin) nur einfach besetzt wird. Bei Temperaturen nahe 0 K sind fast alle Zustände bis zur Fermi-Energie  $E_F$  befüllt, darüber sinkt die Besetzungsdichte rapide gegen 0. Dies bedeutet einerseits, dass es so möglich ist zu einem Elektron (mit einer Energie im Bereich der Fermi-Energie) ein zweites mit gleichem Impulsbetrag zu finden und andererseits, dass auch eine sehr schwach anziehende Wechselwirkung zu einem gebundenen Zustand führt, solange thermische Anregungen nicht möglich oder zu gering sind, um diesen Zustand zu zerstören.

Entscheidend ist nun, dass durch die Bindungsenergie die Gesamtenergie des Paares (um  $\Delta E$ ) unterhalb der der einzelnen Ladungsträger alleine, respektive der Fermienergie, liegt und beide Elektronen zusammen nun nicht mehr als Fermionen, sondern das kombinierte Spin 1/2 System als Boson behandelt wird, was dazu führt, dass dieser energetisch günstigere, da gebundene, Zustand von beliebig vielen Paaren bevölkert werden kann.

Statistisch betrachtet wird eine Ladungsträgerdichte durch das Produkt aus Zustandsdichte  $D(E)$  und (Fermi-)Verteilungsfunktion  $f(E)$  ermittelt. Letztere besitzt bei  $T \approx 0$  für  $E < E_F$  den Wert  $f(E) \approx 1$  und fällt danach, wie erläutert, rasch gegen 0. Die Zustandsdichte, welche die Anzahl der Zustände pro Energieintervall angibt und für ein freies Teilchen wie  $D(E) \propto \sqrt{E}$  skaliert, besitzt nun eine schmale Lücke von einigen meV um die Fermienergie herum, verursacht durch die gegenseitige (anziehende)

<sup>2</sup>John Bardeen (einziger Träger zweier Physik-Nobelpreise), Leon Neil Cooper, John Robert Schrieffer (alle U.S.A.), 1957

<sup>3</sup>Grenzfrequenz für die Existenz von Phononen im Festkörper



Wechselwirkung der Elektronen. Diese führt dazu, dass Zustände um die Fermienergie herum zu kleineren bzw. größeren Energien verschoben werden. Sofern die Energielücke groß genug und die Temperatur gering ist, werden nur Zustände unterhalb der zustandsfreien Zone besetzt. Dies ist die Verteilung, wie sie für die Einzelelektronen gilt. Sofern diese in den Cooper-Paarzustand übergehen, unterliegen diese der Bose-Statistik. Es ist nicht möglich ein Bild anzugeben, welches beides miteinander vereint, je nach Aspekt erscheint eine Beschreibung zweckmäßiger als die andere.

Die Anzahl der Cooper-Paare hängt von der Temperatur ab, denn diese bestimmt, wie groß die 'Breite' der Bose-Verteilungsfunktion ist.

Die beiden Spins der Elektronen kombinieren zu  $S = 0$ , eine parallel ausgerichtete Konfiguration mit  $S = 1$  wurde bisher nicht beobachtet - der nicht verschwindende Eigendrehimpuls würde zusätzliche magnetische Eigenschaften zeigen.

Im BCS-Grundzustand, in dem alle<sup>4</sup> Ladungen als Cooper-Paare vorliegen, ist die Gesamtwellenfunktion von  $N$  Elektronen ein Produkt von  $N/2$  Paarwellenfunktionen:

$$\Psi(r_1, s_1, \dots, r_N, s_N) = \phi(r_1, s_\uparrow, r_2, s_\downarrow) \cdot \dots \cdot \phi(r_{n-1}, s_\uparrow, r_n, s_\downarrow)$$

Diese wird antisymmetrisiert<sup>5</sup>, um der Tatsache Rechnung zu tragen, dass es sich um Fermionen handelt, das heißt die Ein-Elektronen-Zustände nicht doppelt besetzt werden dürfen. Dies ist in so fern nicht widersprüchlich, da es sich bei den einzelnen Wellenfunktionen zwar um identische, aber bosonische, handelt und somit die Gesamtwellenfunktion nach Anwenden des Antisymmetrisierungsoperators nicht Null ergibt.

Jede einzelne (translationsinvariante) Paarwellenfunktion  $\phi$  lässt sich als Überlagerung zweier Einzelelektronenwellenfunktionen darstellen. Dabei werden die beiden Zustände so gewählt, dass die Impulse  $\vec{k}$  vom gleichen Betrag, aber entgegengerichtetem Vorzeichen sind, sodass der Gesamtimpuls verschwindet. Diese Paarwellenfunktion ist, wie erläutert, eine Überlagerung von beiden Wellenfunktionen und daher auch nur einer, und zwar der relativen, Ortskoordinate lokalisiert.

$$\phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{1}{V_{ges}} \sum_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}_1} e^{-i\vec{k}\vec{r}_2}$$

Zur Durchführung einer quantitativen Berechnung muss noch die Art der Wechselwirkung definiert werden. In der BCS-Theorie wird eine effektive Wechselwirkung  $V$  für den Hamiltonoperator definiert, welche zwischen zwei Paarzuständen der Wellenvektoren  $\vec{k}_1, \vec{k}_2$  und  $\vec{k}_3, \vec{k}_4$  innerhalb eines Volumens  $L^3$  existiert:

$$\left\langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 \left| V \right| \vec{k}_3 \vec{k}_4 \right\rangle = \begin{cases} -\frac{V_0}{L^3} & \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3 + \vec{k}_4 \quad \text{und} \quad |E(\vec{k}_i) - E_F| < \hbar\omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Als Wechselwirkungsumgebung um die Fermienergie herum wird meist eine Größenordnung von  $\hbar\omega_D$  gewählt. Diese Vereinfachungen scheinen zwar recht willkürlich gewählt, dennoch liefern sie für viele Fragestellungen zufriedenstellende Ergebnisse.

Mit Hilfe der Variationsmethode<sup>6</sup> können nun sowohl Eigenfunktionen, als auch Eigenwerte des gesuchten Grundzustandes berechnet werden<sup>7</sup>.

<sup>4</sup>in der BCS-Theorie werden nicht alle, sondern nur die 'Leitungselektronen' verwendet, welche eine Energie in Größenordnung der Fermi-Energie besitzen

<sup>5</sup>die Vielteilchenwellenfunktion wird durch Bildung der Slater-Determinante, ausgedrückt durch einen Antisymmetrisierungsoperator  $A$ , der Einteilchenwellenfunktionen erzeugt; dieses Konstrukt besitzt die geforderten Eigenschaften von Fermionen.

<sup>6</sup>Sie wird eingesetzt, falls die Eigenfunktion und Eigenwerte des Grundzustandes (repräsentiert durch  $H_0$ ) nicht bekannt sind. Man variiert möglichst geschickt gewählte Wellenfunktionen  $\psi_i$  in einem Unterraum des Hilbertraumes und sucht das Minimum von  $\langle \psi_i | H_0 | \psi_i \rangle = E_0 < \psi_i | \psi_i \rangle$ , was dem Eigenwert, der Energie  $E_0$ , des Grundzustandes entspricht

<sup>7</sup>Eine detaillierte Beschreibung, falls notwendig, wie  $V$  unter Zuhilfenahme von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren modelliert werden muss, damit obiges Verhalten dargestellt werden kann, findet sich in der Staatsexamensarbeit

### 2.6.1 Ergebnisse der BCS-Theorie

Die **Reichweite**  $r_0$  bzw. die Ausdehnung der Elektronen-Paarwellenfunktion berechnet sich zu

$$r_0 \propto \frac{\hbar}{\delta p} \propto \frac{\hbar v_F}{\Delta E} \propto \frac{E_F}{k_F \Delta E}$$

Mit  $E_F \approx (10^3 \text{ bis } 10^4) \cdot \Delta E$  und  $k_F \approx 10^8 \text{ cm}^{-1}$  erhält man für  $r_0$  Ergebnisse in der Ordnung von  $10^3 \text{ \AA}$ . Dieses Resultat, wenn auch nur abgeschätzt, ist wichtig, denn es impliziert zwei Sachverhalte: Erstens ist der Bereich der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der beiden Elektronen so groß, dass die Wellenfunktionen der Paare sich mehrfach überlappen, was zur Bildung eines kohärenten Gesamtzustandes führt. Zweitens wird dies, siehe unten, zu Tunnelphänomenen durch dünne Schichten führen.

Die **kritische Temperatur**  $T_c$ , welche angibt, wann das Material ohne Einfluss eines äußeren Magnetfeldes in den supraleitenden Zustand übergeht, berechnet sich zu:

$$T_c = \frac{1,13}{k_B} \hbar \omega e^{-1/D_0 V_0}$$

$k_B$  steht für die Boltzmann-Konstante,  $D_0$  die Zustandsdichte des (noch) normalleitenden Materials und  $V_0$  sowie  $\hbar \omega$  sind definiert durch den ursprünglichen Hamiltonoperator. Der Exponent der e-Funktion liegt etwa in dem Bereich  $[-2, \dots, -10]$ .

Für die **Energielücke** bei  $T = 0 \text{ K}$  erhält man:

$$\Delta E(0) = 2 \hbar \omega e^{-1/D_0 V_0}$$

Die Energielücke ist allerdings temperaturabhängig. Sie wird schmaler, wenn sich die Temperatur in Größenordnung der Sprungtemperatur befindet. Dort verhält sie sich nach

$$\frac{\Delta E(T)}{\Delta E(0)} = 1,74 \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}$$

In ähnlicher Weise ergibt sich das temperaturabhängige Verhalten des **kritischen Feldes**  $H_c$ :

$$\frac{H_c(T)}{H_c} \approx 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2$$

## 2.7 Ginzburg-Landau-Theorie <sup>8</sup>

Die Ginzburg-Landau-Theorie dient ebenfalls zur Beschreibung von Phänomenen der Supraleitung. Hier soll auf Grundlage dieser Theorie die Flussquantisierung erläutert werden.

Ansatz und Berechnung verlaufen anders als in der BCS-Theorie. Ausgehend von der Einteilchen-Beschreibung lässt sich ein Zwei-Teilchen-Zustand konstruieren, welcher sich verhält wie ein einziges Gesamtsystem. Mit dem Ansatz für die Wahrscheinlichkeitsstromdichte  $\vec{j}$  einer Wellenfunktion  $\psi$

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} [\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi] = \frac{1}{m} \text{Re}[\psi^* p \psi]$$

kann ein Ausdruck für den Zwei-Teilchen-Strom bestimmt werden, sofern man für den Impulsoperator  $p$  in Anwesenheit eines Vektorfeldes  $\vec{A}$  einsetzt  $p = \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \vec{A}$ . Es ist dann

$$\vec{j} = -\frac{e}{2m} \left[ \psi^* \left( \left( \frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi \right) + c.c. \right] = - \left[ \frac{2e^2}{mc} \vec{A} + \frac{e\hbar}{m} \nabla \theta \right] |\psi|^2$$

unter der Annahme, dass die Wellenfunktion  $\psi = |\psi| e^{i\theta}$  nicht ihren Betrag, sondern nur die Phase ändert. Dies ist dann der Fall, wenn, weit unterhalb der Sprungtemperatur, die Zahl der Cooper-Paare konstant bleibt.

