

测量重力加速度的实验报告

1 实验目的

由于重力加速度与物体所处的纬度、海拔高度等因素有关，本实验旨在测量当地的重力加速度。

2 实验原理

分两种方法测量重力加速度

2.1 自由落体法

本实验采用双光电门法。固定光电门 1，则小球通过光电门 1 的初始速度 v_0 不变。改变光电门的位置，设光电门 2 与光电门 1 的距离为 h ，小球到达两光电门时间差是 t ，则有

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} t^2$$

两端同时除以 t ，得 $\frac{h}{t} = v_0 + \frac{1}{2} g t$ 。这样可以得到一条 $\frac{h}{t} - t$ 的直线，其斜率是 $\frac{1}{2} g$ 。由此可知，只需要测量一系列的 (h, t) 即可。为了减小误差，多次改变光电门 2 的位置，得到一组数据 $(h_1, t_1), (h_2, t_2), \dots, (h_n, t_n)$ ，然后采用线性拟合即可。在该实验中测量的组数 n 为 6-8 组。

2.2 单摆法

由单摆的周期公式可知， $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$ ，其中 l 是摆长， T 是单摆的周期。因而只需要测量 l 与 T 即能得知重力加速度。

根据不确定度均分原理， $\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta T}{T}$ ，所以要使 $\frac{\Delta g}{g} \leq 1\%$ ，则 $\frac{\Delta l}{l} \leq 0.5\%$ ， $\frac{\Delta T}{T} \leq 0.25\%$ 。

由于钢卷尺的最大允差是 0.2 cm，则摆长至少要 $l \geq \Delta l / 0.5\% = 40\text{cm}$ ，且摆长越长精度越高，故本实验摆长选在 70 cm 附近。摆长包括了摆线长和小球的半径，使用钢卷尺，当单摆静止时测量小球中心至悬挂点的高度为摆长。多次测量取平均值。

对于周期 T ，约取一次 $T = 1.5\text{s}$ ，取 $\Delta T = 0.2\text{s}$ 。由于一次周期的时间太短，人的反映误差相对太大，因而需要测量多次全振动的时间再平均以计算周期，则所需要的次数 $N \geq \Delta T / (0.25\%) / T = 53$ 次。考虑到小球振幅会慢慢减小，该实验测 60 个周期。在摆长不变的情况下，多次测量取平均值。

3 实验仪器

3.1 自由落体

双光电门、数字毫秒计、小球。

3.2 单摆

卷尺、游标卡尺、千分尺、电子秒表、单摆（带标尺、平面镜，摆线长度可调）。

4 实验内容及测量的记录

4.1 自由落体

光电门所连接的数字毫秒计显示 3 个值，分别对应从磁铁断电到从电磁铁断电到小球通过光电门 1 的时间差 t_1 、从电磁铁断电到小球通过光电门 2 的时间差 t_2 、小球通过两个光电门的时间差 Δt ，单位为 ms。将小球记录光电门 1 的刻度为 h_1 ，光电门 2 的刻度为 h_2 ，单位为 cm。

1. 初始时，调节立柱使立柱竖直。然后通电，使立柱上端电磁铁吸住小球。
2. 按下按钮使小球自由下落。记录数字毫秒计的数据以及两个光电门所对应的刻度。
3. 重复以上操作 3 次。然后移动光电门 2 进行下一组。

得到的实验数据如下：

表 1：自由落体法的原始数据

h_1/cm	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
h_2/cm	40	40	40	45	45	45	50	50	50	55	55	55
$\Delta t/\text{ms}$	145.7	145.7	145.8	163.3	163.5	163.4	180.0	179.9	179.9	195.7	195.7	195.7
t_1/ms	137.3	137.3	137.2	137.3	137.4	137.3	137.4	137.5	137.4	137.4	137.7	137.3
t_2/ms	283.0	283.0	283.0	300.6	300.9	300.7	317.4	317.4	317.3	333.1	333.4	333.0
h_1/cm	10	10	10	10	10	10	10	10	10			
h_2/cm	60	60	60	65	65	65	70	70	70			
$\Delta t/\text{ms}$	210.8	210.8	210.9	225.3	225.3	225.3	239.2	239.1	239.2			
t_1/ms	137.3	137.5	137.3	137.5	137.4	137.6	137.1	137.4	137.4			
t_2/ms	348.1	348.3	348.2	362.8	362.7	362.9	376.3	376.5	376.6			

