**模拟** 3.

# 2022 年普通高等学校招生全国统一考试

# 理科数学

**注意事项:**

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

## 1 单项选择题

1. “$0<\theta<\frac{\pi}{3}$” 是 “$0<\sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$” 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. 已知 $z=\frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}-1+2\mathrm{i}$, 则复数 $z$ 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，$\lambda,\mu\in\mathbf{R}$, 则下列命题为真命题的是

A. 若 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$　　B. 若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，则 $|a|+|b|=|a+b|$.

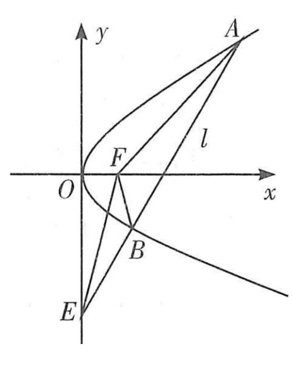
C. 若 $\lambda\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{b}$，则 $\lambda=\mu=0$　　D. 若 $|a|>|b|$，则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})>0$

4. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=2^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，$g(x)$ 为奇函数, 且当 $x>0$ 时, $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(-8)=$

A. $-5$　　B. $-6$　　C. 5　　D. 6

5. 如图, 抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 $F$, 直线 $l$ 与 $C$ 相交于 $A,B$ 两点，$l$ 与 $y$ 轴相交于 $E$ 点. 已知 $|AF|=7$,$|BF|=3$, 记 $\triangle AEF$ 的面积为 $S_1$，$\triangle BEF$ 的面积为 $S_2$，则 $S_1$ 和 $S_2$ 之间满足的关系是

A. $S_1=2S_2$　　B. $2S_1=3S_2$　　C. $3S_1=4S_2$　　D. $S_1=3S_2$



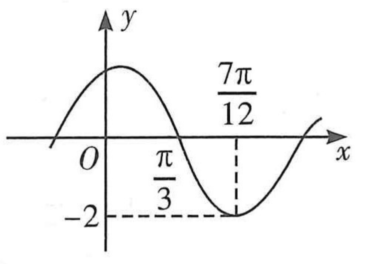



图 1: **第 6 题图**

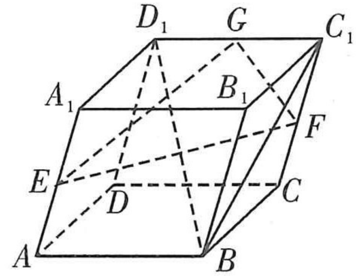



图 2: **第 7 题图**

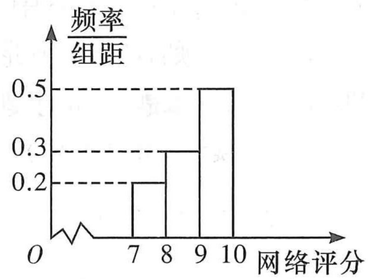



图 3: **第 8 题图**

6. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图像如图 1所示，则

A. $f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 是偶函数　　B. $f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 是偶函数

C. $f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$ 是奇函数　　D. $f\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$ 是奇函数

7. 如图 2，已知四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面为平行四边形,$E,F,G$ 分别为棱 $AA_1,CC_1,C_1D_1$ 的中点, 则

A. 直线 $BC_1$ 与平面 $EFG$ 平行, 直线 $BD_1$ 与平面 $EFG$ 相交

B. 直线 $BC_1$ 与平面 $EFG$ 相交, 直线 $BD_1$ 与平面 $EFG$ 平行

C. 直线 $BC_1$、$BD_1$ 都与平面 $EFG$ 平行

D. 直线 $BC_1$、$BD_1$ 都与平面 $EFG$ 相交

8. 某中学在学校艺术节举行“三独”比赛 (独唱、独奏、独舞), 由于疫情防控原因, 比赛现场只有 9 名教师评委给每位参赛选手评分, 全校 4000 名学生通过在线直播观看并网络评分, 比赛评分采取 10 分制. 某选手比赛后, 现场 9 名教师原始评分中去掉一个最高分和一个最低分, 得到 7 个有效评分如下表. 对学生网络评分按 $[7,8),[8,9),[9,10]$ 分成三组, 其频率分布直方图如图 3所示. 则下列说法错误的是

| 教师评委 | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 有效评分 | 9.6 | 9.1 | 9.4 | 8.9 | 9.2 | 9.3 | 9.5 |

