

《数字图像处理》

Chapter 5

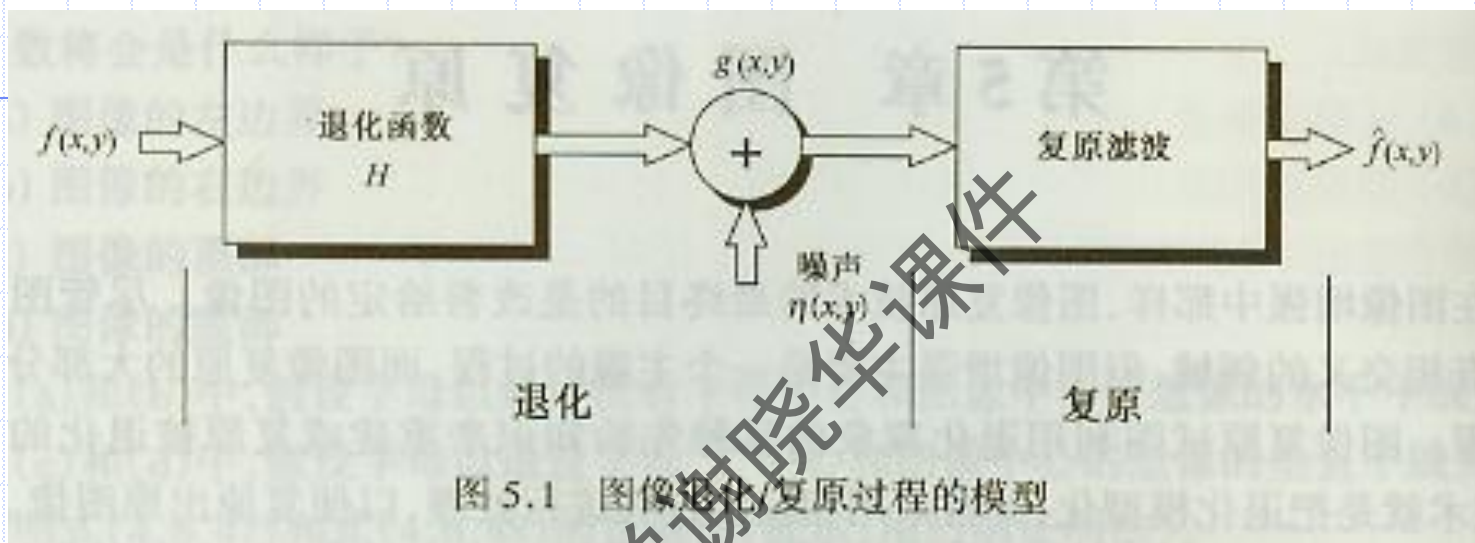
图像复原

谢晓华

中山大学数据科学与计算机学院

- 图像增强是为了人类视觉系统的生理接受特点而设计的一种改善图像的方法,是一个主观的过程。
(美化程度越严重, 离实际越远☺)
- 图像复原是利用退化现象的某种先验知识来重建被退化的图像, 是一个客观的过程。(人脸反美化: 还原本来面目☹)

一. 图像退化与复原过程模型



➤ 图像退化模型:

➤ 空间域:

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y)$$

➤ 频域:

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

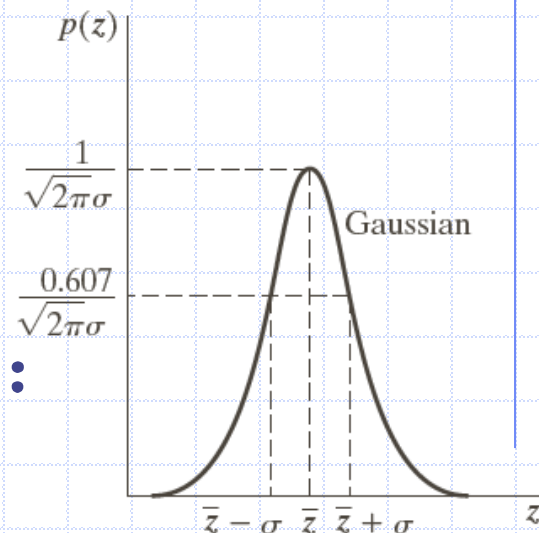
二. 噪声模型

- 噪声来自光照强度、传感器温度和灰尘等。
- 当噪声的Fourier谱是常量时，该噪声成为白噪声。
(以相等比例包含可见光谱中的几乎所有频率)
- 通常把噪声看作来自某个样本集的随机变量。该随机变量可以由一个概率密度函数 (PDF) 刻画。
- 噪声模型有：高斯噪声、瑞利噪声、伽马噪声、指数分布噪声、均匀分布噪声、脉冲（椒盐）噪声。

1. 高斯噪声

高斯随机变量 z 的PDF由下式给出：

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-\bar{z})^2}{2\sigma^2}}$$



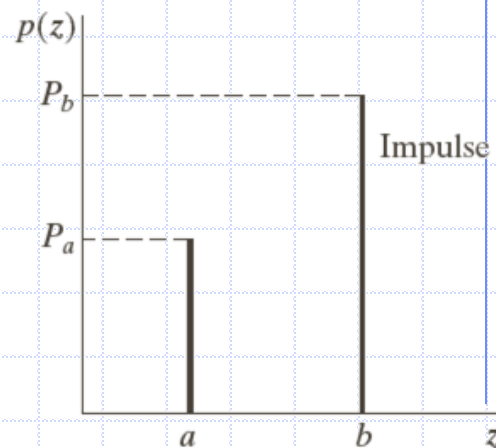
其中 z 表示灰度值， \bar{z} 表示 z 的平均或均值， σ 叫做标准差。单位面积的高斯函数。

其值有70%落在 $[(\bar{z} - \sigma), (\bar{z} + \sigma)]$ ，且有95%落在 $[(\bar{z} - 2\sigma), (\bar{z} + 2\sigma)]$

2. 椒盐(双极脉冲)噪声

椒盐随机变量 z 的PDF由下式给出:

$$p(z) = \begin{cases} P_a & z = a \\ P_b & z = b \\ 1 - P_a - P_b & \text{其他} \end{cases}$$



如果 $b > a$ ，则灰度值 b 和 a 分别显示一个亮点和暗点。

瑞利噪声

瑞利噪声的概率密度函数由下式给出：

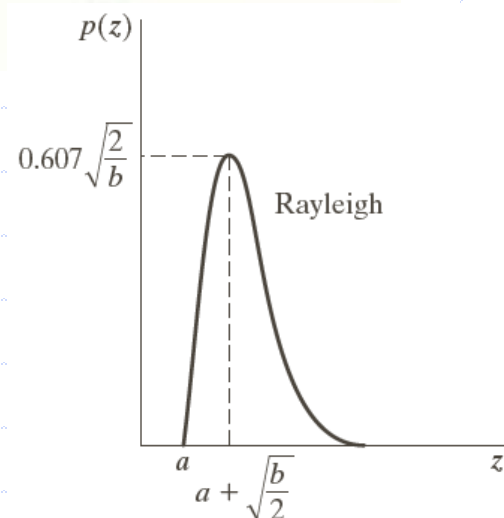
$$p(z) = \begin{cases} \frac{2}{b}(z-a)e^{-(z-a)^2/b} & z \geq a \\ 0 & z < a \end{cases}$$

