数学分析笔记整理

BigfufuOuO

2022 年 5 月 27 日

目录

Chapter 1

常微分方程初步

既然是初步，则要求不会太多. 提供几种常见的常微分方程. 此处常微分方程是指，只有一个自变量的未知函数 $F(x, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$.

1.1 一阶常微分方程

1.1.1 可分离变量型方程

对于形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x) \cdot h(y)$$

的自变量与因变量可分离的方程:

1° $h(y) \neq 0$ 时，方程改写为

$$\frac{1}{h(y)}\mathrm{d}y = g(x)\mathrm{d}x$$

两边积分得 $H(y) = F(x) + C$. 其中 C 是任意常数 (一般统一将常数写在右边). $H(y), F(x)$ 分别是 $1/h(y), g(x)$ 的原函数.

此时 $H(y) = F(x) + C$ 为**隐式解**. 形如 $y = f(x)$ 的为**显式解**.

2° $h(y) = 0$ 时，若 $\exists y_0$ 使得 $h(y_0) = 0$，则 $y = y_0$ 是一个特解.

例 1.1.1. 解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \ln x$.

解. (1)$y \neq 0$，则 $1/y\mathrm{d}y = \ln x \mathrm{d}x \Rightarrow \ln|y| = x\ln x - x + C$.

故 $|y| = e^{x\ln x - x} \cdot e^C \Rightarrow y = \pm e^C \cdot e^{x\ln x - x}$.

记 $C = \pm e^C (\neq 0)$，则解为 $y = C \cdot e^{x\ln x - x} (C \neq 0)$.

或者有 $\ln|y| + \ln|C| = x\ln x - x$ 同样可得 $C \neq 0$. 这是一个容易犯错的地方.

(2)$y = 0$ 时，可知显然成立. 故 $y = 0$ 是方程的解，将其代入 (1) 的通解得 $C = 0$.

故方程的解为 $y = C \cdot e^{x\ln x - x} (C \in \mathbb{R})$. □

1.1.2 齐次方程

对于形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$$

的方程. f 满足一定范围内的 x,y,t，均有 $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$，则称之为 n **次齐次函数**.

对于形如

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

的微分方程，如果 $\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ 是 0 次齐次函数，则称它为齐次微分方程. 此时 $f(x,y) = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \varphi(\dfrac{x}{y})$.

于是令 $u = y/x(x\neq 0)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u}{dx} = u + x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. 或 $x=0$(**注意！不要漏解**).

所以原方程转化为 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = \varphi(u)$，分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ 或 $\varphi(u)-u=0$(**注意！不要漏解**).

注意，这里 $x=0$ 与 $\varphi(u)-u=0$ 不等价，因为后者是在 $x\neq 0$ 时成立的.

例 1.1.2. 解微分方程 $(y^2-2xy)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = 0$.

解. 令 $u=y/x$，转化为方程 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u-u^2$.

1° $x\neq 0$

(1)$u-u^2\neq 0$，即 $u\neq 0,1$ 时，分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u-u^2} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \ln|u| - \ln|1-u| = \ln|x| + \ln|C|$. 化简得 $\dfrac{y}{x-y} = Cx(C\in\mathbb{R})$.

(2)$u=0,1$ 时，得 $y=0$ 或 $y=x$.

2° $x=0$ 代入原方程成立.

故解为 $\dfrac{y}{x-y} = Cx(C\in\mathbb{R}), y=0, y=x, x=0$. □

例 1.1.3. 解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{x+y\tan\frac{x}{y}}$.

解 (简要). 化简得 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{x}{y} + \tan\dfrac{x}{y}$. 注意此时 x 在分子，故令 $u=x/y$，其余做法与例1.1.2类似. □

例 1.1.4. 解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$，其中 $a_i,b_i,c_i(i=1,2)$ 为常数.

解 (简要). 由于 c_1,c_2 的存在，*RHS*[1]无法齐次化 (即同除以 x 或 y). 但可以配凑系数使得 c_1,c_2 消失. 即令

$$c_1 = a_1h + b_1k$$
$$c_2 = a_2h + b_2k$$

代入原式得 $\dfrac{\mathrm{d}(y+k)}{\mathrm{d}(x+h)} = \dfrac{a_1(x+h)+b_1(y+k)}{a_2(x+h)+b_2(y+k)}$. 令 $u=\dfrac{y+k}{x+h}$ 即可. 然后再解出 h,k 代入. □

[1]右式. *LHS* 表示左式.