A. 现场教师评委 7 个有效评分与 9 个原始评分的中位数相同

B. 估计全校有 1200 名学生的网络评分在区间 $[8,9)$ 内

C. 在去掉最高分和最低分之前，9 名教师评委原始评分的极差一定大于 0.7

D. 从学生观众中随机抽取 10 人, 用频率估计概率，$X$ 表示评分不小于 9 分的人数, 则 $E(X)=5$

9. 已知 $\sqrt{3}\tan 20^\circ+\lambda\cos 70^\circ=3$，则 $\lambda$ 的值为

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $3\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$

10. 双曲线 $C$ 的左、右焦点在 $x$ 轴上，且分别为 $F_1,F_2$. 点 $P$ 在 $C$ 的右支上, 且不与 $C$ 的顶点重合. 若 $|PF_1|=3|PF_2|$ 且 $PF_1\perp PF_2$，双曲线 $C$ 的焦距为 2，则双曲线 $C$ 的虚半轴长为

A. $\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　　C. $\dfrac{6\sqrt{10}}{5}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$

11. 设 $a,b$ 都为正数，e 为自然对数的底数，若 $a\mathrm{e}^{a+1}+b<b\ln b$, 则

A. $ab>\mathrm{e}$　　B. $b>\mathrm{e}^{a+1}$　　C. $ab<\mathrm{e}$　　D. $b<\mathrm{e}^{a+1}$

12. 在矩形 $ABCD$ 中,$AB=2,AD=2\sqrt{3}$,沿对角线 $AC$ 将矩形折成一个大小为 $\theta$ 的二面角 $B-AC-D$. 若 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$，则点 $B$ 与点 $D$ 之间的距离是

A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 4

## 2 填空题

13. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x-1}+x^3$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线为 $l$, 则直线 $l$ 在 $y$ 轴上的截距为__▲__.

14. 已知 $\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x}\right)^n$ 的展开式中第 3 项为常数项, 则这个展开式中各项系数的绝对值之和为__▲__.

15. 数列 $\{a_n\}=1,1,2,3,5,8,13,21,34,\cdots$, 称为斐波那契数列 (Fibonacci sequence), 该数列是由十三世纪意大利数学家莱昂纳多 · 斐波那契 (Leonardo Fibonacci) 以兔子繁殖为例子而引入, 故又称为“兔子数列”. 在数学上, 斐波那契数列可表述为 $a_1=a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3,n\in\mathbf{N}^*)$. 设该数列的前 $n$ 项和为 $S_n$，记 $a_{2023}=m$，则 $S_{2021}=$__▲__.(用含 $m$ 的代数式表示).

16. 设 $\triangle ABC$ 的内角 $A,B,C$ 所对的边分别为 $a,b,c,D$ 为 $BC$ 边的中点. 定义函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\cos^2\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}$，若 $f(A)=\dfrac{1}{2}$，$a=\sqrt{3}$，则线段 $AD$ 的长的取值范围是__▲__.

## 3 解答题

### 3.1 必做题

17. (本题满分 12 分) 某公司为了解用户对其产品的满意度，从 $A$，$B$ 两地区分别随机调查了 20 个用户，得到用户对产品的满意度评分如下:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ 地区: | 62 | 73 | 81 | 92 | 95 | 85 | 74 | 64 | 53 | 76 |
| | 78 | 86 | 95 | 66 | 97 | 78 | 88 | 82 | 76 | 89 |
| $B$ 地区: | 73 | 83 | 62 | 51 | 91 | 46 | 53 | 73 | 64 | 82 |
| | 93 | 48 | 65 | 81 | 74 | 56 | 54 | 76 | 65 | 79 |

(I) 根据两组数据完成两地区用户满意度评分的茎叶图，并通过茎叶图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度 (不要求计算出具体值，给出结论即可);

(II) 根据用户满意度评分，将用户的满意度从低到高分为三个等级：

| 满意度评分 | 低于 70 分 | 70 分到 89 分 | 不低于 90 分 |
|---|---|---|---|
| 满意度等级 | 不满意 | 满意 | 非常满意 |

记事件 $C$:“$A$ 地区用户的满意度等级高于 $B$ 地区用户的满意度等级”，假设两地区用户的评价结果相互独立，根据所给数据，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率，求 $C$ 的概率.

