2022 年普通高等学校招生全国统一考试理科数学模拟 3

参考答案

1 单项选择题

1.1 答案

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	D	C	C	D	A	C	D	B	B	B

1.2 提示

7. 取 EF 中点.

8. 极差可以等于 0.7.

9. 把角化相等. 因而 $\cos 70^\circ = \sin 20^\circ$. 再把函数名化相等. 即 $\lambda \sin 20^\circ \cos 20^\circ = 3\cos 20^\circ - \sqrt{3}\sin 20^\circ = 2\sqrt{3}(\sin 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 60^\circ \sin 20^\circ)$.

10. 虚轴长是 $2b$, 因而虚半轴长是 b.

11. 代数变形 $ae^{a+1} < b(\ln b - 1) < b\ln\dfrac{b}{e}$, 即 $e^a \ln e^a < \dfrac{b}{e}\ln\dfrac{b}{e}$. 由 $f(x) = x\ln x$ 的单调性知 $e^a < \dfrac{b}{e}$. 注意这里 e 的指数幂与对数的互化关系，即 $x = e^{\ln x}$, 是**非常常用的技巧**，要善于总结.

12. 作 $BE \perp AC$ 于 E,$DF \perp AC$ 于 F, 则 $\theta = \left\langle \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{FD} \right\rangle$. 由向量 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD}$, 两边平方算模长.

2 填空题

13. $\underline{\quad -2 \quad}$.

14. $\underline{\quad 729 \quad}$.(或填$\underline{\quad 3^6 \quad}$).
提示：$\left(\sqrt{x} - \dfrac{2}{x}\right)^6$ 各项系数的绝对值之和即 $\left(\sqrt{x} + \dfrac{2}{x}\right)^6$ 各项系数之和，令后者 $x = 1$ 即可.

15. $\underline{\quad m-1 \quad}$.
提示：$a_n - a_{n-1} = a_{n-2}$，然后用逐差法知 $a_n - a_2 = S_{n-2}$.

16. $\underline{\quad \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{2}\right] \quad}$.
提示：由余弦定理知 $b^2 + c^2 = bc + 3$. 用中线长公式知 $AD^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{2bc + 3}{4}$. 现在求 bc 的取值范围. 注意到 $bc + 3 = b^2 + c^2 \geqslant 2bc$，知 $0 < bc \leqslant 3$.

3 解答题

17. (12 分)

(I) 两地区用户满意度评分的茎叶图如下:

A 地区		B 地区
	4	6 8
3	5	1 3 6 4
6 4 2	6	2 4 5 5
6 8 8 6 4 3	7	3 3 4 6 9
9 2 8 6 5 1	8	3 2 1
7 5 5 2	9	1 3

…………………………………………………………4 分

通过茎叶图可以看出，A 地区用户满意度评分的平均值高于 B 地区用户满意度评分的平均值;A 地区用户满意度评分比较集中 B 地区用户满意度评分比较分散.…………………6 分

(II) 记 C_{A1} 表示事件: “A 地区用户满意度等级为满意或非常满意”;

C_{A2} 表示事件: “A 地区用户满意度等级为非常满意”;

C_{B1} 表示事件: “B 地区用户满意度等级为不满意”;

C_{B2} 表示事件: “B 地区用户满意度等级为满意”.

则 C_{A1} 与 C_{B1} 独立，C_{A2} 与 C_{B2} 独立，C_{B1} 与 C_{B2} 互斥，$C = C_{B1}C_{A1} \cup C_{B2}C_{A2}$.

$P(C) = P(C_{B1}C_{A1} \cup C_{B2}C_{A2}) = P(C_{B1}C_{A1}) + P(C_{B2}C_{A2}) = P(C_{B1})P(C_{A1}) + P(C_{B2})P(C_{A2})$.

