2022 年新高考模拟 2

参考答案及参考评分标准

2022 年 1 月 21 日

上一期中发现的错误：第 2 题的**解答**，$|z-(a+b\mathrm{i})|$ 代表的是复数 z 到点 (a,b) 的距离. 第 21 题注记 (2) 中，切线的方程应该是 $\dfrac{1\cdot x}{4}+\dfrac{\frac{3}{2}\cdot x}{3}=1\Rightarrow x+2y=4$.

1　单项选择题

解答 1 B.

解答 2 D.

解答 3 B. 因为 $f(x)=a^x-2^x(a\neq 2)$ 为奇函数, 所以 $f(x)+f(-x)=0,\quad a^x-2^x+a^{-x}-2^{-x}=0$, 因而 $(a^x-2^x)\left[1-\dfrac{1}{(2a)^x}\right]=0$ 恒成立. 解得 $(2a)^x=1, a=\dfrac{1}{2}$. 而 $f(x)=2^{-x}-2^x$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 且 $f(0)=0$, 所以 $f(m)>0, m<0$, 则 $m<-\dfrac{1}{2}\Rightarrow f(m)>0$，但反之不行. 故“$m<-\dfrac{1}{2}$”是“$f(m)>0$”的充分不必要条件.

解答 4 C.

解答 5 B. 判断函数的奇偶性，再判断函数值的正负，从而排除错误选项，得正确选项.

解答 6 C. 先计算从夏至到冬至的晷长构成等差数列的公差和冬至到夏至的晷长构成等差数列的公差，再对选项各个节气对应的数列的项进行计算，判断说法的正误，即得结果.C 错误，应为一丈一尺五寸.

解答 7 C. 由所给等式利用同角三角函数的关系可求得 $\cos\theta\cdot\sin\theta=\dfrac{1}{4}$，再利用**降幂公式**[1] 及二倍角公式将 $\cos^2\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 整理为 $\dfrac{1-2\sin\theta\cos\theta}{2}$，或者利用 $\cos^2\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=1-\sin^2\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)\right)^2$ 化简也可.

由 $\tan^2\theta-4\tan\theta+1=0$ 可得 $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=4$，所以 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=4$, 即 $\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta}=4$, 即 $\cos\theta\cdot\sin\theta=\dfrac{1}{4}<\cos^2\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1+\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\dfrac{1-\sin 2\theta}{2}=\dfrac{1-2\sin\theta\cos\theta}{2}=\dfrac{1-2\times\frac{1}{4}}{2}=\dfrac{1}{4}$

注意 千万不要尝试去解那个二次方程，它的根很奇怪.

[1] 其实就是二倍角公式的变形

解答 8 B. 从这十种乐器中挑八种全排列，有情况种数为 A_{10}^{8} 种.

从除琵琶、二胡、编钟三种乐器外的七种乐器中挑五种全排列，有 A_5^7 种情况，再再从排好的五种乐器形成的 6 个空中挑 3 个插入琵琶、二胡、编钟三种乐器，有 A_6^3 种情况. 所以 $P=\dfrac{A_5^7\cdot A_6^3}{A_{10}^8}=\dfrac{1}{6}$.

解答 9 B. 第一次循环，$s=4,i=2$，第二次循环，$s=10,i=3$ ，第三次循环，$s=16,i=4$ ，结束循环，输出 $s=16$.

注意 写这种题，要像计算机一样思考。不然容易犯错，而且极其容易犯错，而且一旦犯错就发现自己真傻，拍大腿。因而要从初始条件一步一步来。如果步数太多，就先找规律快进到临界条件前，注意临界条件附近的变化，再从这里开始一步一步来直到跳出循环。不要想当然地跳出循环，否则你会感受无比后悔。

解答 10 B.

