

FORTGESCHRITTENEN-PRAKTIKUM I

Farady- und Pockelseffekt

24. und 25. September, 2014

Moritz
BITTERLING

Benjamin
ROTTLER

Betreuer: Florian Kiß



INSTITUT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT
FREIBURG IM BREISGAU

Alle Berechnungen in diesem Protokoll wurden entweder unter Python 2.7 mit Hilfe folgender Programmmbibliotheken

- PyROOT (<http://root.cern.ch/drupal/content/pyroot>)
- NumPy (<http://www.numpy.org/>)

oder Mahtematica 9 und 10 durchgeführt.

Die Graphiken wurden mit Inkscape (<http://www.inkscape.org>) gezeichnet.

Alle Python-Skripte, L^AT_EX-Skripte und SVG-Graphiken können online unter
<https://github.com/Bigben37/FP1/tree/master/0924-FarPock> abgerufen werden.

Inhaltsverzeichnis

1. Versuchsziel	1
2. Pockels-Effekt	1
2.1. Physikalische Grundlagen	1
2.1.1. Elektrooptischer Effekt	1
2.1.2. Doppelbrechung in Kristallen	1
2.1.3. Konfiguration der Pockelszelle	2
2.2. Versuchsaufbau	4
2.3. Versuchsdurchführung	5
2.3.1. Bestimmung der Halbwelldenspannung mit einer Sägezahnspannung	5
2.3.2. Bestimmung der Halbwelldenspannung durch Periodenverdopplung eines Wechselsignals	5
2.4. Messergebnisse und Auswertung	10
2.4.1. Sägezahnmethode	10
2.4.2. Modulierte Gleichspannung	15
3. Faraday-Effekt	15
3.1. Physikalische Grundlagen	15
3.1.1. Faraday-Effekt	15
3.1.2. Bestimmung der magnetischen Feldstärke einer Zylinderspule	16
3.1.3. Bestimmung des Drehwinkels in Abhängigkeit des Stroms	18
3.2. Versuchsaufbau	19
3.3. Versuchsdurchführung	19
3.4. Messergebnisse und Auswertung	20
3.4.1. Bestimmung der Verdet-Konstante	20
3.4.2. Bestimmung von 2ϵ	22
4. Literatur	23
A. Anhang	23
A.1. Messprotokoll	23

1. Versuchsziel

Im Versuch wird die Wirkung von elektrischem und magnetischem Feld auf Licht untersucht: Der *Pockels-Effekt* beschreibt mit linearer Doppelbrechung die Drehung von linear polarisiertem Licht im E-Feld, der *Faraday-Effekt* mit zirkularer Doppelbrechung die Drehung von linear polarisiertem Licht im Magnetfeld. Im Rahmen des Versuchs wird der *elektrooptische Koeffizient* von Ammoniumdihydrogenphosphat bestimmt sowie die *Verdet-Konstante* von Schwerflintglas.

2. Pockels-Effekt

2.1. Physikalische Grundlagen

Die Gleichungen und Erklärungen dieses Kapitels beruhen auf [2].

2.1.1. Elektrooptischer Effekt

Die elektrische Flussdichte D ändert sich, wenn man ein äußeres elektrisches Feld anlegt. Diese Veränderung wird *elektrooptischer Effekt* genannt und durch folgende Formel beschrieben:

$$D = a \cdot E + b \cdot E^2 + c \cdot E^3 + \dots \quad (2.1)$$

Die Dielektrizitätskonstante¹ ϵ lässt sich durch Differentiation von D nach E berechnen.

$$\epsilon = \frac{dD}{dE} = a + 2 \cdot b \cdot E + 3 \cdot c \cdot E^2 + \dots \quad (2.2)$$

Der lineare elektrooptische Effekt oder *Pockels-Effekt* tritt bei Kristallen ohne Symmetriezentrum auf, was zur Folge hat, dass der lineare Teil $2 \cdot b \cdot E$ nicht verschwindet. Der Einfluss von höheren Potenzen von E ist sehr gering, da die Konstanten b, c, \dots sehr kleine Werte annehmen, und kommt nur bei sehr hohen elektrischen Feldstärken zum tragen. Für $b = 0$ und $c \neq 0$ spricht man vom *Kerr-Effekt*.

Da der Brechungsindex n von der Dielektrizitätskonstante abhängt, wirkt sich der Pockels-Effekt auf die Brecheigenschaften des Kristalls aus.

$$n = \sqrt{\epsilon \mu} \quad (2.3)$$

2.1.2. Doppelbrechung in Kristallen

In einem optisch isotropen Medium ist die Lichtausbreitung unabhängig von der Ausbreitungsrichtung und Polarisation des Lichtes. Dies gilt bei einem optisch anisotropen

¹Wie man hier sieht, ist die Dielektrizitätskonstante keine Konstante, der Name hat historischen Ursprung.

Medium nicht mehr, man spricht von *Doppelbrechung*. Bei optisch anisotropen Medien unterscheidet man zwischen optisch einachsigen und optisch zweiachsigen. Je nach Typ gibt es eine oder zwei ausgezeichnete Richtungen, in denen ein Lichtstrahl für alle Polarisierungen die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzt.

Man führt die Bezeichnung ordentlicher und außerordentlicher Strahl ein. Der ordentliche Strahl ist die Komponente des E -Feldes, die senkrecht auf dem Hauptschnitt (Ebene, die durch den \vec{k} -Vektor und die optische Achse des Kristalls aufgespannt wird) steht. Der außerordentliche Strahl liegt in der Ebene des Hauptschnitts.

Der Formalismus des Brechungsindex-Ellipsoids ist eine einfache Möglichkeit zur Beschreibung der Doppelbrechung.

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1 \quad (2.4)$$

Die Koordinaten x_1, x_2, x_3 spannen ein kartesisches Koordinatensystem auf. Mindestens eine Achse muss parallel zu einer kristallographischen Achse des Kristalls liegen. Die Brechungsindizes n_1, n_2, n_3 gelten für Licht, das sich parallel zu den entsprechenden Achsen ausbreitet. Kennt man das Brechungsindex-Ellipsoid, so kann man die unterschiedlichen Ausbreitungsrichtungen mit $v = \frac{c}{n}$ bestimmen. Die Form des Brechungsindex-Ellipsoid eines optisch isotropen Mediums ist eine Kugel, es verformt sich zu einer Ellipse bei einem anisotropen Medium.

2.1.3. Konfiguration der Pockelszelle

Bestimmung der Brechungsindizes In diesem Versuch wird eine Pockelszelle, die aus vier ADP²-Kristallen mit einem 45°Y-Cut besteht, verwendet. Legt man an eine normale ADP-Zelle einen Spannung E_1 entlang der x_1 Achse an, so lautet das Indexellipsoid nach [3]:

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + 2 \cdot r_{41} \cdot E_1 \cdot x_3 + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1 \quad (2.5)$$

mit r_{41} als *elektrooptischer Koeffizient*. Man erkennt, dass der Kristall optisch einachsig ist und die x_3 -Achse die optische Achse ist.

Der 45°Y-Cut wird mit Hilfe einer Koordinatentransformation berücksichtigt:

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'_2 + x'_3), \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'_2 - x'_3) \quad (2.6)$$

Daraus folgt nach [3] für den Brechungsindex der x'_2 -Achse:

$$n_{x'_2} \approx n_x + \frac{1}{2} \cdot r_{41} \cdot E_1 \cdot n_x^3 \quad (2.7)$$

mit

$$\frac{1}{n_x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_2^2} + \frac{1}{n_3^2} \right) \quad (2.8)$$

²Ammoniumdihydrogenphosphat

Bestimmung der Phasenverschiebung Die ortsabhängige Amplitude des sich im Kristall ausbreitenden Lichts lässt sich mit

$$A(x) = A_0 \cdot e^{ikx} = A_0 \cdot e^{i\varphi(x)} \quad (2.9)$$

beschreiben. Mit der *Dispersionsrelation* $\omega = v \cdot k$ und den Beziehungen $\omega = 2\pi f$, $c = f \cdot \lambda$ und $v = \frac{c}{n}$ folgt für die Phase φ der Welle

$$\varphi(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n \cdot x \quad (2.10)$$

Es ergibt sich eine Phasendifferenz $\Delta\varphi$ in einem Kristall der Länge l von

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot l \cdot (n_1 - n_{x'_2}) \quad (2.11)$$

Durch die Lage der optischen Achse laufen jetzt jedoch ordentlicher und außerordentlicher Strahl auseinander. Sie werden mit einem zweiten, um 180° gedrehten ADP-Kristall wieder zusammengeführt. Die Phasendifferenz verdoppelt sich.

