模拟 4.

2022 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

1 单项选择题

1. 设集合 $A=\{x|x<2或x>3\},B=\left\{x|\mathrm{e}^{x-1}-1<0\right\}$，则 $A\bigcap B=$

A. $(-\infty,1)$　　B. $(-2,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(3,\infty)$

2. 复平面内的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 对应的复数为 z，点 Z 位于第二象限. 已知 z 的虚部为 2，且 $|z|=5$，则 $\frac{1}{z}=$

A. $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}$　　B. $-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i}$　　C. $\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i}$　　D. $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}$

3. 设 a,b,c,d 为实数，则“$a>b,c>d$”是“$a+c>b+d$”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 某学校组建了演讲，舞蹈、航模、合唱、机器人五个社团，全校 3000 名学生每人都参加且只参加其中一个社团，校团委从这 3000 名学生中随机选取部分学生进行调查，并将调查结果绘制了如下不完整的两个统计图：

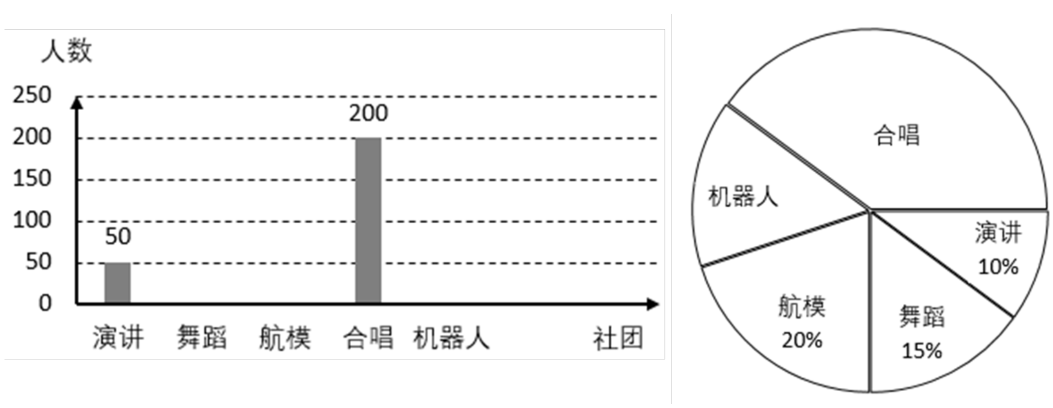

图 1: **第 4 题图**

则选取的学生中参加机器人社团的学生数为

A. 50　　B. 75　　C. 100　　D. 125

5. 已知 A,B 是圆 $O: x^2+y^2=1$ 上的两个动点，$|AB|=1$，C 为平面中一点且满足 $\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}$，$M$ 为线段 AB 的中点，则 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OM}=$

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{3}{2}$

6. 北京 2022 年冬奥会吉祥物“冰墩墩”和冬残奥会吉祥物“雪容融”一亮相，好评不断，这是一次中国文化与奥林匹克精神的完美结合，是一次现代设计理念的传承与突破. 为了宣传 2022 年北京冬奥会和冬残奥会，某学校决定派小明和小李等 5 名志愿者将两个吉祥物安装在学校的体育广场，若小明和小李必须安装同一个吉祥物，且每个吉祥物都至少由两名志愿者安装，则不同的安装方案种数为

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

7. $\left(x+\frac{a}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中各项系数的和为 2，则该展开式中常数项为

A. -40　　B. -20　　C. 20　　D. 40

8.《中国共产党党旗党徽制作和使用的若干规定》指出，中国共产党党旗为旗面缀有金黄色党徽图案的红旗，通用规格有五种. 这五种规格党旗的长 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5(单位：cm) 成等差数列，对应的宽为 b_1,b_2,b_3,b_4,b_5(单位: cm), 且满足 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{b_n}{b_{n-1}}(n=2,3,4,5)$. 已知 $a_1=288, a_5=96, b_1=192$，则 $b_3=$