## 2.8 Flussquantisierung

Liegt der Supraleiter in Form eines Ringes vor, wie im Falle des SQUID, kann man den Kreisstrom als geschlossenes Wegintegral  $0 = \oint \vec{j} d\vec{l}$  über die Stromdichte berechnen. Dieses muss notwendigerweise Null ergeben, da andernfalls eine Änderung des Stromes stattfinden, beziehungsweise ein Potentialgradient vorhanden sein würde.

Das geschlossene Integral über das Vektorfeld  $\vec{A}$  ergibt nach dem Stokes'schen Satz den magnetischen Fluss  $\Phi_B$  durch den Ring. Da die Phase der Wellenfunktion  $\psi$  ein eindeutiger Parameter ist, darf diese sich bei einem Umlauf nur um ganze Vielfache von  $2\pi$  ändern. Es gilt also:

$$\oint \vec{A} d\vec{l} = \Phi_B \quad \text{und} \quad \oint \nabla \theta d\vec{l} = \Delta\theta = 2\pi n$$

Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, dass wie im BCS-Grundzustand alle Cooper-Paare im selben Zustand vorliegen. Da sie alle durch eine einzige Wellenfunktion beschrieben werden, liegt eine eindeutige Phasenbeziehung zwischen diesen vor, was diese Rechnung rechtfertigt.

Für den magnetischen Fluss durch den Ring hindurch erhält man so eine Quantisierung in Flussquanten  $\Phi_0$ , Fluxoide genannt:

$$|\Phi_B| = n \frac{\hbar}{2e} = n \Phi_0$$

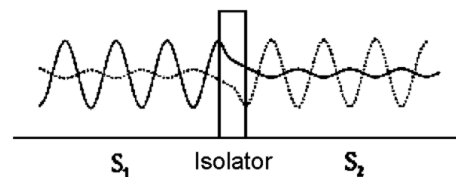
$$\Phi_0 = 2,067833667(52) \times 10^{-15} \text{ Wb} \quad (1 [\text{Wb}] = 1 [\text{Tm}^2])$$

<sup>8</sup>Witali Lasarewitsch Ginsburg, Lew Dawidowitsch Landau (beide Sowjetunion), 1950 - also noch vor BCS

## 2.9 Josephson-Effekt <sup>9</sup>

Befindet sich zwischen zwei Supraleitern ein dünner Isolator kann dieser aufgrund der exponentiell abfallenden Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Wellenfunktion im verbotenen Bereich durchtunnelt werden. Für Einzelelektronen ist dies in klassischer Weise möglich. Bei dieser Art von Tunneln steigt die Tunnelwahrscheinlichkeit proportional zur Potentialdifferenz - mit anderen Worten der Tunnelstrom verhält sich typischerweise ohmsch.

Aufgrund der 'ausgedehnten' Wellenfunktion, ist es ebenfalls für ein Cooper-Paar möglich, diesen Isolator als Ganzes zu durchtunneln.



**Abbildung 3:** Wellenfunktion zweier durch einen Isolator getrennter Supraleiter

Wie oben erläutert, wird die Gesamtheit aller Cooper-Paare durch eine einzige Wellenfunktion beschrieben. Diese Beschreibung ändert sich nicht durch diese Störung. Die Wellenfunktion des einen Supraleiters  $\psi_1$  muss also in die des zweiten Supraleiters  $\psi_2$  stetig übergehen. Um dem Rechnung zu tragen behilft man sich, indem eine symmetrische Kopplung  $K$  zwischen beiden getrennten Systemen, welche jeweils durch ihren eigenen Hamiltonoperator  $H$  beschrieben werden, eingeführt wird. Im Bilde der zeitabhängigen Schrödingergleichung ausgedrückt bedeutet dies:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\delta\psi_1}{\delta t} &= H_1\psi_1 + K\psi_2 \\ i\hbar \frac{\delta\psi_2}{\delta t} &= H_2\psi_2 + K\psi_1 \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem lässt sich lösen - zuerst allgemein, indem sich die Wellenfunktion  $\psi = \psi_0 e^{i\theta}$  zeitlich sowohl in Phase- als auch im Betrag ändert. Man erhält sowohl eine Bedingung für den Real- als auch den Imaginärteil (Phasenableitung).

Für  $\psi_1$  sehen die Lösungen folgendermaßen aus (Die Lösungen für  $\psi_2$  ergeben sich analog):

$$\frac{\delta\psi_1}{\delta t} = \frac{2}{\hbar} \psi_{01}\psi_{02} K \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad \text{und} \quad \frac{\delta\theta_1}{\delta t} = \frac{1}{\hbar} \frac{\psi_{02}}{\psi_{01}} K \cos(\theta_2 - \theta_1) - \frac{H_1}{\hbar}$$

### 2.9.1 Josephson-Gleichstrom

Für eine konstante Phasenbeziehung  $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2$  zwischen beiden Supraleitern, wie sie ohne zusätzlichen äußeren Einfluss gilt, erhält man unter der Annahme, dass  $\psi_{01} \approx \psi_{02} = \psi_0$

$$\frac{\delta\psi_1}{\delta t} = -\frac{\delta\psi_2}{\delta t} = \frac{2}{\hbar} \psi_0 K \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

Sinnvollerweise lässt sich der Betrag von  $\psi$  als Anzahl, beziehungsweise Dichte der Cooper-Paare interpretieren, da diese Gesamtwellenfunktion der Einzelwellenfunktion der Elektronpaare ist. Daher ist auch

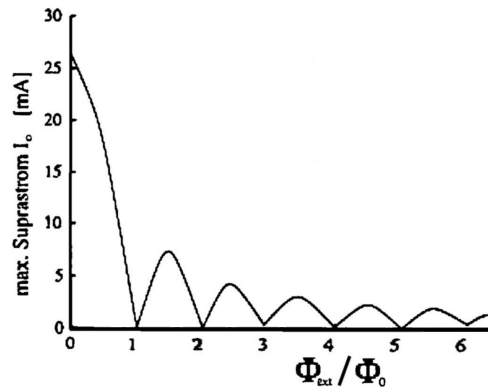
$$I \propto \frac{\delta\psi_1}{\delta t} \propto K \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

Die Conclusio besteht darin, dass zwischen zwei identischen Supraleitern ohne jede Potentialdifferenz ein Tunnelstrom fließt, welcher nur von der Phasendifferenz bzw. der Kopplung abhängt. Die tunnelnden Cooper-Paare verlieren 'innerhalb der Kontaktstelle' keine Energie, daher fällt über dem Isolator in diesem Fall kein Strom ab, auch wenn der Isolator kein Supraleiter ist.

Aus genau diesem Grund kann aber ein Magnetfeld in die Isolationsschicht eindringen. Dadurch ändert sich die Kopplung und damit die Phasenverschiebung. In Abhängigkeit zum magnetischen Fluss  $\Phi$  und dem Flussquant  $\Phi_0$  ergibt sich für den Josephson-Gleichstrom  $I$  (siehe auch Abbildung 4)

$$I = I_0 \frac{\sin(\pi \Phi / \Phi_0)}{\pi \Phi / \Phi_0}$$

<sup>9</sup>Brian David Josephson (Wales), 1962



**Abbildung 4:** *Maximaler Strom in Abhängigkeit des externen Magnetfeldes*

### 2.9.2 Josephson-Wechselstrom

(Hier nicht benötigt)

Bringt man beide Supraleiter auf unterschiedliches Potential  $U$ , so ergibt die Differenz der Energien, für welcher der Hamiltonoperator beider Wellenfunktionen steht, gerade  $2eU$ . Dies ist möglich, da es sich bei der Trennschicht um einen Isolator handelt. Entlang einem einzigen Supraleiter lässt sich keine Potentialdifferenz erzeugen. Jetzt ist die Phasenbeziehung nicht mehr konstant, sondern

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{2e}{\hbar}Ut + \theta_0$$

damit löst das Anlegen einer Gleichspannung einen Wechselstrom aus:

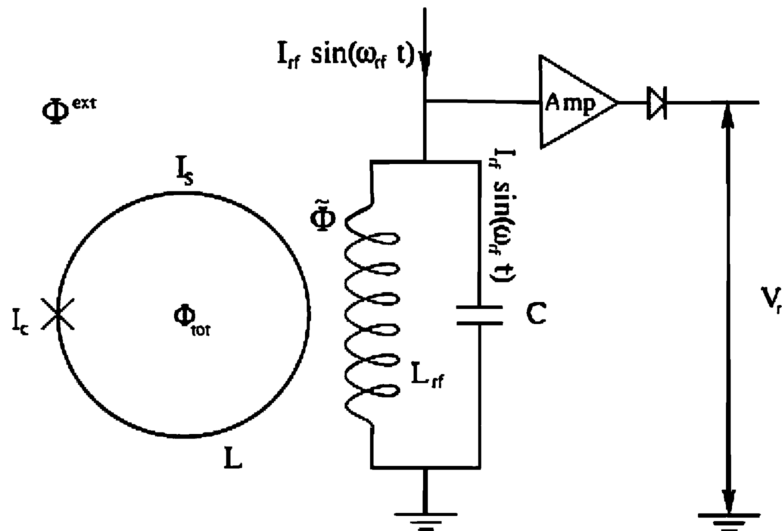
$$I \propto 2K \sin\left(\frac{2e}{\hbar}Ut + \theta_0\right)$$

### 3 Das SQUID

Ein SQUID (Superconducting QUantum Interference Device) dient zur Messung von kleinen Änderungen in der Stärke von Magnetfeldern. Dazu nutzt es Effekte der Supraleitung wie beispielsweise die Flussquantisierung aus, womit Größenordnungen eines Flussquants  $\Phi_0$  gemessen werden können.

Es existieren verschiedene Bauweisen. Das RF-SQUID (radio frequency), ein günstiger und vergleichsweise einfacher Aufbau, wie er im Praktikum zum Einsatz kommt, wird hier beschrieben.

#### 3.1 Aufbau des RF-SQUIDs



**Abbildung 5:** Aufbau eines RF-SQUID Systems bestehend aus Supraleitendem Ring und induktiv gekoppeltem Schwingkreis

Die Grundkomponente besteht aus einem Ring, welcher aus einem Hochtemperatursupraleiter besteht. Befindet sich der Torus in flüssigem Stickstoff, kann die kritische Temperatur erreicht werden. An einer Stelle ist der Ring durch eine Isolationsschicht (weak link) von wenigen Nanometern Dicke unterbrochen, diese hat die Funktionsweise eines Josephson-Kontaktes.