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot l \cdot (n_1 - n_{x'_2}) \quad (2.12)$$

Da der ADP-Kristall ein optisch einachsiger Kristall ist, besitzt er auch natürliche Doppelbrechung $n_1 - n_x$. Diese wird durch ein zweites Kristallpaar, das um 90° gedreht ist ausgeglichen. Um Pockels-Effekt nicht auch aufzuheben, wird das zweite Paar mit invertierter Spannung betrieben. Dadurch verdoppelt sich die Phasendifferenz noch einmal. Es gilt also:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{8\pi}{\lambda} \cdot l \cdot (n_1 - n_{x'_2}) \\ &\stackrel{(2.7)}{=} \frac{8\pi}{\lambda} \cdot l \cdot \left(\underbrace{n_1 - n_x}_{=0} + \frac{1}{2} \cdot r_{41} \cdot E_1 \cdot n_x^3 \right) \\ &= \frac{4\pi}{\lambda} \cdot l \cdot r_{41} \cdot E_1 \cdot n_x^3 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Legt man nun die Halbwelspannung $U_{\lambda/2}$ an, so beträgt die Phasendifferenz gerade $\Delta\varphi = \pi$. Unter Verwendung von $E = \frac{U_{\lambda/2}}{d}$ und [Gleichung 2.8](#) lässt sich der *elektrooptische Koeffizient* r_{41} folgendermaßen bestimmen:

$$r_{41} = \frac{\lambda \cdot d}{4 \cdot l \cdot U_{\lambda/2}} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_3^2} \right)^3} \quad (2.14)$$

mit l Länge und d Dicke (Kantenlänge) der Pockelszelle, sowie der Brechungsindizes n_1 und n_3 .

2.2. Versuchsaufbau

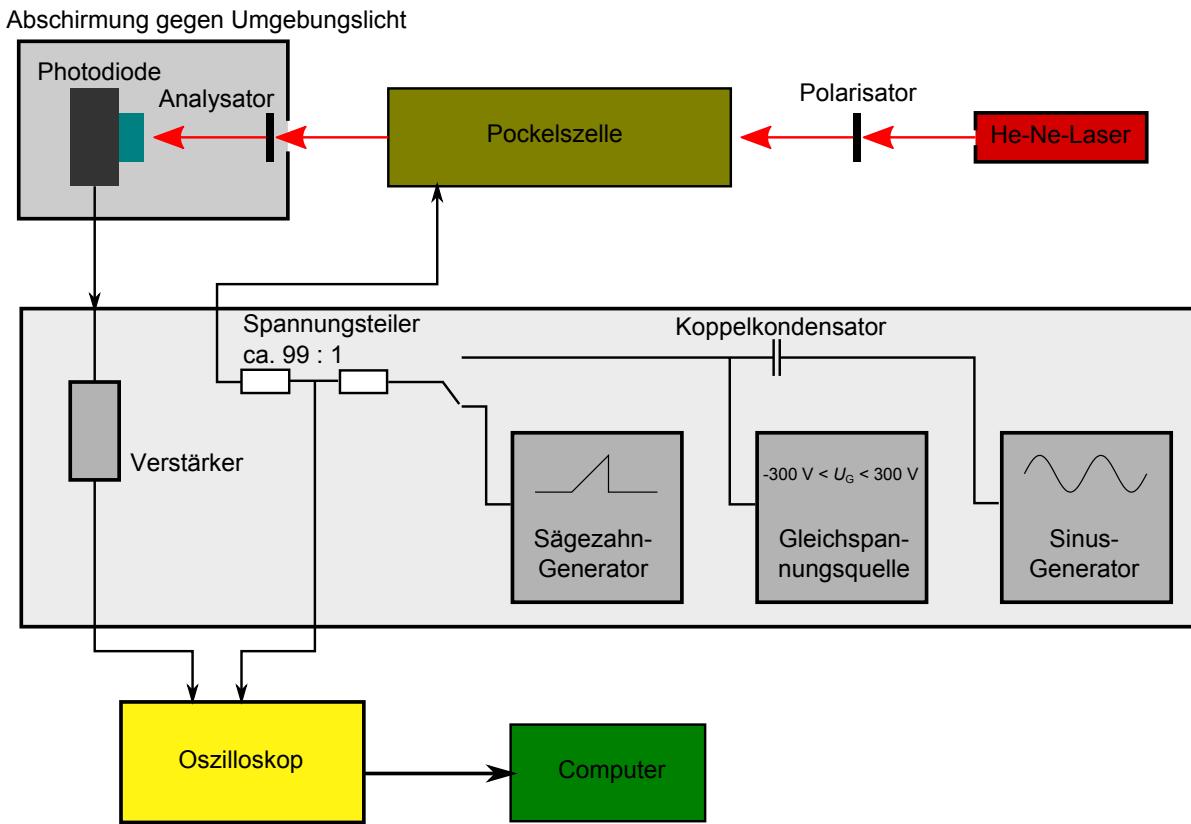


Abbildung 2.1: Aufbau zur Messung der spannungsabhängigen Polarisationsdrehung von Licht in der Pockelszelle.

Abbildung 2.1 zeigt den Aufbau, mit dem die Messungen an der Pockelszelle durchgeführt werden. Der Strahl eines Helium-Neon-Lasers wird linear polarisiert und fällt in die Zelle. Dort liegt eine Spannung an, die an drei Netzteilen eingestellt wird: Es kann eine Sägezahnspannung mit 500 V Amplitude angelegt werden oder eine Gleichspannung zwischen -300 V und 300 V, der eine Sinusspannung mit einstellbarer Frequenz und Amplitude überlagert werden kann. Über einen Spannungsteiler, der die Spannung auf ungefähr ein Hundertstel ihrer Amplitude reduziert, kann das Signal an der Pockelszelle auf einem Oszilloskop betrachtet werden.

Nach der Zelle fällt das Laserlicht auf einen drehbaren Analysator und anschließend auf eine Photodiode, deren Signal verstärkt an das Oszilloskop weitergeleitet wird. Die Photodiode ist gegen Umgebungslicht abgeschirmt. Mit dem Computer kann das Oszilloskop ausgelesen werden.

2.3. Versuchsdurchführung

2.3.1. Bestimmung der Halbwelenspannung mit einer Sägezahnspannung

Um eine grobe Abschätzung der Halbwelenspannung zu bekommen, wird im ersten Versuchsteil an die Pockelszelle das Sägezahnspannungssignal angelegt. Gleichzeitig wird mit dem Oszilloskop das Spannungssignal nach dem Verstärker der Photodiode gemessen. Durch Drehen des Analysators wird dieses Signal so eingestellt, dass die Amplitude maximal ist, aber kein *Clipping* auftritt. Die beiden Signale werden mit dem Computer aufgezeichnet. Anschließend wird der Analysator für zwei weitere Messungen jeweils ein wenig weiter verdreht, um eine eventuelle Amplitudenabhängigkeit der Halbwelenspannung zu identifizieren.

2.3.2. Bestimmung der Halbwelenspannung durch Periodenverdopplung eines Wechselsignals

Ursache der Periodenverdopplung In diesem Versuchsteil wird die Halbwelenspannung mit einer genaueren Messmethode bestimmt: Wenn ein Wechselspannungssignal einer Gleichspannung überlagert wird, dann verdoppelt die Wechselspannung ihre Frequenz, wenn der Wert der Gleichspannung ein Vielfaches der Halbwelenspannung beträgt. Die Ursache davon wird im Folgenden erläutert.

Die winkelabhängige Transmission des Analysators wird durch das Gesetz von Malus beschrieben: Linear polarisiertes Licht, dessen Polarisationsrichtung um den Winkel α zur Achse des Analysators gedreht ist, wird mit dem Faktor $\cos^2(\alpha)$ abgeschwächt. Ist die Analysatorachse parallel zur Polarisatorachse vor der Pockelszelle eingestellt, gilt (da bei Halbwelenspannung die Polarisierung um 90° gedreht wird) folgende Abhängigkeit des Winkels α von der Spannung U an der Pockelszelle und der Halbwelenspannung $U_{\lambda/2}$:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{U}{U_{\lambda/2}} \quad (2.15)$$

Daraus folgt für die Intensität I nach dem Analysator

$$\frac{I}{I_0} = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{U}{U_{\lambda/2}}\right) \quad (2.16)$$

I_0 ist die Lichtintensität vor dem Analysator. Der Zusammenhang ist auf [Abbildung 2.2](#) für $U_{\lambda/2} = 221$ V dargestellt.