A. 64　　B. 96　　C. 128　　D. 160

9. 3 月 14 日是国际圆周率日 (π Day). 历史上，求圆周率 π 的方法有多种，与中国传统数学中的“割圆术”相似. 数学家阿尔 · 卡西的方法是：当正整数 n 充分大时，计算单位圆的内接正 $6n$ 边形的周长和外切正 $6n$ 边形 (各边均与圆相切的正 $6n$ 边形) 的周长，将它们的算术平均数作为 2π 的近似值. 按照阿尔 · 卡西的方法，π 的近似值的表达式是

A. $3n\left(\sin\frac{30^\circ}{n}+\tan\frac{30^\circ}{n}\right)$　　B. $6n\left(\sin\frac{30^\circ}{n}+\tan\frac{30^\circ}{n}\right)$

C. $3n\left(\sin\frac{60^\circ}{n}+\tan\frac{60^\circ}{n}\right)$　　D. $6n\left(\sin\frac{60^\circ}{n}+\tan\frac{60^\circ}{n}\right)$

10. 高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的美誉. 用其名字命名的“高斯函数”如下：设 x 为实数，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则称 $y=[x]$ 为高斯函数，也称取整函数. 例如：$[-3.7]=-4, [2.3]=2$. 已知 $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}-\frac{1}{2}$，则函数 $y=[f(x)]$ 的值域为

A. $\{0\}$　　B. $\{-1,0\}$　　C. $\{-2,-1,0\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

11. 如图 2左图，双曲线的光学性质为：从双曲线右焦点发出的光线经双曲线镜面反射，反射光线的反向延长线经过左焦点. 我国首先研制成功的“双曲线新闻灯”，就是利用了双曲线的这个光学性质. 某“双曲线灯”的轴截面是双曲线一部分，如图 2右图，其方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$F_1,F_2$ 为其左、右焦点，若从右焦点 F_2 发出的光线经双曲线上的点 A 和点 B 反射后，满足 $\angle BAD=\frac{\pi}{2}, \tan\angle ABC=-\frac{3}{4}$，则该双曲线的离心率为

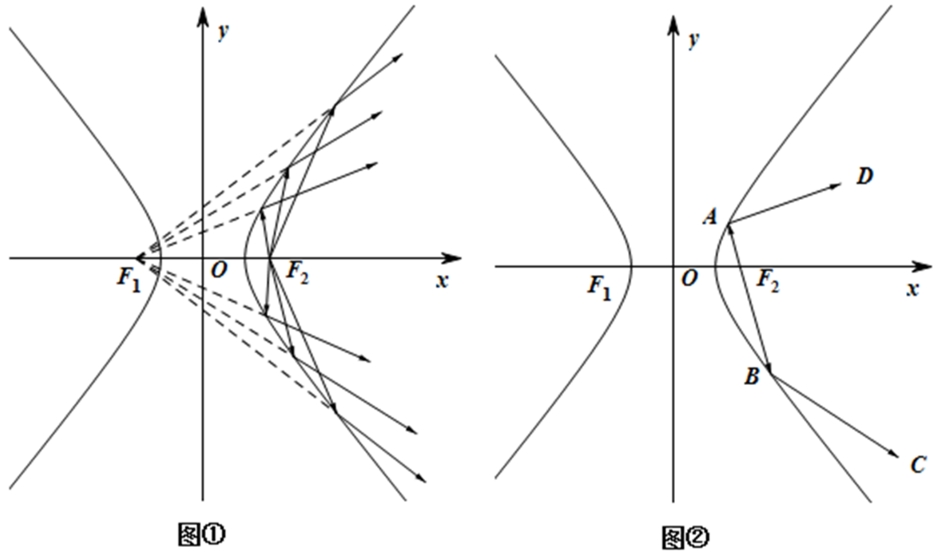

图 2: **第 11 题图**

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　　　B. $\sqrt{5}$　　　　C. $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　　　D. $\sqrt{10}$

12. 为弘扬中华民族优秀传统文化，某学校组织了《诵经典，获新知》的演讲比赛，本次比赛的冠军奖杯由一个铜球和一个托盘组成，如图 3，已知铜球的体积为 $\dfrac{4\pi}{3}$，托盘由边长为 4 的正三角形铜片沿各边中点的连线垂直向上折叠而成. 则铜球面上一点离托盘底面 DEF 的距离的最小值为