1.1.3 一阶线性微分方程

最好的办法：记公式.

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)\mathrm{d}x=Q(x)$$

的方程称为**一阶线性齐次微分方程**. 为方便起见，今后用 y' 表示 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，用 y'' 表示 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$. 对于方程

$$y'+P(x)y=0 \tag{1.1.1}$$

$$y'+P(x)y=Q(x) \tag{1.1.2}$$

方程1.1.1的解为 $y=Ce^{\int -P(x)\mathrm{d}x}(C\in\mathbb{R})$. 方程1.1.2的解为 $y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right).(C\in\mathbb{R})$.

若 y_1,y_2 是方程1.1.1的解，则 y_1-y_2 是方程1.1.2的解.

例 1.1.5. 解微分方程 $xy'-2y=2x^4$.

解. 当 $x\neq 0$ 时，化为标准形式为 $y'-\frac{2}{x}y=2x^3$.
使用公式得 $y=e^{\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(\int 2x^3e^{\int \frac{-2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=x^2(x^2+C).(C\in\mathbb{R})$.
当 $x=0$ 时，$y=0$，可并入上通解. □

例 1.1.6. 解微分方程 $y\ln y\mathrm{d}x+(x-\ln y)\mathrm{d}y=0$

解 (简要). 将 y 看作自变量，x 看作未知函数 $x=x(y)$，则原方程转化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\ln y-x}{y\ln y}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{y\ln y}x=\frac{1}{y}$$

然后使用公式即可. □

例 1.1.7. 解微分方程 $xe^y-xy'=2$.

解. 这里出现了 e^y，想办法将其消去. 故使两边同时乘以 e^{-y}，得 $x-xe^{-y}y'=2e^{-y}$.
换元化简，令 $z=e^{-y}$，则 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{z}z'$. 所以原式写为 $x+xz'=2z$.
若 $x\neq 0$，套公式得 $z=x^2(1/x+C)$，即 $e^{-y}=x+Cx^2$.
若 $x=0$，不符合原方程，因而 $x\neq 0$ 不是解. □

1.1.4 Bernoulli(伯努利) 方程

其实是一种特殊的一阶方程转化为线性方程的方法. 对于方程

$$y'+P(x)y=Q(x)y^n$$

先将方程两边同时除以 y^n 得到

$$y^{-n}y'+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

作代换 $u=y^{1-n}$ 得

$$u'+(1-n)P(x)=(1-n)Q(x)$$

注意：若 $1-n$ 是小于 0 的整数，表明 y 做分母 $(y\neq 0)$，**不要忘了考虑 $y=0$ 的特解**.

例 1.1.8. 解微分方程 $y'=xy+x^3y^3$

解. 作变量代换 $u=y^{-2}$ 得 $u'+2ux=-2x^3$. 求得通解 $u=1-x^2+Ce^{-x^2}(C\in\mathbb{R})$. 故通解为 $1/y^2=1-x^2+Ce^{-x^2}$. 以及特解 $y=0$. □

1.2 可降阶微分方程

一般二阶微分方程的形式为 $F(x,y,y',y'')=0$，以下是其中特殊的两种形式.

1.2.1 不显含未知函数 y 的二阶微分方程

即方程少了 y，变为 $F(x,y',y'')-0$. 令 $p=y'$，则 $y''=p'$. 所以方程转化为 $F(x,p,p')=0$，即转化为一个一阶方程了.

例 1.2.1. 解微分方程 $xy''+(x^2-1)(y'-1)=0$

解. 令 $p=y'$，方程转化为 $xp'=(1-x^2)(p-1)$.
(1) 若 $p\neq 1$, 注意 $x=0$ 不是原方程的解 (因为 $x=0$ 则 $y'=1$, 所以 $y=x+C=C$, 这与 $y'=1$ 矛盾), 则分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p-1}=\dfrac{1-x^2}{x}\mathrm{d}x$. 两边积分即得 $y'=p=C_1xe^{-\frac{1}{2}x^2}+1$. 故 $y=-C_1e^{-\frac{x^2}{2}}+x+C_2.(C_1\neq 0)$
(2)$p=1$ 是方程的解，可以并入上述通解.
故通解为 $y=-C_1e^{-\frac{x^2}{2}}+x+C_2.(C_1\neq 0,C_2\in\mathbb{R})$ □

例 1.2.2. 解微分方程 $xy''=y'\ln\dfrac{y'}{x}$.