Ein stromdurchflossener Schwingkreis kann über eine Spule ein zusätzliches Magnetfeld generieren. Die Spannung kann über einen Verstärker gemessen werden.

### 3.2 Funktionsprinzip

In einem unmittelbar benachbarten Schwingkreis, hier betrieben mit einer Frequenz von einigen hundert Megahertz, wird ein magnetischer Fluss  $\Phi_{ext}$  erzeugt. Dieser regt in dem Ring, welcher sich in supra-leitendem Zustand befindet, einen Suprastrom an, welcher gerade so groß ist, dass das externe Feld, welches das Material zu durchdringen sucht, exakt kompensiert wird und damit der Fluss im Innern  $\Phi_{tot}$  zu einem resultierenden Magnetfeld der Stärke Null führt.

Da die Gesamtwellenfunktion der den Strom tragenden Cooper-Paare stetig im Innern sein muss, gilt, wie oben beschrieben, dass sich der Gesamtfluss nur um Vielfache des Flussquants  $\Phi_0$  ändern kann. Durch den eingebrachten Josephson-Kontakt wird die Phase der Gesamtwellenfunktion verschoben, allerdings behält das grundsätzliche Prinzip der Supraleitung seine Gültigkeit. Eine Berechnung der Phasendifferenz ergibt:

$$\theta_2 - \theta_1 = 2\pi n - 2\pi \frac{\Phi_{tot}}{\Phi_0}$$

Eine Änderung des externen Flusses kann innerhalb des supraleitenden Ringes keine Änderungen des internen Flusses herbeiführen, wenn diese kleiner als das elementare Flussquant  $\Phi_0$  ist (würde dies dennoch geschehen, wäre diese auch damit verbunden, dass eine Induktionsspannung im Ring auftritt, welche aber nicht existieren darf, da die Supraleitung keinen Feldgradienten zulässt). Um dennoch den Fluss im Inneren auf Vielfachen von  $\Phi_0$  zu halten, tritt in einer dünnen Schicht unterhalb der Oberfläche ein Abschirmstrom auf, welcher seinerseits einen Fluss von  $\Phi_S = LI_S$  erzeugt, so dass

$$\Phi_{tot} = \Phi_{ext} - LI_S$$

Die Größe der Induktivität  $L$  ist durch Geometrie und Material vorgegeben.

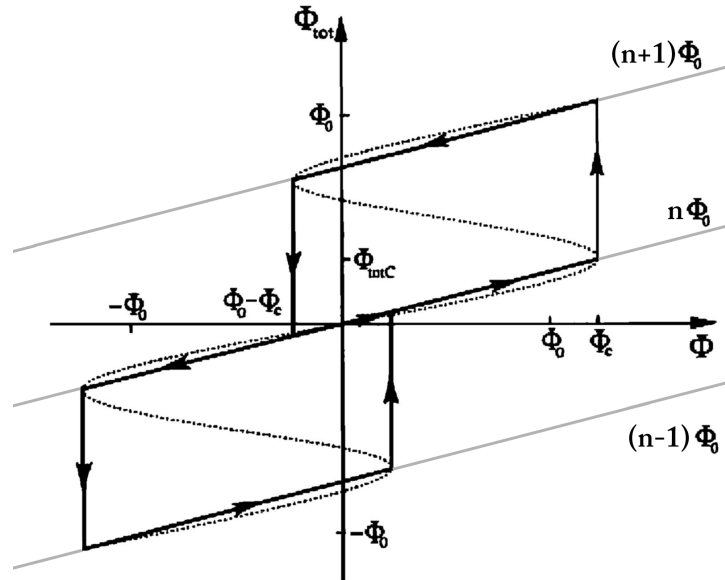
Um dies noch einmal zu erwähnen: Sobald die kritische Temperatur unterschritten wird, ist der Fluss im reinen Supraleiter auf ganze Vielfache des Flussquants **festgelegt** und bleibt konstant auf genau diesem Wert, unabhängig davon ob der externe Fluss erhöht wird, auch um mehr als ein ganzes Flussquant. Der Fluss kann, siehe unten, nur erhöht werden, wenn die Supraleitung kurzzeitig unterbrochen wird und dann bei einem anderen Wert wieder einsetzt. Der Abschirmstrom sorgt nach Einsetzen der Supraleitung dafür, dass der effektive Fluss im Leiter der selbe bleibt und eine zu starke Änderung des externen Flusses führt zur Überschreitung des kritischen Stromes und dadurch zum Zusammenbrechen der Supraleitung.

Für den durch den Josephson-Kontakt unterbrochenen Supraleiter gilt dies gleichermaßen, allerdings bedingt das äußere Magnetfeld hier die Quantisierung des Flusses im Supraleiter und so ergibt sich mit obiger Phasendifferenz, eingesetzt in  $I_s = I_{s,max} \sin(\theta_2 - \theta_1)$ , ein komplizierteres Verhalten:

$$\Phi_{tot} = \Phi_{ext} + LI_{s,max} \sin(2\pi\Phi_{tot}/\Phi_0)$$

Grafik 6 beschreibt den Ablauf bei Anlegen eines äußeren Feldes:

- Das externe Feld wird erhöht, aufgrund des Dämpfungsterms (Induktivität) steigt aber der Fluss  $\Phi_{tot}$  nicht gleichsam schnell an. Der Abschirmstrom kompensiert das äußere Feld, sodass sich der Supraleiter im Zustand  $0 \cdot \Phi_0$  befindet.
- Sobald die kritische Stromstärke  $I_c$ , beziehungsweise der damit verbundene kritische Fluss  $\Phi_c$ , überschritten wird, verschwindet die Supraleitung und es ist  $\Phi_{tot} = \Phi_{ext}$ .
- Die Supraleitung setzt aber wieder ein, da der nächsthöhere Zustand  $1 \cdot \Phi_0$  günstiger liegt. Der Abschirmstrom ist in jenem geringer und unterhalb des kritischen Grenzwertes. Schwächt man nun das äußere Feld ab, so bleibt der Supraleiter in genau diesem Zustand.



**Abbildung 6:** Verhalten des Flusses eines supraleitenden Ringes mit einem Josephson-Kontakt. Die gestrichelte Linie charakterisiert beispielhaft die nicht analytische Funktion des totalen Flusses. Die schiefen Linien stellen die Zustände des SQUIDS linearisiert dar.

- Die selbe Prozedur findet bei Verringerung des externen Feldes statt bis der Abschirmstrom wieder die kritische Stromstärke, jetzt bei dem kritischen Fluss  $\Phi_0 - \Phi_c$  erreicht hat. Für negative äußere Felder daher analog.
- Die gestrichelte Linie stellt den Verlauf der Funktion ohne Erreichen der kritischen Stromstärke dar (der 'eckige' hystereseförmige Graph ist natürlich idealisiert). Die Linien ohne Pfeile stellen die Zustände dar.

In einem Supraleiterrings ohne Josephson-Kontakt würden die Zustände durch Geraden (ohne Steigung) dargestellt werden. Bei Erhöhung des externen Feldes würde lediglich der Abschirmstrom - ohne Veränderung der Phase der Gesamtwellenfunktion der Cooper-Paare - erhöht werden. Das Vorhandensein des Josephson-Kontaktes führt einerseits zu einem komplizierteren Verhalten des Flusses, gezeigt in Grafik 6. Andererseits begrenzt er auch den maximalen Strom, und damit den maximalen Fluss. Dieser kann mit Hilfe des Kontaktes sehr gut auf etwa die Größe eines Flussquanten eingestellt werden. Im nicht unterbrochenen Supraleiter würde die Supraleitung ebenfalls zu einem gewissen maximalen Fluss zusammenbrechen, allerdings wäre dieser durch den Ring selbst vorgegeben und somit erstens schwierig festzulegen und zweitens wesentlich größer, was dazu führte, dass die Empfindlichkeit des Gerätes sehr eingeschränkt würde.

(unrelevant) Der externe Fluss wird durch einen Schwingkreis (tank circuit) erzeugt, in welchem ein Strom  $I_{rf}$  fließt. Durch Übertragungsverluste, repräsentiert durch den Qualitätsfaktor  $Q$ , und die gegenseitige Kopplung der Induktivitäten der Erreger- und der Supraleiterspule, repräsentiert durch den Faktor  $M$ , entsteht ein Gesamtfluss von

$$\Phi_{rf} = MQI_{rf}$$

Es gilt für den Kopplungsfaktor  $M = K(LL_{rf})^{1/2}$  zwischen SQUID-Ring und Schwingkreis mit den jeweiligen Induktivitäten  $L$  und  $L_{rf}$ . Der Qualitätsfaktor des Schwingkreises, welcher mit einer Kreisfrequenz  $\omega_{rf}$  betrieben wird und einen effektiven Widerstand  $R_{rf}$  besitzt, ergibt sich zu  $Q = R_{rf}/(\omega_{rf}L_{rf})$ .

Der Strom  $I_{rf}$  hat die Form  $I_{rf} = I_{rf,max} \sin(\omega_{rf}t)$ .



Der Gesamtfluss  $\Phi$  im SQUID beschrieben durch den Fluss  $\Phi_{rf}$ , welcher durch den Schwingkreis erzeugt wird, und einen extern bereits vorhandenen Fluss  $\Phi_{ext}$ :

$$\Phi = \Phi_{rf} + \Phi_{ext}$$

Es werden zwei Fälle dargelegt, um die Signalerzeugung zu demonstrieren, siehe auch Abbildung 7. Messgröße ist die Spannung am Schwingkreis  $V_{rf}$ :

1.  $\Phi_{ext} = n \cdot \Phi_0$

Konsequenterweise beträgt der Fluss im Innern ebenfalls ganze Vielfache des Flussquants und daher  $\Phi_{tot} = \Phi_{ext}$ . Wird der Strom im Schwingkreis erhöht, so bedeutet dies auch einen linearen Spannungsanstieg in demselben. Gleichzeitig vergrößert sich der Fluss im Inneren des Ringes, was aber einen Abschirmstrom zur Folge hat, um den erhöhten Fluss durch ein Gegenfeld zu kompensieren (linearer Anstieg bis zum Punkt A).

Wird  $I_{rf}$  so weit erhöht, dass der kritische Strom erreicht wird, setzt das in Abbildung 6 dargestellte Verhalten ein. Dies zeigt, dass es nicht möglich ist, die Supraleitung aufrecht zu erhalten, wenn der Abschirmstrom zu groß wird. Dadurch, dass die Supraleitung unterbrochen wird, befindet sich der Ring im normalleitenden Zustand, er schwächt das äußere Feld, indem die Energie entzogen wird, die nun für den Stromfluss in seinem Inneren notwendig ist. Das Feld, und die damit verbundene (Induktions-)Spannung in der Spule, kann nicht über den Wert des kritischen Flusses hinaus erhöht werden. Dies ist durch das Plateau von Punkt A nach Punkt B verdeutlicht.