概率密度的均值和方差由下式给出：

$$\mu = a + \sqrt{\pi b/4}$$

和

$$\sigma^2 = \frac{b(4-\pi)}{4}$$



伽马(爱尔兰)噪声

伽马噪声的 PDF 由下式给出:

$$p(z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

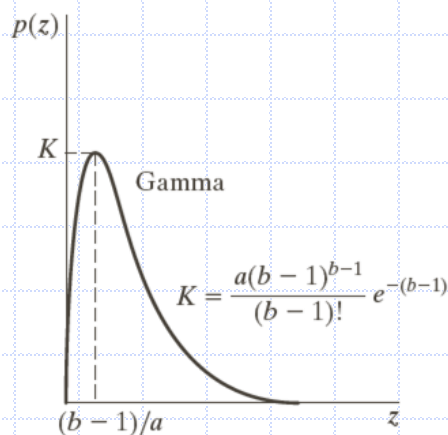
其中, $a > 0$, b 为正整数且“!”表示阶乘。其密度的均值和方差由下式给出:

$$\mu = \frac{b}{a}$$

和

$$\sigma^2 = \frac{b}{a^2}$$

b=1时退化
为指数噪声



指数分布噪声

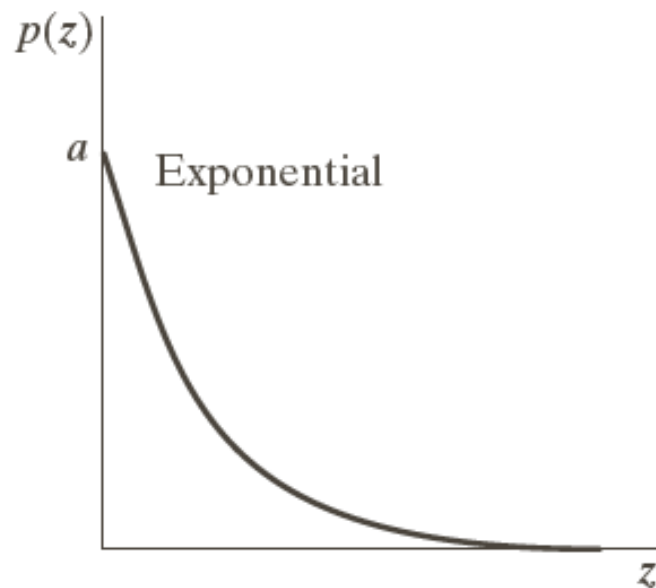
指数噪声的 PDF 可由下式给出：

$$p(z) = \begin{cases} a e^{-az} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

其中, $a > 0$ 。概率密度函数的期望值和方差是：

$$\bar{z} = \frac{1}{a}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{a^2}$$



均匀分布噪声

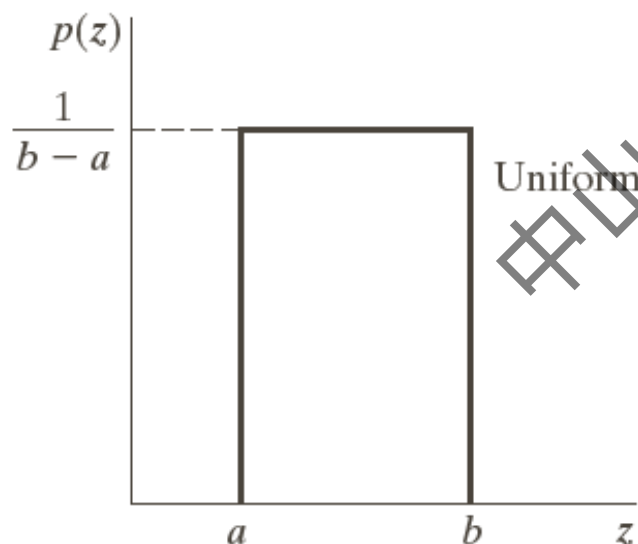
均匀分布噪声的概率密度,可由下式给出:

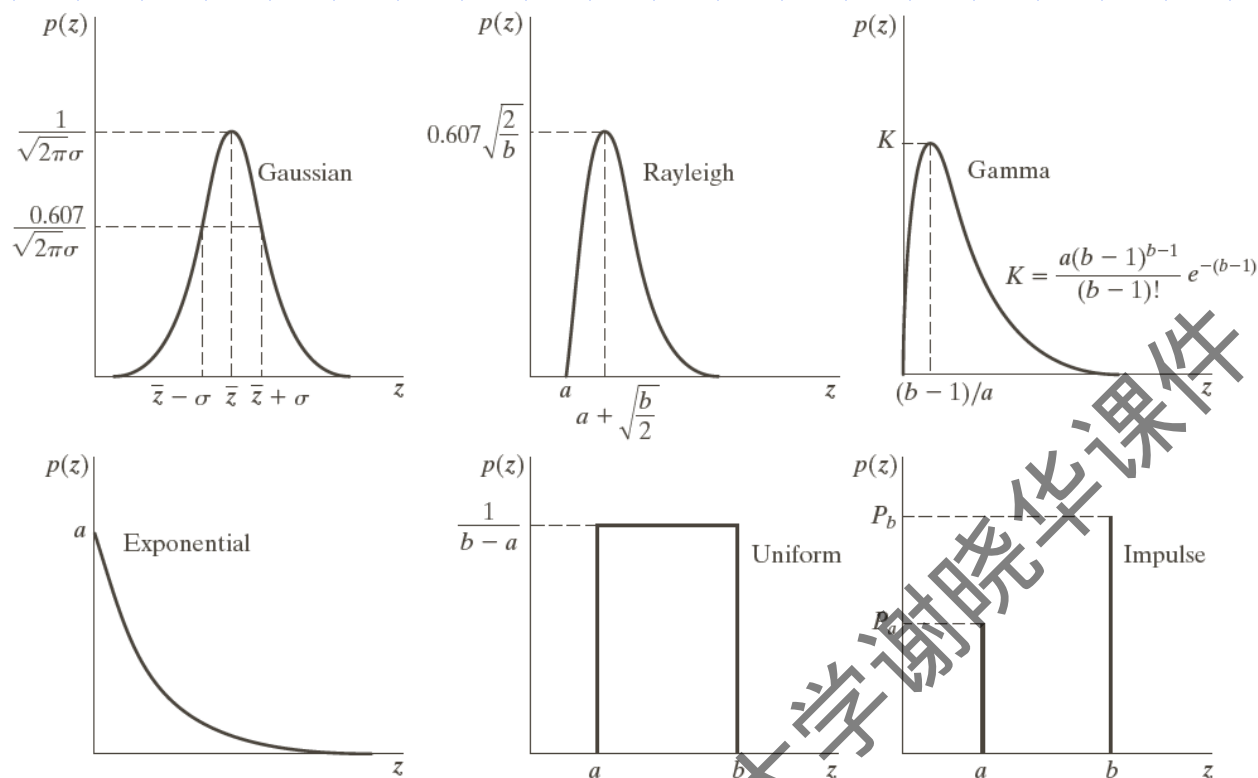
$$p(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq z \leq b \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

概率密度函数的期望值和方差可由下式给出:

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$





a	b	c
d	e	f

FIGURE 5.2 Some important probability density functions.