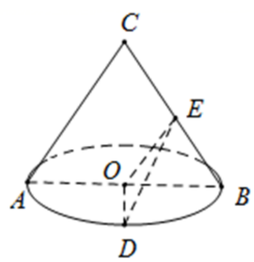

图 1: **第 10 题解** 1

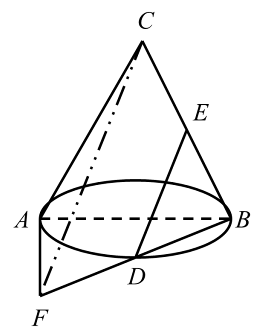

图 2: **第 10 题解** 2

标准解答: 如图 1，由题意 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}AC^2=4\sqrt{3},AC=4$, 取 AB 中点 O 为底面圆圆心, 连接 OE,OD,D 为弧 AB 中点, 则 $DO\perp AB$, $\triangle ABC$ 是轴截面, 则平面 $ABC\perp$ 平面 ABD, 又 $DO\subset$ 平面 ABD, 平面 $ABC\cap$ 平面 ABD, 所以 $DO\perp$ 平面 ABC, 而 $OE\subset$ 平面 ABC, 所以 $OD\perp OE$, 又 E 是 CB 中点, 则 $OE//AC$, 所以 $\angle OED$ 是异面直线 AC,DE 所成角或其补角. 且 $OE=\dfrac{1}{2}AC=2,OD=OA=2$, 所以 $\angle OEB=\dfrac{\pi}{4},\cos\angle OED=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 异面直线 AC,DE 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

另一种解法: 如图 2，延长 BD 使得 $FA\perp AB$，此时 $AF=AC$，因而直角 $\triangle CAF$ 是等腰直角三角形，故可以秒选 B.

解答 11 A. 由题意, $2p=2$, 则 $\dfrac{p}{2}=\dfrac{1}{2}$, 故抛物线 $x^2=2y$ 的焦点坐标是 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, 由抛物线的定义得, 点 P 到准线 $y=-\dfrac{1}{2}$ 的距离等于 $|PF|$, 即为 1 , 故点 P 到直线 $y=2$ 的距离为 $d=2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)-1=\dfrac{3}{2}$. 设点 P 在直线 $y=2$ 上的射影为 P', 则 $|PP'|=\dfrac{3}{2}$. 当点 M,N 在 P' 的同一侧 (不与点 P' 重合) 时, $|PM|+|PN|+|MN|>\dfrac{3}{2}+2+\dfrac{5}{2}=6$, 不符合题意; 当点 M,N 在 P' 的异侧（不与点 P' 重合) 时, 不妨设 $|P'M|=x(0<x<2)$, 则 $|P'N|=2-x$, 故由 $|PM|+|PN|+|MN|=\sqrt{x^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{(2-x)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}+2=6$, 解得 $x=0$ 或 2 , 不符合题意, 舍去, 综上 M,N 在两

点中一定有一点与点 P' 重合, 所以 $\sin\angle MPN = \dfrac{2}{\frac{5}{2}} = \dfrac{4}{5}$, 故选 A.

评述：此题出的不好，需要考虑 M, N 是否在同一侧的问题，而在同一侧时莫名其妙地用了一个不等式 (这里等号成立是 M 与 P' 重合时得到)，着实让人摸不着头脑。而且也没有考察很多的圆锥曲线知识，后半程都在分析奇怪的几何上去了，因而此题出的不好，当做乐呵乐呵得了.

解答 12 C. 由已知条件可推得 $f(x_1) = x_1 + \ln(x_1 - 1) = 1 + 2\ln t$, 即 $x_1 - 1 + \ln(x_1 - 1) = \ln t^2$, $t^2 = (x_1 - 1)\, e^{x_1 - 1}$，而 $g(x_2) = x_2 \ln x_2 = e^{\ln x_2} \cdot \ln x_2 = t^2$, 即有 $\ln x_2 = x_1 - 1$, 结合目标式化简可得 $(x_1 x_2 - x_2)\ln t = (x_1 - 1)x_2 \ln t = t^2 \cdot \ln t$, 令 $h(t) = t^2 \cdot \ln t$, 利用导函数研究其单调性并确定区间最小值, 即为 $(x_1 x_2 - x_2)\ln t$ 的最小值.
不难计算得 $h(t)_{\min} = h(e^{-\frac{1}{2}}) = -\dfrac{1}{2e}$.