Genauer betrachtet springt der Supraleiter im Schleifendurchlauf für kurze Zeit in den nächsthöheren Zustand mit  $n + 1$  und wieder zurück, anstatt wie bei kleineren Strömen eine stetige (in Abbildung 6 gestrichelte) Funktion darzustellen. Der Energieverlust führt dazu, dass der Schwingkreis stark gedämpft wird. Es werden einige Perioden benötigt, um den Fluss so weit zu erhöhen, dass ein erneuter Quantensprung stattfinden kann. Betreibt man den Schwingkreis mit einem höheren Strom  $I_{rf}$  im Rahmen der Breite des Plateaus, so führt dies nur dazu, dass die Periodenzahl, beziehungsweise die Zeit, zum Erreichen des kritischen Feldes geringer wird, so dass dann im Punkt B schließlich der Strom groß genug ist, dass bei jedem Zyklus ein Quantensprung stattfindet.

Bei einer Stromstärke jenseits derer, welche dem Punkt B zuzuordnen ist, beginnt der Ablauf von vorne, für einen Fluss von  $(n + 1)\Phi_0$ , da der Strom groß genug ist, um den Energieverlust des Zustandswechsels zu kompensieren. Der Anstieg verläuft in selber Weise linear bis zum Punkt C, ab welchem zwei Quantensprünge stattfinden und der Abschirmstrom kompensiert die Differenz zu  $n\Phi_0$ , analog zu dem Plateau zwischen A und B. [Die Energie, welche durch den ersten Quantensprung entzogen wurde, ist natürlich immer noch vakant].

Zur Form des dargestellten Verlaufes: Der feste Flussquantensprung findet im Ursprung und bei Punkt B statt. Der Beginn des Plateaus und damit auch seine Länge ist festgelegt durch die kritische Stromstärke.  $V_{rf}$  bezeichnet die maximale Spannungsamplitude.

2.  $\Phi_{ext} = (n + 1/2) \cdot \Phi_0$

Bis auf eine Verschiebung der Kurve ist der Verlauf identisch zu Fall 1 (Die gestrichelte Kurve beginnt ebenfalls im Ursprung, ist zu Anfangs jedoch deckungsgleich zu Fall 1). Der Unterschied besteht darin, dass durch den bereits vorhandenen externen Fluss ebenfalls schon ein Abschirmstrom zur Kompensation des zusätzlichen halben Flussquants im Supraleiter fließt. Erhöht man im Schwingkreis den Strom  $I_{rf}$ , so ist das Plateau, bei welchem ein Quantensprung stattfindet, schon früher erreicht. Gleichzeitig ist das Plateau aber auch kürzer - bedingt durch die Verschiebung der Kurve, da bereits ein Abschirmstrom vorhanden ist und daher  $(n + 1)\Phi_0$  früher erreicht ist.

Der Messende stellt fest, dass bei festgelegter Stromstärke die Amplitude  $V_{rf}$  der Spannung geringer ist.

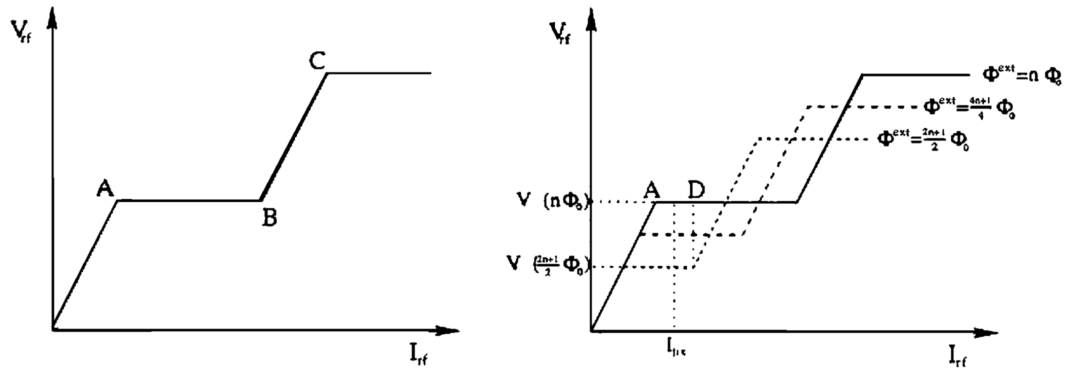


Abbildung 7: Verhältnis von Spannung zu Strom im Schwingkreis. (links) Fall 1. (rechts) Fall 2

### 3.3 Arbeitspunkt des SQUIDs

Es wird Gebrauch davon gemacht, dass bei konstanter Stromamplitude, abhängig vom bereits anliegenden äußeren Feld, die Amplitude der Spannung im Schwingkreis variiert.

Um zu verdeutlichen, wie verfahren wird, kann man annehmen, dass die Amplitude des Stromes sehr klein gewählt wird, so klein, dass die damit verbundene Flussänderung gegenüber dem Flussquant  $\Phi_0$  verschwindend gering ist. Dies würde bedeuten, dass  $V_{rf}$  dem Strom  $I_{rf}$  folgen würde, solange der externe Fluss nicht größer als der kritische Fluss wäre (linearer Bereich). Bei einem externen Fluss kleiner als ein Flussquant aber größer als der kritische Fluss würde sich keine Änderung von  $V_{rf}$  ergeben (Plateau).

Wählt man eine Stromamplitude, welche in Abbildung 7 ungefähr der Breite eines Hubes entspricht, erhält man eine maximale Varianz der Spannung, was in den folgenden Punkten erläutert und in Graph 8 dargestellt ist.

- Falls  $\Phi_{ext} = n\Phi_0$ , so entspricht die Amplitude der Spannung auf Höhe des ersten Plateaus, da dieses erreicht wird.
- Für ansteigendes  $\Phi_{ext}$  wird der Hub der Spannung geringer, da das Plateau schon früher einsetzt. Das Minimum des Hubes wird erreicht, sofern der externe Fluss  $\Phi_{ext} = (n + 1/2)\Phi_0$ .
- Falls das externe Feld weiter anwächst, so steigt auch die Amplitude der Spannung, da der Strom eine Amplitude besitzt, welche bereits wieder über das Ende des Plateaus (welches, wie erläutert, ebenfalls kürzer wird) hinausgeht.
- Bei  $\Phi_{ext} = (n + 1)\Phi_0$  wird schließlich das Maximum wieder erreicht.

**Folglich:** Steigt der externe Fluss gleichmäßig an, so ändert sich die maximale Spannung im externen Schwingkreis periodisch. Die Periodendauer ist gekoppelt mit einer Änderung des externen Flusses um ganze Flussquanten  $\Phi_0$ .

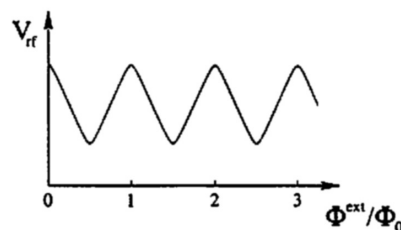


Abbildung 8: Spannungsverlauf in Abhängigkeit zum äußeren Fluss bei fester Stromamplitude

### 3.4 Lock-In Methode

Das im Praktikum vorhandene SQUID besitzt einen internen Lock-In Verstärker. Dieser ist nicht extern regelbar, woraus folgt, dass keine Kenntnis der Funktionsweise vorausgesetzt wird.

Ein Lock-In Verstärker wird immer dann benutzt, wenn es gilt, ein schwaches Messsignal über einem starken Hintergrundrauschen zu detektieren.

Das oben dargestellte Signal des Schwingkreises würde grundsätzlich schon zur Auswertung genügen. Allerdings ist dieses sowohl durch Fluktuationen des Magnetfeldes, als auch durch das Rauschen der Elektronik überlagert. Man behilft sich, indem man dem zu messenden Signal, welches sich auf der Zeitskala von Sekunden ändert, ein Hochfrequenzsignal aufmoduliert und genau dieses im Lock-In Detektor wieder demoduliert.

En Detail ist die Funktionsweise folgende:

- Das Spannungssignal erhält durch einen Frequenzgenerator eine zusätzliche Sinus-förmige Amplitudenmodulation mit einer Hochfrequenzspannung von einigen MHz.
- Im Lock-In Detektor wird das modulierte Messsignal mit dem von dem Frequenzgenerator direkt stammenden Referenzsignal multipliziert und über einen Integrator (Operationsverstärker mit Kondensator) integriert.

Es wird das Prinzip der Orthogonalität von Sinus und Kosinus ausgenutzt. Denn es gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega_1 \neq \omega_2 \\ \pi & \text{für } \omega_1 = \omega_2 \end{cases}$$

So werden alle Frequenzanteile herausgefiltert, welche nicht der Modulationsfrequenz entsprechen. Durch die Signallaufzeiten und Elektronik sind Referenz und Messsignal allerdings phasenverschoben. Eine gleiche Phase beider Funktionen ist enorm wichtig, da sonst das Integral, welches das Ausgangssignal darstellt, einen kleineren Wert annimmt oder verschwindet.

Die Integrationszeit bestimmt ebenfalls, wie stark das Signal geglättet wird, sollte aber nicht zu klein gewählt werden, da andernfalls statistisches Rauschen nicht ausreichend eliminiert wird.

Im SQUID-Versuch ist die Modulation des Messsignals intern mit den Einstellungen für den Schwingkreis gekoppelt. Die Phase ist, da die Elektronik fest bleibt, ebenfalls auf einen konstanten Wert eingestellt. Damit ist als Parameter des Lock-In Detektors nur die Kapazität des Kondensators im Integrator wählbar.