几乎每个模型都由**a**和**b**两个参数确定，**a**和**b**又与直方图的均值与方差有关。

高斯噪声源于电子电路噪声、触感噪声（低照明度、高温）；
瑞利密度常见于深度成像；
指数、伽马噪声常见于激光成像；
均匀噪声现实中很少见。

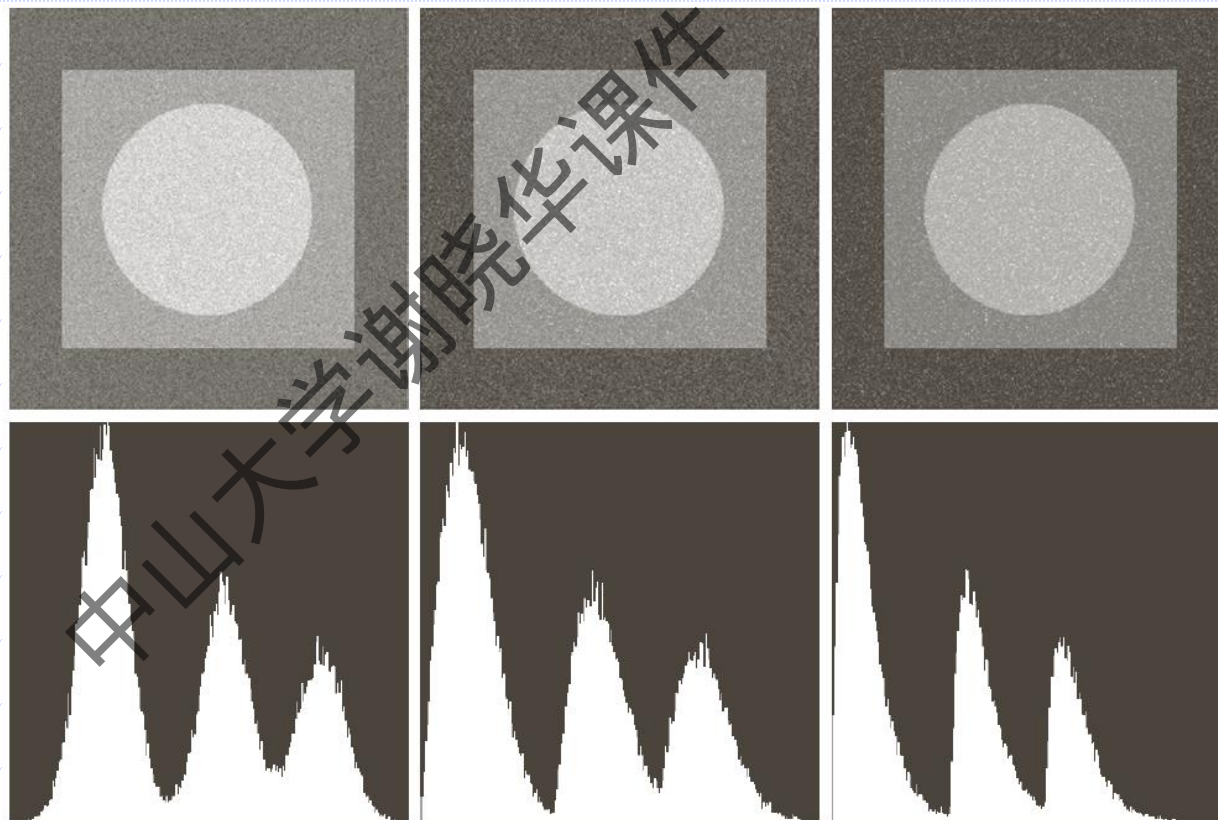


原图

高斯噪声

瑞利噪声

伽马噪声



Gaussian

Rayleigh

Gamma

a	b	c
d	e	f

FIGURE 5.4 Images and histograms resulting from adding Gaussian, Rayleigh, and gamma noise to the image in Fig. 5.3.

从直方图可以看出区别

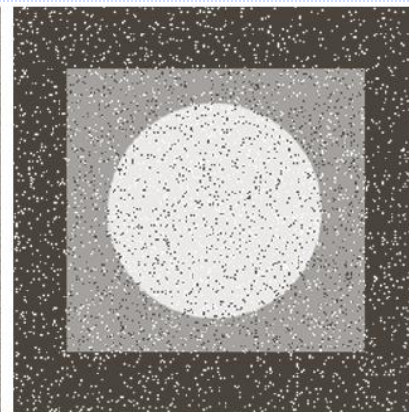
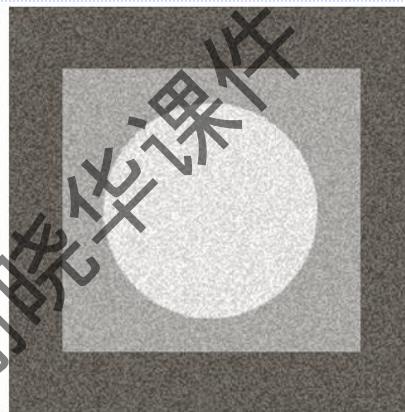
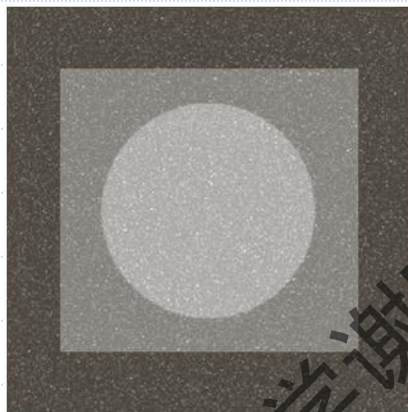


原图

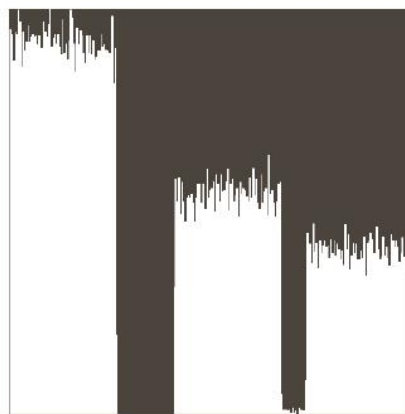
指数噪声

均匀噪声

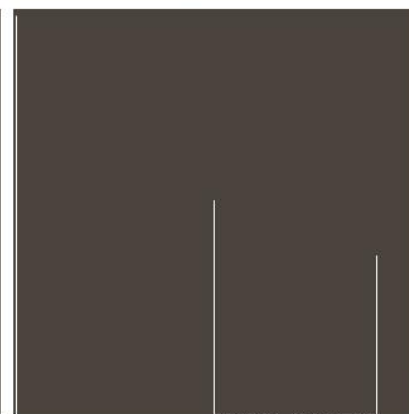
椒盐噪声



Exponential



Uniform



Salt & Pepper

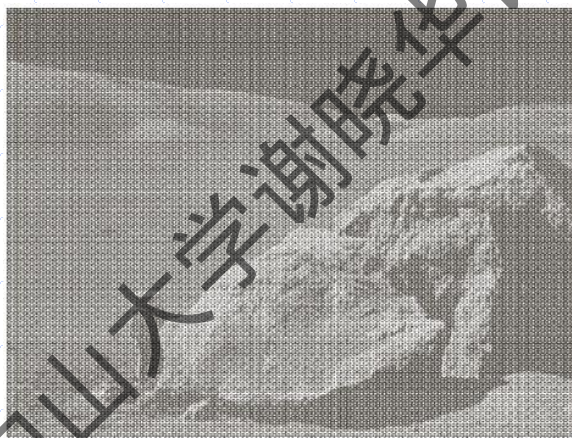
从直方图可以看出区别

g h i
j k l

FIGURE 5.4 (Continued) Images and histograms resulting from adding exponential, uniform, and salt and pepper noise to the image in Fig. 5.3.

3. 周期噪声

周期噪声常在图像获取期间由电力或机电干扰产生。是空间依赖型的噪声, 可以通过频域滤波抑制。



被正弦波污染



在频域表现为共轭脉冲 (查表4.3)

