2022 年普通高等学校招生全国统一考试理科数学模拟 4

参考答案

1 单项选择题

1.1 答案

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	A	B	C	D	D	C	A	C	C	B

1.2 提示

6. 由题意可知应将志愿者分为三人组和两人组. 分情况讨论：当三人组中包含小明和小李时；当三人组中不包含小明和小李时.

7. 令 $x=1$ 得 $a=1$. 然后算后面一个因式中，x 和 $\frac{1}{x}$ 的系数，最后相加即的常数项 (与前面的因式相乘后抵消).

8. 作代数变形 $\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$.

9. 单位圆内接正 $6n$ 边形的周长为 $12n\sin\frac{30^\circ}{n}$, 外切正 $6n$ 边形的周长为 $12n\tan\frac{30^\circ}{n}$.

10. $f(x)=-\frac{2}{e^x+1}+\frac{1}{2}$. 考察 $-\frac{2}{e^x+1}$ 的值域. $x\geqslant 0$ 时，$e^x\geqslant 1$，$-1\leqslant -\frac{2}{e^x+1}<0$. $x<0$ 时，$0<e^x<1$ 可得 $-2<-\frac{2}{e^x+1}<-1$.

11. 考察三角形 $\triangle ABF_1$. 设 $AF_1=x$, 则 $AF_2=x-2a$. 又 $\tan\angle ABF_1=\frac{3}{4}$, 故 $AB=\frac{4}{3}x$. 则 $BF_2=\frac{4}{3}x-(x-2a)=\frac{x}{3}+2a$. 对三角形 $\triangle ABF_1$ 应用勾股定理解方程. 解出 AF_1, AF_2, 再对 $\triangle AF_1F_2$ 应用勾股定理.

12. 注意题干“垂直向上”，因而 A,B,C 在底面的投影是底面三角形三边的中点. 故 $\triangle ABC$ 投影是形成一个边长为 1 的等边三角形，因而 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形. 故 $O-ABC$ 是各边为 1 的正四面体 (各个边均相等). 则 O 到平面 ABC 的距离是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 平面 ABC 到底面的距离即点 A 到 DE 的距离 $\sqrt{3}$. 但是球面上最短距离要减去半径.

2 填空题

13. $\underline{\quad\frac{\ln 5}{1-\ln 5}\quad}$.
提示：取对数.

14. $\underline{\quad\frac{\sqrt{10}}{10}\quad}$.

15. $\underline{\quad 5 \quad}$.

提示：样本的平均值点 $(\bar{x}, \bar{y})$ 也在回归直线上.

16. $\underline{\quad 6\sqrt{3} \quad}$.

提示：作图. 或运用正弦定理和余弦定理，像解三角形大题一样.

3 解答题

17. (12 分)

(I) ① $2S_n = na_{n+1}$

当 $n=1$ 时, $2S_1 = a_2$, 得 $a_2 = 2$ ……2 分

当 $n \geqslant 2$ 时, $2S_{n-1} = (n-1)a_n$, 得 $2a_n = na_{n-1} - (n-1)a_n$, 即 $(n+1)a_n = na_{n+1}$

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{n}$ ……4 分

$\therefore a_n = \dfrac{n}{n-1} \times \dfrac{n-1}{n-2} \times \cdots \times \dfrac{2}{1} \times a_1 = n$ 、……5 分

当 $n=1$ 时,$a_1 = 1$ 也成立, $\therefore a_n = n$.……6 分

② $2S_n = a_{n+1}a_n$

当 $n=1$ 时, $2S_1 = a_2a_1$, 得 $a_2 = 2$ ……2 分

当 $n \geqslant 2$ 时, 得 $2S_{n-1} = a_na_{n-1}$ 即 $2a_n = a_na_{n+1} - a_na_{n-1}$

由 $a_n > 0$, 得 $a_{n+1} - a_{n-1} = 2$ ……4 分

又 $\because a_1 = 1, a_2 = 2. \therefore \{a_{2n}\}$ 是公差为 2 , 首项为 2 的等差数列, $\{a_{2n-1}\}$ 是公差为 2 , 首项为 1 的等差数列 ……5 分