18. (本题满分 12 分) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，已知 $a_1=3$，$S_3=5a_1$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(II) 定义 $[x]$ 为不超过 $x$ 的最大整数，例如 $[0.3]=0$，$[1.5]=1$. 设 $b_n=1+\dfrac{2}{S_n}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$，当 $[T_1]+[T_2]+\cdots+[T_n]=63$ 时，求 $n$ 的值.

19. (本题满分 12 分) 如图 4, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是正方形, 平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$, $PB=AB$, $E$ 为 $BC$ 的中点.

(I) 若 $\angle PBA=60^\circ$, 证明:$AE\perp PD$;

(II) 求直线 $AE$ 与平面 $PAD$ 所成角的余弦值的取值范围.

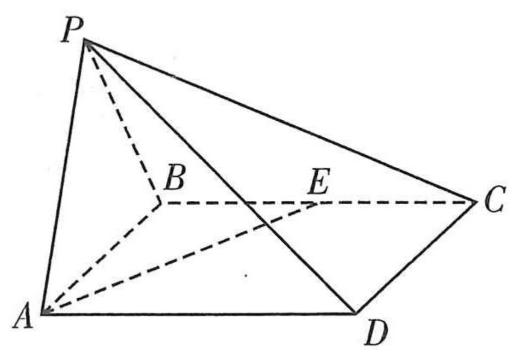



图 4: **第 19 题图**

20. (本题满分 12 分) 设椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，圆 $C:(x-2m)^2+(y-4m)^2=1(m\neq 0)$，点 $F_1,F_2$ 分别为 $E$ 的左、右焦点, 点 $C$ 为圆心，$O$ 为原点, 线段 $OC$ 的垂直平分线为 $l$. 已知 $E$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，点 $F_1,F_2$ 关于直线 $l$ 的对称点都在圆 $C$ 上.

(I) 求椭圆 $E$ 的方程.

(II) 设直线 $l$ 与椭圆 $E$ 相交于 $A,B$ 两点, 问: 是否存在实数 $m$, 使直线 $AC$ 与 $BC$ 的斜率之和为 $\frac{2}{3}$? 若存在, 求实数 $m$ 的值; 若不存在, 说明理由.

21. (本题满分 12 分) 已知函数 $f(x)=a\ln x-\sin x+x$，其中 $a$ 为非零常数.

(I) 若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，求 $a$ 的取值范围;

(II) 证明：存在 $x_0\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，使得 $\cos x_0-1-x_0\sin x_0=0$，且当 $x_0^2\cdot\sin x_0<a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上恰有两个极值点.

## 3.2 选做题

22. [**选修** 4-4：**极坐标与参数方程**](本题满分 10 分) 在直角坐标 $xOy$ 中，圆 $C_1:x^2+y^2=4$，圆 $C_2:(x-2)^2+y^2=4$.

(I) 在以 $O$ 为极点，以 $x$ 轴正半轴为极轴的极坐标系中，分别写出圆 $C_1,C_2$ 的极坐标方程，并求出圆 $C_1,C_2$ 的交点坐标 (用极坐标表示);

(II) 求圆 $C_1$ 与 $C_2$ 的公共弦的参数方程.

23. [**选修** 4-5：**不等式选讲**](本题满分 10 分) 已知 $a>0,b>0,c>0$，函数 $f(x)=|x+a|+|x-b|+c$ 的最小值为 4.

(I) 求 $a+b+c$ 的值.

(II) 求 $\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{9}b^2+c^2$ 的最小值.