4. 噪声估计

当成像系统（入相机）可用，拍摄纯色场景估计噪声；
否则，选择恒定灰度值区域（根据先验）来估计噪声。

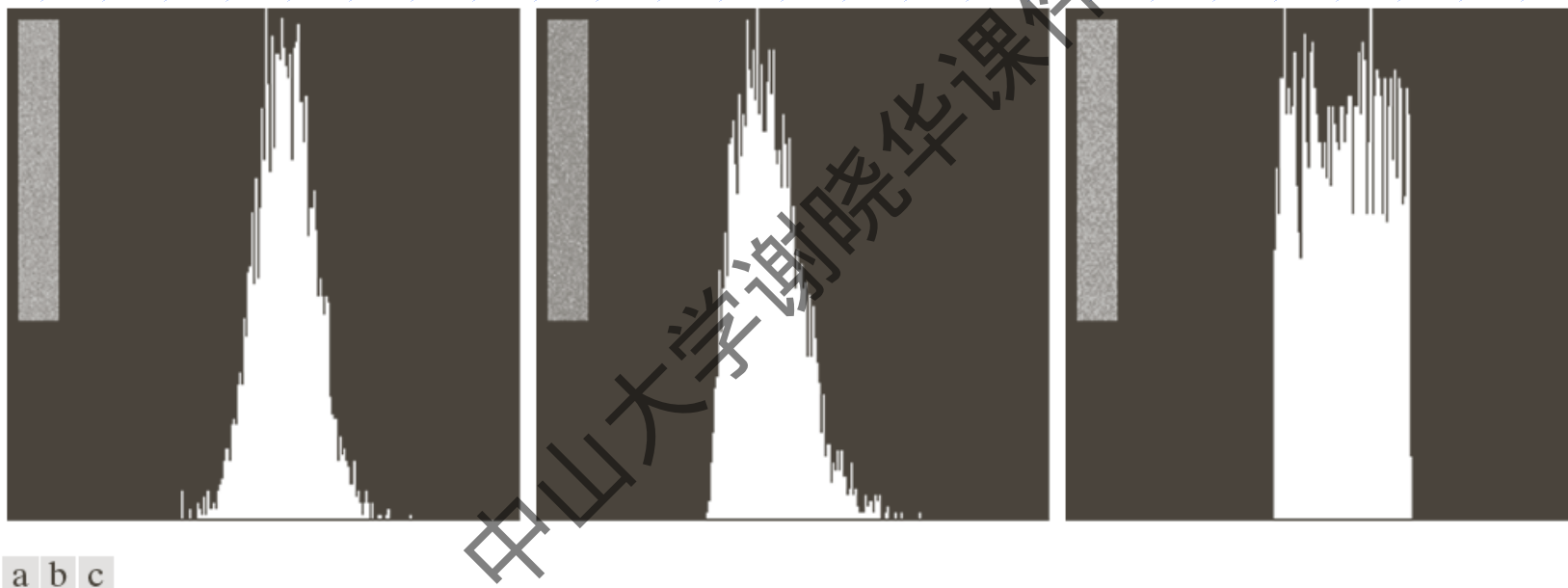


FIGURE 5.6 Histograms computed using small strips (shown as inserts) from (a) the Gaussian, (b) the Rayleigh, and (c) the uniform noisy images in Fig. 5.4.

从这三个小条带（现实中应该为恒值）的直方图分布可以估计它们所带噪声分别接近**高斯**、**瑞利**、**均匀**噪声

4. 参数估计

估计PDF的类别后，需要估计具体参数。

几乎每个模型都由**a**和**b**两个参数确定，**a**和**b**又与直方图的均值与方差有关。因此为了确定噪声模型，我们通常需要估计测试图象的均值与方差。

$$\bar{z} = \sum_{i=0}^{L-1} z_i p(z_i) \quad \sigma^2 = \sum_{i=0}^{L-1} (z_i - \bar{z})^2 p(z_i)$$

其中， z_i 值是像素的灰度值，且 $p(z_i)$ 表示相应的归一化直方图。

三. 只存在噪声的空间滤波复原

➤ 当图像的退化模型如下:

$$g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$$

或

$$G(u, v) = F(u, v) + N(u, v)$$

一般的空间滤波方法:

1. 均值滤波器 (算术、几何均值)
2. 排序统计滤波器
3. 自适应滤波器

1. 均值滤波器

➤ 假设 S_{xy} 表示中心在 (x,y) 点, 尺度为 $m \times n$ 的矩形子图象窗口的坐标组.

算术均值滤波器:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)$$

几何均值滤波器:

$$\hat{f}(x, y) = \left[\prod_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t) \right]^{\frac{1}{mn}}$$

谐波均值滤波器:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{mn}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} \frac{1}{g(s, t)}}$$

逆谐波均值滤波器:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)^{Q+1}}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)^Q}$$

结论:

- 几何均值滤波器与算术均值滤波器相比,更少模糊细节.
- 谐波均值滤波器对”盐”噪声效果好,而不适应”胡椒”噪声.
- 逆谐波均值滤波器当 Q 为正时,用于消除”胡椒”噪声,当 Q 为负时,用于消除”盐”噪声.
- 当 $Q=0$ 时,退化为算术均值滤波器;当 $Q=-1$ 时,退化为谐波均值滤波器.

2. 顺序统计滤波器

最大滤波器: $\hat{f}(x, y) = \max_{(s, y) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$ (适合去盐噪声)

最小滤波器: $\hat{f}(x, y) = \min_{(s, y) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$ (适合去椒噪声)

中点滤波器: $\hat{f}(x, y) = \frac{1}{2} [\max_{(s, y) \in S_{xy}} \{g(s, t)\} + \min_{(s, y) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}]$ (适合高斯噪声)

修正后的阿尔法均值滤波器:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn - d} \sum_{(s, y) \in S_{xy}} g_r(s, t)$$

修正后的阿尔法均值滤波器对多种噪声的图像去噪有效.
其中去掉 $d/2$ 个最大值和 $d/2$ 个最小值.

3. 自适应滤波器

在现实中很难知道

➤ 自适应局部降低噪声滤波器:

滤波器作用于局部区域 S_{xy} 。滤波器在中心化区域中任一点 (x, y) 上的滤波器响应基于以下 4 个量:

- (a) $g(x, y)$ 表示噪声图像在点 (x, y) 上的值;
- (b) σ_η^2 , 干扰 $f(x, y)$ 以形成 $g(x, y)$ 的噪声方差;
- (c) m_L , 在 S_{xy} 上像素点的局部均值;
- (d) σ_L^2 , 在 S_{xy} 上像素点的局部方差。

滤波器的预期性能如下:

1. 如果 σ_η^2 为零, 滤波器应该简单地返回 $g(x, y)$ 的值。这无关紧要, 在 $g(x, y)$ 下零噪声的情况等同于 $f(x, y)$ 。
2. 如果局部方差与 σ_η^2 是高相关的, 那么滤波器要返回一个 $g(x, y)$ 的近似值。一个典型的高局部方差是与边缘相关的, 并且这些边缘应该保留。
3. 如果两个方差相等, 希望滤波器返回区域 S_{xy} 上像素的算术均值。这种情况发生在局部面积与全部图像有相同特性的条件下, 并且局部噪声简单地用求平均来降低。

为了获得 $\hat{f}(x, y)$, 基于这些假定的自适应表达式可以写成:

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_L^2} [g(x, y) - m_L] \quad (5.3.12)$$

自适应中值滤波器

经典中值滤波适合去除低概率椒盐噪声，且在消除非椒盐噪声的时候会影响图像原本细节。

自适应中值滤波器的处理有三个目的：除去“椒盐”噪声，平滑其他非椒盐噪声，并减少诸如物体边界细化或粗化的失真。

优点：

自适应中值滤波器对噪声密度大时更有效，并且平滑非冲激噪声时可以保存细节。

➤ 自适应中值滤波器:

考虑如下符号:

$z_{\min} = S_{xy}$ 中灰度级的最小值 类盐噪声 (脉冲)

$z_{\max} = S_{xy}$ 中灰度级的最大值 类盐噪声 (脉冲)

$z_{\text{med}} = S_{xy}$ 中灰度级的中值

z_{xy} = 在坐标 (x, y) 上的灰度级

$S_{\max} = S_{xy}$ 允许的最大尺寸

S_{xy} 为当前滤波窗口

自适应中值滤波器算法工作在两个层次, 定义为 A 层和 B 层, 如下所示:

A 层:

$$A1 = z_{\text{med}} - z_{\min}$$

$$A2 = z_{\text{med}} - z_{\max}$$

如果 $A1 > 0$ 且 $A2 < 0$, 转到 B 层 确定 z_{med} 不是脉冲

否则增大窗口尺寸

如果窗口尺寸 $\leq S_{\max}$ 重复 A 层

否则输出 z_{xy}

B 层:

$$B1 = z_{xy} - z_{\min}$$

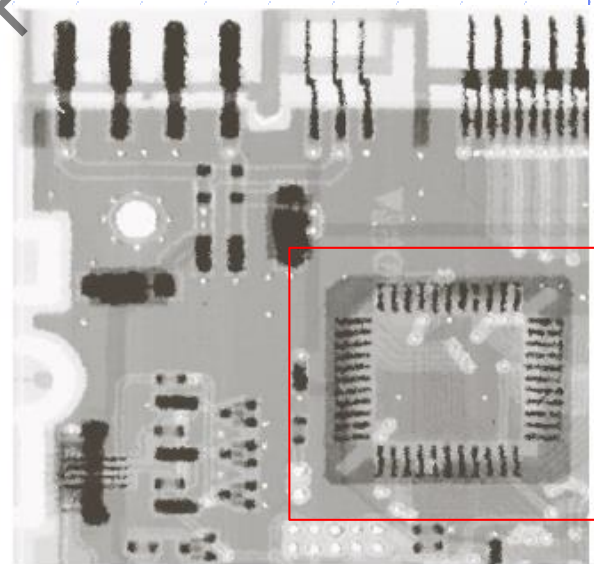
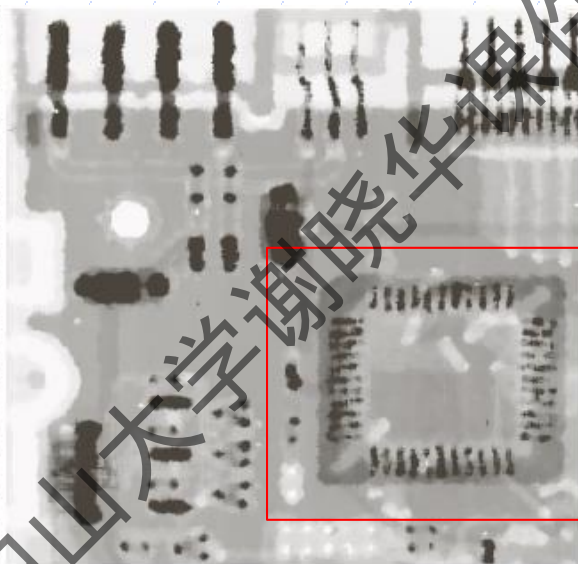
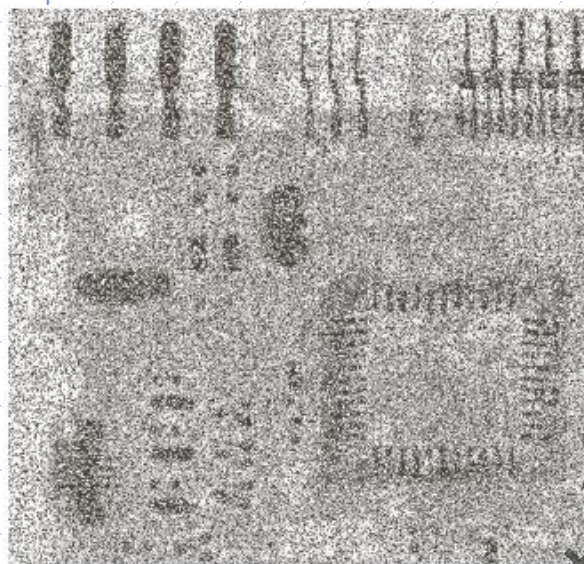
$$B2 = z_{xy} - z_{\max}$$

如果 $B1 > 0$ 且 $B2 < 0$, 输出 z_{xy} 确定 z_{xy} 不是脉冲

否则输出 z_{med}

经典中值滤波

自适应中值滤波



a b c

FIGURE 5.14 (a) Image corrupted by salt-and-pepper noise with probabilities $P_a = P_b = 0.25$. (b) Result of filtering with a 7×7 median filter. (c) Result of adaptive median filtering with $S_{\max} = 7$.

四. 通过频域滤波抑制噪声

1 二维带阻滤波器:

➤ 理想带阻滤波器:

$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & D(u, v) < D_0 - \frac{W}{2} \\ 0, & D_0 - \frac{W}{2} \leq D(u, v) \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1, & D(u, v) > D_0 + \frac{W}{2} \end{cases}$$

$D_0 > 0$ 为频谱中心半径（截止频率）， W 是频带的宽度。

➤ 二维n阶巴特沃斯带阻滤波器:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right]^{2n}}$$

➤ 二维高斯带阻滤波器:

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right]^2}$$

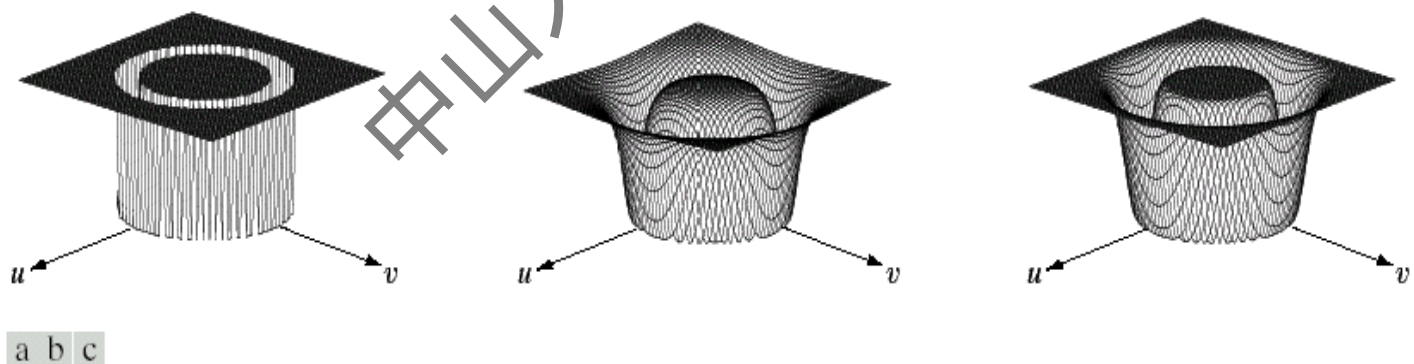
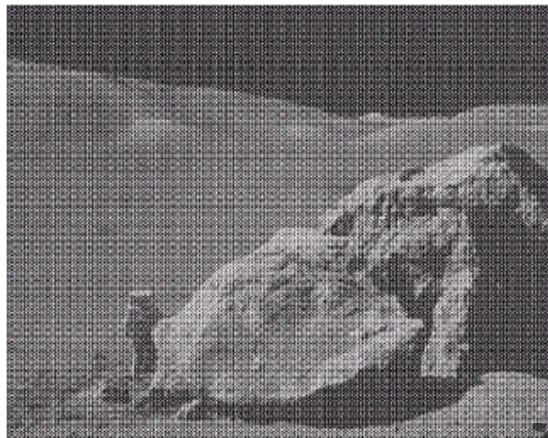


FIGURE 5.15 From left to right, perspective plots of ideal, Butterworth (of order 1), and Gaussian bandreject filters.

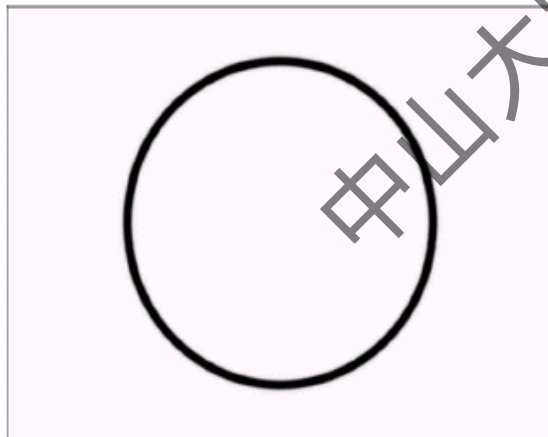
➤ 利用带阻滤波器消除周期性噪声



a	b
c	d

FIGURE 5.16

(a) Image corrupted by sinusoidal noise. (b) Spectrum of (a). (c) Butterworth bandreject filter (white represents 1). (d) Result of filtering. (Original image courtesy of NASA.)



