数学分析笔记整理

BigfufuOuO

2022 年 5 月 19 日

目录

Chapter 1

常微分方程初步

既然是初步，则要求不会太多. 提供几种常见的常微分方程. 此处常微分方程是指，只有一个自变量的未知函数 $F(x, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$.

1.1 一阶常微分方程

1.1.1 可分离变量形方程

对于形如
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x) \cdot h(y)$$
的自变量与因变量可分离的方程:

1° $h(y) \neq 0$ 时，方程改写为
$$\frac{1}{h(y)}\mathrm{d}y = g(x)\mathrm{d}x$$
两边积分得 $H(y) = F(x) + C$. 其中 C 是任意常数 (一般统一将常数写在右边). $H(y), F(x)$ 分别是 $1/h(y), g(x)$ 的原函数.

此时 $H(y) = F(x) + C$ 为**隐式解**. 形如 $y = f(x)$ 的为**显式解**.

2° $h(y) = 0$ 时，若 $\exists y_0$ 使得 $h(y_0) = 0$，则 $y = y_0$ 是一个特解.

例 1.1.1. 解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \ln x$.

解. (1)$y \neq 0$，则 $1/y\mathrm{d}y = \ln x\mathrm{d}x \Rightarrow \ln|y| = x\ln x - x + C$.

故 $|y| = e^{x\ln x - x} \cdot e^C \Rightarrow y = \pm e^C \cdot e^{x\ln x - x}$.

记 $C = \pm e^C$，则解为 $y = C \cdot e^{x\ln x - x}$.

(2)$y = 0$ 时，可知显然成立. 故 $y = 0$ 是方程的解，将其代入 (1) 的通解得 $C = 0$.

故方程的解为 $y = C \cdot e^{x\ln x - x}(C \in \mathbb{R})$. □

1.1.2 齐次方程

对于形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$$

的方程. f 满足一定范围内的 x,y,t，均有 $f(x,y)=t^n f(tx,ty)$，则称之为 n 次齐次函数.

由齐次方程有 $f(1,\frac{y}{x})=f(x,y)$，则原方程转化为 $\frac{y}{x}=\varphi(1,\frac{y}{x})=\varphi(\frac{y}{x})$. 令 $u=y/x(x\neq 0)$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u}{dx}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. 或 $x=0$(**注意！不要漏解**).

所以原方程转化为 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=\varphi(u)$，分离变量得 $\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 或 $\varphi(u)-u=0$(**注意！不要漏解**).

例 1.1.2. 解微分方程 $(y^2-2xy)\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=0$.

解. 令 $u=y/x$，转化为方程 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u-u^2$.

1° $x\neq 0$

(1)$u-u^2\neq 0$，即 $u\neq 0,1$ 时，分离变量得 $\frac{\mathrm{d}u}{u-u^2}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\Rightarrow \ln|u|-\ln|1-u|=\ln|x|+\ln|C|$. 化简得 $\frac{y}{x-y}=Cx(C\in\mathbb{R})$.

(2)$u=0,1$ 时，得 $y=0$ 或 $y=x$.

2° $x=0$ 代入原方程成立.

故解为 $\frac{y}{x-y}=Cx(C\in\mathbb{R}),y=0,y=x,x=0$. □

例 1.1.3. 解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x+y\tan\frac{x}{y}}$.

解 (**简要**). 化简得 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x}{y}+\tan\frac{x}{y}$. 注意此时 x 在分子，故令 $u=x/y$，其余做法与例1.1.2类似. □

例 1.1.4. 解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$，其中 $a_i,b_i,c_i(i=1,2)$ 为常数.

解 (**简要**). 由于 c_1,c_2 的存在，RHS[1]无法齐次化 (即同除以 x 或 y). 但可以配凑系数使得 $c_1=c_2$ 消失. 即令

$$c_1 = a_1h+b_1k$$
$$c_2 = a_2h+b_2k$$

代入原式得 $\frac{\mathrm{d}(y+k)}{\mathrm{d}(x+h)}=\frac{a_1(x+h)+b_1(y+k)}{a_2(x+h)+b_2(y+k)}$. 令 $u=\frac{y+k}{x+h}$ 即可. 然后再解出 h,k 代入. □

1.1.3 一阶线性微分方程

最好的办法：记公式.

[1]右式. LHS 表示左式.