

## תרגיל 3 DP

(תכנון דינאמי)

### שאלה 1. משחק

נתונה סדרת מספרים  $a_1, a_2, \dots, a_n$  הסודרים בשורה.

במשחק משתתפים 2 שחקנים.

כל שחקן בתורו לוקח מספר אחד מהקצה הימני או השמאלי של הסדרה כל עוד הסדרה אינה ריקה.

המטרה הכללית של השחקן : להגיע להפרש הגדול ביותר בין סכום המספרים שיצבור עד סוף המשחק לבין הסכום אותו יצבור השחקן השני (עד סוף המשחק).

דוגמא של משחק :

הסדרה: **3,6,10,5**

I. 3 (6,10,5)

II. 6(10,5)

I. 10 (5)

II. 5()

( שחקן 1 ניצח עם הפרש  $2=13-11$  )

א. יש למצוא אסטרטגיה אופטימלית לשחקן (בחירה טובה ביותר עבורו בכל צעד) המבטיחה לו את הרווח המקסימאלי שהוא יכול לקבל בהנחה שהיריב גם מבצע בחירה טובה ביותר עבורו (עבור היריב) בכל צעד.

ב. להשתמש באסטרטגיה האופטימלית כדי לממש משחק למחשב מול שחקן אנושי.

### שאלה 2.

#### Subset Sum Problem

#### בעיית סכום התת-קבוצתי

נתון מערך **A** של מספרים שלמים, ו- **S** מספר יעד שלם כלשהו. לבנות אלגוריתם אשר בהינתן מערך **A** ומספר **S** בודק האם קיימת תת-קבוצה של **A** שסכום איבריה הוא בדיוק **S**.

לדוגמא, אם המערך **A** הוא  $A=\{2,1,13,5,3,21\}$ :

עבור **S=16** על האלגוריתם להחזיר **true** ( $2+1+13=16$  or  $13+3=16$ )

עבור **S=12** על האלגוריתם להחזיר **false**.

לפתור בעיית סכום תת-קבוצתי כללית בשיטת תכנון דינאמי:

1. יהי  $c(i,j)$  – אמת (1) כאשר קיימת תת-קבוצה של  $A[1..i]$  שסכום איבריה הוא בדיוק  $j$ , אחרת  $c(i,j)$  שווה לשקר (0).

למשל, עבור  $A=\{2,1,13,5,3,21\}$   
 $c(4,3)=1$   
 $c(4,4)=0$   
בנה נוסחת נסיגה עבור  $c(i,j)$ .

2. בנה אלגוריתם  $\text{Subset\_Sum}(A,S)$  שמחשב  $c(n,S)$ .  
(אלגוריתם דינאמי שממלא טבלה C).

3. מלא טבלה C (לפי האלגוריתם מהסעיף הקודם) עבור מערך A מהדוגמא ו-  $S = 6$ .

4. כתוב אלגוריתם  $\text{Print\_Subset}(C,i,j)$  שמשחזר את הפתרון (תת-קבוצה) על ידי טבלה C הבנויה בסעיף הקודם

5. מהי סיבוכיות האלגוריתם  $\text{Subset\_Sum}(A,S)$ ?  
האם האלגוריתם הוא אלגוריתם פולינומיאלי?

### שאלה 3. Coin change problem

במדינה אינשם יש רק שלושה סוגי מטבעות: 1, 4, 6.  
הבעיה: להחזיר סכום של K על ידי מספר מינימאלי של מטבעות.  
לדוגמא: עבור  $K=7$  הפתרון הוא  $7 = 6+1$ , שיותר טוב מ-  $7 = 4+1+1+1$

א. הוכח שכל סכום אפשר לפרוט על ידי אותם שלושה סוגי מטבעות.

ב. יהי  $c(k)$  - מספר מינימאלי של מטבעות הדרוש כדי לפרוט סכום k  
למשל,

$$c(6) = 1 \quad (6=6) \\ c(3) = 3 \quad (3=1+1+1)$$

(i) תגדיר  $c(0)$

(ii) בנה נוסחת נסיגה עבור  $c(k)$  ( $k=1, \dots, K$ )  
אפשר להניח שהערכים של מטבעות נשמרים במערך d:  $d[1]=1; d[2]=4; d[3]=6$

ג. בנה אלגוריתם  $\text{Coin\_Return}(d,K)$  שמחשב  $c(K)$   
(אלגוריתם דינאמי שממלא טבלה C).

ד. מלא טבלה C (לפי האלגוריתם מהסעיף הקודם) עבור  $K = 10$ .

ה. כתוב אלגוריתם שמשחזר את הפתרון האופטימאלי  
האם כדאי לשמור נתונים נוספים?

ו. מהי הסיבוכיות של האלגוריתם  $\text{Coin\_Return}(d,K)$  כאשר יש n סוגי מטבעות  
(n - גודל המערך d)