## 4 Versuchsaufbau

Die Komponenten des SQUID-Versuches:

- Isoliertes Gefäß zur Aufnahme von flüssigem Stickstoff (Kryostat)
- Probenschlitten inklusive Aufsatz für zwei verschiedene Probenhalterungen - eine stromdurchflossene Leiterschleife und eine Mehrzweckhalterung
- Motor samt Spannungsversorgung und auf verschiedene Umdrehungsgeschwindigkeiten einstellbares Getriebe
- JSQ-Magnetometer, bestehend aus der SQUID-Sonde, deren Signalverarbeitungselektronik und Spannungsversorgung
- Oszilloskop zur Darstellung des SQUID-Signals
- Computer zur Auslese des Oszilloskopes und Steuerung des Regelkreises des SQUIDs
- Widerstände zwischen  $50\ \Omega$  und  $1000\ \Omega$ , sowie diverse Proben mit unbekanntem Dipolmoment

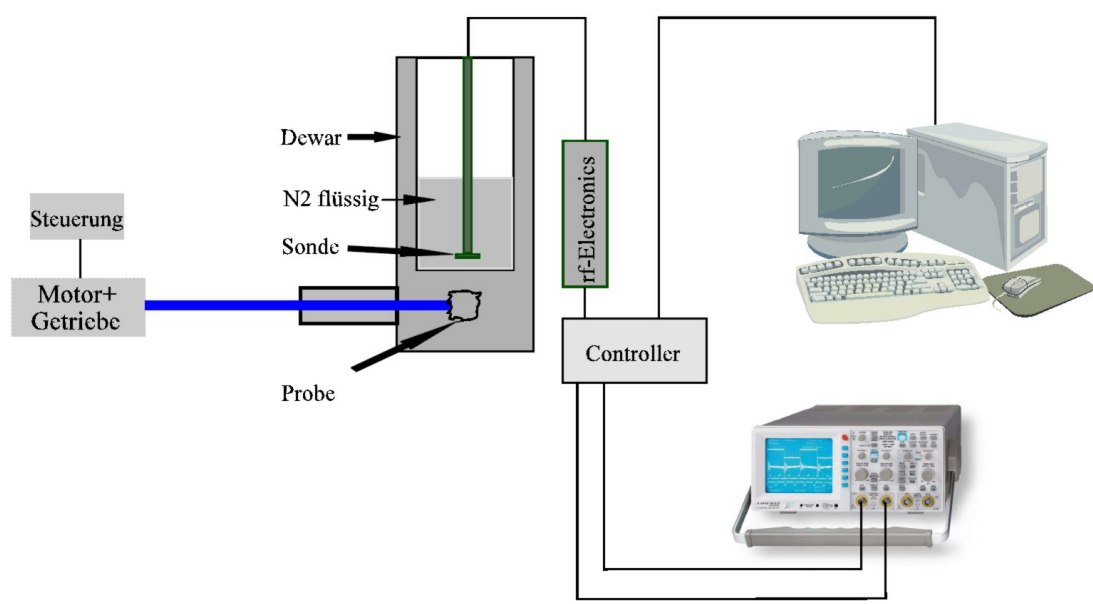
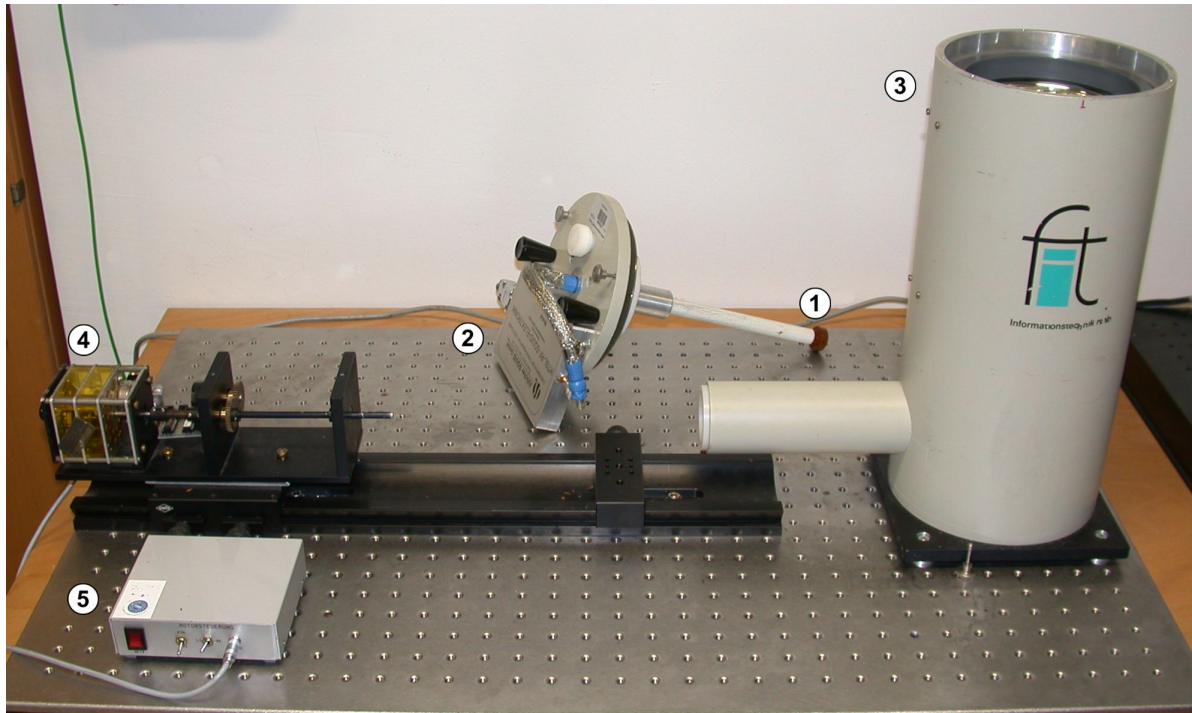
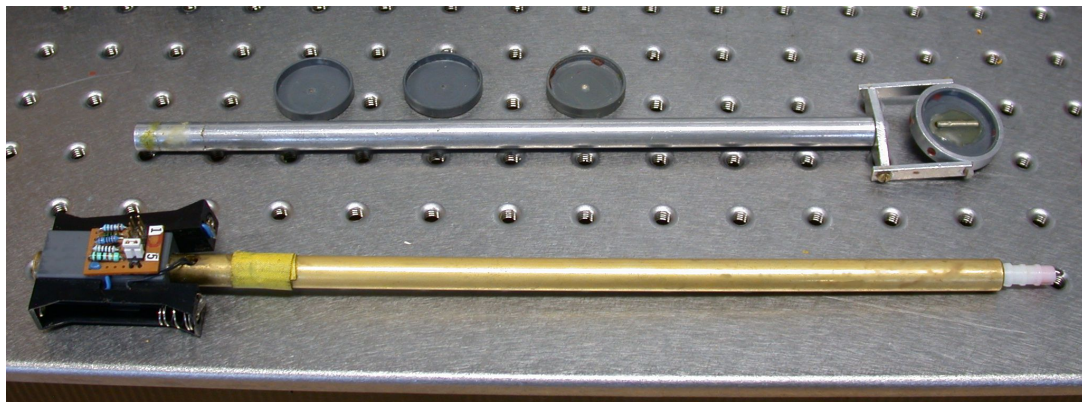


Abbildung 9: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus



**Abbildung 10:** 1) SQUID-Ring 2) SQUID-Elektronik 3) Kryostat 4) Schlitten, Motor und Getriebe für Probenhalterung 5) Motorsteuerung



**Abbildung 11:** Leiterschleife mit Jumper für verschiedene Widerstände (unten) und Probenhalterung mit Auswahl an Proben (oben)

## 4.1 JSQ-Magnetometer

Das SQUID lässt sich über die Software 'JSQ Duo Sensor Control' bedienen. Dort sind folgende Parameter einstellbar<sup>10</sup>:

- **VCA** - Die Stromamplitude des Schwingkreises. Die komplette Skala deckt, nicht ganz linear, einen Bereich von -115 dBm ( $1,8 \cdot 10^{-9}$  W) bei einem eingestellten Wert von 0 bis -75 dBm ( $1,8 \cdot 10^{-7}$  W) bei einem Wert von 4095.
- **VCO** - Regelung der Frequenz des Schwingkreises. Es können Werte von 630 MHz (0) bis 970 MHz (4095) eingestellt werden. Eine genaue Zuordnung findet sich im Benutzerhandbuch auf Seite 9.
- **OFF** - Dient zur Skalierung der Gesamtspannungsamplitude, dies wird hier dazu verwendet, das Signal um den Nullpunkt herum zu zentrieren.
- **Integr.C** - Kapazität des des Kondensators, welcher die Shaping-Zeit bestimmt. Größere Werte glätten das Signal mehr als kleine.
- **FB-R** Widerstandswert des sogenannten Feedback-Resistors. Durch seinen Wert wird die Spannung des Stromkreises festgelegt, was in diesem Fall die 'Verstärkung' der Schaltung definiert. Je nach Einstellung gelten unterschiedliche Verhältnisse für die Relation von Spannung zur Anzahl der Flussquanten. Es sind folgende Werte des Transfer-Koeffizienten  $s_i$  wählbar (siehe auch Benutzerhandbuch Seite 25):

$R / k\Omega$	1	3	6	10	15	20	50	100
$s_i / mV/\Phi_0$	21	60	120	195	290	380	950	1900

## 4.2 Widerstände

Um verschiedene Dipolmomente der Leiterschleife einzustellen, können bei einer Spannung von etwa 3,2 V (2 AA Zellen) per Jumper unterschiedliche Widerstände gewählt werden.

Folgende Typen wurden eingebaut, die Genauigkeit beträgt 0,1 %:

Bezeichnung	R1	R2	R3	R4	R5
R / $\Omega$	51,47	100,8	300,8	510,6	1000

<sup>10</sup>zur Auswertung wird aber nur der Absolutwert des Widerstandes benötigt



## 5 Aufgabenstellung

Die Agenda umfasst diese Punkte:

1. Justieren Sie das SQUID, indem Sie mit Hilfe des Control-Panels des Magnetometers die korrekten Einstellungen zum Betrieb kalibrieren. Finden Sie die optimalen Werte zur Maximierung der Amplitude des SQUID-Patterns.
2. Bestimmen Sie die Dipolmomente/Feldstärken der Leiterschleife mit fünf Widerständen und vergleichen Sie diese mit den berechneten Werten.
3. Bestimmen Sie die Dipolmomente/Feldstärken einer Reihe weiterer Proben.
4. Stellen Sie in einer Polardarstellung die Stärke des Magnetfeldes in Abhängigkeit des Drehwinkels dar.

## 6 Versuchsdurchführung

### 6.1 Vorbereitung

Es ist grundsätzlich darauf zu achten, während der Messungen alle Einstellungen zu protokollieren.

Es sind folgende Größen vor dem Beginn der Messung zu erfassen:

- Der Abstand des SQUID-Sensors zum Probenmittelpunkt, beziehungsweise dem der Leiterschleife
- Die Spannung, welche an der Leiterschleife anliegt
- Der Radius der Leiterschleife

Nachdem der Kryostat etwa bis zur Hälfte mit flüssigem Stickstoff befüllt wurde, muss das SQUID mindestens 15 Minuten eingetaucht sein, bevor mit der Messung begonnen werden kann.