由所给数据得 $C_{A1}, C_{A2}, C_{B1}, C_{B2}$ 发生的概率分别为 $\frac{16}{20}, \frac{4}{20}, \frac{10}{20}, \frac{8}{20}$.………………10 分

故 $P(C_{A1}) = \frac{16}{20}, P(C_{A2}) = \frac{4}{20}, P(C_{B1}) = \frac{10}{20}, P(C_{B2}) = \frac{8}{20}$

故 $P(C) = \frac{9}{20} \times \frac{16}{20} + \frac{10}{20} \times \frac{4}{20} = 0.48$.………………………………………12 分

18. (12 分)

(I) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 因为 $a_1 = 3$, 则 $S_3 = 3a_1 + 3d = 9 + 3d$.………………2 分

因为 $S_3 = 5a_1 = 15$, 则 $9 + 3d = 15$, 得 $d = 2$.……………………………………3 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$.…………………………4 分

(II) 因为 $S_n = 3n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 + 2n$,

则 $b_n = 1 + \frac{2}{S_n} = 1 + \frac{2}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$.……………………………6 分

所以

$$
\begin{aligned}
T_n &= n + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \\
&= n + 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)
\end{aligned}
$$

…………………………………………………………………8 分

当 $n \leqslant 2$ 时, 因为 $-\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}<0$, 则 $[T_n]=n$. .... 9 分

当 $n \geqslant 3$ 时, 因为 $0<\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}<\dfrac{1}{2}$, 则 $[T_n]=n+1$. .... 10 分

因为 $[T_1]+[T_2]+\cdots+[T_n]=63$, 则 $1+2+4+5+\cdots+(n+1)=63$, 即 $3+\dfrac{(n-2)(4+n+1)}{2}=63$,

即 $n^2+3n-130=0$, 即 $(n-10)(n+13)=0$.

因为 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $n=10$. .... 12 分

19. (12 分)

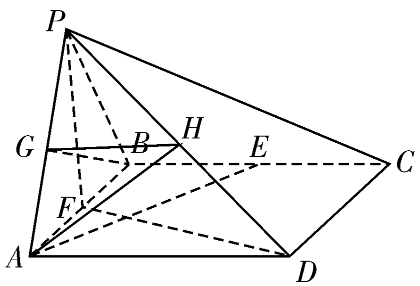

图 1: **第** 19 **题解** 1

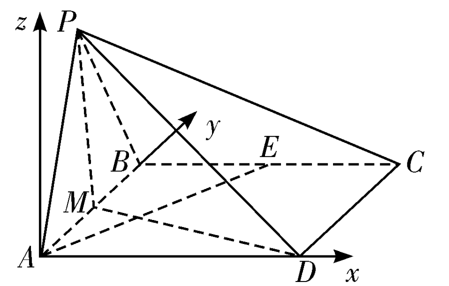

图 2: **第** 19 **题解** 2

(I) **解法一**: 如图 1, 取 AB 的中点 F, 连接 PF, DF.

因为 $PB=AB, \angle PBA=60^\circ$, 则 $\triangle PAB$ 为正三角形, 所以 $PF \perp AB$.

因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, $PF \subset$ 平面 PAB, 则 $PF \perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $AE \subset$ 平面 $ABCD$, 则 $PF \perp AE$. .... 1 分

因为四边形 $ABCD$ 为正方形, E 为 BC 的中点,

则 $\mathrm{Rt}\triangle DAF \cong \mathrm{Rt}\triangle ABE$, 所以 $\angle ADF=\angle BAE$,

从而 $\angle ADF+\angle EAD=\angle BAE+\angle EAD=\angle BAD=90^\circ$, 所以 $DF \perp AE$. .... 3 分

又 $DF \cap PF=F$,$DF \subset$ 平面 PDF, $PF \subset$ 平面 PDF,

所以 $AE \perp$ 平面 PDF, 而 $PD \subset$ 平面 PDF, 所以 $AE \perp PD$. .... 5 分

解法二: 因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD, AD \perp AB$,

则 $AD \perp$ 平面 PAB, 所以 $AD \perp AP$, 从而 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}=0, \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AD}=0$. .... 2 分

因为 $PB=AB, \angle PBA=60^\circ$, 则 $\triangle PAB$ 为正三角形.

设 $AB=2$, 则 $AD=AP=2$.