解. 令 $p=y'$，方程转化为 $p'=\dfrac{p}{x}\ln\dfrac{p}{x}$. 可以看出，这是一个齐次方程.

于是令 $u=\dfrac{p}{x}$，题目已经要求了 $x\neq 0$，所以方程转化为 $xu'=u(\ln u-1)$.

分离变量，当 $\ln u-1\neq 0$ 时，得 $u=e^{C_1x+1}(C_1\neq 0)$. 而 $\ln u-1=0$ 也是解，此时 $C_1=0$ 并入通解中. 故 $u=e^{C_1x+1}$.

所以 $y'=xe^{C_1x+1}$. 注意，直接积分无法得出. 采用分部积分法. 有

$$y=\int xe^{C_1x+1}\mathrm{d}x+C_2=\int\frac{1}{C_1}x\mathrm{d}(e^{C_1x+1})=\frac{1}{C_1}(xe^{C_1x+1}-\frac{1}{C_1}e^{C_1x+1})+C_2(C_1\neq 0)$$

而当 $C_1=0$ 时，$y=\dfrac{1}{2}ex^2+C_2$.

综上，$y=\begin{cases}\dfrac{1}{C_1}(xe^{C_1x+1}-\dfrac{1}{C_1}e^{C_1x+1})+C_2, & C_1\neq 0\\ \dfrac{1}{2}ex^2+C_2, & C_1=0\end{cases}$. □

1.2.2 不显含自变量 x 的二阶微分方程

即方程少了 x，变为 $F(y,y',y'')=0$. 此时令 $p=y'$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=0$. 方程变为 $F(y,p,p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y})=0$，可以看成一阶方程.

此时，当 $x=x_0$ 时，$y'(x_0)=p(x_0)$. 因而当 $y(x_0)=a_1,y'(x_0)=a_2$ 时，有 $p(x_0)=a_2$. 这里 a_1,a_2 是特定的函数值.

例 1.2.3. 解微分方程的特解 $\begin{cases}yy''+(y')^2=0\\ y(0)=1,y'(0)=\sqrt{3}\end{cases}$

解. 令 $y'=p$，则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

原方程化为 $\dfrac{p\mathrm{d}p}{-p^2-1}=\dfrac{1}{y}\mathrm{d}y$.

积分得 $-\dfrac{1}{2}\ln(p^2+1)=\ln|y|+C_1$. 由 $y=1$ 时，$p=-\sqrt{3}$ 可得 $p=\dfrac{-\sqrt{4-y^2}}{y}$.

再代入 $p=y'$，得 $-\dfrac{y}{\sqrt{4-y^2}}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$. 积分得 $\sqrt{4-y^2}=x+C$. 又 $y(0)=1$，故 $C=\sqrt{3}$.

综上，方程的特解为 $\sqrt{4-y^2}=x+\sqrt{3}$. 它是一个圆，方程为 $(x+\sqrt{3})^2+y^2=4(x\geqslant-\sqrt{3})$. □

1.3 二阶线性微分方程

二阶微分方程的一般形式和相应的齐次方程分别为

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{1.3.1}$$

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{1.3.2}$$

1.3.1 解的结构

这里只是给出一些定理和定义，可自行跳过.

定理 1.3.1 (初值问题的存在唯一性). 若给定初值条件使得 $\begin{cases}y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)\\ y(x_0)=\alpha,y'(x_0)=\beta\end{cases}$，则在 x_0 的邻域存在唯一的解. 若 $\alpha=\beta=0$，则这个唯一解是 $y(x)=0$，恒为 0.

上述定理的证明较为繁琐且超出所学知识，这里不证明.

定理 1.3.2 (解的线性性). 若 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程1.3.2的解，则其线性组合

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

也是方程1.3.2的解. 其中 C_1, C_2 是任意常数.

定理 1.3.3 (解的叠加性). 以下两个表述等价：

1° 若 y_1, y_2 是一般方程1.3.1的解，则 $y_1 - y_2$ 是齐次方程1.3.2的解.

2° 若 $y_0(x)$ 是一般方程1.3.1的解，$y(x)$ 是齐次方程1.3.2的解，则 $y + y_0$ 是一般方程1.3.1的解.

上述定理不证明.