**Am Ende des Versuches muss Wasser und Eis von dem SQUID mit Hilfe des Kaltluft-Föhns gründlich entfernt werden, da sonst, trotz der geschlossenen Bauform, Korrosion das empfindliche Gerät zerstört!**

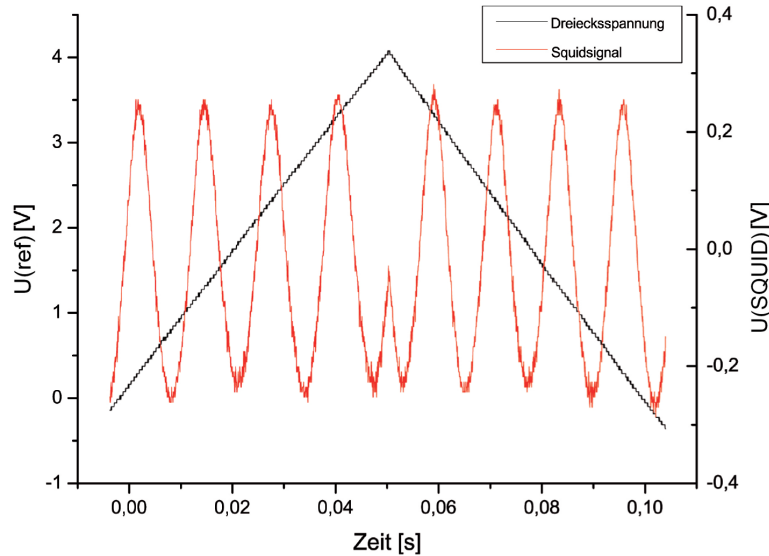
#### 6.1.1 Das SQUID-Pattern

Um mit dem SQUID Messungen durchführen zu können, muss zuerst der Arbeitspunkt eingestellt werden. Dieser ist so zu wählen, dass die Amplitude der Spannungsantwort maximal wird. Die Grundlagen dazu finden sich im Kapitel -Arbeitspunkt des SQUIDs-.

Benutzen Sie die Software 'JSQ Duo Sensor Control' im Test-Modus. Diese steuert einen zum SQUID gehörigen Funktionsgenerator, welcher eine Dreiecksspannung zusätzlich in den Schwingkreis einkoppelt. Dadurch entsteht eine kontrollierte Flussänderung über mehrere  $\Phi_0$  im SQUID, dessen Spannungsantwort am Oszilloskop beobachtet werden kann. Dieser Verlauf wird SQUID-Pattern genannt.

Schließen Sie den Referenz Ausgang des Funktionsgenerators an einen der Eingänge des Oszilloskopes an, welchen Sie als Trigger verwenden. In den anderen führen Sie das Signal des SQUIDs ein.

Bei einer gleichzeitigen Darstellung beider Kanäle sollte das SQUID-Pattern die Form aus Abbildung 12 aufweisen (der Dreiecksgenerator produziert ungleichmäßig stark ansteigende Flanken, daher ist auch die 'Frequenz' des SQUID-Signals auf beiden Seiten des Umkehrpunktes unterschiedlich groß). Die ansteigende Spannung führt zu einer Flussänderung im SQUID. Die 'Periode' des SQUID-Patterns entspricht gerade einer Einheit von  $\Phi_0$ , die dazugehörige Spannungsdifferenz hängt von der Größe des Widerstandes des Schwingkreises ab:



**Abbildung 12:** Beispielhafter Ausschnitt aus dem Signal des SQUIDs ( $U(\text{SQUID})$ ) und des Funktionsgenerators ( $U(\text{ref})$ ) im Test-Modus. Das externe Magnetfeld wird über mehrere Einheiten von  $\Phi_0$  im SQUID erhöht und anschließend reduziert - die spontane Umkehr führt ebenfalls zu einem 'Knick' im Pattern

- Stellen Sie den Schieberegler VCA auf einen Wert von etwa 1000 ein.
- Suchen Sie durch Variation von VCO den Wert der größten Amplitude der Spannung, falls mehrere Maxima zu finden sind, so wählen Sie das absolute Maximum.
- Verändern Sie den Wert von VCA so, dass die Amplitude schließlich maximiert wird.
- Zentrieren Sie das Signal des SQUID-Patterns durch Variation des Offsets um den Nullpunkt.

Es ist wichtig für den stabilen Betrieb, dass diese Einstellungen präzise durchgeführt werden. Die Werte für VCA, VCO und Offset (Kapazität des Kondensators für die Shaping-Zeit und Feedback-Resistor ausgenommen) dürfen nun nicht mehr im Laufe der Messung verändert werden.

Ein Unterbrechen des Versuches macht eine Neukalibration erforderlich.

## 6.2 Berechnung der Stärke des Magnetfeldes

Die magnetische Flussdichte der **Leiterschleife** im Abstand  $z$  berechnet sich zu:

$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{p}{z^3}$$

Das Dipolmoment  $p$  der Leiterschleife berechnet sich durch den Strom  $I = V/R$ , welcher eine Fläche  $A$  einschließt und durch die Spannung  $V$  am Widerstand  $R_i$  vorgegeben ist, nach  $p = AI = AV/R_i$ .

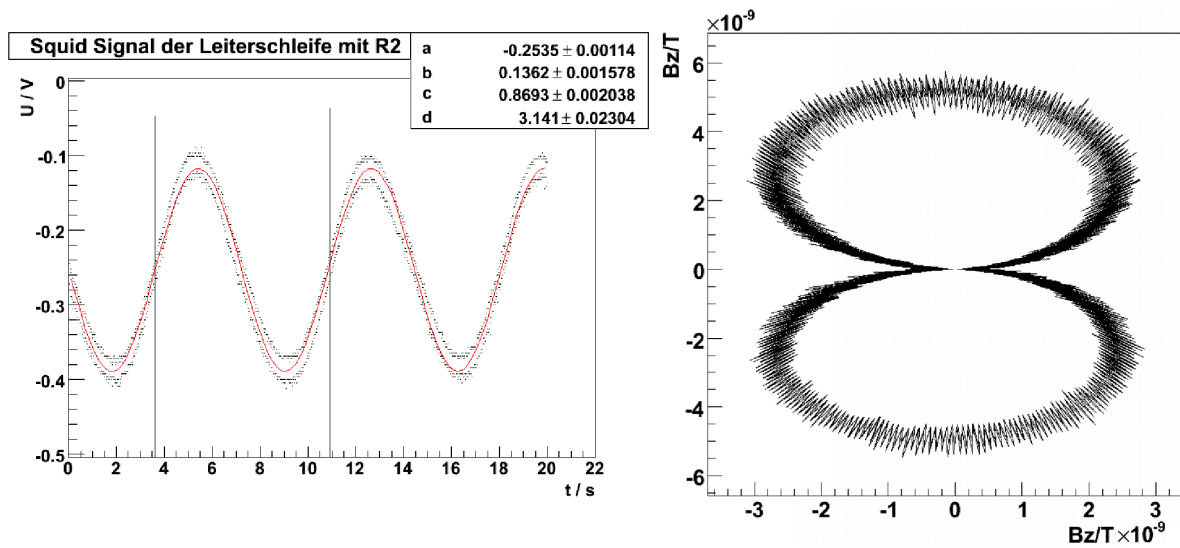
Durch den am SQUID eingestellten Wert des Feedback-Resistors  $s_i$  [ $V/\Phi_0$ ] lässt sich eine Spannung  $\Delta V$  in einen Fluss umsetzen. Zur Berechnung der Stärke des Magnetfeldes, bestimmt durch diesen Fluss, benötigt man die Fläche der Öffnung des SQUIDs. Da aber durch den supraleitenden Zustand der Fluss verdrängt wird, gelangt nur ein Bruchteil in den Ring. Statt die 'effektive Fläche' zu benutzen, lässt sich aus dem Fluss direkt die Stärke des Magnetfeldes mit Hilfe des Feld-Fluss-Koeffizienten  $F$  [ $T/\Phi_0$ ] berechnen. Der Hersteller gibt einen Wert von  $F = 9,3 nT/\Phi_0$  an. Es gilt:

$$B_z = F \frac{\Delta V}{s_i}$$

(Die Kenntnis der 'effektiven Fläche'  $A_{eff} = 1/F = 0,226 mm^2$  ist nicht notwendig)



### 6.3 Dipolmomente



**Abbildung 13:** Exemplarische Darstellung einer Messreihe. Eine volle Periode mit angepasster Fitfunktion (links) und polarer Darstellung (rechts)

Zur Berechnung der Dipolmomente/Feldstärken nehmen Sie den Datensatz von mindestens einer kompletten Umdrehung der Probe auf.

Führen Sie einen Fit auf diesen Daten durch der Form:

$$f(x) = a + b \sin(cx + d)$$

(Wann macht diese Parametrisierung Sinn?)

Daraus extrahieren Sie den Offset  $a$ , die Amplitude  $b = \Delta V$  und die Kreisfrequenz  $c = \omega$ . Aus der Amplitude kann die maximale Stärke des Magnetfeldes  $B_{z,max}$  berechnet werden. Stellen Sie in einem Diagramm die Feldstärke  $B_z$  in Abhängigkeit des Drehwinkels  $\alpha$  dar.

Es bietet sich eine Darstellung in Polarkoordinaten an. Die dazu erforderliche Koordinatentransformation des kartesischen Systems  $(B_z, \alpha)$ , in ursprünglicher Form  $(\Delta V, t)$ , in das polare  $(x_i, y_i)$  sieht wie folgt aus:

$$x_i = |B_z| \cos(\alpha)$$

$$y_i = |B_z| \sin(\alpha)$$

In Abbildung 13 ist beispielhaft dieses Vorgehen dargestellt. Eine vollständige Auswertung findet sich, falls notwendig, in der Staatsexamensarbeit.

## 6.4 Weitere Hinweise

Eher technischer Natur fallen folgende Hinweise aus und sollen einigen Schwierigkeiten während der Durchführung entgegenkommen:

- **Stabilität:** Es existiert die Problematik, dass eventuell eine zusätzliche Störung das Signal des externen Feldes überlagert. Diese tritt auf einer Zeitskala von etwa 20 s auf und hat die Form einer Kondensatorauf- und entladung. Bei großen Verstärkungen ist der Einfluss etwa in Größenordnung des zu messenden Signales. Es bietet sich daher an, einen Messbereich von mehreren Perioden zu wählen, so dass diese mit konstantem Untergrund selektiert werden können.
- Das digitale Speicheroszilloskop jedoch gibt immer die gleiche Anzahl an **Datenpunkten** aus (2000), woraus folgt, dass mit zunehmender Anzahl an Perioden die Auflösung einer einzigen Umdrehung abnimmt.
- Zur Aufnahme des SQUID-Patterns kann die **Mittelwertbildung** (AVERage, Standardeinstellung REFResh) des Oszilloskopes benutzt werden. Im getriggerten Betrieb lassen sich so statistische Schwankungen eliminieren.
- Die **Abschirmung** des SQUIDs ist nur begrenzt dazu fähig, äußere Felder abzuhalten. Lokale Störungen im Nahbereich, insbesondere elektronische Geräte, beeinflussen den Versuch.
- Ein Ausmitteln des SQUID-Patterns bedeutet nicht, dass das **Grundsignal** im Messmodus ebenfalls zu Null nivelliert wird. Dieses befindet sich natürlich auf einem beliebigen Wert zwischen beiden Maxima der Skala, was insbesondere bei großen Verstärkungen dazu führt, dass ein sinnvoll aufgelöstes Signal sich jenseits des darstellbaren Bereiches befinden würde (es sollen nur die Änderungen gemessen werden!). Hierzu gibt es die einfache Lösung, per Hand den Nulloffset einzustellen, indem ein Magnet am dahinter befindlichen Whiteboard so lange verschoben wird, bis das Ruhesignal tatsächlich bei Null liegt.