故 $a_n = n$. ……6 分

③$a_n^2 + a_n = 2S_n$

当 $n \geqslant 2$ 时, $a_{n-1}^2 + a_{n-1} = 2S_{n-1}$ ……2 分

两式相减得 ${a_n}^2 + a_n - a_{n-1}^2 - a_{n-1} = 2a_n$, 即 $(a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 1) = 0$,……3 分

由 $a_n > 0$, 得 $a_n - a_{n-1} - 1 = 0$ ……4 分

$\therefore \{a_n\}$ 是公差为 1，首项为 1 的等差数列, 故 $a_n = n$.……6 分

(II) $b_n = (n+1) \cdot 2^n$ ……7 分

$$T_n = 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \cdots + \ldots + (n+1) \times 2^n$$
$$2T_n = 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + n \times 2^n + (n+1) \times 2^{n+1}$$

……9 分

两式相减, 得

$$-T_n = 4 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n - (n+1)\times 2^{n+1} = 4 + \frac{4\left(1-2^{n-1}\right)}{1-2} - (n+1)\times 2^{n+1}$$
$$= 4 - 4 + 2^{n-1} - (n+1)\times 2^{n+1} = -n\cdot 2^{n+1}$$

....11 分

故 $T_n = n\cdot 2^{n+1}$ ....12 分

18. (12 分)

(I) 用 X 表示 4 例疑似病例中化验呈阳性的人数, 则随机变量 $X \sim B\left(4, \frac{1}{3}\right)$

由题意可知: $P(x=2) = C_4^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$ ....3 分

(II) 方案一: 若逐个检验, 则检验次数为 4 ....4 分

方案二: 混合一起检验, 记检验次数为 X, 则 $X = 1, 5$.

$P(X=1) = \left(1-\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{81\times 81}{10000} = \frac{6561}{10000}$

$P(X=5) = 1 - P(X=1) = \frac{3439}{10000}$ ....6 分

$E(X) = 1\times\frac{6561}{10000} + 5\times\frac{3439}{10000} = \frac{23756}{10000}$ ....7 分

方案三: 每组的两个样本混合在一起化验, 若结果呈阴性, 则检测次数为 1 , 其概率为 $\left(1-\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{81}{100}$, 若结果呈阳性, 则检测次数为 3 , 其概率为 $1-\frac{81}{100} = \frac{19}{100}$

设方案三检测次数为随机变量 Y, 则 $Y = 2, 4, 6$

$P(Y=2) = \frac{81}{100}\times\frac{81}{100} = \frac{81\times 81}{10000} = \frac{6561}{10000}$

$P(Y=4) = \frac{81}{100}\times\frac{19}{100}\times 2 = \frac{2\times 81\times 19}{10000} = \frac{3078}{10000}$

$P(Y=6) = \frac{19}{100}\times\frac{19}{100} = \frac{361}{10000}$ ....10 分

则 $E(Y) = 2\times\frac{81\times 81}{10000} + 4\times\frac{2\times 81\times 19}{10000}\times\frac{19\times 19}{10000} = \frac{27600}{10000}$ ....11 分

由 $E(X) < E(Y) < 4$, 知方案二最优. ....12 分

19. (12 分)

(I) 如图, 取 AB 的中点 M, 连结 DM, DB,

$\because CD = \frac{1}{2}AB, \therefore CD = MB, \because CD//MB, \therefore$ 四边形 $BCDM$ 为平行四边形, $\therefore DM = BC$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, $AB//CD, \therefore DM = BC = AD$,

又 $AD = CD = \frac{1}{2}AB = AM, \therefore \triangle AMD$ 为等边三角形, $\therefore \angle DAM = \angle DMA = 60°$,

$\therefore$ 在等腰 $\triangle MBD$ 中, $\angle MBD = 30°, \therefore$ 在 $\triangle ADB$ 中, $\angle ADB = 90°$,