下面给出几个定义：

定义 1.3.1 (线性相关和线性无关). 对于定义在区间 I 上的函数 $y_1(x), y_2(x)$，对 $\forall C_1, C_2$ 及 $\forall x \in I$，均有 $C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0$，则称其线性无关.

定义 1.3.2 (Wronski 行列式). 对于定义在区间 I 上的**可导函数** y_1, y_2，Wronski 行列式为

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

关于 wronski 行列式的一些定理：

定理 1.3.4 (解的关系：Liouville(刘维尔) 公式). 设 y_1, y_2 是齐次方程 1.3.2 的两个解，则两个解的 Wronski 行列式表示为 Liouville(刘维尔) 公式：

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t}$$

其中 x_0 是区间 I 内任意一点.

定理 1.3.5 (解的讨论). 以下是关于解的讨论. 设 y_1, y_2 是齐次方程 1.3.2 的两个解.

1° 两个解线性相关 $\Leftrightarrow$Wronski 行列式恒为 0.

2° 两个解线性无关 $\Leftrightarrow$Wronski 行列式处处不为 0.

3° 两个解线性无关，对 $\forall C_1, C_2$，该方程的解可以表示为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

定义 1.3.3 (基本解组). 齐次方程1.3.2的一组线性无关的解称为基本解组.

关于基本解组，有以下定理：

定理 1.3.6 (基本解组的一定存在性). 齐次方程1.3.2的基本解组一定存在.

证明. 取两组数 α_1,β_1 和 α_2,β_2 使得 $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix} \neq 0$. 下面两个初值问题:

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=0\\ y(x_0)=\alpha_1, y'(x_0)=\beta_1\end{cases}$$
$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=0\\ y(x_0)=\alpha_2, y'(x_0)=\beta_2\end{cases}$$

则由定理1.3.1，它们各自有唯一解 y_1,y_2. 而所得唯一解 y_1,y_2 在 x_0 处的 Wronski 行列式不为 0，所以它们是线性无关的. 即它们构成了一组基本解组. □

1.3.2 用 Liouville 刘维尔公式求齐次方程的基本解组

以下是比较有用的球基本解组的常用方法:如果已经知道了齐次方程1.3.2的一个解 y_1,则由定理1.3.4得

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

可以得到另一个线性无关的解. 于是就可以把通解写出.

一般的一个通解都比较容易看得出来，可以是简单的基本函数. 或者可以待定系数求出.

例 1.3.1. 求方程 $xy''-y'=0$ 的通解.

解. 得知 $y_1=1$ 是一个解. 由于方程可以表示为 $y''-\dfrac{1}{x}=0$，记 $p(x)=-\dfrac{1}{x}$. 则

$$y_2=\int e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2$$

所以通解为 $y=C_1+C\cdot\dfrac{1}{2}x^2=C_1+C_2x^2$. □

例 1.3.2. 求 $(1-x)y''+xy'-y=0$ 的通解.

解. 观察一波. 可知 $y=x$ 是一个解，套公式得 $y_2=e^x$.
这里想要说明齐次的问题：可以发现，若要使左式等于 0，则 x 都尽可能消去. 因而最后得到的 x 幂次需要一致. 因为 y' 前多了一个 x，可以考虑 $y=ax^n+b$ 使 xy' 和 y 的幂次一致，又要使 $(1-x)y''$ 与 xy' 的幂次一致，则只有 $n=1$. 然后代入待定系数得解. □

例 1.3.3. 求 $(x-1)y''-(x+1)y'+2y=0$ 的通解.

解. 注意到 y'',y',y 前面的系数加在一起是 $(x-1)-(x+1)+2=0$ 正好. 所以要让 $y=y'=y''$，这样的函数就是 $y=e^x$.
所以 $y_1=e^x$ 是一个解，另一个解套公式得 $y_2=x^2-1$.
所以通解为 $y=C_1e^x+C_2(x^2-1)$.
注意：通解中的 $C_2(x^2-1)$ 如果拆开成 $C_2x^2-C_2$，然后由 C_2 的任意性写成其余常数，即通解写为 $y=C_1e^x+C_2x^2+C_3$. 这样是错的，因为它是一个整体，就算是常数，也是有关联的. □

1.3.3 用常数变易法求特解

如果已知对应齐次方程的特解通解为 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$. 还差一个特解. 设一般方程1.3.1的特解为 $y_0(x)$. 现在求之.