2 填空题

错填不得分.

解答 13 $\underline{\dfrac{\pi}{2}}$.

解答 14 $\underline{\left(\dfrac{1}{32}, \dfrac{1}{16}\right)}$. 根据函数解析式，作出函数图象，将方程有 4 个不等实数根，转化为函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = a(x-1)$ 有四个不同的交点，利用数形结合的方法，即可求出结果. 注意端点处是“空心”的还是“实心”的，即取不取得到的问题.

解答 15 $\underline{y = 3 \text{ 或 } y = \dfrac{4}{3}x + 3}$. 若少情况则不得分. 解之：根据题意, 圆 C 即 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$, 圆心 $C(1,1)$, 半径 $r = 2\sqrt{2}$, 又由直线 l 与圆 C 交于 A B 两点, $|AB| = 4$, 则点 C 到直线 l 的距离 $d = \sqrt{r^2 - \left(\dfrac{|AB|}{2}\right)^2} = 2$. **若直线 l 的斜率不存在**, 直线 l 的方程为 $x = 0$, 点 C 到直线 l 的距离 $d = 1$, 不符合题意; 若直线 l 的斜率存在, 设直线 l 的方程为 $y = kx + 3$, 即 $kx - y + 3 = 0$, 则有 $d = \dfrac{|k+2|}{\sqrt{1+k^2}} = 2$, 解可得 $k = 0$ 或 $\dfrac{4}{3}$; 故直线 l 的方程为 $y = 3$ 或 $y = \dfrac{4}{3}x + 3$;

评注：一定要养成考虑斜率不存在的习惯，无论是小题还是大题，否则很容易漏答案.

解答 16 $\underline{\dfrac{211}{256}}$. 解：记 M 为 AC 的中点, 由中线长公式得 $4BM^2 + AC^2 = 2\left(AB^2 + BC^2\right)$，可得 $AC = \sqrt{2\left(6^2 + 4^2\right) - 4 \cdot 10} = 8$.

$$\text{由余弦定理得} \cos A = \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2CA \cdot AB} = \frac{8^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 8 \cdot 6} = \frac{7}{8},\ \text{所以}$$

$$\begin{aligned}
\sin^6 \frac{A}{2} + \cos^6 \frac{A}{2} &= \left(\sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2}\right)\left(\sin^4 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^4 \frac{A}{2}\right) \\
&= \left(\sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2}\right)^2 - 3\sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2} \\
&= 1 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\sin A\right)^2 = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 A \\
&= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 A = \frac{211}{256}.
\end{aligned}$$

评注: 实际上，在解此题时，应该先把 $\sin^6\dfrac{A}{2}+\cos^6\dfrac{A}{2}$ 化为 $\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\cos^2 A$，进而去寻找 $\cos A$. 而要计算之，由余弦公式则需要先计算 AC 的值，再回推去找 AC 的值，蕴含在中线长公式里，故一步一步可推出答案. 此题来自于 2020 年全国高中数学联赛 · 决赛填空题第 5 题.

中线长公式定理的证明. 设 $\triangle ABC$ 中，BC 边的中点为 D, 则中线为 AD.
而由向量知识可知，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$. 两边平方整理得

$$4\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

而 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2-\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)^2}{4}=\dfrac{\left|2\overrightarrow{AD}\right|^2-\left|\overrightarrow{BC}\right|^2}{4}$, 代入整理即得

$$\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$$

即 $4AD^2=2(AB^2+AC^2)-BC^2$. □

要熟记这个公式，它给出了**一条边对应的中线**[2]与三角形三边之间的关系.

