数学分析笔记整理

BigfufuOuO

2022 年 5 月 20 日

目录

Chapter 1

常微分方程初步

既然是初步，则要求不会太多. 提供几种常见的常微分方程. 此处常微分方程是指，只有一个自变量的未知函数 $F(x,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$.

1.1 一阶常微分方程

1.1.1 可分离变量型方程

对于形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g(x)\cdot h(y)$$

的自变量与因变量可分离的方程:

1° $h(y)\neq 0$ 时，方程改写为

$$\frac{1}{h(y)}\mathrm{d}y=g(x)\mathrm{d}x$$

两边积分得 $H(y)=F(x)+C$. 其中 C 是任意常数 (一般统一将常数写在右边). $H(y),F(x)$ 分别是 $1/h(y),g(x)$ 的原函数.

此时 $H(y)=F(x)+C$ 为**隐式解**. 形如 $y=f(x)$ 的为**显式解**.

2° $h(y)=0$ 时，若 $\exists y_0$ 使得 $h(y_0)=0$，则 $y=y_0$ 是一个特解.

例 1.1.1. 解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\ln x$.

解. (1)$y\neq 0$，则 $1/y\mathrm{d}y=\ln x\mathrm{d}x\Rightarrow \ln|y|=x\ln x-x+C$.

故 $|y|=e^{x\ln x-x}\cdot e^C\Rightarrow y=\pm e^C\cdot e^{x\ln x-x}$.

记 $C=\pm e^C(\neq 0)$，则解为 $y=C\cdot e^{x\ln x-x}(C\neq 0)$.

或者有 $\ln|y|+\ln|C|=x\ln x-x$ 同样可得 $C\neq 0$. 这是一个容易犯错的地方.

(2)$y=0$ 时，可知显然成立. 故 $y=0$ 是方程的解，将其代入 (1) 的通解得 $C=0$.

故方程的解为 $y=C\cdot e^{x\ln x-x}(C\in\mathbb{R})$. □

1.1.2 齐次方程

对于形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$$

的方程. f 满足一定范围内的 x,y,t，均有 $f(tx,ty)=t^nf(x,y)$，则称之为 n **次齐次函数**.

对于形如

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

的微分方程，如果 $\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ 是 0 次齐次函数，则称它为齐次微分方程. 此时 $f(x,y)=-\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}=\varphi(\dfrac{x}{y})$.

于是令 $u=y/x(x\neq 0)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u}{dx}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. 或 $x=0$(**注意！不要漏解**).

所以原方程转化为 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=\varphi(u)$，分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ 或 $\varphi(u)-u=0$(**注意！不要漏解**).

注意，这里 $x=0$ 与 $\varphi(u)-u=0$ 不等价，因为后者是在 $x\neq 0$ 时成立的.

例 1.1.2. 解微分方程 $(y^2-2xy)\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=0$.

解. 令 $u=y/x$，转化为方程 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u-u^2$.

1° $x\neq 0$

(1)$u-u^2\neq 0$，即 $u\neq 0,1$ 时，分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u-u^2}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}\Rightarrow \ln|u|-\ln|1-u|=\ln|x|+\ln|C|$. 化简得 $\dfrac{y}{x-y}=Cx(C\in\mathbb{R})$.

(2)$u=0,1$ 时，得 $y=0$ 或 $y=x$.

2° $x=0$ 代入原方程成立.

故解为 $\dfrac{y}{x-y}=Cx(C\in\mathbb{R}),y=0,y=x,x=0$. □

例 1.1.3. 解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x+y\tan\frac{x}{y}}$.

解 (简要). 化简得 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{x}{y}+\tan\dfrac{x}{y}$. 注意此时 x 在分子，故令 $u=x/y$，其余做法与例1.1.2类似. □

例 1.1.4. 解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$，其中 $a_i,b_i,c_i(i=1,2)$ 为常数.

解 (简要). 由于 c_1,c_2 的存在，*RHS*[1]无法齐次化 (即同除以 x 或 y). 但可以配凑系数使得 c_1,c_2 消失. 即令

$$c_1=a_1h+b_1k$$
$$c_2=a_2h+b_2k$$

代入原式得 $\dfrac{\mathrm{d}(y+k)}{\mathrm{d}(x+h)}=\dfrac{a_1(x+h)+b_1(y+k)}{a_2(x+h)+b_2(y+k)}$. 令 $u=\dfrac{y+k}{x+h}$ 即可. 然后再解出 h,k 代入. □

[1]右式. *LHS* 表示左式.

1.1.3 一阶线性微分方程

最好的办法：记公式.

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)\mathrm{d}x = Q(x)$$

的方程称为**一阶线性齐次微分方程**. 为方便起见，今后用 y' 表示 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，用 y'' 表示 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$. 对于方程

$$y' + P(x)y = 0 \tag{1.1.1}$$

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{1.1.2}$$

方程1.1.1的解为 $y = Ce^{\int -P(x)\mathrm{d}x}(C \in \mathbb{R})$. 方程1.1.2的解为 $y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}(\int Q(x)e^{P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C).(C \in \mathbb{R})$.