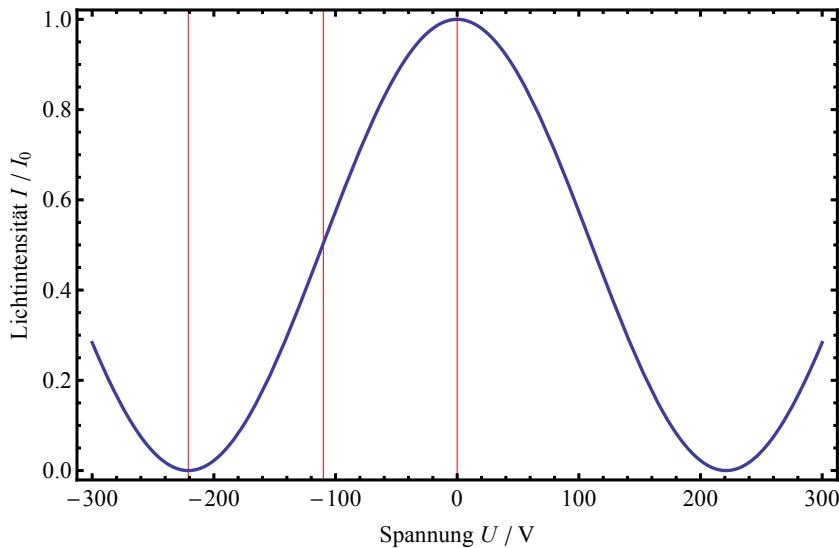


Abbildung 2.2: Lichtintensität nach dem Analysator in Abhängigkeit der Spannung an der Pockelszelle. Die roten Linien zeigen die drei Gleichspannungen, denen auf [Abbildung 2.3](#) ein Wechselstrom überlagert ist.

Besteht die Spannung U aus dem Gleichanteil U_G und dem Wechselanteil $U_W = A \sin(\omega t)$ mit der Kreisfrequenz ω , so gilt für die zeitabhängige Abschwächung durch den Analysator

$$\frac{I}{I_0}(t) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{U_G + A \cdot \sin(\omega t)}{U_{\lambda/2}}\right) \quad (2.17)$$

[Abbildung 2.3](#) zeigt diese Zeitabhängigkeit für verschiedene Gleichanteile, $A = 30 \text{ V}$ und $\omega = 1 \text{ kHz}$.

Wenn der Gleichanteil so eingestellt wird, dass eine mittelhohe Intensität durch den Analysator transmittiert wird, so wird das Wechselstromsignal fast unverformt übertragen. Dies gilt aber nicht mehr, wenn der Gleichanteil so eingestellt ist, dass ein Transmissionsmaximum oder -minimum auftritt. Dann oszilliert das Wechselstromsignal um diesen Extrempunkt auf [Abbildung 2.2](#). Pro Schwingungsperiode des Wechselstromsignals wird somit zweimal ein Intensitätsminimum bzw. -maximum erreicht: Periodenverdoppelung tritt auf.

Der Einsatz der Periodenverdoppelung kann auf [Abbildung 2.4](#) abgelesen werden: Hier ist die Intensität in Abhängigkeit der Zeit und der Gleichspannung gezeigt. Die Periodenverdoppelung tritt auch schon weiter entfernt von den Extrema auf, hier erhält man aber kein symmetrisches Signal.

Die Beobachtung des Signals der Photodiode liefert also ein sehr gutes Kriterium zur Bestimmung der Halbwellesspannung: Misst man ein symmetrisches Signal mit doppelter Anregungsfrequenz, dann ist die Gleichspannung so eingestellt, dass die Transmission minimal oder maximal ist. Die Differenz von zwei Spannungswerten bei Minimum und Maximum ist die Halbwellesspannung.

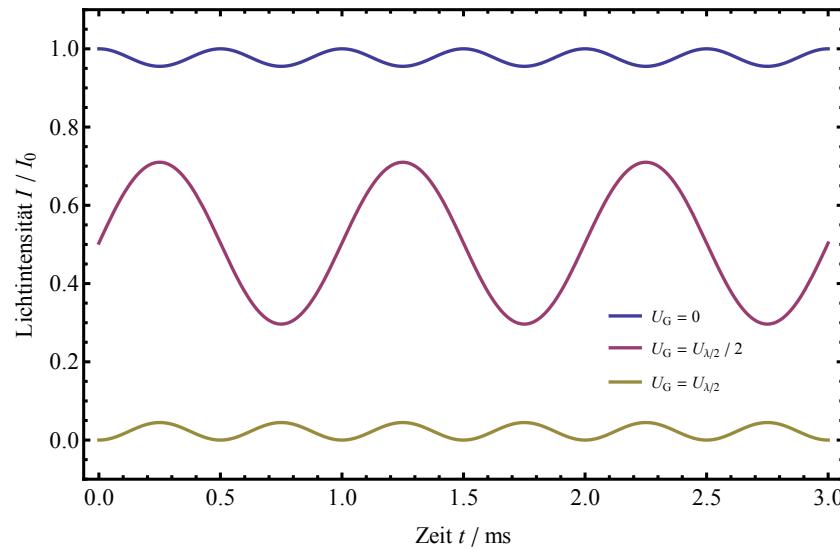


Abbildung 2.3: Zeitabhängigkeit der Intensität nach dem Analysator für verschiedene Gleichanteile U_G nach [Gleichung 2.17](#) für $\omega = 1 \text{ kHz}$ und $A = 30 \text{ V}$. Die U_G sind auf [Abbildung 2.3](#) eingetragen.

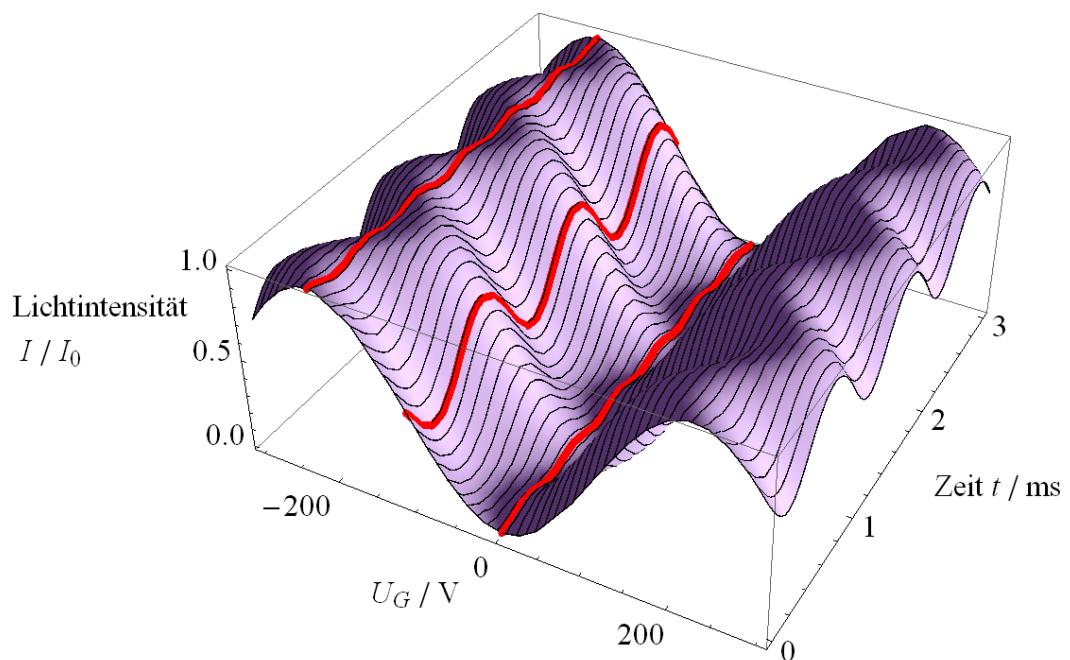


Abbildung 2.4: Zeitliche Variation der Intensität nach dem Analysator in Abhängigkeit des Gleichanteils U_G der Spannung an der Pockelszelle nach [Gleichung 2.17](#). Die roten Linien sind die Kurven aus [Abbildung 2.3](#). Es ist erkennbar, dass im Bereich um die Extrema eine Periodenverdopplung des Wechselsignals auftritt.

Einfluss des Umgebungslichts auf die Messung Wenn die Messung so durchgeführt wird, wie oben beschrieben, müssen die Signale auf dem Oszilloskop sehr genau beobachtet werden, um die richtige Einstellung des Gleichanteils U_G zu finden. Dabei fiel auf, dass an dem Messaufbau ein großes Störsignal durch die Raumbeleuchtung mit Leuchtstoffröhren auftritt. Abbildung 2.5 zeigt das Signal der Photodiode bei ausgeschaltetem Laser (gelbe Kurve), wenn das Raumlicht ungehindert auf sie fällt. Mit einer Papierröhre um den Strahlengang vor der Diode und einem dunklen Tuch als Abschirmung konnte das Störsignal fast vollständig unterdrückt werden (orange und rot). Bei ausgeschaltetem Raumlicht verschwindet das Störsignal vollständig (schwarz).

Das Störsignal hat die doppelte Netzfrequenz (100 Hz), weil die Leuchtstoffröhren bei Maximum und Minimum des Netzssignals hell leuchten und bei jedem Nulldurchgang dunkel sind.