3 解答题

3.1 必做题

解答 17 【答案】见下.
(1) 利用等差数列的性质 $a_{n-k}+a_{n+k}=2a_n$, 配出 “$P(3)$ 数列” 所满足的条件即可.
因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, 所以, 当 $n\geqslant 4$ 时, $a_{n-3}+a_{n+3}=2a_n, a_{n-2}+a_{n+2}=2a_n, a_{n-1}+a_{n+1}=2a_n$,2 分
各式相加可得 $a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=6a_n$, 因此, 等差数列 $\{a_n\}$ 是 $P(3)$ 数列. 4 分
(2) 利用 “$P(k)$ 数列” 的定义、等差数列的定义以及通项公式、数列的递推关系即可解决问题.
因为数列 $\{a_n\}$ 既是 “P (2) 数列”, 又是 “P (3) 数列”, 因此, 当 $n\geqslant 3$ 时,

$$a_{n-2}+a_{n-1}+a_{n+1}+a_{n+2}=4a_n \tag{1}$$

当 $n\geqslant 4$ 时,

$$a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=6a_n \tag{2}$$

由式 (1) 递推, 分别令 $n=n-1$ 和 $n=n+1$ 替换 n，得

$$a_{n-3}+a_{n-2}=4a_{n-1}-(a_n+a_{n+1}), \tag{3}$$
$$a_{n+2}+a_{n+3}=4a_{n+1}-(a_{n-1}+a_n) \tag{4}$$

.... 8 分
其中每个式子 1 分. 若有其他方法，正确地得出下面一步的结论，也能获得此步骤分. 但是列出了式子

[2] 中线是对应一条边而言的. 如这里 BC 边对应的中线就是 AD.

(1)、(2)，直接相减得 $a_{n-3}+a_{n+3}=2a_n$ 并直接下结论的，只能获得 6 分.

把式 (3)、(4) 代入 (2) 得 $a_{n-1}+a_{n+1}=2a_n$, ...9 分

其中 $n\geqslant 4$. 所以 $a_3,a_4,a_5,\cdots$ 是等差数列, 设其公差为 d. ....10 分

若直接由 $a_{n-1}+a_{n+1}=2a_n$，不说明 $n\geqslant 4$ ，就直接下结论 $\{a_n\}$ 是等差数列的，到此结束，只能获得 9 分. 只要由 $a_{n-1}+a_{n+1}=2a_n$ 能够判断出 $a_3,a_4,a_5,\cdots$ 是等差数列，即得 10 分.

在式 (1) 中取 $n=4$, 则 $a_2+a_3+a_5+a_6=4a_4$, 故 $a_2+a_3+(a_3+2d)+(a_3+3d)=4(a_3+d)$, 即 $a_3=a_2+d$. 从而 $a_2,a_3,a_4,a_5,\cdots$ 是公差为 d 的等差数列, ...11 分

在式 (1) 中取 $n=3$, 则 $a_1+a_2+a_4+a_5=4a_3$, 故 $a_1+a_2+(a_2+2d)+(a_2+3d)=4(a_2+d)$, 即 $a_2=a_1+d$. 从而, $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,\cdots$ 是公差为 d 的等差数列, 即 $\{a_n\}$ 是等差数列. ....12 分

评注：此题主要利用新定义考察旧知识，而其中包含的一些小坑，如 n 的范围需要特别注意.

解答 18 【答案】(1) 见下；(2)$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 根据 $BC//$ 平面 α, 易知 F 为棱 PB 的中点, 再根据 $BC\perp AB$, 得到 $EF\perp AB$, 再由 $PA\perp$ 平面 ABC, 得 $PA\perp AB$, 然后由线面垂直的判定定理证明.

因为 $BC//$ 平面 $\alpha, BC\subset$ 平面 PBC, 平面 $\alpha\cap$ 平面 $PBC=EF$,

所以 $BC//EF$, 且 F 为棱 PB 的中点. ....1 分

因为 $BC\perp AB$, 所以 $EF\perp AB$. ....2 分

因为 $PA//$ 平面 $\alpha, PA\subset$ 平面 PAC, 平面 $\alpha\cap$ 平面 $PAC=DE$, 所以 $PA//DE$. ....3 分

因为 $PA\perp$ 平面 ABC, 所以 $PA\perp AB$, 故 $DE\perp AB$, ...4 分

又 $DE\cap EF=E$, $DE\subset$ 平面 α，$EF\subset$ 平面 α 所以 $AB\perp$ 平面 DEF, 即 $AB\perp$ 平面 α.........6 分

条件缺一不可，否则不得对应步骤分.