## 6.5 Geräteliste

- JSQ HTS-rf-SQUID Magnetometer
- Dewar mit magnetischer Abschirmung
- Probenhalter mit Motor und Getriebe
- Verschiedene Proben
- Motorsteuerung
- Heißluftfön zum Trocknen des Sensors
- Digitales Speicheroszilloskop
- PC inkl. Software 'JSQ Duo Sensor Control'

## 7 Literatur

### Staatsexamensarbeiten

- BANGE, V.: *Einrichtung des Versuches 'SQUID'*, Zulassungsarbeit, Universität Freiburg, Mai 2000

### Weiterführende Literatur

- CLARKE, J.: *SQUIDS*, Spektrum der Wissenschaft, 10/1994, Spektrum Akademischer Verlag
- ASHCROFT, N.W.; MERMIN, D.N.: *Festkörperphysik*, Oldenbourg Verlag, 3. Aufl., 2007 (Kapitel über Supraleitung)
- KITTEL, C.: *Einführung in die Festkörperphysik*, Oldenbourg Verlag, 14. Aufl., 2005 (Kapitel über Supraleitung)
- IBACH, H.; LÜTH, H.: *Festkörperphysik*, 5. Aufl., Springer-Verlag, 2002
- BUCKEL, W.: *Supraleitung*, VCH Verlagsgesellschaft, 1993
- WEINSTOCK, H.; NISENOFF, M.: *Superconducting Electronics*, NATO ASI Series F, Computer and Systems Sciences, Vol. 59, 1988, Seite 87 ff (inklusive lock-in-Technik)
- BUCKEL, W.; KLEINER, R.: *Supraleitung, Grundlagen und Anwendungen*, Wiley VCH, Weinheim, 2004
- HELLWEGE, K.H.: *Einführung in die Festkörperphysik*, Springer-Verlag, 3. Aufl., 1988
- WEISSKOPF, V.F.: *The formation of Cooper Pairs and the nature of superconducting currents*, CERN 79-12, Theoretical Studies Division, 1979

## 8 Anhang

### 8.1 Satz von Stokes

Für ein (einfach differenzierbares) Vektorfeld  $\vec{A}$ , welches eine Oberfläche  $F$  durchdringt, gilt:

$$\int_F (\nabla \times \vec{A}) dF = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

wobei  $C$  eine geschlossene Kurve auf dem Rand dieser Oberfläche darstellt.

### 8.2 Maxwell-Gleichungen

Für die elektrische Feldstärke  $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\delta\vec{A}/\delta t$  und die magnetische Flussdichte  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  eines Vektorfeldes  $\vec{A}$  und eines skalaren Feldes  $\phi$  gilt:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad \text{Coulomb'sches Gesetz}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{Gauß'sches Gesetz}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\delta\vec{B}}{\delta t} \quad \text{Induktionsgesetz}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\delta\vec{E}}{\delta t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \text{Ampere'sches Gesetz}$$

mit der Ladungsdichte  $\rho$  und der Stromdichte  $\vec{j}$ .

### 8.3 Wahrscheinlichkeitsstrom

Sei  $P(x, t)$  die Wahrscheinlichkeit einen Zustand 'zu messen' so ist  $P(x, t) = |\Psi(x, t)|^2$ . Dies ergibt 1, sofern zur Bildung des Skalarproduktes der normierten Wellenfunktionen über den gesamten Raum integriert wird. Die zeitliche Entwicklung wird beschrieben durch

$$\frac{\delta}{\delta t} P(x, t) = \frac{\delta}{\delta t} |\Psi(x, t)|^2 = \Psi^* \frac{\delta}{\delta t} \Psi + \Psi \frac{\delta}{\delta t} \Psi^* = \frac{1}{i\hbar} [\Psi^* H \Psi - (H \Psi)^* \Psi]$$

da die zeitliche Entwicklung eines Zustands durch die Schrödingergleichung (d.h. den Hamiltonoperator/die Energie) beschrieben wird

$$i\hbar \frac{\delta}{\delta t} \Psi^* = -H \Psi^*$$

mit  $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$  (ohne zusätzliches Potential) ist

$$\frac{\delta}{\delta t} P(x, t) = \frac{\hbar}{2m} [\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*] = -i \nabla \frac{\hbar}{2m} [(\nabla \Psi^*) \Psi - \Psi^* \nabla \Psi]$$

Dies ergibt die Form einer Kontinuitätsgleichung (mit Teilchendichte  $\rho$ ), sofern man den geklammerten Teil als Stromdichte  $j$  identifiziert.

$$\frac{\delta}{\delta t} \rho = -\frac{\delta}{\delta x} j$$

### 8.4 Verteilungsfunktionen

Verteilungsfunktionen geben die mittlere (Zustands-)Besetzungszahl  $f(E)$  in Abhängigkeit der Energie  $E$  an. Vergleiche hierzu die 'Schalenstruktur' von Atomen oder das Bandschema für Ladungsträger eines Festkörpers, welches insbesondere bei Halbleitern eine Rolle spielt.

Teilchen mit halbzahligem Spin nennt man **Fermionen**<sup>11</sup> und unterliegen der Fermi-Dirac-Statistik, welche den Charakter repräsentiert, dass jeder mögliche Zustand aus Quantenzahlen höchstens ein Mal besetzt werden darf - im Vergleich zu Teilchen mit ganzzahligem Spin, **Bosonen**<sup>12</sup> genannt, welche der Bose-Einstein-Statistik folgen, und den selben Zustand mehrfach besetzen können. Für sehr kleine Temperaturen  $T$  bildet sich sogar der Extremfall aus - das Bose-Einstein-Kondensat, in welchem fast alle Teilchen den selben Grundzustand besetzen.

Während zwei 'verschiedene' Bosonen ununterscheidbar sind, gilt dies für Fermionen nicht. Vertauscht man in einer Vielteilchenwellenfunktion zwei Teilchen (ihre Quantenzahlen) so ändert die Gesamtwellenfunktion ihr Vorzeichen. Bildet man eine Vielteilchenwellenfunktion aus Produkten von Einteilchenwellenfunktionen, so muss diese antisymmetrisiert werden, damit der Vorzeichenwechsel bei Teilchenvertauschung gewährleistet ist.

#### 8.4.1 Fermi-Statistik

Es gilt, mit  $\beta = 1/k_B T$  und dem chemischen Potential  $\mu$  (Fermi-Energie), welches ungefähr die Energie angibt, welche benötigt wird, um ein weiteres Teilchen dem Ensemble hinzuzufügen:

$$f(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1}$$

Kein Zustand kann mit einem zweiten Teilchen mit denselben Quantenzahlen besetzt werden. Je kleiner die Temperatur  $T$ , umso größer  $\beta$  und umso mehr nähert sich die Fermi-Verteilung einer Heaviside-(Stufen-)Funktion an.

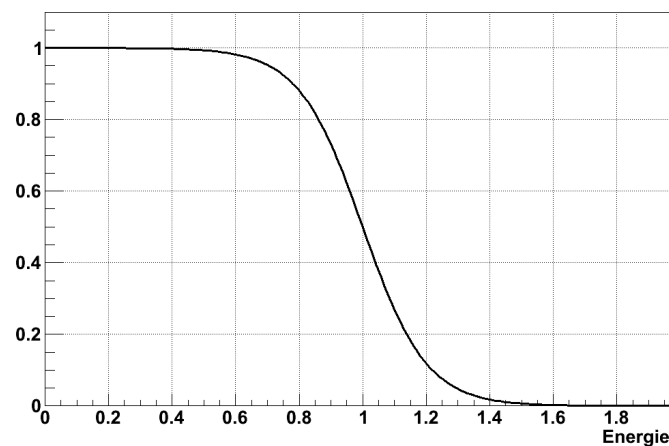


Abbildung 14: Fermi-Verteilungsfunktion für  $\beta = 10$  und  $\mu = 1$

<sup>11</sup>nach Enrico Fermi (Italien), Beispiele: Elektronen, Neutrinos, Quarks

<sup>12</sup>nach Satyendranath Bose (Indien), Beispiele: Austauschteilchen wie Photonen, Phononen, W und Z, sowie auch das Higgs-Teilchen

### 8.4.2 Bose-Statistik

Es gilt, ähnlich wie bei der Fermi-Statistik, lediglich mit anderem Vorzeichen im Nenner, was aber tiefgreifende Folgen hat:

$$f(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} - 1}$$

Es tritt eine Polstelle um  $\mu$  herum auf. Dies bedeutet, dass es einen Zustand, den Grundzustand, gibt, in welchem sich beliebig viele Bosonen befinden dürfen. Geringe Temperaturen lassen die Funktion schmaler werden.

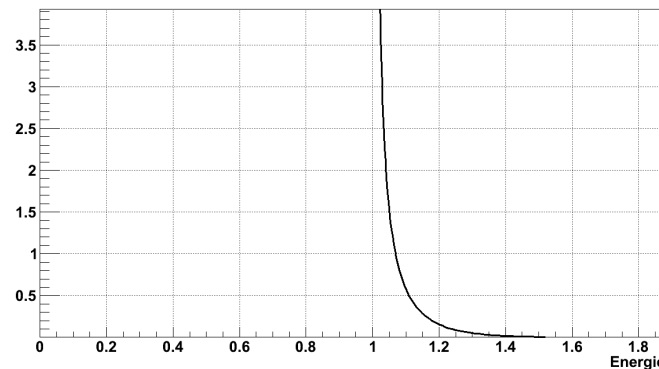


Abbildung 15: Bose-Verteilungsfunktion für  $\beta = 10$  und  $\mu = 1$

## 8.5 Zustandsdichte

Die Zustandsdichte  $D(E)$  charakterisiert die Menge an Zuständen, welche in einem Energieintervall  $[E, E + \Delta E]$  verfügbar sind.