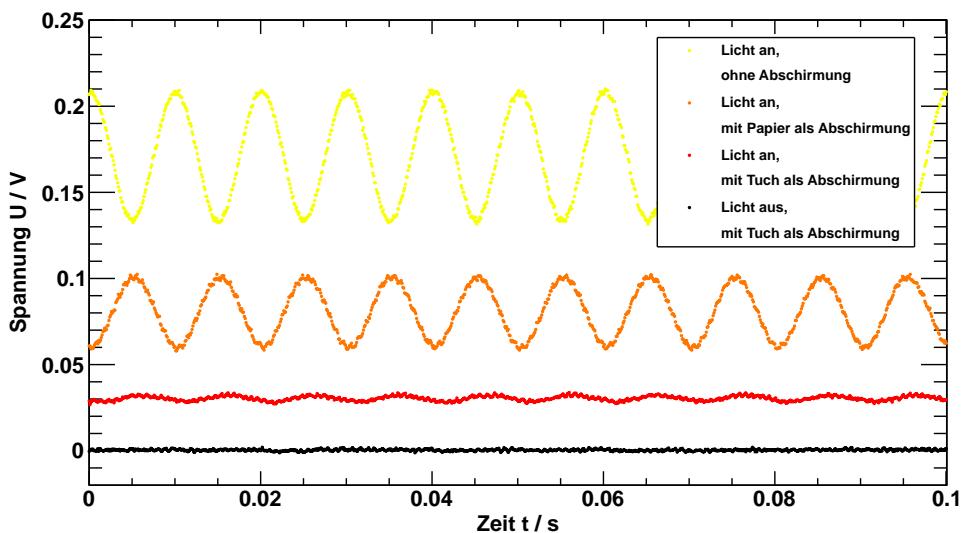


Abbildung 2.5: Störsignal mit Frequenz 100 Hz durch die Neonlampen an der Decke des Labors und Beseitigung durch geeignete Abschirmung. Zur besseren Übersicht wurden die drei oberen Signale mit Offset eingezeichnet.

Durchführung Es werden nun zwei Messreihen bei unterschiedlichen Frequenzen des Sinussignals durchgeführt ($\omega_1 = 1 \text{ kHz}$ und $\omega_2 = 10 \text{ kHz}$). Die Amplitude des Wechselsignals wird mit dem Oszilloskop gemessen und beträgt dort $A = 125 \text{ mV}$. Wenn man von einem Verstärkungsfaktor von ungefähr 100 ausgeht, liegt an der Pockelszelle also eine Sinusspannung mit der Amplitude $A' = 12.5 \text{ V}$ an. Diesem Sinussignal ist die Gleichspannung U_G überlagert, die so eingestellt wird, dass am Oszilloskop ein symmetrisches Photodiodensignal sichtbar ist. Abbildung 2.6 zeigt diesen Vorgang.

Für beide Frequenzen wurde am Transmissionsmaximum und -minimum die notwendige Gleichspannung für ein symmetrisches Photodiodensignal eingestellt und die Spannung U_G notiert.

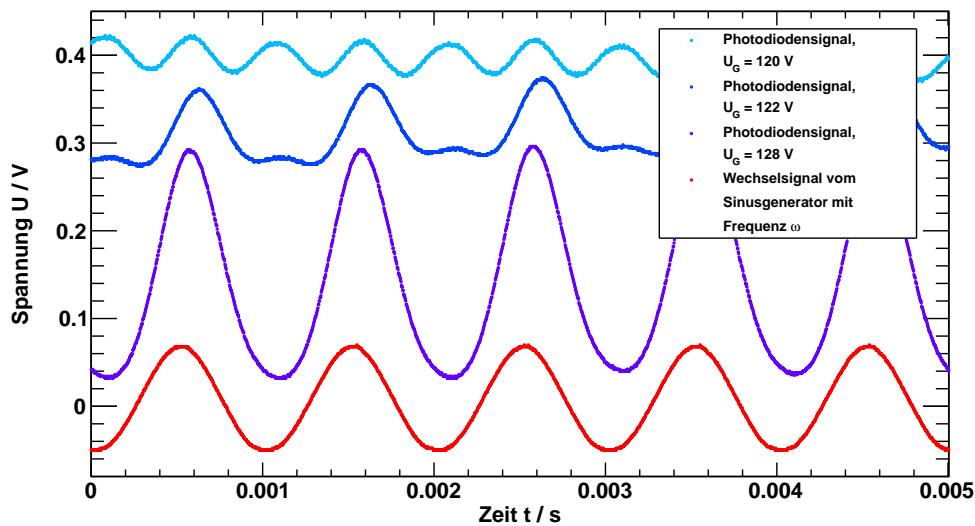


Abbildung 2.6: Photodiodensignale, die durch Änderung der Gleichspannung U_G bei der Suche nach dem periodenverdoppelten Signal auftreten. Eine Abweichung um 2 V vom optimalen Wert bei $U_G = 120 \text{ V}$ ist bereits deutlich an der asymmetrischen Signalform sichtbar.

2.4. Messergebnisse und Auswertung

2.4.1. Sägezahnmethode

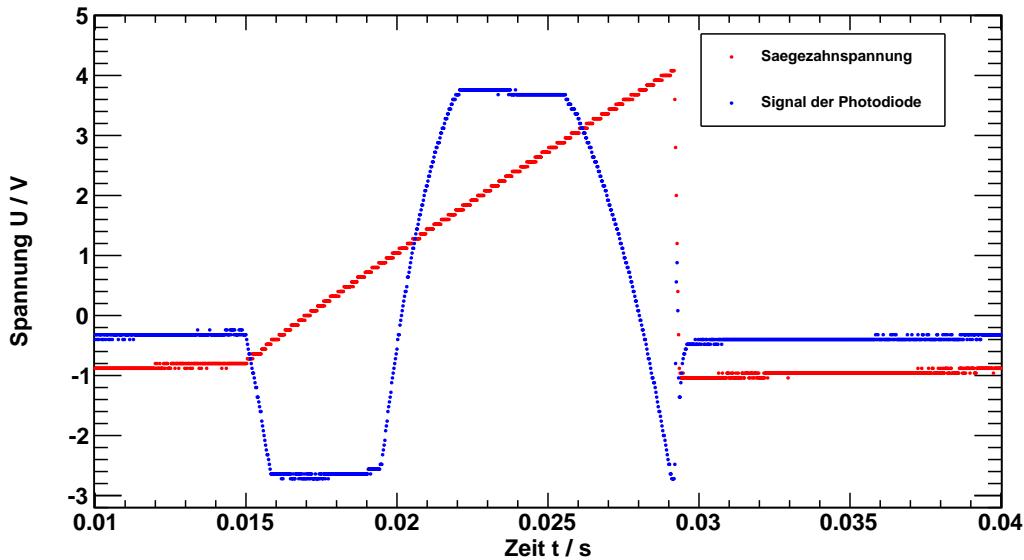


Abbildung 2.7: Deformiertes Photodiodensignal (blau) bei Einstellung der Polarisationsachse des Analysators in Richtung höchster Transmission der Pockelszelle. An der Zelle liegt ein Sägezahnsignal (rot) an.

Abbildung 2.7 zeigt das Photodiodensignal, wenn der Analysator so eingestellt wird, wie in der Versuchsanleitung beschrieben, so dass die Amplitude des Photodiodensignals maximiert wird. Diese Einstellung ist zum Ablesen von Maximum und Minimum des Signals nicht geeignet. [Abbildung 2.8](#), [Abbildung 2.9](#) und [Abbildung 2.10](#) zeigen Messungen mit niedrigerer Amplitude, die für die Auswertung verwendet wurden.

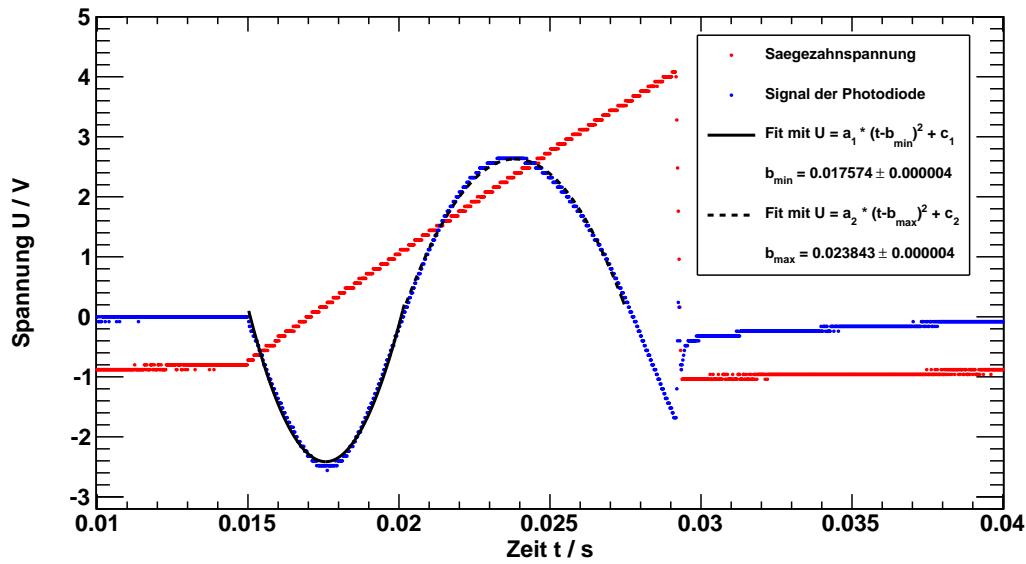


Abbildung 2.8: 1. Messung der Transmission durch den Analysator nach der Pockelszelle mit höchster Signalamplitude an der Photodiode (blau). An der Zelle liegt ein Sägezahnsignal (rot) an.