(2) 如图所示, 以点 B 为坐标原点, 分别以 BA,BC 所在直线为 x,y 轴, 过点 B 且与 AP 平行的直线为 z 轴建立空间直角坐标系,

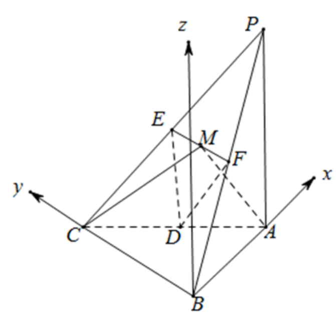

图 3: **第 18 题解**

则 $B(0,0,0),A(2,0,0),C(0,2,0),P(2,0,2),E(1,1,1),F(1,0,1)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,2,0),\overrightarrow{BC}=(0,2,0),\overrightarrow{BP}=(2,0,2)$, ...7 分

设 $M(1,t,1)$, 则 $\overrightarrow{AM}=(-1,t,1)$,

设平面 MAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$, 则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=-2x_1+2y_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AM}=-x_1+ty_1+z_1=0,\end{cases}$ 令 $x_1=1$, 则 $y_1=1,z_1=1-t$, 取 $\boldsymbol{m}=(1,1,1-t)$ ……8 分

设平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$, 则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overline{BC}=2y_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overline{BP}=2x_2+2z_2=0,\end{cases}$ 则 $y_2=0$, 令 $x_2=1$, 则 $z_2=-1$, 取 $\boldsymbol{n}=(1,0,-1)$ ……9 分

设平面 MAC 与平面 PBC 所成的锐二面角为 θ, 则

$$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|1-(1-t)|}{\sqrt{1^2+1^2+(1-t)^2}\times\sqrt{2}}=\frac{|t|}{\sqrt{t^2-2t+3}\times\sqrt{2}}$$

即 $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{3}{t^2}-\dfrac{2}{t}+1}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}}\times\sqrt{2}}$, ……10 分

当且仅当 $\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{3}$, 即 $t=3$ 时, $3\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}$ 取得最小值 $\dfrac{2}{3}$, $\cos\theta$ 取得最大值为 $\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{3}}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.11 分

所以平面 MAC 与平面 PBC 所成锐二面角的余弦值的最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$……12 分

解答 19 【答案】$\dfrac{3}{2}$.

方法 1:

设 $P(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$，则 $y_0^2=2px_0$. ……1 分

对 $y^2=2px$，两边对 x 求导得 $2yy'=2p$，所以 $y'=\dfrac{p}{y}$. 故过 P 点的切线方程为 $y-y_0=\dfrac{p}{y}(x-x_0)$，整理得 $y_0y-y_0^2=p(x-x_0)$，代入 $y_0^2=2px_0$ 得切线方程 $yy_0=p(x+x_0)$……4 分

令 $x=0$ 得 $Q\left(0,\dfrac{px_0}{y_0}\right)$.

又 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，由 $|FP|=2$ 得 $\sqrt{\left(x_0-\dfrac{p}{2}\right)^2+y_0^2}=2$.

由 $|FQ|=1$ 得 $\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2+\left(\dfrac{px_0}{y_0}\right)^2}=1$……7 分

整理两式分别得到

$$\left(x_0-\frac{p}{2}\right)^2+2px_0=4 \tag{5}$$

$$\frac{1}{4}p^2+\frac{x_0^2}{y_0^2}=1 \tag{6}$$

将 $y_0^2=2px_0$ 代入 (6)，并将 (5) − (6) 得 $x_0^2+\dfrac{p}{2}x_0=3$. 由 (6) 式又得 $x_0=\dfrac{4-p^2}{2p}$, 代入前式，得

$$\left(\frac{4-p^2}{2p}\right)^2+\frac{p}{2}\cdot\frac{4-p^2}{2p}=3 \tag{7}$$

令 $m=p^2$ 化简得 $4m=4$，所以 $m=1$，故 $p=1$. ……10 分

所以解得 $x_0=\dfrac{3}{2}$. 故 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0+\dfrac{x_0}{y_0}\cdot y_0=x_0=\dfrac{3}{2}$. ……12 分

若这里求出了 $y_0=\pm\sqrt{3}$ 也可得. 然而，若只求出 $y_0=\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$，存在漏解，扣 1 分.