布特沃斯带阻滤波器

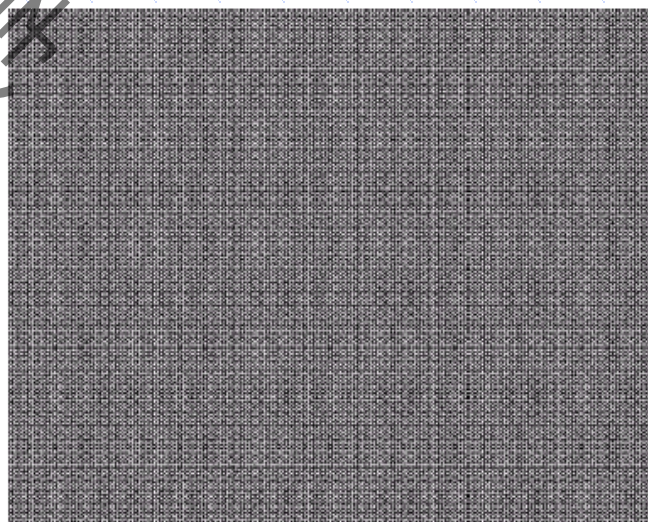
2 二维带通滤波器:

- 带通滤波器的传递函数 $H_{bp}(u, v)$ 可根据相应的带阻滤波器传递函数 $H_{br}(u, v)$ 定义.

$$H_{bp}(u, v) = 1 - H_{br}(u, v)$$

- 利用带通滤波器提取噪声模式:

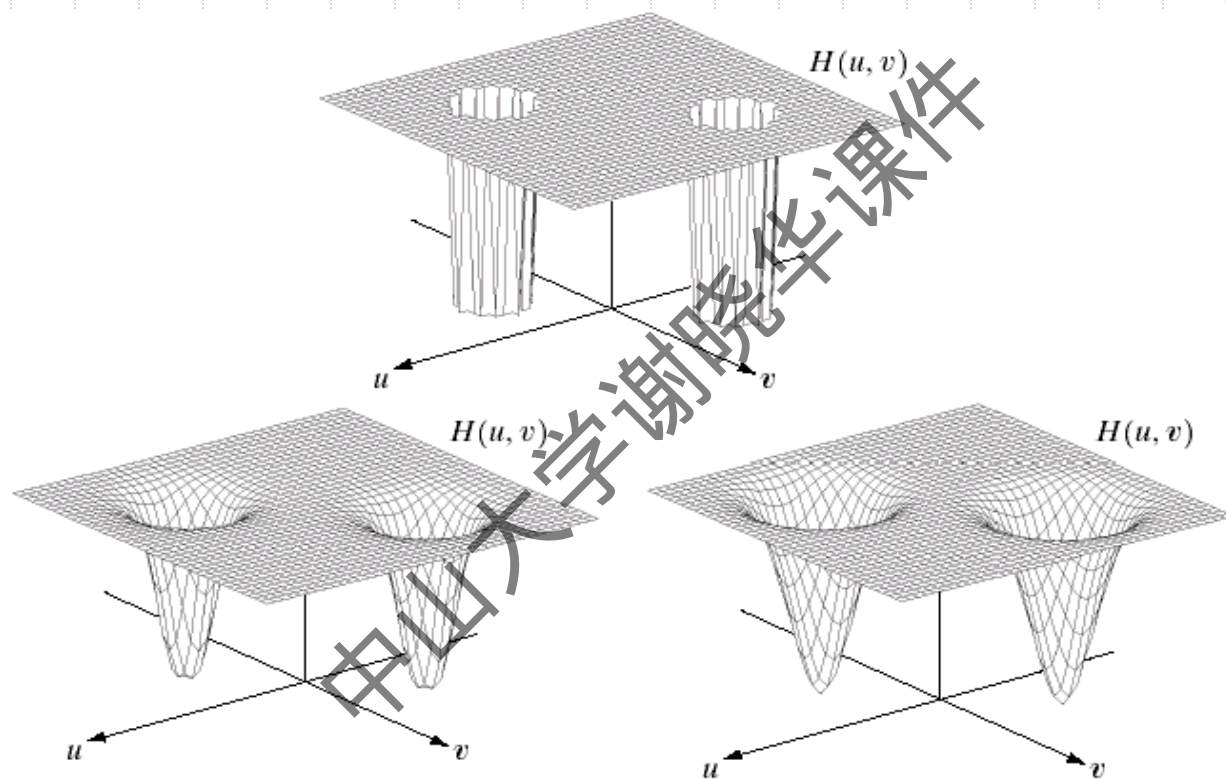
FIGURE 5.17
Noise pattern of
the image in
Fig. 5.16(a)
obtained by
bandpass filtering.



3 陷波滤波器:

- 陷波滤波器阻止(或通过)事先定义的中心频率邻域内的频率.
- 陷波滤波器分陷波带阻滤波器和陷波带通滤波器两大类.
- 陷波带阻滤波器又分为理想\巴特沃斯\高斯陷波带阻滤波器等.
- 陷波带通滤波器又分为理想\巴特沃斯\高斯陷波带通滤波器等.

陷波带阻滤波器:



a
b c

FIGURE 5.18 Perspective plots of (a) ideal, (b) Butterworth (of order 2), and (c) Gaussian notch (reject) filters.

➤ 半径为 D_0 中心在 (u_0, v_0) 和 $(-u_0, -v_0)$ 对称的理想陷波带阻滤波器传递函数为:

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & D_1(u, v) \leq D_0 \text{ 或 } D_2(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{其他} \end{cases}$$

其中, $D_1(u, v) = [(u - M/2 - u_0)^2 + (v - N/2 - v_0)^2]^{1/2}$
 $D_2(u, v) = [(u - M/2 + u_0)^2 + (v - N/2 + v_0)^2]^{1/2}$

➤ 半径为 D_0 中心在 (u_0, v_0) 和 $(-u_0, -v_0)$ 对称的 n 阶巴特沃斯陷波带阻滤波器传递函数为

$$: H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D_0^2}{D_1(u, v) D_2(u, v)} \right]^n}$$

其中, $D_1(u, v) = [(u - M/2 - u_0)^2 + (v - N/2 - v_0)^2]^{1/2}$

$$D_2(u, v) = [(u - M/2 + u_0)^2 + (v - N/2 + v_0)^2]^{1/2}$$

➤ 半径为 D_0 中心在 (u_0, v_0) 和 $(-u_0, -v_0)$ 对称的高斯陷波带阻滤波器传递函数为:

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{D_1(u, v) D_2(u, v)}{D_0^2} \right]}$$

其中, $D_1(u, v) = [(u - M/2 - u_0)^2 + (v - N/2 - v_0)^2]^{1/2}$

$$D_2(u, v) = [(u - M/2 + u_0)^2 + (v - N/2 + v_0)^2]^{1/2}$$

当 $u_0 = v_0 = 0$ 时, 上述三个滤波器变为高通滤波器.

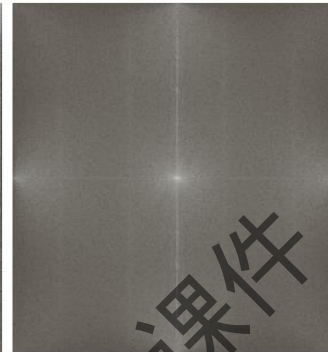
➤ 陷波带通滤波器的传递函数 $H_{np}(u, v)$ 可根据相应的陷波带阻滤波器传递函数 $H_{nr}(u, v)$ 定义.

$$H_{np}(u, v) = 1 - H_{nr}(u, v)$$

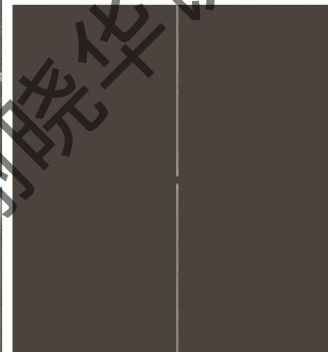
当 $u_0 = v_0 = 0$ 时, 陷波带通滤波器变为低通滤波器.

➤ 利用陷波滤波器消除周期性噪声

卫星图形
(有水平
扫描线)



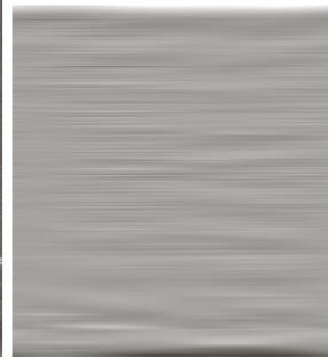
频率谱



频域滤波器



滤波结果



提取的噪声
(空间域)

当干扰成分不单一的时候，这种方法就很难执行。

需要多次尝试

4 最佳陷波滤波器

➤ 当 $G(u, v)$ 存在几种干扰时, 可以采用下面的方法:

1. 提取干扰模式的主频率成分:

对每个尖峰点, 设计一个陷波带通滤波器 $H(u, v)$

因此, $N(u, v) = H(u, v)G(u, v)$ 或

$$\eta(x, y) = F^{-1}\{H(u, v)G(u, v)\} \text{ 为噪声近似值}$$

2. 去除噪声:

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - w(x, y)\eta(x, y) \quad (5.4.13)$$

其中, $w(x, y)$ 为调制函数. 如何选择?