不妨设 $2PD = 2AD = 2CD = AB = PB = 2$, 则 $BD = \sqrt{3}$, 在 $\triangle PBD$ 中, $BD = \sqrt{3}, PD = 1, PB = 2, \therefore PD^2 + BD^2 = PB^2, \therefore PD \perp BD$, ...3 分

又 $PD \perp AD, AD \subset$ 平面 $ABCD, BD \subset$ 平面 $ABCD, AD \cap BD = D, \therefore PD \perp$ 平面 $ABCD$,
又 $PD \subset$ 平面 $PAD, \therefore$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$. …………………………………5 分

(II) $\because PD \perp AD, PD \perp BD, AD \perp BD, \therefore$ 以 AD, BD, PD 分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系, 如图…………………………………………………………6 分
设 $PD = 1, \because$ 平面 PDE 把四棱锥 $P-ABCD$ 分成体积相等的两部分, 三棱锥 $P-ADE$ 的体积等于四棱锥 $P-BCD$ 的体积
$\therefore \frac{1}{3}S_{\triangle ADC} \times PD = \frac{1}{3}S_{\text{梯形}DCBE} \times PD, \therefore S_{\triangle ADE} = S_{\text{梯形}DCBE}$
设梯形 $ABCD$ 的高为 $h, AE = x$, 则 $\frac{1}{2}xh = \frac{1}{2} \cdot (2-x+1)h$, 解得 $x = \frac{3}{2}$, …………7 分
故 $D(0,0,0), A(1,0,0), B(0,\sqrt{3},0), P(0,0,1), E\left(\frac{1}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}, 0\right), C\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$,
$\overrightarrow{PN} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right), \overrightarrow{PE} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}, -1\right)$,
$\because$ 平面 $PAD \bigcap$ 平面 $ABCD = AD, BD \subset$ 平面 $ABCD, \therefore y$ 轴 $\perp$ 平面 $PAD, \therefore$ 平面 PAD 的一个法向量为 $\vec{n} = (0,1,0)$ ……………………………………………8 分
设平面 PCE 的一个法向量为 $\vec{m} = (x,y,z)$, 则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{PE} = 0 \end{cases}$,
即 $\begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - z = 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{3\sqrt{3}}{4}y - z = 0 \end{cases}$
取 $x = -\sqrt{3}$, 则 $y = 3, z = 2\sqrt{3}, \therefore \vec{m} = (-\sqrt{3}, 3, 2\sqrt{3})$, ……………………………10 分
$\therefore \cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle = \frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|} = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$, …………………………………………11 分
$\therefore$ 平面 PAD 与平面 PCE 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ……………………………12 分

20. (12 分)

(I) 过 A, B 分别向 ND 作垂线, 垂足为 A', B', 设 AB 中点为 P, 过 P 向 ND 作垂线垂足为 P', 则 $|PP'| = \frac{1}{2}(|AA'| + |BB'|) = \frac{1}{2}|AB|$.
又 $\because |AB| = |BC| \therefore |PP'| = \frac{1}{3}|PC|$. $|P'C| = \sqrt{|PC|^2 - |PP'|^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}|PC|$.
在 Rt $\Delta PP'C$ 中, $\tan\angle P'PC = 2\sqrt{2}$. 故直线 l 的斜率为 $2\sqrt{2}$. ……………………4 分

(II) $\because$ 正方形边长为 $1, \therefore |FD| = p = 1$, 抛物线方程为 $y^2 = 2x, \therefore M\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, ……………6 分
设直线 AB 的方程为 $y = k\left(x - \frac{1}{2}\right), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,
$\because ND$ 方程为 $x = -\frac{1}{2}$, 得 $C\left(-\frac{1}{2}, -k\right), \therefore k_3 = \frac{1+k}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1 + k$ ……………………7 分
由 $\begin{cases} y = k\left(x - \frac{1}{2}\right), \\ y^2 = 2x \end{cases}$, 得 $4k^2x^2 - (4k^2+8)x + k^2 = 0$,

$\Delta=\left(4k^2+8\right)^2-4\cdot 4k^2\cdot k=64k^2+64>0.$

$x_1+x_2=\dfrac{4k^2+8}{4k^2}=\dfrac{k^2+2}{k^2}, x_1x_2=\dfrac{k^2}{4k^2}=\dfrac{1}{4},$ ………………………………8 分