4.2 单摆

测量摆长为 l ，单位为 cm。测量 60 次全振动的时间为 $60T$ ，读秒表上所显示的数字。

1. 开始实验前，应调节螺栓使立柱竖直，并调节标尺高度，使其上沿中点距悬挂点 50cm。
2. 使小球静止，用钢卷尺测量摆长。测量 3 次读数。
3. 将小球拉出一个角度 θ ($\theta < 5^\circ$)，然后无初速度释放。待其稳定地经过平衡位置时，开始计时，至 60 次全振动后结束计时。
4. 重复以上测量 60 次全振动时间的步骤 3 次。

得到实验数据如下：

表 2：单摆法原始数据

l/cm	71.84	71.82	71.85
$60T$	1'42"40	1'42"62	1'42"25

5 数据处理和误差分析

5.1 自由落体

将每组的 Δt 的平均值作为 t_i ，画出 $\frac{h}{t} - t$ 点图，然后用最小二乘法拟合如图。

$t(\text{ms})$	145.7333	163.4	179.9333	195.7	210.8333	225.3	239.1667
$\frac{h}{t}(\text{cm/ms})$	0.205855	0.214198	0.222305	0.229944	0.237154	0.244119	0.250871

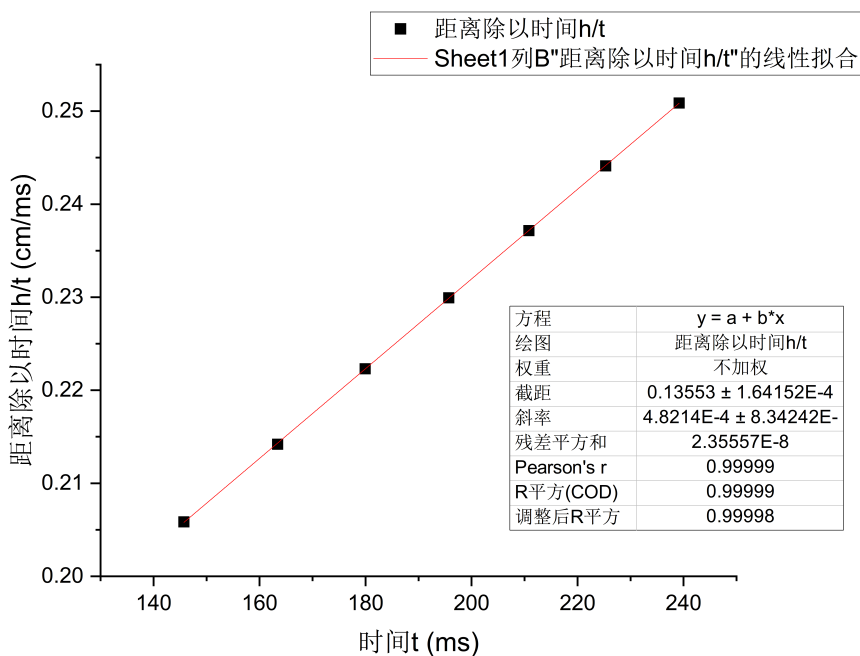


图 1: $\frac{h}{t} - t$ 的最小二乘法拟合

其中斜率为 $k = 4.82138 \times 10^{-4} \text{cm/ms}^2 = 5 \times 10^{-5} g$ ，因而 $g = 9.64276 \text{m/s}^2$ 。