假设一般方程也有形如

$$y_0(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

的特解. 就是把上面的常数变成了函数，即 $C_1(x), C_2(x)$ 不是常数，而是待定函数. $y_1(x), y_2(x)$ 与上对应. 主要思路：对 y_0 求一阶导数，由于是特解，并为了避免出现 $C_1(x), C_2(x)$ 的高阶导数 (即使 y_0 的导数与 $C_1(x), C_2(x)$ 是常数时的形式相同)，可以令

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$$

再对 $y_0(x)$ 求二阶导数，得出 y_0', y_0'' 的表达式. 代入一般方程得

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x)$$

于是联立这两个方程，由 Cramer 法则得

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{-y_2(x)f(x)}{W(x)}, C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}$$

其中 $W(x)$ 是 $y_1(x), y_2(x)$ 的 Wronski 行列式.

所以积分后得

$$y_0 = y_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{-y_2(t)f(t)}{W(t)}\mathrm{d}t + y_2(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}\mathrm{d}t$$

为一个特解.

例 1.3.4. 求非齐次方程 $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ 的特解.

解. 先求齐次方程 $y'' + y = 0$ 的通解. 这是一个二阶线性微分方程，可得 $y = C_1 \cos x + C_2 sinx$.
常数变易法，转化为特解 $y_0 = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$. 满足：

$$C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0$$
$$C_1'(x) - \sin x + C_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x}$$

解得 $C_1'(x) = -\tan x, C_2'(x) = 1$，积分得 $C_1(x) = \ln|\cos x|, C_2(x) = x$.
所以特解为 $y_0 = \cos x \ln|\cos x| + x\sin x$. □

例 1.3.5. 已知 $y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^3$ 是某个二阶线性微分方程的三个特解，求这个微分方程和它的通

解.

解. 由定理1.3.3，可得 $y_2-y_1=x-1, y_3-y_1=x^3-1$ 是其齐次方程的两个解，且线性无关. 只加上一个特解就是其通解了.

故通解为 $y=C_1(x-1)+C_2(x^3-1)+1$(其中 1 是特解).

现求微分方程. 实际上是把 C_1, C_2 换掉. 求导得 $y'=C_1+3C_2x^2, y''=6C_2x$.

所以 $C_1=y'-\frac{x}{2}y'', C_2=\frac{y''}{6x}$，代入通解即得方程. □

1.4 特殊的一类：二阶常系数微分方程

与前面的讨论类似，不过这里的系数是常数. 即形如

$$y''+py'+qy=0$$

的方程. 这就比较好办了，因为幂次都一样，那么只要令 $y=e^{\lambda x}$ 代入即得特征方程

$$\lambda^2+p\lambda+q=0$$

现在讨论这个方程.

(1) **方程有两个不同的实根** λ_1, λ_2.
则 $y_1(x)=e^{\lambda_1 x}, y_2(x)=e^{\lambda_2 x}$，计算得 Wronski 行列式不为 0. 所以通解为

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$$

其中 C_1, C_2 是常数.

(2) **方程有两个不同的复根** $\lambda_1=\alpha+\mathrm{i}\beta, \lambda_2=\alpha-\mathrm{i}\beta$. 由**欧拉公式**得

$$e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+\mathrm{i}\sin\beta x), e^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-\mathrm{i}\sin\beta x)$$

做变换 $e^{\alpha x}\cos\beta x=\dfrac{e^{\lambda_1 x}+e^{\lambda_2 x}}{2}e^{\alpha x}, e^{\alpha x}\sin\beta x=\dfrac{e^{\lambda_1 x}-e^{\lambda_2 x}}{2\mathrm{i}}e^{\alpha x}$ 得

$$y(x)=(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}$$

(3) **方程有一实重根** λ. 则有一解 $y=e^{\lambda x}$. 注意到此时特征方程可以改写为 $(\lambda+\frac{p}{2})^2=0$. 此时方程有一个特解 $y_1=e^{-\frac{p}{2}x}$.
由 Liouville 公式求另一个解得 $y_2=e^{\lambda x}\displaystyle\int\frac{1}{(e^{\lambda x})^2}e^{\int -p\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=xe^{\lambda x}$.
故方程的通解为 $y(x)=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x}=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$.

将其推广到 n 元：对方程 $y^n + p_{n-1}y^{n-1} + \cdots + p_0 y = 0$，其特征方程为 $\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_0 = 0$.