$k_1=\dfrac{y_1-1}{x_1-\frac{1}{2}}, k_2=\dfrac{y_2-1}{x_2-\frac{1}{2}},$

$$\begin{aligned}
k_1+k_2&=\frac{y_1-1}{x_1-\frac{1}{2}}+\frac{y_2-1}{x_2-\frac{1}{2}}=\frac{(y_1-1)\left(x_2-\frac{1}{2}\right)+\left(x_1-\frac{1}{2}\right)(y_2-1)}{\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\left(x_2-\frac{1}{2}\right)}\\
&=\frac{\left[k\left(x_1-\frac{1}{2}\right)-1\right]+\left[k\left(x_2-\frac{1}{2}\right)-1\right]\left(x_1-\frac{1}{2}\right)}{x_1x_2-\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{4}}\\
&=\frac{2kx_1x_2-(k+1)(x_1+x_2)+\frac{k}{2}+1}{x_1x_2-\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{k}{2}-\frac{(k^2+2)(k+1)}{k^2}+\frac{k}{2}+1}{\frac{1}{4}-\frac{k^2+2}{2k^2}+\frac{1}{4}}\\
&=-k^2(k+1)+(k^2+2)(k+1)=2(k+1)=2k_3
\end{aligned}$$

即存在常数 $\lambda=2$, 使得 $k_1+k_2=2k_3$ 成立. ………………………………12 分

21. (12 分)

(I) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. $f'(x)=-\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{x^2-2x+2a}{2x^2}$. ………………1 分

对 $y=x^2-2x+2a, \Delta=4-8a$.

若 $\Delta\geq 0$ ，即 $a\geq\dfrac{1}{2}$ ，则 $x^2-2x+2a\geq 0$ 恒成立，即 $f'(x)\leq 0$ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. ………………………………2 分

否则，知 $x^2-2x+2a=0$ 的两根为 $x_1=1-\sqrt{1-2a}, x_2=1+\sqrt{1-2a}$.

i. 若 $1-\sqrt{1-2a}>0$ ，即 $0<a<\dfrac{1}{2}$ ，

当 $x\in(0,1-\sqrt{1-2a})$ 或 $x\in(1+\sqrt{1-2a},+\infty)$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 单调递减.

当 $x\in(1-\sqrt{1-2a},1+\sqrt{1-2a})$ 时，$f'(x)>0, f(x)$ 单调递增；………………3 分

ii. 若 $1-\sqrt{1-2a}\leq 0$ ，即 $a\leq 0$ ，

当 $x\in(1+\sqrt{1-2a},+\infty)$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 单调递减.

当 $x\in(0,1+\sqrt{1-2a})$ 时，$f'(x)>0, f(x)$ 单调递增. ………………………………4 分

综上，$a\geqslant\dfrac{1}{2}$ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

$0<a<\dfrac{1}{2}$ $f(x)$ 在 $(0,1-\sqrt{1-2a})$ 或 $(1+\sqrt{1-2a},+\infty)$ 上单调递减，在 $(1-\sqrt{1-2a},1+\sqrt{1-2a})$ 上单调递增.

$a\leqslant 0$ $f(x)$ 在 $(1+\sqrt{1-2a},+\infty)$ 上单调递减，在 $(0,1+\sqrt{1-2a})$ 上单调递增………6 分

(II) 由 (I) 可知 $0<a<\dfrac{1}{2}$ ，且 $x_1+x_2=2, x_1x_2=2a$ ，………………………………7 分

则 $f(x_1)+f(x_2)=a\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)-\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\ln x_1+\ln x_2=a\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}-\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\ln(x_1x_2)=\ln(2a)$ ，……8 分

欲证不等式即 $\ln(2a)<\mathrm{e}^{2a}-2$ ，设 $t=2a$ ，则 $0<t<1$ ，即证 $\mathrm{e}^t-\ln t-2>0(0<t<1)$ ，

设 $h(t)=\mathrm{e}^t-\ln t-2$ ，则 $h'(t)=\mathrm{e}^t-\frac{1}{t}$ ，

$h''(t)=e^t+\frac{1}{t}>0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，故 $h'(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增.