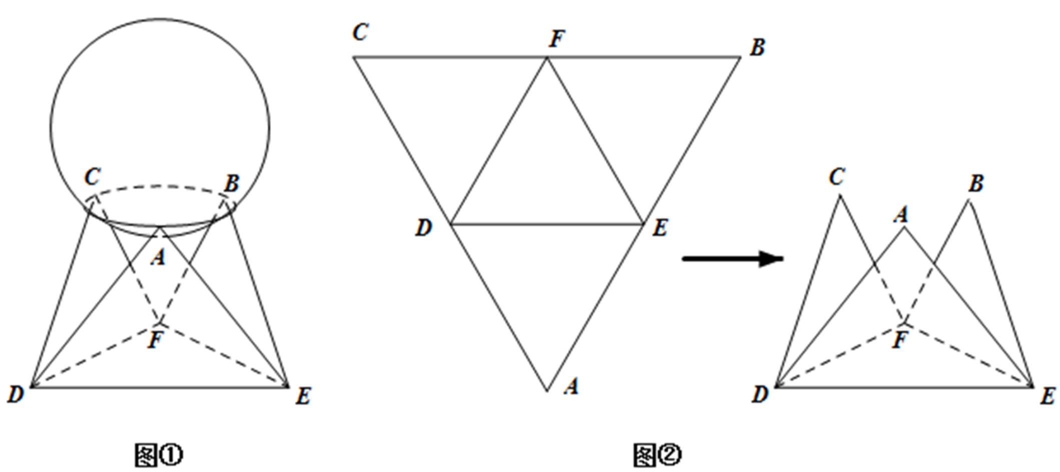

图 3: **第 12 题图**

A. $\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　　　B. $\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}-1$　　　　C. $\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　　　D. $\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}-1$

2 填空题

13. 函数 $y=e^x$ 和 $y=5^{x+1}$ 的交点的横坐标为__▲__.

14. 曲线 $y=\ln x-\dfrac{2}{x}$ 在 $x=1$ 处的切线的倾斜角为 α，则 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=$__▲__.

15. 蟋蟀鸣叫可以说是大自然优美、和谐的音乐，蟋蟀鸣叫的频率 y (每分钟鸣叫的次数) 与气温 x (单位：℃) 存在着较强的线性相关关系. 某地研究人员根据当地的气温和蟋蟀鸣叫的频率得到了如下数据：

x(℃)	21	22	23	24	25	26	27
y(次数/分钟)	24	28	31	39	43	47	54

利用上表中的数据求得回归直线方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，若利用该方程知，当该地的气温为 30℃ 时，蟋蟀每分钟鸣叫次数的预报值为 68，则 $\hat{b}$ 的值为__▲__.

16. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$BC=4$，$\angle B=2\angle D$，$\angle A=\dfrac{\pi}{12}$，则 $\triangle ACD$ 面积的最大值为__▲__.

3 解答题

3.1 必做题

17. (本题满分 12 分) 在①$\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{a_{n+1}}{2}$，②$a_{n+1}a_n=2S_n$，③$a_n^2+a_n=S_n$ 这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解答该问题.
已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1$，并满足___▲___.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(II) 若 $b_n=(a_n+1)\cdot 2^{a_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

注：如果选择多个条件分别解答，则按第一个解答计分.

18. (本题满分 12 分) 新冠肺炎疫情爆发初期，党中央、国务院高度重视新冠病毒核酸检测工作，中央应对新型冠状病毒感染肺炎疫情工作领导小组会议作出部署，要求尽力扩大核酸检测范围，着力提升检测能力. 据统计发现，疑似病例核酸检测呈阳性的概率为 $p(0<p<1)$. 现有 4 例疑似病例，分别对其取样、检测，既可以逐个化验，也可以将若干个样本混合在一起化验，混合样本中只要有病毒，则化验结果呈阳性. 若混合样本呈阳性，则需将该组中备用的样本再逐个化验；若混合样本呈阴性，则判定该组各个样本均为阴性，无需再化验. 现有以下三种方案：
方案一：4 个样本逐个化验；
方案二：4 个样本混合在一起化验；
方案三：4 个样本平均分为两组，分别混合在一起化验.
在新冠肺炎疫情爆发初期，由于检测能力不足，若化验次数的期望值越小，则称方案越“优”.