所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{PD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}) \cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})=\left(\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2} \overrightarrow{AD}\right) \cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})=\dfrac{1}{2} \overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}=$

$2-4 \cos 60^\circ=0$, ... 4 分

则 $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{PD}$, 所以 $AE \perp PD$. .... 5 分

(II) **解法一**: 如图 1, 分别取 PA, PD 的中点 G, H, 则 $GH \parallel= \dfrac{1}{2} AD$. 又 $BE \parallel= \dfrac{1}{2} AD$, 则 $GH \parallel= BE$[1], 所以四边形 $BGHE$ 为平行四边形, 从而 $EH // BG$. .... 6 分

因为 $PB=AB$, 则 $BG \perp PA$.

[1]符号 $\parallel=$ 定义为“平行且等于”. 由于计算机字体局限性, 无法打出原本的符号, 故印刷以此代替也可.

因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD, AD\perp AB$, $AD\subset$ 平面 $ABCD$，则 $AD\perp$ 平面 PAB, $BG\subset$ 平面 PAB，从而 $AD\perp BG$,

又 $PA\bigcap AD=A$，$PA\subset$ 平面 PAD，$AD\subset$ 平面 PAD,

所以 $BG\perp$ 平面 PAD, 从而 $EH\perp$ 平面 PAD. 连接 AH, 则 $\angle EAH$ 为直线 AE 与平面 PAD 所成的角. . . . . 8 分

不妨设正方形 $ABCD$ 的边长为 1, $PA=x(0<x<2)$, 则 $BE=GH=\dfrac{1}{2}, AG=\dfrac{x}{2}$.

从而 $AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\dfrac{\sqrt5}{2}, AH=\sqrt{AG^2+GH^2}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2}$. 10 分

在 Rt $\triangle AHE$ 中, $\cos\angle EAH=\dfrac{AH}{AE}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt5}$.

因为当 $0<x<2$ 时, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt5}$ 单调递增, 则 $\cos\angle EAH\in\left(\dfrac{\sqrt5}{5},1\right)$,

所以所以直线 AE 与平面 PAD 所成角的余弦值的取值范围是 $\left(\dfrac{\sqrt5}{5},1\right)$. . . . . 12 分

解法二：如图 2，以直线 AD 为 x 轴, AB 为 y 轴, 过点 A 且垂直于平面 $ABCD$ 的直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系. . . . . 6 分

设正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 则 $\overrightarrow{AD}=(1,0,0), \overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{1}{2},1,0\right)$ . . . . 7 分

在平面 PAB 内过点 P 作 AB 的垂线, 垂足为 M.

因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$,$PM\subset$ 平面 PAB ，则 $PM\perp$ 平面 $ABCD$.

设 $AM=a(0<a<2)$, 则 $BM=|1-a|$.

因为 $PB=1$, 则 $PM=\sqrt{PB^2-BM^2}=\sqrt{1-(1-a)^2}=\sqrt{2a-a^2}$, ... 8 分

所以 $\overrightarrow{AP}=\left(0,a,\sqrt{2a-a^2}\right)$.

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 PAD 的一个法向量, 则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=0,\\ ay+\sqrt{2a-a^2}z=0.\end{cases}$

取 $z=-a$, 则 $y=\sqrt{2a-a^2}$, 所以 $\boldsymbol{m}=\left(0,\sqrt{2a-a^2},-a\right)$. . . . . 9 分

于是 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=\sqrt{2a-a^2}, |\boldsymbol{m}|=\sqrt{2a}$.

又 $|\overrightarrow{AE}|=\dfrac{\sqrt5}{2}$, 则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{AE}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{AE}|}=\dfrac{2}{\sqrt5}\sqrt{1-\dfrac{a}{2}}$. . . . . 10 分

设直线 AE 与平面 PAD 所成的角为 θ, 则 $\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt5}\sqrt{1-\dfrac{a}{2}}$.