因为 $h'\left(\frac{1}{3}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}-3<0,h'(1)=\mathrm{e}-1>0$ ，所以 $h'(t)=0$ 在 $(0,1)$ 内有唯一根 t_0 ，即 $\mathrm{e}^{t_0}=\frac{1}{t_0}$ ，……10 分

当 $t\in(0,t_0)$ 时，$h'(t)<0$ $h(t)$ 单调递减，当 $t\in(t_0,1)$ 时，$h'(t)>0,h(t)$ 单调递增，

所以 $h(t)_{\min}=h(t_0)=\mathrm{e}^{t_0}-\ln t_0-2=\frac{1}{t_0}-\ln\frac{1}{\mathrm{e}^{t_0}}-2=\frac{1}{t_0}+t_0-2>0$ ，$h(t)>0(0<t<1)$ ，故原命题得证……12 分

22. (10 分)

(I) l 的直角坐标方程为 $y=\sqrt{3}x$ ，化为极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\in R)$.

将圆 C 的参数方程变形为 $\begin{cases}x-a=\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha,\end{cases}$ 平方相加得 $(x-a)^2+y^2=1$ ，

化为极坐标方程为 $\rho^2-2a\rho\cos\theta+a^2-1=0$.……4 分

(II) 将 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 代入圆 C 的极坐标方程得 $\rho^2-a\rho+a^2-1=0$.

设 $|\rho_1|=|OP|$ ，$|\rho_2|=|OQ|$ ，则 $\rho_1+\rho_2=a$ $\rho_1\rho_2=a^2-1$ ，

$\Delta=a^2-4\left(a^2-1\right)>0$ ，解得 $0\le a^2<\frac{4}{3}$.

所以 $|OP|^2+|OQ|^2=\rho_1^2+\rho_2^2=(\rho_1+\rho_2)^2-2\rho_1\rho_2=a^2-2\left(a^2-1\right)=2-a^2$.

所以 $|OP|^2+|OQ|^2$ 的取值范围是 $\left(\frac{2}{3},2\right]$……10 分

23. (10 分)

(I) $f\left(\frac{1}{2}\right)+f(-1)\geq 8$, 即 $|a+1|+|a-2|+3\geq 8$, 亦即 $|a+1|+|a-2|\geq 5$,

等价于不等式组 $\begin{cases}a\leq -1\\ -a-1-a+2\geq 5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-1<a\leq 2\\ a+1-a+2\geq 5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a>2\\ a+1+a-2\geq 5\end{cases}$

解得 $a\leq -2$ 或 $a\geq 3$, 故实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-2]\bigcup[3,+\infty)$.……5 分

(II) 原命题等价于 $f(x)_{\min}<\left(b+\frac{1}{b-1}+1\right)_{\min}$.

因为 $f(x)=|2x+a|+|2x-1|\geqslant|(2x+a)-(2x-1)|=|a+1|$, 当且仅当 $(2x+a)(2x-1)\leqslant 0$ 等号成立，所以 $f(x)_{\min}=|a+1|$.……7 分

又 $b+\frac{1}{b-1}+1=b-1+\frac{1}{b-1}+2\geqslant 4,b\in(1,+\infty)$ ，当且仅当 $b=2$ 时取等号，所以 $\left(b+\frac{1}{b-1}+1\right)_{\min}=4$.……9 分

由 $|a+1|<4$ 解得 $-5<a<3$.

故所求实数 a 的取值范围是 $(-5,3)$.……10 分

4 说明与注意

4.1 说明

本题改变自某新高考模拟卷. 其中第 8、9 题是北京市高考原题, 第 13 题是自创原题, 保证尽量覆盖原卷精神和知识点比例. 中档题居多, 但整体难度不算高.

4.2 注意

第 10 题的取整函数又来了, 如果你这次还是不会写, 从两次的考察中总结其通用方法 (提示: 考虑定义域和值域, 并尝试画出取整函数的图像).