一种 $w(x, y)$ 的估计方法:

选取 $w(x, y)$ 使估计值 $\hat{f}(x, y)$ 在每一点 (x, y) 指定的邻域上方差最小.

考虑 (x, y) 的尺寸为 $(2a + 1) \times (2b + 1)$ 的邻域,
 $\hat{f}(x, y)$ 的局部方差为:

$$\sigma^2(x, y) = \frac{1}{(2a + 1)(2b + 1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b [\hat{f}(x + s, y + t) - \bar{\hat{f}}(x, y)]^2 \quad (5.4.14)$$

其中 $\bar{\hat{f}}(x, y)$ 是 $\hat{f}(x, y)$ 在其邻域内的平均值,即:

$$\bar{\hat{f}}(x, y) = \frac{1}{(2a + 1)(2b + 1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \hat{f}(x + s, y + t) \quad (5.4.15)$$

将公式(5.4.13) 代入公式(5.4.14) 中,得

$$\sigma^2(x, y) = \frac{1}{(2a+1)(2b+1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \{ [g(x+s, y+t) - w(x+s, y+t)\eta(x+s, y+t)] - [\bar{g}(x, y) - w(x, y)\eta(x, y)] \}^2 \quad (5.4.16)$$

假设 $w(x, y)$ 在整个邻域内保持不变, 则当 $-a \leq s \leq a$ 和 $-b \leq t \leq b$ 时, 给出近似式:

$$w(x+s, y+t) = w(x, y)$$

这一假设也可以在邻域内得出如下表达式:

$$\overline{w(x, y)\eta(x, y)} = \overline{w(x, y)}\overline{\eta(x, y)}$$

由近似值, (5.4.16) 变成:

$$\sigma^2(x, y) = \frac{1}{(2a+1)(2b+1)} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \{ [g(x+s, y+t) - w(x, y)\eta(x, y)] - [\overline{g(x, y)} - \overline{w(x, y)}\overline{\eta(x, y)}] \}^2 \quad (5.4.19)$$

将 $\sigma^2(x, y)$ 最小化, 解: $\frac{\partial \sigma^2(x, y)}{\partial w(x, y)} = 0$

对于 $w(x, y)$, 解为:

$$w(x, y) = \frac{\overline{g(x, y)\eta(x, y)} - \overline{g(x, y)}\overline{\eta(x, y)}}{\overline{\eta^2(x, y)} - \overline{\eta}^2(x, y)} \quad (5.4.21)$$

六 估计退化函数

有三种估计退化函数的方法：

(1). 观察法；(2). 实验法；(3). 数学建模法；

(1). 观察估计法：

用 $g_s(x, y)$ 定义观察子图像, 用 $\hat{f}_s(x, y)$ 表示构建子图像

$$H_s(u, v) = \frac{G_s(u, v)}{\hat{F}_s(u, v)}$$

由 $H_s(u, v)$ 推断 $H(u, v)$.

例如，习题**5.20**

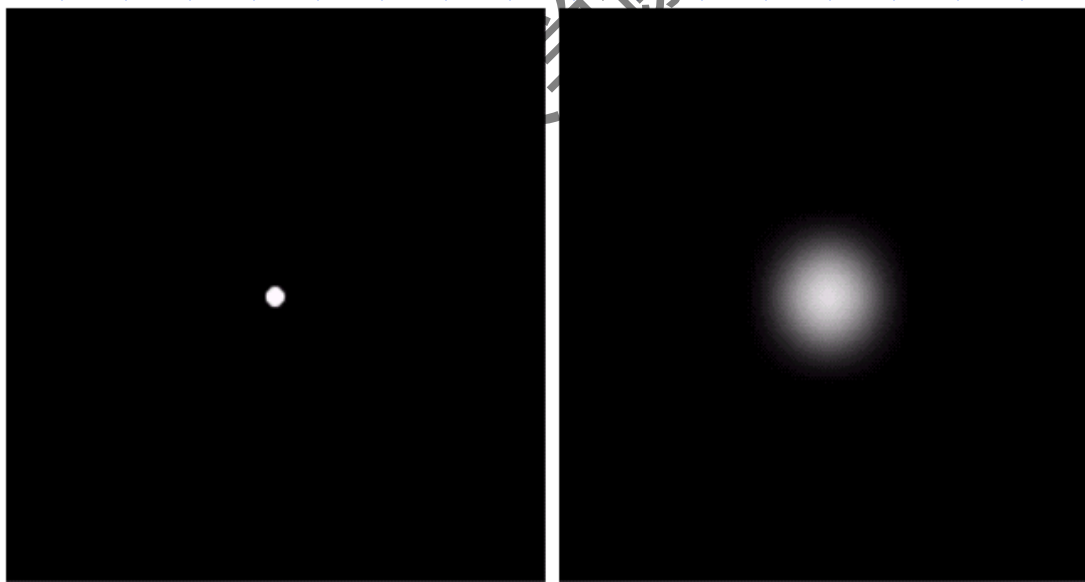
子图像应该容易复原，甚至用**Photoshop**手工操作

(2). 实验估计法:

获取与退化图像类似的装置, 由成像一个亮点得到退化的冲激响应.

$$A\delta(x, y) \rightarrow g(x, y) \Leftrightarrow A \rightarrow G(u, v)$$

故
$$H(u, v) = \frac{G(u, v)}{A}$$



a b

FIGURE 5.24

Degradation estimation by impulse characterization.

(a) An impulse of light (shown magnified).

(b) Imaged (degraded) impulse.

(3). 模型估计法（建立退化模型，如下例的运动模糊）：
假设图像 $f(x, y)$ 进行平面运动, $x_0(t)$ 和 $y_0(t)$ 分别是在 x 和 y 方向上的运动速度. 图像系统曝光时间为 T , 则

$$g(x, y) = \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt$$

$g(x, y)$ 为模糊图像.

于是

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T [f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt] e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \\ &= \int_0^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f[x - x_0(t), y - y_0(t)] e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \right] dt \\ &= \int_0^T F(u, v) e^{-j2\pi(ux_0(t)+vy_0(t))} dt \\ &= F(u, v) \int_0^T e^{-j2\pi(ux_0(t)+vy_0(t))} dt \end{aligned}$$

令

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

则 $H(u, v) = \int_0^T e^{-j2\pi(ux_0(t)+vy_0(t))} dt$

如果图像在x和y方向上分别以 $x_0(t) = at/T$ 和 $y_0(t) = bt/T$ 做均匀直线运动, 则当 $t=T$ 时

$$\begin{aligned} H(u, v) &= \int_0^T e^{-j2\pi(ux_0(t)+vy_0(t))} dt \\ &= \int_0^T e^{-j2\pi(ua+vb)t/T} dt \\ &= \frac{T}{\pi(ua+vb)} \sin[\pi(ua+vb)] e^{-j\pi(ua+vb)} \end{aligned}$$



a b

FIGURE 5.26 (a) Original image. (b) Result of blurring using the function in Eq. (5.6-11) with $a = b = 0.1$ and $T = 1$.

事实中运动速度经常不知道，需要尝试不同的 a, b, T

七 逆滤波

仅知道退化函数还不够，噪声还不知道

对于线性移不变系统的退化模型为：

► 频域： $G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$

如果知道 $H(u, v)$ ，则

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$

如果 $H(u, v)$ 的值很小，则 $\frac{N(u, v)}{H(u, v)}$ 的值将很大，估计就会失败。

注意， $H(0,0)$ 的频域值最大(可以只考虑 $(0,0)$ 周边)。

例子:滤波器 $H(u, v) = e^{-k(u^2+v^2)^{5/6}}$ 滤波的结果,
其中K与大气湍流的性质有关. 【模拟退化图像】

a b
c d

FIGURE 5.25

Illustration of the
atmospheric
turbulence model.