若 y_1, y_2 是方程1.1.2的解，则 $y_1 - y_2$ 是方程1.1.1的解.

例 1.1.5. 解微分方程 $xy' - 2y = 2x^4$.

解. 当 $x \neq 0$ 时，化为标准形式为 $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$.
使用公式得 $y = e^{\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x}(\int 2x^3 e^{\int \frac{-2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C) = x^2(x^2 + C).(C \in \mathbb{R})$.
当 $x = 0$ 时，$y = 0$，可并入上通解. □

例 1.1.6. 解微分方程 $y\ln y\mathrm{d}x + (x - \ln y)\mathrm{d}y = 0$

解 (简要). 将 y 看作自变量，x 看作未知函数 $x = x(y)$，则原方程转化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\ln y - x}{y\ln y} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{y\ln y}x = \frac{1}{y}$$

然后使用公式即可. □

例 1.1.7. 解微分方程 $xe^y - xy' = 2$.

解. 这里出现了 e^y，想办法将其消去. 故使两边同时乘以 e^{-y}，得 $x - xe^{-y}y' = 2e^{-y}$.
换元化简，令 $z = e^{-y}$，则 $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{z}z'$. 所以原式写为 $x + xz' = 2z$.
若 $x \neq 0$，套公式得 $z = x^2(1/x + C)$，即 $e^{-y} = x + Cx^2$.
若 $x = 0$，不符合原方程，因而 $x \neq 0$ 不是解. □

1.1.4 Bernoulli(伯努利) 方程

其实是一种特殊的一阶方程转化为线性方程的方法. 对于方程

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

先将方程两边同时除以 y^n 得到

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

作代换 $u = y^{1-n}$ 得

$$u' + (1-n)P(x) = (1-n)Q(x)$$

注意：若 $1-n$ 是小于 0 的整数，表明 y 做分母 ($y \neq 0$)，**不要忘了考虑 $y=0$ 的特解**.

例 1.1.8. 解微分方程 $y' = xy + x^3y^3$

解. 作变量代换 $u = y^{-2}$ 得 $u' + 2ux = -2x^3$. 求得通解 $u = 1 - x^2 + Ce^{-x^2}(C \in \mathbb{R})$. 故通解为 $1/y^2 = 1 - x^2 + Ce^{-x^2}$. 以及特解 $y = 0$. □

1.2 可降阶微分方程

一般二阶微分方程的形式为 $F(x,y,y',y'')=0$，以下是其中特殊的两种形式.

1.2.1 不显含未知函数 y 的二阶方程

即方程少了 y，变为 $F(x,y',y'')-0$. 令 $p=y'$，则 $y''=p'$. 所以方程转化为 $F(x,p,p')=0$，即转化为一个一阶方程了.

例 1.2.1. 解微分方程 $xy'' + (x^2-1)(y'-1) = 0$

解. 令 $p = y'$，方程转化为 $xp' = (1-x^2)(p-1)$.
(1) 若 $p \neq 1$, 注意 $x=0$ 不是原方程的解 (因为 $x=0$ 则 $y'=1$, 所以 $y=x+C=C$, 这与 $y'=1$ 矛盾), 则分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p-1} = \dfrac{1-x^2}{x}$. 两边积分即得 $y' = p = C_1xe^{-\frac{1}{2}x^2}+1$. 故 $y = -C_1e^{-\frac{x^2}{2}} + x + C_2.(C_1 \neq 0)$
(2)$p=1$ 是方程的解，可以并入上述通解.
故通解为 $y = -C_1e^{-\frac{x^2}{2}} + x + C_2.(C_1 \neq 0, C_2 \in \mathbb{R})$ □

例 1.2.2. 解微分方程 $xy'' = y'\ln\dfrac{y'}{x}$.

解. 令 $p=y'$，方程转化为 $p' = \dfrac{p}{x}\ln\dfrac{p}{x}$. 可以看出，这是一个齐次方程.

于是令 $u = \dfrac{p}{x}$，题目已经要求了 $x \neq 0$，所以方程转化为 $xu' = u(\ln u - 1)$.

分离变量，当 $\ln u - 1 \neq 0$ 时，得 $u = e^{C_1x+1}(C_1 \neq 0)$. 而 $\ln u - 1 = 0$ 也是解，此时 $C_1 = 0$ 并入通解中. 故 $u = e^{C_1x+1}$.

所以 $y' = xe^{C_1x+1}$. 注意，直接积分无法得出. 采用分部积分法. 有

$$y = \int xe^{C_1x+1}\mathrm{d}x + C_2 = \int \frac{1}{C_1}x\mathrm{d}(e^{C_1x+1}) = \frac{1}{C_1}(xe^{C_1x+1} - \frac{1}{C_1}e^{C_1x+1}) + C_2(C_1 \neq 0)$$

而当 $C_1 = 0$ 时，$y = \dfrac{1}{2}ex^2 + C_2$.

综上，$y = \begin{cases} \dfrac{1}{C_1}(xe^{C_1x+1} - \dfrac{1}{C_1}e^{C_1x+1}) + C_2, & C_1 \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}ex^2 + C_2, & C_1 = 0 \end{cases}$. □