由于 $\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta h}{h} + 2 \frac{\Delta t}{t}$ ，数字毫秒计的精度较高，其不确定度相比光电门的刻度长度的不确定度小得多，可忽略。而光电门的刻度一半为 0.5cm ，则其最大的不确定度为 $\frac{0.5}{10} \times 100\% = 5\%$ ，故最终结果应表示为

$$g = (9.64 \pm 0.48) \text{m/s}^2$$

5.2 单摆

取摆长的平均值 $\bar{l} = (71.82 + 71.84 + 71.85)/3 = 71.83667 \text{cm}$ ，周期的平均值为 $60\bar{T} = (102.40 + 102.62 + 102.25)/3 = 102.42333 \text{s}$ ，即 $\bar{T} = 1.70706 \text{s}$ ，所以重力加速度为 $g = 9.73214 \text{m/s}^2$ 。

摆长的不确定度：查表，当 $n = 3, P = 0.95$ 时， $t_p = 4.30, k = 1.96$. 钢卷尺的最大允差为 0.2cm. 平均值 $\bar{l} = 71.83667\text{cm}$ ，则 A 类不确定度为 $u_A = \frac{4.30}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (l_i - \bar{l})^2}{2}} = 0.065684\text{cm}$ ，B 类不确定度为 $u_B = 1.96 \times \frac{0.2}{3} = 0.13067\text{cm}$ ，则合成不确定度为 $u_l = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 0.14625\text{cm}$.

周期的不确定度：秒表的计时误差为人的反应时间 0.2s 加上秒表的最大允差 0.01s，等于 0.21s。对于 60 个周期，A 类不确定度为 $u_A = \frac{4.30}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (60T_i - 60\bar{T})^2}{2}} = 0.80023\text{s}$ ，B 类不确定度为 $1.96 \times \frac{0.21}{3} = 0.1372\text{s}$ ，则合成不确定度 $u'_T = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 0.81191\text{s}$. 故每一个周期的不确定度为 $u_T = \frac{1}{60} u'_T = 0.013532\text{s}$.

合成的不确定度：由公式

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

合成的不确定度

$$f(l, T) = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l} u_l\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} u_T\right)^2} = 4\pi^2 \sqrt{\left(\frac{1}{g^2} u_l\right)^2 + \left(-2\frac{l}{g^3} u_T\right)^2}$$

则 $u = f(\bar{l}, \bar{T}) = 0.02\text{m/s}^2$ 故最终结果表示为

$$g = (9.73 \pm 0.02)\text{m/s}^2$$

6 思考题

6.1 自由落体

1. 在实际工作中，为什么利用 (1) 式很难精确测量重力加速度？

因为运动至所要求的下落高度时，速度太快，且存在空气阻力，导致时间误差偏大。

2. 为了提高测量精度，光电门 1 和光电门 2 的位置应如何选取？

光电门 1 的位置应与开始下落处有 10~20cm 的距离，光电门 2 与光电门 1 的距离更大一些，至少有 30cm。

3. 利用本实验装置，你还能提出其他测量重力加速度的实验方案吗？

由公式 $h_1 = \frac{1}{2}gt_1^2, h_2 = \frac{1}{2}gt_2^2$ ，两式开方相减得 $g = \frac{2(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})}{t_1 - t_2}$. 可以保持光电门 1,2 的位置不变，多次测量取平均值。

6.2 单摆

1. 分析基本误差的来源，提出进行改进的方法

(1) 摆线的弹性。若摆线有弹性，在平衡位置时与在最高点处摆长会不相等，造成误差，实验中应使用弹性较小的摆线，减小摆长的误差。

(2) 摆角，周期实际上也与摆角有关，但在 5 度以内可以忽略，因而在摆动时摆角要在 5 度以内，但也不能够太小，否则全振动次数可能过短。

(3) 周期的测量，摆球通过平衡位置时，由于人的反应力有限，会导致开始和结束的时间存在误差，因而应当测量 50 次以上全振动来减小误差。

(4) 摆球平面，摆动时实际在一个圆锥面内摆动，因而要使摆球尽量在一个面内摆动，即在拉起小球松开时要稳定在装置的摆面内。