从而 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\dfrac{2a+1}{5}}$. . . . . 11 分

因为函数 $f(a)=\sqrt{\dfrac{2a+1}{5}}$ 单调递增, 则当 $0<a<2$ 时, 则 $\cos\theta\in\left(\dfrac{\sqrt5}{5},1\right)$,

所以直线 AE 与平面 PAD 所成角的余弦值的取值范围是 $\left(\dfrac{\sqrt5}{5},1\right)$. . . . . 12 分

20. (12 分)

(I) 由已知, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$, 则 $a=2c$. . . . . 1 分

设点 F_1,F_2 关于直线 l 的对称点分别为 M,N, 因为点 O,C 关于直线 l 对称, O 为线段 F_1F_2 的中点, 则 C 为线段 MN 的中点, 从而线段 MN 为圆 C 的一条直径, 所以 $|F_1F_2|=|MN|=2$, 即 $2c=2$, 即 $c=1$ .... 3 分

于是 $a=2, b^2=a^2-c^2=3$, 所以椭圆 E 的方程是 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ .... 4 分

(II) 因为原点 O 为线段 F_1F_2 的中点, 圆心 C 为线段 MN 的中点, 直线 l 为线段 OC 的垂直平分线, 所以点 O 与 C 也关于直线 l 对称,

因为点 $C(2m,4m)$, 则线段 OC 的中点为 $(m,2m)$, 直线 OC 的斜率为 2 , 又直线 l 为线段 OC 的垂直平分线,

所以直线 l 的方程为 $y-2m=-\dfrac{1}{2}(x-m)$, 即 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5m}{2}$ .... 6 分

将 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5m}{2}$ 代入 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$,

得 $3x^2+4\left(-\dfrac{x}{2}+\dfrac{5m}{2}\right)^2=12$, 即 $4x^2-10mx+25m^2-12=0$.

设点 $A\left(x_1,y_1\right), B\left(x_2,y_2\right)$, 则 $x_1+x_2=\dfrac{5m}{2}, x_1x_2=\dfrac{25m^2-12}{4}$ .... 7 分

所以

$$
\begin{aligned}
k_{AC}+k_{BC} &= \frac{y_1-4m}{x_1-2m}+\frac{y_2-4m}{x_2-2m}=-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+3m}{x_1-2m}+\frac{x_2+3m}{x_2-2m}\right) \\
&= -\frac{\left(x_1+3m\right)\left(x_2-2m\right)+\left(x_2+3m\right)\left(x_1-2m\right)}{2\left(x_1-2m\right)\left(x_2-2m\right)} \\
&= -\frac{2x_1x_2+m\left(x_1+x_2\right)-12m^2}{2x_1x_2-4m\left(x_1+x_2\right)+8m^2}
\end{aligned}
$$

.... 8 分

由已知, $k_{AC}+k_{BC}=\dfrac{2}{3}$, 则 $\dfrac{2x_1x_2+m\left(x_1+x_2\right)-12m^2}{2x_1x_2-4m\left(x_1+x_2\right)+8m^2}+\dfrac{2}{3}=0$,

得 $2x_1x_2-m\left(x_1+x_2\right)-4m^2=0$.

所以 $\dfrac{25m^2-12}{2}-\dfrac{5m^2}{2}-4m^2=0$, 即 $m^2=1$, 即 $m=\pm1$, ... 10 分

因为直线 l 与椭圆 E 相交, 则 $\Delta=100m^2-16\left(25m^2-12\right)>0$,

解得 $m^2<\dfrac{16}{25}$, 即 $|m|<\dfrac{4}{5}$.

因为 $\dfrac{4}{5}<1$, 所以不存在实数 m, 使直线 AC 与 BC 的斜率之和为 $\dfrac{2}{3}$ .... 12 分

21. (12 分)

(I) $f'(x)=\dfrac{a}{x}-\cos x+1(x>0)$ .... 1 分

若 $a>0$, 因为 $x>0, 1-\cos x\geqslant 0$, 则 $f'(x)>0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 符合要求 .... 2 分

若 $a<0$, 则当 $x\in\left(0,-\dfrac{a}{2}\right)$ 时, $\dfrac{a}{x}<-2$, 从而 $f'(x)<-2-\cos x+1=-(1+\cos x)\leqslant 0$,

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,-\dfrac{a}{2}\right)$ 上单调递减, 不合要求.