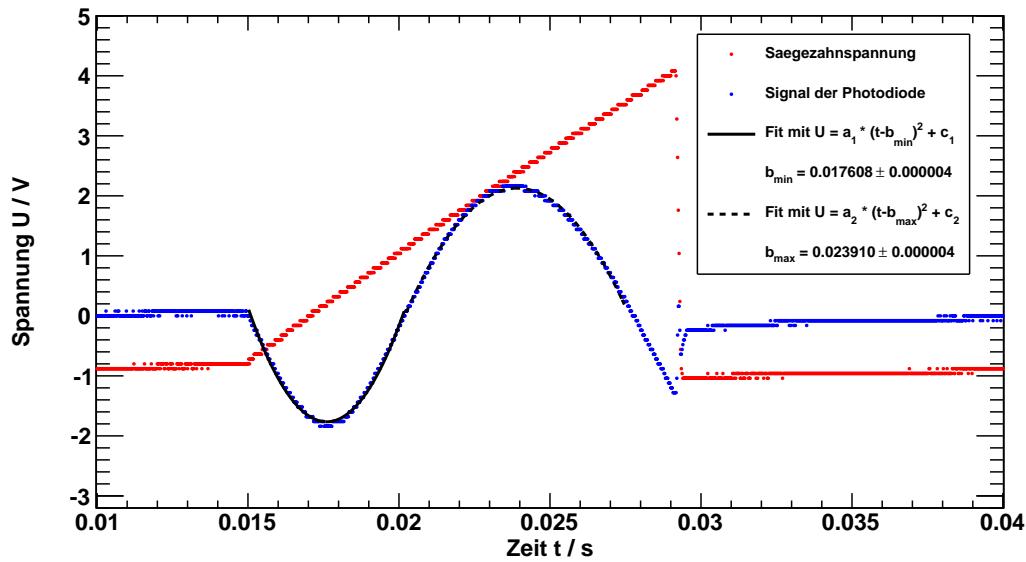


Abbildung 2.9: 2. Messung der Transmission durch den Analysator nach der Pockelszelle mit mittlerer Signalamplitude an der Photodiode (blau). An der Zelle liegt ein Sägezahnsignal (rot) an.

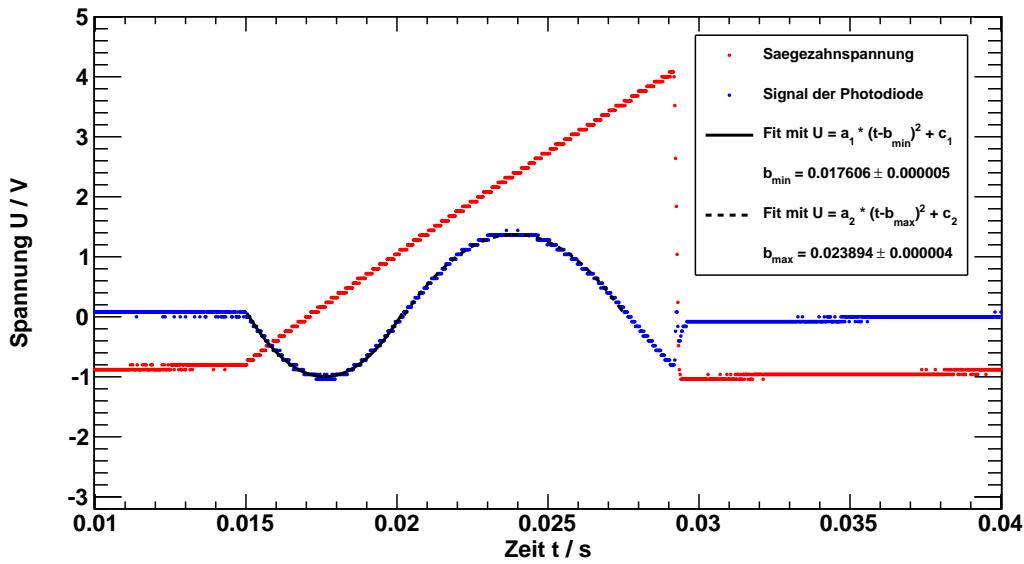


Abbildung 2.10: 3. Messung der Transmission durch den Analysator nach der Pockelszelle mit geringster Signalamplitude an der Photodiode (blau). An der Zelle liegt ein Sägezahnsignal (rot) an.

In [Tabelle 2.1](#) sind die Positionen von Maximum und Minimum für die drei verschiedenen Messungen aufgeführt. Diese Positionen wurden durch Fits von Parabeln (mit den Fitparametern a , b und c) an die Messdaten gewonnen:

$$U = a \cdot (t - b)^2 + c \quad (2.18)$$

Minimum und Maximum wurden hier mit separaten Parabeln gefittet, weil das Signal offensichtlich kein Sinus ist und ein sinusförmiger Fit keine gute Beschreibung liefert. Der Parameter b ist die Position des Extremums auf der x-Achse, die für die weitere Auswertung relevant ist.

Aus der Position des Maximums b_{\max} und der des Minimums b_{\min} wurde die Differenz Δb gebildet:

$$\Delta b = b_{\max} - b_{\min}, \quad s_{\Delta b} = \sqrt{s_{b_{\max}}^2 + s_{b_{\min}}^2} \quad (2.19)$$

Auch die drei Werte für Δb sind in [Tabelle 2.1](#) aufgeführt.

Tabelle 2.1: Position von Maximum und Minimum auf der x-Achse und Positionsabweichung für die drei Messungen.

Messung	b_{\min} / s	$s_{b_{\min}}$ / s	b_{\max} / s	$s_{b_{\max}}$ / s	Δb / s	$s_{\Delta b}$ / s
1	0.017574	0.000004	0.023843	0.000004	0.006269	0.000006
2	0.017608	0.000004	0.023910	0.000004	0.006302	0.000005
3	0.017606	0.000005	0.023894	0.000004	0.006288	0.000006

Im Experiment wurde die Amplitudenabhängigkeit der Messwerte untersucht. Es ist kein signifikanter Trend erkennbar; die Werte für Δb stimmen im 3σ -Intervall überein. Dies entspricht unserer Erwartung, da es keinen Grund für eine Amplitudenabhängigkeit der Position der Extrema gibt. Deshalb erscheint es gerechtfertigt, den gewichteten Mittelwert $\overline{\Delta b}$ aus den drei Werten zu bilden. Man erhält

$$\overline{\Delta b} = (0.006287 \pm 0.000003) \text{ s} \quad (2.20)$$

Die Steigung der Sägezahnfunktion (rote Kurve auf den Abbildungen) wird mit einem Steigungsdiagramm abgeschätzt. Die Positionen der Ecken des Dreiecks (Spannung am Einsatzpunkt U_E , Spannung am Maximum U_M , Einsatzzeitpunkt t_E und Maximumszeitpunkt t_M) befinden sich in [Tabelle 2.2](#).

Tabelle 2.2: Messwerte zur Berechnung der Steigung der Sägezahnfunktion.

	U / V	s_U / V	t / s	s_t / s
Einsatzpunkt	-0.8	0.1	0.0149	0.0002
Maximum	4.1	0.1	0.0291	0.0002

Man erhält mit den Messwerten für die Steigung der Sägezahnfunktion m_s :

$$m_s = \frac{U_M - U_E}{t_M - t_E} = 345 \frac{\text{V}}{\text{s}} \quad (2.21)$$

Für den Fehler darauf folgt mit dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$s_{m_s} = \sqrt{\frac{(t_E - t_M)^2 (s_{U_E}^2 + s_{U_M}^2) + (U_E - U_M)^2 (s_{t_E}^2 + s_{t_M}^2)}{(t_E - t_M)^4}} = 12 \frac{\text{V}}{\text{s}} \quad (2.22)$$

Die Steigung der Spannung, die an der Pockelszelle anliegt, ist allerdings noch ungefähr um den Faktor 100 höher, da das Oszilloskop über einen Spannungsteiler mit der

Pockelszelle verbunden ist. Der genaue Dämpfungsfaktor der Schaltung ist aber nicht bekannt und kann nur grob abgeschätzt werden.