方法 2:

设 $P\left(\frac{t^2}{2p},t\right)$ $(t\neq 0)$, 则 Γ 的切线 PQ 的方程为 $yt=p\left(x+\frac{t^2}{2p}\right)$. .... 4 分

同方法 1，要写出求切线的步骤，否则该 4 分只能得 1 分.

令 $x=0$, 得 $y=\frac{t}{2}$, 故 $Q\left(0,\frac{t}{2}\right)$.

又 F 坐标为 $\left(\frac{p}{2},0\right)$, 进而

$$|FP|=\sqrt{\left(\frac{p}{2}-\frac{t^2}{2p}\right)^2+t^2}=\frac{p}{2}+\frac{t^2}{2p},|FQ|=\frac{\sqrt{p^2+t^2}}{2},$$

.... 7 分

结合 $|FP|=2,|FQ|=1$ 可分别得 $p^2+t^2=4p,p^2+t^2=4$. 所以 $p=1,t^2=3$. .... 10 分

于是 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\frac{t^2}{2}=\frac{3}{2}$. .... 12 分

评注: 本题提醒我们，参数方程能够省略许多计算步骤，而且是被允许的，因而有时候学会使用参数方程解圆锥曲线大题十分有必要.

解答 20 【答案】(1)140；(2)i. $p_0=\frac{3}{4}$；ii. 见下.

(1) 由正态分布 3σ 原则即可求出排球个数；

(1) 因为 ξ 服从正态分布 $N\left(270,5^2\right)$, 所以 $P(260<\xi\leqslant 265)=P(\mu-2\sigma<\xi<\mu+2\sigma)-P(\mu-\sigma<\xi<\mu-\sigma)=\frac{0.9644-0.6826}{2}=0.1409$, ... 2 分

所以质量指标在 $(260,265]$ 内的排球个数为 $1000\times 0.1409=140.9\approx 140$ 个;........................ 3 分

若这里算得 141 个，只能得 2 分. 因为 141 个是取不到的，根据正态分布图可知，若要取到 141 个，则已经超出了 $260<\xi\leqslant 265$ 所限定的范围.

(2)

i. $f(p)=C_3^1p^3(1-p)=3p^3(1-p)$ .... 5 分

解法 1:

$f'(p)=3\left[3p^2(1-p)+p^3\times(-1)\right]=3p^2(3-4p)$.

令 $f'(p)=0$, 得 $p=\frac{3}{4}$,

当 $p\in\left(0,\frac{3}{4}\right)$ 时, $f'(p)>0,f(p)$ 在 $\left(0,\frac{3}{4}\right)$ 上单调递增; 当 $p\in\left(\frac{3}{4},1\right)$ 时, $f'(p)<0,f(p)$ 在 $\left(\frac{3}{4},1\right)$ 上单调递减;

所以 $f(p)$ 的最大值点 $p_0=\frac{3}{4}$;.. 7 分

解法 2:

由均值不等式，$3p^3(1-p)=p^3(3-3p)\leqslant\left(\frac{p+p+p+3-3p}{4}\right)^4=\left(\frac{3}{4}\right)^4$，当且仅当 $3-3p=p$, 即 $p=\frac{3}{4}$ 取到.

故 $p_0=\frac{3}{4}$. .... 7 分

不写取等条件不扣分，因为答案即为取等. 当然，最好还是写上以养成习惯.

由于题目所说是“最大值点”，故可用不等式，若说“极大值点”，最好还是用导数.

ii. 先列出所有可能的情况：0:3、1:3、2:3、3:2、3:1、3:0，依次所得的分数是 0、0、1、2、3、3.