综上分析, a 的取值范围是 $(0,+\infty)$ .... 4 分

(II) 拆分成两个问题：第一，先证明：存在 $x_0 \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$，使得 $\cos x_0 - 1 - x_0 \sin x_0 = 0$；第二，再证明：当 $x_0^2 \cdot \sin x_0 < a < 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上恰有两个极值点. 接下来先证明第一个问题.

令 $f'(x) = 0$, 则 $\dfrac{a}{x} - \cos x + 1 = 0$, 即 $a = x\cos x - x$.

设 $g(x) = x\cos x - x$, 则 $g'(x) = \cos x - x\sin x - 1$.

i. 当 $x \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 时, $g''(x) = -\sin x - (\sin x + x\cos x) = -(2\sin x + x\cos x)$.

因为 $\sin x < 0, \cos x < 0$, 则 $g''(x) > 0$, 从而 $g'(x)$ 单调递增.

因为 $g'(\pi) = -2 < 0, g'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{2} - 1 > 0$, 则 $g'(x)$ 在 $\left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 上有唯一零点, 记为 x_0, 故存在 $x_0 \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$，使得 $\cos x_0 - 1 - x_0 \sin x_0 = 0$. ....6 分

再证明第二个问题.

由上述可知，当 $x \in (\pi, x_0)$ 时, $g'(x) < 0$, 则 $g(x)$ 单调递减; 当 $x \in \left(x_0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x) > 0$, 则 $g(x)$ 单调递增..7 分

ii. 当 $x \in (0, \pi)$ 时, $\cos x < 1, \sin x > 0$, 则 $\cos x - 1 < 0, -x\sin x < 0$, 从而 $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 单调递减..8 分

iii. 当 $x \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ 时, $g'''(x) = -(2\cos x + \cos x - x\sin x) = x\sin x - 3\cos x$.

因为 $\sin x < 0, \cos x > 0$, 则 $g'''(x) < 0$, 从而 $g''(x)$ 单调递减.

因为 $g''\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 2 > 0, g''(2\pi) = -2\pi < 0$, 则 $g''(x)$ 在 $\left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ 内有唯一零点, 记为 x_1,

当 $x \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, x_1\right)$ 时, $g''(x) > 0, g'(x)$ 单调递增; 当 $x \in (x_1, 2\pi)$ 时, $g''(x) < 0, g'(x)$ 单调递减.

因为 $g'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - 1 > 0, g'(2\pi) = 0$, 则当 $x \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 单调递增. ....10 分

综上分析, $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, 2\pi)$ 上单调递增.

因为 $g(0) = g(2\pi) = 0$, 则当 $g(x_0) < a < 0$ 时, 直线 $y = a$ 与函数 $g(x)$ 的图象在 $(0, 2\pi)$ 上有两个交点, 从而 $f'(x)$ 有两个变号零点, 即 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上恰有两个极值点.........11 分

而 $g'(x_0) = 0$, 则 $\cos x_0 - x_0\sin x_0 - 1 = 0$, 即 $\cos x_0 = 1 + x_0\sin x_0$. 从而 $g(x_0) = x_0\cos x_0 - x_0 = x_0(1 + x_0\sin x_0) - x_0 = x_0^2 \sin x_0$.

故此时的 x_0 即为所求..12 分

22. (10 分)

(I) 根据公式: $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, \rho^2 = x^2 + y^2$

圆 C_1, C_2 的极坐标方程分别为: $\rho = 2, \rho = 4\cos\theta(\rho > 0)$ ....4 分

联立: $\begin{cases} \rho = 2 \\ \rho = 4\cos\theta(\rho > 0) \end{cases}$，解得: $\begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \pm\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

$\therefore$ 圆 C_1 与圆 C_2 的交点极坐标分别为: $\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right),\left(2,-\dfrac{\pi}{3}\right)$ .... 6 分