Wir gehen davon aus, dass während des Sägezahnimpulses die Spannung an der Zelle von $U_0 = 0 \text{ V}$ auf $U_1 = 500 \text{ V}$ steigt, so wie es im Aufbau vorgesehen ist. Da wir diese Annahme aber nicht überprüfen können, die Sägezahnspannung eine leichte Drift zeigt, wo sie konstant 0 sein sollte und außerdem das nicht-sinusförmige Signal an der Photodiode dafür spricht, dass der Aufbau nicht optimal arbeitet (es ist zum Beispiel an den Einfluss von Kapazitäten zu denken, die das Sägezahnsignal in der Zelle verformen können), nehmen wir auf beide Werte einen hohen Fehler von $s_{U_{0,1}} = 50 \text{ V}$ an. Man erhält dann für den Verstärkungsfaktor A

$$A = \frac{U_1 - U_0}{U_M - U_E} = 102 \quad (2.23)$$

und für seinen Fehler

$$s_A = \sqrt{\frac{(U_0 - U_1)^2 \cdot (s_{U_E}^2 + s_{U_M}^2) + (U_E - U_M)^2 \cdot (s_{U_0}^2 + s_{U_1}^2)}{(U_E - U_M)^4}} = 15 \quad (2.24)$$

Nun kann die Halbwelldruckspannung $U_{\lambda/2}$ berechnet werden:

$$U_{\lambda/2} = \overline{\Delta b} \cdot m_s \cdot A = 221 \text{ V} \quad (2.25)$$

Für den Fehler $s_{U_{\lambda/2}}$ gilt

$$s_{U_{\lambda/2}} = U_{\lambda/2} \cdot \sqrt{\left(\frac{s_{\overline{\Delta b}}}{\overline{\Delta b}}\right)^2 + \left(\frac{s_{m_s}}{m_s}\right)^2 + \left(\frac{s_A}{A}\right)^2} = 33 \text{ V} \quad (2.26)$$

Aufgrund des ungenauen Messverfahrens hat das Ergebnis für die Halbwelldruckspannung

$$U_{\lambda/2} = (22 \pm 3) \cdot 10^1 \text{ V} \quad (2.27)$$

einen relativ großen Fehler.

Der *elektrooptische Koeffizient* r_{41} lässt sich nun mit [Gleichung 2.14](#) und den Werten aus [\[3\]](#) bestimmen:

$$r_{41} = (25 \pm 4) \frac{\text{pm}}{\text{V}} \quad (2.28)$$

Der Herstellerwert bei 21°C

$$r_{41}^{\text{Herst.}} = 23.4 \frac{\text{pm}}{\text{V}} \quad (2.29)$$

liegt innerhalb des $1-\sigma$ -Intervalls unseres Messwerts, was jedoch auf den großen Fehler zurückzuführen ist.

Im nächsten Abschnitt wird ein genaueres Messverfahren angewendet.

2.4.2. Modulierte Gleichspannung

Von jedem Spannungswertepaar wird die Differenz berechnet. Der Fehler auf eine Einzelmessung beträgt $s_U = 1 \text{ V}$.³

$$U = U_{\max} - U_{\min}, \quad s_U = \sqrt{2} \cdot s_U \quad (2.30)$$

Es wird dann über alle Spannungen (Anzahl $N = 6$) gemittelt.

$$\bar{U} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_i, \quad s_{\bar{U}} = \frac{s_U}{\sqrt{N}} \quad (2.31)$$

Mit der Spannung \bar{U} als Halbwelldenspannung, [Gleichung 2.14](#) und den Werten aus [3] wird nun der *elektrooptische Koeffizient* für beide Frequenzen bestimmt:

$$\begin{aligned} r_{41, 1 \text{ kHz}} &= (22.54 \pm 0.05) \frac{\text{pm}}{\text{V}} \\ r_{41, 10 \text{ kHz}} &= (22.50 \pm 0.05) \frac{\text{pm}}{\text{V}} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Wie erwartet, ist der *elektrooptische Koeffizient* nicht von der Frequenz der verwendeten Spannung abhängig. Aus den zwei Werten wird nun noch ein gewichteter Mittelwert gebildet⁴:

$$r_{41} = (22.52 \pm 0.04) \frac{\text{pm}}{\text{V}} \quad (2.33)$$

Dieser Wert ist nun sehr viel genauer als der mit der Sägezahnmethode bestimmte Wert und stimmt nicht mehr mit dem Wert des Herstellers bei 21°C überein.

$$r_{41}^{\text{Herst.}} = 23.4 \frac{\text{pm}}{\text{V}} \quad (2.34)$$

Dies könnte daran liegen, dass der *elektrooptische Koeffizient* temperaturabhängig ist.

3. Faraday-Effekt

3.1. Physikalische Grundlagen

Die Gleichungen und Erklärungen dieses Kapitels beruhen auf [2].

3.1.1. Faraday-Effekt

Der *Faraday-Effekt* tritt auf, wenn linear polarisiertes Licht durch ein isotropes Medium, welches mit einem Magnetfeld in Ausbreitungsrichtung des Lichts durchflossen ist, propagiert. Das Magnetfeld verursacht eine zirkulare Doppelbrechung, das heißt links- und

³Geschätzter Ablese- / Einstellfehler.

⁴Es wird hier mit den genauen Werten gerechnet, nicht den gerundeten.

rechtsdrehende elektromagnetische Wellen haben einen unterschiedlichen Brechungsin-dex.

Da linear polarisiertes Licht als Überlagerung von zwei, in entgegengesetzter Richtung zirkular polarisierten elektromagnetischen Wellen beschrieben werden kann, eilt eine Welle der anderen voraus und das Licht, welches das Medium durchläuft, wird um einen Winkel α gedreht. Die Stärke der Drehung hängt proportional von der magnetischen Feldstärke H der Spule ab, welche das Magnetfeld erzeugt. Dies bedeutet, dass bei Umkehrung des Spulenstroms, was einer Umpolung entspricht, das Licht in entgegengesetzte Richtung gedreht wird. Die Drehung ist also nicht reversibel, spiegelt man das Licht und lässt es das Medium in anderer Richtung durchqueren, so verdoppelt sich die Drehung⁵. Weiterhin hängt der Drehwinkel α proportional von der Länge l des Mediums ab. Es gilt also:

$$\alpha = V \cdot l \cdot H \quad (3.1)$$

wobei V eine Materialkonstante, auch *Verdet-Konstante* genannt, ist.

3.1.2. Bestimmung der magnetischen Feldstärke einer Zylinderspule

Gesetz von Biot-Savart Die magnetische Flussdichte $d\vec{B}$ am Ort \vec{r} eines mit dem Strom I durchflossenen Leiters mit Länge $d\vec{l}$ am Ort \vec{r}' lässt sich mit Hilfe des *Biot-Savart*-Gesetzes bestimmen:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot d\vec{l} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3.2)$$

Kreisförmige Leiterschleife Es wird zuerst eine kreisförmige Leiterschleife parallel zu der x - y -Ebene mit dem Radius R betrachtet ([Abbildung 3.1](#)) [1].

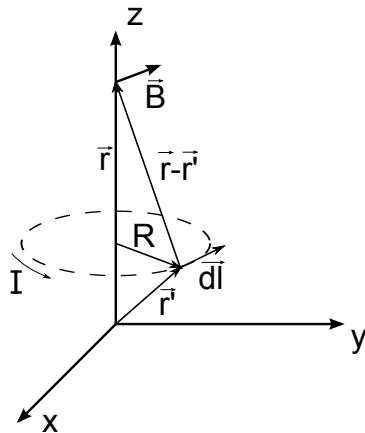


Abbildung 3.1: Kreisförmige Leiterschleife mit Radius R , parallel zur x - y -Ebene.

⁵Im Gegensatz zu optisch aktiven Substanzen, die eine ausgezeichnete Drehrichtung haben und die erste Drehung rückgängig machen.

Da die Komponente $dB_{\perp} = dB \cdot \sin \alpha$ senkrecht zur z -Achse bei der Integration über dl verschwindet (Rotationssymmetrie), bleibt es nur die parallele Komponente $dB_{\parallel} = dB \cdot \cos \alpha$ zu betrachten. Wie in [Abbildung 3.2](#) zu erkennen ist, gilt

$$\left| d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') \right| = |\vec{r} - \vec{r}'| \cdot dl \cdot \underbrace{\sin \varphi}_{=1} = |\vec{r} - \vec{r}'| \cdot dl = \frac{R}{\cos \alpha} \cdot dl \quad (3.3)$$

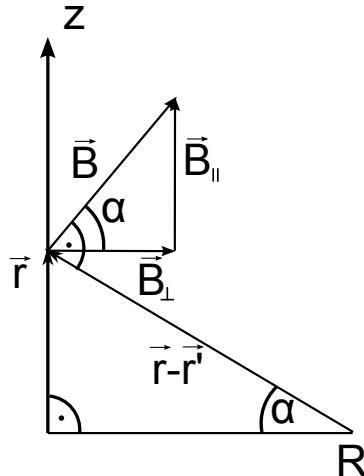


Abbildung 3.2: Komponenten des \vec{B} -Vektors und Dreieck zwischen R , $\vec{r} - \vec{r}'$ und \vec{r} .