(I) 若 $p=\frac{1}{3}$，按方案一，求 4 例疑似病例中恰有 2 例呈阳性的概率.

(II) 若 $p=\frac{1}{10}$，现将该 4 例疑似病例样本进行化验，请通过计算说明以上三个方案中哪个是最“优”的.

19. (本题满分 12 分) 如图 4，四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，$AB//CD$，$PD\perp AD, AB=PB=2PD, PD=AD=CD$.

(I) 证明：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$；

(II) 过 PD 的平面交 AB 于点 E. 若平面 PDE 把四棱锥 $P-ABCD$ 分成体积相等的两部分，求平面 PAD 与平面 PCE 所成锐二面角的余弦值.

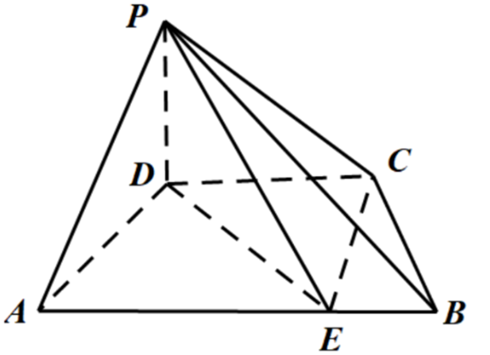

图 4: **第 19 题图**

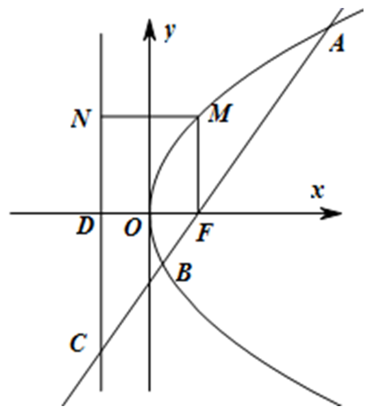

图 5: **第 20 题图**

20. (本题满分 12 分) 如图 5, 抛物线 $E: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，四边形 $DFMN$ 为正方形，点 M 在抛物线 E 上，过焦点 F 的直线 l 交抛物线 E 于 A, B 两点，交直线 ND 于点 C.

(I) 若 B 为线段 AC 的中点，求直线 l 的斜率；

(II) 若正方形 $DFMN$ 的边长为 1，直线 MA, MB, MC 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3，问是否存在实数 λ，使得 $k_1+k_2=\lambda k_3$? 若存在，求出 λ；若不存在，请说明理由.

21. (本题满分 12 分) 已知函数 $f(x)=\frac{a}{x}-\frac{x}{2}+\ln x$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

(II) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2，证明：$f(x_1)+f(x_2)<e^{2a}-2$.

3.2 选做题

22. [**选修 4-4：极坐标与参数方程**](本题满分 10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=a+\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$ (t 为参数)，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=\lambda \\ y=\sqrt{3}\lambda \end{cases}$ (λ 为参数). 以坐标原点为极点，x 轴所在正半轴为极轴建立极坐标系，设 l 与 C 交于 P, Q 两点.

(I) 求 l 与 C 的极坐标方程.

(II) 求 $|OP|^2+|OP|^2$ 的取值范围.

23. [**选修** 4-5：**不等式选讲**](本题满分 10 分) 已知函数 $f(x)=|2x+a|+|2x-1|$.

(I) 若 $f\left(\frac{1}{2}\right)+f(-1)\geqslant 8$, 求实数 a 的取值范围.

(II) 若对任意的 $b\in(1,+\infty)$，总存在 $x_0\in\mathbf{R}$ 使得 $f(x_0)\leqslant b+\dfrac{1}{b-1}+1$，求实数 a 的取值范围.