(II) 把 (I) 中两圆交点极坐标化为直角坐标，得: $(1,\sqrt{3}),(1,-\sqrt{3})$

$\therefore$ 此两圆公共弦的普通方程为: $x=1(-\sqrt{3}\leq y\leq\sqrt{3})$

$\therefore$ 此弦所在直线过 $(1,0)$ 点，倾斜角为 90°

$\therefore$ 所求两圆的公共弦的参数方程为: $\begin{cases} x=1 \\ y=t(-\sqrt{3}\leq t\leq\sqrt{3}) \end{cases}$ .... 10 分

23. (10 分)

(I) 因为, $|x+a|+|x-b|\geq|-a-b|=|a+b|$, 所以 $f(x)\geq|a+b|+c$, 当且仅当 $(x+a)(x-b)<0$ 时，等号成立, ... 4 分

而 $a>0,b>0$, 故 $|a+b|=a+b$, 所以 $f(x)$ 的最小值为 $a+b+c$, 故 $a+b+c=4$. . . 5 分

(II) 由 (I) 知 $a+b+c=4$,

由柯西不等式得

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{9}b^2+c^2\right)(2^2+3^2+1^2)&\geq\left(\frac{a}{2}\times 2+\frac{b}{3}\times 3+c\times 1\right)^2\\&=(a+b+c)^2=16\end{aligned}$$

即 $\dfrac{1}{4}a^2+\dfrac{1}{9}b^2+c^2\geq\dfrac{7}{8}$, ...8 分

当且仅当 $\dfrac{1}{2}a=\dfrac{1}{3}b=\dfrac{c}{3}$ ，即 $a=\dfrac{8}{7},b=\dfrac{18}{7},c=\dfrac{2}{7}$ 时，等号成立.

所以 $\dfrac{1}{4}a^2+\dfrac{1}{9}b^2+c^2$ 的最小值为 $\dfrac{8}{7}$...10 分

4 说明与注意

4.1 说明

本试题改编自八省强校 T8(东北育才学校、福州一中、广东实验中学、湖南师大附中、华师一附中、南京师大附中、石家庄二中、西南大学附中) 联考. 以上参加联考的学校，均在省会城市，均为本省、市高考成绩、五大学科奥林匹克竞赛成绩非常优秀的高中.

尽管 2022 年“第二次八省联考”的试题，不是国家教育部考试中心命制. 但是试题命制的水平也是比较高的. 据了解, 2021 年 12 月的“第二次八省联考”试题，命题由湖北省武汉市华中师范大学测量与评价研究中心统一负责。语文、数学、英语等三科试题，由湖南师范大学附属中学命制，政治、历史、地理、物理、化学、生物等六个选考科目试题，由湖北省武汉市华中师范大学第一附属中学负责命制。由湖北省武汉市华中师范大学测量与评价研究中心统一负责审稿，以确保这次常规模拟考试的有效性和精确性.

在原试题中，八省强校数学方面，最高分是 144 分，平均分是 55.66 分，难度 0.37，区分度 0.35.

本套改编试题中，除了 17 题是 2015 年全国 II 卷的统计题 (因为原卷统计题太恶心) 外，选填是原题或在原题的基础上进行非常微小的改动，保留了原题的思想. 大题除了 21 题外，其余照搬原题，评分标准也是照搬的，十分严谨苛刻.

21 题的 (II) 表述改动如下：

原题 设 $\theta \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, 且 $\cos\theta = 1 + \theta\sin\theta$. 证明：当 $\theta^2 \cdot \sin\theta \ < a < 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上恰有两个极值点.

改编 证明：存在 $x_0 \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$，使得 $\cos x_0 - 1 - x_0 \sin x_0 = 0$，且当 $x_0^2 \cdot \sin x_0 < a < 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上恰有两个极值点.

原题的 θ 容易让人摸不着头脑. 因而改成了 x_0 来诱导往导数零点等方面思考. 而 θ 其实就是个零点.

4.2 注意

因而应总结其中所出现的新形式题型，以及自己没有复习到位的地方. 如 14 题的绝对值，18 题的取整函数的解决方法，19 题取值范围的解决方法，17 题的茎叶图等. 考不好没有关系，本套题是十分难的，更重要的是日后的总结.