Es folgt für B_{\parallel} :

$$\begin{aligned} B_{\parallel} &= \int dB_{\parallel} = \int dB \cdot \cos \alpha \\ &\stackrel{(3.1)}{=} \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \oint \frac{\left| d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') \right|}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \cos \alpha \\ &\stackrel{(3.3)}{=} \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{R}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \oint ds = \frac{\mu_0 \cdot I}{2} \cdot \frac{R^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Mit $|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = R^2 + (z - z')^2$ folgt damit für die magnetische Flussdichte $\vec{B}_K(z, z')$

$$\vec{B}_K(z, z') = B_{\parallel} \cdot \hat{e}_z \stackrel{(3.4)}{=} \frac{\mu_0 \cdot I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \cdot \hat{e}_z \quad (3.5)$$

Die magnetische Feldstärke H_K ist also

$$H_K(z, z') = \frac{B_K(z, z')}{\mu_0} = \frac{I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \quad (3.6)$$

Reale Zylinderspule Eine reale Zylinderspule der Länge L besitzt einen Innen- und Außenradius (r_i und r_a). Weiterhin wird angenommen, dass die Windungen N homogen gewickelt sind. Daher gilt für die differentielle Windungszahl dN in einem Rechteck mit Seiten dz' und dR :

$$dN = \frac{N}{L} \cdot dz' \cdot \frac{dR}{r_a - r_i} \quad (3.7)$$

Für das Magnetfeld $H(z)$ der realen Spule folgt nun [2]:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{N}{L} \cdot \int_{r_i}^{r_a} \frac{dR}{r_a - r_i} \cdot \int_0^L B_K(z, z') dz' \\ &= \frac{N \cdot I}{2L(r_a - r_i)} \cdot \left[(L - z) \cdot \ln \left(\frac{r_a + \sqrt{(L-z)^2 + r_a^2}}{r_i + \sqrt{(L-z)^2 + r_i^2}} \right) + z \cdot \ln \left(\frac{r_a + \sqrt{z^2 + r_a^2}}{r_i + \sqrt{z^2 + r_i^2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.1.3. Bestimmung des Drehwinkels in Abhängigkeit des Stroms

Das Licht wird nun nach Gleichung 3.1 pro Wegstrecke dz um folgenden Winkel $d\alpha$ gedreht:

$$d\alpha = V \cdot H(z) \cdot dz \quad (3.9)$$

Der gesamte Winkel α berechnet sich mit den gegebenen Werten [3] für diesen Versuch zu:⁶

$$\alpha = V \int_{\frac{L-l}{2}}^{\frac{L+l}{2}} H(z) dz = 2554.85 \cdot V \cdot I \quad (3.10)$$

⁶Mit Mathematica berechnet.

3.2. Versuchsaufbau

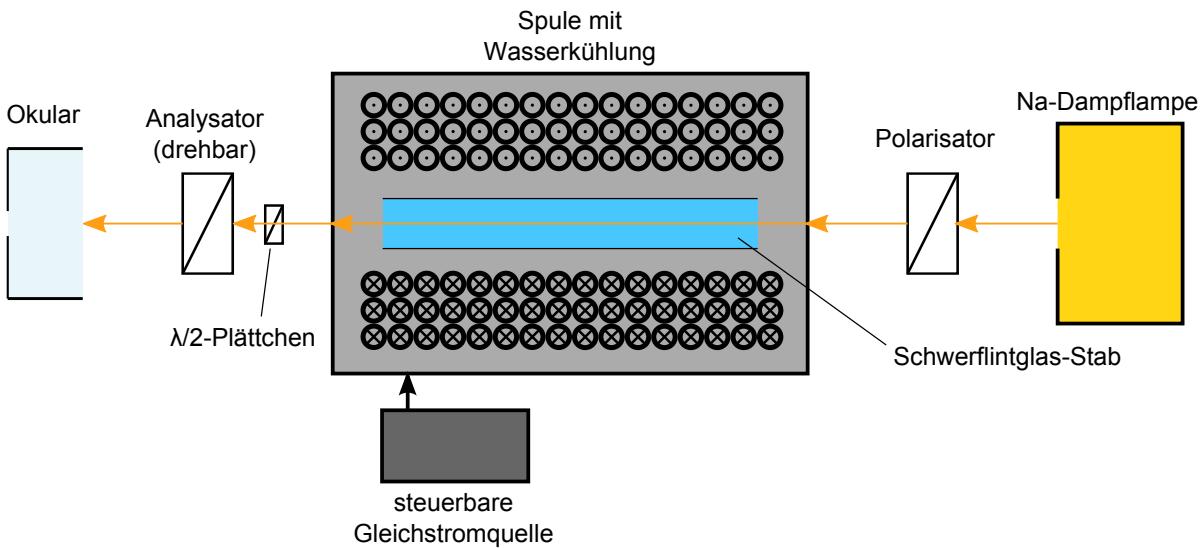


Abbildung 3.3: Aufbau zur Messung der Polarisationsdrehung von linear polarisiertem Licht in einem Scherzer-Glas-Stab im Magnetfeld einer Spule.

Abbildung 3.3 zeigt den Aufbau, der zur Messung des Faraday-Effekts verwendet wird. Eine Natrium dampflampe liefert monochromatisches Licht ($\lambda_{\text{Na}} \approx 589 \text{ nm}$), das mit einem Polarisator linear polarisiert wird. Das polarisierte Licht durchläuft dann einen Stab aus Scherzer-Glas, der sich in einer Spule befindet. Die Spule ist wassergekühlt und wird durch ein steuerbares Netzteil mit Strom versorgt. Nach dem Scherzer-Glas wird die Polarisationsrichtung eines Teils der Strahlung von einem $\lambda/2$ -Plättchen um einen kleinen Winkel gedreht. Danach fällt der ganze Strahl durch einen drehbaren Analysator. Diese Konfiguration wird als Halbschattenpolarimeter bezeichnet: Wenn durch Drehung des Analysators die beiden Teile des Strahls auf gleiche Helligkeit gebracht werden, zeigt eine Skala den Winkel, um den das Licht im Polarimeter in seiner Polarisierung gedreht wird.

3.3. Versuchsdurchführung

Am Aufbau für den Faraday-Effekt wird nur eine Messreihe durchgeführt: Die Drehung der Polarisationsrichtung wird in Abhängigkeit des Spulenstroms I (Variation von -5 A bis 5 A in Schritten von 0.5 A) untersucht. Jeder Messpunkt wird insgesamt vier mal aufgenommen. Um eine Drift der Anlage auszuschließen, werden zuerst die ganzzahligen Messwerte aufgenommen und anschließend die Zwischenwerte. Nach der Einstellung des Stroms für jeden Messpunkt wird der Analysator des Halbschattenpolarimeters so eingestellt, dass die äußeren Strahlteile genauso hell sind wie der innere Strahlteil. Es gibt dafür eine helle und eine dunkle Einstellung. Wegen der logarithmischen Empfindlichkeitskurve des menschlichen Auges wird die dunklere Einstellung für die Messung

verwendet, da daraus eine höhere Messgenauigkeit folgt.

3.4. Messergebnisse und Auswertung

3.4.1. Bestimmung der Verdet-Konstante

Für jede Spannung I wurde $N = 4$ mal der entsprechende Winkel α_i gemessen. Der Fehler einer Einzelmessung des Winkels wurde auf

$$s_{\alpha_i} = 0.2^\circ \quad (3.11)$$

geschätzt. Es wird zunächst der Mittelwert der Winkel gebildet:

$$\alpha = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha_i, \quad s_\alpha = \frac{s_{\alpha_i}}{\sqrt{N}} \quad (3.12)$$

Der Fehler auf den Strom wurde auf $s_I = 0.1 \text{ A}$ geschätzt.

Die Spannungen und gemittelten Winkel werden nun mit einer Geraden gefittet:

$$\alpha(I) = a + b \cdot I \quad (3.13)$$

Die Werte und der Fit sind in Abbildung 3.4 dargestellt. Die Kurvenanpassung ergab folgende Werte:

$$\begin{aligned} a &= (-0.28 \pm 0.06)^\circ \\ b &= (2.5769 \pm 0.0199) \frac{^\circ}{\text{A}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

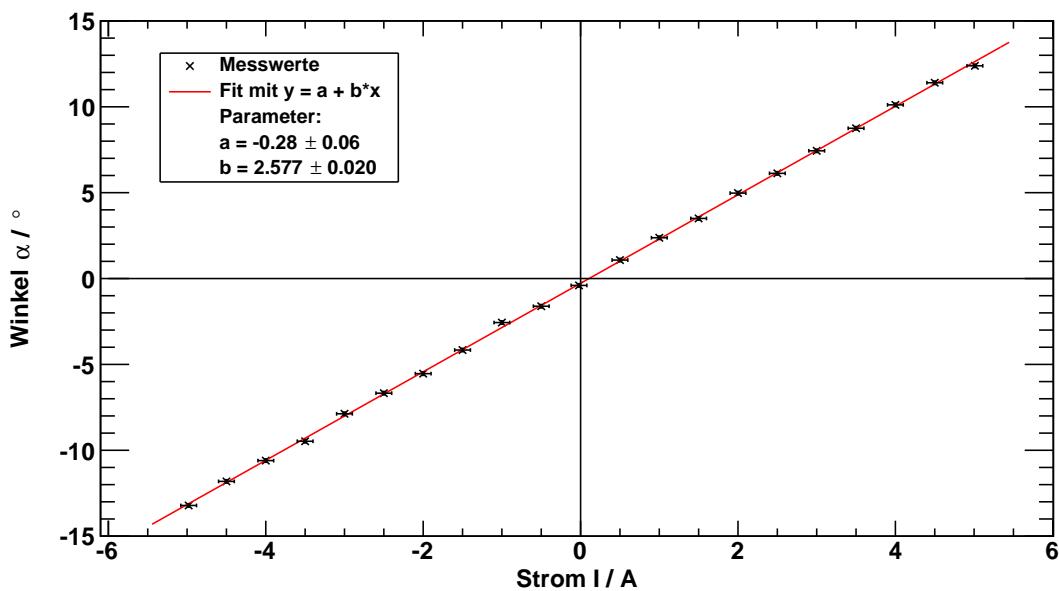


Abbildung 3.4: Winkel α in Abhängigkeit des Stroms I mit Fit einer Geraden.