设它的实根为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$. 对于某一个 λ_i，若它有 k 重实根，则该方程的一部分解为

$$e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, \cdots, x^{k-1}e^{\lambda_i x}$$

每个解类似的形式构成的所有解就是实数部分的解.

同理，设它一个虚根为 $\alpha_i \pm \beta_i$，且是 r 重虚根. 则

$$e^{\alpha_i x}\cos\beta_i x, e^{\alpha_i x}\sin\beta_i x, xe^{\alpha_i x}\cos\beta_i x, xe^{\alpha_i x}\sin\beta_i x, \cdots, x^{r-1}e^{\alpha_i x}\cos\beta_i x, x^{r-1}e^{\alpha_i x}\sin\beta_i x$$

是它的一部分解.

特别情形： 记 $f(x) = y'' + py' + qy$，$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ 是一个系数已知的多项式.

1. **方程** $f(x) = P_n(x)$.

   (1) $\lambda = 0$ 不是齐次方程 $f(x) = 0$ 的特征根. 则其特解为 $y = Q_n(x)$.
   其中 $Q_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k$ 是一个系数未知的多项式，须代入方程中解出.

   (2) $\lambda = 0$ 是一重特征根. 则 $q = 0$，特解为 $y = xQ_n(x)$.

   (3) $\lambda = 0$ 是二重重根. 则 $p = q = 0$，特解为 $y = x^2 Q_n(x)$.

2. **方程** $f(x) = e^{ax}P_n(x)$. 易知其一个特解为 $y = e^{ax}Q_n(x)$.
   代入得 $Q_n''(x) + (2a+p)Q_n'(x) + (a^2 + pa + q)Q_n(x) = P_n(x)$.

   (1) $\lambda = a$ 不是特征根. 则特解为 $y = e^{ax}Q_n(x)$.

   (2) $\lambda = a$ 是一重特征根. 则 $Q_n(x)$ 前的系数为 0，特解为 $y = xe^{ax}Q_n(x)$.

   (3) $\lambda = a$ 是二重特征根. 则 $Q_n(x), Q_n'(x)$ 前的系数为 0，特解为 $y = x^2 e^{ax}Q_n(x)$.

3. **方程** $f(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)P_n(x)$ **或** $e^{\alpha x}\sin(\beta x)P_n(x)$. 相当于情形 2 按虚根处理，即方程变为 $f(x) = e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}P_n(x)$，特解为 $y = e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}Q_n(x)$，然后按照实部虚部分别相等对比即可. 因此同上理，有

   (1) $\lambda = \alpha \pm \beta$ 不特征根，则特解为 $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)Q_n(x)$.

   (2) $\lambda = \alpha \pm \beta$ 是特征根，则特解为 $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)xQ_n(x)$.

   注意，由虚根成对定理知二阶方程只有以上两种情况.

例 1.4.1. 解微分方程 $y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{2x} + e^{3x}$.

解. 把它分解为

$$\begin{aligned}
&y'' - 6y' + 9y = 0 && \text{(求通解)}\\
&y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{2x} && \text{(求特解)}\\
&y'' - 6y' + 9y = e^{3x} && \text{(求特解)}
\end{aligned}$$

然后解之. 对于第一个齐次方程，其通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$.

对于第二个方程，设一个通解为 $y=e^{2x}(ax+b)$，代入得 $a=2,b=1/2$.

对于第三个方程，由于 $x=3$ 是二重根，所以特解为 $y=x^2e^{3x}\cdot Q_0(x)$，这里是 0 次多项式，则为常数，需要带入解出常数的值. 最后得 $C=1/2$.

所以解为 $y=(C_1+C_2x)e^{3x}+(1/2x^2+2x+1/2)e^{3x}=(C_1+C_2x+1/2x^2)e^{3x}$. □

下面介绍一种非线性转化为线性方程的办法. 对于 $x^2y''+pxy'+qy=f(x)$，$x\neq 0$ 时，转换为 $y''+\dfrac{p}{x}y'+\dfrac{q}{x^2}y=\dfrac{1}{x^2}f(x)$. 想办法将其中的 $1/x,1/x^2$ 消去. 可以令 $x=e^t$，则 $t=\ln x$. 于是

$$\begin{aligned} y'(x)&=y'(t)\cdot t'(x)=\frac{1}{x}y'(t)\\ y''(x)&=\frac{1}{x^2}(y''(t)-y'(t)) \end{aligned}$$