(a) Negligible
turbulence.

(b) Severe
turbulence,
 $k = 0.0025$.

(c) Mild
turbulence,
 $k = 0.001$.

(d) Low
turbulence,
 $k = 0.00025$.

(Original image
courtesy of
NASA.)



如果采用逆滤波的方法 $\frac{G(u,v)}{H(u,v)}$ 对上一页的退化图像去模糊处理。【直接逆滤波效果都不好！忽略了噪声】

a b
c d

FIGURE 5.27

Restoring Fig. 5.25(b) with Eq. (5.7-1). (a) Result of using the full filter. (b) Result with H cut off outside a radius of 40; (c) outside a radius of 70; and (d) outside a radius of 85.



选取不同的截止半径（全部、40、70、85）

八 最小均方误差滤波(维纳去卷积)

一般逆滤波(去卷积)的方法没有考虑噪声

当考虑退化 + 噪声, 在频域:

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

维纳滤波给出以下约束达到最小的一种频域滤波:

$$e^2 = E\{(f - \hat{f})^2\}$$

维纳滤波（去卷积）：

$$\begin{aligned}\hat{F}(u, v) &= \left[\frac{H^*(u, v) S_f(u, v)}{S_f(u, v) |H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v)} \right] G(u, v) \\ &= \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v) / S_f(u, v)} \right] G(u, v) \\ &= \left[\frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v) / S_f(u, v)} \right] G(u, v)\end{aligned}$$

考虑了噪声！

其中， $H(u, v)$ 退化函数， $H^*(u, v) = H(u, v)$ 的复共轭。

$S_f(u, v) = |F(u, v)|^2$ 为未退化函数功率谱。

事实上经常不知道！

$S_\eta(u, v) = |N(u, v)|^2$ 为噪声功率谱。

假设两个功率谱之比为常数，则简化为

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} \right] G(u, v)$$

事实上也不是很合理！

卷积操作可以重现表达为矩阵相乘

$$g = h * f \longrightarrow \bar{g}_e = H \bar{f}_e$$

- 要点：
- 1、图像 f 转化为向量 \bar{f}_e （逐行相接）；
 - 2、 H 为 h 的循环展开（ $M \times N$ 变为 $MN \times MN$ ）；

例：

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} B=2 \\ A=3 \end{matrix}$$

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} D=4 \\ C=2 \end{matrix}$$

(1) 周期延拓

$$M = A + C - 1 = 3 + 2 - 1 = 4$$

$$N = B + D - 1 = 2 + 4 - 1 = 5$$

$$f_e = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad N=5$$

$$M=4$$

$$h_e = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ d & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad N=5$$

$$M=4$$

$$j = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

(2) h_e 每一行构造循环矩阵

$$H_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_d = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 & 7 & 6 \\ 6 & 5 & 0 & 8 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 0 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$H_b = H_c = 0$$

(3) 循环矩阵再循环

$$H = \begin{bmatrix} H_a & H_b & H_c & H_d \\ H_d & H_a & H_b & H_c \\ H_c & H_d & H_a & H_b \\ H_b & H_c & H_d & H_a \end{bmatrix}$$

(4) 图像向量化

$$\begin{array}{c} M \times N (4 \times 5 = 20) \text{ 维列向量} \\ \vec{f}_e = [14000 \quad 25000 \quad 36000 \quad 00000]^T \end{array}$$

(5) 相乘

$$\vec{g}_e = H \vec{f}_e$$

$$\begin{array}{c} M \times N (4 \times 5 = 20) \text{ 维列向量} \\ \vec{g}_e = [g_{00} g_{01} g_{02} g_{03} g_{04} g_{10} g_{11} g_{12} g_{13} g_{14} g_{20} g_{21} g_{22} g_{23} g_{24} g_{30} g_{31} g_{32} g_{33} g_{34} g_{40} g_{41} g_{42} g_{43} g_{44}]^T \end{array}$$

十 约束最小二乘方滤波器

考虑离散退化模型如下：

$$g = Hf + \eta$$

卷积写成矩阵相乘

在平滑约束下，等同于找最小的准则函数：

$$C = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\nabla^2 \hat{f}(x, y)]^2$$

其约束为：

$$\|g - H\hat{f}\|^2 = \|\eta\|^2$$

其中： $\|w\|^2 = w^T w$, \hat{f} 是未退化图像的估计值。

其最优解为：

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma |P(u, v)|^2} \right] G(u, v)$$

其中 γ 为参数, $\gamma=0$ 时, 上式退化为逆滤波器。

由于拉普拉斯算子是线性算子。

$$\nabla^2 f(x, y) = [f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1)] - 4f(x, y)$$

因此拉普拉斯算子的变换核为:

$$p(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$P(u, v)$ 是 $p(x, y)$ 的 **Fourier** 变换.

参数 γ 估计方法（也可以通过多次手工调优）：

令 $\|r\|^2 = \|g - H\hat{f}\|^2$

r 是 γ 的单调递增函数（前面解知道 $\hat{F}(u, v)$ 是 γ 的函数）

估计参数 γ , 使 $\|r\|^2 = \|\eta\|^2 \pm a$ (*)

其中, a 为给定的精度因数（ $a=0$ 最佳）.

具体算法：

- 1). 给定 γ 值,
- 2). 计算 $\|r\|^2$
- 3). 如果(*)满足, 则停止. 否则如果 $\|r\|^2 < \|\eta\|^2 - a$, 增加 γ ;
如果 $\|r\|^2 > \|\eta\|^2 + a$, 减小 γ , 并回到步骤2).

参数 $\|\eta\|^2$ 估计方法:

由于 $\sigma_\eta^2 = \frac{1}{MN} \sum_{x=1}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\eta(x, y) - m_\eta]^2$

其中 $m_\eta = \frac{1}{MN} \sum_{x=1}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \eta(x, y)$

因此 $\sigma_\eta^2 = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\eta^2(x, y) - 2\eta(x, y)m_\eta + m_\eta^2]$

$$= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \eta^2(x, y) - \frac{2m_\eta}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \eta(x, y) + m_\eta^2$$

$$= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \eta^2(x, y) - m_\eta^2$$

于是

$$\|\eta\|^2 = MN[\sigma_\eta^2 + m_\eta^2]$$

十一. 几何均值滤波

通用滤波器的形式:

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2} \right]^a \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \beta \left[\frac{S_\eta(u, v)}{S_f(u, v)} \right]} \right]^{1-\alpha}$$

其中a和b为实参数.

当 $\alpha = 1$ 时, 滤波器退化为逆滤波器.

当 $\alpha = 0$ 时, 滤波器退化为参数维纳滤波器.

当 $\alpha = 0, \beta = 1$ 时, 滤波器退化为标准维纳滤波器.

当 $\alpha = 1/2$, 滤波器为几何均值滤波器.

当 $\beta = 1, \alpha$ 减到 $1/2$ 以上, 它接近逆滤波器.

当 $\beta = 1, \alpha$ 减到 $1/2$ 以下, 它接近维纳滤波器.

当 $\beta = 1, \alpha = 1/2$, 它被称为谱均衡滤波器.

十一. 图像复原效果评估指标

均方误差:

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x, y) - \hat{f}(x, y)]^2$$

越小越好

空间域信噪比:

$$SNR = \frac{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \hat{f}^2}{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x, y) - \hat{f}(x, y)]^2}$$

越大越好

十一. 图像复原效果评估指标

峰值信噪比:

$$PSNR = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{MAX_I^2}{MSE} \right)$$

MAX_I 表示图像点颜色的最大数值，PSNR越大越好

优的MSE、SNR、PSNR未必对应好的视觉效果！

作业（第三版教材，要抄题）：

10月30日交

5.11

5.12

5.18

5.20

5.22

中山大学谢晓华课件