Im dreidimensionalen Fall lässt sich dies durch die Energie  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  eines freien Teilchens mit Wellenvektor  $\vec{k}$  berechnen. Dort ist die Anzahl der Zustände  $N$  durch eine Kugel im  $k$ -Raum mit Volumen  $V_k = 4/3\pi k^3$  gegeben. Zu jedem erlaubten Wert des Wellenvektor gehört ein Volumen im Ortsraum von  $V_x$ . Daraus folgt:

$$N(k) = \frac{V_k}{V_x} = \frac{V}{3\pi^2} k^3$$

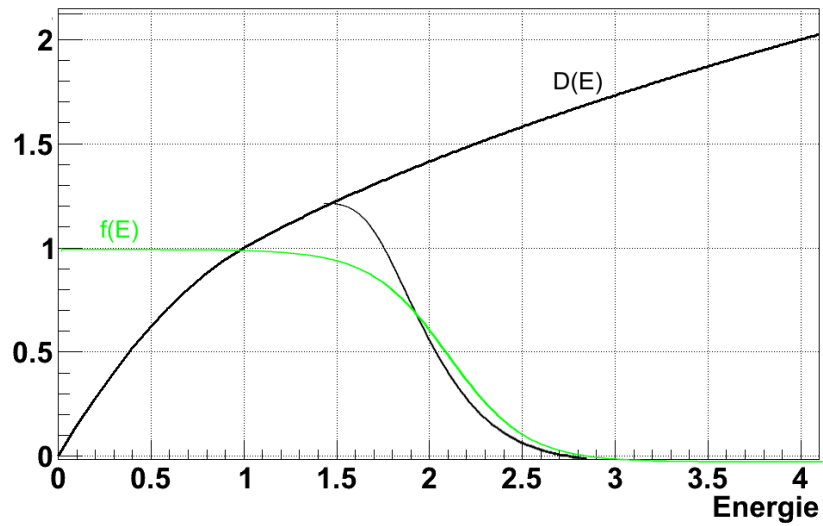
Substituiert man in diesem Ausdruck  $k$  durch eine Funktion von  $E$  mit  $k = \sqrt{E2m/\hbar^2}$ , so erhält man für die Zustandsdichte:

$$D(E) = \frac{\delta N(E)}{\delta E} = \frac{V}{2\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} \propto \sqrt{E}$$

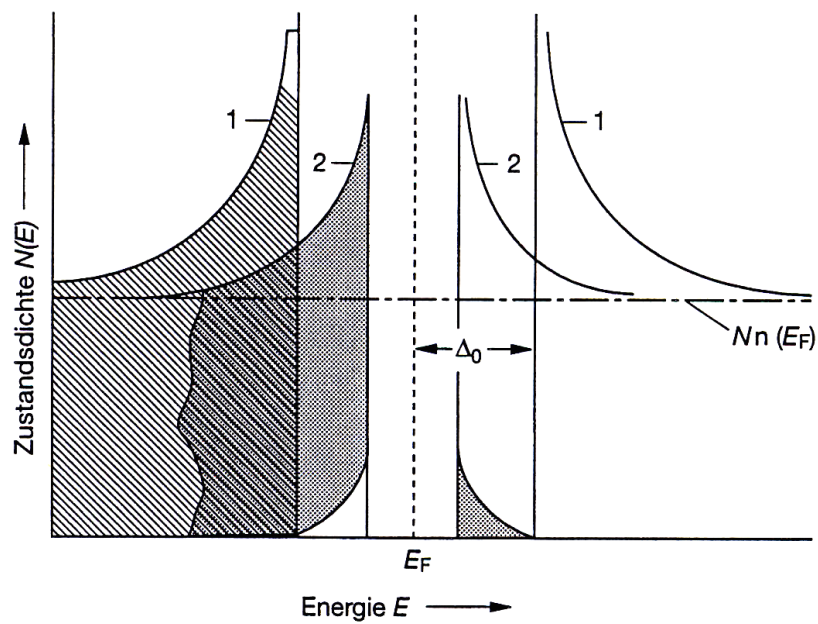
Die Anzahl der Zustände wächst mit der Wurzel der Energie.

Befindet sich ein Intervall nicht erlaubter Energie, beispielsweise aufgrund einer attraktiven Wechselwirkung, innerhalb der eigentlich erlaubten Zustände, so werden diese zu größeren beziehungsweise kleineren Energien hin verschoben (da die Wechselwirkung ebenfalls einen Beitrag zur Energie leistet).

Im Falle der Supraleitung ergibt sich eine Energielücke in der Zustandsdichte der Einelektronenzustände aufgrund der Elektron-Phonon-Wechselwirkung. Abbildung 17 zeigt die Zustandsdichte im Supraleiter um die Fermi-Energie herum. Die breite Lücke  $2\Delta E$  sei für  $T = 0\text{ K}$ . Die schmalere deutet an, dass für schmale verbotene Energieintervalle die thermische Energie ausreicht, damit Elektronen höher gelegene (Leitungs-)Zustände besetzen können.



**Abbildung 16:** Zustandsdichte freier Elektronen  $D(E)$  und Fermi-Verteilungsfunktion  $f(E)$  in kombinierter Darstellung



**Abbildung 17:** Zustandsdichte ungepaarter Elektronen im Supraleiter mit Energielücke für zwei verschiedene Temperaturen, aus [Buckel, Kleiner: Supraleitung, 6.Auflage 2007]

## 8.6 JSQ Duo Sensor Control

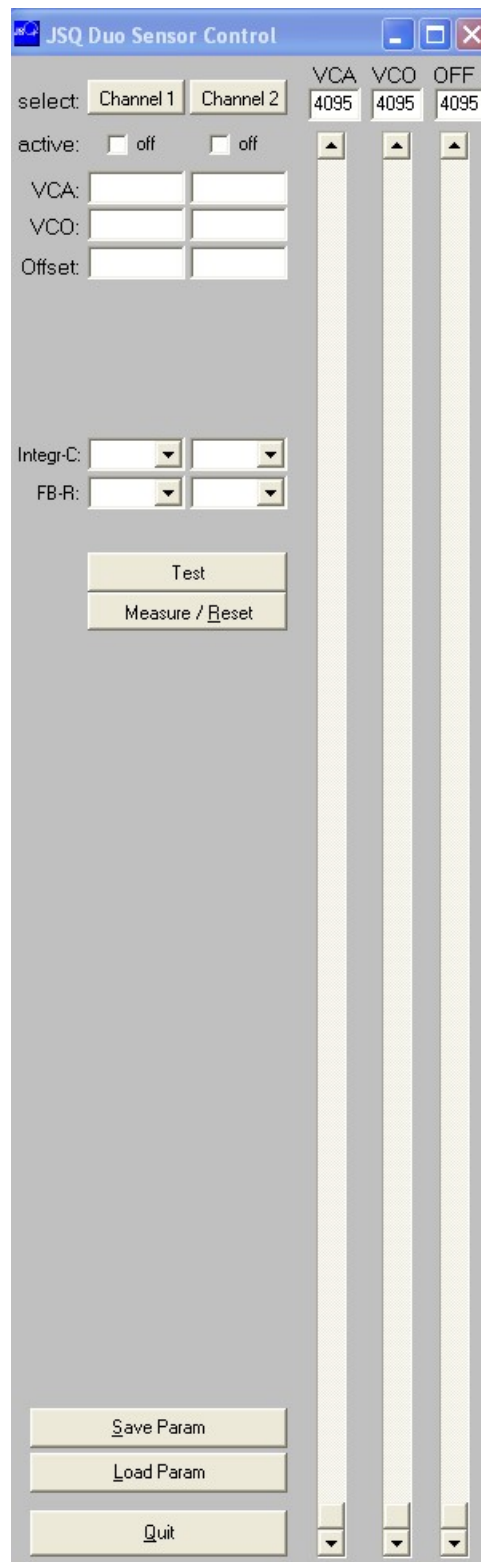
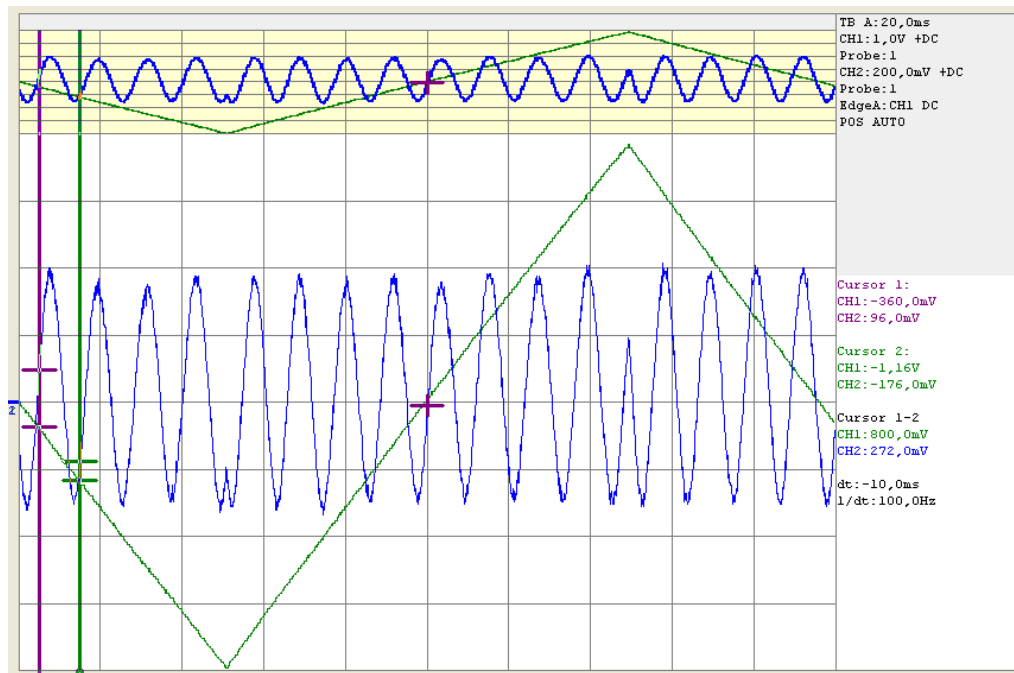


Abbildung 18: Das Steuerpanel von 'JSQ Duo Sensor Control' (Kanal 2 wird nicht verwendet)



## 8.7 Digitales Oszilloskop

In diesem Versuch, wie auch bei anderen, wird ein analog/digitales Oszilloskop benutzt. Über das Steuerungstool von Hameg<sup>13</sup> lässt sich die Konfiguration des Gerätes vornehmen. Des weiteren kann der auf dem Schirm sichtbare Teil des Signals ausgelesen werden. Hier können über den 'Speichern'-Button die aktuellen Einstellungen gespeichert werden als .mes-Datei (nicht notwendig), sowie die Daten als .csv-Datei exportiert werden.



**Abbildung 19:** exemplarische Darstellung des digitalisierten Oszilloskopschirmes am Beispiel des SQUID-Patterns

<sup>13</sup>laden Sie zuvor die zum Oszilloskop passende Datei als 'Projekt'