X 的可能取值为 0，1，2，3.

$P(X=0)=(1-p_0)^3+C_3^1p_0(1-p_0)^3=\dfrac{13}{256}$,

$P(X=1)=C_4^2p_0^2(1-p_0)^3=\dfrac{27}{512}$,

$P(X=2)=C_4^2p_0^3(1-p_0)^2=\dfrac{81}{512}$,

$P(X=3)=p^3+C_3^2p_0^3(1-p_0)=\dfrac{189}{256}$. .... 11 分

每一种情况 1 分.

故 X 的分布列为： .... 12 分

X	0	1	2	3
p	$\dfrac{13}{256}$	$\dfrac{27}{512}$	$\dfrac{81}{512}$	$\dfrac{189}{256}$

评注：这种五局三胜制的比赛，需要注意如果任意一方只要到达 3 局比赛就结束了，因而 3:1 不可能出现胜胜胜负的情况，3:2 不可能出现胜负胜胜负的情况. 这时候如果用插入法，以下黑圈代表胜利，白圈代表失败。先把胜利摆成一排：

●●●

然后让白球插入其中的挡板，可以插在黑球前面，但是注意不能让三个黑球一起出现在最前面，这样直接变成三胜. 所以直插入一个白球时，只能插在如图所示的位置：

∨●∨●∨●

故 3:1 时为 C_3^1. 而 3:2 的情况则有些不同，插入一个新的白球后，会多出一个空，此时再插入一个白球，这里出现了分步，人为地排列了白球，而两个白球是等价的，只需组合，因而要消去这里的分步，故所得种数为 $\dfrac{C_3^1\cdot C_4^1}{A_2^2}=6$.

换另一个角度思考，既然五局三胜的胜方最后一局必定是胜利的，我们可以忽略最后一局，所以对于 3:1，考虑前三把，胜方只输了一把，任意一把均可，故种数为 C_3^1；对于 3:2，考虑前四把，胜方只输了两把，任意两把均可，故种数为 C_4^2.

解答 21 【答案】(1)2；(2) 见下.

(1) 解因为 $f(x)=\ln(x+3)-x$, 所以 $f'(x)=\dfrac{-x-2}{x+3}(x>-3)$. .... 1 分

令 $f'(x)>0$ ，得 $-3<x<-2$ ；令 $f'(x)<0$ ，得 $x>-2$ ，

所以 $f(x)$ 在 $(-3,-2)$ 上单调递增, 在 $(-2,+\infty)$ 上单调递减, ... 3 分

所以 $f(x)_{\max}=f(-2)=2$. .... 4 分

(2) 方程可化为 $e^{x+\ln a}+x+\ln a=x+3+\ln(x+3)=e^{\ln(x+3)}+\ln(x+3)$

设 $g(x)=e^x+x$, $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数, 又 $g(x+\ln a)=g(\ln(x+3))$,

所以有 $x+\ln a=\ln(x+3)$ ，即方程 $\ln(x+3)-x=\ln a$ 有两个实数根 x_1,x_2 ....7 分

因为方程 $f(x)=\ln a$ 有两个实数根 x_1,x_2 ，所以 $\begin{cases}\ln(x_1+3)=x_1+\ln a\\ \ln(x_2+3)=x_2+\ln a\end{cases}$ ，......................8 分

则 $\dfrac{(x_1+3)-(x_2+3)}{\ln(x_1+3)-\ln(x_2+3)}=1$, ...9 分

而 $ae^{x_1}+ae^{x_2}=e^{x_1+\ln a}+e^{x_2+\ln a}=e^{\ln(x_1+3)}+e^{\ln(x_2+3)}=x_1+x_2+6$,

故需证 $x_1+3+x_2+3>2$，即证 $x_1+3+x_2+3>\dfrac{2(x_1+3)-2(x_2+3)}{\ln(x_1+3)-\ln(x_2+3)}$.