Mit [Gleichung 3.10](#) wird nun die Verdet-Konstante V berechnet:

$$V = \frac{b}{2556}, \quad s_V = \frac{s_b}{2556} \quad (3.15)$$

$$V = (1.009 \pm 0.008) \cdot 10^{-3} \frac{\circ}{\text{A}} \quad (3.16)$$

Vergleich mit der Herstellerangabe Die Verdet-Konstante rechnet man folgendermaßen in $\frac{\text{min}}{\text{Oe} \cdot \text{cm}}$ um:

$$1 \frac{\circ}{\text{A}} = \frac{60 \cdot 79.58}{100} \frac{\text{min}}{\text{Oe} \cdot \text{cm}} \quad (3.17)$$

Es folgt für den berechneten Wert:

$$V = (0.0482 \pm 0.0004) \frac{\text{min}}{\text{Oe} \cdot \text{cm}} \quad (3.18)$$

Der Hersteller gibt:

$$V^{\text{Herst.}} = 0.05 \frac{\text{min}}{\text{Oe} \cdot \text{cm}} \quad (3.19)$$

als Wert an. Der gemessene Wert stimmt innerhalb des $5 - \sigma$ -Intervalls mit der Herstellerangabe überein, vorausgesetzt dass diese keinen Fehler besitzt. Betrachtet man die Rundung, so kann die Herstellerangabe zwischen $(0.045 \leq 0.05 < 0.055) \frac{\text{min}}{\text{Oe} \cdot \text{cm}}$ liegen. Mit diesem Fehler von $0.005 \frac{\text{min}}{\text{Oe} \cdot \text{cm}}$ würden die beiden Werte innerhalb ihrer Fehler übereinstimmen.

Vergleich mit einer idealen Zylinderspule Hätte man anstelle einer realen Zylinderspule eine ideale Spule ($H^{\text{ideal}} = \frac{N \cdot I}{l}$) angenommen, so berechnet sich der Drehwinkel nach [Gleichung 3.1](#) mit:

$$\alpha = V \cdot N \cdot I \quad \Rightarrow b = V \cdot N \Leftrightarrow V = \frac{b}{N} \quad (3.20)$$

Es ergibt sich nun äquivalent zu [Gleichung 3.15](#) eine Verdet-Konstante von:

$$V^{\text{ideal}} = (0.716 \pm 0.006) \cdot 10^{-3} \frac{\circ}{\text{A}} = (0.0342 \pm 0.0003) \frac{\text{min}}{\text{Oe} \cdot \text{cm}} \quad (3.21)$$

Sie weicht sehr weit von dem Wert der realen Spule und der Herstellerangabe ab, weshalb die Näherung einer idealen Spule nicht gerechtfertigt ist.

Des Weiteren sieht man an [Gleichung 3.20](#), dass die in den Grundlagen (Kapitel 3.1.3) berechnete Konstante $c = 2554.85$ eine effektive Windungsanzahl darstellt, die eine ideale Spule besitzen müsste, um das Licht um den gleichen Winkel zu drehen.

3.4.2. Bestimmung von 2ϵ

Der Winkel α der Stellungen „innen maximal dunkel“ (α_i) und „außen maximal dunkel“ (α_a) wurde jeweils $N = 4$ mal gemessen. Der Fehler einer Einzelmessung wurde auf $s_{\alpha_i} = 2^\circ$ geschätzt. Es wird der Mittelwert gebildet

$$\alpha = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha_i, \quad s_\alpha = \frac{s_{\alpha_i}}{\sqrt{N}} \quad (3.22)$$

und die Differenz der beiden Winkel gebildet:⁷

$$2\epsilon = \alpha_a - \alpha_i, \quad s_{2\epsilon} = \sqrt{s_{\alpha_i}^2 + s_{\alpha_a}^2} = \sqrt{2}s_\alpha \quad (3.23)$$

Man erhält für den Winkel 2ϵ :

$$2\epsilon = (11.1 \pm 1.4)^\circ \quad (3.24)$$

⁷Die Fehler der beiden Winkel sind gleich ($s_{\alpha_a} = s_{\alpha_b}$), weil hier der Messfehler und nicht die Standardabweichung der Messwerte benutzt wurde, da die Standardabweichungen mit dem Fehler s_α übereinstimmen.

4. Literatur

- [1] Demtröder, W. *Experimentalphysik 2, Elektrizität und Optik, 6. Auflage.* Springer Spektrum, 2013.
- [2] Herrmann, B. *Elektrooptischer Effekt und Faraday-Effekt; Zulassungsarbeit.* Freiburg, 1977.
- [3] Wilbois, T. und Köhli, M. *Faraday- und Pockelseffekt.* Institut für Mathematik und Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg im Breisgau, 2012.

A. Anhang

A.1. Messprotokoll

Pockels

Sägezahn

O - zu Code Anplitude

=> Photo diode L Sägezahn

1-5 : 100% Amp

60%

30%

100%

100%

} von vernichtet
Anpl.

=> Auswertung mit Filt

Gleichspannung

Photo 01

Photo 02

V	pos V	neg V
11	118,6	131,6
12	118,8	130,1
13	119,3	137,3
14	119,3	130,1
15	120,4	128,8
Photo 06	122,8	129,2

Photo 02: + 129,5 V

Photo 03: + 128,0 V

~~10kHz~~ 10,012 kHz

N	V_{pos} / V	V_{neg} / V
M 1	122,6	120,2
B 2	122,5	127,1
M 3	122,4	127,2
B 4	122,5	126,8
M 5	122,9	129,0
B 6	122,8	127,9

Sinusgrauer Amplitude 6,85
am OSZI: 125 mV

Gleichstromquelle:

Fehler:

- Ablesefehler (Einstellfelder) 1V
- Winkelkonstante 0,5V
- Eichzelle 3% (Gitarrenteil)

- Licht 01 : Lichtaus, Abgedeckt
 - 02 : Lichtan, Abgedeckt mit Papier und Papier
 - 03 : " nicht abgedeckt mit Papier
 - 04 : ohne OSZI

zurück

1
2
3
4

I/A

M 11°

B 11°

M 21°

B 21°

0	-0,02	0,20	1,00	0,05	0,35
1	1,00	177,70	177,40	177,40	178,00
2	2,00	175,00	175,25	174,85	175,00
3	3,00	172,65	172,40	172,60	172,60
4	4,00 -7,95	170,05	170,00	169,80	169,70
5	5,01 -> 4,9	167,20	167,70	167,55	168,00
-1	-1,00	2,70	2,60	2,60	2,35
-2	-2,00	5,60	5,50	5,55	5,50
-3	-3,00	8,00	7,80	7,70	8,00
-4	-4,00 -7,308	10,50	10,405	10,60	10,35
-5	-4,98 -7,4,9	13,20	13,30	13,10	13,25
-4,5	-4,50 -7,4,6	11,90	11,95	11,45	11,05
-3,5	-3,50	9,65	9,70	9,25	9,30
-2,5	-2,50	6,90	6,30	6,90	6,60
-1,5	-1,50	4,05	4,40	3,90	4,30
-0,5	-0,50	1,90	1,45	1,60	1,50
0,5	0,50	179,00	178,80	179,10	178,80
1,5	1,50	176,80	176,35	176,35	176,50
2,5	2,50	174,00	173,85	173,75	173,90
3,5	3,50 -7,3,48	171,30	171,15	171,15	171,40
4,5	4,150 -7,4,48	168,50	168,45	168,65	168,80

~~2/fz~~
~~auß. hell~~
~~innen hell~~

~~168,00~~

~~168,00~~

Fehler f.: Eich Fehl. 3%

~~168,00~~

~~168,00~~

Drift (Close Water): bis 0,1A
Nicht 0,07 A

Fehler max: 0,2° (Abstand + Justierung)

E-Messung

M1

137

142

132

innen mit dunkel 174,5 173,5 143,5 172,20

außen mit dunkel 3,0 4,90 4,5 5,6

Fehler: 2°

Förk WP

25.09.14