不妨设 $-3<x_1<x_2$, 令 $t=\dfrac{x_1+3}{x_2+3}$, 则 $0<t<1$, 即要证 $\ln t<\dfrac{2(t-1)}{t+1}(0<t<1)$.

设 $h(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}(0<t<1)$, 则 $h'(t)=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$, 所以 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数, $h(t)<h(1)=0$, 即 $\ln t<\dfrac{2(t-1)}{t+1}$ 成立, 故原式成立. ....12 分

3.2 选做题

解答 22 【答案】见下.

(1) 因为 $C_2:\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi,\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi,\end{cases}$ 所以曲线 C_2 的普通方程为: $x^2+\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$, 由 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$

得曲线 C_2 的极坐标方程 $\rho=\sqrt{3}\sin\theta$. ....3 分

对于曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$, 令 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ ，则曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2=\dfrac{4}{1+3\sin^2\theta}$......5 分

(2) 由 (1) 得 $|OA|^2=\rho^2=\dfrac{4}{1+3\sin^2\alpha}$, $|OB|^2=\rho^2=3\sin^2\alpha$,

$|OA|^2+|OB|^2=\dfrac{4}{1+3\sin^2\alpha}+3\sin^2\alpha=\dfrac{4}{1+3\sin^2\alpha}+\left(3\sin^2\alpha+1\right)-1$. ....7 分

令 $t=1+3\sin^2\alpha$, 则 $t\in\left[\dfrac{13}{4},4\right)$, $f(t)=|OA|^2+|OB|^2=\dfrac{4}{t}+t-1$, ...8 分

又 $f(t)$ 在 $\left[\dfrac{13}{4},4\right)$ 单调递增, 而 $f\left(\dfrac{13}{4}\right)=\dfrac{181}{52}$, $f(4)=4$, 所以 $|OA|^2+|OB|^2\in\left[\dfrac{181}{52},4\right)$.........10 分

官方评注：求曲线 C_2 的极坐标方程要经过两次转化, 问题 (2) 转化为三角函数的值域, 再转化为 $t\in\left[\dfrac{13}{4},4\right)$, 时, 求 $y=\dfrac{4}{t}+t-1$ 的值域. 而该函数在 $\left[\dfrac{13}{4},4\right)$ 单调递增, 值域便可求出.

解答 23 【答案】见下

(1) 由题，两边平方得 $a+b+2\sqrt{ab}>c+d+2\sqrt{cd}$，因为 $a+b=c+d$，而由 $ab>cd$ 得 $\sqrt{ab}>\sqrt{cd}$, 故原不等式成立. ....2 分

(2) 证明必要性:

若 $|a-b|>|c-d|$，则 $(a-b)^2<(c-d)^2$，即 $(a+b)^2-4ab<(c+d)^2-4cd$ ....4 分

因为 $a+b=c+d$，所以 $ab>cd$.

由 (1) 知 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$. ....6 分

证明充分性:

若 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$, 则 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$，即 $a+b+2\sqrt{ab}>c+d+2\sqrt{cd}.$，因为 $a+b=c+d$, 所以 $ab>cd$. ....8 分

于是 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab<(c+d)^2-4cd=(c-d)^2$. 因此 $|a-b|<|c-d|$..................10 分

综上, $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$ 是 $|a-b|<|c-d|$ 的充要条件.

评注：证明充要条件一定要分别证明充分性和必要性. 即：证明 $p\Leftrightarrow q$(充要条件)，则要证明 $p\Rightarrow q$(充分性) 和 $p\Leftarrow q$(必要性). 类似的还有："证明……当且仅当……"，出现这样的字眼实际上也是要证明充要条件.

3.3 说明

由于新高考地区没有选做题，因而选做题选自以往高考原题或是发表于《中等数学》等数学教学期刊的试题，较有权威性. 本套题的 22 题选自 [1]，23 题选自 2015 年 · 全国 II 卷原题. 难度与高考难度持平.

参考文献

[1] 童其林.2019 年高考极坐标与参数方程考题预测 [J]. 广东教育：高中版,2019(5):25-27+49.